République Arabe d'Égypte
Ministère de l'Éducation et l'Enseignement
et de l'Enseignement technique
secteur des livres

section lettre

Mathématiques Générales

Deuxième Secondaire

Livre de l'élève   Deuxième Semestre

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh   M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Essafty   M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Révisé par

Fathi Ahmed Chehata

Adel Mohamed Hamza   Nasser Saad Zaghloul

Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري

2019 - 2020

20 30
رؤية مصر
EGYPT VISION

Première édition 2015/2016
Numéro de Dépôt 10556 / 2015
Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 013 - 4

Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maitre.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Unité 1 Suites et Séries

Unité 2 Arrangements et Combinaisons

SOMMAIRE

Unité 3 Dérivation et Intégration

Unité 4 Probabilité

Épreuves générales et Réponse

Unité 1

Suites et Séries

Introduction de l'unité

Sans doutes, les mathématiques aides à découvrir et modéliser des paternes finies et infinies qui peuvent exister dans des situations variées de la vie courante ainsi que les paternes qu'on peut composer ou former.

On manipule des multitudes de ces paternes dans la vie quotidienne où ils peuvent se trouver sous formes des suites ou des séries. Ces paternes ont étés évolués de théorique au pratique dan les domaines des sciences, du génie et de la statistique. L'ordinateur est devenu la première innovation qui peut être évolué et utilisé comme un outil d'analyse des problèmes complexes des mathématiques et physiques dans tous les domaines.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le concept des suites et le distingue de celui de la série.
- Reconnaitre le terme général d'une suite arithmétique et le modéliser sous plusieurs formes.
- Déterminer la moyenne d'une suite arithmétique et insérer plusieurs moyennes entre deux nombres donnés.
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite arithmétique sous plusieurs formes.
- Reconnaitre le terme général d'une suite géométrique et le modéliser sous plusieurs formes.
- Déterminer la moyenne d'une suite géométrique.
- Insérer plusieurs moyennes géométriques entre deux nombres donnés
- Déduire la relation entre la moyenne arithmétique et moyenne géométriques de deux nombres positifs.
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite géométrique.
- Calculer la somme d'une suite géométrique infinie.
- Modéliser des problèmes quotidiens en utilisant les suites arithmétiques et les suites géométriques comme dans le cas de la population.
- Utiliser l'ordinateur pour résoudre des problèmes sur les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Vocabulaires de base

- Fonction
- Terme
- Suite finie
- Suite infinie
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Série
- Symbole de la somme (Σ)
- suite arithmétique
- la raison de la suite arithmétique
- moyenne arithmétique
- série arithmétique
- suite géométrique
- la raison de la suite géométrique
- moyenne géométrique
- série géométrique
- série géométrique infinie
- infini

Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Suites et séries.

Leçon (1 - 2): Suites arithmétiques.

Leçon (1 - 3): Séries arithmétiques.

Leçon (1 - 4): Suites géométriques.

Leçon (1 - 5): Séries géométriques.

Organigramme de l'unité

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels graphisme

Unité (1)

1 - 1 Suites et Séries

Allez apprendre

- La définition de la suite
- La suite finie et la suite infinie
- Le terme général de la suite
- La représentation graphique d'une suite
- La série et le symbole de la somme

Vocabulaires de base

- Suite
- Suite finie
- Suite infinie
- Ensemble
- Terme
- Série
- Le symbole de la somme

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphique

Réfréchissez et discutez

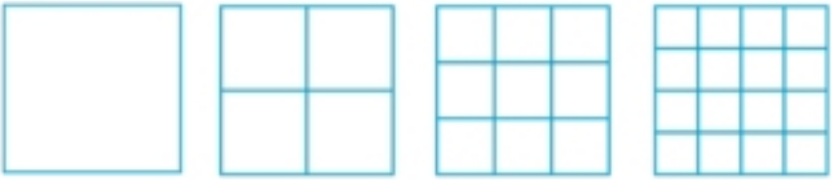


Figure (1) Figure (2) Figure (3) Figure (4)

Le modèle précédant représente un carré que l'on peut partager en petit carreaux:

(1) Déterminez le nombre de petits carreaux de la cinquième figure. **Tracez-la.**

(2) Pouvez-vous déterminer le nombre de petits carreaux de la huitième figure.

(3) Pouvez-vous trouver la relation entre le nombre de petits carreaux et le numéro de la figure ?

A apprendre La suite

La suite est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble (ou un sous-ensemble) des nombres entiers relatifs positifs $\mathbb{Z}^+$ Son ensemble image est un sous-ensemble de l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$. On note le premier terme par t_1, le deuxième terme par t_2, le troisième par t_3 etc. le terme général par t_n. On peut exprimer la suite en écrivant ses termes entre parenthèses comme ce qui suit : $(t_1\ ;\ t_2\ ;\ t_3\ ;\ ...\ ;\ t_n)$ ou par le symbole (t_n).

Rappel

La fonction est une relation entre deux ensemble X et Y tels que chaque élément de X apparait une et une seule fois comme première projection d'un couple du graphe de la relation

Exemple

1 Ecrivez les six premiers termes de chacune des suites suivantes:

a La suite des nombres pairs positifs commençant par le nombre 2

b La suite des nombres compris entre 10 et 30 qui sont divisibles par 3.

Remarques

(1) Les termes de la suite sont les images des éléments de l'ensemble de définition de la suite.

(2) Le symbole (tn) représente une suite tandis que le symbole tn représente le nième terme.

Solution

a $(2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10, 12)$

b $(12\ ;\ 15\ ;\ 18\ ;\ 21\ ;\ 24\ ;\ 27)$

Essayez de résoudre

1. Écrivez les six premiers termes de chacune des suites suivantes :

a La suite des nombres impairs négatifs qui commence par – 1.

b La suite des nombres compris entre 51 et 81 et qui sont divisibles par 5.

Terme général d'une suite

Le terme général d'une suite (appelé le nième terme) s'écrit t_n où t_n est l'image de l'élément du rang n dans l'ensemble de définition de la suite, parfois on peut le déterminer à partir de quelques termes donnés de la suite.

Par exemple :

- Le terme général de la suite de nombres pairs : $2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ; \dots$ est $t_n = 2n$
- Le terme général de la suite de nombres impairs : $1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ \dots$ est $t_n = 2n - 1$
- Le terme général de la suite : $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ est $t_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

Pensé critique : Ya-t-il une règle pour trouver le terme général d'une suite? Justifier votre réponse.

Exemple

2. Écrivez les cinq premiers termes de la suite (t_n) définie par :

$t_1 = -1\ ;\ t_{n+1} = 2\,t_n$ pour $n \geqslant 1$

Solution

Par substitution respective de n par les valeurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 dans la relation $t_{n+1} = 2t_n$:

Posons $n = 1$ alors $t_2 = 2t_1$ d'où $t_2 = 2 \times -1 = -2$ (Par substitution de $t_1 = -1$)

Posons $n = 2$ alors $t_3 = 2t_2$ d'où $t_3 = 2 \times -2 = -4$ (Par substitution de $t_2 = -2$)

Posons $n = 3$ alors $t_4 = 2t_3$ d'où $t_4 = 2 \times -4 = -8$ (Par substitution de $t_3 = -4$)

Posons $n = 4$ alors $t_5 = 2t_4$ d'où $t_5 = 2 \times -8 = -16$ (Par substitution de $t_4 = -8$)

Les cinq premiers termes de la suite sont : $(-1\ ;\ -2\ ;\ -4\ ;\ -8\ ;\ -16)$

Essayez de résoudre

2. Écrivez les six premiers termes de la suite (t_n) définie par : $t_1 = 3$, $t_n = 2\,t_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$

Suite finie et Suite infinie

Une suite est finie si le nombre de ses termes est fini (**c.-à-d. on peut les compter**) et une suite est infinie si le nombre de ses termes est infini (**une infinité de termes qu'on ne peut pas les compter**).

Exemple

(3) Écrivez les suites dont le terme général donné par la relation :

a $t_n = 2n - 1$ (cinq termes à partir du premier terme).

b $t_n = n^2$ (une infinité de termes à partir du premier terme).

Solution

a Remplaçons n par les valeurs : 1 , 2, 3 , 4 , 5

$\therefore t_1 = 2\,(1) + 1 = 3$, $t_2 = 2\,(2) + 1 = 5$

$t_3 = 2\,(3) + 1 = 7$, $t_4 = 2\,(4) + 1 = 9$

$t_5 = 2\,(5) + 1 = 11$, $\therefore$ la suite est : (3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11) **une suite finie**

b Remplaçons n par les valeurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ....

$\therefore t_1 = (1)^2 = 1$, $t_2 = (2)^2 = 4$

$t_3 = (3)^2 = 9$, $t_4 = (4)^2 = 16$

$t_5 = (5)^2 = 25$, $\therefore$ la suite est : (1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ....) **une suite infinie**

Essayez de résoudre

(3) Ecrivez les suites dont le terme général donné par la relation:

a $t_n = 1 - 3\,n$ (cinq termes à partir du premier terme).

b $t_n = n^3$ (une infinité de termes à partir du premier terme).

Les séries et le symbole de la somme

La série est l'opération de l'addition des termes de la suite.

Par exemple : (2 ; 5 ; 8 ; 11 ; ...) est une suite, mais 2 + 5 + 8 + 11 + ... est la série reliée par la suite précédente. On peut utiliser le symbole " Σ " qui se lit (sigma) pour écrire la série en forme simple.

Exemple

(4) Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis calculez la somme.

a $\sum_{r=1}^{4} r^2$

b $\sum_{r=3}^{7} (2r - 1)$

Solution

a Posons $r = 1$ alors $t_1 = (1)^2 = 1$, posons $r = 2$ alors $t_2 = (2)^2 = 4$

Posons $r = 3$ alors $t_3 = (3)^2 = 9$, posons $r = 4$ alors $t_4 = (4)^2 = 16$

D'où la série est (1 + 4 + 9 + 16) et $\sum_{r=1}^{4} r^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

b Posons $r = 3$ alors $t_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, Posons $r = 4$ alors $t_2 = 2 \times 4 - 1 = 7$

Posons $r = 5$ alors $t_3 = 2 \times 5 - 1 = 9$, Posons $r = 6$ alors $t_4 = 2 \times 6 - 1 = 11$

Posons $r = 7$ alors $t_5 = 2 \times 7 - 1 = 13$

D'où la série est $(5 + 7 + 9 + 11 + 13)$ et $\sum_{r=3}^{7} (2r - 1) = 45$

Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer le résultat d'une série:

La calculatrice est un outil précieux et performant pour effectuer des opérations compliquées à condition de l'insertion minutieuse des données. Parmi ces opérations, le calcul de la somme d'une série, par exemple, on peut vérifier la somme de la série de la question précédente (b): de la manière suivante :

(1) On appuie sur la touche [Σ▪ / □▪log] suivant la couleur de la touche d'opération

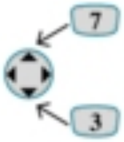
(2) On écrit la règle de la série $(2r - 1)$ comme suivant :

[2] [ALPHA] [)] (x) [−] [1]

(3) On utilise la touche (Replay) pour déplacer le curseur comme la figure

On écrit le rang du dernier terme de la série (7) au dessus ,

On écrit le rang du terme du début qui est dans l'exemple (3) au dessous



(4) On appuie sur la touche [=] pour afficher le résultat 45 sur l'écran qui est le même que le résultat obtenu.

Essayez de résoudre

4 Écrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis déterminez la somme, ensuite vérifiez le résultat par la calculatrice.

a $\sum_{r=1}^{5} (3r - 2)$ **b** $\sum_{r=1}^{4} (r + 1)^2$ **c** $\sum_{r=5}^{9} 3 \times 2r^{-1}$

Exercices (1 – 1)

Complétez :

1. Le cinquième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2n - 1$ est ....

2. Le quatrième terme de la suite (t_n) où $t_n = n^2 + 3$ est ....

3. Dans la suite (t_n) où $t_{n+1} = n\,t_n$ si $t_1 = 1$ alors $t_2 =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

4. Le cinquième terme de la suite de nombres naturels divisibles par 5 est ....
   - a 5
   - b 25
   - c 20
   - d 10

5. Le dixième terme de la suite de terme général : $t_n = \frac{2}{n} - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$ est :
   - a $\frac{-4}{5}$
   - b $\frac{-1}{5}$
   - c $\frac{1}{5}$
   - d $\frac{4}{5}$

6. La règle de la suite $((2 \times 3)\ ;\ (3 \times 4)\ ;\ (4 \times 5)\ ;\ (5 \times 6)\ ;\ ...)$ est :
   - a $(n - 1)(n + 1)$
   - b $n(n + 1)$
   - c $2n(n + 1)$
   - d $(n + 1)(n + 2)$

Répondez aux questions suivantes :

7. Montrez laquelle des suites suivante est finie ou infinie:
   - a $(1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ ...)$
   - b $(3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ ...\ ;\ 21)$
   - c La suite (t_n) où $t_n = n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$
   - d La suite (t_n) où $t_n = \frac{2}{n} + 3$ pour $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$

8. Dans chacun des cas suivant ; écrivez les cinq premiers termes de la suite dont le terme général est donné par la règle :
   - a $t_n = n + n^2$
   - b $t_n = \frac{1}{2n - 5}$
   - c $t_n = (\frac{1}{3})^n$
   - d $t_n = (-1)^n (n - 2)^2$

9. Découvrez la règle puis écrivez le terme suivant :
   - a $65\ ;\ 69\ ;\ 73\ ;\ 77\ ;\ 81\ ;\ ...$
   - b $3\ ;\ -6\ ;\ 12\ ;\ -24\ ;\ 48\ ;\ ...$
   - c $\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{16}\ ;\ \frac{1}{32},\ ...$
   - d $1\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 10\ ;\ 15\ ;\ ...$

10. En lien avec le sport : Karim pratique le sport 8 minutes au premier jour, puis il augmente 2 minutes par jour.
    - a Écrivez les cinq premiers termes de cette suite.
    - b Déterminez le terme général de cette suite.
    - c Déterminez le temps que Karim fait au septième ?
    - d Auquel jour Karim fait une demi heure? Expliquez votre réponse.

