Republique Arabe d'Egypte
Ministere de L'Education et
de L'Enseignement
Enseignement technique
Administration central des
affaires de livres

Mathématiques pures

Deuxième secondaire

Livre de l'élève deuxième semestre

Section scientifique

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh
M. Cerafiem Elias Skander
M. Magdy Abdelfatah Essafty
M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Révisé par

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Adel Mohmed Hamza
M. Nasser Saad Zaghlou

2019 - 2020

Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maitre.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Unité 3

Différentiation et Intégration

Unité 4

Trigonométrie

Épreuves générales et Réponse

Unité 1

Suites et Séries

Introduction de l'unité

Fibonacci (1170 - 1250)

Fibonacci est né à Pise en Italie. Il a reçu son enseignement de base en Algérie. Il a transmis en Europe, les chiffres arabes, les puissances algébriques et le système décimal utilisé actuellement et préféré au système romain répandu en Europe à cette époque. L'une des questions célèbres de ses œuvres est la suite des nombres suivants : (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,.......)

cette suite est connue par le nom de Fibonacci jusqu'au temps actuel.

Dans cette suite, on remarque que, chaque nombre à partir du troisième terme est la somme des deux termes qui le précèdent. On peut déterminer la règle de cette suite par la formule suivante :

$t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$

La liste des nombres de Fibonacci a été utilisée pour l'analyse des marchés financiers et dans des algorithmes informatiques comme la technique de Fibonacci qui est une méthode de recherche d'un tableau trié en utilisant un diviser et conquérir algorithme qui rétrécit emplacements possibles à l'aide de nombres de Fibonacci, cette technique est également utilisée dans des affaires biologiques comme les tiges des arbres et l'arrangement des feuilles sur la tige ainsi que l'arrangement de cône de l'arbre de pine………...etc

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître le concept de suite
- Distinguer le concept de suite et celui de la série.
- Reconnaitre la suite arithmétique
- Déduire le terme général d'une suite arithmétique et le modéliser sous plusieurs formes.
- Déterminer la moyenne d'une suite arithmétique
- Reconnaitre la série finie et la série infinie
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite arithmétique sous plusieurs formes.
- Reconnaitre la suite géométrique
- Déduire le terme général d'une suite géométrique
- Déterminer la moyenne d'une suite géométrique
- Déduire la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométriques de deux nombres positifs distincts.
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite géométrique.
- Calculer la somme d'une suite géométrique infinie.
- transformer la fraction décimale en fraction ordinaire
- Modéliser des problèmes quotidiens en utilisant les suites arithmétiques et les suites géométriques comme dans le cas de la population.
- Appliquer les séries dans des problème de la vie courante
- Utiliser l'ordinateur pour résoudre des problèmes sur les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Vocabulaires de base

- Fonction
- terme
- Suite finie
- Suite infinie
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Série
- Symbole de la somme
- Suite arithmétique
- Raison de la suite arithmétique
- Moyennes arithmétiques
- Série arithmétique
- Suite géométrique
- Raison de la suite géométrique
- Moyennes géométriques
- Série géométrique
- Série géométrique infinie
- Infini

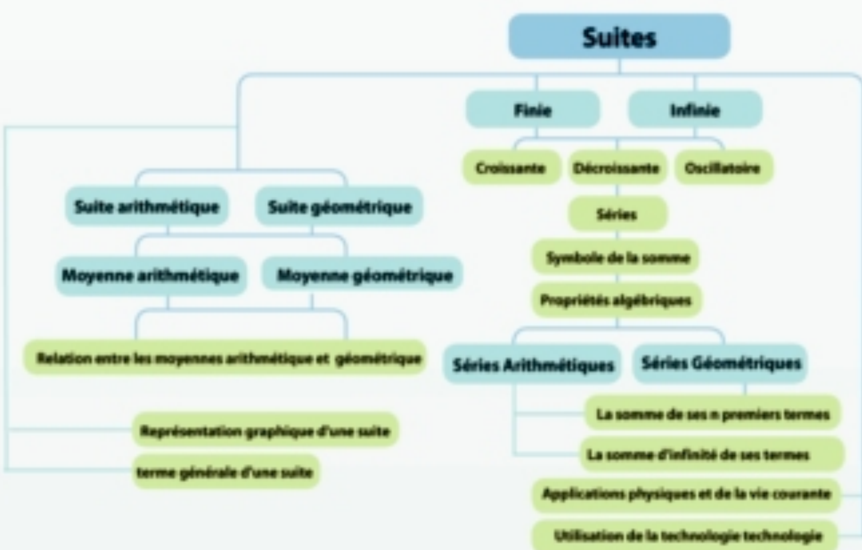
Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Suites.
Leçon (1 - 2): Séries et Symbole de la somme.
Leçon (1 - 3): Suites arithmétiques .
Leçon (1 - 4): Séries arithmétiques .
Leçon (1 - 5): Suites géométriques.
Leçon (1 - 6): Séries géométriques

Aide pédagogique

Calculatrice scientifique - Logiciel de graphisme.

Organigramme de l'unité



Unité 1

Suites

1 - 1

Allez apprendre

- La définition de la suite
- La suite finie et la suite infinie
- Le terme général de la suite
- La représentation graphique d'une suite
- La série et le symbole de la somme

Vocabulaires de base

- Suite
- Suite finie
- Suite infinie
- terme
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Suite constante

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Préeliminaire:

Vous avez déjà étudiez les patterns comme (1; 3; 5; 7; ...). On sait que le pattern numérique est arrangement d'un ensemble des nombres réels. Dans cette unité, nous allons aborder les patterns d'une étude plus approfondie

Réfréchissez et discutez

Etudiez le pattern suivant puis répondez aux questions (1; 4; 7; 10;...)

1) Quelle est la relation entre un terme et le terme qui lui précède ?

2) Pouvez-vous déterminer les deux termes suivants dans ce pattern ?

3) Pouvez-vous trouver le neuvième terme dans ce pattern sans écrire tous les termes précédents ?

Rappelez-vous

La fonction est une relation entre deux ensemble X et Y tels que chaque élément de X apparait une et une seule fois comme première projection d'un couple du graphe de la relation

A apprendre

Définition 1

➢ La suite est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble (ou un sous-ensemble) des nombres entiers relatifs positifs $\mathbb{Z}^+$. Son ensemble image est un sous-ensemble de l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$. On note le premier terme par t_1, le deuxième terme par t_2, le troisième par t_3 …. etc. le terme général par t_n . On peut exprimer la suite en écrivant ses termes entre parenthèses comme ce qui suit :

$(t_1 , t_2 , t_3 , ... , t_n)$

Elle est notée (t_n).

Remarques

(1)Les termes de la suite sont les images des éléments de l'ensemble de définition de la suite..

(2)Le symbole (t_n) représente une suite tandis que le symbole t_n représente le nième terme. n^{th} term.

(3) l'ordre des termes de la suite est indispensable tandis que l'orde des éléments de l'ensemble n'a pas d'importance.

(4) Il ne faut pas répéter un même élément plusieurs fois quand on écrit liste d'un ensemble tandis que les termes de la suit peuvent être répètes .

Définition :

Suite finie et Suite infinie

Une suite est finie si le nombre de ses termes est fini (**c.-à-d. on peut les compter**) et une suite est infinie si le nombre de ses termes est infini (**une infinité de termes qu'on ne peut pas les compter**)

Exemple

1 Déterminez les suites qui ont le nième terme donné par la formule suivante:

a $t_n = n^2 - 1$ (cinq termes à partir du premier terme)

b $t_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (une infinité de termes à partir du premier terme)

Solution

a Posons n = 1 alors $t_1 = (1)^2 - 1 = 0$, Posons n = 2 alors $t_2 = (2)^2 - 1 = 3$,
Posons n = 3 alors $t_3 = (3)^2 - 1 = 8$, Posons n = 4 alors $t_4 = (4)^2 - 1 = 15$,
Posons n = 5 alors $t_5 = (5)^2 - 1 = 24$

La suite est : (0 ; 3 ; 8 ; 15 ; 24)

b Posons n = 1 alors $t_1 = \frac{(-1)^1}{2\times1+1} = \frac{-1}{3}$, Posons n = 2 alors $t_2 = \frac{(-1)^2}{2\times2+1} = \frac{1}{5}$,
Posons n = 3 alors $t_3 = \frac{(-1)^3}{2\times3+1} = \frac{-1}{7}$, Posons n = 4 alors $t_4 = \frac{(-1)^4}{2\times4+1} = \frac{1}{9}$,
Posons n = 5 alors $t_5 = \frac{(-1)^5}{2\times5+1} = \frac{-1}{11}$

La suite est : $(\frac{-1}{3} ; \frac{1}{5} ; \frac{-1}{7} ; \frac{1}{9} ; \frac{-1}{11} ; ....)$. Dans ce cas la suite est appelée une suite oscillatoire (l'un de ses termes est positif et l'autre est négatif ou réciproquement).

Essayer de résoudre

1 Déterminez les suites qui ont le nième terme est donné par la formule suivante:

a $t_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ (une infinité de termes à partir du premier terme)

b $t_n = \sin\frac{\pi}{n}$ (cinq termes à partir du premier terme)

Terme général d'une suite:

Le terme général d'une suite (appelé le nième terme) s'écrit t_n où t_n est l'image de l'élément du rang n dans l'ensemble de définition de la suite, parfois on peut le déterminer à partir de quelques termes donnés de la suite.

Par exemple:

- Le terme général de la suite de nombres pairs : (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; ...) est $t_n = 2n$
- Le terme général de la suite de nombres impairs :(1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...) est $t_n = 2n - 1$
- Le terme général de la suite :$(\frac{-1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{-1}{5} ; \frac{1}{6} ; ......)$ est $t_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

Exemple

2 Ecrivez les cinq premiers termes de la suite (t_n) définie par:

$t_1 = 2$ et $t_{n+1} = 2t_n$ pour $n \geqslant 1$

Solution

Enrichissez vos connaissance

Quelques suites n'ont pas de règle définie comme la suite des nombres premiers (2; 3; 5; 7;....)

Par substitution respective de n par les valeurs : 1; 2; 3; 4; 5 dans la relation. $t_{n+1} = 2\,t_n$

Posons $n = 1$ $t_2 = 2\,t_1$ **d'où** $t_2 = 2 \times \mathbf{2} = 4 = 2^2$

(Par substitution de $t_1 = 2$)

Posons $n = 2$ $t_3 = 2\,t_2$ **d'où** $t_3 = 2 \times \mathbf{4} = 8 = 2^3$ (Par substitution de $t_2 = 4$)

Posons $n = 3$ $t_4 = 2\,t_3$ **d'où** $t_4 = 2 \times \mathbf{8} = 16 = 2^4$ (Par substitution de $t_3 = 8$)

Posons $n = 4$ $t_5 = 2\,t_4$ **d'où** $t_5 = 2 \times \mathbf{16} = 32 = 2^5$ (Par substitution de $t_4 = 16$)

Les cinq premiers termes de la suite sont **:** (**2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32**)

Le terme général de la suite (t_n) est: $t_n = 2^n$

Réfléchissez:

1- Comment peut-on vérifier la solution précédente ?

Essayer de résoudre

(2) Ecrivez les six premiers termes de la suite (t_n) définie par: $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ pour $n \geqslant 1$, $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$

Suite croissante et Suite décroissante:

Observez les suites suivantes :

1) $(-5\,;\,-1\,;\,3\,;\,7\,;\,11\,;\,15\,;\,.........)$ **(Que remarquez-vous ?)**

2) $(4\,;\,2\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{8}\,;\,.........)$ **(Que remarquez-vous ?)**

- **Dans la première Suite :** $-1 > -5$ d'où $t_2 > t_1$, $3 > -1$ d'où $t_3 > t_2$ ... etc. pour les autre termes. C'est-à-dire que chacun des termes est plus grand que son terme précédent.
- **Dans la deuxième Suite :** $2 < 4$ d'où $t_2 < t_1$, $1 < 2$d'où $t_3 < t_2$ ... etc. pour les autre termes. C'est-à-dire que chacun des termes est plus petit que son terme précédent.

Définition :

- La suite (t_n) est **croissante si** $t_{n+1} > t_n$
- La suite (t_n) est **est décroissante si** $t_{n+1} < t_n$

Enrichissez vos connaissances

La suite constante : est une suit dont tous les termes sont égaux . C'est à dire que $t_n = a$. Elle peut être finie ou infinie

Exemple

(3) Parmi les suites (t_n) déterminez celle qui est croissante et celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante :

a $t_n = 2n + 3$ **b** $t_n = \frac{1}{3n-1}$ **c** $t_n = \frac{(-1)^n}{2n} + 4$

Solution

a On trouve t_{n+1} comme suivant: $t_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$

Puis, on trouve: $t_{n+1} - t_n$: $t_{n+1} - t_n = (2n+5) - (2n+3) = 2 > 0$

$t_{n+1} > t_n$ pour toutes les valeurs de n, cela veut dire que la suite est croissante.

b **On trouve** t_{n+1} comme suivant : $t_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)-1} = \frac{1}{3n+2}$

Puis, on trouve: $t_{n+1} - t_n$: $t_{n+1} - t_n = \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n-1} = \frac{3n-1-3n-2}{(3n+2)(3n-1)}$

$$= \frac{-3}{(3n+2)(3n-1)} < 0$$

$t_{n+1} < t_n$ pour toutes les valeurs de n, cela veut dire que la suite est décroissante.

c $t_{n+1} - t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{(-1)^n}{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

$$= (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}\right] = (-1)^{n+1}\left[\frac{n+n+1}{2n(n+1)}\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right]$$

Cette expression est négative lorsque n est impair et positive lorsque n est pair, cela veut dire que la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Essayer de résoudre

3) Parmi les suites (t_n) déterminez celle qui est croissante et celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante .

a $t_n = \frac{2}{n} - 3$ **b** $t_n = (\frac{1}{2})^n$ **c** $t_n = (-2)^n$

Exercices (1 - 1)

Complétez:

1) La suite est une fonction dont l'ensemble de définition est .... ou ....

2) Le septième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2n^2 + 3$ est ....

3) Le quatrième terme de la suite (t_n) où $t_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est ....

4) Dans la suite (t_n) où $t_{n+1} = n\,t_n$, pour $n \geqslant 1$. Si $t_1 = 1$ alors $t_2 =$ ....

5) Dans la suite (t_n) où $t_n = 3n^2 - 1$ si $t_n = 74$, pour n = ...

6) Le nième terme de la suite (1 ; 8 ; 27 ; 64 ; .....) est ....

7) Le nième terme de la suite (- 1 ; 4 ; - 9 ; 16 ; ....) est ....

Complétez ce qui suit en utilisant l'un des symboles : > , < ou =

8 Une suite est décroissante si : t_{n+1} .... t_n pour tout $n \geqslant 1$

9 Une suite est constante si : t_{n+1} .... t_n pour tout $n \geqslant 1$

10 Une suite est croissante si : t_{n+1} ....t_n pour tout $n \geqslant 1$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

11 La suite dont le nième terme $t_n = \frac{2}{n} - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$ est une suite:

a croissante
b décroissante
c constante
d oscillatoire

12 Le terme général de la suite ((2 × 3) , (3 × 4) , (4 × 5) , (5 × 6) , ...) est:

a $(n-1)(n+1)$
b $n(n+1)$
c $2n(n+1)$
d $(n+1)(n+2)$

Répondez aux questions suivantes:

13 Déterminez parmi les suites suivantes celle qui est finie et celle qui est infinie:

a $(1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ ......)$

b $(3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ ......\ ;\ 21)$

c La suite (t_n) où $t_n = n^2 - 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$

d La suite (t_n) où $t_n = \frac{2}{n} + 3$, $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$

14 Dans chacun des cas suivant , écrivez les cinq premiers termes de la suite dont le terme général est donné par la règle :

a $t_n = n + n^2$
b $t_n = \frac{1}{2n-5}$
c $t_n = (\frac{1}{3})^n$
d $t_n = \sin(\frac{n}{4}\pi)$
e $t_n = (-1)^n (n-2)^2$
f $t_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

15 Ecrivez le terme général de chacune des suites suivante :

a $(2\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 11\ ;\ ....)$
b $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{4}{5}\ ;\ ....)$
c $(1\ ;\ 8\ ;\ 27\ ;\ 64\ ;\ ..)$
d $(1\ ;\ \frac{1}{10}\ ;\ \frac{1}{100}\ ;\ \frac{1}{1000}\ ;\ ....)$
e $(-1\ ;2\ ;-4\ ;8\ ;-16\ ;\ ....)$
f $(\cos\frac{\pi}{3}\ ;\ \cos\frac{2\pi}{3}\ ;\ \cos\pi\ ;\ \cos\frac{4\pi}{3}\ ;\ ....)$

16 Parmi les suites (t_n) déterminez celle qui est croissante et celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante:

a $t_n = 3n + 5$
b $t_n = \frac{1}{n} + 2$
c $t_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$
d $t_n = (-1)^n (n^2 + 1)$

(17) **En lien avec le sport :** Karim pratique le sport 8 minutes au premier jour, puis il augmente 2 minutes par jour.

- **a** Ecrivez les cinq premiers termes de cette suite.
- **b** Déterminez le terme général de cette suite.
- **c** Déterminez le temps que Karim fait au septième jour
- **d** Auquel jour Karim fait une demi heure? Expliquez votre réponse.

(18) **Décelez l'erreur :**

- **a** Une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{Z}$ est une suite.
- **b** Une fonction dont l'ensemble de définition est $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$ est une suite infinie.
- **c** Si (t_n) est une suite telle que $t_n = n^2$ alors $t_n > t_{n+1}$

(19) **Réflexion créative :** Soit une suite (t_n) telle que $t_1 = 9$, $t_3 = 36, t_{n+1} = t_n + n\,x$, trouvez la valeur de x.

Activité

1- Soit une suite $(t_n) = (1; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ...)$.

- **a** Observez les termes de la suite puis déterminez le huitième et neuvième termes.
- **b** Représentez graphiquement les neuf premiers termes de la suite.
- **c** Cette suite est-elle croissante ou décroissante ou n'est ni croissante ni décroissante ? Vérifiez votre réponse.
- **d** Ecrivez la règle de cette suite.
- **d** Cherchez des informations et des exemples sur la suite de Fibonacci sur le WEB et le site (www.go.hrw.com Fibonacci) .

Unité 1

1 - 2 Séries et Symbole de la somme

Allez apprendre

- Notion de la série
- Série finie
- Série infinie
- Propriétés algébrique de la somme

Vocabulaires de base

- Série
- Série finie
- Série infinie
- Symbole de la somme

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Rappelez-vous

Dans notre langage quotidien, on utilise les deux mots « suite » et « série comme deux mots synonymes. Malgré la forte ressemblance de deux mots dans le langage courant, il existe une différence dans le sens de deux mots en mathématiques, le premier exprime une liste ordonnée des nombres tandis que la série est l'opération de l'addition des termes de la suite.

For Exemple: $(2\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 11\ ;\ ...)$ est une suite, mais $2+5+8+11+...$ est la série reliée par la suite précédente. On peut utiliser le symbole "Σ" qui se lit (sigma) pour écrire la série en forme simple.

A apprendre

Définition 4

Série finie

s'écrit sous la forme: $t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_r + ... + t_n$

Oú n est un nombre entier, tn est le terme du rang n dans la série la valeur numérique de la série finie est appelée la somme des termes de la suite correspondante.

par eocemple la série finie: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r\ ... + a_n$ peut s'écrire sous la forme $\sum\limits_{r=1}^{n} (a_r)$ qui se lit la somme a_r de r = 1 à r = n

Exemple

1. Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis calculez la somme.

a $\sum\limits_{r=1}^{4} (r^2)$ **b** $\sum\limits_{r=1}^{7} (2r - 1)$ **c** $\sum\limits_{r=1}^{n} (\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r})$

Solution

a $\sum\limits_{r=1}^{4} (r^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

b $$\sum\limits_{r=1}^{7} (2r - 1) = (2\times1-1)+(2\times2-1)+(2\times3-1)+(2\times4-1)$$
$$+(2\times5-1)+(2\times6-1)+(2\times7-1)$$
$$=1+3+5+7+9+11+13=49$$

c $$\sum\limits_{r=1}^{n} (\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{1}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$$
$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1-n-1}{n+1} = \frac{-n}{n+1}$$

Essayer de résoudre

1. Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis calculez la somme.

a) $\sum_{r=1}^{5} (1 + r^2)$ b) $\sum_{r=1}^{9} (3r + 2)$ c) $\sum_{r=1}^{n} (\frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+1})$

Série infinie

On ne peut pas compter les nombres de termes de la série infinie, par exemple la série: $-3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots$ s'écrit sous la forme of $\sum_{r=1}^{\infty} (-3)^r$.
Le symbole ∞ exprime l'infinité de la somme.

Exemple

2. Utilisez le symbole de la somme Σ pour exprimer la série: $2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots$

Solution

$\because$ Le terme général de la suite est : $t_r = (r + 1)(r + 2)$ pour $r \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} (r + 1)(r + 2)$

Essayer de résoudre

2. Utilisez le symbole de la somme Σ pour exprimer la série:
$1 \times 2 \times 3 + 3 \times 4 \times 5 + 5 \times 6 \times 7 + \dots$

Propriétés algébrique de la somme:

1- Soient (t_r) et (e_r) deux suites, Pour $n \in \mathbb{Z}^+$ et $C \in \mathbb{R}$, on a:

a) $\sum_{r=1}^{n} C = Cn$ b) $\sum_{r=1}^{n} ct_r = c \sum_{r=1}^{n} t_r$

c) $\sum_{r=1}^{n} (t_r \pm e_r) = \sum_{r=1}^{n} t_r \pm \sum_{r=1}^{n} e_r$

2- $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exemple

3. Calculez par de méthodes différentes $\sum_{r=1}^{4} (3 - 2r + r^2)$

Solution

1- Première méthode (Par substitution)

$$\sum_{r=1}^{4} (3 - 2r + r^2) = (3 - 2 \times 1 + 1^2) + (3 - 2 \times 2 + 2^2) + (3 - 2 \times 3 + 3^2) + (3 - 2 \times 4 + 4^2)$$
$$= 2 + 3 + 6 + 11 = 22$$

2- Deuxième méthode (En utilisant les propriétés de la somme)

$$\sum_{r=1}^{4}(3-2r+r^2)=\sum_{r=1}^{4}3-2\sum_{r=1}^{4}r+\sum_{r=1}^{4}r^2$$

$$=3\times4-2\times\frac{4\,(4+1)}{2}+\frac{4\,(4+1)\,(2\times4+1)}{6}$$

$$=12-2\times\frac{4\times5}{2}+\frac{4\times5\times9}{6}$$

$$=12-20+30=22$$

Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer le résultat d'une série:

- On appuie sur la touche Σ suivant la couleur de la touche d'opération.
- On écrit la règle de la série $(3-2r+r^2)$ comme suivant:

  3 – 2 ALPHA ((×) + ALPHA ((×) x^2

- On utilise la touche (REPLAY) pour déplacer le curseur comme la figure:
- On écrit le rang du dernier terme de la série 4 en haut
- On écrit le rang du terme du début qui est dans l'exemple 1 en bas
- On appuie sur la touche = pour afficher le résultat 22.

Essayer de résoudre

(3) Calculez par de méthodes différentes $\sum_{r=1}^{5}(2r^2-3r+5)$ sachant que:

$$\sum_{r=1}^{n}r=\frac{n\,(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Exercices (1 - 2)

(1) Complétez ce qui suit:

a) En utilisant le symbole de la somme, la suite $5+10+15+20+\ldots+50$ s'écrit ....

b) En utilisant le symbole de la somme, la suite $7\times1+7\times2+7\times3+\ldots+7\times20$ s'écrit ....

c) En utilisant le symbole de la somme, la suite $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots$ s'écrit ....

d) En utilisant le symbole de la somme, la suite $9+99+999+9999+\ldots$ à n termes s'écrit ....

(2) Ecrivez les séries suivantes en utilisant le symbole de la somme:

a) $1+2+3+4+5+\ldots\ldots+20$

b) $2+4+6+8+10+\ldots\ldots+60$

c) $3+6+9+12+15+18+21$

d) $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$

e) $1+4+9+16+\ldots\ldots+64$

f) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots+\frac{1}{50}$

(3) Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes:

a) $\sum_{r=1}^{5}(3r-2)$

b) $\sum_{r=1}^{8}((-1)^r+4r)$

c) $\sum_{r=1}^{\infty}\left((\frac{1}{2})^r - 1\right)$ d) $\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$

4) Sachant que $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, Calculez la valeur de chacun de ce qui suit en utilisant le symbole de la somme :

a) $\sum_{r=8}^{12} 2(r+5)$ b) $\sum_{r=5}^{8} (2r^2 - 3r)$

5) **Décelez l'erreur :**

a) La série est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble (ou un sous-ensemble) des entiers positifs.

b) $\sum_{r=0}^{5} (2r+1) = 1+3+5+7+9$

6) **En lien avec l'exploitation minière:** Une mine d'or a produit 4200 kg d'or le premier an. La production diminue 10 % annuellement. Ecrivez les cinq premiers termes de la suite de production, puis trouvez leur somme.

7) **En lien avec la géométrie:** La figure ci-contre représente un triangle équilatéral de 32 cm de côté. Des milieux de ces côtés, on trace un triangle. De même, on trace le troisième triangle……….etc.

a) Ecrivez la série qui représente les périmètres des triangles obtenus en utilisant le symbole de la somme.

b) Déterminez le périmètre du quatrième triangle.

c) Trouvez en centimètre la somme des périmètres de quatre premiers triangles.

8) **En lien avec la technologie:** Karim utilise le courrier électronique pour envoyer un message aux trois de ses amis. Chacun de ses amis envoie le même message aux trois autres amis, ainsi de suite (Sachant que chacun reçoit le message une seule fois)

a) Ecrivez la série en utilisant le symbole de la somme.

b) Trouvez le nombre de personnes qui ont reçu le message à la cinquième étape

c) Trouvez le nombre de personnes qui ont circulé le message jusqu'à la cinquième étape.

Suites arithmétiques

1 - 3

Allez apprendre

- La définition de la suite arithmétique
- Représentation graphique de la suite arithmétique
- Le nième terme de la suite arithmétique
- Détermination de la suite arithmétique
- Définition de la moyenne arithmétique
- Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres

Vocabulaires de base

- Modèle
- Suite arithmétique
- nième terme
- la raison d'une suite arithmétique
- le rang d'un terme
- la moyenne arithmétique

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Doaa a commencé la lecture d'un romain, elle a lu 10 pages au premier jour, 15 pages au deuxième jour et 20 pages au deuxième jour. Si elle a continu à cette façons, alors le nombre de pages lues chaque jour représente une suite qui est: **(10 ; 15 ; 20 ; 25 ; ...)**

Que remarquez-vous dans cette suite ?

Définition 1

Suite arithmétique:
C'est une suite dont la différence entre un terme et le terme précédent est une valeur constante qui appelée la raison de la suite et on le note (r).
C'est-à-dire: $r = t_{n+1} - t_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$

Exemple

1 Laquelle parmi les suites suivantes est une suite arithmétique? Pourquoi ?

a (7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19)

b (27 ; 23 ; 19 ; 15 ; 11; .....)

c $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6})$

Enrichissez vos connaissances

Suite Harmonique Une suite est dite Harmonique si les inverses de ces termes est une suite arithmétique, comme $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{7} ; ...)$

Solution

a $\because t_2 - t_1 = 10 - 7 = 3$, $t_3 - t_2 = 13 - 10 = 3$, ...

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 3$

$\therefore$ la suite est arithmétique de raison $= \mathbf{3}$

b $\because t_2 - t_1 = 23 - 27 = -4$, $t_3 - t_2 = 19 - 23 = -4$, ...

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = -4$

$\therefore$ la suite est arithmétique de raison = **- 4**

c $\because t_2 - t_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, $t_3 - t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

$\therefore t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

$\therefore$ **la suite n'est pas arithmétique**

Essayer de résoudre

(1) Laquelle parmi les suites suivantes est arithmétique? Pourquoi?

a (38 ; 33 ; 28 ; 23 ; 18; ...) **b** (- 14 ; - 8 ; - 2 ; 4 ; 10) **c** (23 ; 28 ; 33 ; 38 ; 42)

Exemple

(2) Déterminez laquelle parmi les suites dont le nième terme est donné ci-après : est une suite arithmétique et laquelle n'est pas une suite arithmétique, puis déterminez la raison dans le cas de la suite arithmétique.

a $t_n = 2n + 3$ **b** $t_n = \frac{3}{n} + 2$

Solution

a $\because t_{n+1} - t_n = (2(n+1)+3) - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$

$\therefore$ la suite est arithmétique de raison **2**

b $\because t_{n+1} - t_n = \left(\frac{3}{n+1} + 2\right) - \left(\frac{3}{n} + 2\right)$

$= \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{3n - 3n - 3}{n(n+1)} = \frac{-3}{n(n+1)}$ n'est pas constante.

$\therefore$ **La suite n'est pas arithmétique.**

Essayer de résoudre

(2) Déterminez laquelle parmi les suites dont le nième terme est donné ci-après : est une suite arithmétique et laquelle n'est pas une suite arithmétique, puis déterminez la raison dans le cas de la suite arithmétique.

a $t_n = 5 - 3n$ **b** $t_n = (n+1)^2$

Représentation graphique de la suite arithmétique:

Exemple

(3) Trouve les quatre termes qui suit dans la suite arithmétique (10;7;4;...), puis représente graphiquement les sept premiers termes.

Solution

$\because r = t_2 - t_1 = 7 - 10 = -3$

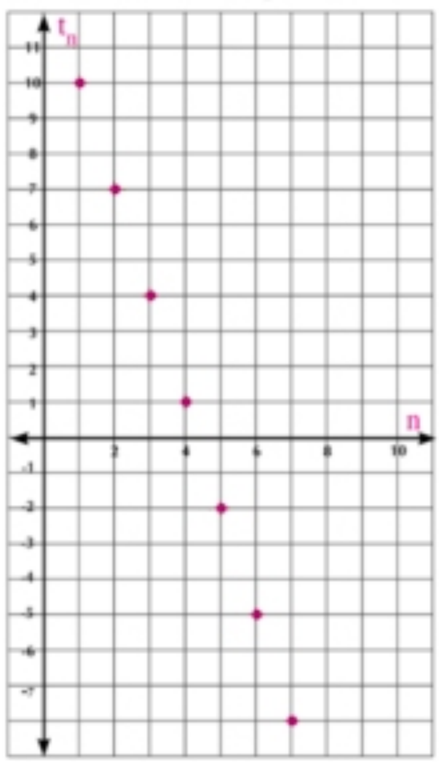
$\therefore$ les quatre termes qui suit sont : 1; - 2; - 5; - 8

L'ensemble de définition de la suite est

{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7; ....}

L'ensemble image est {10 ; 7 ; 4 ; 1 ; - 2 ; - 5 ; - 8; ....}

La figure ci-contre est la représentation graphique de la suite.



De la figure, on remarque que:

- Les points qui représentent la suite arithmétique sont alignés.

Cela veut dire que la suite arithmétique est une fonction du premier degré en n où $n \in \mathbb{Z}^+$ et le coefficient de n est la raison de la suite.

De ce que précède, on déduit que:

- La relations entre les deux variables n et t_n et $t_n = r\,n + b$ où b et r sont constants r est la raison de la suite.
- Une suite (t_n) est: croissante si $r > 0$, et décroissante si $r < 0$

Utilisé la calculatrice scientifique pour afficher une suite arithmétique:

Pour obtenir la suite arithmétique dont ($a = 10$ et $r = -3$):

- On insère la valeur de a (le nombre 10) puis on appuie sur la touche [=] ensuite la valeur de r en appuyant sur la touche [−] suivie du nombre 3 et la touche [=] pour afficher le deuxième terme Chaque fois qu'on appuie sur la touche [=] on obtient le terme suivant.

Réflexion critique:

1- Que prévoyez-vous lorsque la raison de la suite arithmétique (t_n) est nulle ($r = 0$)? Expliquez votre réponse.

Essayer de résoudre

(3) Soit la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$:

- **a** Démontrez que (t_n) est une suite arithmétique et trouvez sa raison.
- **b** Démontrez que (t_n) une suite croissante .
- **c** Trouvez le quinzième terme de la suite
- **d** Trouvez la valeur de n lorsque $t_n = 85$

Le nième terme de la suite arithmétique:

De la définition (1), on peut déduire le nième terme de la suite arithmétique (t_n) de premier terme a et de raison r comme suivant:

$t_1 = a$, $t_2 = a + r$ et $t_3 = a + 2\,r$ ainsi de suit, on déduit le nième terme est:

$\boxed{t_n = a + (n-1)\,r}$ et si $t_n = \ell$ (où ℓ est la dernier terme, a lors $\boxed{\ell = a + (n-1)\,r}$

Exemple

(4) Soit la suite arithmétique (13 ; 16 ; 19 ; ...... ; 100).

- **a** Déterminez le dixième terme.
- **b** Déterminez le nombre de termes de la suite.

Solution

$\because$ La suite est arithmétique $\qquad \therefore a = 13,\ r = 16 - 13 = 3$

a $\because t_n = a + (n-1)\,r$ $\quad\therefore t_{10} = 13 + (10-1)\times 3$
$= 13 + 9\times 3 = 13 + 27 = 40$

b On veut déterminer la valeur de n si $t_n = 100$

$\because t_n = a + (n-1)\,r$ $\quad\therefore 100 = 13 + (n-1)\times 3$

$\therefore\ 100 = 13 + 3n - 3$ **D'où** $3n = 100 - 10 = 90 \ \therefore\ n = 30$

Essayer de résoudre

(4) Trouvez le nombre de termes de la suite arithmétique (7 ; 9 ; 11 ; ...... ; 65) puis trouvez la valeur de dixième terme de la fin.

Déterminer la suite arithmétique:

On peut déterminer la suite arithmétique étant donné le premier terme et la raison de la suite.

Exemple

(5) Déterminez la suite arithmétique t_n qui a $t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$

Solution

$t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$ **On sait que**

$\because t_n = a + (n-1)\,r$

D'où $a + 6r = 18$. De même $a + 14r = 34$

$\therefore 8r = 16$ **Si on résout le système, on obtient**

$r = 2$ **Divisant par 8**

$\therefore a + 6\times 2 = 18$ **par substitution dans la première équation**

$\therefore a = 18 - 12 = 6$

pour trouver le nième terme , on substitue dans le formule: $t_n = a + (n-1)\,r$ par les valeurs de a et r.

$t_n = 6 + (n-1)\times 2 = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$

le premer terme est 6 le raison est 2 et le nième $2n + 4$

Essayer de résoudre

(5) Déterminez la suite arithmétique (t_n) dont $t_6 = 17; t_3 + t_{10} = 37$.

Moyennes arithmétiques:

Lorsqu'on a deux termes non-consécutifs d'une suite arithmétique, les termes situés entre ces termes sont appelés les moyennes arithmétiques. On peut utiliser cette notion pour déterminer les termes manqués situés entre deux termes non-consécutifs d'une suite arithmétique.

Définition 2

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c où b- a = c-b,

D'où $2b = a + c$ alors $b = \frac{a+c}{2}$ **pour celà :** $\left(a ; \frac{a+c}{2} ; c\right)$ **est une suite arithmétique.**

On peut insérer quelques moyennes arithmétiques: x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n entre les deux nombres a et b de sorte que $(a ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n ; b)$ **soit une suite arithmétique.**

Expression orale: Quelle relation existe-t-elle entre le nombre des moyennes et le nombre de termes de la suite ?

Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres:

Exemple

6) Insérez 5 moyennes arithmétiques entre 6 et 48.

Solution

1- On détermine le nombre de termes de la suite.

Il y'a cinq moyennes entre le premier et le dernier, termes d'une suite arithmétique, alors le nombre de termes de la suite $\mathbf{n = 2 + 5 = 7}$

2- On détermine la valeur de r

le nième terme de la suite arithmétique: $t_n = a + (n - 1)\,r$

Par substitution de : $a = 6$, $t_n = 48$, $n = 7$

$48 = 6 + (7 - 1)\,r$ Alors: $6r = 42$

On divise le deux membres par 6 $r = 7$

3- On utilise la valeur de r pour trouver les moyennes arithmétiques

6 ; 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41 ; 48

+7 ; +7 ; +7 ; +7 ; +7 ; +7

Les moyennes sont: 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41

Essayer de résoudre

6) Insérez 7 moyennes arithmétiques entre -24 et 16

Exercices (1 - 3)

Déterminez laquelle des suites suivantes est arithmétique et laquelle est non arithmétique, puis déterminez la raison de la suite arithmétique:

1) (34 ; 30 ; 26 ; 22 ; 18)

2) (7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27)

3) (-12 ; -18 ; - 24 ; - 30 ; - 36)

4) (7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7)

Complétez ce qui suit :

5) Le septième terme de la suite arithmétique (2 ; 5 ; 8 ; ...) est ....

6) Le onzième terme de la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$ est ....

7) Le nième terme de la suite arithmétique (81 ; 77 ; 73 ; ....) est ....

8) La moyenne arithmétique de deux nombres 8 et 12 est ....

9) Si la moyenne arithmétique de deux nombres x et 26 est 21, alors x est égale à ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

(10) Les suites suivantes sont toutes arithmétiques sauf la suite :

a $(3\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 15\ ;\ ...)$
b $(-11\ ;\ -15\ ;\ -19\ ;\ -23\ ;\ ...)$
c $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{6}\ ...)$
d $(\frac{21}{5}\ ;\ \frac{16}{5}\ ;\ \frac{11}{5}\ ;\ \frac{6}{5}\ ;\ ....)$

(11) La suite arithmétique parmi les suites suivantes est:

a $(t_n) = (\frac{n+1}{n})$
b $(t_n) = (n+1)^2$
c $(t_n) = \left(\frac{3}{n}(n+2)\right)$
d $(t_n) = (\frac{n^3-1}{n^2+n+1})$

(12) Si (t_n) est une suite arithmétique où $t_n = 3n + 2$, alors la moyenne arithmétique de t_5 et t_{11} est:

a 8
b 16
c 22
d 26

(13) Si $2a + 1$, $5a - 1$ et $6a + 3$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors a est égal à.

a 1
b 2
c 3
d 5

(14) Si a et b sont deux moyennes arithmétiques entre x et y, alors : $\frac{y - x}{b - a}$ est égal à :

a 2
b 3
c 4
d 6

Décelez l'erreur :

(15) La raison de la suite arithmétique est égale à la différence entre un terme et le terme précédent d'où $r = t_n - t_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$

(16) Si la relation entre n et t_n d'une suite arithmétique est: $t_n = an + b$ où a et b sont constants, alors b est la raison de la suite.

Répondez aux questions suivantes:

(17) Déterminez le nombre de termes de la suite arithmétique $(2\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ .....\ ;\ 80)$.

(18) Soit la suite $(63\ ;\ 59\ ;\ 55\ ;\ .....\ ;\ -133)$. Trouvez :

a la valeur du septième terme
b le nombre des termes de la suite.

(19) Trouvez le rang et la valeur du premier terme négatif de la suite arithmétique $(67; 64\ ; 61\ ;\ ....)$

(20) Trouvez le rang et la valeur du premier terme supérieur à 180 de la suite arithmétique:

$(23\ ; 28\ ; 33\ ; 38\ ;\ ....)$.

(21) Ecrivez les trois premiers termes de la suite $(t_n) = (2 + 5n)$, puis trouvez le rang du terme égale à 72 ; ensuite le rang du premier terme dont la valeur est supérieure à 100.

22 Une suite arithmétique dont le premier terme = 3 , $t_n = 39$ et $t_{2n} = 79$. Quelle est la valeur de n? Déterminez la suite.

23 Déterminez la suite arithmétique dont le cinquième terme = 21 , et son dixième terme est égal au triple son deuxième.

24 (t_n) est une suite arithmétique dont $t_1 + t_2 = 9$ et $t_5 = 22$, trouvez la suite.

25 Déterminez la suite arithmétique dont le sixième terme = 20 et le rapport entre son quatrième et son dixième termes est 4 : 7.

26 Une suite arithmétique dont le quatrième terme = 11; la somme de son cinquième et son neuvième termes est égale à 40, Déterminez la suite puis le rang du terme dont la valeur est 152.

27 Déterminez la suite arithmétique dont la moyenne entre le troisième terme et le septième terme est égal à 19 et son dixième terme dépasse de 2 au double de son quatrième terme.

28 Soit (t_n) une suite arithmétique dont : $t_2 + t_4 = 42$ et $t_3 \times t_5 = 315$, trouvez la suite.

29 Si (8 ; a ; .... ; b ; 68) est une suite arithmétique de 16 termes, déterminez les valeurs de a et celle de b.

30 Si 36 ; a ; 24 ; b sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, déterminez les valeurs de a et de b.

31 Si la moyenne arithmétique entre a et b est 8, et la moyenne arithmétique entre 4a et 2b est 20 ; déterminez les valeurs de a et celle de b.

32 Insérez 16 moyennes arithmétiques entre 27 et - 24.

33 Le neuvième terme d'une suite arithmétique est 25 et la moyenne arithmétique entre ses troisième et cinquième termes est 10. trouvez la suite.

34 On a insérer des moyennes arithmétiques entre 1 et 17 ; le septième moyenne est égale au triple de deuxième moyenne. Calculez le nombre de ces moyennes.

35 **En lien avec la physique:** Karim commence à conduire son vélo du sommet d'une colline. Il parcoure 100 cm pendant la première seconde et la distance augmente 120 cm de plus chaque seconde. Déterminez la distance parcourue pendant la dixième seconde.

36 **En lien avec la commerce:** Un homme a acheté une moto en versements mensuels formant une suite arithmétique dont le terme général est 120n + 80. Si le dernier versement est 1400 L.E., déterminez le nombre des versements.

37 **Réflexion créative:** Soient ℓ et m deux moyennes arithmétiques entre x et y où $\ell > m$, Prouvez que : $\ell - m = \frac{1}{3}(x - y)$.

Série arithmétiques

1 - 4

Somme d'une série arithmétique

Savant allemand-
Carl Gauss
1777 - 1855

Le savant allemand Carl Gauss a fait une surprise à son maitre quand il avait sept an,il a mentalement calculé la somme des nombres de 1 à 100.Il remarque que la somme est égale à 50 pairs du nombre dont la sommes est 101 qui est égale à $50 \times 101 = 5050$. Pouvez-vous mentalement déterminer la somme de 1 à 20?

Allez apprendre

- Notion de la série arithmétique
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant ses premier et dernier termes.
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant son premier terme et sa raison

Vocabulaires de base

- Série arithmétique
- Symbole de la somme

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

A apprendre

Somme de n premiers termes d'une série arithmétique

Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant son premier et son dernier terme?