11 Ecrivez le développent de chacune des séries suivantes :

a $\sum_{r=1}^{5} (3r - 2)$

b $\sum_{r=1}^{8} \left((-1)^r + 4r\right)$

c $\sum_{r=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{r-1}$

d $\sum_{r=1}^{\infty} (\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1})$

12 Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis trouvez la somme de développement et vérifiez la réponse par la calculatrice.

a $\sum_{r=3}^{7} (2r + 3)$

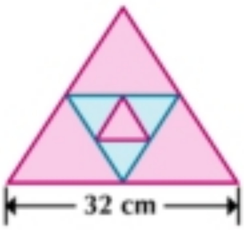
b $\sum_{r=2}^{6} (r^2 - 2)$

c $\sum_{r=1}^{5} 3 \times (\frac{1}{2})^{r+1}$

d $\sum_{r=3}^{6} (\frac{1}{r} + 2)$

13 **En lien avec l'exploitation minière :** Une mine d'or a produit 4200 kg d'or le premier an. La production diminue 10 % annuellement. Ecrivez les cinq premiers termes de la suite de production, puis trouvez leur somme.

14 **En lien avec la géométrie :** La figure ci-contre représente un triangle équilatéral de 32 cm de côté. Des milieux de ces côtés, on trace le triangle De même, on trace le troisième triangle … etc.



a Ecrivez la série qui représente les périmètres des triangles obtenus en utilisant le symbole de la somme.

b Déterminez le périmètre du quatrième triangle

c Trouvez en centimètre la somme des périmètres de quatre premiers triangles.

15 **En lien avec la technologie :** Karim utilise le courrier électronique pour envoyer un message aux trois de ses amis. Chacun de ses amis envoye le même message aux trois autres amis, ainsi de suite (sachant que chacun reçoit le message une seule fois)

a Écrivez la série en utilisant le symbole de la somme.

b Trouvez le nombre de personnes qui ont reçu le message à la cinquième étape

c Trouvez le nombre de personnes qui ont circulé le message jusqu'à la cinquième étape.

Unité (1)

1 - 2 Suites arithmétiques

Allez apprendre

- La définition de la suite arithmétique
- Représentation graphique de la suite arithmétique
- Le nième terme de la suite arithmétique
- Détermination de la suite arithmétique
- Définition de la moyenne arithmétique
- Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres

Vocabulaires de base

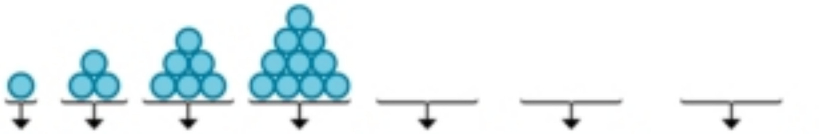
- Modèle
- Suite arithmétique
- nième terme
- la raison d'une suite arithmétique
- le rang d'un terme
- la moyenne arithmétique

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Activité

Etudiez chacune des modèles suivantes, puis complétez jusqu'au septième figure.



1	3	6	10	....	....	....

1	3	5	7	....	....	....

Répondez aux questions suivantes :

(1) Quels sont les ressemblances et les différences de deux modèles?

(2) Ecrivez les deux suites représentant les deux modèles.

(3) Que remarquez-vous de valeurs de la suite de la deuxième modèle? Peut-on déduire une formule reliant les termes de cette suite? Ecrivez cette formule.

De l'activité précédente, on déduit que :

- Les valeurs du premier modèle augmentent des valeurs variantes tandis que les valeurs de deuxième modèle augmentent avec une valeur constante.
- La suite représentant le deuxième modèle est (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...) chaque terme dépasse le terme qui lui précède d'une valeur constante égale à 2. Pour cela on l'appelle suite arithmétique.

Definition 1

Suite Arithmétique

C'est une suite dont la différence entre un terme et le terme qui lui précède est une valeur constante qui appelée la raison de la suite et on le note par (r)

C'est-à-dire: $r = t_{n+1} - t_n$ pou tout $n \in \mathbb{Z}^+$ (a) On peut la former à l'aide de son premier terme (a) et sa raison (r).

Exemple

1) Laquelle parmi les suites suivantes est arithmétique? Pourquoi?

a) (7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19)

b) $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6})$

c) $t_n = 2n + 3$

d) $t_n = \frac{3}{n} + 2$

Solution

a) $\because t_2 - t_1 = 10 - 7 = 3$, $t_3 - t_2 = 13 - 10 = 3$

De même $t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 3$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 3$ $\therefore$ la suite est arithmétique de raison = 3

b) $\because t_2 - t_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$; $t_3 - t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\therefore t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ $\therefore$ la suite n'est pas arithmétique .

c) $\because t_{n+1} - t_n = (2(n+1)+3) - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$

$\therefore$ la suite est arithmétique de raison 2

d) $\because t_{n+1} - t_n = \left(\frac{3}{n+1} + 2\right) - \left(\frac{3}{n} + 2\right)$

$= \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{3n - 3n - 3}{n(n+1)} = \frac{-3}{n(n+1)}$ n'est pas constante.

$\therefore$ la suite n'est pas arithmétique

Essayez de résoudre

1) Laquelle parmi les suites suivantes est arithmétique? Pourquoi?

a) (38 ; 33 ; 28 ; 23 ; 18)

b) (- 14 ; - 8 ; - 2 ; 4 ; 10)

c) $t_n = 2n + 3$

d) $t_n = 1 - \frac{3}{2} n$

Suite croissante et suite décroissante

Une suite (t_n) est croissante si la raison est positive $(d > 0)$ par exemple : (1 ; 5 ; 9 ; 13 ; ....)

Une suite (t_n) est décroissante si la raison est négative $(d < 0)$ par exemple : (4 ; -1 ; -6 ; -11 ; ....)

Représentation graphique de la suite arithmétique

2) Trouvez les quatre termes qui suit de la suite arithmétique (10 ; 7 ; 4 ; ...) puis représentez les sept premiers termes graphiquement.

Solution

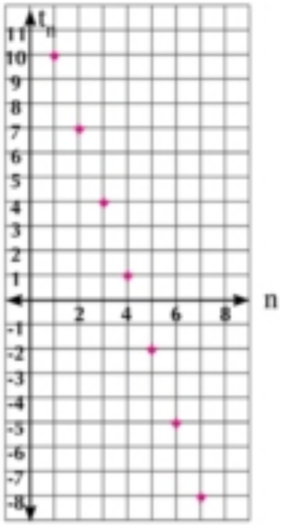
$\because r = t_2 - t_1 = 7 - 10 = -3$

$\therefore$ les quatre termes qui suit sont : 1 ; - 2 ; - 5 ; - 8

L'ensemble de définition de la suite est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$

L'ensemble image est $\{10 ; 7 ; 4 ; 1 ; -2 ; -5 ; -8\}$

La figure ci-contre est la représentation graphique de la suite



De la figure on remarque que:

Les points qui représentent la suite arithmétique sont alignés c.-à-d. la suite arithmétique est une fonction du premier degré en n où $n \in \mathbb{Z}^+$ et le coefficient de n est la raison de la suite.

Réflexion critique :

Que prévoyez-vous lorsque la raison de la suite arithmétique (t_n) est nulle $(r = 0)$? Expliquez votre réponse.

Essayez de résoudre

2) Soit la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$

a) Démontrez que (t_n) est une suite arithmétique et trouvez sa raison.

b) Démontrez que (t_n) une suite croissante.

c) Trouvez le quinzième terme de la suite.

d) Trouvez la valeur de n lorsque $t_n = 85$?

Détermination du nième terme de la suite arithmétique:

De la définition (1) on peut déduire le nième terme de la suite arithmétique (t_n) de premier terme a et de raison r comme ce qui suit :

$t_1 = a$, $t_2 = a + r$, $t_3 = a + 2r$ ainsi de suit, on déduit le nième terme est $\boxed{t_n = a + (n-1)r}$

Exemple

3) Soit la suite arithmétique (13 ; 16 ; 19 ; ......; 100)

a) Déterminez le dixième terme

b) Déterminez le nombre de termes de la suite

Solution

$\because$ la suite est arithmétique $\therefore a = 13$, $r = 16 - 13 = 3$

a) $\because t_n = a + (n-1)r$ $\therefore t_{10} = 13 + (10-1) \times 3$

$= 13 + 9 \times 3 = 13 + 27 = 40$

b) On veut déterminer la valeur de n si $t_n = 100$

$\because t_n = a + (n-1)r$ $\therefore 100 = 13 + (n-1) \times 3$ $\therefore 100 = 13 + 3n - 3$

D'où $3n = 100 - 10 = 90$ $\therefore n = 30$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez le nombre de termes de la suite arithmétique (7 ; 9 ; 11 ; ... ; 65) puis trouvez la valeur de dixième terme de la fin.

Déterminer la suite arithmétique

On peut déterminer la suite arithmétique étant donné le premier terme et la raison de la suite.

Exemple

(4) Déterminez la suite arithmétique (t_n) qui a $t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$

Solution

On sait que : $t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$

$\because t_n = a + (n-1)\,r$ $\qquad \therefore 18 = a + (7-1)\,r$

D'où $a + 6r = 18$ **(1)**

De même $34 = a + (15-1)\,r$

$a + 14r = 34$ **(2)**

Si on résout le système (1) et (2) on obtient $r = 2$

par substitution dans la première équation

$\therefore a + 6 \times 2 = 18 \quad \therefore a = 18 - 12 = 6$

$\therefore$ La suite est (6 ; 8 ; 10 ; ...)

Remarque

Pour trouver la valeur de r

$$\begin{array}{rcl} a + 14r & = & 34 \\ -a - 6r & = & -18 \end{array}$$

en multipliant les termes de la première équation par (-1)

par addition : $8r = 16$

On divise les termes de l'équation par 8

$r = 2$

Utiliser la calculatrice:

Pour vérifier la solution du système d'équations : $a + 6r = 18$; $a + 14r = 34$

En utilisant la calculatrice scientifique, on suivie les étapes suivantes :

Insérer les données

On appuie sur la touche $\boxed{\text{MODE}}$ puis on choisit de la lise EQN par son numéro ou par la touche $\boxed{\text{EXE}}$ dans certains calculatrices, puis on choisit l'équation linéaire $\boxed{anX + bnY = cn}$ On insère respectivement les coefficients de (X) , (Y) et le terme constant (cn) de la première équation ainsi de même pour la deuxième équation comme suit :

$\boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{18}\ \boxed{=}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

Les résultats :

- On appuie sur la touche $\boxed{=}$ pour la première fois pour obtenir la valeur de la première inconnue (x), le résultat $\boxed{X = 6}$
- On appuie une autre fois sur la touche $\boxed{=}$ on obtient la valeur de la deuxième variable (y) le résultat est $\boxed{Y = 2}$

Pour sortir du programme: on appuie sur les touches : $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}$

Essayez de résoudre

(4) Déterminez la suite arithmétique (t_n) dont $t_6 = 17$ et $t_3 + t_{10} = 37$

Moyennes arithmétiques

On sait que la moyenne arithmétique (la moyenne) de deux nombres a et b est $\frac{a+b}{2}$

Soit (9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25) une suite arithmétique

- la moyenne arithmétique des premier et troisième termes $= \frac{9+17}{2} = 13$ **Que remarquez -vous?**
- la moyenne arithmétique des deuxième et quatrième termes $= \frac{13+21}{2} = 17$ **Que remarquez- vous?**

Definition 2

Si a ; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c où $b - a = c - b$,
c.-à-d $2b = a + c$ d'où $b = \frac{a+c}{2}$ pour celà : $\left(a ; \frac{a+c}{2} ; c\right)$ **est une suite arithmétique.**

On peut insérer quelques moyennes arithmétiques : x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n entre les deux nombres a et b. De sorte que : $(a ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n ; b)$ **soit une suite arithmétique.**

Expression orale : Complétez :

(1) Si (3, 7, 11, ..., 43 , 47) est une suite arithmétique alors 7, 11, 15, ..., 43 sont appelés ....

(2) le nombre de moyennes arithmétiques = le nombre de termes de la suite ....

(3) le nombre de termes de la suite = le nombre de moyennes arithmétiques ....

Rappel

La moyenne arithmétique de quelques nombres est égale à leur somme divisé par leur nombre
Exemple :
Déterminez la moyenne arithmétique de nombres: 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9
La moyenne arithmétique
$= \frac{4+6+7+8+8+9}{6}$
$= 7$

Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres

Exemple

(5) Insérez 5 moyennes arithmétiques entre 6 et 48

Solution

I) On détermine le nombre de termes de la suite
Il y'a cinq moyennes entre le premier et le dernier termes de la suite arithmétique, alors le nombre de termes de la suite $n = 2 + 5 = 7$

II) On détermine la valeur de r : le nième terme de la suite arithmétique: $t_n = a + (n - 1) r$
Par substitution de : $a = 6$, $t_n = 48$, $n = 7$
$48 = 6 + (7 - 1) r$

Alors $6r = 42$ **on divise le deux membres par 6** $\therefore r = 7$

III) On utilise la valeur de r pour trouver les moyennes arithmétiques

$$\boxed{6\ ;}\ 13\ ;\ 20\ ;\ 27\ ;\ 34\ ;\ 41\ ;\ \boxed{48}$$

+7 +7 +7 +7 +7 +7

Les moyennes sont : 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41

Essayez de résoudre

5) Insérez 4 moyennes arithmétiques entre 13 et 48.

Exercices 1 - 2

Déterminez laquelle de suites suivantes est arithmétique et laquelle est non arithmétique, puis déterminez la raison de la suite arithmétique :

1) (12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24)

2) (21 ; 25 ; 29 ; 34 ; 38)

3) (-5 ; -11 ; -17 ; -23 ; -29)

4) (7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7)

5) (x + 2y ; 3x + 3y ; 5x + 4y) où x et y sont deux valeurs positives

Écrivez les cinq premiers termes de chacune de suites arithmétiques dans les cas suivants :

6) $a = 2 ; r = 5$

7) $a = 7 ; r = -3$

8) $a = -4 ;\ r = \frac{1}{4}$

Complétez :

9) Le septième terme de la suite arithmétique (2 , 5 , 8 , ...) est ....

10) Le onzième terme de la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$ est ....

11) Le nième terme de la suite arithmétique (81 ; 77 ; 73 ; ...) est ....

12) Le nième terme de la suite arithmétique $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; 0 ; ...)$ est ....

13) La moyenne arithmétique de deux nombres 8 et 12 est ....

14) Si la moyenne arithmétique de deux nombres x et 26 est 21, alors x égale ....

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données:

15) Les suites suivantes sont toutes arithmétiques sauf la suite :

a) (3 ; 7 ; 11 ; 15 ; ...)

b) (-11 ; -15 ; -19 ; -23 ; ...)

c) $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; ...)$

d) $(\frac{21}{5} ; \frac{16}{5} ; \frac{11}{5} ; \frac{6}{5} ; ...)$

16 La suite arithmétique parmi les suites suivantes est :

a $(t_n) = (\frac{n+1}{n})$

b $(t_n) = ((n+1)^2)$

c $(t_n) = (\frac{3}{n}(n+2))$

d $(t_n) = \frac{n^3 - 1}{n^2 + n + 1}$

17 Si (t_n) est une suite arithmétique où $t_n = 3n + 2$, alors la moyenne arithmétique de t_5 et t_{11} est :

a 8 b 16 c 22 d 26

18 Si $2a + 1$, $5a - 1$; $6a + 3$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors a est égal à

a 1 b 2 c 3 d 4

Déceler l'erreur :

19 La raison de la suite arithmétique est égale à la différence entre un terme et le terme précédent d'où $r = t_n - t_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$

20 Ce n'est pas nécessaire que les points qui représentes les termes d'une suite arithmétique soient alignés.

21 Si la relation entre n et t_n d'une suite arithmétique est $t_n = an + b$ où a et b sont constants, alors b est la raison de la suite.

22 Si on insère n moyennes entre deux nombres consécutifs, alors le nombre des termes de cette suite est n - 2

Répondez aux questions suivantes :

23 Trouvez le douzième terme et le vingtième terme de la suite arithmétique (4 , 7 , 10 , ...)

24 Déterminez le nombre de termes de la suite arithmétique (63 , 59 , 55 , ... , - 133)

25 Déterminez les trois premiers termes de la suite arithmétique (tn) ou $(t_n) = (2 + 5n)$ puis trouvez le sang du terme 72 dans cette suite $(t_n) = (2 + 5n)$

26 (t_n) est une suite arithmétique dont $t_1 = -51$; $t_{22} = -156$, trouvez la raison de la suite.

27 Déterminez la suite arithmétique dont le quatrième terme est égal à 18 et son septième terme est égal à 27.

28 Une suite arithmétique dont le premier terme $= 3$, $t_n = 39$ et $t_{2n} = 79$, quelle est la valeur de n? Déterminez la suite.

29 Déterminez la suite arithmétique dont le cinquième terme = 21 et son dixième terme est égal au triple de son deuxième terme.

30 (T_n) est une suite arithmétique dont $t_1 + t_2 = 9$, $t_5 = 22$. Trouvez la suite.

31 Déterminez la suite arithmétique dont le sixième terme = 20, et le rapport entre son quatrième et son dixième termes est 4 : 7.

32 Une suite arithmétique dont le quatrième terme = 11, la somme de son cinquième et son neuvième termes est égale à 40. Déterminez la suite puis le rang du terme dont la valeur est 152.

33 Si 36 ; a ; 24 ; b sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, déterminez les valeurs de a et b.

34 Si la moyenne arithmétique entre a et b est 8, et la moyenne arithmétique entre 4a et 2b est 20, déterminez les valeurs de a et b.

35 Si (8 ; a ; .... ; b ; 68) est une suite arithmétique de 16 termes, déterminez les valeurs de a et celle de b

36 Insérez 16 moyennes arithmétiques entre 27 et - 24.

37 Dans la suite arithmétique ($5x + 6$; $3x + 15$; ... ; $50x - 9$; $40x + 16$), trouver la valeur de x, puis trouvez le nombre des termes de la suite.

38 En lien avec la physique : Karim commence à conduire son vélo du sommet d'une colline. Il parcoure 100 cm pendant la première seconde et la distance augmente 120 cm de plus chaque seconde. Déterminez la distance parcourue pendant la dixième seconde.

39 En lien avec la commerce : Un homme a acheté une moto en versements mensuels formant une suite arithmétique dont le terme général est 120n + 80. Si le dernier versement est 1400 L.E., déterminez le nombre des versements.

40 Pensé critique: Une suite arithmétique dont le neuvième terme est 25, la moyenne arithmétique de ses troisième et cinquième termes est 10. Déterminez la suite

Activité

En lien avec la santé : Un malade prend 21 comprimés d'un médicament pendant une semaine. Le médecin lui conseille de diminuer le dosage d'un taux de 3 comprimés par semaine.

1 Trouvez le nombre de comprimés qu'il prend pendant la cinquième semaine?

2 Après combien de semaines le malade arrêtera ce médicament?

3 Quel conseil donnez-vous aux malades qui prennent les médicaments sans consulter le médecin?

Unité (1)

1 - 3 Série arithmétiques

Allez apprendre

- Notion de la série arithmétique
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant ses premier et dernier termes.
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant son premier terme et sa raison

Vocabulaires de base

- Série arithmétique
- Symbole de la somme (Σ)

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Somme d'une série arithmétique

Le savant allemand Carl Gauss a fait une surprise à son maitre quand il avait sept an, il a mentalement calculé la somme des nombres de 1 à 100. Il remarque que la somme est égale à 50 pairs du nombre dont la sommes est 101 qui est égale à : $50 \times 101 = 5050$

Pouvez-vous mentalement déterminer la somme de 1 à 20?

German scientist
Karl -Gauss
1777 - 1855

Definition

Série arithmétique

C'est la somme des termes d'une suite arithmétique.

Par exemple : La somme de cinq premiers termes de la suite arithmétique (3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11). Elle est notée $S_5 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

Somme de n premiers termes d'une série arithmétique

I) Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant son premier et son dernier termes.

Soit une série arithmétique de premier terme a, de raison r, de dernier terme b, et le nombre de ses termes n. La somme de n termes de cette série noté S_n où :

$$S_n = a + (a + r) + (a + 2r) + ... + (b - r) + b \qquad (1)$$

On peut aussi écrire la somme par la façon suivante :

$$S_n = b + (b - r) + (b - 2r) + ... + (a + r) + a \qquad (2)$$

D'après (1) et (2) par addition, on obtient:

$2S_n = (a + b) + (a + b) + (a + b) +... + (a + b)$ n fois

D'où $2S_n = n (a + b)$ **on divise par 2** $\boxed{S_n = \frac{n}{2} (a + b)}$

Exemple

1 Utiliser le symbole de la somme Σ :

Trouvez $\sum_{r=5}^{24} (4r - 3)$

Solution

Puisque l'expression est du premier degré, alors elle représente une suite arithmétique

$n = 24 - 5 + 1 = 20$ on trouve le nombre de terme de la suite

$t_n = 4n - 3$ Le nième terme de la suite

$t_5 = 4 \times 5 - 3 = 17$, $t_{24} = 4 \times 24 - 3 = 93$

$t_n = \frac{n}{2}(a + b)$ Formule de la somme

$t_{20} = \frac{20}{2}(17 + 93) = 1100$ par substitution de : $a = 17$, $b = 93$, $n = 20$

Rappel

fin

Symbol de le somme $\longrightarrow \sum_{r=1}^{n} (t_n)$

Debut

Régle de la série

Essayez de résoudre

1 Trouvez :

a $\sum_{k=1}^{20} (6k + 5)$

b $\sum_{m=7}^{32} (12 - 5m)$

Exemple

2 Calculez la somme de la série arithmétique $2 + 5 + 8 + ... + 62$

Solution

$b = a + (n - 1) r$ Le nième terme de la suite

$62 = 2 + (n - 1) \times 3$ par substitution de $a = 2, r = 3, b = 62$

D'où $3n - 3 + 2 = 62$

$3n - 1 = 62$ alors $n = 21$

$S_n = \frac{n}{2}(a + b)$ Formule de la somme

$S_{21} = \frac{21}{2}(2 + 62) = 672$ par substitution de $a = 2, n = 21 , t_n = 62$

Essayez de résoudre

2 Calculez :

a La somme de la série arithmétique $89 + 85 + 81 + ... + 33$

b Le nombre des termes de la suite arithmétique dont le premier terme est égal à 3, son dernier terme est égal à 39 et la somme de n premiers termes est égale à 210.

II) Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant son premier terme et sa raison

On sait que $b = a + (n - 1) d$, $S_n = \frac{n}{2}(a + b)$

par substitution de la première relation à la deuxième, alors:

$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1) r]$ alors $\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) r]}$

Exemple

(3) Dans la série arithmétique $5 + 8 + 11 + ...$ trouvez :

a La somme de 20 premiers termes.

b La somme de 10 termes à partir du septième terme.

c La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}

Solution

$a = 5\ ,\quad r = 8 - 5 = 3$

a $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,r]$ — La formule de la somme

$S_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 5 + (20 - 1) \times 3]$ — par substitution de $a = 5$ et $r = 8 - 5 = 3$

$S_n = 10\ (10 + 19 \times 3)$

$= 10 \times 67 = 670$ — par le calcule

b $t_n = a + (n - 1)\,r$ — le nième terme de la suite

$t_7 = a + 6\,r$

$= 5 + 6 \times 3 = 23$ — par substitution de $a = 5\ ,\ r = 3\ ;\ n = 7$

$S_{10} = \frac{10}{2} \times [2\,t_7 + (10 - 1) \times 3]$ — par substitution dans la formule de la somme

$S_{10} = 5 \times [2 \times 23 + 27]$

$= 5 \times 73 = 365$ — par le calcule

c La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}

$t_n = a + (n - 1)\,r$ — le nième terme de la suite

$t_{10} = a + 9\,r$

$= 5 + 9 \times 3 = 32$ — par substitution de $a = 5\ ,\ r = 3$

$T_{20} = a + 19\,r = 5 + 19 \times 3 = 62$

$S_n = \frac{n}{2}\,(a + b)$ — Formule de la somme $(n = 20 - 10 + 1 = 11)$

$S_{11} = \frac{11}{2}\,(t_{10} + t_{20})$

$= \frac{11}{2}\,(32 + 62) = 517$ — par substitution de $t_{10} = 32\ ,\ t_{20} = 62,\ n = 11$

Réfléchissez :

Est-ce qu'il y a d'autre manières pour trouver la somme des termes de la suite à partir de t_{10} à t_{20}?

Essayez de résoudre

(3) Dans la série arithmétique $9 + 12 + 15 + ...$ trouvez :

a La somme de 15 premiers termes.

b La somme des termes de la série à partir de cinquième terme jusqu' au quinzième terme.

c Le nombre des termes qu'il faut additionner à partir du premier terme pour obtenir 750.

Déterminer la suite arithmétique

Exemple

(4) Déterminer la suite arithmétique dans laquelle $t_1 = 11$, $t_n = 87$ et $S_n = 980$

Solution

a) Trouvez la valeur de n

$S_n = \frac{n}{2}(a + b)$ **La formule de la somme**

$980 = \frac{n}{2}(11 + 87)$ **par substitution de $t_1 = 11, t_n = 87 ; S_n = 980$**

$98 \times \frac{n}{2} = 980$ alors : n = 20 termes **par le calcule $t_{20} = 87$**

b) Trouvez la valeur de r

$t_n = a + (n - 1)r$ **le terme général**

$87 = 11 + 19r$ **par substitution de $t_1 = 11, n = 20 ; t_n = 87$**

$19r = 87 - 11 = 76$ **la division par 19**

$\therefore r = 4$

c) déterminer la suite : $t_2 = 11 + 4 = 15$, $t_3 = 15 + 4 = 19$

La suite arithmétique est $(11 ; 15 ; 19 ; \ldots\ldots ; 87)$

Essayez de résoudre

(4) Déterminez la suite arithmétique dont

a) $t_1 = 23$, $t_n = 86$, $S_n = 545$

b) $t_1 = 17$, $t_n = -95$, $S_n = -585$

Exemple

(5) En lien avec l'épargne : Au premier janvier 2015 Karim dépose une somme de 120 L.E. au carnet d'épargne. Au premier de chaque mois, il dépose une somme supérieur de 15 L.E. à la somme du mois précédent. Trouvez :

a) Le montant déposé par Karim au premier du mois de décembre de même an.

b) La somme des montants déposés par Karim à partir du premier janvier jusqu'à la fin du décembre de même an.

Solution

Le montant déposé par Karim chaque mois représente une suite arithmétique dont le premier terme a = 120; et de raison r = 15. Pendent la durée du premier janvier jusqu'à la fin de décembre 2015; n = 12.

a) Par substitution de : a = 120 , r = 15 , n = 12 dans la formule : $t_n = a + (n - 1)r$

$t_{12} = a + (12 - 1)r$ d'où $t_{12} = 120 + 11 \times 15 = 285$ L.E.

b) Par substitution de : a = 120 , r = 15 , n = 12 dans la formule $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times 120 + 11 \times 15) = 2430$ L.E .

Réfléchissez : Pouvez-vous déterminer la somme que Karim dépose pendent l'an en utilisant la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique connaissant son premier et dernier termes? Expliquez la méthode pour trouver la somme.

Essayez de résoudre

5. **Salaire annuel:** Karim commence son travail avec un salaire annuel 19200 L.E. Il touche une prime annuelle de 480 L.E. Quelle est la somme de ses salaires à la fin de dixième année?

Exercices 1 - 3

Complétez se qui suit:

1. La somme des nombres entiers consécutifs de 1 à 20 est égale à ....
2. La somme de 10 premiers nombres pairs de nombres naturels est ....
3. La somme de nombres naturels impairs supérieur à 10 et inférieur à 30 est égale à ....
4. La somme de nombres naturels qui est divisible par 3 et compris entre 30 et 50 est égale à ....
5. La somme de neuf premiers termes de la suite arithmétique dont le premier terme est 2 et son dernier terme est 18, est ....
6. $\sum_{k=1}^{5} (2k + 1) =$ ....

Choisissiez La bonne réponse parmi les réponses données

7. La valeur de la série arithmétique $\sum_{r=1}^{4} (2r + 1)$ est égale à :
   - **a** 25
   - **b** 30
   - **c** 35
   - **d** 24
8. La série : $4 + 9 + 14 + ... + 5n - 1$ en utilisant le symbole de la somme s'écrit :
   - **a** $\sum_{r=4}^{n} (5r - 1)$
   - **b** $\sum_{r=1}^{n} (5r - 1)$
   - **c** $\sum_{r=1}^{n} (5r + 1)$
   - **d** $\sum_{r=1}^{5n-1} (3r + 1)$
9. La série : $7 + 12 + 17 + 22$ en utilisant le symbole de la somme, s'écrit :
   - **a** $\sum_{r=1}^{4} (5r + 2)$
   - **b** $\sum_{r=1}^{4} (4r + 3)$
   - **c** $\sum_{r=1}^{4} (7r + 1)$
   - **d** $\sum_{r=1}^{4} (3r + 4)$

Décelez l'erreur

10. La somme des termes de la suite arithmétique (- 12 ; - 8 ; - 4 ; ... ; 12) est un nombre entier positif.
11. La somme de six premiers termes de la suite arithmétique (24 ; 16 ; 8 ; ... ; - 24) est égale à 0.

Répondez aux questions suivantes

12. Trouvez la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique (14 ; 18 ; 22 ; ...)
13. Trouvez la somme des quinze premiers termes de la suite arithmétique dont le premier terme est 4 et son quinzième terme est 26.