Soit une série arithmétique de premier terme a, de raison r, de dernier terme ℓ, et le nombre de ses termes n. La somme de n termes de cette série noté S_n où:

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (\ell - d) + \ell$ **(1)**

On peut aussi écrire la somme par la façon suivante:

$S_n = \ell + (\ell - d) + (\ell - 2d) + ... + (a + d) + a$ **(2)**

D'après (1) et (2) par addition, on obtient:

$2S_n = (a + \ell) + (a + \ell) + (a + \ell) + ... + (a + \ell)$ á nfois .

D'où $2S = n (a + \ell)$ en divisant a par 2 $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)}$

Exemple **Utiliser le symbole de la somme** Σ

1 Trouvez $\sum_{r=5}^{24} (4r - 3)$

Rappelez-vous

Solution

$n = 24 - 5 + 1 = 20$ — **On trouve le nombre de termes de la suite**

$t_n = 4n - 3$ — **Le nième terme de la suite**

$t_5 = 4 \times 5 - 3 = 17$, $t_{24} = 4 \times 24 - 3 = 93$

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$ — **Formule de la somme**

$S_{20} = \frac{20}{2}(17 + 93) = 1100$ — **par substitution de $a = 17$, $\ell = 93$, $n = 20$**

Essayer de résoudre

1 Trouvez:

a $\sum_{K=1}^{20} (6K + 5)$

b $\sum_{m=7}^{32} (12 - 5m)$

Exemple

2 Calculez la somme de la série arithmétique $2 + 5 + 8 + ... + 62$

Solution

$\ell = a + (n - 1)r$ — **Le nième terme de la suite**

$62 = 2 + (n - 1) \times 3$ — **par substitution de $a = 2$, $b = 3$ et $n = 62$**

D'où: $3n - 3 + 2 = 62$

$3n - 1 = 62$ — **alors $n = 21$**

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$ — **Formule de la somme**

$S_{21} = \frac{21}{2}(2 + 62) = 672$ — **par substitution de $a = 2$, $b = 21$, $n = 62$**

Essayer de résoudre

2 Calculez:

a La somme de la série arithmétique $89 + 85 + 81 + ... + 33$

b Le nombre des termes de la suite arithmétique dont le premier terme est égal à 3, son dernier terme est égal à 39 et la somme de n premiers termes est égale à 210.

Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant le premier et la raison.

On sait que $\ell = a + (n - 1)r$ et $S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$

par substitution de la première relation à la deuxième, alors :

$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)r]$ **alors** $\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]}$

Exemple

(3) Dans la série arithmétique 5 + 8 + 11 + ... trouvez:

a) La somme de 20 premiers termes

b) La somme de 10 termes à partir du septième terme

c) La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}

Solution

$a = 5 \quad , \quad r = 8 - 5 = 3$

a) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$ **La formule de la somme**

$S_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 5 + (20-1) \times 3]$ **par substitution de $a = 5$ et $r = 8 - 5 = 3$**

$S_n = 10(10 + 19 \times 3)$

$= 10 \times 67 = 670$ **par le calcul**

b) $t_n = a + (n-1)r$ **le nième terme de la suite**

$t_7 = a + 6r$

$= 5 + 6 \times 3 = 23$ **par substitution de $a = 5$, $r = 3$ et $n = 7$**

$S_{10} = \frac{10}{2} \times [2t_7 + (10-1) \times 3]$ **par substitution dans la formule de la somme**

$S_{10} = 5 \times [2 \times 23 + 27]$

$= 5 \times 73 = 365$ **par le calcul**

c) La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}

$t_n = a + (n-1)r$ **le nième terme de la suite**

$t_{10} = a + 9r$

$= 5 + 9 \times 3 = 32$ **par substitution de $a = 5$, $r = 3$**

$t_{20} = a + 19r = 5 + 19 \times 3 = 62$

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$ **Formule de la somme**

$S_{11} = \frac{11}{2}(t_{10} + t_{20})$

$= \frac{11}{2}(32 + 62) = 517$ **par substitution de $t_{10} = 32$, $t_{20} = 62$, $n = 11$**

Réfléchissez:

Est-ce qu'il y a d'autre manières pour trouver la somme des termes de la suite à partir de t_{10} à t_{20}

Essayer de résoudre

(3) Dans la série arithmétique (9 ; 12 ; 15 ; ...), trouvez:

a) La somme de 15 premiers termes.

b) La somme des termes de la série à partir de cinquième terme jusqu' au quinzième terme.

c) Le nombre des termes qu'il faut additionner à partir du premier terme pour obtenir 750.

Exemple

(4) trouvez la suite arithmétique dont $t_1 = 11$, $t_n = 87$ et $S_n = 980$

Solution

a trouvez la valeur de n

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$ — **La formule de la somme**

$980 = \frac{n}{2}(11 + 87)$ — **par substitution de $t_1 = 11, t_n = 87$ et $S_n = 980$**

$98 \times \frac{n}{2} = 980$ alors: $n = 20$ terms — **par le calcule $t_{20} = 87$**

b trouvez la valeur de r

$t_n = a + (n - 1)r$ — **le terme général**

$87 = 11 + 19r$ — **par substitution de $t_1 = 11, n = 20; t_n = 87$**

$19r = 87 - 11 = 76$ — **by simplifying**

$r = 4$ — **la division par 19**

c déterminer la suite $t_2 = 11 + 4 = 15$, $t_3 = 15 + 4 = 19$

La suite arithmétique est (11 , 15 , 19 , ... , 87)

Essayer de résoudre

(4) Déterminez la suite arithmétique dont:

a $t_1 = 23$; $t_n = 86$; $S_n = 545$

b $t_1 = 17$; $t_n = -95$; $S_n = -585$

Exemple

En lien avec la physique:

(5) Un corps est tombé, sous l'effet de la gravitation terrestre, d'une hauteur de 490 mètres. Il a parcouru une distance de 4,9 pendant la première seconde ; 14,7 pendant la deuxième seconde ; 24,5 pendant la troisième seconde.. etc. **Calculez :**

a La distance parcourue par le corps pendant la sixième seconde.

b La somme des distances parcourues par le corps pendant les huit premières secondes.

c Quand le corps arrive-t-il au sol ?

Solution

Les distances parcourues par le corps pendant les trois premières secondes sont 4,9 ; 14,7 ; 24,5 ; ....

Ce qui représente une suite arithmétique dans laquelle : $a = 4,9$ et $r = 14,7 - 4,9 = 9,8$

a Subistituons par: $a = 4,9$ et $r = 9.8$ dans la formule: $t_n = a + (n - 1)r$

$t_6 = a + 5r$ alors $t_6 = 4,9 + 5 \times 9,8 = 53,9$ mètres

b Subistituons par : $a = 4,9$ et $r = 9,8$, $n = 8$ dans la formule : $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]$

$S_8 = \frac{8}{2}(2 \times 4,9 + 7 \times 9,8) = 313,6$ mètres.

(c) Subistituons par $a = 4{,}9$, $r = 9{,}8$; $S = 490$ dans la formule: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$

$490 = \frac{n}{2}[2 \times 4{,}9 + (n-1) \times 9{,}8]$ **Développant et simplifiant**

$490 = n(4.9 + 4{,}9n - 4{,}9)$ **D'où:** $4{,}9n^2 = 490$

Divisant les deux membres par 4,9 **alors** $n^2 = 100$

Prenant la racine carrée de deux membres : $n = 10$ (où $n > 0$)

Essayer de résoudre

(5) En lien avec le sport : Karim se prépare pour la course de fond, il a décidé de s'entrainer à courir 4 kilomètres pendent le premier jour et d'augmenter la distance d'un demi-kilomètre chaque jour

(a) Déterminez la distance que fait Karim au septième jour.

(b) Déterminez la somme des distances parcourues pendant la première semaine. (Une semaine est 7 jours).

(c) Si Karim continue, sans cesse, l'entraînement, combien jours faut-il pour parcourir 81 km?

Exercices (1 - 4)

Complétez se qui suit:

(1) La somme de n termes d'une e suite arithmétique dont le premier terme a et le dernier b est égale à

....

(2) La somme de n premiers termes de la suite arithmétique dont le premier terme est a et la raison est r, est ....

(3) $\sum_{k=1}^{5} (2k+1) =$ ....

(4) La somme de 10 premiers nombres pairs de nombres naturels est ....

(5) La somme de nombres naturels impairs supérieur à 10 et inférieur à 30 est égale à ....

(6) La somme de nombres naturels qui est divisible par 3 et compris entre 30 et 50 est égale à ....

Choisissiez La bonne réponse parmi les réponses données

(7) La valeur de la série arithmétique $\sum_{r=1}^{5} (2r+1)$ est égale à :

(a) 25 (b) 30 (c) 35 (d) 40

(8) La série : $4 + 9 + 14 + \ldots + 5n - 1$ en utilisant le symbole de la somme s'écrit:

(a) $\sum_{r=4}^{n} (5r-1)$ (b) $\sum_{r=1}^{n} (5r+1)$ (c) $\sum_{r=1}^{n} (5r-1)$ (d) $\sum_{r=1}^{5n-1} (3r+1)$

(9) La série : $7 + 12 + 17 + 22$ en utilisant le symbole de la somme, s'écrit :

(a) $\sum_{r=1}^{4} (5r+2)$ (b) $\sum_{r=1}^{4} (4r+3)$ (c) $\sum_{r=1}^{4} (7r+1)$ (d) $\sum_{r=1}^{4} (3r+4)$

10. La somme des termes de la suite arithmétique $(3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ ...\ ;\ (2n+1))$ à partir de son premier terme égale à

   a $n(n+1)$ b $n(n+2)$ c $n(n+5)$ d $n(n+2)\,n(n+3)$

Décelez l'erreur

11. Pour trouver la somme maximale d'une suite arithmétique : on trouve le nombre de ces termes positifs puis pour trouver la valeur de n en posant $S_n > 0$; ensuite on trouve la somme maximale de la suite.

12. Pour trouver la somme minimale d'une suite arithmétique : on trouve le nombre de ces termes négatifs puis pour trouver la valeur de n en posant $S_n < 0$ ensuite on trouve la somme minimale de la suite.

13. Pour trouver le nombre des termes pour que la somme d'une suite arithmétique s'annule : on pose $S_n = 0$, alors $a + (n-1)\,r = 0$ [où $n \neq 0$] , ensuite on trouve le nombre des termes de la suite.

14. Si la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la relation $S_n = \frac{n}{2}(3n+5)$ alors $t_n = S_{n+1} - S_n$.

Répondez aux questions suivantes:

15. Trouvez la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique $(14\ ;\ 18\ ;\ 22\ ;\ ...)$.

16. Déterminez la somme des 30 premiers termes de la suite (t_n) où $t_n = 2n + 3$

17. Déterminez la somme des termes de la suite arithmétique $(2\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ ...\ ;\ 80)$.

18. Déterminez le nombre de termes qu'il faut additionner de la suite $(16\ ;\ 20\ ;\ 24\ ;\ ...)$ à partir de son premier terme pour obtenir 456.

19. Combien de termes faut-il additionner de la suite $(-16\ ;\ -14;\ -12\ ;\ ...)$à partir de son premier terme pour obtenir zéro?

20. Si la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule : $S_n= 2n(7-n)$, trouvez:

   a t_7

   b Le nombre de termes de la suite, à partir du premier terme, qu'il faut additionner pour que la somme soit égale à -240

21. Trouvez le plus petit nombre de termes qu'il faut prendre de la suite $(89\ ;\ 81\ ;\ 73\ ;\ ...)$ à partir du premier terme pour obtenir une somme négative.

22. Trouvez le plus grand nombre de termes qu'il faut prendre de la suite (25 ; 21 ; 17 ; ...) à partir du premier terme pour obtenir une somme positive.

23. Soit (5 ; 8 ; 11 ; ...) ,une suite arithmétique. Trouvez:
   - **a** La somme de 20 premiers termes de la suite.
   - **b** La somme de 10 termes à partir du septième terme.
   - **c** La somme des termes de la suite à partir du t_{10} à t_{20}

24. Soit une suite $(t_n) = (32 ; 28 ; 24 ; ...)$. Trouvez:
   - **a** Le rang du premier terme négatif de la suite.
   - **b** Le nombre de termes, à partir du premier terme, pour que la somme soit supérieure à 0.

25. Soit une suite t_n (32 ; 28 ; 24 ; ...). Trouvez :
   - **a** La somme maximale de la suite.
   - **b** Le nombre de termes, à partir du premier terme, pour que la somme soit égale à 120. Pourquoi y-a-il deux solutions ?

26. Le premier terme d'une suite arithmétique = 12 ; son dernier terme = -26 et la somme de la suite = -140. Déterminer la suite.

27. Soit une suite arithmétique (t_n) . Son deuxième terme = 13 ,et la somme de 10 premiers termes de la suite = -140. Déterminer la suite.

28. Soit une suite arithmétique telle que $t_{36} = 0$. Si la somme de n premiers termes de la suite = le double de celle de 5 premiers termes de la suite. Déterminez la valeur de n.

29. Si on insère n moyennes arithmétiques entre 1 et 31 et si le rapport entre le septième moyenne et la dernière moyenne est $\frac{15}{29}$. Quel est le nombre de moyennes ? Déterminez la somme de la suite.

30. Une suite arithmétique dans laquelle $t_4 = 24$ et le rapport entre la somme de ses cinq premiers termes aux cinq termes suivants de la suite est 1 : 2. Déterminez la suite.

31. Le premier terme d'une suite arithmétique dépasse de 2 le double de son cinquième terme et la moyenne arithmétique du troisième et septième termes égale à 16. Déterminez la suite.

32. **Epargne :** Ziad épargne 15 L.E. de sa paye journalière. S'il épargne chaque jour une somme supérieur de 2 L.E. que le jour précédent. Déterminez la somme qu'il épargne pendent 15 jours.

33 **En lien avec l'art:** Une salle de théâtre dans une école a 16 rangs, si le première rang a 16 sièges et chaque rang contient 4 sièges de plus que le rang précédent. Combien y a-t-il de sièges dans le théâtre?

34 **En lien avec le revenu:** Karim commence son travail avec un salaire annuel 19200 L.E. Il touche une prime annuelle de 480 L.E. Quelle est la somme de ses salaires à la fin de dixième année?

35 **En lien avec la commerce:** Un homme emprunte une somme d'argent pour en rembourser en 8 versements. Le premier versement est 500 L.E. et chaque versement augmente de 200 L.E. que le versement précédent. Quel est le montant emprunté?

36 **Maintenance:** Une entreprise a attribué à une société, la maintenance de l'un de ses bâtiments, elle a fixé une date pour la fin de l'entretien du bâtiment. L'une des conditions du contrat : « dans le cas de retard, la société de maintenance doit payer une amende de 1000 L.E. pour le premier jour et l'amende augmente de 100 L.E. pour chaque jour de retard» Si la société de maintenance fait un retard de 6 jours, quel est le montant dû pour payer l'amende?

Activité

Karim possède un magasin de marchandises alimentaires, il arrange 78 boites de thon dans des rangs. Il met 12 boites au rang inferieur, 11 boites au rang suivant, puis 10 boites au rang qui suit.........etc.

1- Déterminez le nombre des boites de thon au septième rang.

2- Dans quel rang le nombre des boites de thon est 3 ?

3- Pour quelle raison Karim arrange-il les boites à cette façon.

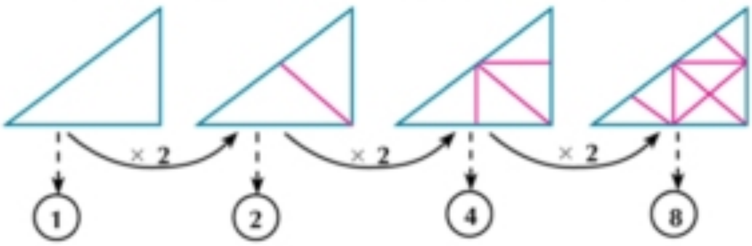
4- Naviguer sur Le WEB pour cherchez les lieux d'existence des thons.

5- Quels sont les profits alimentaires des thons ?

Suite géométrique

1 - 5

Observez le nombre des petits triangles. Que remarquez-vous ?



Définition 1

La suite (t_n) où $t_n \neq 0$ est appelée suite géométrique

si $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ = constant pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$

et le constant est appelé la raison de la suite et noté (q)

Allez apprendre

- Définir de la suite géométrique
- Représenter graphiquement
- de la suite géométrique.
- Déterminer la suite géométrique.
- Moyennes géométrique
- Relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique

Vocabulaires de base

- Suite géométrique
- Nième terme
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Suite alternante le signe
- Moyenne géométrique

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphique

Exemple

1 Laquelle parmi les suites suivantes est géométrique? Puis déterminez la raison.

a $(t_n) = (2 \times 3^n)$ b $(t_n) = (4\, n^2)$

c La suite (t_n) où : $t_1 = 12$,$t_n = \frac{1}{4} \times t_{n-1}$ (pour tout $n > 1$)

Solution

a $\because \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3^{n+1-n} = 3$ **(constant)**

$\therefore$ La suite est géométrique de raison $q = 3$

b $\because \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{4\,(n+1)^2}{4\,n^2}$ **(n'est pas constant)**

$\therefore$ La suite n'est pas géométrique

c $\because t_n = \frac{1}{4} \times t_{n-1}$ (pour $n > 1$)

$\therefore \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{1}{4}$ **(constant)**

$\therefore$ La suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

Essayer de résoudre

1) Parmi les suites suivantes, indiquez laquelle est une suite géométrique puis déterminez la raison dans le cas de la suite géométrique:

a) $(t_n) = (96\ ;\ 48\ ;\ 24\ ;\ 12\ ;\ 6\ ;\ 3)$

b) $(t_n) = (\frac{1}{243}\ ;\ -\frac{1}{81}\ ;\ -\frac{1}{27}\ ;\ \frac{1}{9}\ ;\ \frac{1}{3})$

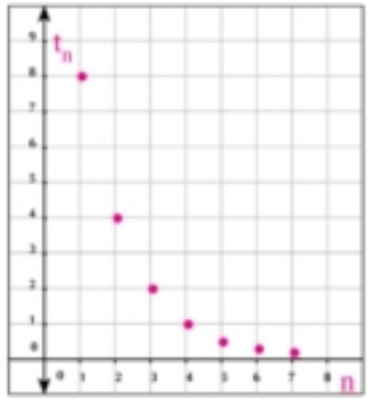
c) $(t_n) = (5 \times 2^n)$

d) $(t_n) = (3\,(n+1)^2)$

Représentation graphique de la suite géométrique

Exemple

2) Déterminez les quatre termes suivants de la suite géométrique (8; 4; 2; ...) puis représentez graphiquement les sept premiers termes.



Solution

La raison de la suite $= \frac{1}{2}$ alors les quatre termes suivants sont :

$1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{8}$

L'ensemble de définition est $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\}$

L'ensemble image est $\{8\ ;4\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{8}\}$

Du graphique, on remarque que:

- La suite est décroissante pour $a > 0$, $0 < q < 1$
- La représentation graphique de la suite géométrique est comme celle de la fonction exponentielle.

Expression orale: Dans chacun des cas suivant : Décrivez la suite géométrique, si elle est croissante ou décroissante ou oscillatoire.

Premier terme	Positive				Negative			
Raison	$q > 1$	$0 < q < 1$	$-1 < q < 0$	$q < -1$	$q > 1$	$0 < q < 1$	$-1 < q < 0$	$q < -1$
Description	croissante	....	....	....	....	....	oscillatoire	....

Pensé critique: Est-ce que la raison d'une suite géométrique peut-être nulle ou un? Expliquez votre réponse.

Essayer de résoudre

2) Déterminez les quatre termes qui suit de la suite géométrique $(\frac{1}{27}\ ;\frac{1}{9}\ ;\ \frac{1}{3}\ ...)$, puis représentez les sept premiers termes graphiquement.

Déterminer le nième terme d'une suite géométrique

De la définition (1) on peut déduire le nième terme de la suite géométrique (t_n) connaissant son premier terme a et sa raison q comme ce que suit:

$t_1 = a, t_2 = aq\ ; t_3 = aq^2$, Observant la progression de ce modèle, on trouve que le nième terme est : $\boxed{t_n = a\, q^{n-1}}$

Exemple

3) Dans la suite géométrique (2 ; 4 ; 8 ; ....), trouvez:

a) Le cinquième terme.

b) Le rang du terme qui a pour valeur 512

Solution

$\because$ $a = 2$, $q = \frac{4}{2} = 2$, $t_n = a \times q^{n-1}$

$\therefore$ $t_5 = a\,q^4 = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32$ alors la valeur du cinquième terme est 32

$\because$ $t_n = a \times q^{n-1}$ $\therefore$ $2 \times 2^{n-1} = 512$ par la division par 2

$\therefore$ $2^{n-1} = 2^8$ $\therefore$ $n - 1 = 8$ $\therefore$ $n = 9$

Alors le neuvième terme est égal à 512.

Essayer de résoudre

3) Démontrez que la suite (t_n) où $t_n = 2 \times 3^{n-5}$ est une suite géométrique puis déterminez son septième terme.

Déterminer la suite géométrique:

On peut déterminer la suite géométrique en connaissant son premier terme et sa raison.

Exemple

4) Soit (t_n) une suite géométrique. Dont tout ses termes sontpositifs

Si $t_3 + t_4 = 6t_2$, $t_7 = 320$, trouvez la suite.

Solution

$\because$ $t_3 + t_4 = 6t_2$ $\therefore$ $aq^2 + aq^3 = 6 \times aq$

$\therefore$ $aq(q + q^2) = 6 \times aq$ Par la division de deux membres de deux équations

$\therefore$ $q^2 + q = 6$ $\therefore$ $q^2 + q - 6 = 0$

$\therefore$ $(q - 2)(q + 3) = 0$ $\therefore$ $q = 2$ ou $q = -3$ refusée (les termes sont positifs)

$\because$ $t_7 = 320$ $\therefore$ $aq^6 = 320$ par substitution $q = 2$

$\therefore$ $a \times 2^6 = 320$ $\therefore$ $64\,a = 320$ Divisant les deux membre par 64

$\therefore$ $a = 5$ La suite est (5; 10; 20; ....)

Utiliser la calculatrice scientifique pour écrire une suite géométrique

Pour écrire la suite géométrique dont a = 5 et q = 2 par exemple, on suit les étapes suivantes: On écrit la valeur de a (le nombre 5) puis on appuie sur la touche (=) puis la touche (×) puis on écrit la valeur de q (le nombre 2) puis on appuie sur la touche (=) le deuxième terme de la suite s' affiche, on appuie successivement la touche (=) les termes suivants s'affichent …… etc.

Essayer de résoudre

(4) (t_n) est une suite géométrique dont $t_5 = 8\,t_2$, $t_4 + t_6 = 240$. Déterminez la suite.

(5) Une suite géométrique de termes positifs. Son deuxième terme est égal à 6, son dixième terme est égal à 1536. Déterminez la suite.

Exemple

(5) **En lien avec l'enseignement:** Le nombre d'élèves de la deuxième secondaire d'une zone éducative augmente à un taux annuel de 4 %. Si le nombre actuel d'élèves est 2400 élèves, quel sera le nombre d'élèves après 6 ans ?

Solution

$\because$ Le nombre actuel d'élèves $= 2400$

$\therefore$ Le nombre d'élèves dans la deuxième année $= 2400\,(1 + 0{,}04)$

$= 2400\,(1{,}04)$

$\therefore$ Le nombre d'élèves dans la troisième année $= 2400(1{,}04) + 2400(1{,}04) \times 0{,}04$

$= 2400(1{,}04)\,(1 + 0{,}04) = 2400(1{,}04)^2$ .... etc. ..

Alors le nombre d'élèves forme une suite géométrique

$(2400\ ;\ 2400(1{,}04)\ ;\ 2400(1{,}04)^2\ ;\ ...)$

$a = 2400; q = 1{,}04$, $n = 6$ Par substitution dans la formule du nième terme de la suite géométrique $t_n = a \times q^{n-1}$ $t_n = (2400) \times (1{,}04)^5 = 2919{,}966966$

alors, le nombre d'élèves après 6 ans est égal à 2920 élèves près.

Essayer de résoudre

(6) **En lien avec la physique:** Une balle en caoutchouc tombe d'une hauteur de 240 mètre, à chaque fois qu'elle heurte le sol elle répond à $\frac{3}{4}$ de la hauteur précédente. Quelle sera son hauteur après le septième choc?

Moyennes géométriques

Les moyennes géométriques, comme les moyennes arithmétiques, sont les termes insérés entre deux termes non consécutifs d'une suite géométrique. On utilise la raison de la suite géométrique pour déterminer les moyennes.

Définition 2

Si a, b et c et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors b est la moyenne géométrique de deux nombres a et c où : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ alors $b^2 = a\,c$ d'où $b = \pm\sqrt{a\,c}$

Enrichissez voitre connaissance

En statistique, la moyenne géométrique d'un ensemble des nombres positifs t_1, t_2, t_3, ... , t_n est la nième racine du produit des nombres.La moyenne géométrique = $\sqrt[n]{t_1 \times t_2 \times ... \times t_n}$

Expression orale:

Les moyennes géométriques qu'on peut insérer entre deux nombres dépendants sur les signes de deux nombres ». Expliquez cette phrase.

Insérer des moyennes géométriques entre deux quantités données:

Exemple

(6) Déterminez les moyennes géométriques dans la suite: (4 ; .... ; .... ; .... ; .... ; .... ; 2916)

Solution

1- On détermine le nombre de termes de la suite

Il y a 5 moyennes entre le premier et le dernier terme de la suite géométrique; alors le nombre de termes est $n = 2 + 5 = 7$

2- On détermine la valeur de q

On utilise la formule : $t_n = a\,q^{n-1}$

$2916 = 4 \times q^{7-1}$ — Par substitution : $a = 4$, $t_n = 2916$, $n = 7$

D'où $4 \times q^6 = 2916$ — On divise les deux membres par 4 $q^6 = 729$

D'où $q^6 = (\pm 3)^6$ d'où $q = \pm 3$

3- On utilise la valeur de q pour déterminer les moyennes géométriques:

$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36 \xrightarrow{\times 3} 108 \xrightarrow{\times 3} 324 \xrightarrow{\times 3} 972 \xrightarrow{\times 3} 2916$ **Ou**

$4 \xrightarrow{\times -3} -12 \xrightarrow{\times -3} 36 \xrightarrow{\times -3} -108 \xrightarrow{\times -3} 324 \xrightarrow{\times -3} -972 \xrightarrow{\times -3} 2916$

Les moyennes sont 12; 36; 108; 324; 972 **ou** - 12; 36; - 108; 324; - 972

Essayer de résoudre

(7) Insérer six moyennes géométriques entre $\frac{1}{4}$ et 32

Enrichissez vos connaissance

Si: $t_1, t_2, t_3, ...,$ sont des nombres réélis positifs, alors :

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + ...t_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{t_1 t_2 t_3 ... t_n}$$

L'égalité est vérifié si et seulement si: $t_1 = t_2 = t_3 = ... = t_n$

Relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres :

Si $x \in \mathbb{R}^+$; $y \in \mathbb{R}^+$ où $x \neq y$

alors: la moyenne arithmétique $(A) = \frac{x+y}{2}$ et la moyenne géométrique positive $(G) = \sqrt{xy}$

$$\therefore A - G = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2}$$

$$\therefore = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} > 0$$

posant l'expression sous forme du carré parfait

$\therefore A > G$. et la moyenne arithmétique positive est plus grande que la moyenne géométrique positive

On a donc : la moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs est plus grande que la moyenne géométrique de ces deux nombres.

Pensé critique : Que prévoyez-vous de la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres positifs et égaux?

Exemple

7 Soient $6a$; $3b$; $2c$ et $2d$ des termes positifs d'une arithmétique. Démontrez que $bc > 2ad$

Solution

$\because$ 3b est un moyenne arithmétique de 6a et 2c

et la moyenne arithmétique > la moyenne géométrique

$\therefore 3b > \sqrt{6a \times 2c}$ On élève les deux membres de l'inéquation au carré

$\therefore 9b^2 > 12ac$ **(1)**

De même 2c est un moyenne arithmétique de 3b et 2d

$\therefore 2c > \sqrt{3b \times 2d}$ On élève les deux membres de l'inéquation au carré

$4c^2 > 6bd$ **(2)**

de **(1)** et **(2)**

$9b^2 \times 4c^2 > 12ac \times 6bd$

On divise les deux membres de l'inéquation par $36bc$ où $(b \in \mathbb{R}_+ ,\ c \in \mathbb{R}_+)$

$\therefore bc > 2ad$

Exercices (1 - 5)

Complétez ce qui suit:

1. Le cinquième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2 \times (3)^{n-1}$ est égal à ....
2. Le nième terme de la suite géométrique $(3 ;\ -6 ;\ 12 ;\ ...)$ est ....
3. Le sixième terme de la suite géométrique $(\frac{1}{243} ;\ \frac{1}{81} ;\ \frac{1}{27} ;\ ...)$ est ....
4. La moyenne géométrique de deux nombres 4 et 16 est ....
5. Si la moyenne géométrique de deux nombres 9 et y est 15, alors y est égal à = ...
6. Si a ; b ; c sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors b < ....

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données

7. Le terme qui suit de la suite géométrique $(8 ;\ 6 ;\ \frac{9}{2} ;\ \frac{27}{8} ;\ ...)$ est:

   a $\frac{11}{8}$ b $\frac{27}{16}$ c $\frac{9}{4}$ d $\frac{81}{32}$

8 Les suites suivantes sont géométriques sauf:

a $(3\ ;\ -6\ ;\ 12\ ;\ -24\ ;\ ....)$

b $(\log a\ ;\ \log a^2\ ;\ \log a^3\ ;\ \log a^4\ ;\ ..)$

c $(\frac{3}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{9})$

d $(\frac{3b}{2a}\ ;\ 3\ ;\ \frac{6\,a}{b}\ ;\ \frac{12\,a^2}{b^2})$ où $a > 0$ $b > 0$

9 La suite géométrique parmi les suites suivantes, est:

a $(t_n) = (4\,n^2)$ pour tout $n \geqslant 1$

b $(t_n) = (\frac{1}{4} \times t_{n-1})$ pour tout $n \geqslant 2$

c $(t_n) = (2^n - 1)$ pour tout $n \geqslant 1$

d $(t_n) = (\log(3 \times 2^n))$ pour tout $n \geqslant 1$

10 Si a , b , c sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors:

a $\frac{a+c}{2} > b$

b $\frac{a+c}{2} < b$

c $\frac{a+c}{2} = b$

d $b^2 = a + c$

Décelez l'erreur:

11 Les termes de la suite géométrique représentés graphiquement par des points distincts et alignés.

12 La suite (t_n) est géométrique si $\frac{t_n}{t_{n+1}}$ est égale à une valeur constante qui est la raison de la suite (pour tout $n \geqslant 1$).

13 Une suite géométrique est décroissante lorsque sa raison $q \in]-1\ ;\ 0[$

14 Les moyennes géométriques sont les termes qui se trouvent entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique, et qu'on peut déterminer en connaissant le nombre des moyennes.

15 La moyenne arithmétique de deux nombres réels distincts est plus grand que leur moyenne géométrique.

Répondez aux questions suivantes:

16 Si (t_n) est une suite telle que $t_n = 5 \times 2^n$. Démontre qu'elle est géométrique, puis écrivez leur trios premiers termes.

17 Soit la suite géométrique $(\frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -1\ ;\ ..)$. Déterminez:

a Son dixième terme

b Le rang du terme qui dont la valeur = 1024

18 Une suite géométrique de raison $= \frac{1}{2}$ et son troisième terme $= 24$. Trouvez la suite.

19 Déterminez la suite géométrique t_n dont $t_2 = 12$ et $t_7 = 384$.

20. Montrez que la suite (t_n) est une suite géométrique où : $t_n = \frac{3}{8}(2)^n$ puis déterminez son huitième terme et le rang du terme qui est égal à 768.

21. Déterminez la moyenne géométrique de 16 ; 49.

22. Déterminez les deux nombres dont la moyenne arithmétique est 5 et la moyenne géométrique est 3.

23. Déterminez deux nombres positifs dont leur moyenne géométrique positive augmente de 2 à l'un et diminue de 3 à l'autre.

24. Insérez cinq moyennes géométriques et positives entre $\frac{8}{27}$ et $\frac{27}{8}$.

25. On insère quelques moyennes géométriques entre 2 et 1458, de sorte que le rapport entre la somme de deux premières moyennes et la somme de deux dernières moyennes soit égal à 1 : 27 Déterminez le nombre de moyennes.

26. Une suite géométrique dont les termes sont positives, son premier terme est égale au quadruple de son troisième terme et la somme de ses deuxième et cinquième termes = 36. Déterminer la suite.

27. Soient x , y , k ,m des termes consécutifs d'une suite géométrique. Démontrez que $x + y > k\,m$

28. **En lien avec l'environnement:** L'eau coule dans un réservoir avec un taux qui se double d'un jour à l'autre. Le premier jour, l'eau coulée est de 12 Litres. Combien de jours faut-il pour couler 1536 Litres dans le réservoir?

29. **En lien avec la population:** Le nombre de la population d'une ville augmente à un taux annuel de 3% Quel sera la population de cette ville après 5 ans? Sachant que le nombre actuel de la population est 600000 habitants?

30. **En lien avec le pourcentage:** Le prix actuel d'achat d'une voiture est 120 milles L.E. Si le prix de la voiture par un taux annuel de 12% Quel sera le prix de la voiture après cinq ans?

31. **En lien avec le revenu :** Le salaire mensuel d'un employé est 1200 L.E. Il obtient une prime annuelle de 6% du salaire. Quel sera son salaire après 6 ans?

32. **Réflexion créative:**

a Soient $a + b + c = 1$ où : a , b , c des quantité positives. Démontrez que :

$(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 8\,a\,b\,c$

b Si : $x \in \mathbb{R}^+$ où $x \neq 1$

démontrez que : $x + \frac{1}{x} > 2$

Séries géométriques

1 - 6

Somme des n termes d'une série géométrique

Une série géométrique est la somme d'une suite géométrique. La somme de n terme d'une suite géométrique est notée S_n .

Somme des n termes d'une série géométrique

trouver la somme des n termes d'une suite géométrique en fonction du son premier terme et sa raison.

Soit $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$ une suite géométrique dont le premier terme a et la raison q, alors on peut calculer la somme S_n comme suite :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \qquad (1)$$

En multipliant les deux membres par q alors :

$$rS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n \qquad (2)$$

par soustraction membre à membre, on obtient:

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

$$\therefore \ S_n(1 - q) = a(1 - q^n)$$

En divisant les deux membres par $(1 - q)$ où $1 - q \neq 0$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1}$$

Pensé critique : Quelle est la valeur de la somme si q = 1 .

Exemple

1) trouvez la somme de la série géométrique dont : $a = 3$, $q = 2$, $n = 8$

Solution

$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ **la somme d'une suite géométrique**

$S_8 = \frac{3(1 - 2^8)}{1 - 2}$ **En remplaçant a = 3, q = 2 et n = 8**

$S_8 = 3 \times 255 = 765$ **Simplifiant**

Essayer de résoudre

1) trouvez la somme de séries géométriques dans les quelles :

a) $a = 4$, $q = 3$, $n = 6$ b) $a = 1000$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$

Déterminer la somme des n termes d'une suite géométrique en fonction de ses premier et dernier termes.

Allez apprendre

- Somme d'une Série géométrique
- Série géométrique infini.
- La somme d'une Série géométrique infini
- transformer une fraction décimale périodique en une fraction rationnelle

Vocabulaires de base

- La somme d'une suite géométrique
- Suite géométrique infinie.
- La somme d'une suite géométrique infinie

Aide pédagogique

- Calculatrice
- Logiciels de graphisme

On sait que: $S_n = \dfrac{a - a\,q^n}{1 - q}$ **(1)**

et: $\ell = a\,q^{n-1}$ En multipliant les deux membres par q

alors $q\,\ell = a\,q^n$ **(2)**

D'après (2) et (1), alors :

$$\boxed{S_n = \dfrac{a - \ell\,q}{1 - q}, q \neq 1}$$

Exemple

2 Trouvez la somme de la série géométrique : $1 + 3 + 9 + ... + 6561$

Solution

$S_n = \dfrac{a - \ell\,q}{1 - q}$ **La formule de la somme d'une suite géométrique**

$S = \dfrac{1 - 6561 \times 3}{1 - 3}$ **En remplaçant :** $a = 1$, $q = 3$ **et** $\ell = 6561$

$S = \dfrac{19682}{2} = 9841$ **En simplifiant**

Essayer de résoudre

2 Trouvez la somme de deux séries géométriques suivants :

a $a = 9$, $q = 3$, $t_n = 6561$

b $a = 2048$, $q = \frac{1}{2}$, $t_n = 128$

Utiliser le symbole de la somme:

Exemple

3 Trouvez: $\sum\limits_{q=5}^{12} 3\,(2)^{q-1}$

Solution

$t_5 = a = 3(2)^{5-1} = 48$, $q = 2$, $n = 12 - 5 + 1 = 8$

$S_n = \dfrac{a\,(1 - q^n)}{1 - q}$ **La formule de la somme de la série géométrique**

$S_8 = \dfrac{48(1 - 2^8)}{1 - 2}$ **En remplaçant:** $a = 48$, $q = 2$, $n = 8$

$S_8 = 48 \times 255 = 12240$ **En simplifiant**

Réfléchissez : Pouvez-vous calculer la somme dans l'exemple précédant étant données les valeurs de a ; t_n ; q ? Expliquez ?

Essayer de résoudre

3 Trouvez la somme des séries suivantes:

a $\sum\limits_{q=7}^{16} \frac{1}{8}\,(2)^{q-1}$

b $\sum\limits_{q=3}^{11} 16\,(\frac{1}{2})^{q-1}$

Exemple **Déterminer la suite géométrique**

4 La somme de n premiers termes de la suite géométrique définie par la formule :
$S_n = 128 - 2^{7-n}$. Déterminez la suite, puis trouvez son septième terme.

Solution

Posons : $n = 1$ $\quad \therefore S_1 = 128 - 2^{7-1} = 128 - 64 = 64$ **d'où** $t_1 = 64$

Posons : $n = 2$ $\quad \therefore S_2 = 128 - 2^{7-2} = 128 - 32 = 96$

$\because t_1 + t_2 = S_2 \quad \therefore 64 + t_2 = 96 \quad \therefore t_2 = 96 - 64 = 32$

Posons : $n = 3$ $\quad S_3 = 128 - 2^{7-3}$ **d'où** $S_3 = 128 - 16 = 112$

$\because t_1 + t_2 + t_3 = S_3$ **d'où** $t_3 = S_3 - S_2$

$\therefore t_3 = 112 - 96 = 16$

$\therefore$ La suite est: $(64; 32; 16; \ldots\ldots)$, $t_7 = aq^6 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1$

Remarquez que: On peut déduire que $\because t_n = S_n - S_{n-1}$ d'où on peut trouvez les valeurs de a et q

$\therefore t_7 = S_7 - S_6 = (128 - 2^{7-7}) - (128 - 2^{7-6}) = -1 + 2 = 1$

Essayer de résoudre

4 La somme de n premier termes d'une suite géométrique est donnée par la formule $S_n = 1024 - 2^{10-n}$ Déterminer la suite

5 Déterminer la suite dont le premier terme = 243, le dernier terme = 1, et la somme de ses termes = 364

Exemple

5 **En lien avec la géométrie:** La figure ci-contre représente un triangle équilatéral dont la longueur du côté extérieur est le double de la longueur du côté du triangle intérieure qui a les sommets se trouvent aux milieux des côtés du triangle extérieur Si on contenue de cette manière, calculez la somme de 10 premiers triangles de ce modèle.

Solution

Rappelez-vous

Le périmètre du triangle équilatéral = 3 × longueur du côté

Le périmètre du $1^{ère}$ triangle $= 3 \times 40 = 120$

Le périmètre du $2^{ère}$ triangle $= 3 \times 20 = 60$

Le périmètre du $3^{ère}$ triangle $= 3 \times 10 = 30$

Donc le modèle est : 120 , 60 , 30 , ... C'est une série géométrique

sum of perimeters = 120 + 60 + 30 + ... c'est la somme d'une série géométrique

La somme de la série géométrique : $S_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant: $a = 120$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$

En utilisant la calculatrice $S_{10} = \dfrac{120\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \simeq 240$

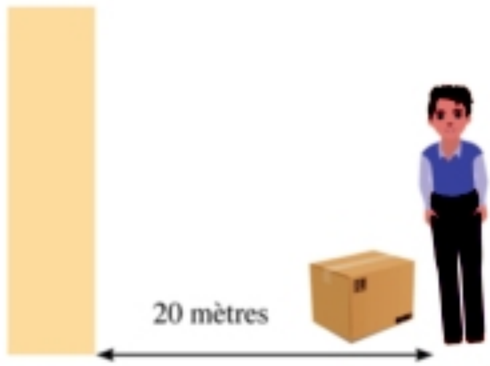
Essayer de résoudre

6 **En lien avec la biologie:** Si la reproduction de la bactérie se double chaque jour (dans un échantillon des recherches médicales). Quel sera-t-il le nombre de bactérie dans dix jours sachant le nombre de bactérie au premier jour était 800 ?

Séries géométrique infinies

Réfléchissez et discutez

Zyad veut déplacer une boite vers un mur, qui se trouve à 20 mètres de distance, en plusieurs étapes de sorte que la distance déplacée soit la moitié de la distance restante après chaque étape. Zyad peut-il atteindre le mur ? On peut répondre à cela par l'étude des séries géométriques non finies (infinies)



Définition 2

Une série géométrique non finis ce qui a un nombre infini des termes, si la somme de ses termes est un nombre réel alors elle est convergente ; car la somme tends vers un nombre réel, si la série n'a pas une somme alors elle est divergente

Dans le paragraphe réfléchissez et discutez: la somme des distances parcourus est donné par la série : $10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 + ...$ à chaque fois que le nombre des termes augmente la somme rapproche de 20 mètres, qui est la somme de cette série. Par conséquent on peut considérer que Zyad pouvait atteindre le mur quand les termes de la suite augmentent jusqu'à l'infinie, la figure ci-contre montre la représentation graphique de la somme S_n pour ce la la série est convergente et la somme rapproche d'un nombre réel tel que $|q| < 1$ elle est non convergente et la somme ne rapproche pas d'un nombre réel tel que $|q| \geqslant 1$

Exemple **Les séries convergentes et divergentes**

6 La quelle des séries géométriques peut-t-on calculer la somme à l'infini de ses termes ? Expliquez votre réponse.

a $75 + 45 + 27 + ...$ **b** $24 + 36 + 54 + ...$

Solution

a On trouve la raison de la série $q = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$, donc on peut calculer la somme à l'infini de ses termes car $-1 < \frac{3}{5} < 1$

b On trouve la raison de la série $q = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ t, donc on ne peut pas calculer la somme à l'infini de ses termes car $\frac{3}{2} > 1$

Rappelez-vous

si $|q| < 1$ alors:
$-1 < q < 1$
si $|q| \geqslant 1$ alors:
$q \geqslant 1$ ou $q \leqslant -1$

Essayer de résoudre

7) La quelle des séries géométriques peut-t-on calculer la somme à l'infini de ses termes ? Expliquez votre réponse.

a) $7 + 21 + 63 + ...$

b) $\frac{27}{4} + \frac{9}{2} + 3 + 2 + ...$

Somme des séries géométriques à l'infini :

On a vu que la somme de n termes d'une suite géométrique est donné par la formule $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

Si on addition un nombre infini de ses termes, alors q^n rapproche de zéro si $-1 < q < 1$

Alors la somme devienne : $\boxed{S_\infty = \frac{a}{1 - q}}$

Pensé critique: Vous pouvez calculer la somme d'une série géométrique à l'infini lorsque $|q| \geqslant 1$? Expliquez votre réponse.