(14) Déterminez la somme des nombres pairs de 2 à 40.

(15) Déterminez la somme de vingt premiers termes de la série arithmétique (6 + 4 + 2 + ...).

(16) Déterminez la somme de 30 premiers termes de la suite (t_n) où $t_n = 2n + 3$

(17) Déterminez la somme des termes de la suite arithmétique (2 ; 5 ; 8 ; ... ; 80).

(18) Déterminez le nombre des termes qu'il faut additionner de la suite (16 ; 20 ; 24 ; ...) à partir de son premier terme pour obtenir 456.

(19) Combien de termes faut-il additionner de la suite (- 16 ; - 14 ; -12 ; ...) à partir de son premier terme pour obtenir zéro?.

(20) Déterminez le nombre des termes de la suite (27 ; 24, 21 ; ...) à partir de son premier terme pour que leur somme soit nulle.

(21) Epargne : Ziad épargne 15 L.E. de son travail quotidienne. S'il épargne chaque jour une somme supérieur à 2 L.E. que le jour précédent. Déterminez la somme qu'il épargne pendent 15 jours.

(22) Théâtre scolaire: Une théâtre à l'école a 16 rangs, si le première rang a 16 sièges et chaque rang contient 4 sièges de plus que le rang précédent. Combien ya - t-il de sièges dans la théâtre?

(23) En lien avec la nourriture : Karim a un magasin de la nourriture, il arrange 78 boites du thon dans des rangs. Il met 12 boites au rang inférieur, 11 boites au rang suivant, puis 10 boites au rang qui suit ainsi de suite jusqu'à une boite au dernier rang. Déterminez le nombre des rangs.

(24) Emprunt : Un homme emprunte une somme d'argent pour en rembourser en 8 versements. Le premier versement est 500 L.E. et chaque versement augmente de 200 L.E. que le versement précédent. Quel est le montant emprunté?

(25) Maintenance : Une entreprise a attribué à une société, la maintenance de l'un de ses bâtiments, elle a fixé une date pour la fin de l'entretien du bâtiment. L'une des conditions du contrat : « dans le cas de retard, la société de maintenance doit payer une amende de 1000 L.E. pour le premier jour et l'amende augmente de 100 L.E. pour chaque jour de retard »
Si la société de maintenance fait un retard de 6 jours, quel est le montant dû pour payer l'amende?

Activité

En lien avec le sport : Ziad se prépare pour la course de fond, il a décidé de s'entraîner à courir 4 kilomètre pendent le premier jour et d'augmenter la distance d'un demi-kilomètre chaque jour.

(1) Déterminez la distance que fait Ziad au septième jour.

(2) Déterminez la somme des distances parcourues pendant la première semaine. (Une semaine est 7 jours)

(3) Si Ziad continue, sans cesse, l'entraînement, combien jours faut-il pour parcourir 81 km?

Suite géométrique

Allez apprendre

- Définir de la suite géométrique
- Représenter graphiquement de la suite géométrique.
- Le nième terme de la suite géométrique.
- Déterminer la suite géométrique.
- Moyennes géométrique
- Relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique

Vocabulaires de base

- Suite géométrique
- Nième terme
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Suite alternante le signe
- Moyenne géométrique

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphique

Activité

(1) Tracez sur une feuille cartonnée un triangle rectangle isocèle.

(2) Découpez le triangles en deux triangle rectangles isocèles.

(3) Répétez le mémé travail comme le montre la figure suivante, et déterminez le nombre de triangles obtenus chaque fois.

(4) Répondez aux questions suivantes:

a Est-ce que le nombre de triangles obtenus forme une suite arithmétique? Expliquez votre réponse.

b Est-ce qu'il y a une relation entre les nombres de la suite obtenue? Quelle est cette relation?

c Pouvez-vous déterminer le nombre de triangles obtenus dans les cinquième et sixième figures?

De l'activité précédente, on déduit que:

La suite des figures obtenues est (1 ; 2 ; 4 ; 8 , ...) et ce n'est pas suite arithmétique car $t_{n+1} - t_n \neq$ constant. Mais on remarque que le quotient de la division d'un terme par le terme précédent est constant qui est égal à 2. Cette suite est appelée une suite géométrique.

Définition 1

➤ La suite (t_n) où $t_n \neq 0$ est appelée suite géométrique

Si $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ = constant pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$ et le constant est appelé la raison de la suite et noté (q) .

Exemple

(1) Laquelle parmi les suites suivantes est géométrique? Puis déterminez la raison.

a $t_n = 2 \times 3^n$ **b** $t_n = 4\,n^2$

c La suite (t_n) où : $t_1 = 12$, $t_n = \frac{1}{4} \times t_{n-1}$ (pour tout $n > 1$)

Solution

a $\because \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3^{n+1-n} = 3$ **(constant)**

$\therefore$ La suite est géométrique de raison $q = 3$

b $\because \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{4\,(n+1)^2}{4n^2}$ **(n'est pas constant)**

$\therefore$ La suite n'est pas géométrique

c $\because (t_n) = (\frac{1}{4} \times t_{n-1})$ (pour $n > 1$)

$\therefore \dfrac{t_n}{t_{n-1}} = \dfrac{1}{4}$ **(constant)**

$\therefore$ La suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

Essayez de résoudre

1) La quelle des suites suivantes est géométrique ? Trouvez la raison pour la suite géométrique:

a $(t_n) = (3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96)$

b $(t_n) = (\frac{1}{243} ; \frac{1}{81} ; \frac{1}{27} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{3})$

c $(t_n) = (5 \times 2^n)$

d $(t_n) = (3\,(n+1)^2)$

Représentation graphique de la suite géométrique

Exemple

2) Déterminez les quatre termes suivants de la suite géométrique (8, 4, 2, ...), puis représentez graphiquement les sept premiers termes.

Solution

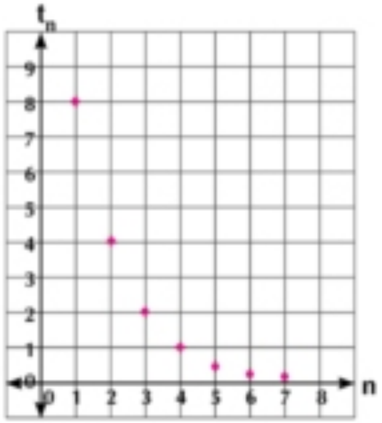
La raison de la suite $= \frac{1}{2}$, alors les quatre termes suivants sont : $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8}$

L'ensemble de définition est $\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

L'ensemble image est $\{ 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} \}$

Du graphique, on remarque que:

- La suite est décroissante car $a > 0$ et pour $0 < q < 1$
- La représentation graphique de la suite géométrique est comme celle de la fonction exponentielle.



Pensé critique:

Est-ce que la raison d'une suite géométrique peut-être nulle ou un? Expliquez votre réponse.

Essayez de résoudre

2) Déterminez les quatre termes qui suit de la suite géométrique $(\frac{1}{27} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{3} ; ...)$ puis représentez les sept premiers termes graphiquement.

Déterminer le nième terme d'une suite géométrique

De la définition (1) on peut déduire le nième terme de la suite géométrique (t_n) connaissant son premier terme a et sa raison q comme ce que suit:

$t_1 = a$, $t_2 = aq$, $t_3 = aq^2$ et $t_4 = aq^3$

Observant la progression de ce modèle, on trouve que le nième terme est: $\boxed{t_n = aq^{n-1}}$

Exemple

(3) Dans la suite géométrique (2 ; 4 ; 8 ; ....) trouvez:

i) Le cinquième terme. ii) Le rang du terme qui a pour valeur 512.

Solution

$\because$ $a = 2$, $q = \frac{4}{2} = 2$, $t_n = a \times (2)^{n-1}$

$\therefore$ $t_5 = ar^4 = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32$ **la valeur du cinquième terme est 32**

$\because$ $t_n = a \times q^{n-1}$ $\therefore$ $2 \times 2^{n-1} = 512$ **par la division par 2**

$\therefore$ $2^{n-1} = 2^8$ $\therefore$ $n - 1 = 8$ $\therefore n = 9$

Alors le neuvième terme est égal à 512

Essayez de résoudre

(3) Démontrez que la suite (t_n) où $t_n = 2 \times 3^{n-5}$ est une suite géométrique puis déterminez son septième terme.

Déterminer la suite géométrique

On peut déterminer la suite géométrique en connaissant son premier terme et sa raison.

Exemple

(4) Soit (t_n) une suite géométrique. Si $t_4 = 40$ et $t_7 = 320$, trouvez la suite.

Solution

$\because$ $t_4 = a q^3$ $\therefore$ $a q^3 = 40$ .... (1)

$\because$ $t_7 = a q^6$ $\therefore$ $a q^6 = 320$ .... (2)

Par la division de deux membres de deux équations (1) ; (2)

$\therefore$ $\frac{a q^6}{a q^3} = \frac{320}{40}$ (où $a q \neq 0$) $\therefore q^3 = 8$ $\therefore q = 2$

Par substitution à l'équation (1)

$\therefore a (2)^3 = 40$ d'où : $8 a = 40$

Par la division de deux membres par 8, on obtient $a = 5$

$\therefore$ La suite est (5 ; 10 ; 20 ; ....)

Expression orale :

Qu'en pensez-vous, si la puissance de la base q est un nombre pair? Expliquez votre réponse .

Utiliser la calculatrice scientifique pour écrire une suite géométrique:

Pour écrire la suite géométrique dont a = 5 , q = 2 par exemple, on suit les étapes suivantes:
On écrit la valeur de a (le nombre 5) puis on appuie sur la touche = puis la touche × puis on écrit la valeur de q (le nombre 2) puis on appuie sur la touche = le deuxième terme de la suite s' affiche, on appuie successivement la touche = les termes suivants s'affichent …… etc

Essayez de résoudre

4) (t_n) est une suite géométrique dont $t_3 = 12$, $t_8 = 384$. Déterminez la suite

5) Une suite géométrique de termes positifs. Son deuxième terme est égal à 6, son dixième terme est égal à 1536. Déterminez la suite.

Exemple

En lien avec l'enseignement:

5) Le nombre d'élèves de la deuxième secondaire d'une zone éducative augmente à un taux annuel de 4%. Si le nombre actuel d'élèves est 2400 élèves. Quel sera le nombre d'élèves après 6 ans?

Solution

$\because$ Le nombre actuel d'élèves = 2400

$\therefore$ Le nombre d'élèves dans la deuxième année = 2400 + 2400 × 4 %
= 2400 (1 + 0.04)
= 2400 (1.04)

Rappel

$4\% = \frac{4}{100} = 0.04$

Le nombre d'élèves dans la troisième année = 2400 (1.04) + 2400(1.04) × 0.04
= 2400 (1.04) (1 + 0.04) = $2400(1.04)^2$ ... etc

Alors le nombre d'élèves forme une suite géométrique (2400 ; 2400(1.04) ; $2400(1.04)^2$; ..)

a = 2400 , q = 1,04 , n = 6

Par substitution dans la formule du nième terme de la suite géométrique $t_n = a \times q^{n-1}$

$t_n = (2400) \times (1{,}04)^5 = 2919{,}966966$

Alors, le nombre d'élèves après 6 ans est égal à 2920 élèves près .

Essayez de résoudre

En lien avec le Fitness:

6) Kamal pratique le sport de la marche à pied pour le renouvellement de sa remise en forme et pour perdre du poids. Le premier jour, il a parcouru 50 mètres et de jour en jour, il double la distance.

a) Écrivez la suite des distances quotidiennes parcourues.

b) Déterminez la distance parcourue au septième jour.

Moyennes géométriques:

Les moyennes géométriques, comme les moyennes arithmétiques, sont les termes insérés entre deux termes non consécutifs d'une suite géométrique. On utilise la raison de la suite géométrique pour déterminer les moyennes.

Définition 2

➤ **Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors b est la moyenne géométrique de deux nombres a et c où: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ alors, $b^2 = a\,c$ d'où $b = \pm\sqrt{a\,c}$**

Enrichissez vos connaissances

En statistique, la moyenne géométrique d'un ensemble des nombres positifs $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ est la nième racine du produit des nombres. La moyenne géométrique = $\sqrt[n]{t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n}$

Déterminer les moyennes géométriques :

Exemple

6) Insérez 5 moyennes géométriques entre 4 et 2916.

Solution

i) On détermine le nombre de termes de la suite

Il y a 5 moyennes entre le premier et le dernier terme de la suite géométrique; alors le nombre de termes est $n = 5 + 2 = 7$

ii) On détermine la valeur de q

Le nième terme de la suite géométrique : $t_n = a\,q^{n-1}$

Par substitution de: $a = 4$, $t_n = 2916$, $n = 7$

$2916 = 4 \times q^{7-1}$ Alors: $4 \times q^6 = 2916$

On divise les deux termes par 4 : $q^6 = 729$ Alors: $q^6 = (\pm3)^6$ d'où $q = \pm3$

iii) On utilise la valeur de q pour déterminer les moyennes géométriques:

$$4 \xrightarrow{\times3} 12 \xrightarrow{\times3} 36 \xrightarrow{\times3} 108 \xrightarrow{\times3} 324 \xrightarrow{\times3} 972 \xrightarrow{\times3} 2916$$

ou

$$4 \xrightarrow{\times-3} -12 \xrightarrow{\times-3} 36 \xrightarrow{\times-3} -108 \xrightarrow{\times-3} 324 \xrightarrow{\times-3} -972 \xrightarrow{\times-3} 2916$$

Les moyennes sont: 12 ; 36 ; 108 ; 324 ; 972 ou - 12 ; 36 ; - 108 ; 324 ; - 972

Essayez de résoudre

7) Insérez six moyennes géométriques entre $\frac{1}{4}$ et 32

Pensé critique: Qu'en pensez-vous de la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres réelles positifs égaux?

Exemple

7) Deux nombres positifs dont la moyenne arithmétique est 10 et la moyenne géométrique est 8. Déterminez les deux nombres.

Solution

Posons les nombres x et y

Définition de la moyenne arithmétique : $\frac{x+y}{2} = 10$

On multiplie les deux membres de l'équation par 2 : $x + y = 20$ d'où : $y = 20 - x$ (1)

Définition de la moyenne géométrique: $\sqrt{xy} = 8$

On élève les deux membres de l'équation au carré: $xy = 64$ (2)

Par substitution de l'équation (1) à l'équation (2): $x(20 - x) = 64$

On développe les parenthèses et réduit l'expression : $x^2 - 20x + 64 = 0$

On factorise l'expression : $(x - 4)(x - 16) = 0$

On résout l'équation : $x = 4$ ou $x = 16$

Par substitution pour trouver les valeurs de y : $y = 16$ ou $y = 4$

Alors les deux nombres sont 4 et 16

Essayez de résoudre

8) Deux nombres positifs dont la moyenne arithmétique est 25, et la moyenne géométrique est 20. Déterminez les deux nombres.

8) On insère quatre moyennes géométriques entre deux nombres, de sorte que la somme de la première et de la quatrième moyennes soit égale à 90 et la somme de la deuxième et de la troisième moyennes soit égale à 60 ; quelles sont les deux nombres.

Solution

$\because$ Le nombre de moyennes = 4 $\quad\therefore$ Le nombre de termes de la suite = 4 + 2 = 6

$\therefore$ Posons le premier nombre = a , alors la première et la quatrième moyennes sont t_2 ; t_5

$\therefore t_2 + t_5 = 90 \quad \therefore aq + aq^4 = 90$

$\therefore aq(1 + q^3) = 90$ (1)

$\because$ La deuxième moyenne et la troisième moyenne sont t_3 et t_4

$\therefore aq^2 + aq^3 = 60 \quad \therefore aq^2(1 + q) = 60$ (2)

On divise les deux membres de l'équation (1) par les deux membres de l'équation (2)

$$\frac{aq(1+q)(1-q+q^2)}{aq^2(1+q)} = \frac{3}{2}$$

$\therefore 2q^2 - 2q + 2 = 3q \quad \therefore 2q^2 - 5q + 2 = 0 \quad \therefore (q - 2)(2q - 1) = 0$

$\therefore q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

Par substitution par $q = 2$ $\therefore a = 5$

Par substitution par $q = \frac{1}{2}$ $\therefore a = 160$ les deux nombres sont 160 et 5

Essayez de résoudre

9) On insère quelques moyennes géométriques entre 2 et 1458, de sorte que le rapport entre la somme de deux premières moyennes et la somme de deux dernières moyennes soit égal à 1 : 27. Déterminez le nombre de moyennes.

Exercices 1 - 4

Déterminez les suites géométriques parmi ce qui suit, puis trouvez sa raison:

1) $(1 ; 4 ; 9 ; 16 ; ......)$
2) $(243 ; 81 ; 27 ; 9 ; ......)$
3) $(\frac{1}{128} ; \frac{1}{64} ; \frac{1}{32} ; \frac{1}{16} ; ...)$
4) $(\frac{1}{2^n})$
5) $(-1 ; 3 ; -9 ; -27 ; .....)$
6) $(n^2 - 1)$

Dans chacun des cas suivants, écrivez les cinq premiers termes de la suite géométrique :

7) $a = 2$, $q = 4$
8) $a = -4$, $q = 2$
9) $a = 1$, $q = \frac{-1}{2}$
10) $a = -128$, $q = \frac{-1}{2}$

Complétez ce qui suit:

11) Le septième terme de la suite géométrique (64 ; 32 ; 16 ; .....) est égale à ....

12) Le sixième terme de la suite géométrique $(\frac{1}{243} ; \frac{1}{81} ; \frac{1}{27} ; .....)$ est ....

13) Le cinquième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2 \times (3)^{n-1}$ est égal à ....

14) Le nième terme de la suite géométrique (3 ; - 6 ; 12 ; ......) est ....

15) La moyenne géométrique de deux nombres 4 et 16 est ....

16) Si la moyenne géométrique de deux nombres 9 et y est 15, alors y est égal à ....

17) Si a ; b ; c sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors b = ...

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données:

18) Le cinquième terme de la suite géométrique $(8 ; 6 ; \frac{9}{2} ; .....)$ est :

a) $\frac{27}{8}$ b) $\frac{27}{16}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{81}{32}$

19) Les suites suivantes sont géométriques sauf :

a) $(3 ; -6 ; 12 ; -24 ; ....)$
b) $(-2 ; 4 ; 10 ; 16 ; .....)$
c) $(\frac{3}{2} ; 1 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{9})$
d) $(\frac{3b}{a} ; 6 ; \frac{12a}{b} ; \frac{24a^2}{b^2} ; ...)$ où $a > 0$, $b > 0$

20) La suite géométrique parmi les suites suivantes, est :

a) $(t_n) = (4n^2)$ pour tout $n \geqslant 1$
b) $(t_n) = (\frac{1}{4} \times t_{n-1})$ pour tout $n \geqslant 2$
c) $(t_n) = (2^n - 1)$ pour tout $n \geqslant 1$

21 Si a ; b ; c sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors :

a $a\,c = b^2$ **b** $a\,c = 2\,b$ **c** $\frac{a+c}{2} = b$ **d** $b^2 = a + c$

Découvrez l'erreur:

22 Les termes de la suite géométrique représentés graphiquement par des points distincts et alignés.

23 La suite (t_n) est géométrique si $\frac{t_n}{t_{n+1}}$ est égale à une valeur constante qui est la raison de la suite (pour tout $n \geqslant 1$).

24 Les moyennes géométriques sont les termes qui se trouvent entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique, et qu'on peut les déterminer en connaissant le nombre des moyennes.

25 La moyenne arithmétique de deux nombres réels distincts est plus grand que leur moyenne géométrique.

Répondez aux questions suivantes:

26 Si (t_n) est une suite telle que $t_n = 5 \times 2^n$. Démontre qu'elle est géométrique, puis écrivez leur trios premiers termes.

27 Soit la suite géométrique $\left(\frac{1}{8} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; -1 ; ....\right)$. Déterminez :

a Le dixième terme **b** Le rang du terme dont la valeur = - 1024 .

28 Montrez que la suite (t_n) est une suite géométrique où $t_n = \frac{3}{8}(2)^n$ puis déterminez son huitième terme et le rang du terme qui est égal à 768.

29 Une suite géométrique de raison $= \frac{1}{2}$ et son troisième terme = 24. Trouvez la suite.

30 Une suite géométrique dont le premier terme = 9 et le sixième terme = 288. Trouvez cette suite.

31 Déterminez la suite géométrique (t_n) dont $t_3 = 12$; $t_8 = 384$.

32 Déterminez la suite géométrique dont son troisième terme = 18, son sixième terme = 486.

33 Déterminez la suite géométrique (t_n) dont $t_2 = 10$; $t_6 = 160$.

34 Déterminez la moyenne géométrique de 16 ; 49

35 Déterminez les deux nombres dont la moyenne arithmétique est 5 et la moyenne géométrique est 3.

36 Déterminez deux nombres positifs dont leur moyenne géométrique positive augmente de 2 à l'un et diminue de 3 à l'autre.

37 Insérez quatre moyennes géométriques entre 2 et 64.

38 Insérez cinq moyennes géométriques positives entre $\frac{8}{27}$ et $\frac{27}{8}$

39 Si la moyenne géométrique de deux nombres 2 et x est 8, alors quelle est la valeur de x?

40 Deux nombres positifs dont la différence est 8 et leur moyenne géométrique est 3, alors quels sont ces nombres?

41 **En lien avec l'environnement:** L'eau coule dans un réservoir avec un taux qui se double d'un jour à l'autre. Le premier jour, l'eau coulée est de 12 Litres. Combien de jours faut-il pour couler 1536 Litres dans le réservoir?

42 **En lien avec la population :** Le nombre de la population d'une ville augmente à un taux annuel de 3 %. Quel sera la population de cette ville après 5 ans? Sachant que le nombre actuel de la population est 600000 habitants.

43 **En lien avec la commerce:** Le prix actuel d'achat d'une voiture est 120 milles L.E. Si le prix de la voiture diminue par un taux annuel de 12%. Quel sera le prix de la voiture après cinq ans?

44 **En lien avec le revenu:** Le salaire mensuel d'un employé est 1200 L.E. Il obtient une prime annuelle de 6 % du salaire. Quel sera son salaire après 6 ans?

Activité

La croissance démographique

Si la population d'une ville est 80000 habitants et le taux de la population augmente d'un taux annuel de 2 %.

a. Déterminez le nombre d'habitants après un an.
b. Déterminez le nombre habitants après deux ans.
c. Ecrivez la suite géométrique représentant le nombre de la population de cette ville.
d. Quel sera le nombre d'habitant à la fin de dixième an?
e. Utilisez (*EXCEL*) pour représenter graphiquement les nombres de la population à la fin de la cinquième année.
f. A l'aide de WEB, écrivez une recherche sur La croissance démographique en Egypte, et son effet sur le revenu national et les solutions proposées de ce problème.

Séries géométriques

1 - 5

Vous avez déjà apprendre que la série est la somme d'une suite, et la somme d'une série arithmétique, et maintenant vous pouvez trouver la somme de la série géométrique suivante?

95 + 285 + 855 + ... 1869885. On remarque la difficulté pour calculer cette somme par les méthodes traditionnelle, pour ce la on a besoin de trouver une formule pour calculer cette somme facilement et rapide. Ce qu'on va connaître maintenant.

Allez apprendre

- La somme d'une Série géométrique
- Utiliser les symbole de la somme
- Seris géométriques infini.
- La somme d'une Série géométrique infini
- Transformer une fraction décimale périodique en une fraction rationnelle

Vocabulaires de base

- La somme d'une suite géométrique
- Suites géométriques infini.
- La somme d'une suite géométrique infini

Aides pédagogiques

- Calculatrice
- Logiciels de graphisme

La somme d'une série géométrique

La série géométrique est la somme des termes de la suité géométrique et on la note S.

Somme des n premiers termes d'une série géométrique

1) Trouver la somme des n termes d'une série géométrique en fonction du son premier terme et sa raison.

Soit $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$ une série géométrique dont le premier terme a et la raison q, alors on peut calculer la somme S_n comme suit:

$$s_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-2} + aq^{n-1} \qquad .... (1)$$

En multipliant les deux membres par q alors :

$$qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + ...+ aq^{n-1} + aq^n \qquad .... (2)$$

Par soustraction membre à membre, on obtient:

$$s_n - qs_n = a - aq^n \text{ c-a-d :}$$

$$s_n (1- q) = a(1-q^n)$$

En divisant les deux membres par (1- q) où $1- q \neq 0$ alors

$$\boxed{s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1}$$

Pensé critique :

Quelle est la valeur de la somme si q = 1 ?

Exemple

1) Trouvez la somme de la série géométrique dont : a = 3 , q = 2 and n = 8

Solution

La somme d'une suite géométrique : $s_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant : $a = 3$, $q = 2$, $n = 8$

$s_8 = \dfrac{3(1 - 2^8)}{1 - 2}$ par substitution $s_8 = 3 \times 255 = 765$

Essayez de résoudre

(1) Trouvez la somme de séries géométriques dans les quelles:

a $a = 4$, $q = 3$, $n = 6$ **b** $a = 1000$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$

2) Trouvez la somme des n termes d'une série géométrique en fonction du ses premier et dernier termes.

On sait que : $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1 - q}$ .... (1)

et : $b = a\,q^{n-1}$ En multipliant les deux membres par q alors $bq = a\,q^n$ ...... (2)

par substitution de (2) en (1) alors : $\boxed{s_n = \dfrac{a - bq}{1 - q}, q \neq 1}$

(2) Trouvez la somme de la série géométrique: $1 + 3 + 9 + \ldots\ldots\ldots + 6561$

Solution

La formule de la somme d'une suite géométrique : $s_n = \dfrac{a - bq}{1 - q}$

En remplaçant : $a = 1$, $q = 3$, $b = 6561$

$s = \dfrac{1 - 6561 \times 3}{1 - 3}$ par simplification $s = \dfrac{19682}{2} = 9841$

Essayez de résoudre

(2) Trouvez la somme de la série géométrique dont: $q = 2048$, $q = \frac{1}{2}$ et $b = 28$

En utilisant le symbole de la somme.

Exemple

(3) Trouvez : $\sum_{r=5}^{12} 3(2)^{r-1}$

Solution

Puisque l'expression dans le symbole de la somme à la forme d'une puissance, alors il représente une suite géométrique

$t_5 = a = 3(2)^{5-1} = 48$, $q = 2$, $n = 12 - 5 + 1 = 8$

La somme de la série géométrique : $s_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant : $a = 48$, $q = 2$, $n = 8$

$s_8 = \dfrac{48(1 - 2^8)}{1 - 2}$ **par simplification** $s_8 = 48 \times 255 = 12240$

Réfléchissez :

Pouvez - vous calculer la somme dans l'exemple précédant connaissant les valeurs de a , ℓ ; q? Explique votre réponse.

Essayez de résoudre

3) Trouvez la somme des séries suivantes:

a) $\sum\limits_{r=7}^{16} \frac{1}{8}(2)^{r-1}$

b) $\sum\limits_{r=3}^{11} 16(\frac{1}{2})^{r-1}$

Exemple

Déterminer la suite géométrique

4) Trouvez la suite géométrique dont le premier terme = 243 et son dernier terme = 1 , sachant que la somme de ses terme est 364.

Solution

$\because$ a = 243 , b= 1 , s_n = 364 , $s_n = \frac{a - bq}{1 - q}$

$\therefore 364 = \frac{243 - q}{1 - q}$ $\therefore 364 (1 - q) = 243 - q$

$\therefore 364 - 364 q = 243 - q$ $\therefore 364 q - q = 364 - 243$

$\therefore 363 q = 121$ En divisant les deux membres par 363 $\therefore q = \frac{1}{3}$

La suite géométrique est (243 ; 81 ; 27 ; ....)

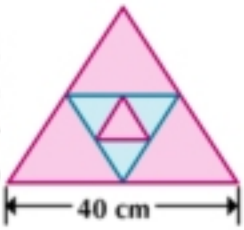
Essayez de résoudre

4) Trouvez la suite géométrique dont le premier terme = 243 et son dernier terme = 1 , sachant que la somme de ses terme est 364.

Exemple

En lien avec la géométrie:

5) La figure ci-contre représente un triangle équilatéral dont la longueur du côté extérieur est le double de la longueur du côté du triangle à l'intérieure dont les sommets se trouvent aux milieux des côtés du triangle extérieur Si on contenue de cette manier à l'intérieure, calculer la somme de 10 premiers triangles de cette modèle.