Pensé critique: Vous pouvez calculer la somme d'une série géométrique dans le paragraphe réfléchissez et discutez ? Expliquez votre réponse.

Exemple

7) Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes s'il est possible:

a) $\frac{81}{8} + \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + ...$

b) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{25}{24} + ...$

Solution

a) On trouve la raison de la série : $q = \frac{27}{4} : \frac{81}{8} = \frac{27}{4} \times \frac{8}{81} = \frac{2}{3}$

$\because -1 < \frac{2}{3} < 1$ $\quad \therefore$ donc on peut calculer la somme à l'infini

$\because a = \frac{81}{8}, \; q = \frac{2}{3}$ **en utilisant la formule** $S_\infty = \frac{a}{1 - q}$

$\therefore S_\infty = \frac{\frac{81}{8}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{81}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{243}{8}$

b) On trouve la raison de la série : $q = \frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

$\because \frac{5}{4} > 1$ $\quad \therefore$ donc la série est divergente et n'a pas de somme.

Essayer de résoudre

8) Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes s'il est possible:

a) $96 - 48 + 24 - 12 + ...$

b) $\frac{7}{5} + \frac{21}{10} + \frac{63}{20} + ...$

Exemple **Utiliser le symbole de la somme**

8) Trouvez $\sum_{q=1}^{\infty} 42 \left(\frac{6}{7}\right)^{q-1}$

Solution

La formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini $S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$

Par substitution: $a = 42$ et $q = \frac{6}{7}$; $S_{\infty} = \frac{42}{1-\frac{6}{7}} = 294$

Essayer de résoudre

9 trouvez : $\sum_{q=1}^{\infty} 56\left(\frac{3}{4}\right)^{q-1}$

Convertir une fraction décimale périodique en une fraction ordinaire

Exemple

9 Mettez $0.\overline{432}$ sous la forme d'une fraction ordinaire.

Solution

Utilisons la formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini

$0,\overline{432} = 0,432 + 0,000432 + 0,000000432 + ...$

La formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini : $S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$

Posons $a = \frac{432}{1000}$, $q = \frac{1}{1000}$ d'où $S_{\infty} = \frac{\frac{432}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}$

$S_{\infty} = \frac{432}{1000} \times \frac{1000}{999} = \frac{16}{37}$ **En simplifiant**

Essayer de résoudre

10 Mettez chacune des fractions décimales suivantes sous la forme d'une fraction ordinaire: $0.\overline{6}$; $0.\overline{63}$; $0.4\overline{6}$; $0.6\overline{54}$

Applications sur les suites:

Exemple

10 Le tableau suivant représente le revenu mensuel d'un ouvrier à la fin de cinq années consécutives données en Livre Egyptienne. Sachant que le revenu suit une suite géométrique.

L'année	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Le revenu mensuel en L.E.	288	432	648	....	....

a trouvez la raison de la suite géométrique

b trouvez le revenu mensuel de cet ouvrier pendant la $4^{ème}$ et $5^{ème}$ années

c trouvez en L.E. la somme des revenus pendant cette durée

d trouvez le revenu moyen de cet ouvrier pendant cette durée

Solution

a $\because$ La suite est géométrique $\therefore$ la raison $(q) = \frac{\text{Deuxième terme}}{\text{Premier terme}} = \frac{432}{288} = \frac{3}{2}$

b Le revenu mensuel pendant la $4^{ème}$ année $= t_3 \times q = 648 \times \frac{3}{2} = 962$ L.E,

Le revenu mensuel pendant la $4^{ème}$ année $= t_4 \times q = 962 \times \frac{3}{2} = 1458$ L.E

c La somme des revenus pendant cette durée = 12 (288 + 432 + 648 + ... 5 termes)

$\because S_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

$\therefore S_n = \dfrac{288 \times 12 \ [(\frac{3}{2})^5 - 1]}{1 - \frac{3}{2}} = 45576$ L.E

On utilise les touches de la calculatrice de la manière suivante :

(3 ÷ 2) $x^{■}$ 5 REPLAY − 1 = × 1 2 ×

2 8 8 = ÷ (3 ÷ 2 − 1) =

d Le revenu moyen de cet ouvrier pendant cette durée $= \dfrac{\text{total des revenus}}{\text{nombre des mois}} = \dfrac{45576}{5 \times 12} =$ 759,6 L.E

Pensé critique : Vous pouvez calculer le revenu moyen en divisant (288 + 432 + 648 + .. à 5 termes) par 5 années ? Expliquez votre réponse.

Essayer de résoudre

11) **En lien avec la physique:** Une boule en fer roule sur un plan horizontale, si la boule parcourt 25 mètres à la première minute, puis elle commence à parcourir 60% de la distance parcourue pendant la minute précédente. trouver la distance totale parcourue jusqu'à ce qu'elle s'arrête.

Exercices (1 - 6)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1) La somme à l'infini des termes de la suite (8 ; 4 ; 2 ; ....) est :

a 16 **b** 20 **c** 24 **d** 30

2) Si la somme à l'infini des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ est égale à $13\frac{1}{2}$ alors son premier terme:

a 6 **b** 8 **c** 9 **d** 12

3) Si la somme à l'infini des termes d'une suite géométrique de premier terme 12 est égale à 96 , alors sa raison:

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{7}{8}$ **d** $\frac{3}{4}$

4) Si la somme de n premiers termes de la suite géométrique définie par la formule $S_n = 3^{n+1} - 4$, alors troisième terme

a 18 **b** 23 **c** 54 **d** 77

5) Une suite géométrique son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes qui le suivent, alors la raison de la suite est égale à :

a 0,5 **b** 0,333 **c** 0,25 **d** 0,666

Décelez l'erreur :

6 On peut calculer la somme à l'infini d'une série géométrique lorsque $|q| \leqslant -1$ l'infini de ses termes

7 La somme à l'infini des termes de la suite (16 ; 8 ; 4 ; ....) est plus grande que le double de son premier terme.

Répondez aux questions suivantes:

8 trouvez la somme de chacune des suites géométriques suivantes:

a (6 ; 12 ; 24 ; á 6 termes) b (125 ; 25 ; 5 ; .... á 6 termes)

c (3 ; - 6 ; 12 ; .... ; 768)

9 Parmi les suites géométriques suivantes, laquelle peut-t-on calculer la somme à l'infini ? trouvez cette somme si cela est possible

a (24 ; 12 ; 6 ; ....) b (3 ; - 6 ; 12 ; ....)

c ($\frac{1}{32}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; ....) d $(2 \times 5^{1-n})$

10 Trouvez la somme à l'infini de chacune des suites géométriques suivantes:

a (3 ; $\sqrt{3}$; 1 ; ..) b $(t_n) = (3^{3-n})$

11 Mettez chacune des fractions décimales suivantes sous la forme d'une fraction ordinaire $0.\overline{7}$; $0.2\overline{4}$; $0.8\overline{63}$. Utilisez la formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini.

12 trouvez la suite géométriques dont le premier terme = 243 ; son dernier terme = 1 , et la somme de ses termes = 364.

13 Trouvez la suite géométriques dont la somme de ses termes = 1093 , son dernier terme 729 et la raison 3

14 Combien de termes de la suite géométrique (3 ; 6 ; 12 ; ..) faut- il additionner à partir du premier terme pour obtenir = 381?

15 Démontrez que la suite $(t_n) = (10 \times 2^{n-2})$ est une suite géométrique, puis trouvez le nombre des termes qu'il faut additionner à partir du premier terme pour obtenir 2555 .

16 Trouvez le nombre de termes de la suite géométrique dont la somme de ses termes égale à $121\frac{4}{9}$ son premier terme égale à 18 et son dernier terme égale à $\frac{1}{9}$.

17 Soit (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_2 = 6$ et $t_3 - t_1 = 9$. Déterminer la suite et la somme de douze premiers termes de la suite.

18 Une suite géométrique dont la somme de ses cinq premiers termes = 7.75 et la somme de ses cinq suivants termes = 248 . Déterminez la suite.

19 Si le premier terme d'une suite géométrique infinie est = 18 et son quatrième terme est = $\frac{16}{3}$. Trouvez la somme.

20 La somme à l'infinie d'une suite géométrique infinie $\frac{375}{4}$, et la somme de ses premier et deuxième termes est égale à 90, Démontrez qu'il existe deux suites et trouvez-les .

21 Trouvez suite géométrique telle que la somme de ses premier et deuxième termes = 16 , et la somme de tous termes = 25.

22 Une suite géométrique infinie de termes positifs, son premier terme dépasse son deuxième terme de 30 et la somme à l'infini de tous ses termes est égal à $\frac{135}{2}$. Déterminer la suite

23 Soit (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_1 + t_4 = 70$, $t_2 + t_3 = 60$, Dans ce cas là, démontrez qu'il existe deux suites que l'on peut trouver la somme de tous les termes jusqu'à l'infini puis trouvez la somme.

24 Soit (t_n)est une suite géométrique, telle que $t_2 - t_6 = 45$ et S_4 premiers termes = 180 . Déterminer la suite. Montrez qu'on peut trouver la somme de tous ses termes jusqu'à l'infinie puis trouvez la somme.

25 Une suite géométrique infinie son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes que le suit, la somme de ses premier et deuxième termes = 9. Déterminer la suite .

26 Une suite géométrique infinie, un terme quelconque est égal au double de la somme à l'infini de tous les termes que le suit, si son quatrième terme = 3. Déterminer la suite.

27 **En lien avec l'exploitation minière:** Une mine d'or a produit 4200 kg d'or le premier an. Le production diminue 10% annuellement. Calculez la production de la mine en huitième année puis trouvez la production de la mine dans les huit premières années

28 **En lien avec le revenu:** Le salaire annuel d'une personne qui travail dans une usine est de 7200 L.E Une augmentation annuelle de 0,6 % du salaire précédant. Calculez son salaire à la septième année et la somme des salaires après les sept premiers années .

Applications sur le problème de l'explosion démographique :

Activité

Le nombre des habitants dans une ville était $\frac{1}{2}$ million à la fin de l'année 2000, il s'est élevé à 8 millions d'habitants à la fin de l'année 2016. Si le l'accroissement de la population de taux constant et forme une suite géométrique,

déterminez :

1- Le taux d'accroissement de la population.
2- L'équation affine qui sert à estimer la population.
3- Estimez le nombre des habitants en 2020.
4- Estimez le nombre des habitants en 2025.
5- Naviguez sur le WEB pour faire une recherche sur le problème de l'explosion démographique en Egypte, et l'influence de ce problème sur le revenu national en suggérant des solutions à ce problème.

Résumé de l'unité

La suite: est une fonction son ensemble image est l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$, ou sous ensemble de $\mathbb{Z}$ et son ensemble image est l'ensemble des nombres réelles R. En remarquant ce que suit :

- Les éléments de la suite sont des images des éléments de son ensemble image.
- Le symbole (t_n) désigne une suite et le symbole t_n désigne le niéme terme.
- Dans une suite on peut ordonnée ses termes et les déterminer.
- La suite est finie si ses termes sont finis et la suite est infinie si ses termes sont infinis
- La suite (t_n) est **croissante** si $t_{n+1} > t_n$
- La suite (t_n) est **décroissante** si $t_{n+1} < t_n$
- La suite (t_n) est **constante si tous ses termes sont égaux**
- La suite est représentée graphiquement comme une fonction par représenter ses couples par des points sur le plan cartésien.

La série : C'est la somme des termes d'une suite, on utilise le symbole " Σ " pour écrire les séries à une forme simple.

- **La série finie:** Contient un nombre limités des éléments et s'écrit à la forme: $\sum_{q=1}^{n} (t_n)$
- **La série infinie :** On ne peut pas déterminer ses éléments et s'écrit à la forme $\sum_{q=1}^{\infty} (t_n)$

La suite arithmétique: C'est la suite dans la quelle la différence entre deux termes consécutifs est constante, cette constante est appelée la raison de la suite que sera notée (r) où r $t_{n+1} - t_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$

- On peut déterminer la suite arithmétique en connaissant son premier terme (a) et sa raison (r).
- La relation entre n et t_n est $t_n = dn + b$ où r et b sont deux constants à déterminer. r est la raison de la suite c'est une relation linéaire représenté graphiquement par un ensemble des points.
- La suite est croissante si $r > 0$ et décroissante si < 0
- Le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite arithmétique (t_n) dont le premier terme est a et sa raison r est donné par la relation, : $t_n = a + (n - 1) r$
- Si a ; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors b est appelée la moyenne arithmétique de a et c tel que $b = \frac{a + c}{2}$
- On peut insérer plusieurs moyennes arithmétiques entre deux nombres, et nombre des termes = nombre des moyennes +2

- La somme de n termes d'une suite arithmétique :

En fonction de première terme et la raison: $S_n = \frac{n}{2}(a + t_n)$

En fonction de premier et dernier terme $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$

La suite géométrique: la suit (t_n) où $t_n \neq 0$ est appelée une suite géométrique si $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ = constant pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$ cette constante est appelée la raison de la suite que sera notée (q) La représenté graphiquement d'une suite géométrique suit une fonction exponentielle par des point qui représente des couples dans le plan cartésien .

- Le $n^{ième}$ terme de la suite géométrique (t_n) dont le premier terme est a et sa raison q est donné par la relation, $t_n = a \times q^{n-1}$
- Si a ; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors b est appelée la moyenne géométrique de a et c tel que $b = \pm\sqrt{ac}$

Relation entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique:

- La moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs est plus grande que la moyenne géométrique de ces deux nombres.
- La moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs et égaux est égale à la moyenne géométrique de ces deux nombres.
- La somme de n termes d'une suite géométrique:

1) En fonction de première terme et la raison: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$

2) En fonction de premier et dernier terme: $S_n = \frac{a - \ell q}{1-q}, q \neq 1$

La série géométrique non finie: Contient un nombre infini des termes $|q| < 1$

- Somme des séries géométriques à l'infini $S_\infty = \frac{a}{1-q}$, où $|q| < 1$

Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. La suite définie par $t_n = \frac{(-1)^n}{3n-2}$ .... est une suite .... :

   a croissante   b décroissante   c ni croissante ni décroissante   d constante

2. La série arithmétique $3 + 7 + 11 .... + 35$ s'écrit en utilisant le symbole de la somme à la forme:

   a $\sum_{r=1}^{8} (4r - 1)$ b $\sum_{r=1}^{9} (2r - 1)$ c $\sum_{r=1}^{9} (3r - 4)$ d $\sum_{r=1}^{8} (3r - 4)$

3. Si $2a + 2$, $6a - 2$; $7a$ sont trois termes consécutives d'une suite arithmétique, alors a :

   a 1   b 2   c 3   d 4

4. La somme de la série arithmétique $\sum_{r=3}^{8} (2r + 1)$ est égal à:

   a 64   b 72   c 76   d 80

5. Une suite géométrique dont la somme des n premiers termes est donnée par la relation $S_n = 3(3^n - 1)$, alors le troisième terme de la suite est égal à:

   a 24   b 36   c 48   d 54

6. Répondez aux questions suivantes: Parmi les suites (t_n) définie ci-dessous, déterminez celle qui est croissante, celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante.

   a $(t_n) = (3 - 2n)$ b $(t_n) = (2(\frac{3}{2})^{n-1})$ c $((-1)^n (n + 1))$

7. Sachant que $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, En utilisant le symbole de la somme Σ trouvez la valeur de chacun de ce qui suit:

   a $\sum_{r=1}^{n} (r + 2)$ b $\sum_{r=1}^{8} (r^2 - 3)$

8. Parmi les suites, déterminez celle qui est arithmétique, celle qui est géométrique, ensuite trouvez la raison de chacune d'elles:

   a $(21 ; 14 ; 7 ; ...)$ b $(-7 ; -12 ; -17 ; ...)$ c $(-3 ; 12 ; -48 ; ...)$

   d $(\frac{1}{5} ; \frac{4}{5} ; \frac{7}{5} ; ...)$ e $(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3} ; \frac{2}{9} ; ...)$ f $(\frac{1}{3} ; \frac{5}{6} ; \frac{4}{3} ; ...)$

9. Soit $(12 ; 14 ; 16 ; ...)$ suite arithmétique, trouvez:

   a La valeur du huitième terme.   b Le rang du terme dont la valeur 102

10. Soit (t_n) suite arithmétique dans laquelle $t_6 = 16$ et $t_{20} = -26$, trouvez la suite.

11. Une suite arithmétique dont le sixième terme = 34 et la somme de son septième et de son septième termes est égale à 88. Déterminez la suite, puis trouvez le rang du terme dont la valeur est plus grande que 105.

12. Si la somme des deuxième moyenne et quatrième moyenne d'une suite arithmétique est égale à 12 et la septième moyenne dépasse la troisième moyenne de 4. Quelle est la suite?

13) Une suite géométrique son premier terme = 7 et son cinquième terme = 112. Trouvez la suite.

14) Une suite géométrique dont le troisième terme est égal à l'inverse de son premier terme et son cinquième terme égale à $\frac{1}{125}$. Démontrez qu'il y a deux solutions puis trouvez les deux suites.

15) Si (t_n)) est une suite géométrique telle que $t_n = 7 \times (3)^{n-1}$, trouvez la moyenne géométrique entre t_3 et t_7.

16) Si 4; b ,c forment une suite arithmétique et 2; b + 3 ; 5 c forment une suite arithmétique et b et c.

17) Si $\frac{1}{2}$ a ; b ; c sont des quantités positives forment une suite géométrique, démontrez que $4b < 1 + 2c$.

18) **En lien avec la production:** Un puits de pétrole a produit 560 milles barils le premier an. Le production diminue 4% annuellement. Calculez la production maximale du puits.

19) **En lien avec la géométrie:** Un rectangle dont les dimensions sont 16 cm et 12 cm. Des milieux de ses cotés, on trace un polygone puis on trace un autre polygone de même façons et on continue de cette manière, calculez la somme des périmètres des triangles obtenus.

20) **En lien avec la santé:** Un malade prend 21 comprimés d'un médicament pendant une semaine. Le médecin lui conseille de diminuer le dosage d'un taux de 3 comprimés par semaine. Après combien de semaines le malade arrêtera ce médicament ?

21) **En lien avec les salaires:** Le salaire mensuel d'un ouvrier est de 1200 L.E.au premier année. Ce salaire augment d'un taux annuel de 10% . Ecrivez en utilisant le symbole de la somme le salaire obtenu pendant cinq années, puis calculez cette somme.

22) **En lien avec l'environnement:** L'eau coule d'un robinet avec un taux de 25 litres pour la première minute, ce taux augmente deux litres chaque minute l'eau coulée est de 12 Litres. Combien de temps faut-il pour que l'eau coulé soit 880 Litres ?

23) Une balle si elle tombe d'une hauteur quelconque, elle répond aux deux tiers de la distance parcourue Si la balle tombe de 90 mètres de hauteur, calculez la somme des distances parcourues jusqu'à son arrêt?

24) Le premier terme d'une suite géométrique = 81et le sixième terme $\frac{1}{3}$. Trouver la somme à l'infini de ses termes à partir de son troisième terme.

Epreuve cumulative

1. Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

   a) $x^2 - 3x - 4 = 0$. b) $x + \frac{2}{x} = 3$.

2. Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des systèmes d'équations suivantes:

   a) $x + 2y = 5$, $2x - y = 5$ b) $a - b = 1$, $a + 2b = 10$

   c) $x - y = 2$, $xy = 3$ d) $3a + 5f = 21$, $2a - 7f = -17$

3. Factorisez chacune des expressions suivantes:

   a) $ar^3 - ar$ b) $x^2y + xy^2 - 2xy$

   c) $a + ar + ar^2$ d) $1 + r + r^2 + r^3$

4. Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations et des inéquations suivantes:

   a) $2^{x-1} = \frac{1}{8}$ b) $(-\frac{1}{2})^{n+2} = \frac{1}{64}$

   c) $2^{1-5n} > 7$ d) $(\frac{1}{2})^{n+2} < 0{,}01$

Comparaisons: Montrez la différence entre ce qui suites :

5. Les suites et les séries.

6. Le $n^{ième}$ terme d'une suite arithmétique et le $n^{ième}$ terme d'une suite géométrique.

7. La somme d'une série arithmétique et la somme d'une série géométrique.

Questions à courtes réponses:

Trouver le premier terme (a) dans chacune de:

8. La suite arithmétique dont: $q = 3$, $t_5 = 32$

9. La suite géométrique dont: $q = \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{1}{16}$

10. La série arithmétique dont $q = 6$, S_{16} premiers termes $= 128$

11. La série géométrique dont : $q = 2$, S_8 premiers termes $= 255$

12. La suite géométrique infinie dont: $q = \frac{1}{2}$ et $S_\infty = 128$

Questions à multiples réponses:

13. Ecrivez trois suites telles que l'une est arithmétique la deuxième est géométrique et la troisième n'est ni arithmétique ni géométrique et chacune d'elle commence par 2 ; 6.

14. Ecrivez trois suites géométriques de premier terme 16 tel que la première est croissante la deuxième est décroissante et la troisième est constante. Puis trouver la somme à l'infinie de l'une de ses suites.

15 Ecrivez la série géométrique 64 +32 + 16 + …… par deux méthodes différentes en utilisant le symbole de la somme.

16 **Raisonnement:** Quand la série géométrique infinie admet une somme, et quand elle n'a pas une somme ? Argumentez votre raisonnement.

Life application:

Questions à multiples réponses:

17 Soit (15 ; 3k + 2 ; 4 k – 5 ; ...) une suite arithmétique. trouvez la valeur de K.

18 Déterminez la suite arithmétique dont la somme de son cinquième et son dixième terme est égal à 20 et son septième terme est égal au triple de son quatrième terme.

19 Le vingtième terme d'une suite arithmétique égale à 41 et la somme de son troisième et de son sixième terme dépasse son sixième terme de un. trouvez la suite.

20 (t_n) est une suite géométrique $t_2 = 5$ et $\frac{t_7}{t_4} = \frac{1}{27}$ Déterminez la suite.

21 Les quantités positives a ; 2 b ; 2c ; 5 sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Démontrez que : $2(b^2 + c^2) > a\,c + 5\,b\,d$.

22 Une suite arithmétique dans laquelle $t_{12} = 38$, $t_{35} = 245$, déterminez la suite.

23 La somme du dix-neuvième et du vingtième terme d'une suite arithmétique égale à 144 et la somme du vingtième de vingt-unième terme égale à 152. trouvez ;

a Le vingtième terme .

b Le nombre de termes de la suite qu'faut il additionner à partir du premier terme pour que la somme soit égale à 160.

24 Une suite arithmétique dont les termes sont positifs, la somme de ses quatre premiers termes est 50 et le produit de son deuxième et de son troisième termes est égal à 150. Déterminez la suite puis trouvez la somme de ses quinze premiers termes.

25 Une suite géométrique dont les termes sont positifs et la somme de ses douze premiers termes273 fois de la somme de ses quatre premiers termes. Si son huitième terme = 640. Déterminez la suite.

26 Soient ℓ, la somme des sept premiers termes d'une suite géométrique et m la somme des sept termes suivants. Démontrez que la raison de la suite = $\sqrt[7]{\frac{m}{\ell}}$.

Unité 2

Arrangements et Combinaisons

Introduction de l'unité

Le dénombrement est l'un des compéteces de base en mathématiques, souvent on est cofronté à des problèmes pour en résoudre on a besoin des procedures et des méthodes variées de dénombrement. Dans cette unité nous allons aborder les différentes stratégies du dénombrement parmi lequelles le principe fondamental de dénombrement et ses applications parmi lesquelles : la notion de permutation qui exprime le nombre des méthodes de réarrangement possible d'objets d'un ensemble.

Les combinaisons : C'est le choix sans répétitions.

Les grands savant Omar El khayaam, Isaak Newton et Bascal avaient un grand apport pour le fondement de ce domaine, cet apport a une influence jusqu'à aujourd'hui.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le principe de dénombrement et des applications simples.
- Reconnaître l'introduction des Arrangements et des Combinaisons.
- Utiliser l'ordinateur pour calculer les Arrangements et les combinaisons

Vocabulaires de base

- Principe fondamental de dénombrement
- Principe conditionnelle de dénombrement
- Opération
- Diagramme de l'arbre
- Factorielle
- Arrangements
- Combinaisons
- Eléments
- Ordre
- Comité
- Sous-ensemble

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Principe de dénombrement.

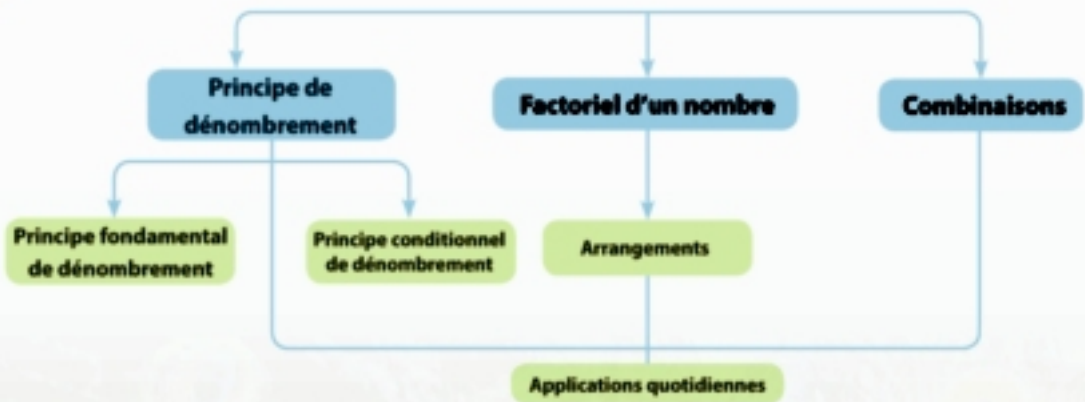
Leçon (2 - 2): Factorielle - Arrangements.

Leçon (2 - 3): Combinaisons

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – Logiciels de graphisme

Organigramme de l'unité



Unité 2

2 - 1 Principe de dénombrement

Allez apprendre

- Notion de principe de dénombrement et applications simples.
- Principe fondamental de dénombrement.
- Principe conditionnelle de dénombrement .

Vocabulaires de base

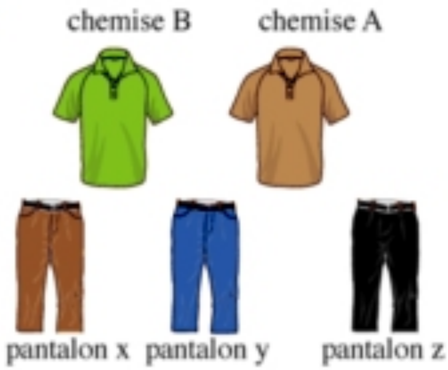
- Principe fondamental de dénombrement
- Operation
- Diagramme de l'arbre

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

Si on vous a demandé d'habiller une chemise et un pantalon parmi deux chemises et trois pantalons
De combien de façons peut-on choisir le tenue?



Exemple

1 Combien y a-t-il de possibilités de choisir une comité d'un étudiant parmi trois étudiants (Ashraf, Mohamed et Hassan) et d'une étudiante parmi deux étudiantes (Samar et Mona)?

Solution

Dans cet exemple, c'est facile de savoir le nombre des méthodes de choix. Par exemple, on peut choisir : Ashraf , Samar ou Ashraf , Mona ou Mohamed , Mona ou Hassan , Samar .... etc.
Cela peut être exprimé par le diagramme suivant (l'arbre des choix):

Etudiant	Etudiante	Choix
Ashraf	Samar	Ashraf، Samar
	Mona	Ashraf، Mona
Mohamed	Samar	Mohamed، Samar
	Mona	Mohamed، Mona
Hassan	Samar	Hassan، Samar
	Mona	Hassan، Mona

Le nombre des méthodes de choix d'un étudiant parmi trois = 3
Le nombre des méthodes de choix d'une étudiante parmi deux = 2
Le nombre des méthodes de choix = $3 \times 2 = 6$ méthodes

Essayez de résoudre

1 Dans le pragraph **Réfléchissez et discutez** , déterminez le nombre possible des choix?

Exemple

2 Combien de nombres de trois chiffres peut-on former de sorte que:
- le chiffre des unités soit des éléments $\{3 ; 7\}$
- le chiffre des dizaines soit des éléments $\{2 ; 4 ; 9\}$
- le chiffre des centaines soit des éléments $\{1 ; 5\}$

Solution

Centaines	Dizaines	Unités	Le nombre
1	2	3	123
		7	127
	4	3	143
		7	147
	9	3	193
		7	197
5	2	3	523
		7	527
	4	3	543
		7	547
	9	3	593
		7	597

A l'aide du diagramme de l'arbre, on trouve que :

Le nombre de façons de choix du chiffre des unités × Le nombre de façons de choix du chiffre des dizaines × Le nombre de façons de choix du chiffre des centaines = $2 \times 3 \times 2 = 12$ méthodes

A apprendre

Principe fondamental du dénombrement

Définition : Soient m_1 le nombre de façons d'effectuer un travail quelconque, m_2 le nombre de façons d'effectuer un seconde travail, m_3 le nombre de façons d'effectuer un troisième travail … etc. alors le nombre de façons d'effectuer ces travaux simultanément = $m_1 \times m_2 \times m_3 \times ... \times m_n$

Exemple

3) Khaled peut choisir l'une des garnitures suivantes : foie, poulet ou poisson et l'une des boissons suivantes : orange, citron ou de la mangue. Combien de repas Khaled peut-il choisir ?

Solution

Le nombre de choix des garnitures = 3 manières.

Le nombre de choix des boissons = 3 manières.

Le nombre de choix = $3 \times 3 = 9$ manières.

Essayez de résoudre

2) Dans un restaurant, on propose 6 types de pizza, 4 types de salades et 3 types de bossons. Quel est le nombre de repas possible peut-on présenter dans ce restaurant ? Sachant qu'un repas consiste : une pizza, une salade, un bosson?

Exemple **Principe conditionnelle de dénombrement**

4) Combien y a-t-il de manières pour former un nombre de 3 chiffres différents des chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Solution

On commence par le chiffre de centaines (une condition nécessaire que ce nombre ne soit pas zéro)

Le nombre de manières de choisir le chiffre des centaines = 4

Le nombre de manières de choisir le chiffre des dizaines = 4

place	centaines	dizaines	unités
N.de manières	4	4	3

Le nombre de manières de choisir le chiffre des unités = 3

$\therefore$ Le nombre total de manières = $4 \times 4 \times 3 = 48$ manières

Essayez de résoudre

3) De combien de façons peut-on former un nombre de quatre chiffres différents des chiffres $\{2; 3; 4; 7\}$, de sorte que le chiffre de dizaines soit pairs .

Exercices (2 -1)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Le nombre de façons que 4 étudiants occupent 4 sièges situant de même rangé égale à :
   a) 1 b) $4 + 4$ c) 4×4 d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

2) Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres différents des chiffres $\{ 5 ; 3 ; 0 ; 2\}$?
   a) 3×2 b) 4×2 c) 3×3 d) 3×4

3) Combien de nombres impaires qui se composent de trois chiffres distincts parmi les chiffres $\{2 ; 3 ; 6 ; 8\}$?
   a) $8 \times 6 \times 3$ b) $4 \times 3 \times 3$ c) $4 \times 3 \times 2$ d) $2 \times 3 \times 1$

4) Combien de nombres formés de trois chiffres distincts parmi les chiffres $\{2 ; 3 ; 5\}$?

5) Combien de nombres formés de quatre chiffres distincts dont le chiffre des unités est 6 peut-on former parmi les chiffres $\{2 ; 3 ; 6 ; 8\}$?

6) La plaque d'immatriculation d'un gouvernorat se compose de trois lettres alphabétiques distinctes suivie d'un nombre a trois chiffres distincts et différents (le zéro ne peut être de ces chiffres) Combien pourrait-on avoir de plaques d'immatriculation différentes?

7) Combien de nombres formés de trois chiffres différents des nombres $\{2 ; 5 ; 8 ; 9\}$ et qui sont inferieurs à 900?

8) Les numéros des réseaux cellulaires dans un pays consistent onze chiffres. On compose d'abord (025) puis on compose le reste du numéro. Trouvez le nombre maximum des lignes qui peuvent-être chargés dans ces réseaux.

Factorielle – Arrangements

2 - 2

Allez apprendre

- Factorielle d'un nombre
- Arrangements

Vocabulaires de base

- Factoriel d'un nombre
- Arrangements
- Sub-Permutation

Matrials

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

A l'aide de ce que vous avez étudiez dans la leçon précédente, répondez aux questions suivantes :

1) De combien de façons quatre étudiants peuvent-ils occuper les trois sièges d'une rangée ?

2) De combien de manières cinq concourant peuvent se lever au bord de la piscine pour commencer le concours?

A apprendre

Définition 1

Factorielle : La factorielle d'un nombre entier positif n s'écrit sous la forme n! il est égal au produit de tous les nombres entiers positifs inferieurs ou égale à n :

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$$

Note

- Si $n = 0$ **alors** $0! = 1$
- Si $n = 1$ **alors** $1! = 1$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4\ 3!$,
  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 : 5!$

En général : $n! = n\,(n-1)!$ où $n \in \mathbb{N}^{+}$

Exemple

1) a) Calculez $\frac{10!}{8!}$ b) Soit $n! = 120$. trouvez la valeur de n.

Solution

a) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$

b) $n! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $\therefore n! = 5!$ $\therefore n = 5$

Essayez de résoudre

1) **Calculez :** a) $\frac{15!}{12!}$ b) $\frac{7!}{5!} + \frac{9!}{7!}$

Exemple

2) Trouvez l'ensemble de solution de l'équation : $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

Solution

$\because \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!\,n\,(n-1)}{(n-2)!} = 30 \qquad \therefore\ n(n-1) = 6 \times 5 \qquad \therefore\ n = 6$

Essayez de résoudre

(2) Soit $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{2}{(n+1)!} = \dfrac{56}{(n+2)!}$. trouvez la valeur de n

Pensé critique : soit $a! = 0!$. quelle est la valeur de n?

Arrangements

Exemple préliminaire : Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à partir des chiffres {2 ; 3 ; 5}?

Les nombres sont : 532 ; 352 ; 523 ; 253 ; 325; 235. chacun de ces nombres est appelé un arrangement des chiffres donnés.

Le nombre $= 3 \times 2 \times 1$ **on le note** A_3^3 **qui se lit** (3 A 3).

Le tableau suivant indique comment obtenir le nombre de façons :

centaines	dizaines	unités
1	2	3

Pour cela un arrangement d'un nombre d'objets, c'est de les agencer dans un certain ordre

Définition 1

Le nombre d'ARRANGEMENTS de n objets distincts pris r à r chaque fois est noté par A_n^r où:

$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Par convention $A_n^0 = 1$

Par exemple :

- $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 \times \dfrac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$ $3 \times 2 \times 1 = \dfrac{6!}{(6-3)!}$ $\qquad A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!}$
- $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \dfrac{2 \times 1}{2 \times 1} = \dfrac{7!}{(7-5)!}$

De ce que précède, on déduit:

$A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ où $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \leqslant n$

Utilisation d'une calculatrice

L'arrangement est symbolisé par $^n p_r$ sur une calculatrice scientifique On utilise les touches Shift × **Pour calculer la valeur de $^5 p_2$ on appuie successivement sur les touches:**

5 Shift × 2 =

Réponse = 20

Exemple

(3) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :

a A_7^4 b A_4^4 c A_4^3

Solution

a $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ b $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Que remarquez-vous de deux phrases b et c ?

Essayez de résoudre

(3) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : **a** $A_5^2 + A_6^3$ **b** $\frac{A_5^5}{A_5^4}$

Exemple

(4) De combien de façons distinctes cinq étudiants peuvent-ils occuper les sept sièges d'une rangée ?

Solution

On a 7 sièges, on veut en choisir 5 chaque fois

$\therefore$ Le nombre de façons $= A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

Utiliser d'une calculatrice : 7 SHIFT × (npr) 5 =

Essayez de résoudre

(4) Combien de mots de cinq lettres différentes peut-on former de l'alphabet arabes ?

Exemple (Ordre dans un cercle)

(5) De combien de façons distinctes quatre personnes peuvent-elles occuper quatre sièges cocycliques?

Solution

Dans ce cas : il y a un seul choix pour la première personne, 3 choix pour la deuxième, 2 choix pour la troisième et un seul choix pour la dernière personne.

Le nombre de façons $= 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

Pensé critique : Pouvez-vous déduire le nombre des façons d'ordonner n personnes sur un cercle?

Essayez de résoudre

(5) Combien de façons peut-on ordonner 9 personnes sur neuf sièges cocycliques?

Exemple

(6) Soit $A_7^r = 840$, trouvez la valeur de $(r - 4)!$

Solution

On divise le nombre 840 par 7 puis on divise le résultat par 6 ensuite on divise le résultat par 5 …etc jusqu'à ce qu'on obtient 1

840	7
120	6
20	5
4	4
1	

$\therefore$ Le nombre $840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = A_7^4$

$\therefore A_7^r = A_7^4$ $\quad \therefore r = 4$ $\quad \therefore (r - 4)! = 0! = 1$

Essayez de résoudre

(6) Soit $A_9^{r-1}\,_{-1} = 504$, trouvez la valeur de $(r + 1)!$

Pensé critique : **1)** Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : A_7^7 et $7!$

Que remarquez-vous ?

Exercices (2 - 2)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. De combien de façons différentes peut-on choisir un présédent et un vice président d'une comité formée de 12 membres

   a 2   b 23   c 66   d 132

2. Si $A_5^r = 60$, alors r est égal à :

   a 4   b 3   c 2   d 5

3. Si $A_n^3 = 120$, alors n est égal à :

   a 6   b 5   c 4   d 3

4. Le nombre de façons d'arranger les lettres du mot « voir » est égal à :

   a 4   b 9   c 10   d 24

5. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres $\{3, 4, 5, 6\}$?

   a 48   b 30   c 12   d 4

6. Le nombre de façons d'arranger 7 enfants sur un cecle est égal à:

   a 1   b 7   c 720   d 5040

7. Le numéro de téléphone se copose de 8 caractères

9	c	......	......	......	......	......	......

   c est l'un des chiffres 3 ; 4 ; 5 ; 8 tandis que chacun des autres caractères est un chiffre quelconque. Combien de numéros possibles peut-on avoir ?

   a 499 999   b 4 000 000   c 4 999 999   d 10 000 000

8. Hussam peut choisir l'une des garnitures suivantes : Rissole, poulet ou poisson et l'une de deux boissons suivantes : jus ou eaux gazeuse. Combien de repas Khaled peut-il choisir?

   (Utilisez l'arbre d'étalement pour résoudre le problème)

9. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4?

10. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4?

11. Combien y a-t-il de nombres pairs formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3; 4?

12. De combien de manières peut-on former une comité d'une femme et d'un homme parmi 4 femmes et 3 hommes ?

13 Un magasin de crème glacée offre trois volumes : petit, moyen, grand et cinq saveurs : fraise, mangue, citron, lait, chocolat. Quel est le nombre de choix possibles pour acheter une crème glacée

14 Parmi l'ensemble des lettres {a ; b; c ; d; e ; f}, trouvez le nombre de manières de choisir

a une seule lettre.
b deux lettres distinctes.

15 **Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :**

a $7! \div 5!$
b $32! - 3!$
c $A_5^3 \times 2!$
d $A_3^3 \times A_2^2$
e $A_8^1 + A_8^2$
f $A_7^0 + A_7^7$

16 **Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :**

a $n! = 24$
b $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$
c $A_{15}^n = 2730$
d $A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 = 50$

17 Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :

a $A_7^n = 210$
b $n\,(2n-1)! = 12$

18 Si $A_n^4 = 14 \times A_{n-2}^3$ trouvez la valeur de n.

19 De combien de façons différentes peut-on choisir un présédent, un vice-président et secrétaire d'une comité formée de dix membres.

20 De combien de façons le professeur de l'éducation physique peut-il choisir trois étudiants l'un aprés l'autre Parmi huit pour participer à l'équipe de football, basket-ball, volly-ball respectivement ?

21 Démontrez que : $\frac{(n+2)!}{n!} = A_{n+2}^2$

Activité

1- Soit x = {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9}. Avec les chiffres de cet ensemble:

a Combien de nombres formés de deux chiffres distincts peut-on constitués?

b Combien de nombres formés de deux chiffres peut-on constitués?

c Combien de nombres formés de trois chiffres distincts peut-on constitués?

d Combien de nombres formés de trois chiffres distincts inferieur à 500 peut-on constitués?

e Combien de nombres formés de quatre chiffres distincts don le chiffre des unités est 2 peut-on constitués?

Unité 2

2 - 3 Combinaisons

Allez apprendre

- Notion des combinaisons et applications simples.
- Triangle de Pascale.

Vocabulaires de base

- Combinaisons
- Objets
- Ordre
- Comité
- Sous-ensemble

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de Graphisme

Tip

Enrechissez vos connaissances une combinaison peut s'écrire sous la forme of $C_n^r = \binom{r}{n}$

Préface

On veut sélectionner deux équipes parmi quatre { a ; b; c ; d} pour un matche de football. Les choix possibles sont:

(a ; b), (a ; c), (a ; d), (b ; a) , (b ; c), (b ; d), (c ; a), (c ; b), (c ; d), (d ; a), (d ; b), (d ; c).

De ce qui précède, on remarque que le choix (a ; b) est différent de celui de (b ; a)…….etc.

Si on veut choisir sans prendre l'ordre en compte, alors les choix possibles sont : {a ; b}, {a ; c}, {a ; c}, {b ; c}, {b ; d}, {c ; d}. Chacun de ces choix est appelé une « combinaison ».

A apprendre

Définition 1

Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts noté C_n^r où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$ **et** $n \in \mathbb{Z}^+$

Dans la préface précédente :

Le nombre de façons différentes de choisir 2 objets parmi 4 objets distincts noté C_4^2 qui se lit (4 C 2) ou $\binom{4}{2}$. qui se lit « 2 au dessus de 4 »

On remarque dans cette préface que le nombre de façons de choix = 6

C'est-à-dire : $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2\,!} = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$, $\boxed{C_n^r = \dfrac{A_n^r}{r\,!}}$

Exemple

(1) Calculez:

a C_7^5

b C_7^2 (Que remarquez-vous)?

Solution

a $C_7^5 = \dfrac{A_7^5}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 21$

b $C_7^2 = \dfrac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

On remarque que : $C_7^5 = C_7^2$ $(5 + 2 = 7)$

Corolaires importantes : $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $C_n^r = C_n^{n-r}$

Essayez de résoudre

1) Sans utilisez une calculatrice calculez C_{12}^{9} et C_{17}^{14}

Activité

Utiliser d'une calculatrice

On peut utiliser les touches SHIFT ÷ pour écrire le symbole des combinaisons (C_n^r)

1) Utilisez la calculatrice pour trouver la valeur de $C_5^4 + C_7^2$

Solution

Appuyez successivement sur les touches

5 SHIFT ÷ 4 + 7 SHIFT ÷ 2 =

Réponse = 26

Exemple

2) Si : $C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-47}$ trouvez la valeur de r.

Solution

$\because C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-47}$

Soit : $r = 2r - 47$ d'où : $r = 47$ refusée car elle est supérieur à la valeur de n.

Ou : $r + 2r - 47 = 28$ $\therefore 3r = 75$ $\therefore r = 25$

Essayez de résoudre

2) Si $C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-5}$, trouvez la valeur de r.

Exemple

3) De combien de façons peut-on choisir un équipe de 4 personnes parmi un ensemble de 9 personnes?

Solution

Puisque le choix est indépendant de l'ordre, alors chacun de ces choix est une combinaison.

Le nombre de façons $= C_9^4 = \dfrac{A_9^4}{4!} = 126$

Essayez de résoudre

3) Dans un concours de jeu d'échecs, 7 personnes y ont participé. Trouvez le nombre de matches sachant qu'un concourant joue un seul matche?

Exemple principe du dénombrement

(4) De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 2 hommes et une femme parmi 7 hommes et 5 femmes?

Solution

Le nombre de façons de choisir deux hommes de 7 hommes = $C_7^2 = 21$

Le nombre de façons de choisir une femme de 5 femmes = $C_5^1 = 5$

Appliquant le principe du dénombrement, le nombre de façons = $21 \times 5 = 105$ façons

Pensé critique : De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 4 hommes ou 3 femmes parmi 6 hommes et 5 femmes ?

Essayez de résoudre

(4) Une classe comprend 10 garçons et 8 filles De combien de façons peut-on former une comité pentagonal d'étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

Activité Triangle de Pascal

Blaise Pascale (1623 - 1662) :

Il est un philosophe, mathématicien et physicien français, il a introduit la théorie de probabilités.

Aussi, il a crée un système ternaire des nombres qui est appelé le triangle de Pascale, il a également inventé une calculette pour effectuer les opérations de l'addition et de la soustraction.

Observez le triangle de Pascale ci-contre, puis répondez aux questions suivantes :

1- Que remarquez-vous de la manière d'écriture des nombres dans ce triangle ?

2- Existe-t-il une relation entre les éléments d'une ligne et les éléments de la ligne suivante?

3- Y-t-il une symétrie entre les nombres situant sur les cotés latéraux du triangle ?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

D'après l'activité précédent, on remarque que :

Dans la formule C_n^r , si n est le nombre de lignes et r le nombre de colonne

- **La première ligne :** représente (n = 1) d'éléments parmi r = 0 ou r =1

  D'où: $C_1^0 = 1$, $C_1^1 = 1$

- **La deuxième ligne :** représente (n = 2) d'éléments parmi r = 0 ou r =1 ou r = 2

  D'où: $C_1^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$ ... etc.

On remarque également que :

- Chaque ligne commence par 1 car $C_n^0 = 1$, et se termine par 1 car $C_n^n = 1$
- Chaque nombre dans une ligne, sauf la première, est égal à la somme de deux nombres qui lui sont au dessus.
- **Dans la troisième ligne on trouve :** 1 , 1 + 2 , 2 + 1, 1
- **Dans la troisième ligne on trouve :** 1 , 1 + 3 , 3 + 3 , 3 + 1 , 1 … etc.
- Si n est pair, il y a une symétrie par rapport au nombre médian
- Si n est impair, il y a une symétrie par rapport aux deux nombres médians
- Cela s'accommode avec la relation $C_n^r = C_n^{n-r}$

Application sur l'activité :

Démontrez que : $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$

Exercices (2 - 3)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Le nombre de choix de 3 personnes parmi 5 personnes est égal à ....

   a 15 b 10 c 20 d 35

2. Le nombre de façons de répondre seulement à 4 questions parmi 6 est égal à ....

   a 30 b 15 c 24 d 10

3. Le nombre de façons de choisir une boule rouge et une autre blanche parmi 5 boules rouges et 3 boules blanches est égal à ....

   a 15 b 8 c 60 d 2

Répondez aux questions suivantes :

4. Calculez C_6^3 , C_9^1 , C_{12}^{11} et C_{100}^0
5. Si $C_n^3 = 120$, trouvez la valeur de C_n^{n-9}
6. Si $C_{n+1}^4 = \frac{5}{2} C_n^3$, trouvez la valeur de n.
7. Si $C_n^3 = 30\frac{1}{3}$ n, trouvez la valeur de n.
8. De combien de manières une comité pentagonal peuvent prendre une discision majoritaire ?

9) Une classe comprend 10 garçons et 8 filles De combien de façons peut-on former un comité de cinq étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

10) Ecrivez chacun de ce qui suit en fonction des arrangements :

a C_8^3 b C_{19}^2 c C_5^0 d C_x^{x-y}

11) Ecrivez chacun de ce qui suit en utilisant la formule ${}^nC_n$

a $\frac{A_8^2}{2!}$ b $\frac{A_9^3}{3!}$ c $\frac{A_{10}^4}{4!}$ d $\frac{A_8^0}{0!}$

Activité

Vous savez que la diagonale d'un polygone est le segment de droite joignant deux sommets non consécutifs et que :

Le nombre de diagonales d'un triangle = 0

Le nombre de diagonales d'un quadrilatère = 2

Le nombre de diagonales d'un pentagone = 5

Pouvez-vous trouvez le nombre de diagonales :

1) D'un hexagone, d'un octogone, d'un décagone.

2) Pouvez-vous trouver une formule en utilisant les combinaisons pour déterminer le nombre des diagonales d'un polygone ? Cherchez avec votre professeur à l'aide de WEB.

Résumé de l'unité

Principe fondamental du dénombrement : Soient m le nombre de façons d'effectuer un travail quelconque, n le nombre de façons d'effectuer un seconde travail, alors le nombre de façons d'effectuer ces travaux simultanément = m × n.

Arrangements : Soit X un ensemble de n éléments, alors chaque ordre de quelques ou tous les éléments de x est un arrangement.

Le nombre d'ARRANGEMENTS de n objets distincts pris r à r chaque fois est noté par A_n^r où:

$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ Par convention $A_n^0 = 1$

Théorème : La factorielle d'un nombre entier positif n s'écrit sous la forme n! il est égal au produit de tous les nombres entiers positifs inferieurs ou égale à $n! = n(n-1)(n-2)$ ………… $\times 3 \times 2 \times 1$

Combinaisons : Soit X un ensemble de cordinal n. Le choix de r éléments (où $0 \leqslant r \leqslant n$) parmi les élément de X. Sans prendre l'ordre des éléments en comptte, est appelé un combinaisons.

➢ Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts noté C_n^r où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$ **et** $n \in \mathbb{Z}^+$

Exercices généraux

Complétez ce qui suit :

1. Le nombre de façons de former un nombre de deux chiffres distincts parmi les nombres : 1, 2, 3, 4 est égal à ....

2. Si on vous a demandé de codé un coffre en utilisant 3 trois chiffres différents de zéro, alors le nombre de façons est égal à ....

3. Si $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^n$, alors n = ...

4. Si n! = 1! alors n = ...

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

5. Un homme voulait choisir une voiture parmi les modèles a ; b ; c et les couleurs : Blanche ; Rouge ; Argentée ; Noir . De combien de manières peut-il choisir une voiture ?

   a 7 b 12 c 14 d 24

6. Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1 ; 3 ; 6 ; 7?

   a 9 b 12 c 24 d 64

7. Soient $X = \{x : x \in \mathbb{N} ; 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ et $Y = \{(a , b): a ,b \in x \text{ et } a \neq b\}$. Quel le nombre d'éléments de Y ?

   a 7 b 10 c 20 d 25

8. $C_{12}^4 + C_{12}^3$ égale à

   a 715 b 710 c 716 d 720

9. Si $A_n^r = 336$ et $C_n^r = 56$ alors n et r sont

   a (3 ; 2) b (8 ; 3) c (7 ; 4) d (7 ; 3)

10. Une personne a 8 amis ; alors nombre de manières d'invité un ami ou plus pour diner est

    a 250 b 200 c 255 d 256

11. Si $C_n^{10} = C_n^{14}$,alors C_{25}^n égale à

    a 24 b 25 c 1 d 49

12. Calculez :

    a C_5^5 b $6!$ c A_{23}^1

    d C_{50}^{49} e $\dfrac{13!}{14!}$ f A_4^4

13 Si $C^{3}_{2n-1} = 84$? trouvez la valeur de $(n - 5)!$

14 Si $A^{r+1}_{8} = 336$; trouvez la valeur de C^{4}_{2r}

15 Soient $A^{3}_{n-m} = 210$ et $C^{4}_{n+m} = 715$, trouvez la valeur de n et celle de m

16 De combien de façons peut-on choisir sept étudiants parmi 10 pour faire un voyage touristique?

17 On a choisit trois étudiants parmi n étudiants pour assister à un colloque. Si le nombre de façons de choix était 10, trouvez n

18 De combien de façons peut-on éluer une comité formé d'un homme et de deux femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

19 Parmi 4 professeur; on veut choisir un professeur pour former les élèves à passer l'olymbiade puis un autre pour préparer les examens. De Combien de façons peut-on pour faire ce choix ?

20 Le nombre des équipes participants au tounoi de football est 12. Si chacque équipe joue deux matches avec chacun des autres équipes. Quel est le nombre de matches de ce tournoi ?

21 Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42$ b $12 \times n! = (n+2)!$ c $(n-4)! = 120$

d $(n-5)! = 1$ e $C^{3}_{n} = 84$ f $C^{r}_{12} = C^{2r+3}_{12}$

Épreuve cumulative

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1 Le nombre de façons de former un nombre premier qui se compose de trois chiffres parmi les chiffres 3 ; 4 ; 5 est ....

a 6 b 3 c 1 d 0

2 Le nombre de façons de former le nombre 5476 avec les chiffres 4 ; 5 ; 6 ; 7 is ....

a 24 b 16 c 1 d zero

3 Le nombre de façons de former un nombre de trois chiffres parmi 5 chiffres excepte 0 est ....

a $5 \times 4 \times 3$ b $5 + 4 + 3$ c $5 \times 5 \times 5$ d $3 \times 2 \times 1$

4 Si on utilise les lettres du mot « Vous » pour écrire un mot de trois lettres différentes, alors le nombre des mots obtenus égale à

a 3 b 6 c 9 d 1

5 $A^{6}_{9} =$ ....

a $9 \times 8 \times 7$ b $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ c $9!$ d $6!$

6 Calculez :

a $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$

b $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$

7 Calculez : $A_8^3 + A_8^2 + A_8^1$

8 Combien de triangles peut-on former avec 5 points coplanaires qui ne sont pas alignées trois à trois ?

9 Combien de nombres formés de trois chiffres distincts peut-on former parmi les chiffres $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$?

10 **Trouvez la valeur de chacun de ce que suit :**

a $\frac{99!}{100!}$

b $0! + 1! + 2! + 3!$

c $\frac{19!}{20!}$

d $5! - 4!$

e $\frac{4!}{0!}$

11 Soient $X = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ et $Z = \{a, b\}: a \neq b,\ a \in x,\ b \in X\}$, Quel le nombre d'éléments de Z ?

12 **Dans chacun des cas suivants, trouvez la valeur de n :**

a $n! = 720$

b $n(2n - 1)! = 60$

c $C_n^{n-2} = 28$

d $A_{n+2}^4 = 56 \times A_n^2$

e $\frac{1!}{n!} = \frac{2}{(n+1)!}$

f $A_m^n = 24\, C_m^n$

Vous pouvez servir du tableau suivant dans le cas d'échec de la réponse :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Voir	Principe de dénombrement	Principe de dénombrement	Principe de dénombrement	Principe de dénombrement	Arrangements	combinaisons	Arrangements	combinaisons	Principe de dénombrement	Factorielle	combinaisons	Arrangements/ combinaisons

Unité 3

Dérivation et Intégration

Introduction de l'unité

Isaac NEWTON (1642 – 1727) a créé le calcul différentiel et intégral. Leibnitz (1646 – 1716), indépendamment de NEWTON a créé la science de la Dérivation ou la dérivation à l'issue de ses recherches pour trouver les tangente aux courbes et le calcul des valeurs maximales et minimales des fonctions algébriques ou des fonctions qui modélisent des problèmes sociaux et économiques. NEWTON a présenté l'intégration comme une opération réciproque de la dérivation tandis que Leibnitz l'a présentée comme la limite de des sommes des Riemann, il l'a notée S comme un sigle du mot « somme ». Cette notation est transformée au symbole utilisé actuellement ∫ qui est près de la lettre S. La science de la Dérivation et de l'intégration est évolué grâce aux apports des plusieurs savants parmi lesquels Berkeley, Lagrange, Laplace, Gauss et Weierstrass. La création de la géométrie analytique a également un grand rôle au développement de cette science.

Compétence attendu de l'unité :

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître la notion de fonction de variation, le taux de variation et le nombre.
- Déduire la première dérivée d'une fonction.
- Reconnaître l'interprétation géométrique de la première dérivée (La pente de la tangente).
- Étudier la dérivabilité d'une fonction (la dérivé droite et la dérivé gauche).
- Déduire la relation entre la dérivation et la continuité.
- Déterminer quelques règles de la Dérivation (dérivation).
- La dérivée :
  - de la fonction constante
  - de la fonction $f(x) = x^n$
  - de la fonction $f(x) = x$
  - de la fonction $f(x) = a\,x^n$
  - de la somme et la différence de deux fonctions
  - du produit de deux fonctions
  - du quotient de deux fonctions
  - de la fonction composée
  - de la fonction $y = (f(x))^n$
  - des fonctions trigonométriques.
- Utiliser la dérivée dans des applications géométriques comme trouver l'équation de la tangente de la courbe en un point qui lui appartient.
- Reconnaître la notion intégral – La primitive
- Reconnaître et déduire les règles de l'intégration.
  - $\int x^n \, d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ , } n \neq -1$
  - $\int a\,f(x)\,E\,x = a\int f(x)\,d\,x$, où a constante
  - $\int [f(x) \pm r(x)]\,d\,x = \int f(x)\,d\,x \pm \int r\ (x)\,d\,x$
  - $\int (a\,x + b)^n\,d\,x = \frac{1}{a\,(n+1)}\,(a\,x + b)^{n+1} + c \text{ ; } n \neq -1$
  - $\int \sin a\,x\,d\,x = \frac{-1}{a}\cos a\,x + C$ où a constante
  - $\int \cos a\,x\,d\,x = \frac{1}{a}\sin a\,x + C$ où a constante
  - $\int \sec^2 a\,x\,d\,x = \frac{1}{a}\tan a\,x + C$ où a constante
  - $\int f\,'(x)\,[f(x)]^n\,d\,x = \frac{1}{n+1}\,[f(x)]^{n+1} + c$

Vocabulaire de base

- Variation
- Taux de variation
- Nombre dérivé
- Limite de nombre dérivé
- Dérivé à gauche
- Dérivé à droite
- Dérivabilité
- Une fonction dérivable
- Première dérivée
- Produit Quotient
- Fonction composée
- Fonctions trigonométriques
- Intégrale
- Primitive

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – ordinateur - Logiciel de graphisme .

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1): Taux de variation

Leçon (3 - 2): Dérivation.

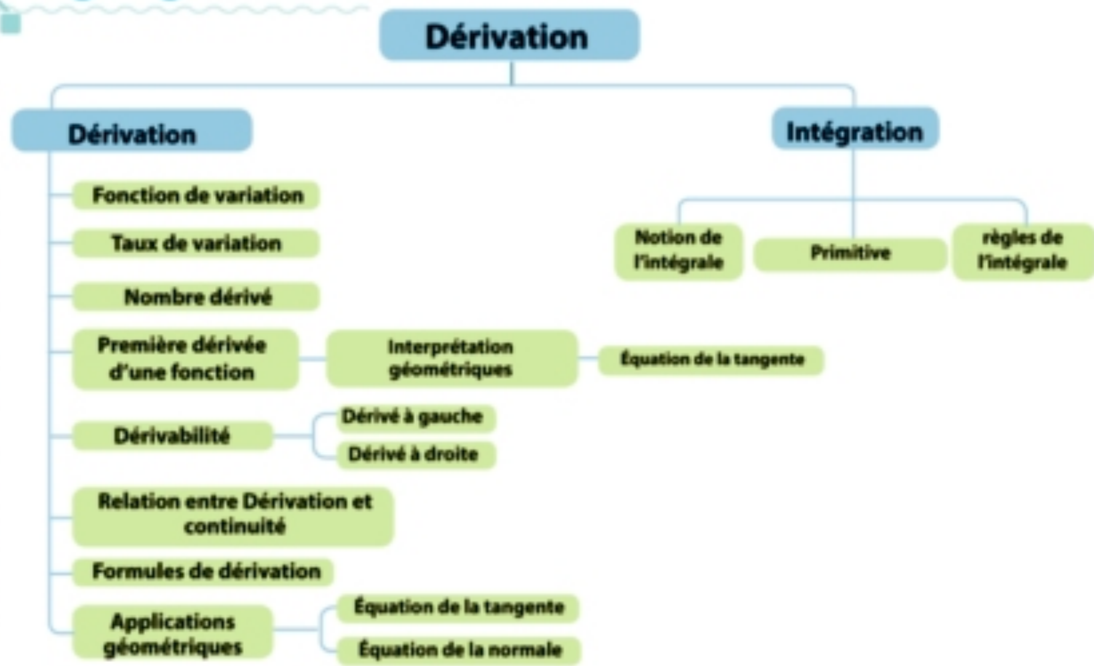
Leçon (3 - 3): Dérivée des fonctions usuelles .

Leçon (3 - 4): Dérivée des fonctions trigonométriques

Leçon (3 - 5): Applications sur la dérivation.

Leçon (3 - 6): Intégration.

Organigramme de l'unité



3 - 1 Taux de variation

Allez Apprendre

- Fonction de variation.
- Fonction de taux de variation.
- Nombre dérivé.

Vocabulaires de base

- Fonction de variation.
- Fonction de taux de variation.
- Nombre dérivé

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

Réfléchissez et discutez

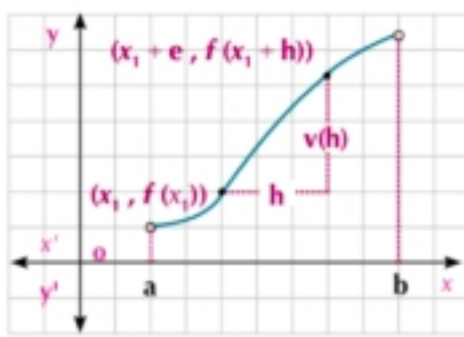
Si une balle de tennis et un ballon de foot tombent en même temps de même hauteur, laquelle de deux balles arrive au sol le premier ? vérifiez votre réponse sachant que la résistance de l'aire est négligeable.

La science de la Dérivation s'intéresse à l'étude de la variation qui se produit dans une variable à la suite d'une autre variable.

Le changement qui survient sur le temps du mouvement de la balle $(t_2 - t_1)$ conduit à une variation correspondante de sa vitesse $(v_2 - v_1)$, alors on peut comparer la moyenne de la variation de la vitesse par rapport à l'unité du temps de chacun de deux ballons. Pour cela, on calcule le taux $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$.

A apprendre — fonction de variation

Si $f :]a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, alors une variation de valeur de x from x_1 á x_2 sur l'ensemble de définition de f implique á une variation de valeur de valeur de y : de $f(x_1)$ á $f(x_2)$, d'où la variation de $x = \Delta x$ (qui se lit delta x) $= x_2 - x_1$ et la variation de $y = \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$



Soit $(x_1, f(x_1))$ un point de la courbe de la fonction f, alors pour toute variation de son abscisse de x_1 á $x_2 = x_1 + h$ où $x_1 + h \in]a ; b[$ et $h \neq 0$, correspond á une variation de son ordonnée qui est déterminée par la relation : $V(h) = f(x_1 + h) - f(x_1)$

La fonction v est appelée fonction de variation de f en $x = x_1$

Remarque : Les deux symboles Δx ou h représentent la variation de x

Exemple

(1) Si $f(x) = 3x^2 + x - 2$

et x varie de 2 á 2 + h. ,Trouvez la fonction de variation v puis calculez la variation de f pour:

a h = 0.3

b h = - 0.1

Solution

$\because f(x) = 3x^2 + x - 2$, x varie de 2 á 2 + h

$\therefore x_1 = 2$, $f(2) = 3 \times 4 + 2 - 2 = 12$, et :

$$f(2 + h) = 3(2 + h)^2 + (2 + h) - 2 = 12 + 12h + 3h^2 + 2 + h - 2$$
$$= 3h^2 + 13h + 12$$

$$v(h) = f(2 + h) - f(2)$$
$$= (3h^2 + 13h + 12) - 12 = 3h^2 + 13h$$

a pour h = 0,3

$v(0.3) = 3(0.3)^2 + 13 \quad \times 0.3$

$= 4.17$

b pour h = - 0,1

$v(-0.1) = 3(-0.1)^2 + 13(-0.1)$

$= -1.27$

Essayez de résoudre

(1) Soit $f(x) = x^2 - x + 1$. Trouvez la fonction de variation v en $x = 3$, puis calculez :

a $v(0.2)$

b $v(-0.3)$

A apprendre — Taux de variation

En divisant la fonction de variation v par h où $h \neq 0$, on obtient une nouvelle fonction T qui est appelée fonction de variation moyenne de f en $x = x_1$ telle que :

$$T(h) = \frac{v(h)}{h} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemple :

(2) Si $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x^2 + 1$. Trouvez :

a la fonction de taux de variation en $x = 2$, puis calculez T (0.3)

b le taux de variation lorsque x varie de 3 á 4

Solution

a $f(x_1) = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$, $f(x_1 + h) = f(2 + h)$

$\therefore f(2 + h) = (2 + h)^2 + 1 = h^2 + 4h + 5$

$\because$ a (h) $= \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$\therefore$ a (h) $= \dfrac{h^2 + 4h + 5 - 5}{h} = h + 4$ et a (0.3) = 4.3

b Lorsque x varie de 3 á 4 ; alors $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

$f(3) = 9 + 1 = 10$; $f(4) = 16 + 1 = 17$

Taux de variation $= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{17 - 10}{4 - 3} = 7$

Essayez de résoudre :

(2) Soit $f(x) = x^2 + 3x - 1$, Trouvez :

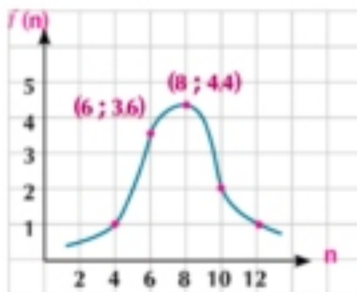
a Fonction de taux de variation lorsque $x = 2$, puis trouvez T(0,2)

b Taux de variation lorsque x varie de 4,5 á 3

Exemple :

(3) La figure ci-contre montre la courbe s = f (t) où s représente les ventes totales dans un marché des ventes des ordinateurs en millions livres égyptiennes, t représente le temps en mois A l'aide de la figure, trouvez la moyenne de la variation des ventes totales lorsque t varie :

a de 4 á 8 **b** de 8 á 10



Solution

a De la figure : $f(8) = 4.4$ et $f(4) = 1$

Taux de variation de $f = \dfrac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \dfrac{4.4 - 1}{4} = 0{,}85$ million livres / mois

C'est á dire la moyenne des ventes totales augmente de 0,85 millions livres par mois pendent cette période.

b De la figure : $f(10) = 2$ et $f(48) = 4.4$

Taux de variation de $f = \dfrac{f(10) - f(8)}{10 - 8} = \dfrac{2 - 4.4}{42} = -1.2$ million livres / mois

C'est á dire la moyenne des ventes totales diminue de 0,85 million livres par mois pendent cette période.

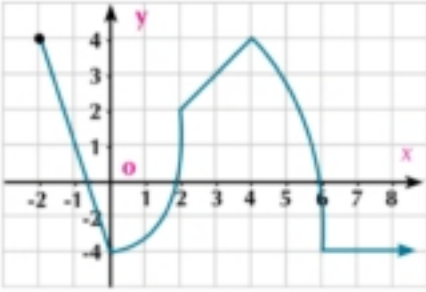
Essayez de résoudre :

(3) En utilisant la figure de l'exemple 3 ; trouvez le taux de variation des ventes totales lorsque le temps varie :

a de 4 á 6 **b** de 6 á 10 **c** de 4 á 12

Réflexion critique :

La figure ci-contre montre la courbe de la fonction f où $y = f(x)$. Déterminez les intervalles dans lesquels la moyenne de la variation de f est constante. Expliquez votre réponse.



A apprendre

Nombre dérivé

Soient f : $]a\,;\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$ et x_1 , $x_1 + h \in\ ]a\,;\,b[$:

Le nombre dérivé de f en $x_1 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} T(h)$ á condition que cette limite existe.

Exemple

4 (4) Dans ce qui suit, trouvez le nombre dérivé de f en $x = x_1$ puis trouvez le nombre dérivé de f aux valeurs données de x :

a $f(x) = 3x^2 + 2$ en $x = 2$ **b** $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ en $x = 3$

Solution

a $\because f(x) = 3x^2 + 2$ $\therefore$ en $x = x_1$, alors $f(x_1) = 3x_1^2 + 2,$

$f(x_1 + h)^2 = 3(x_1 + h)^2 + 2 = 3x_1^2 + 6x_1 h + 3h^2 + 2$

Le nombre dérivé de $f = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x_1 h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6x_1 + 3h) = 6x_1$$

Lorsque $x = 2$ $\therefore$ x1 = 2 et le nombre dérivé de $f = 6 \times 2 = 12$

b $\because f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ $\therefore$ en $x = x_1$

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{2}{x_1 + h - 1} - \frac{2}{x_1 - 1}$$

$$= \frac{2x_1 - 2 - 2x_1 - 2h + 2}{(x_1 + h - 1)(x_1 - 1)} = \frac{-2h}{(x_1 + h - 1)(x_1 - 1)}$$

Le nombre dérivé $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{-2h}{(x_1 + h - 1)(x_1 - 1)} = \frac{-2}{(x_1 - 1)^2}$$

Lorsque $x = 3$ $\therefore x_1 = 3$ et le nombre dérivé $f = \dfrac{-2}{(3 - 1)^2} = -\dfrac{1}{2}$

Essayez de résoudre :

4 Trouvez le taux de variation de f où $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ lorsque x varie de x_1 á $x_1 + h$, en déduisez le nombre dérivé de f en $x = 5$.

Exemple

(5) Trouvez le taux de variation de f où $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $x = x_1$, en déduisez le nombre dérivé de f en :

a $x = 6$ **b** $x = -2$

Solution

a $\because f(x) = \sqrt{x+3}$ $\therefore$ L'ensemble de définition de $f = [-3\,;+\infty[$

En $x = x_1$, alors : $f(x_1) = \sqrt{x_1+3}$, $f(x_1+\text{h}) = \sqrt{x_1+\text{h}+3}$

et:

Le taux de variation de $f = \text{T(h)} = \dfrac{f(x_1+\text{h}) - f(x_1)}{\text{h}}$

$$= \frac{\sqrt{x_1+\text{h}+3} - \sqrt{x_1+3}}{\text{h}}$$

Le nombre dérivé de $f = \lim\limits_{\text{h}\to 0} \text{T(h)} = \lim\limits_{\text{h}\to 0} \dfrac{\sqrt{x_1+\text{h}+3} - \sqrt{x_1+3}}{\text{h}}$

$$= \lim_{\text{h}\to 0} \frac{\sqrt{x_1+\text{h}+3} - \sqrt{x_1+3}}{\text{h}} \times \frac{\sqrt{x_1+\text{h}+3} + \sqrt{x_1+3}}{\sqrt{x_1+\text{h}+3} + \sqrt{x_1+3}}$$

$$= \lim_{\text{h}\to 0} \frac{x_1+\text{h}+3-x_1-3}{\text{h}\,[\sqrt{x_1+\text{h}+3} + \sqrt{x_1+3}\,]}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1+3}} \text{ où } x_1 > -3$$

a En $x = 6$ $\therefore$ Le nombre dérivé de $f = \dfrac{1}{2\sqrt{6+3}} = \dfrac{1}{6}$

b En $x = -2$ $\therefore$ Le nombre dérivé de $f = \dfrac{1}{2\sqrt{-2+3}} = \dfrac{1}{2}$

Essayez de résoudre :

(5) Trouvez le taux de variation de f où $f(x) = \sqrt{x-5}$ en $x = x_1$, en déduisez le nombre dérivé de f en $x = 9$

Peut-on calculer le nombre dérivé de f en $x = 5$? **Vérifiez votre réponse.**

Applications quotidiennes :

Exemple

(6) On jette un caillou dans l'eau stagnante. Il se forme une vague circulaire dont le rayon croit en conservant sa forme. Déterminez la limite du taux de variation de son aire par rapport á la longueur de son rayon lorsque le rayon est égal á 3,5 cm $(\pi = \frac{22}{7})$.

Solution

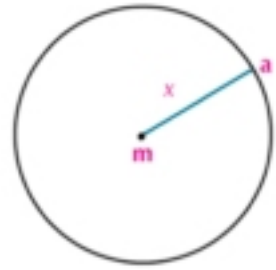
Modalisation

Soit la longueur du rayon de la vague $= x$ cm

$\therefore$ Aire de la vague a $= \pi\ x^2$ cm^2

$A = f(x) = \pi x^2$

Lorsque x varie de x_1 á $x_1 + h$



$$\text{Donc le taux de variation de a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\pi (x_1 + h)^2 - \pi x_1^2}{h}$$

$$= \pi \lim_{h \to 0} \frac{(x_1 + h)^2 - x_1^2}{h} = 2\pi\ x_1$$

Lorsque $x = x_1 = 3.5$ $\therefore$ le taux de variation de $a = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 = 22$

Essayez de résoudre

6 Une plaque métallique a la forme d'un carré se dilate régulièrement en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire lorsque sa longueur varie de 3 á 3,4 puis calculez la limite du taux de variation de son aire si la longueur de son coté est égale á 5 cm.

Exemple

7 Dans une réaction chimique, la quantité résultante d'une matière A après n secondes est donnée par la relation :$y = t^3$ mg. milligrammes. Trouvez le taux de variation instantané de la production de la matière A en n = 2 secondes.

Solution

Supposons que $y = f(t) = t^3$, alors le taux de variation instantané de la production de la matière A est la limite du taux de variation de f.

$$\text{En } t = t_1 \text{, alors la limite du taux de variation de } f = \lim_{h \to 0} \frac{f(n + h) - f(n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(n + h)^3 - n^3}{h} = 3\,n^2$$

En $t = t_1 = 2$ seconds

$\therefore$ La limite du taux de variation instantané de la production de la matière $A = 3(2)^2 = 12$ milligrammes/secondes

Essayez de résoudre

7 La taille de l'échantillon de bactéries en un instant t (mesuré en minutes) est donnée par la relation : $y = 2t^3 + 100$ milligrammes, Trouvez le taux de variation instantané de la fonction f en $t = 5$

Exercices 3 - 1

Choisissez la bonne réponse parmi les proposés :

1. Si le taux de variation de $f = 2.4$ lorsque x varie de 3 á 3.2 ; alors la variation de f est égale á

   a) 0.32 b) 0.48 c) 3.6 d) 7.2

2. Si le taux de variation de $f = 5$ lorsque x varie de 2 á 4 ; $f(2) = 6$, alors $f(4)$ égale

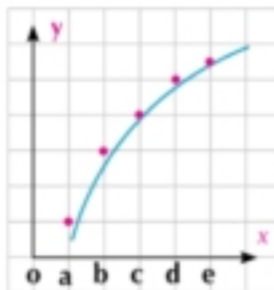
   a) - 4 b) 7 c) 8 d) 16

3. Le taux de variation du volume d'un cube lorsque son arête varie de 5 cm á 7 cm est égale á ______

   a) 125 b) 343 c) 218 d) 109

4. **La figure ci-contre,** représente la courbe de la fonction f où $y = f(x)$. Dans quel intervalle parmi les suivants, le taux de variation de f est le plus grand?

   a) [a ; b] b) [b ; c] c) [c ; d] d) [a ; e]



Répondez aux questions suivantes :

5. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$, trouvez la variation de f lorsque.

   a) x varie de 2 à 2.1 b) $x = -2$ et $h = 1$

6. Dans ce qui suit, trouvez la fonction du taux de variation de f en $x = x_1$,puis déduisez le nombre dérivé de f en x_1 :

   a) $f(x) = 2x^3$ en $x_1 = 2$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x_1 = 0$

7. Trouvez le taux de variation de f où $f(x) = \sqrt{x-3}$ en $x = x_1$, en déduisez le nombre dérivé de f en $x = 7$

8. **En lien avec les aires :** Une plaque métallique a la forme d'un carré. Sous l'effet du froid, elle se contracte en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire par rapport à la longueur de son côté lorsque sa longueur est égale à 8cm.

9. **En lien avec les volumes :** Une sphère métallique se délatte sous l'effet de la chaleur en conservant sa forme. Calculez la limite du taux de variation de son volume par rapport à la longueur de son rayon quand la longueur de son rayon est égale à 7 cm.

(10) **Décelez l'erreur :** Une plaque métallique a la forme d'un rectangle dont la longueur est égale au double de sa largeur. Elle se dilate sous l'effet de la température en conservant sa forme, les relations entre ses dimensions restant les même. Calculez la limite du taux de variation de son aire par rapport à sa largeur lorsque sa largeur est égale à 10 cm.

Première solution

Soit la largeur x $\therefore$ la longueur $2x$

Aire = longueur × largeur $\therefore f(x) = 2x^2$

Limite du taux de variation =

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h(2x_1 + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x_1 + 2h) = 4x_1$$

En $x_1 = 10$cm

Limite du taux de variation $= 40$

Deuxième solution

Soit la longueur x $\therefore$ la longueur $\frac{1}{2}x$

Aire = longueur × largeur $\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Limite du taux de variation

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(x_1 + \frac{1}{2}h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (x_1 + \frac{1}{2}h) = x_1$$

En $x_1 = 10$cm

Limite du taux de variation $= 10$

En lien avec l'agriculture :

(11) Si la quantité y (mesurée en kg) produite par un arbre d'orange dépend du nombre de kilogrammes de x d'engrais selon la relation : $y = 100 - \frac{42}{x+1}$. Calculez le taux de variation de y lorsque x varie de 1 à 2.

En lien avec la géométrie :

(12) Une bulle sphérique de savon se dilate en conservant sa forme, calculez le taux de variation de son aire lorsque le rayon se varie de 0,5 à 0,6 sachant que l'aire de la sphère = 4pr2 (r est le rayon de la sphère).

(13) Une plaque triangulaire dont la longueur de sa base est égale au double de la hauteur correspondante à cette base. Elle se dilate sous l'effet de la chaleur en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire lorsque son hauteur varie de 10 cm à 8,4 cm.

3 - 2

Allez apprendre

- Première dérivée.
- Interprétation géométrique de la Première dérivée.
- Pente de la tangente.

Vocabulaire de base

- Première dérivée.
- Pente.
- tangente.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Réfléchissez et discutez

1. La figure (1) montre la courbe de la fonction f : $]a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, $\overleftrightarrow{CD}$ coupe la courbe aux points C $(x_1, f(x_1))$ et D $(x_1 + h, f(x_1 + h))$.

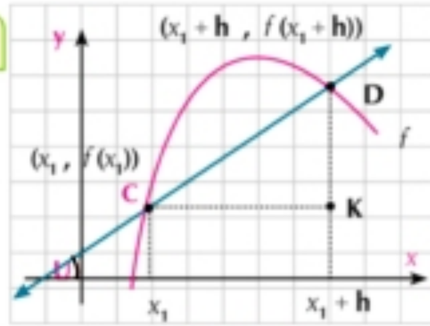


fig. (1)

Trouvez la pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD}$.

2. Si x varie de x_1 à x_1 + h, comparez le taux de variation de f et la pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD}$. La relation suivante est-elle vraie ?
La pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD} = \tan\theta = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = T(h)$

3. Si le point C $(x_1, f(x_1))$ est un point fixe de la courbe représentative de la fonction f. Le point D se déplace sur la courbe pour qu'il se rapproche du point C. $\overleftrightarrow{CD}$ prend la position de $\overleftrightarrow{CN}$. Elle devient une tangente de la courbe en C. C'est-à-dire $h \longrightarrow 0$

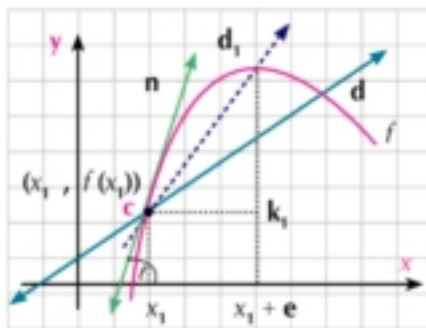


fig. (2)

Trouvez la pente de la tangente de la courbe de f en C.

Remarquez que :

La pente de la tangente en C $= \tan\varphi = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

C'est-à-dire :

La pente de la tangente de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est égale à la limite du taux de variation de f en $x = x_1$

Exemple

1 Trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = 3x^2 - 5$ au point (2 ; 7) puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute prés.

Solution

$\because f(2) = 3(2)^2 - 5 = 7$ $\therefore$ le point des coordonnées (2 ; 7) appartient à la courbe représentative de f

La pente de la tangente en $(x = 2)$ = le nombre dérivé de f en $(x = 2)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\therefore \text{La pente de la tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 5 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (12 + 3h) = 12$$

$\tan \varphi = 12$ $\therefore \varphi = \tan^{-1}(12) \simeq 85°14'$

Essayez de rèsoudse:

1 Trouver la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 - 4$ au point (1 ; - 3) puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute prés.

A apprendre **Première dérivée**

Pour toute valeur de x de l'ensemble de définition de la fonction f, correspond une seule valeur de la limite du taux de variation de f. Donc le nombre dérivé est aussi une fonction de la variable x qu'on l'appelle la première dérivée de la fonction f

Définition

Si $f :]a ; b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in]a ; b[$, alors **la dérivée f'** :

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ à condition que la limite existe

Symboles de la dérivée :

Si $y = f(x)$, on note la première dérivée par :

y' ou f' qui se lit f prime ou y prime

$\frac{dy}{dx}$ qui se lit dy sur dx ou la dérivée de y par rapport à x

Remarquez que la pente de la tangente de la courbe $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est $f'(x_1)$

Exemple :

(2) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^2 - x + 1$ puis trouvez la pente de la tangente au point de coordonnées (-2 ; 7)

Solution

$\because f(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore f(x + h) = (x + h)^2 - (x + h) + 1 \quad = x^2 + 2x\,h + h^2 - x - h + 1$,

$f(x + h) - f(x) = (2x + h - 1)\,h$

$\because f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ $\qquad \therefore f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2x + h - 1)\,h}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h - 1)$ $\; f'(x) = 2x - 1$

$\because f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$ $\qquad \therefore$ le point (- 2 ; 7) est situé sur la courbe de f

La pente de la tangente au point de coordonnées (- 2 ; 7) = $f'(-2) = 2(-2) - 1 = -5$

Essayez de résoudre

(2) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$ puis trouvez la pente de la tangente au point de coordonnées (-1 ; 6).

A apprendre

Dérivabilité d'une fonction

On dit que la fonction f est dérivable en $x = a$ (a appartient à l'ensemble de définition de f) si et seulement si $f'(a)$ existe où $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

Si la dérivé d'une fonction f existe pour tout x appartenant à l'intervalle $]c\,;\,d[$, on dit que la fonction est dérivable sur cette intervalle.

Dans l'exemple (2) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une dérivé de fonction f où $f'(x) = 2x - 1$ pour cela la fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exemple

(3) Démonterez que la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ est dérivable en $x = 2$

Solution

$\because$ L'ensemble de définition de $f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad \therefore f$ est définie en $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{3}$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 + h - 1}{2 + h + 1} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 3 - h}{3\,h\,(3 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{2\,h}{3h(3 + h)} = \frac{2}{9} \in \mathbb{R}$$

$\therefore f$ est dérivable en $x = 2$

Essayez de résoudre

3) Démontez que la fonction f telle que $f(x) = x^2 - x + 1$ est dérivable en $x = 1$

Dérivée à droite et dérivée à gauche

Si f est une fonction définie en $x = a$ (où a appartient à l'ensemble de définition de la fonction) et la règle à gauche de la fonction est différent de celle à la droite de la fonction, on détermine la dérivée à droite $f'(a^+)$ et la dérivée à gauche $f'(a^-)$ où :

La dérivée à droite $f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, **la dérivée à gauche** $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

La fonction est dérivable si et seulement si $f'(a^+) = f'(a^-)$. La dérivée de la fonction est notée $f'(a)$

Exemple

4) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ n'est pas dérivable en $x = 2$

Solution

$\because$ L'ensemble de définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore f$ est définie en $x = 2$; $f(2) = (2)^2 = 4$

$\therefore \quad f'(2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h + h^2}{h}$

$\therefore f^-(2^-) = 4$

$f'(2^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h+2) - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

$\therefore f^-(2^+) = 1$

$\because f'(2^+) \neq f'(2^-)$

$\therefore f'(2)$ n'existe pas, c'est-à-dire que la fonction f n'est pas dérivable en $x = 2$

Essayez de résoudre

4) Etudiez la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 2 \\ 4x - 9 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ en $x = 2$

Pensé critique :

- Dans les paragraphes Exemple 4 et Essayez de résoudre 4, étudiez la continuité de deux fonctions et déduisez la relation entre la dérivabilité d'une fonction en un point et la continuité de la fonction en même point.
- Est-ce que la fonction f telle que $f(x) = |x - 2|$ est dérivable en $x = 2$?