Solution

Le périmètre du 1ère triangle $= 3 \times 40 = 120$

Le périmètre du 2ème triangle $= 3 \times 20 = 60$

Le périmètre du 3ème triangle $= 3 \times 10 = 30$

Donc le modèle est: 120 , 60 , 30 , ... jusqu'au 10 termes

Somme des périmètres = 120 + 60 + 30 + ... C'est une série géométrique

La somme de la série géométrique : $s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant : a = 120 , $q = \frac{1}{2}$, n = 10

En remplaçant et utiliser la calculatrice $S_{10} = \frac{120\,(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = 239\frac{49}{64}$

Rappel

Le périmètre du triangle équilatéral = 3 × longueur du côté

Essayez de résoudre

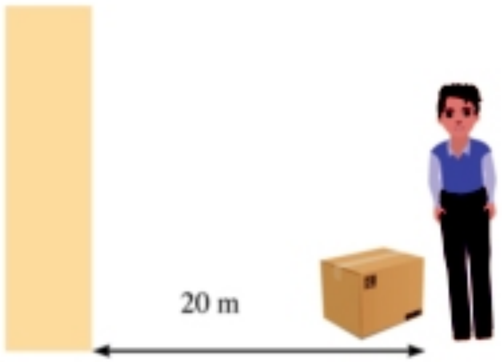
(5) En lien avec la biologie: Si la reproduction de la bactérie se double chaque jour (dans un échantillon des recherches médicales) Quel sera-t-il le nombre de bactérie dans dix jours sachant que le nombre de bactérie était 800 au premier jour?

Séries géométrique infinies

Réfléchissez et discutez

Zyad veut déplacer une boite vers un mur, qui se trouve à une distance de 20 mètres, en plusieures étapes de sorte que la distance déplacée égale à la moitié de la distance restante chaque fois. Zyad peut-il atteindre le mur ?

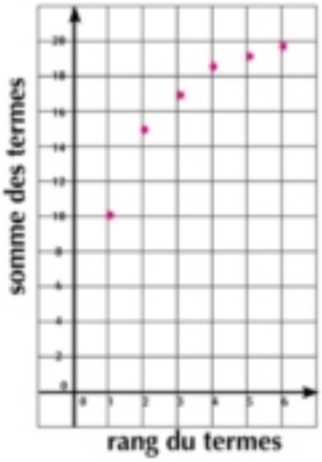
On peut répondre à cette question par l'étude des séries géométriques non finies (infinies).



Définition 2

Une série géométrique infinies est une série qui a un nombre infini des termes. Si la somme de ses termes est un nombre réel alors elle est convergente; car la somme tends vers un nombre réel. Si la série n'a pas de somme, alors elle est divergente.

Dans le paragraphe réfléchissez et discutez, la somme des distances parcourues est donné par la série 10 + 5 + 2.5 +1.25 + ... chaque fois que le nombre des termes augmente la somme rapproche de 20 mètres, qui est la somme de cette série. Par conséquence on peut considérer que Zyad peut atteindre le mur quand les termes de la suite augmententent jusqu'à l'infinie. La figure ci-contre représente la somme S_n, pour cela la série est convergente et la somme rapproche d'un nombre réel lorsque $|q| < 1$ la série est divergente et la somme ne rapproche pas de nombre réel lorsque $|q| \geqslant 1$



Exemple **Les séries convergentes et divergentes**

(6) Parmi les séries géométriques suivantes, la quelle peut - on calculer la somme à l'infini de ses termes?

a 75 + 45 + 27 + ... **b** 24 + 36 + 54 + ...

Solution

a On trouve la raison de la série $q = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$ donc on peut calculer la somme à l'infini de ses termes car $-1 < \frac{3}{5} < 1$

b On trouve la raison de la série $q = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ donc on ne peut pas calculer la somme à l'infini de ses termes car $\frac{3}{2} > 1$

Essayez de résoudre

6) Parmi les séries géométriques suivantes, le quelle peut-on calculer la somme à l'infini de ses termes? Expliquez votre réponse.

a $7 + 21 + 63 + ...$ **b** $\frac{81}{8} + \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + ...$

Somme des séries géométriques à l'infini

On a vu que la somme de n termes d'une suite géométrique est donné par la formule $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ Si on addition un nombre infini de ses termes, alors q^n rapproche de zéro si $-1 < q < 1$ Alors la somme devienne : $s_\infty = \frac{a}{1 - q}$

Pensé critique:

Pouvez -vous calculer la somme d'une série géométrique à l'infini quand $|q| \geqslant 1$? Expliquez votre réponse

Expression orale :

Pouvez-vous calculer la somme de la série géométrique dans le paragraphe réfléchissez et discutez? Expliquez votre réponse.

Exemple

7) Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes si cela est possible:

a $\frac{81}{8} + \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + ...$ **b** $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{25}{24} + ...$

Solution

a On trouve la raison de la série $q = \frac{27}{4} \div \frac{81}{8} = \frac{27}{4} \times \frac{8}{81} = \frac{2}{3}$

$\because -1 < \frac{2}{3} < 1$ $\quad \therefore$ donc on peut calculer la somme à l'infini

$\because a = \frac{81}{8}$, $q = \frac{2}{3}$ **en utilisant la formule** $s_\infty = \frac{a}{1 - q}$

$\therefore s_\infty = \frac{\frac{81}{8}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{81}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{243}{8}$

b On trouve la raison de la série : $q = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

$\because \frac{5}{4} > 1$ $\quad \therefore$ donc la série est divergente et n'a pas de somme

Essayez de résoudre

(7) Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes si celà est possible :

a) $12 - 24 + 48 - 96$ ....

b) $\frac{7}{5} + \frac{21}{10} + \frac{63}{20} + ...$

Exemple

En utilisant le symbole de la somme

(8) Trouvez $\sum_{r=1}^{\infty} 42(\frac{6}{7})^{r-1}$

Solution

La somme d'une suite géométrique à l'infini : $s_\infty = \frac{a}{1 - q}$

par substitutions : $a = 42$ où $q = \frac{6}{7}$: alors $s_\infty = \frac{42}{1 - \frac{6}{7}} = 294$

Essayez de résoudre

(8) Trouvez : $\sum_{r=1}^{\infty} 56(\frac{3}{4})^{r-1}$

Applications sur les suites

On peut utiliser les suites pour étudier quelques problèmes de la vie quotidienne comme les sources des revenus et des divers.

Exemple

(9) En lien avec le revenu: Le tableau suivant représente le revenu mensuel, en Livre Egyptien d'un ouvrier aux cinq dernières années. Sachant que le revenu somit à une géométrique.

L'année	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
le revenu mensuel en L.E.	288	432	648	....	....

a) Trouvez la raison de la suite géométrique.

b) Trouvez le revenu mensuel de cet ouvrier pendant la $4^{ème}$ et $5^{ème}$ années .

c) Trouvez en L.E. la somme des revenus durant cette duré.

d) Trouvez le revenu moyen de cet ouvrier pendant cette duré.

Solution

a) $\because$ La suite est géométrique $\therefore$ La raison $q = \frac{2^{ème} \text{ terme}}{\text{premier terme}} = \frac{432}{288} = \frac{3}{2}$

b) Le revenu mensuel pendant la $4^{ème}$ année $= t_3 \times q = 648 \times \frac{3}{2} = 962$ L.E ,

Le revenu mensuel pendant la $4^{ème}$ année $= t_4 \times q = 962 \times \frac{3}{2} = 1458$ L.E

c) La somme des revenus durant ses mois $= 12\ (288 + 432 + 648 + ...$ 5 termes)

$\because\ s_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ s_n = \dfrac{288\ \ 12\,[1 - (\frac{3}{2})^5]}{1 - \frac{3}{2}}$

$= 45576$ L.E

On utilise les touches de la calculatrice de la manière suivante :

→ (3 ÷ 2) $x^{\square}$ 5 ▶ - 1 = × 1 2 ×
2 8 8 = ÷ (3 ÷ 2 - 1) =

d Le revenu moyen de cet ouvrier pendant cet duré = $\dfrac{\text{Somme de revenu}}{\text{Nombre de mois}} = \dfrac{45576}{5 \times 12} = 759.6$ L.E

Pensé critique: Pouvez-vous calculer le revenu moyen en divisant (288 + 432 + 648 + .. 5 termes) par 5 années? Expliquez votre réponse.

Essayez de résoudre

En lien avec la physiques: Une boule en fer roule sur un plan horizontale, si la boule parcourt 25 m au premier minute, puis elle commence à parcourir 60% de la distance parcourue pendant la minute précédente. Trouver la distance totale parcourues jusqu'elle s' à ce qu'arrête.

Exercices 1 - 5

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. La somme des cinq premiers termes de la suite géométrique dans la quelle a = 1 et q = 2 est égale à :

   a 32 **b** 31 **c** 30 **d** 29

2. La somme à l'infini des termes de la suite (4 ; 2 ; 1 ; .....) est :

   a 8 **b** 12 **c** 16 **d** 20

3. Si la somme à l'infinie des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ est égale à 4, alors son premier terme est :

   a 1 **b** 2 **c** 3 **d** 4

4. Si la somme à l'infinie des termes d'une suite géométrique de premier terme 12 est égale à 96, alors sa raison :

   a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{7}{8}$ **d** $\frac{3}{4}$

5. Une suite géométrique son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes suivants, alors la raison de la suite est égale à :

   a 0,5 **b** 0,333 **c** 0,25 **d** 0,666

Décelez l'erreur:

6. On peut calculer la somme à l'infini d'une série géométrique lorsque $|q| \leqslant -1$

7. La somme de n premiers termes d'une suite géométrique dont $|q| < 1$ est plus grande que la somme à l'infini de ses termes .

8. La somme à l'infini des termes de la suite (16 ; 8 ; 4 ; .....) est plus grand que le double de son premier terme.

Répondre aux questions suivantes:

9. Trouvez la somme de chacune des suites géométriques suivantes :
   - a (6 ; 12 ; 24 ; .... à 6 termes)
   - b (125 ; 25 ; 5 ; .... à 6 termes)
   - c (3 ; - 6 ; 12 ; .... ; 768)

10. Parmi les suites géométriques suivantes, laquelle peut-on calculer la somme à l'infini? Trouvez cette somme si celà est possible:
    - a (24 ; 12 ; 6 ; ...)
    - b (3 ; - 6 ; 12 ; ...)
    - c $(\frac{1}{32} ; \frac{1}{16} ; \frac{1}{8} ...)$
    - d $(2 \times 5^{1-n})$

11. Trouvez la somme à l'infini de chacune des suites géométriques suivantes :
    - a (32 ; 16 ; 8 ; ...)
    - b $(\frac{81}{16} ; \frac{27}{8} ; \frac{9}{4} ...)$
    - c $(2 ; \sqrt{2} ; 1 ; ...)$
    - d $(\frac{27}{4} ; \frac{27}{16} ; \frac{27}{64} ...)$
    - d $(t_n) = (3^{3-n})$
    - e $(t_n) = (\frac{2}{3})^{n-1}$

12. Trouvez la suite géométriques dont le premier terme = 243 ; son dernier terme = 1 et la somme de ses termes = 364

13. Trouvez la suite géométriques dont la somme de ses termes = 1093 et son dernier terme = 729 et sa raison = 3.

14. Trouvez la somme de la suite géométriques $(t_n) = (3^{n-1})$ à partir de son quatrième terme jusqu'au son dixième terme.

15. Dans la suite géométrique (1 ; 3 ; 9 ; ....), trouvez le plus petit nombre des termes faut-t-il additionner à partir de son premier terme pour obtenir une somme plus grand que 1000.

16. Trouvez la suite géométriques dont la somme à l'infini = 48 et son deuxième terme = 12 .

17. Combien de termes de la suite géométrique (3 ; 6 ; 12 ; ....) faut- il additionner à partir du premier terme pour obtenir 381?

18. Démontrez que la suite $(t_n) = (10 \times 2^{n-2})$ est une suite géométrique, puis trouvez le nombre des termes qu'il faut additionner à partir du premier terme pour obtenir 2555

19 (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_2 = 6$, $t_3 - t_1 = 9$. Déterminer la suite et la somme de douze premiers termes

20 La somme des quatre premiers termes d'une suite géométrique positive = 45, son sixième terme dépasse son deuxième terme de 90. Déterminez la suite.

21 Si le premier terme d'une suite géométrique infinie est 18 et son quatrième terme est = $\frac{16}{3}$, trouvez la somme de la suite?

22 Trouvez la suite géométrique telle que la somme de ses premier et deuxième termes = 16 et la somme de tous les termes = 25.

23 Une suite géométrique infinie son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes suivants, la somme de ses premier et deuxième termes = 9. Déterminer la suite .

24 Une suite géométrique infini, un terme quelconque = le double de la somme à l'infini de tous les termes que le suit, si son quatrième terme = 3. Déterminer la suite.

25 **En lien avec le revenu:** une personne commence son travail dans une usine à un salaire de 3600 L.E. et une prime annuelle de 0,6 % du salaire de l'année précédente. Calculez son salaire en septième année et la somme des salaires à la fin des sept premiers années.

26 **En lien avec le revenu :** Le salaire annuel d'une personne commence par 3600 L.E. Une augmentation annuelle de $\frac{1}{20}$ du salaire précédant. Combien son salaire sera t-il après 11 années? Quelle est la somme des salaires après cette période?

27 **En lien avec l'économie :** Quand Karim avait 6 ans il a épargné 150 L.E. puis il épargne le double de ce qu'il épargne l'année précédente. A l'âge de 10 ans Karim veut acheter un Ordinateur qui coûte 5000 L.E. Est-ce que la somme qu'il a épargné est suffisante pour acheter l'Ordinateur? Expliquez votre réponse.

28 **Pensé critique :** Si a ; b et c forment une suite géométrique, démontrez que : $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2}{b^2}$

29 **En lien avec le sport:** Une balle en caoutchouc tombe d'une hauteur de 36 m, à chaque fois qu'elle heurte le sol elle répond à $\frac{3}{4}$ de la hauteur précédente. Trouvez :

- **a** La hauteur avant qu'elle heurte le sol à la sixième fois.
- **b** La somme des distances parcoures au moment qu'elle heurte le sol à la sixième fois.
- **c** La somme des distances parcoures jusqu'à ce qu'elle soit en repos.

Résumé de l'unité

La suite: est une fonction dont son ensemble image est l'ensemble des nombres entiers Z, ou sous ensemble de $\mathbb{Z}$ et son ensemble image est l'ensemble des nombres réelles R. En remarquant ce que suit:

- Les éléments de la suite sont des images des éléments de son ensemble image .
- Le symbole (t_n) désigne une suite et le symbole t_n désigne le nième terme.
- Dans une suite on peut ordonnée ses termes et les déterminer.
- La suite est finie si ses termes sont finis et la suite est infinie si ses termes sont infinis.
- La suite est représentée graphiquement comme une fonction par représenter ses couples par des points sur le plan cartésien .

La série: C'est la somme des éléments d'une suite, on utilise le symbole Σ pour écrire les séries à une forme semble .

- **La série finie:** Contient un nombre limités des éléments et s'écrit à la forme $\sum_{r=1}^{n} (t_r)$
- **La série infinie:** On ne peut pas déterminer ses éléments et s'écrit à la forme $\sum_{r=1}^{\infty} (t_r)$

La suite arithmétique: C'est la suite dans la quelle la différence entre deux termes consécutifs est constante, cette constante est appelée la raison de la suite que sera notée (r) où $r = t_{n+1} - t_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

- On peut déterminer la suite arithmétique en connaissant son premier terme (a) et sa raison (r).
- La relation entre n et t_n est $t_n = rn + b$ où r et b sont deux constants à déterminer. r est la raison de la suite. C'est une relation linéaire représenté graphiquement par un ensemble des points.
- La suite est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$
- Le nième terme de la suite arithmétique (t_n) dont le premier terme est a et sa raison r est donné par la relation : $t_n = a + (n - 1)\, r$
- Pour trouver le dernier terme (b) : $b = a + (n + 1)\, r$
- Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors b est appelée la moyenne arithmétique de a et c tel que $b = \frac{a+b}{2}$
- On peut insérer plusieurs moyennes arithmétiques entre deux nombres, et nombre des termes = nombre des moyennes + 2

- La somme de n premier termes d'une suite arithmétique:

  a) En fonction de première terme et la raison : $S_n = \frac{n}{2}\,[2\,a + (n - 1)\,r]$

  b) En fonction de premier et dernier terme : $S_n = \frac{n}{2}\,(a + b)$

La suite géométrique: la suit (t_n) où $t_n \neq 0$ est appelée une suite géométrique si $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ = constante pour tout $n \in Z+$ cette constante est appelée la raison de la suite que sera notée (q).

- La représenté graphiquement d'une suite géométrique suit une fonction exponentielle par des points qui représentent des couples dans le plan cartésien.

- Le nième terme de la suite géométrique (t_n) dont le premier terme est a et sa raison q est donné par la relation $t_n = a \times q^{n-1}$

- Si a ; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors b est appelée la moyenne géométrique de a et c tel que $b = \pm\sqrt{a\,c}$

- La somme de n termes d'une suite géométrique:

  1) En fonction de première terme et la raison : $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$; $q \neq 1$

  2) En fonction de premier et dernier terme : $S_n = \frac{a - b\,q}{1 - r}$; $q \neq 1$

- **La série géométrique infinie :** Contient un nombre infini des termes .

- Somme des séries géométriques à l'infini : $S_\infty = \frac{a}{1 - q}$ et $q \neq 1$ où $|q| < 1$

Exercices généraux

Complétez ce qui suit:

1. Dans la suite (t_n) où $t_{n+1} = n\ t_n$ si $t_1 = 1$ alors $t_2 =$ ....

2. La série $5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + ... + 5 \times 10$ s'écrit en utilisant le symbole de la somme à la forme ....

3. Le nième terme de la suite arithmétique $(3\ ;\ 7\ ;\ 11\ ; ...)$ est ....

4. La moyenne géométrique de deux nombres 8 et 18 est ....

5. Si la moyenne arithmétique de deux nombres a et 21 est 14, alors $a =$ ....

6. Le nombre des entiers qui sont compris entre 1 et 99 et sont divisibles par 5 est égal à ....

7. La somme de la série $\sum_{r=1}^{10} (2r - 3)$ est égal à ....

8. La somme de la série $\sum_{r=1}^{5} (2)^{r-1}$ est égal à ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

9. La suite : $t_n = 4n + 1$ est appelée une suite :
   - a) croissante
   - b) décroissante
   - c) ni croissante ni décroissante
   - d) constante

10. La série arithmétique: $3 + 7 + 11 ... + 35$ s'écrit en utilisant le symbole de la somme à la forme:
    - a) $\sum_{r=1}^{8} (4r - 1)$
    - b) $\sum_{r=1}^{9} (4r - 1)$
    - c) $\sum_{r=1}^{9} (3r - 4)$
    - d) $\sum_{r=1}^{8} (3r - 4)$

11. Toutes les suites suivantes sont des suites arithmétiques sauf :
    - a) $(11\ ;\ 15\ ;\ 19\ ;\ ...)$
    - b) $(-23\ ;\ -28\ ;\ -33\ ;\ ...)$
    - c) $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ ....)$
    - d) $(\frac{32}{5}\ ;\ \frac{26}{5}\ ;\ \frac{20}{5}\ ;\ ...)$

12. Si $2a + 2\ ;\ 6a - 2\ ;\ 7a$ sont trois termes consécutives d'une suite arithmétique, alors a :
    - a) 1
    - b) 2
    - c) 3
    - d) 4

13. La somme de la série arithmétique $\sum_{r=3}^{8} (2r + 1)$ est égal à :
    - a) 64
    - b) 72
    - c) 76
    - d) 80

14. Une suite géométrique dont la somme de n premiers termes est donnée par la relation $S_n = 3(3^n - 1)$, alors le cinquième terme de la suite est égal à :
    - a) 162
    - b) 243
    - c) 81
    - d) 729

15) Si la somme à l'infini des termes d'une suite géométrique dont le premier terme est 48 est 72 ; alors sa raison est égale à:

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

Répondez aux questions suivantes

16) Ecrivez les six premiers termes de chacune des suites suivantes :

a $t_{n+1} = nt_n$ et $t_1 = 3$ pour tout $n \geqslant 1$

b $t_1 = 2$, $t_2 = 5$, $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ pour tout $n \geqslant 1$

17) Si la somme de deuxième et quatrième termes d'une suite arithmétique est égale à 2 et la somme de ses sixième, septième et huitième terme est égale à – 45. Trouvez la suite.

18) Trois nombres forment une suite arithmétique dont la somme = 12 et le produit = 48. Trouvez ces nombres .

19) Trois nombres forment une suite arithmétique dont la somme = 27 ; le carré du $2^{ème}$ terme dépasse le produit du 1^{ier} et $3^{ème}$ terme de 16. Trouvez ces nombres.

20) Si on a inséré des moyennes arithmétiques entre 3 et 53, le rapport entre la somme de deux premières moyennes et la somme de deux dernières moyennes est 3 : 13. Trouvez ces moyennes .

21) Dans la suite arithmétique (9 ; 12 ; 15 ; ...). trouvez:

a La somme des 15 premiers termes.

b La somme des termes de la suite à partir de son cinquième terme au quinzième terme

c Le nombre des termes dont la somme = 750 à partir du premier terme.

22) Dans la suite géométrique (2 ; 6 ; 18 ; ……..) trouver le plus petit nombre des termes qu'il faut additionner à partir du 1^{er} terme pour que la somme soit plus grand que 6500.

23) (t_n) est une suite géométrique positive dans la quelle $t_6 = \frac{1}{9} t_4$, $t_3 + t_6 = 28$
Trouvez la suite et la somme de ses dix premiers termes.

24) Une suite géométrique positive dont la somme des ses quatre premiers termes = 60 et la somme des quatre termes qui les suit = 960. Trouvez la suite et la somme de ses septe termes à partir de son troisième terme.

25) Le premier terme d'une suite géométrique = 81et le sixième terme $= \frac{1}{6}$, Trouver la somme à l'infini de ses termes à partir de son troisième terme.

26) En lien avec les salaires: Le salaire mensuel d'un ouvrier est de 1200 L.E. en premiére année. Ce salaire augmente de 10 % chaque année. Ecrivez en utilisant le symbole de la somme le salaire obtenu pendant cinq années, puis calculez cette somme.

Epreuve cumulative

Comparaisons: Montrez la différence entre ce qui suit **:**

1. Les suites et les séries.
2. Le nième terme d'une suite arithmétique et le nième terme d'une suite géométrique.
3. La somme d'une série arithmétique et la somme d'une série géométrique.

Questions à courtes réponses :

4. Trouver le premier terme (a) dans ce qui suit :
   - **a** La suite arithmétique dans laquelle : $r = 3$, $t_7 = 32$
   - **b** La suite géométrique dans laquelle : $q = \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{1}{16}$
   - **c** La série arithmétique dans laquelle : $r = 6$ et S_{12} premier terme $= 216$
   - **d** La série géométrique dans laquelle : $q = 2$ et S_8 premier terme $= 255$

Questions à multiples réponses :

5. Écrivez trois suites tels que l'une est arithmétique, la deuxième est géométrique et la troisième est ni arithmétique ni géométrique; chacune d'elles commence par 2 ; 6 ; ....
6. Écrivez trois suites géométriques de premier terme 16 tel que la première est croissante la deuxième est décroissante et la troisième est constante. Puis trouver la somme à l'infinie de l'une de ses suites.
7. Écrivez la série géométrique 64 + 32 + 16 + ... par deux méthodes différentes en utilisant le symbole de la somme.
8. Raisonnement: Quand la série géométrique infinie admet une somme, et quand elle n'a pas de somme ? Expliquez votre raisonnement.

Applications quotidiennes :

9. Emprunt: Un commerçant a emprunté une somme et il va le rembourser de la manière suivante, Première versement 5000 L.E. puis chaque versement suivant dépasse le première par 500 L.E. ; si le nombre des versements est 10. Calculez la valeur de l'emprunt.
10. Revenu: Si le revenu annuel d'une entreprise est 840000 L.E. il augmente chaque année de 48000 L.E. Quand est que le revenu devient 1464000 L.E.

(11) **Commerce:** Un homme a acheté une apparille électrique puis il a payé en avance de son prix 800 L.E. et il va payer le reste mensuellement pendant deux années, de sorte qu'il paie le premier mois 100 L.E. puis il augmente 10 L.E. chaque mois suivant. Trouvez la somme total qu'il va payer.

Questions à longue réponse :

(12) Si (15 ; (3 k + 2) ; (4 k – 5) , ...) forment une suite arithmétique, trouvez la voleur de K .

(13) La somme des cinquième est dixième termes d'une suite arithmétique est 20, son 7^{éme} terme est égal au triple de son 4^{éme} terme . Trouvez la suite

(14) Le 20^{éme} terme d'une suite arithmétique est 41, la somme des 3^{éme} est 6^{éme} termes dépasse de 1 son 9^{éme} terme . Trouvez la suite.

(15) Trouvez la suite géométrique dans la quelle $t_2 = 5$; $\frac{t_7}{t_4} = \frac{1}{27}$.

(16) Une suite arithmétique dans la quelle $t_{12} = 38$, $t_{35} = 245$, trouvez la suite.

(17) La somme des 19^{éme} terme et 20^{éme} terme d'une suite arithmétique est 144 et la somme des 20^{éme} et 21^{éme} termes est 152. Trouvez:

a Le 20^{éme} terme.

b Le nombre de termes qu'il faut additionne à partir de son premiers terme pour obtenir 720.

Unité 2

Arrangements et Combinaisons

Introduction de l'unité

Le dénombrement est l'un des compéteces de base en mathématiques, souvent on est cofronté à des problèmes pour en résoudre on a besoin des procedures et des méthodes variées de dénombrement. Dans cette unité nous allons aborder les différentes stratégies du dénombrement parmi lequelles le principe fondamental de dénombrement et ses applications parmi lesquelles : la notion de permutation qui exprime le nombre des méthodes de réarrangement possible d'objets d'un ensemble.

Les combinaisons : C'est le choix sans répétitions.

Les grands savant Omar El khayaam, Isaak Newton et Bascal avaient un grand apport pour le fondement de ce domaine, cet apport a une influence jusqu'à aujourd'hui.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le principe de dénombrement et des applications simples.
- Reconnaître l'introduction des Arrangements et des Combinaisons.
- Utiliser l'ordinateur pour calculer les Arrangements et les combinaisons.

Vocabulaires de base

- Principe fondamental de dénombrement
- Principe conditionnelle de dénombrement
- Opération
- Diagramme de l'arbre
- Factorielle
- Arrangements
- Combinaisons
- Eléments
- Ordre
- Comité
- Sous-ensemble

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Principe de dénombrement.

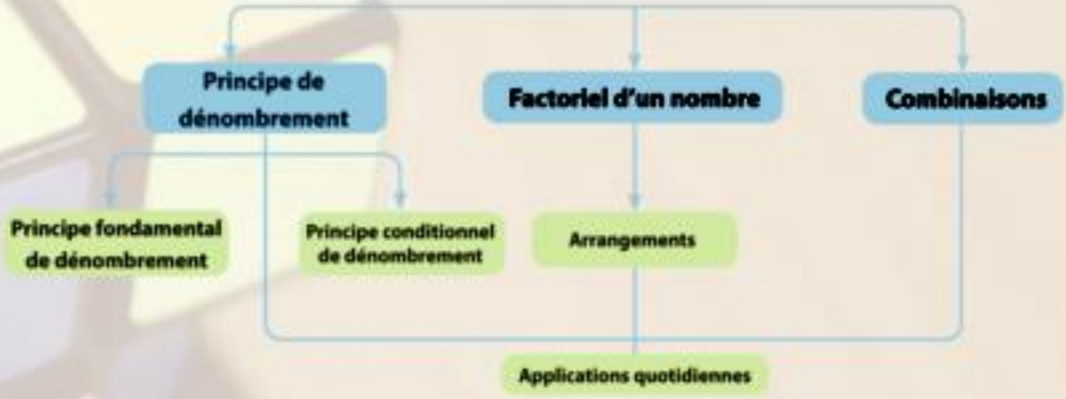
Leçon (2 - 2): Factorielle - Arrangements.

Leçon (2 - 3): Combinaisons

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – Logiciels de graphisme

Organigramme de l'unité



Unité 2

2 - 1 Principe de dénombrement

Allez apprendre

- Notion de principe de dénombrement et applications simples.
- Principe fondamental de dénombrement.
- Principe conditionnelle de dénombrement .

Vocabulaires de base

- Principe fondamental de dénombrement
- Operation
- Diagramme de l'arbre

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

Si on vous a demandé d'habiller une chemise et un pantalon parmi deux chemises et trois pantalons

De combien de façons peut-on choisir le tenue?

Exemple

(1) Combien y a-t-il de possibilités de choisir une comité d'un étudiant parmi trois étudiants (Ashraf, Mohamed et Hassan) et d'une étudiante parmi deux étudiantes (Samar et Mona)?

Solution

Dans cet exemple, c'est facile de savoir le nombre des méthodes de choix. Par exemple, on peut choisir : Ashraf , Samar ou Ashraf , Mona ou Mohamed , Mona ou Hassan , Samar .... etc.