Dérivabilité et Continuité

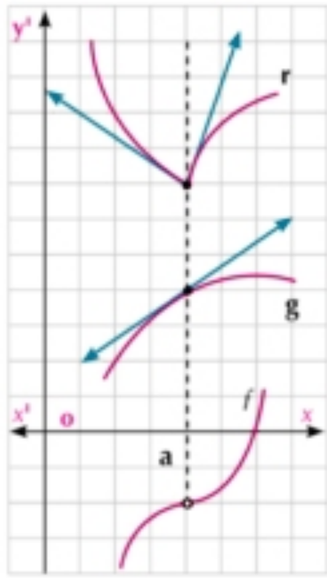
Théorème

➢ Si la fonction f telle que $y = f(x)$ est dérivable en $x = a$, alors f est continue en

La figure ci-contre indique :

1 - La continuité de la fonction en un point ne veut pas nécessairement dire qu'elle dérivable en ce point, comme dans les des fonctions f et g.

2 - Si la fonction n'est pas continue en $x = a$, alors la fonction n'est pas dérivable en $x = a$, comme dans le cas de la fonction f.



Remarque importante : En étudiant la dérivabilité d'une fonction en un point de son ensemble de définition, il est préférable d'étudier d'abord sa continuité en ce point soit la fonction continue alors on étudie sa dérivabilité soit elle n'est pas continue en ce point dans ce cas la fonction n'est pas dérivable en ce point.

Exemple

5 Etudiez la dérivabilité de la fonction f telle que $\begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 7 - x & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ en $x = 3$

Solution

Etude de continuité de la fonction en $x = 3$

$f(x) = 2x\text{-}1$ (4) $f(x) = 7\text{-}x$

$-\infty$ 3 ∞

(1) $f(3) = 7 - 3 = 4$

(2) $f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$, $f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3} (7 - x) = 4$

$\because f(3^-) \neq f(3^+)$ $\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x)$ n'existe pas et f n;est pas continue en $x = 3$

$\because f$ n'est pas continue $x = 3$ $\therefore f$ n'est pas dérivable en $x = 3$

Essayez de résoudre

5 Etudiez la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en $x = 1$

6 Si la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leqslant 2 \\ a x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est dérivable en $x = 2$; alors a + b égale à :

a 4 b - 4 c - 8 d 8

Exercices (3 - 2)

Répondez aux questions suivantes :

1. En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^2 - 5$ en $x = 3$; puis expliquez le sens géométrique de la dérivée de la fonction en $x = 3$.

2. En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = 1 - 5x - 3x^2$; puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.

3. En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée des fonctions définies ci-dessous:

   a $f(x) = \sqrt{3x+1}$ **b** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

4. Étudiez la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

5. Soit une fonction $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ a\,x^2 + 8\,x - 1 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$ continue en $x = 2$. Trouvez la valeur de constant a.

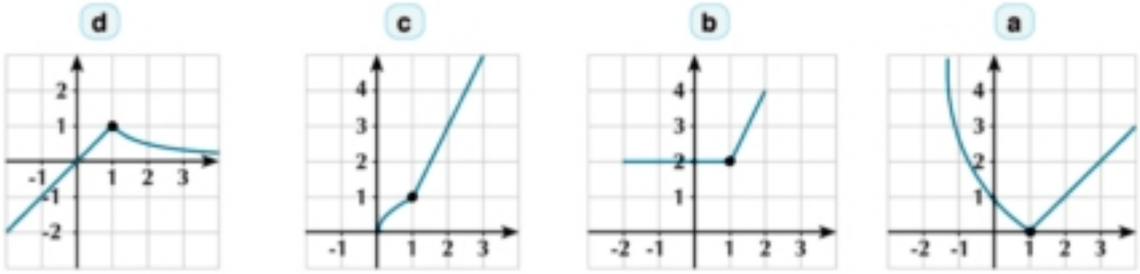
6. Soit une fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + 1 & \text{si } \; x \leqslant 2 \\ 4\,x - 3 & \text{si } \; x < 2 \end{cases}$ continue en $x = 2$, Trouvez la valeur de constant a, puis étudiez dérivabilité de la fonction en $x = 2$

7. Si $f(x) = a\,x^2 + b$ où a et b sont constant, trouvez :

   a la première dérivée de la fonction f au point $(x\,;\,y)$

   b les valeurs de a et b si la pente de la tangente de la courbe de la fonction f au point $(2\,;\,-3)$ qui lui appartient est égale à 12

8. Comparez entre la dérivée à droite et la dérivée à gauche de chacune des fonctions suivantes,puis démontrez que chacune d'elles n'est pas dérivable en $x = 1$.



Unité 3

3 - 3 Dérivée des fonctions usuelles

Allez apprendre

- Dérivée de la fonction constante
- Dérivée de la fonction $f(x) = x^n$
- Dérivée de la fonction $f(x) = x$
- Dérivée de la fonction $f(x) = ax^n$
- Dérivée de la somme et la différence de deux fonctions
- Dérivée du produit de deux fonctions
- du quotient de deux fonctions
- Dérivée de la fonction composée
- Dérivée de la fonction y $= (f(x))^n$.

Vocabulaire de base

- Première dérivée.
- Produit.
- Quotient.
- Fonction composée.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Découvrez

1 - En utilisant la définition, trouvez la première dérivée de ce qui suit :

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $f(x) = x^5$

2 - Pouvez-vous découvrir la dérivée de $f(x) = x^7$, sans utiliser la définition ?

3 - Pouvez-vous déduire une règle pour trouver la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^n$?

A apprendre

Dérivée d'une fonction

1 - Derivative of the constant function

Si y = c $\qquad$ **où** $c \in \mathbb{R}$ $\qquad$ **, alors** $\frac{dy}{dx} = 0$

Remarquez que :

$y = f(x) = c\,, \quad f(x+h) = c$

$\because \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \text{zero} \ (h \neq 0)$

2 - Dérivée de la fonction $f(x) = x^n$

Si $y = x^n$ $\qquad$ **où** $n \in \mathbb{R}$ $\qquad$ **, alors** $\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$

Si $y = x$ $\qquad$ **, alors** $\frac{dy}{dx} = 1$

Si $y = a\,x^n$ $\qquad$ **où** $a\,, n \in \mathbb{R}$ $\qquad$ **, alors** $\frac{dy}{dx} = a\,n\,x^{n-1}$

Exemple

1 1) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = -3$ $\qquad$ **b** $y = x^4$ $\qquad$ **c** $y = 5x$

d $y = \frac{3}{x^2}$ $\qquad$ **e** $y = \sqrt{x^3}$

Solution

a $\because y = -3$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$ $\qquad$ **b** $\because y = x^4$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 4\,x^3$

c $\because y = 5\,x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 5$

d $\because y = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = -6x^{-3}$

e $\because y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ où $x \geqslant 0$

Essayez de résoudre

1) Dans ce qui suit, trouve $\frac{dy}{dx}$:

a $y = -\sqrt{2}$ **b** $y = \frac{4}{3}\pi\ x^3$ **c** $y = \frac{-4}{x^5}$ **d** $y = \sqrt[3]{x^5}$

Dérivée de la somme ou de la différence de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x, alors $f \pm h$ est aussi dérivable par rapport à x, $\frac{d}{dx}(f \pm h) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dh}{dx}$ et en générale :

Si f_1 , f_2 ,....., f_n **sont des fonctions dérivables par rapport à** x ; **alors:**

$$\frac{d}{dx}(f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm ... \pm f_n)(x) = f_1'(x) \pm f'_2(x) \pm f'_3(x) \pm ... \pm f'_n(x)$$

Exemple

2) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = 2x^6 + x^{-9}$ **b** $y = \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

Solution

a $\because\ y = 2x^6 + x^{-9}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^5 - 9x^{-10}$

b $\because\ y = \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

$= 1 - 2\sqrt{x}$ $= 1 - 2x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 2 \times \frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = -x^{-\frac{1}{2}}$

Essayez de résoudre

2) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = 3x^8 - 2x^5 + 6x + 1$ **b** $y = \frac{5}{x} + x\sqrt{x} + \sqrt{3}\ x - 4$

Dérivée du produit de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x, alors la fonction $(f \times h)$ est aussi dérivable par rapport à x et on a: $\frac{d}{dx}(f \times h) = z\,\frac{dg}{dx} + g\,.\,\frac{dz}{dx}$

Exemple

(3) Si $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$, trouvez $\frac{dy}{dx}$ puis trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = -1$

Solution

$\because y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) \times 3x^2 + (x^3 + 3) \times 2x$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

en $x = -1$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 5(-1)^4 + 3(-1)^2 + 6(-1) = 2$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$, puis $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$

Dérivée du quotient de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x et $h(x) \neq 0$,alors la fonction $(\frac{f}{h})$est aussi dérivable par rapport à x et

$$\frac{d}{dx}(\frac{f}{h}) = \frac{g\frac{dz}{dx} - z\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

C'est-à-dire $(\frac{f}{h})' = \frac{hf' - hf'}{h^2}$

Exemple

(4) Si $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Solution

$\because y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 + 1) \times 2x - (x^2 - 1) \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$
$$= \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x + 5}$

Dérivée de la fonction composée

Travail coopératif

Travaillez avec votre camarade

Si $y = (3x^2 - 1)^4$; trouvez $\frac{dy}{dx}$

Est-ce que vous avez trouvé des opérations ? Est-ce que vous avez trouvé une difficulté à trouver la dérivée ?

Vous avez déjà étudié la composé d'une fonction, on sait que :

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Si f et g sont deux fonctions telles que $y = f(z)$, et $z = g(x)$, alors $y = f[g(x)]$), on dit que y est une fonction en x

Théorème

Si $y = f(z)$ est une fonction dérivable par rapport à z , et $z = h(x)$ est dérivable par rapport à x, alors $y = f(h(x))$ est dérivable par rapport à x et : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

Ce théorème est connu par Règle de la dérivée en chaîne

Exemple

5 Si $y = (x^2 - 3x + 1)^5$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Solution

Soit $z = x^2 - 3x + 1$ $\qquad \therefore y = z^5$

y est dérivable par rapport à z (fonction polynôme en z) $\qquad$ et $\frac{dy}{dz} = 5z^4$

h est dérivable par rapport à x (fonction polynôme en x) $\qquad$ et $\frac{dz}{dx} = 2x - 3$

En appliquant la règle de la dérivée en chaine :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 5z^2 \times (2x - 3)$$

En substituant de z

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \times (2x - 3)$$

Essayez de résoudre

(5) Trouvez $\frac{dy}{dx}$ en appliquant la règle de la dérivée en chaine dans le paragraphe **Travail coopératif** et vérifiez votre travail précèdent dans ce paragraphe.

Exemple

(6) Si $y = \sqrt[3]{z}$, $z = x^2 - 3x + 2$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Solution

$\because y = z^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}}$

$\because z = x^2 - 3x + 2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 2x - 3$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \quad = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} (2x - 3)$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (2x - 3)(x^2 - 3x + 2)^{-\frac{2}{3}}$

Essayez de résoudre

(6) Si $y = 3z^2 - 1$ et $z = \frac{5}{x}$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Dérivée de la fonction de forme $[f(x)]^n$

Si $y = [f(x)]^n$, où f est dérivable par rapport à x et n est un nombre naturel,

alors $\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$

Exemple

(7) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$

a $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$ $\qquad$ **b** $y = (\frac{x-1}{x+1})^5$

Solution

a $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 10\,(6x^3 + 3x + 1)^9 \times \frac{d}{dx}(6x^3 + 3x + 1)\\ &= 10\,(18x^2 + 3)(6x^3 + 3x + 1)^9\\ &= 30\,(6x^2 + 1)(6x^3 + 3x + 1)^9\end{aligned}$$

b $y = (\frac{x-1}{x+1})^5$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 5\,(\frac{x-1}{x+1})^4 \times \frac{(x+1)\times 1 - (x-1)\times 1}{(x+1)^2}\\ &= 5\,(\frac{x-1}{x+1})^4 \times \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{10}{(x+1)^2} \times (\frac{x-1}{x+1})^4 = \frac{10(x-1)^4}{(x+1)^6}\end{aligned}$$

Essayez de résoudre

7) si $y = (\frac{5x^2}{3x^2+2})^3$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Exemple

8) Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 4$, trouvez les valeurs de x pour les quelles $f'(x) = 2$

Solution

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 5 \times 1$

$= x^2 - 4x + 5$

Lorsque $f'(x) = 2$ $\quad \therefore x^2 - 4x + 5 = 2$ $\quad$ d'où $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\because (x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 1$ où $x = 3$

Essayez de résoudre

8) Dans ce qui suit, trouvez les valeurs de x pour les quelles $f'(x) = 7$:

a) $f(x) = x^3 - 5x + 2$

b) $f(x) = (x-5)^7$

Exercices 3 - 3

Complétez ce qui suit :

1) $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^3}) =$ ....

2) $\frac{d}{dx}(5\pi) =$ ....

3) $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) =$ ....

4) $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}) =$ ....

5) $\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x + 2) =$ ....

6) $\frac{d}{dx}(\sqrt{2}\,x^7 - \frac{x^5}{5} + \pi) =$ ....

Trouvez le dérivé premier de chacune des fonctions suivantes par rapport à x.

7) $y = 2x^6 + 3\sqrt{x}$

8) $y = \frac{4x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x}$

9) $y = x(3x^2 - \sqrt{x})$

10) $y = \frac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$

11) $y = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$

Trouvez le dérivé premier de chacune des fonctions suivantes :

12) $y = (x^2+3)(x^3-3x+1)$

13) $y = (x^2 - \sqrt{x})(x^2 + 2\sqrt{x})$

(14) $y = (2x^4 - 3x + 4)(x^2 - + \sqrt{x} + \frac{2}{x})$

(15) $y = \frac{5x - 2}{5 \quad x + 1}$

(16) $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x + 1}$

(17) $y = \frac{x - 2}{x + 5}$

(18) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = 2$

a) $y = (x^3 + x - 9)^5$

b) $y^3 = 3x^2 - 4$

c) $y = \sqrt[3]{(2x^3 + 4x + 3)^2}$

d) $y = z^2 \quad , \quad z = 3x^2 - 2$

e) $y = 2z^3 \quad , \quad z = 8x - 11$

f) $y = \frac{z - 1}{z + 1}$, $z = \frac{x + 1}{x - 1}$

(19) Soient $y = a \ x^3 + b \ x^2$; $\frac{dy}{dx} = 8$ en $x = 1$,et le taux de variation de y lorsque x varie de -1 à 2 est égale à 7. Trouvez les valeurs de deux constante a et b.

(20) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$ aux points dont l'abscisse est indiquée :

a) $y = (\frac{x^2 - 2}{3 + x^2})^7$ en $x = 0$

b) $y = (x^2 + 1)^5 (x^2 - x + 1)^{-4}$ en $x = 1$

Activité

(21) **En lien avec les volumes** On verse de l'huile avec un taux de 10 cm^3/s dans un baril cylindrique dont le rayon de la base est égale à 90 cm. Trouvez le taux d'élévation de l'huile dans le baril.

Réflexion créative

(22) Trouvez $\frac{d}{dx}(y^n)$

(23) Si $y = 3z^2 + 1$ et $z = \sqrt{x^2 - 2}$, trouvez $\frac{dy}{dx}$. Est-ce que l'une de deux solutions suivantes est fausse ou les deux sont vraies.

Première solution

$y = 3z^2 + 1$

$z = \sqrt{x^2 - 2}$

Par substitution, on trouve

$y = 3x^2 - 5$

$\frac{dy}{dx} = 6x$

Deuxième solution

$\because \ y = 3z^2 + 1 \qquad \therefore \frac{dy}{dz} = 6z$

$z = (x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

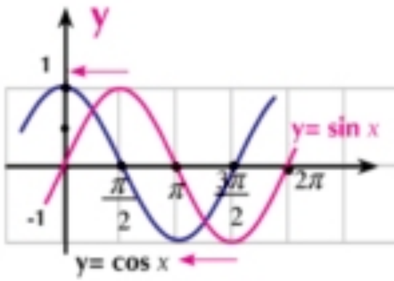
$= 6\sqrt{x^2 - 2} \times \frac{x}{\sqrt{x2 - 2}} = 6x$

Dérivée des fonctions trigonométriques

3 - 4

A découvrir

Dans cette partie d'étude les mesures des angles sont données en radians.



La figure ci-contre indique la courbe représentative de la fonction sinus y = sin x lorsqu'on le déplace à gauche d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, on obtient la fonction cosinus y = cos x

Ainsi que : $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, Pour cela, il suffit de trouver la dérivée de sin x et on en déduit les autres dérivées des fonctions trigonométriques.

Allez apprendre

- Dérivées des fonctions trigonométriques :
  $f(x) = \sin x$
  $f(x) = \cos x$
  $f(x) = \tan x$

Vocabulaire de base

- Dérivée
- Fonctions trigonométriques

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Dérivée des fonctions trigonométriques

A apprendre **Dérivée de la fonction sinus**

Si $f(x) = \sin x$, **alors** $f'(x) = \cos x$

$\because f(x) = \sin x, \quad f(x + h) = \sin(x + h)$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos x \sin h}{h} + \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} \right]$$

$$= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \times \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$= \cos x \times 1 + \sin x \times 0 = \cos x$$

C'est-à-dire : $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$

● **(La démonstration ne peut pas être l'objet d'un examen)**

En général : Si z est une fonction dérivable par rapport à x, alors :

$\frac{d}{dx}[\sin z] = \cos z \,.\, \frac{dz}{dx}$ **[La règle de la dérivée en chaine]**

Exemple

(1) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

(a) $y = 5 \sin x$ (b) $y = x^3 \sin x$ (c) $y = 2 \sin(3x+4)$

Solution

(a) $\because y = 5\sin x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \times \frac{d}{dx}(\sin x) = 5\cos x$

(b) $\because y = x^3 \sin x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = x^3 \times \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \times \frac{d}{dx}(x^3)$

$= x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$

(c) $\because y = 2\sin(3x+4)$

Posons $z = 3x + 4$ alors : $y = 2 \sin z$

$\therefore \frac{dz}{dx} = 3$, $\frac{dy}{dz} = 2\cos z$ En appliquant la règle de la dérivée en chaine ($\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cos z \times 3 = 2\cos(3x+4) \times 3 = 6\cos(3x+4)$

On peut trouver $\frac{dy}{dx}$ directement en utilisant la généralisation précédente, comme suivant :

$\frac{dy}{dx} = 2 \times \cos(3x+4) \times 3 = 6\cos(3x+4)$

Essayer de résoudre

(1) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

(a) $y = x^2 + \sin x$ (b) $y = \sin\frac{\pi}{4} - 7\sin x$ (c) $y = 5\sin(3 - 2x)$

A apprendre

1- La dérivée de la fonction cosinus

Si $y = \cos x$ alors $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

2- La dérivée de la fonction tangente

Si $y = \tan x$ alors $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

Remarquez que :

(1) $\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times -1$

$= -\sin x$

(2) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x) \times \sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Exemple

(2) trouvez la dérivée première de ce qui suit :

a $y = 2\cos x - \tan 5x$ **b** $y = \tan(1 - x^2)$ **c** $y = \cos^2(4x^2 - 7)$

Solution

a $\because y = 2\cos x - \tan 5x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(-\sin x) - \sec^2 5x \times 5 \qquad = -2\sin x - 5\sec^2 5x$

b $\because y = \tan(1 - x^2) \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2(1 - x^2) \times -2x = -2x\sec^2(1 - x^2)$

c $\because y = \cos^3(4x^2 - 7)$ posons $y = \cos^3 z$. Supposons que $z = 4x^2 - 7$

$\therefore \frac{dy}{dz} = 3\cos^2 z \times -\sin z = -3\sin z\cos^2 z$, $\qquad \frac{dz}{dx} = 8x$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = -24x\sin z\cos^2 z$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -24x\sin(4x^2 - 7)\cos^2(4x^2 - 7)$

Essayer de résoudre

(2) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = 2\tan 3x$ **b** $y = 2\cos(4 - 3x^2)$ **c** $y = 2\sin x\cos x$

d $y = 2x\tan x$ **e** $y = \tan^2 3x$ **f** $y = \tan 4x^3$

Exemple

(3) Soit $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Démontrez que $(1 - \sin x)\frac{dy}{dx} = 1$, puis trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

Solution

$\because y = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\sin x} \qquad \text{d'où : } (1-\sin x)\frac{dy}{dx} = 1$$

Rappel

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Si $x = \frac{\pi}{6}$, alor $\left(1-\sin\frac{\pi}{6}\right)\frac{dy}{dx} = 1$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 2$$

Essayer de résoudre

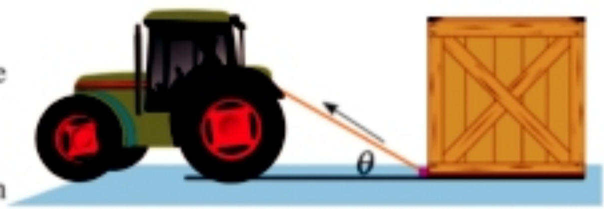
(3) Soit $y = 2x \sin x \cos x$. Démontrez que $\frac{dy}{dx} = \sin 2x + 2x\cos 2x$

Activité

(4) **En lien avec la mécanique :** Une force d'intensité F agit sur un corps de poids P faisant angle de mesure θ avec le sens de la force. Si l'intensité de la force est donnée par la relation

$$F = \frac{m\,p}{m\sin\theta + \cos\theta}$$

Où m est une constante appelée le coefficient de frottement.



a Trouvez la limite de taux de variation de la force par rapport à l'angle θ

b Quand est-ce que la limite de taux de variation s'annule?

Réponse des questions de l'activité :

a $F = \frac{m\,p}{m\sin\theta + \cos\theta} = m\,p\,(m\sin\theta + \cos\theta)^{-1}$

La limite de taux de variation de la force par rapport à l'angle $\theta = \frac{df}{d\theta}$

$= -mp\,(m\sin\theta + \cos\theta)^{-2}\,(r\cos\theta - \sin\theta) = \frac{-mp\,(r\cos\theta - \sin\theta)}{(m\sin\theta + \cos\theta)^2}$

b Lorsque $\frac{df}{d\theta} = 0 \qquad \therefore\ mp\,(r\cos\theta - \sin\theta) = 0$

$\therefore m\cos\theta - \sin\theta = 0 \qquad m\cos\theta = \sin\theta \qquad m = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

Application sur l'activité

(4) Soit $y = \sin^2 x - \cos 2x - 4x$. Trouvez :

a La limite de taux de variation de y par rapport à x .

b Les valeurs de $x \in]0\,;\pi[$ lorsque la limite de taux de variation égale à -1

Réflexion créative : Trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = \sin(\tan 3x)$ b $y = \sin x$ où x est mesuré en dégrées

Exercices 3 - 4

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si $y = \sin(2x+5)$, alors $y' =$
   a $2\cos 2x$ b $-2\cos 2x$ c $\cos(2x+5)$ d $2\cos(2x+5)$

2. Si $y = 3x - \cos 2x$, alors $y'=$
   a $3 - \sin 2x$ b $3 + \sin 2x$ c $3 + 2\sin 2x$ d $3 - 2\sin 2x$

3. Si $y = 3\cos(2 - 4x)$, alors $y'=$
   a $4\sin(2 - 4x)$ b $12\sin(2 - 4x)$ c $-6\sin(2 - 4x)$ d $-12\sin(2 - 4x)$

4. Si $f(x) = \tan(5x - \pi)$, alors $f'(\frac{\pi}{4}) = ...$
   a 5 b $5\sqrt{2}$ c 10 d $10\sqrt{3}$

Complétez ce qui suit :

5. $\frac{d}{dx}(\cos x - \sin x) =$ ______
6. $\frac{d}{dx}(\tan 3x^2) =$ ______
7. $\frac{d}{dx}(\cos 2\pi) =$ ______
8. $\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) =$ ______
9. $\frac{d}{dx}(x\cos x) =$ ______
10. Trouvez $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin X - \sin a}{x - a} =$ ______

Dans chacun des cas suivants, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

11. $y = \sin(4x + 7)$
12. $y = \sin(x^2 + 3)$
13. $y = \cos(5x + 3)$
14. $y = 3\tan(2x + 3)$
15. $y = \tan(-5x^2 + 19)$
16. $y = \sin(\cos^2 x)$
17. $y = \frac{\tan x}{x}$
18. $y = x\sin(3x - 2)$
19. $y = \frac{x}{\cos x}$
20. $y = x^2\sin(2x^2 + 5)$
21. $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
22. $y = \sec^2 x - 1$

23. $y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

24. $y = \tan\sqrt{x}$

25. $y = 4\cos^5 x$

26. $y = 4x + 5\sin 4x$

27. $y = \sqrt{3x - \sin^2 4x}$

28. $y = \cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$

29. $y = \sqrt{\cos(5x)}$

30. $y = \cos(\cos x)$

31. $y = \dfrac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan\frac{\pi}{4}}$

Trouvez la pente de la tangente à chacune des courbes suivantes :

32. $y = 5 - \sin X$ si $x = \frac{\pi}{4}$

33. $y = \sin x + \sin 2x$ si $x = \frac{\pi}{2}$

34. $y = x\cos 2x$ si $x = \frac{\pi}{4}$

35. $y = x\sqrt{\sin x}$ si $x = \frac{\pi}{2}$

36. Démontrez que la tangente à la courbe d'équation $y = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{2}$ fait un angle de $\frac{3\pi}{4}$ avec le sens positif de l'axe des abscisses.

37. Soit $y = \sin^2 x - \cos^2 x$,Démontrez que $\frac{dy}{dx} = 2\sin 2x$

38. Soit $y = (\sin x + \cos x)^2$, Démontrez que $\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

39. Soit $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$, Démontrez que $(1 + \cos x)\dfrac{dy}{dx} = 1$

40. Si $y = \sec 4x$, trouvez le taux de variation de y par rapport à x en $x = \frac{\pi}{4}$

Applications sur la dérivation

3 - 5

Allez apprendre

- Pente de la tangente
- Pente de la normale

Vocabulaire de base

- Pente de la tangente
- Pente de la normale
- Déplacement
- Vitesse
- Accélération

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Rappel

La pente de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ égale à $\frac{-a}{b}$

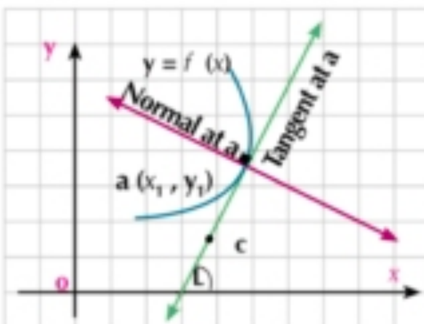
Préface

Les applications géométrique sur la dérivée d'une fonction nécessitent l'équation de la droite étant donnée sa pente de la droite et un point qui lui appartient. Il est également nécessaire de rappeler la relation entre les pentes de deux droites parallèles ainsi que la relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires

La pente de la tangente et la pente de la normale à une courbe

On a apprit dans cette unité que :

➢ La première dérivée de la fonction f où $y = f(x)$, veut dire la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction en un point $(x ; y)$ appartenant à la courbe.



Cela veut dire que : la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point (x_1, y_1) qui lui appartient $= [\frac{dy}{dx}]_{(x_1, y_1)}$

et $\tan L = [\frac{dy}{dx}]_{(x_1, y_1)}$

où L est la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses .

Remarquez que :

➢ Si m_1 et m_2 sont les pentes de deux droites ℓ_1 et ℓ_2 alors :

➢ $\ell_1 // \ell_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$ (condition de parallélisme)

➢ $\ell_1 \perp \ell_2$ si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$ (condition de perpendicularité)

Pour cela : La pente de la normale à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1 ; y_1)$ qui lui appartient $= -\frac{1}{[\frac{dy}{dx}]_{(x_1, y_1)}}$

Exemple

1) Trouvez les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = x^3 - 4x + 3$ auxquels la tangente fait un angle positif de mesure égale à $135°$ avec la direction positive de l'axe des abscisses .

Solution

$\because \; y = x^3 - 4x + 3 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$

$\therefore$ La tangente fait un angle positif de mesure égale à $135°$

$\therefore$ La pente de la tangente $= \tan 135° = -1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4 = -1 \qquad \therefore 3x^2 = 3 \qquad \therefore x = \pm 1$

Lorsque $x = -1 \qquad \therefore y = (-1)^3 - 4(-1) + 3 = 6$

Lorsque $x = 1 \qquad \therefore y = 1 - 4 + 3 = 0$

$\therefore$ Les coordonnées des points sont $(-1 ; 6)$, $(1; 0)$

Essayez de résoudre :

1) Trouvez les coordonnées des points de la courbe $y = x^2 - 2x + 3$ auxquels la tangente à la courbe :

a) est parallèle à l'axe des abscisses

b) perpendiculaire à la droite d'équation $x - 4y + 1 = 0$

Exemple

2) Trouvez la pente de la normale à la courbe d'équation $y = \tan(\pi - \frac{2}{3}x)$ au point de coordonnées $(\pi; \sqrt{3})$

Solution

$\because \; y = \tan(\pi - \frac{2}{3}x) \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\sec^2(\pi - \frac{2}{3}x)$

La pente de la tangente au point de coordonnées $(\pi; \sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sec^2(\pi - \frac{2\pi}{3})$

$$= -\frac{2}{3}\sec^2\frac{\pi}{3} = \frac{-2}{3} \times 4 = \frac{-8}{3}$$

La pente de la normale au point de coordonnées $(\pi; \sqrt{3}) = \frac{3}{8}$

Essayez de résoudre

2) Trouvez la mesure de l'angle positif que fait la normale à la courbe d'équation $y = \sqrt{2x^2 + 7}$ direction positive de l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-3 ; 5)$ à une minute près .

Réflexion créative :

Trouvez la valeur de a pour que la droite d'équation $y = 4x + a$ soit tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + 5$

A apprendre

Equation de la tangente et de la normale à la courbe

Si (x_1, y_1) est un point de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$,m est la pente de la tangente en ce point, alors:

1 - **Equation de la tangente à la courbe au point (x_1, y_1) est** : $y - y_1 = m(x - x_1)$

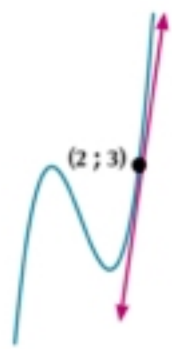
2 - **Equation de la normale (la perpendiculaire) à la courbe au point (x_1, y_1) est** :

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

Exemple

3) Trouvez l'équation de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = 2x^3 - 4x^2 + 3$ aux points qui lui appartient et d'abscisses $= 2$

Solution



$\because y = 2x^3 - 4x^2 + 3$

$\therefore$ En $x = 2$ $\qquad \therefore y = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 3 = 3$

$\therefore$ Les coordonnées du point sont (2 ; 3) se trouve sur la courbe

$\because \frac{dy}{dx} = 6x2 - 8x \qquad \therefore [\frac{dy}{dx}]_{(2,3)} = 6(2)^2 - 8(2) = 8$

La pente de la tangente = 8 Equation de la tangente est

$y - 3 = 8(x - 2)$ $\qquad$ i.e $y - 8x + 13 = 0$

La pente de la normale $= \frac{-1}{8}$ Equation de la normale est

$y - 3 = \frac{-1}{8}(x - 2)$ $\qquad$ D'où $8y + x - 26 = 0$

Essayez de résoudre

3) Trouvez l'équation de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = \frac{x+3}{x+1}$ aux points qui lui appartient et d'abscisses $= 1$.

Est-ce que le point de coordonnées $(-3 ; 4)$ appartient à la tangente ? **Pourquoi** ?

Exemple

(4) Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 4x - \tan x$ au point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$

Solution

$\because$ $y = 4x - \tan x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 4 - \sec^2 x$

Lorsque $x = \frac{\pi}{4}$ $m = 4 - \sec^2 \frac{\pi}{4} = 2$

Substituant par $x = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation **on trouve que :** $y = \pi - \tan \frac{\pi}{4} = \pi - 1$

C'est-à-dire que le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, \pi - 1)$ appartient à la courbe

$\therefore$ L'équation de la tangente au point des coordonnées $(\frac{\pi}{4}, \pi - 1)$ est : $y - (\pi - 1) = 2(x - \frac{\pi}{4})$

$y - \pi + 1 = 2x - \frac{\pi}{2}$ $y = 2x + \frac{\pi}{2} - 1$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez l'équation de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = x \sin 2x$ au point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Exemple

(5) Si la droite $y = 8x + 5$ est tangente à la courbe $y = ax^3 + bx^2$ au point (- 1 ; - 3), trouvez a et b.

Solution

$\because$ Le point de coordonnées (- 1 ; - 3) appartient à la courbe $y = ax^3 + bx^2$

$\therefore$ $-3 = a(-1)^3 + b(-1)^2$ i.e. $a - b = 3$ (1)

La pente de la tangente en un point quelconque $= \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx$

$\because$ La droite $y = 8x + 5$ est tangente à la courbe au point (-1, -3)

$\therefore$ $[\frac{dy}{dx}]_{(-1, -3)}$ = la pente de la droite = 8

$\therefore$ $3a(-1)^2 + 2b(-1) = 8$ i.e. $3a - 2b = 8$ (2)

D'après (1) et (2), on trouve que $a = 2$ et $b = -1$

Essayez de résoudre

(5) Si la pente de la tangente de la courbe $y = x^2 + ax + b$ au point (1 ; 3) qui lui appartient est égale à 5, trouvez a et b

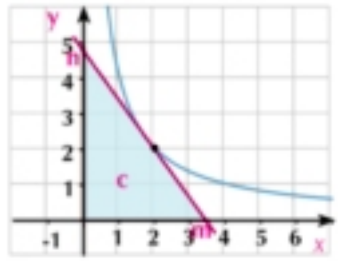
Exemple **En lien avec les aires**

(6) La tangente à la courbe d'équation $y = \frac{4}{x}$ au point C qui se trouve au premier quadrant coupe les axes des coordonnées en deux points M et N Démontrez que l'aire du M O N est constante et n'est pas lié à la position du point C appartenant à la courbe

Solution

$\because \quad y = 4x^{-1}$

On suppose que $c\left(a, \frac{4}{a}\right)$ $\qquad \because \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2}$



$\therefore$ La pente de la normale au point $c\left(a, \frac{4}{a}\right)$ égale $\frac{-4}{a^2}$

L'équation de la tangente en A est : $y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a)$

Multipliant par a^2 $\quad \therefore a^2 y - 4a = -4x + 4a$

$\therefore$ L'équation de $\overleftrightarrow{MN}$ est $a^2 y + 4x = 8a$

Pour déterminer le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses, on pose $y = 0$

$\therefore x = 2a$ $\qquad$ alors $OM = 2a$ unités de longueur

Pour déterminer le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, on pose $x = 0$

$\therefore y = \frac{8}{a}$ $\qquad$ d'où $ON = \frac{8}{a}$ unités de longueur

$\therefore$ L'aire du $\triangle OMN = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{8}{a} = 8$ unités carrées

Qui est une quantité constante n'est pas lié à la position du point C appartenant à la courbe.

Essayez de résoudre

En lien avec les aires:

(6) Trouvez l'aire de la surface du triangle limité par l'axe des abscisses , la tangente et la normale à la courbe d'équation $y = x^2 - 6x + 13$ au point de coordonnées (4 ; 5) qui appartient à la courbe

Exercices 3 - 5

(1) **Complétez ce qui suit :**

(a) La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f telle que $y = f(x)$ en un point quelconque qui lui appartient est ________

b La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \cos X$ si $x = \frac{\pi}{3}$ égale à ______

c Si la droite d'équation $y = 8 - 3x$ est une tangente à la courbe de la fonction f au point de coordonnées (3 ; -1), alors f '(3) = ______

d La tangente à la courbe d'équation $y = (3x - 5)^3$ au point de coordonnées (2 ; 1) fait un angle positif avec la direction positif de l'axe des abscisses dont la tangente est égale à ______

e La pente de la normale à la courbe d'équation $y = \sin 2x$ au point appartenant à la courbe et d'abscisse $x = \frac{\pi}{6}$ égale à ______

f L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (x - 1)^2$ au point de coordonnées (2 ; 1) est ______

Répondez aux questions suivantes :

2. Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + \frac{1}{x} - 1$ avec la direction positive de l'axe des abscisses $x = 1$

3. Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x+3}{x-2}$ avec la direction positive de l'axe des abscisses au point de coordonnées (3 ; 6). ______

4. Trouvez les points de la courbe $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ auxquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses .

5. Trouvez les coordonnées des points de la courbe $y = 3x^3 - 11x + 5$ auxquels la tangente à la courbe

a est parallèle à la droite d'équation $2x + y - 5 = 0$

b Peperpendiculaire à la droite d'équation $25y + x = 6$

c fait un angle positif avec la direction positif de l'axe des abscisses dont la tangente $= -11$

6. Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (x - 2)(x + 1)$ aux points d'intersection avec les axes des coordonnées

7. Trouvez l'équation de la normale à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 - 1}{2 - x^2}$ au point d'abscisse $x = 0$

8. Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 2\sin x + \cos x$ au point de coordonnées (0 ; 1)..

9. ProDémontrez que la tangente à la courbe $y = x^2 + x - 1$ au point de coordonnées (1 ; 1) est perpendiculaire à la tangente à la courbe $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ au même point .

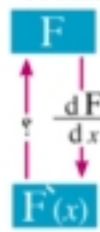
10. Si la tangente à la courbe $y = (x^2 - 2x)(a\,x + b)$ est tangente à l'axe des abscisses au point de coordonnées (2 ; 0) et à la droite d'équation $y = 2x$ à l'origine, trouvez les valeurs de a et de b.

Intégration

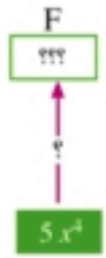
3 - 6

A découvrir

F est continue



D'après votre étude précédant, vous êtes capable à trouver la dérivée F' étant donné la fonction F où $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$. Dans cette leçon, nous allons étudier une opération réciproque de la dérivée c.-à-d. répondre à la question : Comment retrouvez la fonction principale (d'origine) en connaissant sa dérivée F' ?



Pour trouver la fonction d'origine (primitive) dont la dérivée par rapport á x est $5x^4$, on suppose que $f(x) = 5x^4$

Puis on commence par un opération réciproque de la dérivation

$n x^{n-1} = 5x^4$ $\quad\quad \therefore n - 1 = 4 , n = 5$

Donc $F(x) = x^5$ ou $x^5 + 3$ ou $x^5 - 2$

La fonction F est appelée (nommée) la dérivée réciproque ou la fonction primitive (d'origine) de la fonction f

Allez apprendre

- Primitive (Dérivée réciproque).
- Intégration de quelques fonctions algébriques.
- Intégration de quelques fonctions trigonométriques

Vocabulaire de base

- Primitive (Dérivée réciproque).
- Intégration

A apprendre

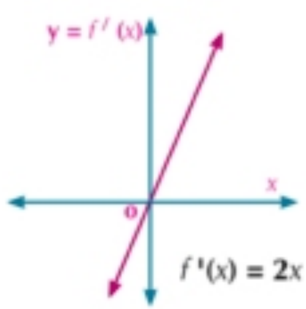
Primitive (Dérivée réciproque)

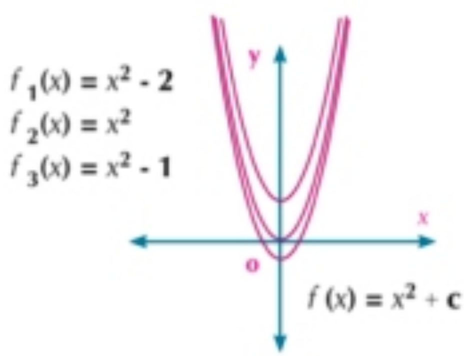
Si $y = x^2$ **alors la première dérivée est** $\frac{dy}{dx} = 2x$

Pour retrouver la fonction primitive y à partir de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ is on passe par un processus appelé primitive (intégral) ou la dérivée réciproqu .

Par exemple x^2 est la primitive (la dérivée réciproque) de la fonction $2x$ Remarquez que $2x$ admet plusieurs primitive comme $x^2 - 1$, $x^2 + 2$, $x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$, ... toutes ces fonctions ont la dérivée est $2x$.

$\therefore \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$ où (c) est une constante. Les figures suivantes indique cela.





Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme.

Définition

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f, si $F'(x) = f(x)$ pour tout x appartient à l'ensemble de définition de f.

Exemple

1) Démontrez que : la fonction F telle que $F(x) = \frac{1}{2}x^4$ est une primitive de la fonction f où $f(x) = 2x^3$.

Solution

On trouve la dérivée de la fonction F , $\therefore$ $F'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 = 2x^3$

$\therefore F'(x) = f(x)$ **c'est á dire la fonction (F) est une primitive de la fonction** f

Essayez de résoudre

1) Montrez que la fonction F où $F(x) = \frac{1}{2}x^6$ est une primitive de la fonction f où $f(x) = 3x^5$

Pensé critique :

Quelle est la relation entre F_1 et F_2 si elles sont des primitives de la fonction f ?

Intégral illimitée

L'ensemble des primitives de la fonction f est appelée l'intégral illimitée de cette fonction On la note $\int f(x)\, d\, x$ [qui se lit intégral de la fonction de x par rapport x]

Définition

Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int f(x)\, f\, x = F(x) + c$

où c est une constante

Remarquez que :

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 5) = 3x^2 \qquad \therefore \int 3x^2\, dx = x^3 + c$$

$$\frac{d}{dx}(x^5 - 3) = 5x^4 \qquad \therefore \int 5x^4\, dx = x^5 + c$$

$$\frac{d}{dx}(2x^7) = 14x^6 \qquad \therefore \int 14x^6\, dx = 2x^7 + c$$

Pour déterminer la valeur de la constante c, on doit savoir la valeur de l'intégral en une valeur de la variable x (C'est en dehors du programme).

Exemple

2) **Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes :**

a) $\int x^7\, d\, x = \frac{1}{8}x^8 + c$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \sqrt{1 + x^2} + c$

Solution

a $\because \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}x^8 + c\right) = x^7$ $\qquad \therefore \int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

b $\because \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2} + c\right) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} + c$

Essayez de résoudre

(2) **Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes :**

a $\int x^{-4}\,dx = \frac{-1}{3}x^{-3} + c$ **b** $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

Règle :

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ où **c** est une constante , **n** est un nombre rationnel $n \neq -1$

Exemple **Trouvez :**

(3) **a** $\int x^5\,dx$ **b** $\int x^{-3}\,dx$

c $\int x^{\frac{2}{5}}\,dx$ **d** $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$

Solution

a $\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c$

b $\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-2} + c = -\frac{1}{2}x^{-2} + c$

c $\int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{1}{\frac{7}{5}}x^{1+\frac{2}{5}} + c$

$= \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$

d $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \int x^{\frac{-3}{5}}\,dx$

$= \frac{1}{\frac{2}{5}}x^{1+\frac{-3}{5}} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + c$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez :

a $\int x^8\,dx$ **b** $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$

c $\int \sqrt[7]{x^5}\,dx$ **d** $\int 7x^{\frac{7}{9}}\,dx$

Propriétés de l'intégration

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle :

1- $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ où a est une constante différente de zéro

2- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Exemple

(4) Trouvez : **a** $\int (4x + 3x^2)\, dx$ **b** $\int \frac{(x^2+2)^2}{x^2}\, dx$

Solution

a $\int (4x + 3x^2)\, dx$

$= \int 4x\, dx + \int 3x^2\, dx$

$= 4 \int x\, dx + 3 \int x^2\, dx$

$= \frac{4}{2} x^2 + 3 \times \frac{1}{3} x^3 + c$

$= 2x^2 + x^3 + c$

b $\int \frac{(x^2+2)^2}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^2}\, dx$

$= \int x^2\, dx + \int 4\, dx + \int 4x^{-2}\, dx$

$= \frac{1}{3} x^3 + 4x - 4x^{-1} + c$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez :

a $\int (2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$ **b** $\int (\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3)\, dx$

Quelques règles de l'intégration

1- $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a} \times \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

2- $\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$, où c constante et n est un nombre rationnel $\neq -1$

Pensé critique:

1- Pouvez-vous vérifier que les deux relations précédentes sont correctes en utilisant la définition de la primitive? Argumentez votre solution

Exemple

(5) Trouvez :

a $\int \left((3 - 2x)^5 + 3)\right)\, dx$ **b** $\int \frac{x+3}{(x-2)^4}\, dx$

c $\int (x^2 - 3x + 5)^{-7} (2x - 3)\, dx$ **d** $\int (3x^2 - 2x + 1)^{11} (3x - 1)\, dx$

Solution

a $\int \left((3-2x)^5+3)\right) dx = \int (3-2x)^5 dx + 3\int dx$

$= \frac{(3-2x)^6}{6\times -2} + 3x + c = \frac{-1}{12}(3-2x)^6 + 3x + c$

b $\int \frac{x+3}{(x-2)^4} dx = \int \frac{(x-2)+5}{(x-2)^4} dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^4} dx + \int \frac{5}{(x-2)^4} dx$

$= \int (x-2)^{-3} dx + 5\int (x-2)^{-4} dx$

$= \frac{(x-2)^{-2}}{-2\times 1} + \frac{5(x-2)^{-3}}{-3\times 1} + c = \frac{-1}{2(x-2)^2} - \frac{5}{3(x-2)^3} + c$

c $\int (x^2-3x+5)^{-7}(2x-3) dx$

$\because f(x) = x^2-3x+5, \quad \because f'(x) = 2x-3$

$\therefore \int (x^2-3x+5)^{-7}(2x-3) dx = \frac{(x^2-3x+5)^{-6}}{6-} + c$

$= \frac{-1}{6}(x^2-3x+5)^{-6} + c$

d $\int (3x^2-2x+1)^{11}(3x-1) dx$

$\because f(x) = 3x^2-2x+1,$

$\because f'(x) = \frac{1}{2}(6x-2)$

$\therefore \frac{1}{2}\int (3x^2-2x+1)^{11}(6x-2) dx = \frac{1}{2}\frac{(3x^2-2x+1)^{12}}{12} + c$

$= \frac{1}{24}(3x^2-2x+1)^{12} + c$

Essayez de résoudre

5 Trouvez :

a $\int (3x+5)^{-9} dx$

b $\int (x+1)(x+3)^7 dx$

c $\int (x^2+3x-2)^9(2x+3) dx$

d $\int x(4x^3-3x^2+4)^5(2x-1) dx$

Cherchez : des ressources sur le WEB pour retrouver : $\int \frac{1}{x} dx$

Intégration de quelques fonctions trigonométriques

1- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

2- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

3- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

Où c est une constante arbitraire

Rappel

Quelques relations trigonométriques

a $\cos^2 X + \sin^2 X = 1$

b $\cos^2 X - \sin^2 X = \cos 2X$

c $1 + \tan^2 X = \sec^2 X$

d $2 \sin X \cos X = \sin 2X$

Exemple

6 Trouvez les intégrations suivantes :

a $\int (x - \sin x) \, dx$

b $\int (4 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + 1) \, dx$

Solution

a $\int (x - \sin x) \, dx = \frac{1}{2} x^2 + \cos x + c$

b $\int (4 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + 1) \, dx = \int (4 \cos x + \sec^2 x + 1) \, dx$
$= 4 \sin x + \tan x + x + c$

Essayez de résoudre

6 Trouvez les intégrations suivantes :

a $\int (6 \cos x - 8 \sin x) \, dx$

b $\int (3 + 4 \tan^2 x) \, dx$

Corollaires importantes :

1 - $\int \sin (ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos (ax + b) + c$

2 - $\int \cos (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin (ax + b) + c$

3 - $\int \sec^2 (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan (ax + b) + c$ Où c est une constante arbitraire

Pensé critique :

1- Vérifiez les relations précédentes en trouvant la primitive et en utilisation la règle de la dérivée en chaine

Exemple

7 Trouvez :

a $\int \cos (2x + 3) \, dx$

b $\int (\sec^2 \frac{x}{2} - \sin (\frac{\pi}{4} - x)) \, dx$

Solution

a $\int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3)+c$

b $= \int \sec^2(\frac{1}{2}x)dx - \int \sin(\frac{\pi}{4}-x)\,dx$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\tan\frac{x}{2} - [\frac{-1}{-1}\cos(\frac{\pi}{4}-x)] + c$

$= 2\tan\frac{x}{2} - \cos(\frac{\pi}{4}-x) + c$

Essayez de résoudre

7 Trouvez :

a $\int \sin(3x-5) f\ dx$

b $\int \cos(\frac{x}{3}-2)\,dx$

Exercices 3 - 6

Complétez ce qui suit :

1 La primitive de la fonction $(3x^2-2x+5)$ est ___

2 $\int (\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{5})\,dx =$ ___

3 $\int (4x - \sin\frac{\pi}{3})\,dx =$ ___

4 $\int (x+5)^3\,dx =$ ___

5 $\int (x+2)(x^2+4x-7)^{11}\,dx =$ ___

6 $\int (\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4})\,dx =$ ___

7 $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx =$ ___

8 $\int 2\tan x\sec^2 x\,dx =$ ___

Calculez les intégrales suivantes :

9 $\int 9x^8\,dx$

10 $\int 12x^{-2}\,dx$

11 $\int 5\sqrt{x^3}\,dx$

12 $\int -\frac{8}{5}c^{-3}\,dc$

13 $\int 2(3z^2-5)\,dz$

14 $\int 3x^2+x-2)\,dx$

15 $\int (3\sqrt{x} - \frac{2}{x^3})\,dx$

16 $\int (ax^2+5x+c)\,dx$

17 $\int x(x+3)\,dx$

18 $\int x^2(3x-\frac{5}{x})\,dx$

19 $\int (x-2)(x+2)\,dx$

20 $\int (x-5)(x+1)\,dx$

21 $\int (\sqrt{x}-1)^2\,dx$

22 $\int (x+\frac{1}{x})^2\,dx$

23. $\int \frac{2x^2+3}{x^2}\,dx$

24. $\int \frac{x^7-4x^5+x^3}{x^3}\,dx$

25. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

26. $\int \frac{x^3-27}{x-3}\,dx$

27. $\int \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}\,dx$

28. $\int \frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$

29. $\int 6(x-2)^5\,dx$

30. $\int 3(x+3)^{-4}\,dx$

31. $\int (8-3x)^4\,dx$

32. $\int (2z-3)^{\frac{7}{3}}\,dz$

33. $\int \frac{12}{(2x-5)^4}\,dx$

34. $\int \frac{7}{\sqrt{x+4}}\,dx$

35. $\int (x-1)(x^2-2x+1)\,dx$

36. $\int \sqrt{x-3}\,(x-3)^4\,dx$

37. $\int (x^2-2)^2\,dx$

38. $\int x(3x^2-5)^3\,dx$

39. $\int x(5x^2+2)^{-7}\,dx$

40. $\int \frac{x^3}{(x^4+1)^6}\,dx$

41. $\int (7\sin x-2\cos x)\,dx$

42. $\int (\sin 2x-3\cos x)\,dx$

43. $\int 9(\cos x-\sec^2 3x)\,dx$

44. $\int (3+5\sec^2 x)\,dx$

45. $\int \sin(5x-1)\,dx$

46. $\int \cos(2-x)\,dx$

47. $\int \sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right)dx$

48. $\int (\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$

49. $\int 2\cos^2 x\,dx$

50. $\int (4-\sin^2 x)\,dx$

Résumé de l'unité

Fonction de variation – taux de variation

- Si $y = f(x)$ et x varie de x to $x + h$, alors la fonction de variation $v(h) = f(x + h) - f(x)$
- Taux de variation $T(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Nombre dérivé (taux de variation instantané) $= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Le taux de variation est nommé la première dérivée de la fonction et on la note $f'(x)$ où :

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ [la première dérivée est représentée e par l'un des symboles : $\frac{dy}{dx}$ ou y' ou $f'(x)$]

Dérivabilité :

- $f(x)$ est dérivable en $x = a$ si et seulement si :

$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe , $f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe ,
$f'(a^-) = f'(a^+)$.

Si $f(x)$ est dérivable en $x = a$, alors $f(x)$ est continue en $x = a$

La continuité d'une fonction en un point ne veut pas dire qu'elle dérivable en ce point

Si la fonction n'est pas continue en $x = a$, alors la fonction n'est pas dérivable en $x = a$.

Dérivée de quelques fonctions :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n où $n \in \mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$\sin ax$	$a \cos ax$
ax^n où a est une constante ; $n \in \mathbb{R}$	$an x^{n-1}$	$\cos ax$	$-a \sin ax$
a où a est une constante	0	$\tan ax$	$a \sec^2 ax$

Dérivée de produit de deux fonctions :

- Si $y = g(x).z(x)$
- alors $\frac{dy}{dx} = g.\frac{dz}{dx} + z.\frac{dg}{dx}$

Dérivée de quotient de deux fonctions :

- Si $y = \frac{g(x)}{z(x)}$ où f et g sont dérivables $g(x) \neq 0$ **alors** $\frac{dy}{dx} = \frac{z \times \frac{dg}{dx} - g \times \frac{dz}{dx}}{[z(x)]^2}$

Dérivée de la fonction composée

- Si $y = [f(x)]^n$ **alors** $\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$

Règle de la dérivée en chaine

- Si $y = f(z)$, $z = f(x)$ **alors** $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

Règle de la dérivée en chaine:

- Si $y = f(x)$, alors la pente de la tangente de la courbe de la fonction f en un point quelconque qui lui appartient $= \frac{dy}{dx}$.

Si (x_1, y_1) est un point de la courbe de la fonction $y = f(x)$, alors l'équation de la tangente au point (x_1, y_1) est $y - y_1 = m(x - x_1)$.

où $m = (\frac{dy}{dx})$ et la pente de la tangente au point (x_1, y_1).

- L'équation de la normale au point (x_1, y_1) est $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

Où $m = (\frac{dy}{dx})$ est la pente de la tangente à la courbe au (x_1, y_1).

Primitive d'une fonction :

- On dit que la fonction F est la Primitive de la fonction f si $F'(x) = f(x)$ pour tout x appartient à l'ensemble de définition de f.
- Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ où c est une constante (constante de l'intégral).

Propriétés de l'intégral :

Si f et g sont dérivables sur un intervalle , alors :

1- $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$ dx où a est une constante $\neq 0$

2- $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Formules essentielles de l'intégral :

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

c $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\,(n+1)} + c$ où $n \neq -1$

d $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{(n+1)} + c$ où $n \neq -1$

e $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

f $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

g $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) $\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) =$

a) 1 b) 0 c) x d) $2(\cos X + \sin X)$

2) Si $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, alors $f'(-4) =$

a) $\frac{-4}{5}$ b) 5 c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{10}$

3) $\int (x^2 - 3)\, dx =$

a) $2x$ b) $x^3 - 3x$ c) $\frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ d) $2x - 3 + C$

4) $\lim\limits_{x \text{-} a} \frac{\sin X - \sin a}{x - a} =$

a) $\cos X$ b) 1 c) $\cos a$ d) $\sin(x - a)$

5) La perte de la tagente à la coube de la forcto $y = (2x - 3)^5$ si $x = 2$ est igale à ....

a) 1 b) $\frac{1}{12}$ c) 5 d) 10

6) $\frac{d}{dx}(2 - 3x)^{-2}$

a) $12x^{-2} - 27x^{-4}$ b) $\frac{1}{3}(2 - 3x)^{-1}$ c) $6(2 - 3x)^{-3}$ d) $-2(2 - 3x)^{-3}$

7) $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\, dx =$ ______

a) $f(x)$ b) $f(x) + c$ c) $\frac{d}{dx}(f(x))$ d) $\int f(x)\, dx$

8) Etudiez la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \\ 4x & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

9) Dans ce qui suit, trouvez :

a) $y = x^5 - 2\sqrt{x^3}$ b) $y = (4x^2 + 1)(1 - 4x^2)$

c) $y = \sqrt[3]{(2x+1)^5}$ d) $y = (x^3 - 3x^2 + 2)^5$

(10) Si $y = x \sin x - 3 \cos x$ trouvez $\frac{dy}{dx}$

(11) Si $y = (z - 1)^5$, $z = x^2 + 3$ trouvez $\frac{dy}{dx}$

(12) Trouvez les coordonées des points de la courbe d'équation $y = (x - 3)^2$ - auxquels la tangente est paralléle à la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$

(13) Si la pente de la tangente à la courbe de fonction d'équation $y = x^2 + ax + b$ au point de coordonnées (2 ; -2) égale à -1 ; trouvez les valeurs de a et de b .

Trouvez l'équation de la tangente à la courbe des fonctions définies ci-dessous aux points de coordonnées donnés :

(14) $y = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ au point de coordonnées (4; 4)

(15) $y = (x^2 + x)(x^3 + 5)$ au point de coordonnées (-2; -6)

(16) $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ au point de coordonnées (π ; 1)

Trouvez l'équation de la normale à la courbe des fonctions définies ci-dessous aux points de coordonnées donnés :

(17) $y = \left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)$ au point de coordonnées (3, 5)

(18) $y = \tan x$ au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

Trouvez les itégrations suivantes :

(19) $\int (x^2 - 3x - 1)\, dx$

(20) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

(21) $\int (4 - 3x)^7\, dx$

(22) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$

(23) $\int (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^9\, dx$

(24) $\int \frac{x + 2}{(3 + x)^5}\, dx$

(25) **Trouvez les itégrations suivantes** :

a $\int (x^3 + \sqrt{x})\, dx$

b $\int (x^2 + 1)^2\, dx$

c $\int x^2 (x^2 - 3)\, dx$

d $\int 3(3x + 1)^3\, dx$

e $\int 2x(x^2 - 4)^3\, dx$

f $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x)^2}\, dx$

g $\int (\cos 2x - x)\, dx$

h $\int (x^2 - 3x + 1)^3 (4x - 6)\, dx$

Epreuve cumulative

Complétez ce qui suit :

1) $\frac{d}{dx}(x \cos x) =$ ______ 2) $\int (3x^2 - 4x + 5)\, d\,x =$ ______

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

3) $\frac{d}{dx}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) =$ ______

a) 1 b) $\sec^2\frac{\pi}{4}$ c) 0 d) 2

4) La pente de la tangente à la courbe de la fonction d'équation $y = \sin x \cos x$ égale à

a) $\cos x \sin x$ b) $\cos^2 x - \sin^2 x$ c) $\sin x - \cos x$ d) $\sin^2 x + \cos^2 x$

5) la fonction d'équation $y = |x - 2|$ en $x = 2$ is :

a) est continue et dérivable b) est continue et n'est pas dérivable
c) n'est ni continue ni dérivable d) n'est pas dérivable

6) $\int 4(x - 2)^3\, dx =$ ______

a) $x^4 - 32x + c$ b) $4(x - 2)^4 + c$ c) $(x - 2)^4 + c$ d) $\frac{(x-2)^4}{4} + c$

7) Trouvez :

a) $y = z + \frac{1}{z}, x\,z = 1$ b) $y^3 = (x^2 - 4x + 4)^{-2}$
c) $y = x \tan 3x + \cos x$ d) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

8) Trouvez :

a) $\int (x - 1)(x + 1)\, dx$ b) $\int (2\sqrt{x} - 6x^2)\, dx$
c) $\int (1 + \cos x)^2\, dx$ d) $\int 4x(3 - 2x^2)^5\, dx$

9) Trouvez l'équation de la tangent à la courbe de la fonction $f(x) = x^2 - x^3$ au point de coordonnées $(2 ; -4)$.

10) Soit $y = \frac{x^3 - 1}{x^3}$, Démontrez que $x^4 \frac{dy}{dx} = 3$

11) La tangente à la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + b\,x + 5$ au point de coordonnées $(-1 ; 3)$ qui lui appartient, fait un angle de $45°$ de mesure avec la direction positive de l'axe des abscisses. Trouvez les valeurs de a et b.

Unité
4

Trigonométrie

Introduction de l'unité

Al-Battani (Abū Abdullāh Muhammad ibn Jābir ibn Sinān ar-Raqqī al-harrani as-sabi al-Battānī), il est vécu entre (235-317 Hégire) env. (850-929 J.-C.). Il était l'un des célèbres astronomes et mathématiciens qui est intéressé à la trigonométrie comme une science indépendante de l'astronomie. Il est le premier qui a imbriqué l'algèbre en trigonométrie. Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs et en partie celui de la tangente, et il en a dressé des tables formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne.

Abu l-Wafa (328-388 Hégire) env. (940-988 j.c.) a bien étudié les œuvres d'al-Battānī en trigonométrie, il éclairé les points ambigus et créé l'inverse de cosinus (sécante) et l'inverse de sinus (cosécante).Il a utilisé des idées sur les tangentes (ou « ombres ») pour développer des méthodes de calcul des tangentes et des cotangentes. Il a créé plusieures formules trigonométriques remarquables qui portent son nom (al-Battānī):

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$, $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$ **et autres**.

Dans cette unité, on va aborder des applications de la vie courante, les angles d'élévation et d'abaissement, comme application pratique sur les règles de sinus et de cosinus, ainsi que des identités trigonométriques les formules de la somme de deux angles et celles de duplication d'un angle. A la fin de cet unité, l'étudiant reconnaitra la formule de Héron pour résoudre un triangle connaissant les longueurs de ses cotés et des applications quotidiennes sur cette formule.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Résoudre des problèmes quotidiens sur l'angle d'élévation, l'angle d'abaissement et les directions.
- Déduire les identités trigonométriques de la somme et de différence de deux angles (Formules de la somme).
- Reconnaitre et déduire les identités trigonométriques du double et de la moitié d'un angle (Formules duplication).
- Déduire la formule de Héron et l'utiliser pour calculer l'aire d'un triangle et résoudre des problèmes quotidiennes.
- Utiliser la calculatrice pour résoudre des problèmes sur les identités trigonométriques.

Vocabulaires de base

- Angle
- Angle d'élévation
- Angle d'abaissement
- Fonction trigonométrique
- Fonction de sinus
- Fonction de cosinus
- Formules d'addition
- Formules de duplication
- Formules de l'angle moitié
- Formule de Héron

Leçons de l'unité

Lesson (4 - 1): Angles d'élévation et angles d'abaissement

Lesson (4 - 2): Formules d'addition.

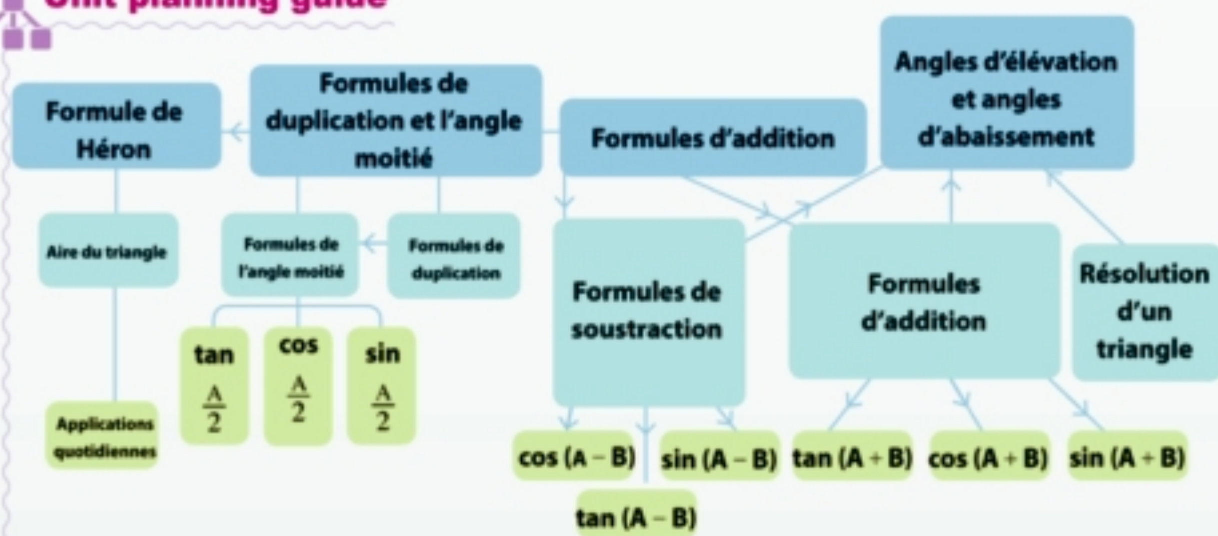
Lesson (4 - 3): Formules de duplication.

Lesson (4 - 4): Formule de Héron.

Aide pédagogique

Calculatrice scientifique - Réseau Internationale d'information

Unit planning guide



Unité 4

Angles d'élévation et angles d'abaissement

4 - 1

Allez apprendre

- Notion de l'angle d'élévation.
- Notion de l'angle d'abaissement
- Résoudre des problèmes quotidiens sur les Angles d'élévation et angles d'abaissement.

Vocabulaires de base

- Angle.
- Angle d'élévation.
- Angle d'abaissement

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Activité

Vous avez déjà appris les angles d'élévation et les angles d'abaissement comme application de la résolution d'un triangle rectangle. Vous pouviez trouver la hauteur d'un minaret qui se trouve à une distance connue sans la mesurer directement..

Après avoir étudié les règles de sinus, la règle de cosinus et la résolution d'un triangle quelconque en utilisant ces deux règles, on peut étudier des applications plus approfondies de la résolution d'un triangle quelconque.

- Cherchez dans la bibliothèque ou sur le réseau Internationale des Informations, des situations variées qui nécessitent les angles d'élévation et les angles d'abaissement comme une application de la résolution d'un triangle quelconque pour y résoudre. Puis écrivez une liste de ces situations en relevant des notes sur chacune de ces situations.

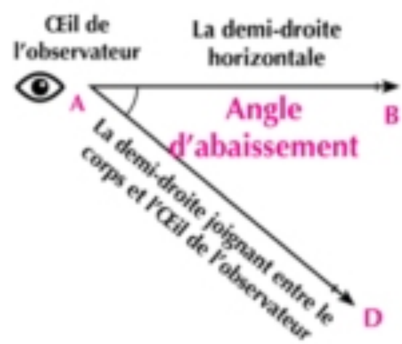
Angle d'élévation et angle d'abaissement

A apprendre

Angle d'élévation

Si une personne A observe un point C qui se trouve au-dessus du plan horizontal de vu $\overrightarrow{AB}$, alors l'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est appelé l'angle d'élévation de C par rapport au plan horizontal de vu de la personne A.

Angle d'abaissement



Si une personne A observe un point D qui se trouve au-dessous du plan horizontal de vu $\overrightarrow{AB}$, alors l'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est appelé l'angle d'abaissement de C par rapport au plan horizontal de vu de la personne A.

Remarque :

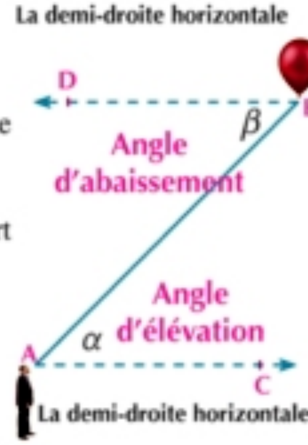
1- Dans la figure ci-contre:

$\angle$CAB est l'angle d'élévation du ballon par rapport à la personne en A.

$\angle$ DBA est l'angle d'abaissement de la personne en A par rapport au ballon.

Dans ce cas $\alpha = \beta$

où α est l'angle d'élévation et β est l'angle d'abaissement.



2- Pour déterminer la position d'un point par rapport aux points cardinaux d'un point donné:

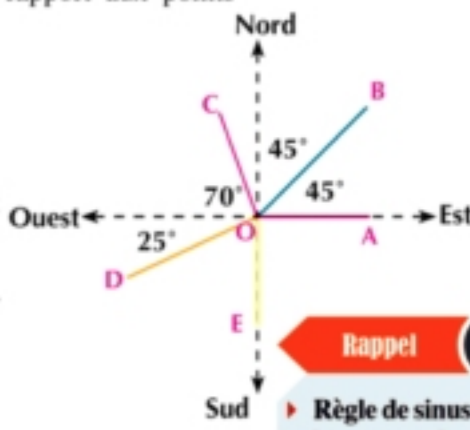
A se trouve à l'Est de **O**

B se trouve au Nord-est de **O**

C se trouve dans la direction 70° Nord par rapport à l'ouest de **O**

D se trouve dans la direction 25° Sud par rapport à l'ouest de **O**

E se trouve au Sud de **O**



Rappel

- **Règle de sinus : Les longueurs des cotés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles qui lui sont opposés.**
- **La mesure d'un angle extérieur à un triangle en sommet est égale à la somme des mesures de deux intérieurs qui ne lui sont pas adjacent.**

Exemple

(1) D'un point du sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 25°, S'il parcourt 57 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 52° 30'. Calculer la hauteur de la tour à un mètre près.

Solution

Dans la figure ci-contre :

$m\ (\angle CAD) = 52°\ 30' - 25°$

$= 27°\ 30'$

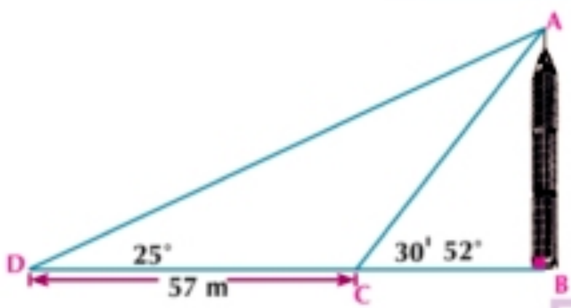
Dans $\triangle$ ACD :

$$\frac{AC}{\sin 25°} = \frac{57}{\sin 27°\ 30'}$$

$$\therefore\ AC = \frac{57 \times \sin 25°}{\sin\ 27°\ 30'} \qquad (1)$$

Dans $\triangle$ ABC :

$$\frac{AB}{\sin 52°\ 30'} = \frac{AC}{\sin 90°}$$



$\therefore\ AB = AC \times \sin 52°\ 30'$ **(2)**

D'après **(1)** et **(2),** alors :

$$AB = \frac{57 \times \sin 25°}{\sin 27°\ 30'} \times \sin 52°\ 30'$$

$AB \simeq$ 41m, C-à-d la hauteur de la tour égale à 41 mètres près.

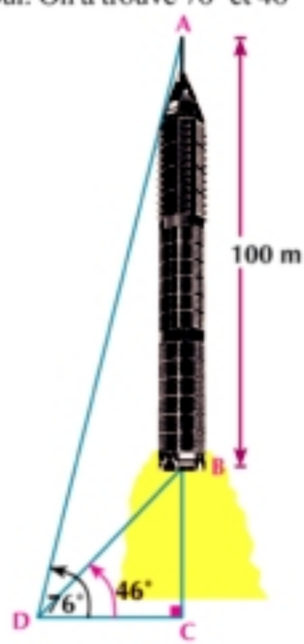
[5] [7] [×] [sin] [2] [5] [(] [×] [sin] [5] [2] [°'''] [3] [0] [°'''] [)] [÷] [sin] [2]
[7] [°'''] [3] [0] [°'''] [=]

Essayez de résoudre

1. D'un point au sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 20°, S'il parcourt 50 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 42°. Calculez la hauteur de la tour à un mètre près.

Exemple

2. Un tour de 100 m de hauteur est construite sur un rocher. D'un point sur la terre, on a mesuré les deux angles d'élévation du sommet et de la base de la tour. On a trouvé 76° et 46° respectivement. Trouver la hauteur du rocher à un mètre près.



Solution

$m\ (\angle AD\ B) = 76° - 46° = 30°$

$m\ (\angle A) = 90° - 76° = 14°$

Dans le triangle ABD : $\dfrac{BD}{\sin 14°} = \dfrac{100}{\sin 30°}$

$BD = \dfrac{100 \sin 14°}{\sin 30°}$ **(1)**

Dans le triangle BCD : $\dfrac{BC}{\sin 46°} = \dfrac{BD}{\sin 90°}$

$BC = BD \sin 46°$ **(2)**

D'après (1) et (2) on obtient:

$$BC = \frac{100 \sin 14°}{\sin 30°} \times \sin 46° \simeq 35 \text{ m}$$

On utilise la calculatrice comme suivant :

[1] [0] [0] [×] [sin] [1] [4] [)] [×] [sin] [4] [6] [)]
[÷] [sin] [3] [0] [)] [=]

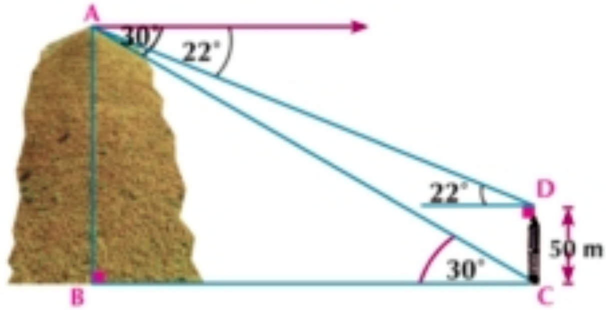
Essayez de résoudre

2. Un tour de 12 m de hauteur est construite sur une colline. D'un point sur la terre, on a mesuré les deux angles d'élévation du sommet et de la base de la tour. On a trouvé 32° et 24° respectivement. Trouver la hauteur de l colline à un mètre prés.

Exemple

(3) Du sommet d'une colline, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 22° et 30° . Calculer la hauteur de la colline. Si la hauteur de la tour est 50 métres, calculez la hauteur de la colline à un mètre près. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal .

Solution



Dans la figure ci-contre:

m ($\angle$DAC) = 30° - 22° = 8°

m ($\angle$CDA) = 90° + 22° = 112°

Dans le triangle ACD $\dfrac{AC}{\sin 112^\circ} = \dfrac{50}{\sin 8^\circ}$

$AC = \dfrac{50 \sin 112^\circ}{\sin 8^\circ}$ (1)

Dans le triangle ACB

$\dfrac{AB}{\sin 30^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 90^\circ}$ $\therefore$ AB = AC sin 30° (2)

Substituons par (1) en (2), alors :

$AB = \dfrac{50 \sin 112^\circ \times \sin 30^\circ}{\sin 8^\circ} \simeq$ 167 mètres.

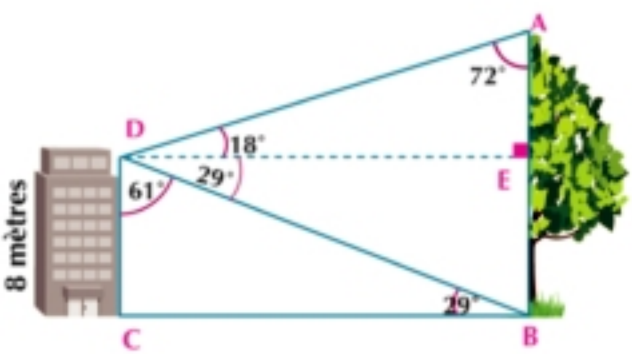
5 0 × sin 1 1 2) × sin 3 0) ÷ sin 8) =

Essayez de résoudre

(3) Du sommet d'un rocher de 80 m de hauteur, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 24° et 35°. Calculez la hauteur de la tour. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.

Exemple

(4) Du d'une maison de 8 m de hauteur, la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'un arbre est de 18° et la mesure de l'angle d'abaissement de sa base est 29° , Déterminez la distance entre la bases de la maison et celle de l'arbre, ainsi que la hauteur de la tour à deux décimales près sachant que la base de la tour et la base de la maison sont situées dans un même plan horizontal.



Solution

m ($\angle$A) = 90° - 18° = 72°

m ($\angle$BDC) = 90° - 29° = 61°

Dans $\triangle$ BCD : $\because \dfrac{8}{\sin 29^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 61^\circ}$

$\therefore$ $BC = \dfrac{8 \times \sin 61^\circ}{\sin 29^\circ} \simeq$ 14,43 mètres.

La distance entre la base de la maison et celle de l'arbre $\simeq$ 14.43 mètres

Dans $\triangle$ AED :

$\because \dfrac{DE}{\sin 18^\circ} = \dfrac{ED}{\sin 72^\circ}$. Remarquez que (ED = BC)

$\therefore AE = \dfrac{\sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} \times BC$ $\therefore$ $AE = \dfrac{\sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} \times 14{,}43 \simeq$ 4,69 m

$\therefore$ La hauteur de l'arbre $\simeq 8 + 4{,}69 \simeq 12{,}69$ m

Essayez de résoudre

4) D'un sol horizontal, deux hommes observent, en même temps, un ballon. Le premier a trouvé que l'angle d'élévation du ballon mesure 63° le deuxième à trouvé que la mesure de l'angle d'élévation est 39°. Si la distance entre les deux hommes est 800 mètres, le ballon et les deux hommes sont situés dans un même plan vertical et la projection du ballon sur le sol se trouve entre les deux hommes, trouver la hauteur du ballon de la surface de la terre à un mètre près.

Exemple

5) Du point A au bord d'une rivière, un homme observe un arbre situé au point B de l'autre côté de la rivière, il trouve que B est situé à 20° nord par rapport à l'est de A. Il parcourt 300 m parallèlement à la rivière vers l'ouest jusqu'au point C. B est alors situé à 46° nord par rapport à l'est de C. Calculez, à un mètre près la largeur de la rivière sachant que les deux bords de la rivière sont parallèles et les points B et C sont situés dans un même plan vertical.

Solution

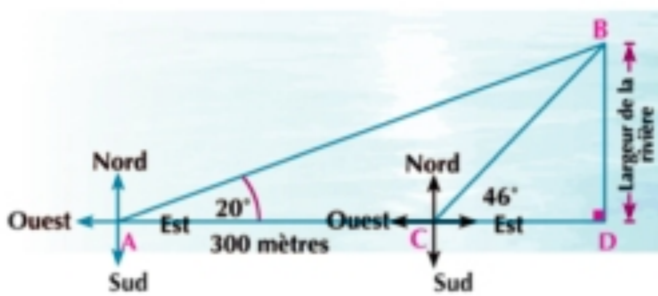
Soit $\overline{BD}$ largeur de la rivière

Dans le triangle ABC

$m(\angle ABC) = 46^\circ - 20^\circ = 26^\circ$

$\dfrac{BC}{\sin 20} = \dfrac{300}{\sin 26^\circ}$

$BC = \dfrac{300 \sin 20^\circ}{\sin 26^\circ}$ (1)



Dans le triangle BDC :

$\because \dfrac{BD}{\sin 46^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 90^\circ}$ $\therefore BD = BC \times \sin 46^\circ$ $\therefore BD = \dfrac{300 \times \sin 20^\circ}{\sin 26^\circ} \times \sin 46^\circ \simeq$ 168 mètres

3 0 0 × sin 2 0) × sin 4 6) ÷ sin 2 6) =

Essayez de résoudre

5) Du point A au bord d'une rivière, un homme observe un arbre situé au point B de l'autre côte de la rivière, il trouve que B est situé à 37° nord par rapport à l'est de A. Il parcourt 200 m parallèlement à la rivière vers l'ouest jusqu'au point C. B est. alors situé à 15° nord par rapport à l'est de C. Calculez à un mètre près la largeur de la rivière.

Exemple

(6) D'un point situé dans le plan horizontal de la base d'une colline, la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la colline est de 27°. Si on se déplace de 200m en direction de la colline sur un plan incliné de 14° sur l'horizontale, l'angle d'élévation du sommet de la colline mesure alors 38°. Déterminer la hauteur de la colline à un mètre près.

Solution

Dans le triangle ACD :

m ($\angle$ ACD) = 27° - 14° = 13°

$\because$ L'angle AEB est un angle extérieur au triangle AEC

$\therefore$ m ($\angle$ EAC) = 38° - 27° = 11°

$\therefore$ m ($\angle$ ADC) = 180° - (11° + 13°) = 156°

Dans le triangle ADC :

$\because \quad \dfrac{AC}{\sin 156^\circ} = \dfrac{200}{\sin 11^\circ}$

$\therefore \quad AC = \dfrac{200 \times \sin 156^\circ}{\sin 11^\circ}$ **(1)**

Dans le triangle ABC :

$\because \quad \dfrac{AB}{\sin 27^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 90^\circ}$

$\therefore AB = AC \sin 27^\circ$ **(2)**

Rappel

La mesure d'un angle extérieur à un triangle en un sommet est égale à la somme des mesures de deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacent.

Substituons par (1) en (2), on obtient :

$$AB = \frac{200 \times \sin 156^\circ}{\sin 11^\circ} \times \sin 27^\circ \simeq 194 \text{ m.}$$

Essayez de résoudre

(6) D'un point situé dans le plan horizontal de la base d'une colline, la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la colline est de 22°. Si on se déplace de 500m en direction de la colline sur un plan incliné de 7° sur l'horizontale, l'angle d'élévation du sommet de la colline mesure alors 64°. Déterminez la hauteur de la colline à un mètre près.

Exemple

(7) **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau est parti d'un certain point dans la direction de 68° 25' ouest par rapport au Sud avec une vitesse de 15 km/ h. Au même moment un autre bateau est parti du même point vers 53° 48' Nord par rapport à l'est avec une vitesse de 8 km/h. Trouver la distance qui sépare les deux bateaux 3 heures après leur départ à deux décimales près.

Solution

$\because$ Vitesse uniforme = $\dfrac{\text{Distance parcourue}}{\text{temps}}$

Distance parcoure = vitesse uniforme × temps

$\therefore$ AB = 15 × 3 = 45 km

AC = 8 × 3 = 24 km

$\therefore$ m ($\angle$ B AD) = 90° - 68°25' = 21° 35'

$\therefore$ m ($\angle$ B AC) = 21° 35' + 53° 48'

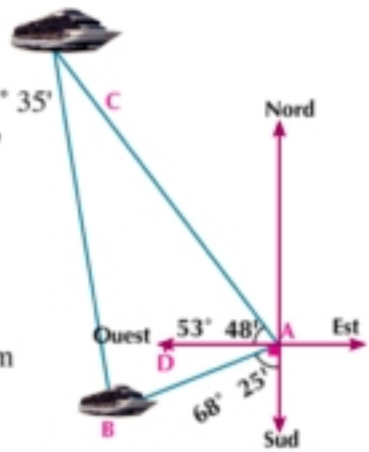
= 75° 23'

Dans le triangle ABC :

En utilisant la règle de cosinus

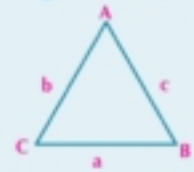
$(BC)^2 = (45)^2 + (24)^2 - 2 \times 45 \times 24$

cos 75° 23' $\therefore$ BC $\simeq$ 45.34 km



Rappel

Règle de cosinus



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

D'où $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

De même pour les longueurs des autres cotés et les mesures des autres angles

4 5 χ^2 + 2 4 χ^2 - 2 × 4 5 × 2 4 × cos 7 5 ,,, 2 3 ,,,) = √ Ans =

Essayez de résoudre

7) **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau est parti d'un certain point dans la direction de 70° Est par rapport au Sud avec une vitesse de 12 km/h . Au même moment un autre bateau est parti du même point vers 55° Nord par rapport à l'est avec une vitesse de 5km/h. Trouver la distance qui sépare les deux bateaux deux heures après leur départ à deux décimales près .

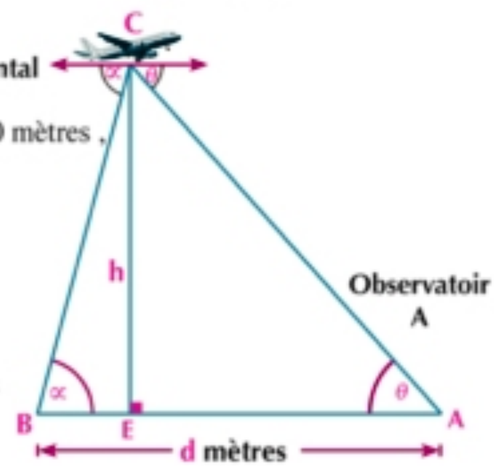
Exemple

8) **(Démonstration théorique):** Un pilote d'avion C observe en même temps deux stations A et B situées au sol telles que AB = d m . L'angle d'abaissement de A mesure θ et celui que B mesure $\propto$. Si l'avion et les deux stations sont situées dans un même plan vertical et l'altitude de l'avion par rapport à la surface de la terre est égale à h mètre et que la projection de l'avion sur le terrain appartient à $\overline{AB}$:

$h = \dfrac{d}{\cot\theta + \cot\propto}$

Si m ($\angle$ θ) = 48° 31' , m ($\angle$ $\propto$) = 75°15', d = 1290 mètres ,

Trouvez la valeur de h.



Solution

$\because \cot\theta = \dfrac{AD}{h}$ $\therefore AD = h\cot\theta$ (1)

$\because \cot\propto = \dfrac{BD}{h}$ $\therefore BD = h\cot\propto$ (2)

D'après (1) et (2) :

$\therefore$ AD + BD = h cot θ + z cot $\propto$ = h (cot θ + cot $\propto$)

$\therefore$ d = h (cot θ + cot $\propto$)

C.à.d $h = \dfrac{d}{\cot\theta + \cot\propto}$

Lorsque m ($\angle\ \theta$) = 48° 31' , m ($\angle\ \propto$) = 75° 15', d = 1290 mètres

$\therefore\ h = \dfrac{1290}{\cot 48°\ 31' + \cot 75°\ 15'} \simeq$ 1124,2 mètres

1 2 9 0 ÷ (1 ÷ tan 4 8 °'" 3 1 °'") + 1 ÷
tan 7 5 °'" 1 5 °'")) =

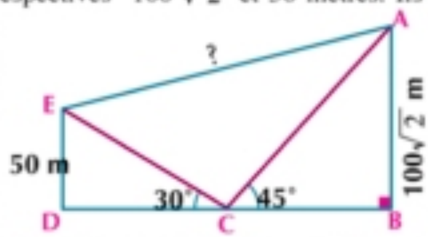
Essayez de résoudre

8 **Démonstration théorique :** Une échelle de longueur ℓ se repose par l'une de ses extrémités contre un mur vertical et par l'autre extrémité sur un sol horizontal. Elle est inclinée d'un angle de mesure φ sur l'horizontal. L'extrémite inférieure de l'échelle s'est éloignée du mur d'une distance d mètres, l'échelle est alors inclinée d'un angle de mesure égale à θ sur l'horizontal. Démontrez que $\ell = \dfrac{d}{\cos\theta - \cos\varphi}$
Si d = 40 cm, m ($\angle\ \theta$) = 30° et m ($\angle\ \varphi$) = 40°, calculez la longueur de l'échelle.

Exercices 4 - 1

1. D'un point du sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 20° 35 '. S'il parcourt 50 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 42°. Calculaer la hauteur de la tour à un mètre près.
2. Du sommet d'une maison de 15 mètres de hauteur, on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'une tour est 67° et la mesure de l'angle d'abaissement de la base de la tour est 35°. Trouvez la hauteur de la tour à un mètre près, sachant que la base de la tour et celle de la maison sont dans un même plan horizontal.
3. Du sommet d'une tour de 65 mètres de hauteur, on a trouve que les mesures des angles d' abaissements de deux points A et B qui sont situé sur un plan horizontal sont 32° et 21° 12' respectivement. Si D repreésente la base de la tour A $\in \overline{BD}$, trouver la longueur de $\overline{AB}$ à un mètre près.
4. Du sommet d'une colline, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 15° et 26° . Si la hauteur de la tour est 50 métres, calculez la hauteur de la colline à un mètre près. On suppose que la base lacolline et de la tour sont dans un même plan horizontal .
5. Un bateau dans la mer, observe un minaret, il a trouvé qu'il se trouve à 50 km de distance vers l'Est. Le bateau s'est déplacé dans la direction de nord-est. Deux heures après, on a trouvé que le minaret est situé dans la direction 50° sud par rapport à l'est du bateau. Calculez la vitesse du bateau.
6. Un minaret de 60 mètres de hauteur est construit sur une colline près du bord de la mer. D'un bateau situé à la surface de la mer, on a mesuré les langlesd élévations du sommet et la base du minaret, on les a trouvés de 70° et 45° respectivement. Trouver la hauteur de la colline par rapport à la surface de la mer à un mètre près.

7. **Dans la figure ci-contre:** Soient deux ballons d'altitudes respectives $100\sqrt{2}$ et 50 mètres. Ils observent un corps (C) situé dans le plan vertical passant par les deux ballons. Si les mesures des angles d'abaissements sont 45° et 30° respectivement, Calculez la distance entre les deux ballons à un mètre près.



8. Du sommet d'un rocher de 80 m de hauteur, on a mesuré les deux angle d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a trouvé respectivement 24°et 35°. Calculer la hauteur de la tour. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.

9. Du sommet d'une maison , un homme observe une voiture qui s'arrêté au même plan horizontal que la maison. Il trouve que l'angle d'abaissement de la voiture est 70°, il est descendue verticalement vers le bas d'une distance de 12 mètres la mesure de l'angle d'abaissement de la voiture devient alors 30°. Trouvez la hauteur de la maison et la distance entre la base du la maison et la voiture à un mètre près.

10. Trois vilages A, B et C se trouvent dans un même plan horizontal. A se trouve à 20km a louest de B. C est situé dans la direction 48° à l'est par rapport nord de B et dans la direction 60° sud par rapport à l'est de A. calculer la distance entre les deux vilages B et C à un km près.

11. D'un point sur la surface de la mer, on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'un arbre mesure 50°, D'un autre point situant à 45 mètres d'altitude et se trouve juste au-dessous du point précédent, on a retrouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet de l'arbre mesure 30°. Trouvez la hauteur de l'arbre à un mètre près.

12. Du sommet d'une montagne de 100 mètres d'altitude par rapport à la surface de la mer, un homme observe un rocher qui se trouve à une distance de 22 mètres de la montagne. Il a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet du rocher mesure 42° 37 '.Trouvez la hauteur du rocher par rapport à la surface de la mer à un mètre près sachant que la montagne et le rocher sont situés sur un même sol horizontal.

13. Deux hommes commencent à se mouvoir, en même temps et d'un même point. Le premier dans la direction 40° ouest par rapport au nord à une vitesse de 32 mètres/minute et le deuxième dans la direction 70° sud par rapport à l'ouest à une vitesse de 38 mètres/minute. Calculez la distance entre les deux hommes 5 minutes après le mouvement.

14. D'un point situé dans le plan horizontal de la base d'une colline, la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la colline est de 24°. Si on se déplace de 400m en direction de la colline sur un plan incliné de 15° sur l'horizontale, l'angle d'élévation du sommet de la colline devient 36°. Déterminer la hauteur de la colline à un mètre près.

15. Un pilote d'avion C observe en même temps deux stations A et B situées au sol telles que AB = 3000 m . L'angle d'abaissement de A mesure 53° 21 ' , et celui de B mesure 34° 26 '. Si l'avion et les deux stations sont situées dans un même plan vertical et que la projection de l'avion sur le sol appartient à $\overline{AB}$. Calculer l'altitude de l'avion par rapport à la surface de la terre à un mètre près.

16. **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau navigue vers le nord-est à une vitesse uniforme de 28 km/h. Un homme dans ce bateau a observé deux points fixes qui se trouvent à 37° ouest par rapport au nord. 3 heures après, un de ces points se trouve dans la direction 24° nord par rapport à l'ouest du bateau et l'autre point est situé dans la direction 19° nord par rapport à l'ouest du bateau. Calculer la distance entre les deux points à un km près sachant que les deux points et l'homme sont situés dans un même plan horizontal.

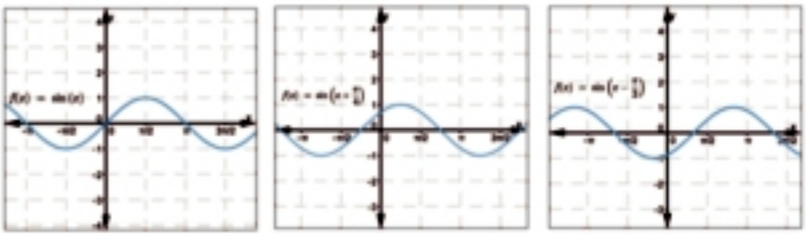
Formules d'addition

4 - 2

Réfléchissez et discutez

Utilisez le logiciel géogébra pour tacer la courbe de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$f(x) = \sin x$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $m(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



A partir de la notion des transformations géométriques: Que remarquez - vous ?

La fonction représentée dans la deuxième figure comprend la somme de deux angles x et $\frac{\pi}{4}$

La fonction représenté dans la troisième figure comprend la différence de deux angles x et $\frac{\pi}{3}$.

Pour cela , on doit utiliser les formules d'addion pour trouver les fonctions trigonométriques d'un angle de mesure donnée par exemple: pour calculer sin 75°, on la met sous la forme sin (30° + 45°) , de même pour cos 15° on la met sous la forme cos (60° - 45°) où cos (45° - 30°) etc ....

A apprendre

Formules d'addition

Dans la figure ci-contre : (la démonstration ne peut pas être l'objet d'un examen)

Remarquez que: $m(\angle A) = m(\angle ZLM)$. Pourquoi?

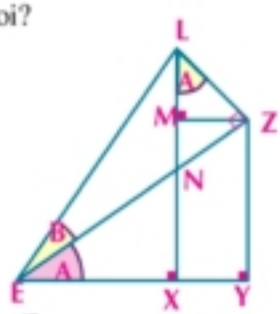
$$\sin(A+B) = \frac{LX}{LE} = \frac{MX}{LE} + \frac{LM}{LE}$$

$$= \frac{ZY}{LE} + \frac{LM}{LE}$$

$$= \frac{ZY}{LE} \times \frac{ZE}{ZE} + \frac{LM}{LE} \times \frac{LZ}{LZ}$$

$$= \frac{ZY}{ZE} \times \frac{ZE}{LE} + \frac{LM}{LZ} \times \frac{LZ}{LE}$$

$$= \sin A \times \cos B + \cos A \times \sin B$$



(Remarquez que: ZY = MX - Pourquoi?)

Allez apprendre

- Déduir les formules d'addition .
- Résoudre des applications variées sur les formules d'addion
- Démontrer des identités trigonométriques en utilisant les formules d'addition

Vocabulaires de base

- Fonction trigonométriques
- Fonction de sinus
- Fonction de cosinus
- Fonction de tangente
- Formules d'addition

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Alors $\boxed{\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B}$

Remplasons (- B) par of B, on obtient :

$\sin [A + (-B)] = \sin A \cos (-B) + \cos A \sin (-B)$

$\boxed{\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B}$

Utiliser la même figure pour démontrer :

$\boxed{\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$

Il résulte que : $\boxed{\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$

Rappel

$\sin (-A) = - \sin A$

$\cos (-A) = \cos A$

$\tan (-A) = - \tan A$

Exemple

1. Calculez :

a. $\sin 75^\circ$ b. $\cos 15^\circ$ Que remarquez-vous?

Solution

a. $\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b. $\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

On remarque que : $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$

Essayez de résoudre

1. Calculez :

a. $\cos 105^\circ$ b. $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

c. $\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ$

Rappel

$\sin (180-A) = \sin A$

$\cos (180-A) = - \cos A$

$\sin (180+A) = - \sin A$

$\cos (180+A) = - \cos A$

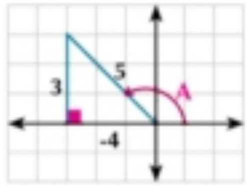
Exemple

2. Si $\sin A = \frac{3}{5}$ où $90^\circ < A < 180^\circ$ et $\cos B = \frac{-5}{13}$

Où $180^\circ < B < 270^\circ$

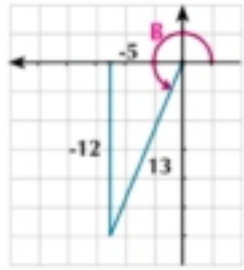
Trouvez : $\cos (A - B)$, $\sin (A + B)$

Solution



$\because$ A $\in$ deuxième quadrant $\quad\quad \therefore\ \sin A = \frac{3}{5} \quad \cos A = \frac{-4}{5}$

$\because$ B $\in$ troisième quadrant $\quad\quad \therefore\ \sin B = \frac{-12}{13} \quad \cos B = \frac{-5}{13}$



D'où:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$= (\frac{-4}{5})(\frac{-5}{13}) + (\frac{3}{5})(\frac{-12}{13}) = \frac{-16}{65}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$= (\frac{3}{5})(\frac{-5}{13}) + (\frac{-4}{5})(\frac{-12}{13}) = \frac{33}{65}$$

Essayez de résoudre

2) Si $\cos A = \frac{4}{5}$ et $\cos B = \frac{12}{13}$ où A et B sont les mesures de deux angles aigu. Trouvez sans utiliser une calculatrice :

a $\sin (A + B)$ **b** $\sec (A - B)$

3) Dans le triangle ABC , $\cos A = \frac{-3}{5}$ et $\sin B = \frac{5}{13}$, Trouvez sin C sans utiliser une calculatrice.

Exemple

3) **En lien avec l'électricité:** L'intensité de courants électrique est donné par la relation :

$I = \frac{5}{2} \sin 165° t$

a Réformulez la relation précédente en utilisant les formules d'addion.

b Trouvez l'intensité éléctrique après une minute

Solution

$I = \frac{5}{2} \sin 165° t$ **La relation donnée**

$I = \frac{5}{2} \sin (45° t + 120° t)$ **car** $165° = 45° + 120°$

$= \frac{5}{2} \sin (45° + 120°)$ **par subistition** n =1 second

$= \frac{5}{2} [\sin 45° \cos 120° + \cos 45° \sin 120°]$ **En utilisant la formule de la somme**

$= \frac{5}{2} [\frac{1}{\sqrt{2}} (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}]$ **par subistition par les rapport trigonométrique**

$= \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **Multipliant par** $\sqrt{2}$

$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8}$ **En simplifiant**

Essayez de résoudre

(4) L'intensité de courants électrique est donné par la relation $I = \frac{3}{2} \cos 285^\circ\, t$

a Réformulez la relation précédente en utilisant les formule d'addion.

b Trouvez l'intensité éléctrique après une minute

Formules d'addition de la tangente

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

Divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos A \cos B \neq 0$, alors:

$$\boxed{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$$

Remplaçons (-B) par B, alors:

$$\boxed{\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}}$$

où A et $B \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$; $n \in \mathbb{Z}$

Exemple

(4) Sans utiliser une calculatrice, démontrez que :

a $\tan 50^\circ = \frac{1 + \tan 5^\circ}{1 - \tan 5^\circ}$

b $\tan(45^\circ - A) = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$

Solution

a Membre gauche $= \tan 50^\circ$

$$= \tan(45^\circ + 5^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 5^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 5^\circ} = \frac{1 + \tan 5^\circ}{1 - \tan 5^\circ} = \text{Membre droite}$$

b Membre gauche $= \tan(45^\circ - A)$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1 + \tan 45^\circ \tan A} = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A}} \times \frac{\cos A}{\cos A} = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \text{Membre droite}$$

Rappel

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

Essayez de résoudre

(5) Si A et B sont les mesures de deux angles aigu positifs tels que $\sin A = \frac{12}{13}$, et $\sin B = \frac{4}{5}$, trouvez la valeur de $\tan(A - B)$

(6) Si A, B et C sont les mesures des angles aigu positifs tels que $\tan B = \frac{4}{3}$, $\tan C = 7$, démontrez que $A = 45^\circ$

(7) Si $\tan A = \frac{5}{6}$ et $\tan B = \frac{1}{11}$, démontrez que $(A + B) = 45^\circ$.

Exemple

(5) Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes où $0^\circ < x < 360^\circ$

a $\tan x + \tan 20^\circ + \tan x \tan 20^\circ = 1$ **b** $\sin(x + 30^\circ) = 2\cos x$

Solution

a $\because \tan x + \tan 20^\circ + \tan x \tan 20^\circ = 1$

$\therefore \tan x + \tan 20^\circ = 1 - \tan x \tan 20^\circ$

$\therefore \dfrac{\tan x + \tan 20^\circ}{1 - \tan x \tan 20^\circ} = 1$ (**Divisons les deux membre de l'équation par:** $1 - \tan x \tan 20^\circ$)

D'où: $\tan(x + 20^\circ) = 1$

$\therefore x + 20$ **se trouve au premier quadrant**

$\therefore \tan(x + 20^\circ) = \tan 45^\circ \qquad x + 20^\circ = 45^\circ \qquad x = 25^\circ$

ou $x + 20^\circ$ **se trouve au troisiéme quadrant**

$\tan(x + 20^\circ) = \tan 225^\circ \qquad x + 20^\circ = 225^\circ \qquad x = 205^\circ$

Ensemble des solutions: $\{25^\circ, 205^\circ\}$

b $\because \sin(x + 30^\circ) = 2\cos x$

$\therefore \sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ = 2\cos x$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \dfrac{1}{2} \cos x = 2\cos x$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \dfrac{3}{2} \cos x$

Divisons les deux membre de l'équation par $\cos x$, **où:** $\cos x \neq 0$

$\therefore \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ **d'où.** $\tan x = \sqrt{3} > 0$

$\therefore x$ se trouve au premier ou troisième quadrant **.**

$x = 60^\circ$ **ou** $x = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$

Ensemble des solutions: $\{60^\circ, 240^\circ\}$

Essayez de résoudre

(8) Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes où $0^\circ < x < 360^\circ$

a $\sin x \cos 20^\circ - \cos x \sin 20^\circ = \dfrac{1}{2}$ **b** $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercices 4 - 2

Complétez ce qui suit:

1. $\sin 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 40^\circ \sin 10^\circ =$ ....
2. $\dfrac{\tan 75^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 75^\circ \tan 15^\circ} =$ ....
3. $\cos 70^\circ \cos 20^\circ - \sin 70^\circ \sin 20^\circ =$ ....
4. $\sin(X + Y) \cos Y - \cos(X + Y) \sin Y =$ ....
5. Si $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, then $\tan(A + B) =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

6. $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) =$

   a) $\frac{1}{2}(\cos\theta + \sqrt{3}\ \sin\theta)$ b) $\frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$

   c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\ \cos\theta + \sin\theta)$ d) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\ \cos\theta + \sqrt{2}\ \sin\theta)$

7. $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$ est égal à

   a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\sin 5x \sin 3x + \cos 5x \cos 3x$ est égal à

   a) $\cos 2x$ b) $\cos 8x$ c) $\sin 8x$ d) $\sin 2x$

9. $\tan 15^\circ$ est égal à

   a) $2 + \sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3} - 2$ c) $\sqrt{3} - 2$ d) $2 - \sqrt{3}$

10. Si $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, $\tan(A + B)$ est égal à

    a) 1 b) $-\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{6}$

11. $\cot(2\pi - \frac{5\pi}{12}) =$

    a) $2 + \sqrt{3}$ b) $2 - \sqrt{3}$ c) $-2 - \sqrt{3}$ d) $\sqrt{3} - 2$

Simplifiez :

12) $\cos(A - B) - \cos(A + B)$

13) $\sin(A + B) - \sin(A - B)$

14) $\cos A \cos(A + \frac{\pi}{2}) + \sin A \sin(A + \frac{\pi}{2})$

15) $\cos 40^\circ \cos x - \sin 40^\circ \sin x$

16) Si $\sin A = \frac{-8}{17}$ où $180^\circ < A < 270^\circ$ et $\cos B = \frac{-5}{13}$ où $90^\circ < B < 180^\circ$
Sans utiliser une calculatrice trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a $\cos(A - B)$ b $\sin(A + B)$ c $\tan(A - B)$

17) Si $\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{3}{2}$, trouvez la valeur de $\tan\theta$.

18) Soit $\frac{\cos(A + B)}{\cos(A - B)} = \frac{1}{3}$, Démontrez que: $2\sin A \sin B = \cos A \cos B$
puis démontrez que : $2\tan A = \cot B$ sachant que $\tan A = \frac{2}{5}$, trouvez tan B , ensuite trouvez $\tan(A - B)$

19) Soient A et B deux angles aigus où $\tan A = \frac{4}{5}$, $\tan B = \frac{1}{9}$, démontrez que $A + B = 45^\circ$.

20) Si $\cos A = 0{,}6$, $\cos B = 0{,}8$, où A et B sont les mesures de deux angles aigu,

Sans utiliser une calculatrice trouvez la valeur de chacun de ce qui suit:

a $\sin(A + B)$ b $\cos(A - B)$ c $\tan(A - B)$

21) Si A et B sont les mesures de deux angles aigu $\cos A = \frac{3}{5}$ et $\tan B = \frac{8}{15}$, Sans utiliser une calculatrice trouvez la valeur de chacun de ce qui suit:

a $\sin(A + B)$ b $\tan(A - B)$ c $\sec(A - B)$ d $\cot(A + B)$

22) Si $\sin A \sin B = \frac{1}{2}$ et $\cos A \cos B = \frac{1}{3}$, où A et B sont les mesures de deux angles aigu ,
Trouvez la valeur de: $\cos(A + B)$ et $\cos(A - B)$.

23) Si $\sin A = \frac{3}{5}$ où $0^\circ < A < 90^\circ$ et $\tan B = -7$ où $90^\circ < B < 180^\circ$, démontrez que $A + B = 135^\circ$

24) Si $x + y + z = 90^\circ$, démontrez que $\tan x \tan y + \tan y \tan z + \tan z \tan x = 1$

25) **Réflexion créative:** Si $\tan A = \frac{2}{3}$ où $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$, $\tan B = \frac{1}{5}$ où $0 < A < \frac{\pi}{2}$,

trouvez la valeur de: $\tan(A + B)$, $\cos(A + B)$, démontrez que $A + B = \frac{5\pi}{4}$

Formules de duplication

4 - 3

Allez apprendre

- Déduire les formules de duplication
- Déduire les formule de l'angle moitié
- Utiliser les formules trigonométriques dans des applications rariées
- Utiliser les formules de duplication pour démontre r d'outres formules

Vocabulaires de base

- Fonction trigonométr-iques double de l'angle
- Angle moitié
- Fonction sinus
- Fonction cosinus
- Fonction tangente

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Réflichissez et discutez

Vous avez déjà étudié les formules d'addition . Maintenant, une question à aborder :

Etant données la mesure d'un angle A, peut - on déduire les fonction étions trigonométriques au double de l'angle A (formules de duplication)? Discutez les réponses obtenues avec votre professeur.

A apprendre

Formules de duplication

Vous savez que:

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(posons B = A)

$\therefore \sin(A + A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$

$\therefore \sin 2A = 2\sin A \cos A$ pourtout $A \in R$ (1)

De même:

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ pourtout $A \in R$

$= 2\cos^2 A - 1$

$= 1 - 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ où tan A est définie, $\tan^2 A \neq 1$

Rappel

Relations trigonométriques de base:

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$

$\tan^2 C + 1 = \sec^2 C$

$\cot^2 C + 1 = \csc^2 C$

$\csc C = \dfrac{1}{\sin C}$

$\sec C = \dfrac{1}{\cos C}$

$\tan C = \dfrac{\sin C}{\cos C}$

$\cot C = \dfrac{1}{\tan C}$

$\tan C = \dfrac{1}{\cot C}$

Expression orale:

1- Reécrire les formules précédentes dans le cas où on double 2A devient 4A .

Exemple Formules de duplication

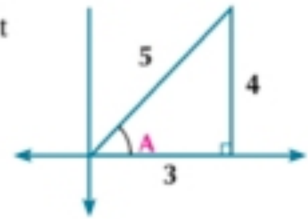
1. Soit $\sin A = \frac{4}{5}$ où $0° < A < 90°$. Sans utilisez une calculatrice, trouvez la valeur de chacune de ce qui suit:

a) sin 2A b) cos 2A c) tan 2A

Solution

$\because \sin A = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\because$ A se trouve dans le premier quadrant

$\therefore \cos A = \frac{3}{5}$ $\quad$ **(positif car A est un angle aigu)**



a $\sin 2A$ $\quad = 2\sin A \cos A = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

b $\cos 2C$ $\quad = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$

(vous pouvez utilisez d'autres formules de duplication de cosinus)

c $\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{24}{25} \div (\frac{-7}{25}) = \frac{-24}{7}$

Essayez de résoudre

1) Si $\cos A = \frac{4}{5}$, $0° < A < 90°$, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit sans utiliser une calculatrice:

a $\sin 2A$ $\quad$ b $\cos 2A$ $\quad$ c $\tan 2A$

Exemple **Fourmules de duplication**

2) Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit sans utiliser une calculatrice :

a $2\sin 15° \cos 15$ $\quad$ b $2\cos^2 22° 30' - 1$

Solution

a $2\sin 15° \cos 15° = \sin 2 \times 15° = \sin 30° = \frac{1}{2}$

b $2\cos^2 22° 30' - 1 = \cos(2 \times 22° 30') = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Essayez de résoudre

2) Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit sans utiliser une calculatrice :

a $2\sin 22° 30' \cos 22° 30'$ $\quad$ b $2\cos^2 75° - 1$ $\quad$ c $\cos^2 67{,}5° - \sin^2 67{,}5°$

d $\frac{2\tan 22° 30'}{1 - \tan^2 22° 30'}$ $\quad$ e $\frac{2\cos^2 165° - 1}{\sin 75° \cos 75°}$

Utiliser les formules de l'angle moitié

A apprendre

Vous avez déjà étudié: $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$ **(formule de duplication)**

D'ou: $2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$ $\quad$ **(de propriétés des expressions algébriques)**

$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$ $\quad$ **(Divisons les deux membres par 2)**

$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ de même pour obtenir les formules de: $\cos\frac{A}{2}$ et $\tan\frac{A}{2}$

$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$, $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ où $\cos A \neq -1$
le signe est déterminé selon le quadrant dans lequel est situé $\frac{A}{2}$

Exemple **Utiliser les formules de l'angle moitié**

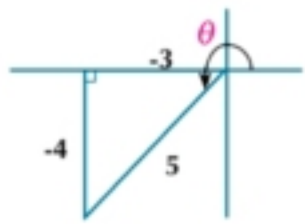
(3) Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a $\sin\frac{\theta}{2}$ sachant que , $\sin\theta = -\frac{4}{5}$, $180° < \theta < 270°$ **b** $\cos 75°$

c $\tan 22° 30'$

Solution

a $\because \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$



$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8}{10}}$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\because 180° < \theta < 270°$ en divisant par 2; alors $90° < \frac{\theta}{2} < 135°$

$\because \sin\frac{\theta}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ (le signe est positif car l'angle se trouve dans second quadrant)

b $\cos 75° = \cos\frac{150°}{2}$ (car $75° = \frac{150°}{2}$)

$= \sqrt{\frac{1+\cos 150°}{2}}$ $(0 < 75° < 90°)$ **Le signe est positif car l'angle se trouve au premier quadrant**

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ **en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2**

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ **En simlifiant**

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}}{2}$

$\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c $\tan 22° 30' = \tan\frac{45°}{2}$ (car $22.5° = \frac{45°}{2}$)

$= \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}}$ $0 < (22.5° < 90°)$ **le signe est positif car l;angle se trouve au premier quadrant**

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ **En multipliant par le conjuguée de dénominateur ($2-\sqrt{2}$)**

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(4+2)-4\sqrt{2}}{4-2}}$$

$$= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

Essayez de résoudre

(3) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a) $\cos \frac{\theta}{2}$ étant donnée $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $180° < \theta < 270°$

b) $\cos 22° \ 30'$

c) $\tan 15°$.

Exemple vérifiez une identité trigonométrique

(4) Démontrez que: $\csc 2x + \cot 2x = \cot x$, en utilisez pour calculer $\cot 15°$.

Solution

Membre droite $= \frac{1}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$

$= \frac{1+(2\cos^2 x - 1)}{2\sin x \cos x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ (membre gauche)

Posons $x = 15°$ dans l'identité: $\csc 2x + \cot 2x = \cot x$

$\therefore \cot 15° = \csc 30° + \cot 30° = 2 + \sqrt{3}$

Essayez de résoudre

(4) Démontrez que : $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ puis trouver la valeur de : $\frac{1-\tan^2 15°}{1+\tan^2 15°}$

Exemple Trouver la valeur d'un rapport trigonométrique

(5) Si $4\cos 2C + 3\sin 2C = 0$, sans utiliser une calculatrice trouvez $\tan C$, où C est la mesure d'un angle aigu positif.

Solution

$\because 4\cos 2C + 3\sin 2C = 0$ $\qquad \therefore 4\cos 2C = -3\sin 2C$

$\therefore \frac{\sin 2C}{\cos 2C} = \frac{4}{-3}$ $\qquad \therefore \tan 2C = \frac{4}{-3}$

$\therefore \frac{2\tan C}{1-\tan^2 C} = \frac{-4}{3}$ $\qquad \therefore 6\tan C = -4 + 4\tan^2 C$

$\therefore 2\tan^2 C - 3\tan^2 C - 2 = 0$

$(2\tan C + 1)(\tan C - 2) = 0$ $\qquad \therefore \tan C = -\frac{1}{2}$ (refusée) où $\tan C = 2$

Réfléchissez: Utiliser les formules trigonométriques de l'angle moitié pour trouve la valeur de tan C.

Essayez de résoudre

(5) Si $4 \sin\theta + 3\cos\theta = 3$, sans utiliser une calculatrice démontrez que $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{4}{3}$, où θ est la mesure d'un angle aigu positif.

Exemple **Résoudre des équations trigonométriques**

(6) Déterminez les valeurs de x comprise entre 0 et 2π et qui vérifient l'équation :

a $\sin 2x = \sin x$ b $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$ c $\tan^2 \frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} = 1$

Solution

a $\because \sin 2x = \sin x$

$2\sin x \cos x = \sin x$

(**car:** $\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ $x = \pi$	$\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

les valeurs de x qui vérifient l'équation sont:

$\frac{\pi}{3}$, π ou $\frac{5\pi}{3}$

Réflichissez: Avez-vous d'autres solutions? Trouvez l'une de ces solutions.

c $\because \tan^2 \frac{\tan}{2} + 2\tan\frac{x}{2} = 1$

$\therefore 2\tan\frac{x}{2} = 1 - \tan^2\frac{x}{2}$

$\therefore \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = 1$ $\therefore \tan x = 1$

(La tangente est positive dans le premier et troisième quadrants)

Dans le premier quadrant: $x = \frac{\pi}{4}$

Dans le troisième quadrant: $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ **Les valeurs de x qui vérifient l'équation sont** $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$.

b $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

(**car:** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

soit $\cos 2x = \cos(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi)$

ou $\cos x = \cos(\frac{4\pi}{3} + 2n\pi)$

où n $\in$ y

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$

$2x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$

En divisant par (2)

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$ $x = \frac{2\pi}{3} + n\pi$

posons n= 0,1 :

$x = \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{5\pi}{3}$

les valeurs de x qui vérifient l'équation sont:

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$

Essayez de résoudre

(6) Déterminez les valeurs de x comprise entre 0 et 2π et qui vérifient l'équation $\cos x + \cos 2x = 0$.

7) **En lien avec la géométrie:** XYZ est un triangle tel que x = 12cm, y = 18cm, z = 15cm, Démontrez que $m(\angle Y) = 2\, m(\angle X)$.

Exercices 4 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les réponse proposées:

1) Si $\cos C = \frac{1}{3}$, alors cos 2 C égale à

a) 0 b) $\frac{-2}{3}$ c) $\frac{-7}{9}$ d) $\frac{2}{3}$

2) sinA cos A égale à

a) $\frac{1}{2}\sin 2A$ b) $\sin 2A$ c) $\cos 2A$ d) $\frac{1}{2}\cos 2A$

3) $\cos^2 C - \cos 2C$ égale à

a) $\sin C$ b) $\cos C$ c) $\sin^2 C$ d) $\tan C$

4) $1 - 2\sin^2 50$ égale à

a) $\sin 100^\circ$ b) $\cos 50^\circ$ c) $\cos 100^\circ$ d) $\sin 50^\circ$

5) $1 + \cos 4A$ égale à

a) $2\cos^2 4A$ b) $\cos^2 2A$ c) $\cos 4\ {}^{2}{}_{1}A$ d) $2\cos^2 2A$

6) Sans utiliser une calculatrice, calculez : $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ dans chacun des cas suivants:

a) $\sin\theta = \frac{4}{5}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$

b) $\cos\theta = \frac{1}{3}, 0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$

c) $\csc\theta = \frac{5}{3}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cot\theta = \frac{3}{2}, 180^\circ < \theta < 270^\circ$

7) Sans utiliser une calculatrice, calculez: $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\cos\theta = \frac{1}{4}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$

b) $\sin\theta = \frac{3}{5}, 90^\circ < \theta < 180^\circ$

c) $\tan\theta = \frac{4}{3}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

d) $\sin\theta = \frac{15}{17}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

8) Sachant que $\cos A = \frac{5}{13}$, où A est la mesure d'un angle aigu, sans utiliser une calculatrice, calculez :
$\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$, $\cos\frac{A}{2}$

9) Sachant que A est la mesure d'un angle aigu et $\cos 2A = \frac{119}{169}$, sans utiliser une calculatrice, calculez : sinA , cosA , tan2A

(10) Si $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$. Sans utiliser une calculatrice, calculez: $\cos \frac{A}{2}$, $\sin A$, $\cos A$

(11) Si $\cos B = \frac{-4}{5}$, $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$. Sans utiliser une calculatrice, calculez $\frac{\sin 2B}{2\cos 2B}$

(12) Exprimez chacun de ce que suit en utilisant un seul rapport trigonométrique:

a) $\sin 35^\circ \cos 35^\circ$ b) $\frac{\tan 40^\circ}{1 - \tan^2 40}$ c) $\sin 25^\circ \cos 35^\circ - \cos 25^\circ \sin 35^\circ$

d) $\frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 50^\circ \tan 40^\circ}$ e) $\cos^2 25 - \sin^2 25$ f) $\frac{1 - \cos\theta + \sin\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}$

(13) Trouvez les valeurs de x compris entre 0° et 2π et que verifie chacune des équations suivantes:

a) $\sin 2x = \sin x$ b) $\sin^2 2x + 2\sin 2x + 1 = 0$ c) $\cos x - 2\sin^2 \frac{1}{2}x = 0$

(14) Démontrez les identités suivantes :

a) $\frac{1 - \cos 2A}{3 + \cos 2A} = \frac{\sin^2 A}{1 + \cos^2 A}$ b) $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$

(15) **En lien avec la mécanique:** Un joueur de football a botté le ballon d'un angle de 30° de mesure avec la surface de la terre , et à une vitesse initiale de 14,7 m/sec. Si la distance horizontale parcourue par le ballon est donnée par la relation : $d = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$ où g est l'accélération de pésanteur = 9,8 m/sec^2 et v_0 est la vitesse initale.

I: Simplifiez la relation précédente

II: Trouvez la distance horizontale parcourue par le ballon , en mètres.

Activité — Utiliser une calculatrice de graphisme

(16) Utilisez une calculatrice graphique ou un logiciel de graphime pour tracer la courbe représentative de la fonction f telle que :

$f(x) = \sin\theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos\theta \sin \frac{\pi}{4}$ où: $-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

a) Pouvez-vous déduire une formule simplifie de la fonction ? Argumentez.

b) En utilisant les formules trigonométriques, vérifiez la réponse obtenue en a.

Formule de Héron

4 - 4

Allez apprendre

- Trouver l'aire du triangle étant donné les longueurs de ses côtés.
- Déterminer le rayon du cercle inscrit dans un triangle

Vocabulaires de base

- Formule de Héron

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Le reseau des informations internationales

Introduction historique:

Heron à vecu en Alexendrie, Avant la naissance de jesus christ.Une formule pour calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés a pris le nom d'Héron, tandis qu' il semble que cette formule existait avant Heron mais elleapris son nom grace a son existence dans son usine appelée (Metrica) qui comporte des muletudes des savoirs géométriques soit dans la géométrie plane ou celle de l'éspace ou bien la géométrie des aires et autres.

Trouver l'aire d'un triangle étant donné les longueurs de ses côtes

Supposons que a , b et c les longueurs des côtes du triangle ABC tel que:

$a + b + c = 2P$ (où P est le demi-périmètre du triangle)

D'après de cosinus, on a :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad (1)$$

Et l'identité du pythagoré : $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$ **(2)**

(**On a:** $0° < C < 180°$ alors $\sin C > 0$)

D'après (1) et (2), on obtient :

$$\sin C = \sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}$$ réduire au même dénominateur

$$\sin C = \frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))\ (2ab - (a^2 + b^2 - c^2)}$$

factoriser différence de deux carrés

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2]\ [c^2 - (a-b)^2]}$$ **compléter le carré**

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}$$

factoriser différence de deux carrés

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{2P\,(a+b+c-2a)\ (a+b+c-2b)\ (a+b+c-2c)}$$

$$= \frac{1}{2\,ab}\sqrt{2p\,(2p-2a)\,(2p-2b)\,(2p-2c)}$$

$$= \frac{1}{2\,b}\sqrt{16p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$= \frac{\cancel{4}\ 2}{2\,ab\ 1}\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad \textbf{(3)}$$

Mais: $a\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\ a\,b\ \sin C$ **(4)**

D'après (3) et (4) $a\,(\triangle ABC) = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)\,(b-c)}$

D'où: L'aire du triangle dont les longueurs des côtes sont a, b, c est :

$\Delta = \sqrt{p(p-\ a)\,(p-b)\,(p-c)}$ **où P est le demi- périmètre du triangle**

Remarque : (La démonstration ne peut pas être l'objet d'un examen)

Activité (1)

Naviguez sur le WEB pour démontrer la formule.

Exemple

(1) En utilisant la formule d'Héron calculez l'aire du triangle dont les longueurs des côtes sont de 6 ; 8; 10 cm

Solution

$\because\ 2P = 6 + 8 + 10 = 24$ cm $\qquad P = 12$ cm

$P - a = 12 - 6 = 6$cm , $p - b = 12 - 8 = 4$ cm , $p - c = 12 - 10 = 2$ cm

$\therefore$ Aire $\Delta = \sqrt{p\,(p-a)(p-a)\,(p-c)}$

$= \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = 24\ cm^2$

Pensé critique: pouvez- vous calculez autrement l'aire du triangle de l'exemple précédents? Argumenter.

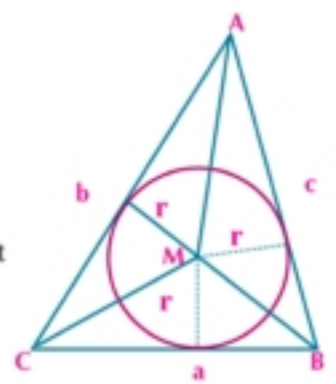
Essayez de résoudre

(1) En utilisant la formule d'Héron, calculez l'aire du triangle ABC dans le quel : $a = 5$cm , $b = 12$ cm , $c = 13$cm .

Activité (2)

Déterminer la longueur du rayon du cercle circonscrit dans un triangle.

(1) Citez la relation entre le $\triangle ABC$ et les triangles MAB, MBC et MAC.



(2) Pouvez-vous trouver un relation entre le rayon r du cercle et l'aire du triangle ABC ?

On peut déduire que: $a(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\, ar + \frac{1}{2}\, b \times r + \frac{1}{2}\, c\, r$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r \times P$$

D'où. $$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{P} = \frac{a(\triangle ABC)}{P}$$

Exemple

(2) Utilisez la relation précédente pour trouver le rayon du cercle inscrit dans $\triangle ABC$ tel que les longueur de ses côtes mesurent 7; 9 et 14 cm.

Solution

$\because 2P = 7 + 9 + 14 = 30$ cm $P = 15$ cm , $p - a = 8$cm , $p - b = 6$cm , $p - c = 1$ cm

par substituons dans la relation précédente:

$$\therefore r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{P} = \frac{\sqrt{15 \times 8 \times 6 \times 1}}{15} = \frac{4}{5}\sqrt{5} \text{ cm}$$

Pensé critique: Que prévoyez - vous si: $p - a$ **ou** $p - b$ **ou** $p - c$ est positif ou égale a 0? Expliquez votre réponse.

Exemple

(3) Calculez les aires des triangles suivants :

a) Un triangle dont les longueurs des côtes sont 7 ; 9 et 12 cm.

b) Un triangle dont les longueurs de deux côtes sont 24cm et 40cm et la mesure de l'angle compris est 30°.

c) Y-a-il un triangle dont les longueurs des côtes sont 12 ; 14 et 30 cm? Calculer son aire si cela est possible.

Solution

a) $\because 2P = 28$ cm $\therefore p = 14$ cm , $p - a = 7$cm , $p - b = 5$cm , $p - c = 2$cm

Appliquons la formule de Heron:

Aire du triangle = $\sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} = 14\sqrt{5}$ cm^2

b) $2P = 56$ cm $\therefore P = 28$ cm , $p < a$ la longueur d'un côte

$\therefore$ il n'exist pas de triangle

c) Aire du triangle $= \frac{1}{2} \times 24 \times 40 \times \sin 30$

$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 40 \times \frac{1}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

Rappel

L'aire du triangle étant donnée les longueurs de deux côtes et la mesure de l'angle compris.

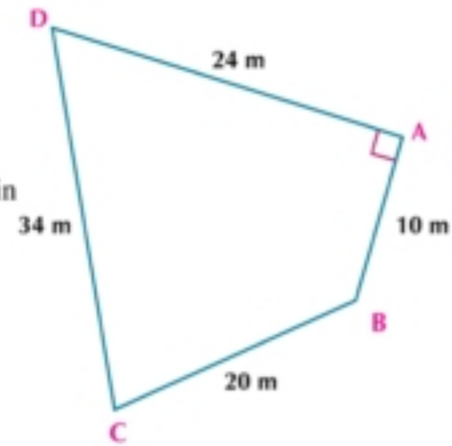
Aire du triangle $=\frac{1}{2}$ produit de deux côtes $\times$ sinus de l'angle compris angle

Réfléchissez: pouvez-vous utilisez une autre méthode pour démontrer qu'il n'existe pas de triangle? Argumentez.

Essayez de résoudre

3. Calculez l'aire du triangle dans chacun des cas suivants:
   a. Les longueurs de ses côtes sont: 6 ; 6 ; 8 cm.
   b. Les longueurs de ses côte sont : 24 ; 36 ; 60 cm (si cela est possible).
   c. Les longueurs de ses côtés sont 10 ; 24 ; 26 cm.

Exemple



En lien avec la géométrie

4. La figure ci-contre représente une parcelle du terrain dont la forme d'un quadrilatère. Calculez son aire.

Solution

Tracer $\overline{BD}$

ABD est un triangle rectangle en A

$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$ **théorème de Pythagore**

$= 100 + 576 = 676$ $\qquad \therefore BD = 26$ m

$a(\triangle ABD) = \frac{1}{2} AB \times AD = \frac{1}{2} \times 10 \times 24 = 120 \text{ m}^2$

Dans le triangle BCD :

$\because 2P = 20 + 34 + 26 = 80$ $\qquad \therefore P = 40$ m

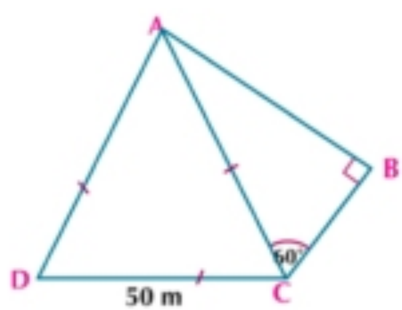
$a(\triangle BCD) = \sqrt{40 \times 20 \times 6 \times 14} = 40\sqrt{42} \text{ m}^2$

Aire du terrain $=$ aire de $\triangle$ ABD $+$ aire de $\triangle$ BCD

$= 120 + 40\sqrt{42} = 40(3 + \sqrt{42}) \text{ m}^2$

Essayez de résoudre

4. La figure ci-contre représent une parcelle du terrain dont les dimensions indiquées.
   Calculez son aire.



Exercices 4 - 4

Complétez ce qui suit:

1. L'aire du triangle équilatéral dont la longueur du côte est 6cm est égale à ....

2. L'aire du triangle isocèle dont la longueur de l'un de ses côtés est 10 cm et la mesure de l'une de ses angles à la base est 45° est égale à...

3. L'aire du triangle dont les longueurs des côtes sont: 3; 4 et 5 centimètres est égale à ....

4. L'aire du triangle dont les longueurs de deux côtes sont 6 et 8 centimètres et la mesure de l'angle compris entre ces deux côtes et 30 ° est égale à ....

Trouver l'aire du triangle A BC dans chacun des ces suivants:

5. $a = 15cm$, $b = 12cm$, $c = 9$ cm
6. $b = 16cm$, $c = 20$ cm, $m(\angle A) = 60°$
7. $a = 16cm$, $b = 18cm$, $c = 24$ cm
8. $a = 32cm$, $b = 36$, $c = 30$ cm

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

9. L'aire en cm^2 du triangle dont les longueurs des côtes sont 6 ; 8; et 10 centimètres est égale à :

a) 24 b) 30 c) 40 d) 48

10. Dans la figure ci-contre, aire du $\triangle$ ABC égale à cm^2

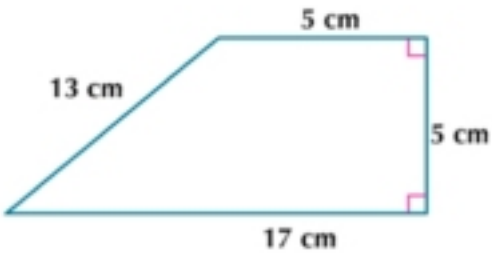
a) 20 b) $4\sqrt{5}$
c) $2\sqrt{5}$ d) 10

11. Si le périmètre d'un triangle est 60 cm et la longueur de l'un de ses côtes est 26 cm, alors la somme des longueurs de ces autres côté égale à:

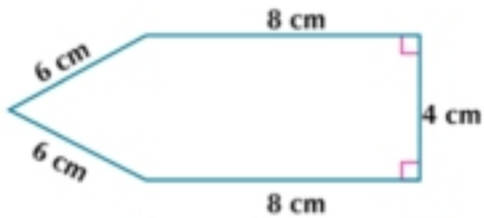
a) 4 , 30 b) 31 , 3 c) 20 , 14 d) 2 , 32

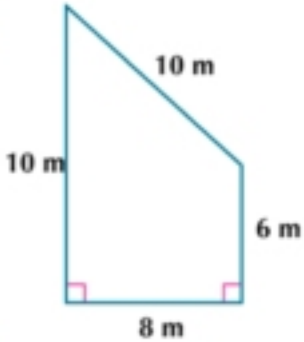
Trouvez l'aire de chacune des figures suivantes :

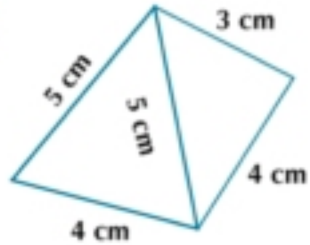
12.

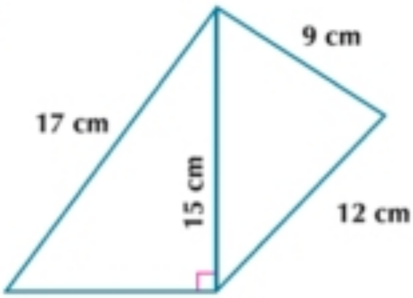


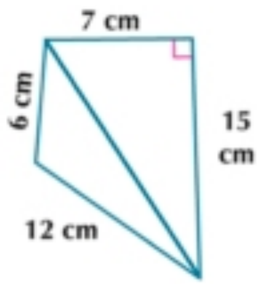
13.



14


15


16


17


18 Calculez l'aire du quadrilatère ABCD dans lequel $m(\angle B) = 90°$, $AB = 5cm$, $BC = 12cm$, $AD = CD = 13cm$.

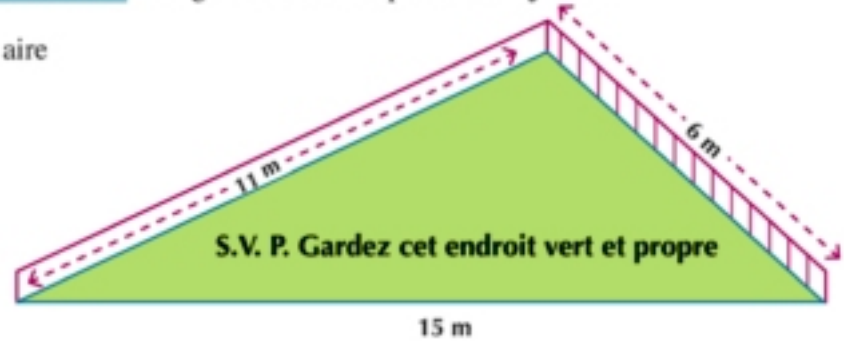
19 Dans chacun des cas suivants , calculez l'aire du triangle ABC :

- a $a = 8cm$, $b = 11cm$, $c = 13$ cm
- b $a = 12cm$, $b = 17cm$, $c = 25$ cm
- c $a = 40$ cm , $b = 24cm$, $c = 32$ cm
- d $a = 11cm$, $b = 8cm$, $c = 6$ cm

20 **Jardin:** Un jardin triangulaire dont le rapport entre les longueur , de ses côté est 7 : 5 : 3. et son périmètre égale à 300 mètres , Calculez son aire .

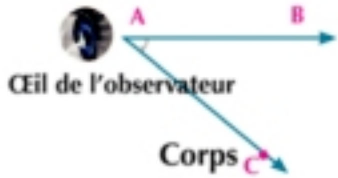
Activité

21 **En lien avec l'environnement:** La figure ci-contre représente un jardin triangulaire. Calculez son aire

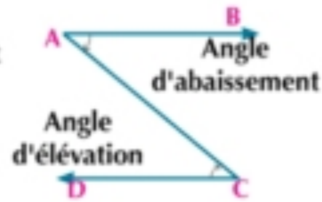


Résumé de l'unité

1 **Angle d'élévation:** Si une personne A observe un point C qui se trouve au-dessus du plan horizontal de vu $\overrightarrow{AB}$, alors l'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est appelé l'angle d'élévation de C par rapport au plan horizontal de vu de la personne A.



2 **Angle d'abaissement:** Si une personne A observe un point D qui se trouve au-dessous du plan horizontal de vu $\overrightarrow{AB}$, alors l'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est appelé l'angle d'abaissement de C par rapport au plan horizontal de vu de la personne A.



3 La mesure de l'angle d'abaissement de C par rapport à A est égale à la mesure de l'angle d'élévation de A par rapport à C

4 Formules d'addition:

➢ Si A et B sont les mesures de deux angles alors :

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(C \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$, où $A \neq \dfrac{\pi}{2}(2K+1)$, $B \neq \dfrac{\pi}{2}(2K+1)$, $\tan A \tan B \neq \pm 1$

$K \in Z$

5 Formule de duplication :

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ Pour tout $A \in R$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$ Pour tout $A \in R$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$, où tan A est définie et $\tan^2 A \neq 0$

on déduit que:

$\sin A = 2 \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{A}{2}$

$\cos A = \cos^2 \dfrac{A}{2} - \sin^2 \dfrac{A}{2} = 2\cos^2 \dfrac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \dfrac{A}{2}$

$\tan A = \dfrac{2\tan \dfrac{A}{2}}{1 - \tan^2 \dfrac{A}{2}}$

6 L'aire d'un triangle connaissant les longueurs de deux côtes et la mesure de l'angle compris entre eux $= \dfrac{1}{2}$ le produit des longueurs de deux côtés × sinus l'angle compris .

7 Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle dont le périmétre est 2P alors:

L'aire du triangle = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercices généraux

I : Angles d'élévation et d'abaissement

1) D'un point du sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 22°, S'il parcourt 50 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 36°. Calculer la hauteur de la tour à un mètre près.

2) Du sommet d'une colline, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 15° 18' et 26° 42' . Si la hauteur de la tour est 20 métres, calculez la hauteur de la colline à un mètre près.

3) Du sommet d'une tour de 10 m de hauteur, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base minaret, on a respectivement trouvé 14° 28' et 42°. Calculez la hauteur de la tour. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.

4) **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau navigue dans la direction sud-est à une vitesse de 24 km/h. Un voyageur observe deux points fixes dans la direction 25° ouest par rapport au nord. Quatre heures plus tard, le voyageur trouve que l'un de ces deux points devient dans la direction 23° sud par rapport à l'ouest et l'autre dans la direction 17° nord par rapport à l'ouest. Trouver la distance entre les deux points sachant que les deux points et le voyageur sont dans un même plan horizontal.

5) **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau se déplace en ligne droite vers un rocher à une vitesse uniforme de 300 mètres/minute. Dans un moment , il a trouve que l'angle d'élévation du sommet du rocher est 35° deux minutes plus tard, l'angle d'élévation du rocher devient 60°. Calculez la hauteur du rocher.

6) **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau est parti d'un certain point dans la direction de 12° Ouest par rapport au Sud avec une vitesse de 11 km/ h. Au même moment un autre bateau est parti du même point vers 68° Nord par rapport à l'Est avec une vitesse de 6,5 km/h. Trouver la distance qui sépare les deux bateaux 3 heures après leur départ.

7) D'un point sur un sol horizontal, un homme observe un ballon qui se meut verticalement vers le haut à une vitesse constante de 20 mètres/minute il a trouvé que l'angle d'élévation du ballon est 35° . Trois minutes plus tard et du même point l'angle d'élévation du ballon devient 15° . Trouvez la distance entre cet homme et la projection du ballon sur le sol à un mètre près .

II: Formules d'addition et formules de duplication

1) Sans utiliser une calculatrice démontrez que:

a) $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

b) $\dfrac{\cos 40° \cos 10° + \sin 40° \sin 10°}{\sin 15° \cos 15°} = 2\sqrt{3}$

c) $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2) Démontrez que:

a) $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$, puis trouvez la valeur de $\cos 15°$

b) $\frac{2\sin A - \cos 2A}{\sin^2 A} = \sec^2 \frac{A}{2}$ c) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$ d) $\frac{1-\cos C - \sin C}{1-\cos C + \sin C} = \tan \frac{C}{2}$

3) Sans utiliser un calculatrice, Calculez:

a) $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\sin 25° \cos 20° + \cos 25° \sin 20°}{\sin 80° \cos 35° + \cos 80° \sin 35°}$

4) Si $\sin A = \frac{-12}{13}$ où $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ sans utiliser un calculatrice, Calculez $\sin 2A$, $\cos 2A$

5) Si $\tan A = \frac{1}{3}$ où $0 < A < \frac{\pi}{3}$ sans utiliser un calculatrice, Calculez $\frac{1+\sin 2A}{1+\cos 2A}$

6) Si $\sin C = \frac{5}{13}$ où $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, $\cos B = \frac{-4}{5}$ où $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\tan 2A$, $\sin(B - A)$

7) Si $\cos C = \frac{3}{4}$ où $C \in]0, \frac{\pi}{3}[$, $\tan B = \frac{-12}{5}$ où $B \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\cos(A+B)$, $\tan 2B$

8) Si $\tan 2A = \frac{3}{4}$, sans utiliser un calculatrice, Calculez $\tan A$

9) Si $\tan A = \frac{1}{7}$، $\tan B = \frac{1}{3}$ où A، $B \in]0، \frac{\pi}{3}[$
sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\tan(A+2B) = 1$

10) Si $\sin A = \frac{4}{5}$ où $A \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cot B = \frac{5}{12}$ où $B \in]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$
sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\tan(A - B)$, $\sin 2B$

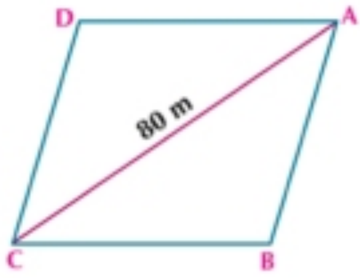
III : Formule de Héron

1) Trouvez l'aire du $\triangle ABC$ dans chacun des cas suivants:

a) a= 35 cm , b = 45cm , c = 50 cm

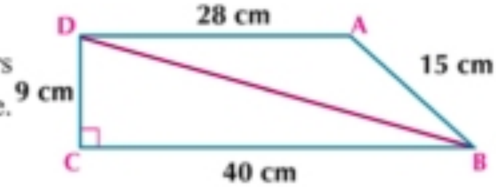
b) a = 8 cm , b = 11cm , c= 13 cm

c) a = 200 cm , b = 240cm , c = 360 cm



2) Calculez l'aire du triangle ABC où:
p- a = 3cm , p - b = 5cm , p - c= 9cm

3) **La figure ci-contre** représente une par celle du terrain sou forme d'un losange de périmètre égale à 200 m et $\overline{AC}$ = 80 mètre . Calculez son aire .



4) ABCD est un quadrilatères dont les longueurs des côtés sont indiquées dans la figure ci-contre. Calculez son aire.

Épreuve Cummulative

I: Questions à choix multiple

1) Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:
$\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$ est égale à

(1) $\cos 5x$ (2) $\sin 5x$ (3) $\sin x$ (4) $\cos x$

2) Dans le triangle ABC si a = 5cm, alors b est égale à

(1) $\frac{5\sin A}{\sin B}$ (2) $\frac{5\sin B}{\sin A}$ (3) $\frac{5\sin A}{\sin C}$ (4) $\frac{5\sin C}{\sin B}$

3) Dans le triangle ABC : a: b: c = 3: 2: 2, alors cos a est égale à

(1) $-\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $-\frac{3}{4}$

4) Dans le triangle ABC si a = 15cm , b = 25cm , c = 35cm, alors , la mesure de son plus grand angle est:

(1) 90° (2) 40° (3) 120° (4) 150°

II : Question à réponse courte:

5) Trouve le rayon du cercle cerconscrit au triangle ABC tels que m ($\angle$A) = 30°, a = 10cm.

6) Dans le triangle ABC si 2 sin A = 3 sin B = 4 sin C, trouvez a' : b : c

7) Trouvez la mesure du plus grand angle du triangle ABC dans lequel a = 6 cm , b = 14 cm, c = 10 cm

8) Si $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ calculez $\tan (A + B)$

9) Trouvez la valeur de tan 15° sans utiliser une calculatrice.

10) Si $\sin A = \frac{1}{3}$, calculez cos 2 A

III : Questions à longue réponse

11) Résoudre le triangle ABC dans lequel m ($\angle$A) = 2 m ($\angle$B) = 86° , c = 9cm

12) Un triangle X Y Z dans lequel x= 9,4cm, y = 15,6cm, m ($\angle$Z) = 54°
trouvez la longueur de z à un décimal prés , puis calculez l'aire de son cercle circonscrit.

13) Trouvez la mesure de plus petit angle du triangle ABC telsque: a = 13cm , b = 14cm , c = 15cm, puis calculez son aire.

14) Un pilote observe une cible sur la terre, il trouve que l'angle d'abaissement de la cible mesure 45° lorsque' il descend d'une distance 2km verticalement, l'angle d'abaissement de la cible devient 30°. Trouvez l'altitude de l'avion au début de l'observation à un km près .

15) Trouvez l'aire du triangle isocèle dont la longueur de l'un de ses côtés est 12 cm et son périmètre est 30cm .

16) Une parcelle triangulaire du terrain dont le périmètre égale à 180 mètres et le rapport entre les longueurs ses côtés est 2 : 3 : 4 . trouvez son aire à mètre carré prés.

Epreuves Générales

Premier : Epreuves d'algébre

Épreuve 1 Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Le nombre de façons de choisir 3 personnes parmi 5 personnes:

   a) 3 b) 5 c) 10 d) 15

2. Le dixième terme de la suite (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13, ...)

   a) 29 b) 34 c) 55 d) 89

3. Le terme médian de la suite (2; 5; 8; 11; ...; 128) is:

   a) 22 b) 43 c) 65 d) 2795

4. La somme des termes de la suite (81, 27, 9,...) is:

   a) $\frac{243}{4}$ b) 117 c) 118 d) $\frac{243}{2}$

Question 2:

1. Si $A_n^{r-1} = 6720$; $C_n^{r-1} = 56$; trouvez les valeurs de n et r .

2. Déterminiez la suite arithmétique dont la somme le troisième terme et le cinquième terme est égal à 22. Son quatrième terme diminue de 9 de son septième terme . Trouvez la somme de 25 premiers termes de cette suite.

Question 3:

1. Dans une écôle, il ya 10 étudiants jouent au basket balle de combien de façons peut-on choisir un équipe de 5 joueurs et un leader parmi ces joueurs?.

2. Combien de termes à partir du premier terme faut-il prendre de la suite géométrique (2; 6; 18;...) pour que la somme soit 6560?

Question 4:

1. Calcule la somme des nombres entiers compris entre 3 et 1000 et qui sont divisible par 7.

2. Un ballon en caoutchouc tombe d'une hauteur de 10 mètres à chaque fois qu'elle le sol elle répond à la moitié de la hauteur précédente, Trouvez la somme des distances parcourues par le ballon.

Épreuve 2 — Algèbre

Répondez aux questions suivantes

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si $(n+1)! = 30\,(n-1)!$, trouvez la valeur de n est

   a) 5 b) 6 c) 29 d) 30

2. La valeur de la série $\sum_{r=1}^{15} (r^2 + r + 1)$ est :

   a) 1375 b) 3720 c) 14400 d) 2232000

3. Le nombre de termes de la suite (7, 11, 15,..., 271) est :

   a) 34 b) 67 c) 169 d) 9313

4. Si $x > 0$, alors la raison de la suite géométrique $(4, x - 3, 2x + 6, \ldots)$ est :

   a) 1 b) 5 c) 3 d) 24

Question 2:

1. Soit $A_5^r = 2 \times A_6^{r-1}$. Quelle est la valeur de r.
2. Trouvez le rang du premier terme négatif de la suite $(152 - 9n)$, .

Question 3:

1. Combien de nombre pairs de 3 chiffres différents peut former de l'ensemble des chiffres $\{2, 3, 4, 5, 7\}$?
2. Une suite géométrique de termes positifs. la somme des ses trois premiers termes égale à 14 et son premier terme dépasse de 7 son deuxième terme. Déterminer la suite puis calculez la somme de tous les terme de cette suite .

Question 4:

1. Une suite géométrique dont la somme de ses trois premiers termes égale à $\frac{171}{32}$ et son deuxième terme égale à $\frac{27}{16}$, Déterminez la suite et trouvez la valeur de son dixième terme.
2. Une selle théatre formée de 25 rangés de sièges. La première rangée se compose de 20 sièges, la deuxième rangée se compose de 22 sièges et la troisième 24 sièges....etc Trouvez le nombre de sièges dans la salle.

Epreuve 3 — Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Le nombre de couple (a ; b) où $a \neq b$ qu'on peut former des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est

   a) 2 b) 3 c) 6 d) 9

2. Le nième terme de la suite $(2, 2, \frac{8}{3}, 4, ...)$ est

   a) $(n - 1)$ b) $2^n - 1$ c) 2^{n-1} d) $\frac{2^n}{n}$

3. La somme de 25 premiers terme de la suite $(3 - 2n)$ est

   a) 650 b) 600 c) -575 d) -600

4. Si $(x , y, z, ...)$ forme une suite géométrique , alors:

   a) $2y < x + z$ b) $y^2 > x z$ c) $y = x z$ d) $\sqrt{y} = x z$

Question 2:

1. Soit $C_{25}^{2r+1} = C_{25}^{3r-1}$, Quelle est la valeur de r
2. Trouvez le nombre de termes, à partir du premier terme, qu'il faut prendre de la suite arithmétique $(-43 , -36 , -29 , ...)$ pour que la somme soit égale à 221.

Question 3:

1. Un étudiant étudie huit matières différente pendant l'année universitaire. Pour passé à l'année suivante, il faut qu'l réussisse en 6 matières au moins. De combien de façons l'étudiant peut-il passer à l'année suivante?
2. La somme de tous les termes d'une suite géométrique infinie est égale à 108. Son premier terme dépasse de 12 son deuxième terme. Trouvez la suite et la somme de ses sept premiers termes.

Question 4:

1. Trouver la somme des termes du rang impaire de la suite arithmétique $(2 , 5 , 8 , ... , 110)$
2. Une société de conservation des produits agriéles possède sept citernes pour le blé . Le premier citerne peut contenir 270 tonnes et chaque le deux tiers de contenue du citerna précédent . La société peut - elle conserver 800 tonne de blé? Quelle est la quantité maximale que la société peut conserver?

Epreuve 4 — Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. De combien de façons, cinq personnes peuvent-elle occuper cinq siègen cocyclique:

   a) 1 b) 5 c) 24 d) 120

2. la valeur de séri $\sum_{r=7}^{23} 3r$ est

   a) 255 b) 765 c) 807 d) 828

3. Soit (x, -3 , 4x -1 ,...) est une suite arithmétique : Quelle est la valeur de x.

   a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{-2}{5}$ c) -1 d) -5

4. La somme à l'infinie des termes de la suite géométrique (T_n) qui a $T_1 = 1$, $T_n = 2T_{n+1}$ est :

   a) ∞ b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

Question 2:

1. Soients $C^{2}_{2n+m} = 190$ et $A^{3}_{n-2m} = 60$, trouvez les valeurs de n et m.

2. Une suite arithmétique a la somme de son premier et dernier termes est 26 et la somme de ses termes est égale à 468. Trouvez le nombre de termes de la suite si son dixieeme terme est égale à 47, déterminiez la suite.

Question 3:

1. Si $X = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7\}$, trouvez le cardinal de Y et Z
   où $Y = \{(a ; b) : a ; b \in X , a \neq b\}$
   $Z = \{\{a ; b ; c\} : a ; b ; c \in X\}$

2. Une suite géométrique dont la somme de ses trois premiers égale à 351. Déterminez la suite et la somme de ses dix premiers termes.

Question 4:

1. Une suite géométrique dont la somme de ses premier et deuxième termes est égale à 3 et la somme de leur carré est égale à 5. Déterminez la suite.

2. Un cycliste descent une colline en 11 secondes A premier seconde, il a parcouru 4 métres et dans chacune des secondes suivantes, la distance parcourue augmente de 5 métre de seconde en seconde. Trouvez la distance parcourue par le cycliste?

Epreuve 5 — Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) A_m^2 peut être égale à

a) 24 b) 35 c) 42 d) 48

2) La suite (T_n) est croissante pour toute les valeurs $n \in Z^+$ si

a) $\frac{T_n}{T_{n+1}} > 1$ b) $T_n = T_{n+1}$ c) $T_{n+1} > T_n$ d) $0 > \frac{T_n}{T_n + 1} > -1$

3) La moyenne arithmétique de deux nombres $3x - 7$ et $5x + 3$

a) $4x - 5$ b) $4x - 2$ c) $4x + 2$ d) $8x - 4$

4) Le méme terme de la suite géométrique (2 , 4 , 8 , ...) est

a) $2 + 2^{n-1}$ b) 2^n c) 2^{n-1} d) 2^{n+1}

Question 2:

1) Si $(3\,n - 7) = 120$ alors, Quelle est la valeur de C_n^{n-1} ?

2) Insère 28 moyennes arithmétiques entre 4 ; 91 . puis trouve la somme de termes de la suite obtenue.

Question 3:

1) De combien de façons peut - on former une comité de 5 personnes de même sex de 7 hommes et 5 femmes?

2) La somme des premier et troisième termes d'une suite géométrique est 20, la somme des trois premiers termes est 26. Montres qu'il y a deux suites dont on peut calculer la somme à l'infinie de l'une peas trouve cette somme à partir du premier terme.

Question 4:

1) On a inséré n moyennes géométriques entre 81; $\frac{1}{729}$, si la somme de deux premières moyennes est 36 et la somme de deux derniers moyennes est $\frac{4}{243}$. trouve la somme des moyennes.

2) Le responsable d'une société veulent distribuer une somme de 46000 L.E. comme récompense, aux meilleurs agents des ventes. La part de dixième agent est 1000 L.E. et la différence entre la part d'un agent et l'agent qui lui précède est constante. Quelle est la part du meilleur agent dans la société? .

Deuxiéme : Epreuves de la dérivation, intégration et trigonomé

Epreuve 6 — Dérivation , Intégration et Trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Si $y = \sin 2x$ alors $\frac{dy}{dx}$ en $x = \frac{\pi}{6}$ est égale à.
   a. 2 b. 1 c. $\frac{1}{2}$ d. $\sqrt{3}$
2. Si $\cos \theta = \frac{2}{3}$, alors $\cos 2\theta =$.
   a. $\frac{4}{9}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{-1}{9}$ d. $\sqrt{3}$
3. $\int (2x+3)^4 \, dx =$.
   a. $\frac{1}{5}(2x+3)^5 + C$ b. $\frac{1}{10}(2x+3)^5 + C$ c. $\frac{1}{10}(2x+3)^3 + C$ d. $10(2x+3)^3 + C$
4. Le taux de variation de la fonction f où $f(x) = x^2$ lorsque x varie de 3 à 3,1 est égale à.
   a. 0.61 b. 6.1 c. 9 d. 9.61

Question 2:

1. Déterminez la dérivée première de y si $y = x^2 \sin 2x$
2. Sans utiliser la calculatrice, démentre que $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$

Question 3:

1. Déterminez la pente de la tangente à la courbe de f où $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$ en $x = 1$
2. Détermine:
   a. $\int (x^2 + 2x) \, dx$ b. $\int (\sin x - \cos x)^2 \, dx$

Question 4:

1. Déterminez les points de la courbe d'équation: $y = \frac{1}{x-3}$ où la tangente est parallèle à la droite $x + y = 0$.
2. Du sommet d'une maison de hauteur 25 m, on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'une tour est 70° et la mesure de l'angle d'abaissement de sa base est 30° . Trouvez la hauteur de la tour , sachant que les bases de la tour et de la sommet sont dans un même plan horizontal.

Epreuve 7 — Dérivation , Intégration et Trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) La pente de la tangent à la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ en $x = 2$ est égale à

a) 4 b) 8 c) 17 d) 14

2) sin A cos B - cos A sin B =

a) sin (A + B) b) cos (A + B) c) sin (A - B) d) cos (A - B)

3) $\int \frac{x^2 + 3x}{x}\, dx =$

a) $x + 3$ b) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + C$ c) $x^2 + 3x + C$ d) $\frac{x^3 + 3x^2}{x^2}$

4) $\frac{d}{dx}(\sin x \cos x) =$

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\frac{1}{2}\cos 2x$ d) $\cos 2x$

Question 2:

1) Si $y = f(x)$ où $y = x^2 - a\,x$, trouvez la pente de la tangente à la courbe au point de coordonnées (3; 0) qui lui appartient.

2) Si $\sec A = \frac{5}{4}$, $\csc B = \frac{13}{5}$ où A et B sont les mesures de deux angles aigu, trouvez sec (A - B).

Question 3:

1) Etudiez la dérivabilité de la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x > 2 \\ 4x - 1 & , \quad x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{en } x = 2$$

2) Trouvez $\int (1 - \cos x)^2\, dx$

Question 4:

1) Un bateau s'est de placé dans la direction 60° Nord par rapport à l'ouest à une vitesse de 26 km/h En même temps et de même endroit un autre bateau s'est déplace dans la direction de l'Est à une vitesse égale à 15km/h. Trouvez la distance qui sépare les deux bateaux après 3 heures du mouvement .

2) Si $y = z^5 + 3$ et $z = (x - 1)^3$, trouvez la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en $x = 2$

Epreuve 8 — Dérivation , Intégration et Trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Lorsque x varies de 1 à 1.3 où $f(x) = x^3$, alors le taux de variation de la fonction égal à.

   a) 2.197 b) 1 c) 7.32 d) 3.99

2. L'équation de la tangent à la courbe de la fonction f où $f(x) = x^2 + 3$ en $x = 1$ est:

   a) $y = 2x$ b) $y - 2x = 5$ c) $x + y = 2$ d) $2x - y + 2 = \text{zero}$

3. Si $\sin A = \frac{-3}{5}$, calculez $\cos 2A$

   a) $\frac{16}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{-7}{25}$ d) $\frac{-16}{25}$

4. $\int (2x+1)^5 \, dx = 0$

   a) $(2x+1)^6$ b) $\frac{1}{2}(2x+1)^6$ c) $\frac{1}{12}(2x+1)^6 + c$ d) $(2x+1)^6 + c$

Question 2:

1. Trouvez le nombre dérive de la fonction f où $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ en $x = 2$
2. Si $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, calculez $\sin 2x$

Question 3:

1. Trouvez l'équation la tangente à la courbe d'équation $y = \sin x + 2\cos x$ au point $(0 ; 2)$
2. Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si $y = (z^3 - z^2)$, $z = 2x + 1$ en $x = -1$

Question 4:

1. Trouvez l'équation la tangente à la courbe d'équation $y = x3 - 5x + 4$ au point qui lui appartient et qui a l'abscisse égale à -1.
2. D'un point situé dans le plan horizontal de la base d'une colline, la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la colline est de 35°. Si on se déplace de 1500m en direction de la colline sur un plan incliné de 20° sur l'horizontale, l'angle d'élévation du sommet de la colline mesure alors 45°. Déterminez la hauteur de la colline à un mètre près.

Epreuve 9 — Dérivation , Intégration et Trigonométrie

Répondez aux questions suivantes :

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Si $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos A\, x$, alors la valeur de a est.

   (a) 4 (b) 8 (c) 6 (d) 2

2. Si $y = \sec x$, alors $y' =$ ....

   (a) $\csc x$ (b) $\sec x \tan x$ (c) $\frac{1}{\sin x}$ (d) $\frac{1}{\cos x}$

3. $\int x^2 (2x^3 + 8)^4\, dx =$

   (a) $\frac{1}{30}(2x^3 + 8)^5 + C$ (b) $\frac{1}{6}(2x^3 + 8)^5 + C$

   (c) $(2x^3 + 8)^5 + C$ (d) $\frac{1}{20} x^4 (2x^3 + 8)^5 + C$

4. Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$ alors $f'(1)$.

   (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) -1

Question 2:

1. Dans $\triangle$ ABC, si $\tan 2A = \frac{4}{3}$, trouvez sans utiliser la calculatrice tan A.
2. Si $y = (z+1)^5$, $z = x^3 - 1$ trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$

Question 3:

1. Si $y = \left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)^5$, trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$
2. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 2x \sin x \cos x$ en $x = \pi$

Question 4:

1. Déterminez: **(a)** $\int (x-3)^5\, dx$ **(b)** $\int \sin^5 x \cos x\, dx$
2. D'un point au sole on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'une tour est 32° , puis l'observateur parcourt 50m. Horizontalement vers la base de la tour et trouve alors que la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la tour est 42°. Déterminez la hauteur de la tour à un mètre prés.

Epreuve 10 — Dérivation , Intégration et Trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question 1: choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors: $f'(1) =$

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

2) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + h) - \sin\frac{\pi}{4}}{h} =$

a) $\frac{\sin h}{h}$ b) $\sin h$ c) $\cos h$ d) $\cos\frac{\pi}{4}$

3) $\int (x+2)(x-2)\, d\, x =$

a) $x + 4 + c$ b) $\frac{1}{3}x^3 - 4x + c$ c) $x^3 - 4x + c$ d) $(x^3 - 4)^2 + c$

4) $\cos 70^\circ \cos 10^\circ - \sin 70^\circ \sin 10^\circ =$

a) cos 80 b) sin 80 c) cos 60 d) sin 60

Question 2:

1) Résoudre l'équation : $\cos 2x + \sin x = 0$, $x \in]0 , 2\pi[$

2) Déterminez $\int x(x^2 + 5)^4\, d\, x$

Question 3:

1) Si la fonction f où

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{pour tout } x \leqslant 2 \\ 2a\,x - 3b & \text{pour tout } x > 2 \end{cases}$$

est dérivable en $x = 2$, trouvez les valeurs de a et b

2) D'un point du sole un homme a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la tour est 25 °, puis il parcourt 80 m horizontalement vers la base de la tour, il a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet de la tour devient 45 °. Trouvez la hauteur de la tour à un mètre près.

Question 4:

1) Déterminez les points de la courbe, d'équation $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ où la tangente est parallèle à la droite $5x + y - 6 = 0$

2) Déterminez les points de la courbe d'équation: $y = x^2 - 4x$ où la tangente à la courbe est.

a) Parallèle à l'axe des abscisses b) Perpendiculaire à la droite $2y = x + 3$

Réponses de quelques d'exercices

Unité 1 : Suites et Séries

Réponses de quelque exercices (1 - 3)

5) 20   6) 28   7) 85 - 4 n
8) 10   9) 16   10) C
21) la Suite et (7; 12; 17;....) n = 14 ; n = 20
22) n = 10 ; la Suite et (3; 7; 11;...)
23) la Suite et (9; 12; 15;....)

Réponses de quelque exercices (1 - 4)

3) 35   4) 90   5) 200
6) 243   7) C   8) C
9) A   10) B

Réponses de quelque exercices (1 - 5)

1) 162   2) $3(-2)^{n-1}$
3) 1   4) $\pm$ 8
5) 25   6) $\frac{A + C}{2}$
7) D   8) B
9) B   10) A

Réponses de quelque exercices (1 - 6)

1) a   2) c   3) c
4) c   5) a

Unité 2 : Arrangements et Combinaisons

Réponses de quelque exercices (2 - 1)

1) d   2) C   3) d
4) $3^3 = 27$ 5) 6

Réponses de quelque exercices (2 - 2)

1) d   2) B   3) A
4) d   5) C   6) C
7) B   8) 6   9) 16
10) $P^2_4 = 12$
14) a $P^6_1 = 6$ b $P^2_6 = 30$
19) $P^3_{10} = 720$
20) $P^3_8 = 336$

Réponses de quelque exercices (2 - 3)

5) 10   6) 9   7) 15
8) $C^5_5 + C^4_5 + C^3_5 = 16$
9) $C^3_{10} \times C^2_8 = 3360$
11) a C^2_8 b C^3_9 c C^4_{10}
d C^0_8

Réponses de quelques exercices généraux

1) $P^2_4 = 4 \times 3 = 12$
2) $9^3 = 729$
5) b   6) c   7) c
8) a   9) b   10) d
17) n = 5   18) $C^1_7 \times C^2_5 = 7 \times 10 = 70$
19) 12   20) $P^2_{12} = 132$

Réponses de l'épreuve cumulative

1) d   2) c
10) a $\frac{1}{100}$ b 10   c $\frac{1}{20}$
d 96   e 24
11) $C^2_6 = 15$
12) a n = 6   b $n = \frac{5}{2}$ c n = 8
d n = 6   e n = 1
f n = 4

Unité 3 : Dérivation et Intégration

Réponses de quelque exercices (3 - 1)

1) b   2) d
3) d   4) a
6) a nombre dérivé = $6(2)^2 = 24$
b nombre dérivé = - 2
7) nombre dérivé = $\frac{1}{4}$
8) nombre dérivé = 16
9) nombre dérivé = 616

Réponses de quelque exercices (3 - 2)

1) $f'(3) = 6$ = pente de la tangente à la courbe au point (3; 4)
2) $f'(-1) = 1$; $\theta = \tan^{-1} 1 = 45°$
3) a $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$
b $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

Réponses de quelque exercices (3 - 3)

1) $\frac{-3}{x^4}$ 2) 0
3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 4) $\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$
5) 10 x + 3   17) $\frac{7}{(x+5)^2}$
18) a 65   b 1
c $\frac{56}{9}$ d 240
e 1200   f $-\frac{1}{4}$
19) a 0   b 32
22) $\frac{d}{dx}[y^n] = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dx}$

Réponses de quelque exercices (3 - 5)

1) a $f'(x)$ b $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ c -3
d 9   e 1
f $2x - y - 3 = 0$
2) $\frac{\pi}{4}$ 3) 101° 19'
6) l'équation de la tangente est :
$y = -3(x+1)$
9) la première pente = 3 ; la deuxième pente $= -\frac{1}{3}$

Réponses de quelque exercices (3 - 6)

2) $10\sqrt{x} + \frac{2}{15}\sqrt[5]{x^2} + c$
3) $2x^2 - x\sin\frac{\pi}{3} + c$
4) $\frac{1}{4}(x+5)^4 + c$
5) $\frac{1}{24}(x^2 - 4x - 7)^{12} + c$
6) $\int \cos(x + \frac{\pi}{4})\,dx$
$= \sin(x + \frac{\pi}{4}) + c$

Réponses de quelques exercices généraux

5) f   6) c   7) a
8) a n'est pas dérivable car elle n'est pas continue
b dérivable

Réponses de l'épreuve cumulative

4) B   5) B   6) C
9) 8 x + y - 12 = zero
11) A = 1 ; B = 3

Unité 4: trigonométrie

Réponses de quelque exercices (4 - 1)

1) hauteur de la tour $\simeq$ 32 m
2) hauteur de la tour $\simeq$ 65 m
3) AB $\simeq$ 64 m
4) 111 m
5) la vitesse du bateau $\simeq$ 19 km/h
6) hauteur de la colline $\simeq$ 34 m

Réponses de quelque exercices (4 - 2)

(3) 0 (4) sin x (5) 1

(6) C (7) C (8) A

(9) D (10) A (11) D

(12) 2 sin C sin B

(13) 2 cos A sin B (14) zero

(15) cos (40 + x)

(16) $\frac{-21}{221}$; $\frac{-140}{221}$; $\frac{-220}{21}$ (17) $\frac{1}{5}$

Réponses de quelque exercices (4 - 3)

(1) c (2) a (3) c

(4) c (5) d

(8) $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $-\frac{120}{119}$; $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

(9) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$

Réponses de quelque exercices (4 - 4)

(1) $9\sqrt{3}$ cm^2 (2) 50cm^2

(3) 6 cm^2 (5) 54 cm^2

(6) $80\sqrt{3}$ cm^2 (7) 143.997cm^2

(9) A (10) C (11) C

(14) 64cm^2 (15) $6 + 2\sqrt{21}$ cm^2

(18) 103 . 18cm^2

(19) **a** $8\sqrt{30}$ cm^2 **b** 90 cm^2

c 384 cm^2 **d** $\frac{15\sqrt{39}}{4}$

(20) $1500\sqrt{3}$ (21) $20\sqrt{2}$

Réponses de quelques exercices généraux

Premier : problème de l'angle d'élévation et d'abaissement

(3) ≈ 13 m (4) ≈ 87 km

(5) ≈ 705.22 m

(6) ≈ 23.530 km

Deuxième : problème de la règle d'addition

(3) **a** 1 **b** 1

(4) $\frac{-120}{169}$; $\frac{-119}{169}$ (5) $\frac{8}{9}$

(8) $\frac{1}{3}$

(10) $\frac{-16}{63}$; $\frac{24}{25}$

Troisième : problème de la formule d'Heron

b $8\sqrt{30}$ cm^2

c 22627.42 cm^2

(2) $3\sqrt{255}$ cm^2

(3) 2400 cm^2

(4) 306 cm^2

Réponses de l'épreuve cumulative

Premier : choix multiple

(1) sin 5 x (2) $\frac{5 \sin B}{\sin A}$

(3) $-\frac{1}{8}$ (4) 120°

Deuxième : questions de courte réponse

(5) 2.5cm (6) 6: 4: 3

(7) 120° (8) 1

Troisièmeéme : question à longuer réponse

(12) z' ≈ 12.6cm ; ≈ 191cm^2

(14) ≈ 4.73 km

(15) $9\sqrt{15}$ cm^2

Exercices généraux

Premier : répose d'algébre

Épreuve 1

Question 1:

(1) C (2) C (3) C (4) D

Question 3:

(1) 1260

(2) 8

Question 4:

(1) 71071

(2) 30

Épreuve 2

Question 1:

(1) a (2) a (3) b (4) c

Question 2:

(1) = 3 (2) T_{17} ; T n = 1208

Question 3:

(1) 24

(2) g.s (8; 4; 2;...) ; $S_\infty = 16$

Question 4:

(2) 1100

Épreuve 3

Question 1:

(1) C (2) F (3) C (4) A

Question 2:

(1) r = 5 or r = 2 (2) n = 17

Question 4:

(1) 37

(2) g.s (36 ; 24; 16; $S_7 = \frac{8236}{81}$

Question 5:

(1) 1064

(2) la société me peut pas conserver 800 tons il peut conserver 763 prés.

Épreuve 4

Question 1:

(1) C (2) B (3) C (4) B

Question 2:

(1) n = 9 ; m = 2

(2) n = 36; a.s (83; 79; 75;...; -57)

Question 3:

(1) $n(y) = {}^5P_2 = 20$; $n(z) = {}^5C_3 = 10$

(2) g.s (1; 3; 9;) ; $S_{10} = 29524$

Question 4:

(2) 319 m.

Épreuve 5

Question 1:

(1) C (2) C (3) B (4) B

Question 2:

(1) 4

(2) (4; 7; 10;...; 88; 91) ; $S_{30} = 1425$

Question 3:

1. 22
2. g.s (18; 6; 2;...) $S_\infty = 27$
   g.s (2;6; 18;...)

Question 4:

1. quelque moyennes $\frac{9841}{243}$
2. 8200

Deuxiéme : réponse de la dérivation, intégration et trigonomé

Épreuve 6

Question 1:

1. B 2. C 3. B 4. A

Question 3:

1. -6

Question 4:

1. (4; 1); (2; -1)
2. hauteur de la tour $\simeq$ 137;37 m

Épreuve 7

Question 1:

1. D 2. C 3. B 4. D

Question 2:

1. 3 2. $\frac{65}{63}$

Question 4:

1. 107.79km près
2. 15

Épreuve 8

Question 1:

1. D 2. D 3. B 4. C

Question 2:

1. $\frac{-1}{4}$ 2. $\frac{-7}{9}$

Question 3:

2. 10

Question 4:

2. 2094

Épreuve 9

Question 1:

1. D 2. B 3. A 4. B

Question 2:

1. $\tan A = \frac{1}{2}$ or $\tan A = -2$
2. 15

Question 3:

1. $\frac{-15}{2}$

Question 4:

2. 102 m

Épreuve 10

Question 1:

1. C 2. D 3. B 4. A

Question 2:

2. a.s= { $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ }

Question 3:

1. A = B = 2
2. 70 m

Question 5:

1. (0; -1) ; (1; 4)
2. a (2; -4)
   b (1; -3)

المواصفات الفنية:

رقم الكتاب:	٢٧/٢/٢٢/١٥/١٠/١٥٨٧
مقاس الكتاب:	$\frac{1}{8}$ (٥٧ × ٨٢) سم
طبع المتن:	٤ ألوان
طبع الغلاف:	٤ ألوان
ورق المتن:	٨٠ جم أبيض
ورق الغلاف:	٢٠٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٧٦ صفحة

http://elearning.moe.gov.eg

الأشــراف برنتنج هاوس