Cela peut être exprimé par le diagramme suivant (l'arbre des choix):

Etudiant	Etudiante	Choix
Ashraf	Samar	Ashraf، Samar
	Mona	Ashraf، Mona
Mohamed	Samar	Mohamed، Samar
	Mona	Mohamed، Mona
Hassan	Samar	Hassan، Samar
	Mona	Hassan، Mona

Le nombre des méthodes de choix d'un étudiant parmi trois = 3

Le nombre des méthodes de choix d'une étudiante parmi deux = 2

Le nombre des méthodes de choix = $3 \times 2 = 6$ méthodes

Essayez de résoudre

(1) Dans le pragraph **Réfléchissez et discutez** , déterminez le nombre possible des choix?

Exemple

(2) Combien de nombres de trois chiffres peut-on former de sorte que:

- le chiffre des unités soit des éléments $\{3 ; 7\}$
- le chiffre des dizaines soit des éléments $\{2 ; 4 ; 9\}$
- le chiffre des centaines soit des éléments $\{1 ; 5\}$

Solution

Centaines	Dizaines	Unités	Le nombre
1	2	3	123
		7	127
	4	3	143
		7	147
	9	3	193
		7	197
5	2	3	523
		7	527
	4	3	543
		7	547
	9	3	593
		7	597

A l'aide du diagramme de l'arbre, on trouve que :

Le nombre de façons de choix du chiffre des unités × Le nombre de façons de choix du chiffre des dizaines × Le nombre de façons de choix du chiffre des centaines = $2 \times 3 \times 2 = 12$ méthodes

A apprendre

Principe fondamental du dénombrement

Définition : Soient m_1 le nombre de façons d'effectuer un travail quelconque, m_2 le nombre de façons d'effectuer un seconde travail, m_3 le nombre de façons d'effectuer un troisième travail … etc. alors le nombre de façons d'effectuer ces travaux simultanément $= m_1 \times m_2 \times m_3 \times ... \times m_n$

Exemple

3) Khaled peut choisir l'une des garnitures suivantes : foie, poulet ou poisson et l'une des boissons suivantes : orange, citron ou de la mangue. Combien de repas Khaled peut-il choisir ?

Solution

Le nombre de choix des garnitures = 3 manières.

Le nombre de choix des boissons = 3 manières.

Le nombre de choix $= 3 \times 3 = 9$ manières.

Essayez de résoudre

2) Dans un restaurant, on propose 6 types de pizza, 4 types de salades et 3 types de bossons. Quel est le nombre de repas possible peut-on présenter dans ce restaurant ? Sachant qu'un repas consiste : une pizza, une salade, un bosson?

Exemple **Principe conditionnelle de dénombrement**

4) Combien y a-t-il de manières pour former un nombre de 3 chiffres différents des chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Solution

On commence par le chiffre de centaines (une condition nécessaire que ce nombre ne soit pas zéro)

Le nombre de manières de choisir le chiffre des centaines = 4

Le nombre de manières de choisir le chiffre des dizaines = 4

place	centaines	dizaines	unités
N.de manières	4	4	3

Le nombre de manières de choisir le chiffre des unités = 3

$\therefore$ Le nombre total de manières $= 4 \times 4 \times 3 = 48$ manières

Essayez de résoudre

3. De combien de façons peut-on former un nombre de quatre chiffres différents des chiffres $\{2; 3; 4; 7\}$, de sorte que le chiffre de dizaines soit pairs .

Exercices (2 -1)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Le nombre de façons que 4 étudiants occupent 4 sièges situant de même rangé égale à :
   a) 1 b) $4+4$ c) 4×4 d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

2. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres différents des chiffres $\{5 ; 3 ; 0 ; 2\}$?
   a) 3×2 b) 4×2 c) 3×3 d) 3×4

3. Combien de nombres impaires qui se composent de trois chiffres distincts parmi les chiffres $\{2 ; 3 ; 6 ; 8\}$?
   a) $8 \times 6 \times 3$ b) $4 \times 3 \times 3$ c) $4 \times 3 \times 2$ d) $2 \times 3 \times 1$

4. Combien de nombres formés de trois chiffres distincts parmi les chiffres $\{2 ; 3 ; 5\}$?

5. Combien de nombres formés de quatre chiffres distincts dont le chiffre des unités est 6 peut-on former parmi les chiffres $\{2 ; 3 ; 6 ; 8\}$?

6. La plaque d'immatriculation d'un gouvernorat se compose de trois lettres alphabétiques distinctes suivie d'un nombre a trois chiffres distincts et différents (le zéro ne peut être de ces chiffres) Combien pourrait-on avoir de plaques d'immatriculation différentes?

7. Combien de nombres formés de trois chiffres différents des nombres $\{2 ; 5 ; 8 ; 9\}$ et qui sont inferieurs à 900?

8. Les numéros des réseaux cellulaires dans un pays consistent onze chiffres. On compose d'abord (025) puis on compose le reste du numéro. Trouvez le nombre maximum des lignes qui peuvent-être chargés dans ces réseaux.

Factorielle – Arrangements

Allez apprendre
- Factorielle d'un nombre
- Arrangements

Vocabulaires de base
- Factoriel d'un nombre
- Arrangements
- Sub-Permutation

Aides pédagogiques
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

A l'aide de ce que vous avez étudiez dans la leçon précédente, répondez aux questions suivantes :

1) De combien de façons quatre étudiants peuvent-ils occuper les trois sièges d'une rangée ?

2) De combien de manières cinq concourant peuvent se lever au bord de la piscine pour commencer le concours?

A apprendre

Définition 1

Factorielle : La factorielle d'un nombre entier positif n s'écrit sous la forme n! il est égal au produit de tous les nombres entiers positifs inferieurs ou égale à n :

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\, 3 \times 2 \times 1$$

Note

- Si $n = 0$ **alors** $0! = 1$
- Si $n = 1$ **alors** $1! = 1$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4\ 3!$,
  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 : 5!$

En général : $n! = n\,(n-1)!$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exemple

1) a) Calculez $\frac{10!}{8!}$ b) Soit $n! = 120$. trouvez la valeur de n.

Solution

a) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$

b) $n! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $\therefore n! = 5!$ $\therefore n = 5$

Essayez de résoudre

1) **Calculez :** a) $\frac{15!}{12!}$ b) $\frac{7!}{5!} + \frac{9!}{7!}$

Exemple

2) Trouvez l'ensemble de solution de l'équation : $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

Solution

$\because \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!\, n\,(n-1)}{(n-2)!} = 30 \qquad \therefore\ n(n-1) = 6 \times 5 \qquad \therefore\ n = 6$

Essayez de résoudre

(2) Soit $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{2}{(n+1)!} = \dfrac{56}{(n+2)!}$. trouvez la valeur de n

Pensé critique : soit $a! = 0!$. quelle est la valeur de n?

Arrangements

Exemple préliminaire : Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à partir des chiffres {2 ; 3 ; 5}?

Les nombres sont : 532 ; 352 ; 523 ; 253 ; 325; 235. chacun de ces nombres est appelé un arrangement des chiffres donnés.

Le nombre $= 3 \times 2 \times 1$ **on le note** A_3^3 **qui se lit** (3 A 3).

Le tableau suivant indique comment obtenir le nombre de façons :

centaines	dizaines	unités
1	2	3

Pour cela un arrangement d'un nombre d'objets, c'est de les agencer dans un certain ordre

Définition 1

Le nombre d'ARRANGEMENTS de n objets distincts pris r à r chaque fois est noté par A_n^r où:

$A_n^r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$ où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Par convention $A_n^0 = 1$

Par exemple :

- $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 \times \dfrac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$ $3 \times 2 \times 1 = \dfrac{6!}{(6-3)!}$ $\qquad A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!}$
- $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \dfrac{2 \times 1}{2 \times 1} = \dfrac{7!}{(7-5)!}$

Utilisation d'une calculatrice

L'arrangement est symbolisé par $^n p_r$ sur une calculatrice scientifique On utilise les touches Shift × **Pour calculer la valeur de $^5 p_2$ on appuie successivement sur les touches:**

5 Shift × 2 =

Réponse = 20

De ce que précède, on déduit:

$A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ où $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \leqslant n$

Exemple

(3) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :

a) A_7^4 b) A_4^4 c) A_4^3

Solution

a) $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ b) $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Que remarquez-vous de deux phrases b et c ?

Essayez de résoudre

(3) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : **a** $A_5^2 + A_6^3$ **b** $\dfrac{A_5^5}{A_5^4}$

Exemple

(4) De combien de façons distinctes cinq étudiants peuvent-ils occuper les sept sièges d'une rangée ?

Solution

On a 7 sièges, on veut en choisir 5 chaque fois

$\therefore$ Le nombre de façons $= A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

Utiliser d'une calculatrice : 7 SHIFT × (npr) 5 =

Essayez de résoudre

(4) Combien de mots de cinq lettres différentes peut-on former de l'alphabet arabes ?

Exemple (Ordre dans un cercle)

(5) De combien de façons distinctes cinq personnes peuvent-elles occuper quatre sièges cocycliques?

Solution

Dans ce cas : il y a un seul choix pour la première personne, 3 choix pour la deuxième, 2 choix pour la troisième et un seul choix pour la dernière personne.

Le nombre de façons $= 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

Pensé critique : Pouvez-vous déduire le nombre des façons d'ordonner n personnes sur un cercle?

Essayez de résoudre

(5) Combien de façons peut-on ordonner 9 personnes sur neuf sièges cocycliques?

Exemple

(6) Soit $A_7^r = 840$, trouvez la valeur de $(r - 4)!$

Solution

On divise le nombre 840 par 7 puis on divise le résultat par 6 ensuite on divise le résultat par 5 …etc jusqu'à ce qu'on obtient 1

840	7
120	6
20	5
4	4
1	

$\therefore$ Le nombre $840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = A_7^4$

$\therefore A_7^r = A_7^4$ $\therefore r = 4$ $\therefore (r - 4)! = 0! = 1$

Essayez de résoudre

(6) Soit $A_9^{r-1}\ {}_{-1} = 504$, trouvez la valeur de $(r + 1)!$

Pensé critique : 1) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : A_7^7 et $7!$

Que remarquez-vous ?

Exercices (2 - 2)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. De combien de façons différentes peut-on choisir un présédent et un vice président d'une comité formée de 12 membres

   a 2   b 23   c 66   d 132

2. Si $A_5^r = 60$, alors r est égal à :

   a 4   b 3   c 2   d 5

3. Si $A_n^3 = 120$, alors n est égal à :

   a 6   b 5   c 4   d 3

4. Le nombre de façons d'arranger les lettres du mot « voir » est égal à :

   a 4   b 9   c 10   d 24

5. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres {3, 4, 5, 6}?

   a 48   b 30   c 12   d 4

6. Le nombre de façons d'arranger 7 enfants sur un cecle est égal à:

   a 1   b 7   c 720   d 5040

7. Le numéro de téléphone se copose de 8 caractères

9	c	......	......	......	......	......	......

   c est l'un des chiffres 3 ; 4 ; 5 ; 8 tandis que chacun des autres caractères est un chiffre quelconque. Combien de numéros possibles peut-on avoir ?

   a 499 999   b 4 000 000   c 4 999 999   d 10 000 000

8. Hussam peut choisir l'une des garnitures suivantes : Rissole, poulet ou poisson et l'une de deux boissons suivantes : jus ou eaux gazeuse. Combien de repas Khaled peut-il choisir? (Utilisez l'arbre d'étalement pour résoudre le problème)

9. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4?

10. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4?

11. Combien y a-t-il de nombres pairs formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3; 4?

12. De combien de manières peut-on former une comité d'une femme et d'un homme parmi 4 femmes et 3 hommes ?

13 Un magasin de crème glacée offre trois volumes : petit, moyen, grand et cinq saveurs : fraise, mangue, citron, lait, chocolat. Quel est le nombre de choix possibles pour acheter une crème glacée

14 Parmi l'ensemble des lettres $\{a ; b; c ; d; e ; f\}$, trouvez le nombre de manières de choisir

a une seule lettre. b deux lettres distinctes.

15 **Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :**

a $7! \div 5!$ b $32! - 3!$ c $A_5^3 \times 2!$

d $A_3^3 \times A_2^2$ e $A_8^1 + A_8^2$ f $A_7^0 + A_7^7$

16 **Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :**

a $n! = 24$ b $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$

c $A_{15}^n = 2730$ d $A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 = 50$

17 Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :

a $A_7^n = 210$ b $n\,(2n - 1)! = 12$

18 Si $A_n^4 = 14 \times A_{n-2}^3$ trouvez la valeur de n.

19 De combien de façons différentes peut-on choisir un président, un vice-président et secrétaire d'une comité formée de dix membres.

20 De combien de façons le professeur de l'éducation physique peut-il choisir trois étudiants l'un aprés l'autre Parmi huit pour participer à l'équipe de football, basket-ball, volly-ball respectivement ?

21 Démontrez que : $\frac{(n+2)!}{n!} = A_{n+2}^2$

Activité

1- Soit $x = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$. Avec les chiffres de cet ensemble:

a Combien de nombres formés de deux chiffres distincts peut-on constitués?

b Combien de nombres formés de deux chiffres peut-on constitués?

c Combien de nombres formés de trois chiffres distincts peut-on constitués?

d Combien de nombres formés de trois chiffres distincts inferieur à 500 peut-on constitués?

e Combien de nombres formés de quatre chiffres distincts don le chiffre des unités est 2 peut-on constitués?

Unité 2

2 - 3 Combinaisons

Allez apprendre

- Notion des combinaisons et applications simples.
- Triangle de Pascale.

Vocabulaires de base

- Combinaisons
- Objets
- Ordre
- Comité
- Sous-ensemble

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de Graphisme

Tip

Enrechissez vos connaissances une combinaison peut s'écrire sous la forme of $C_n^r = \binom{r}{n}$

Préface

On veut sélectionner deux équipes parmi quatre { a ; b; c ; d} pour un matche de football. Les choix possibles sont:

(a ; b), (a ; c), (a ; d), (b ; a) , (b ; c), (b ; d), (c ; a), (c ; b), (c ; d), (d ; a), (d ; b), (d ; c).

De ce qui précède, on remarque que le choix (a ; b) est différent de celui de (b ; a).......etc.

Si on veut choisir sans prendre l'ordre en compte, alors les choix possibles sont : {a ; b}, {a ; c}, {a ; c}, {b ; c}, {b ; d}, {c ; d}. and each Chacun de ces choix est appelé une « combinaison ».

A apprendre

Définition

Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts noté C_n^r où $r \leq n$, $r \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}+$

Dans la préface précédente :

Le nombre de façons différentes de choisir 2 objets parmi 4 objets distincts noté C_4^2 qui se lit (4 C 2) ou $\binom{4}{2}$. qui se lit « 2 au dessus de 4 »

On remarque dans cette préface que le nombre de façons de choix = 6

C'est-à-dire : $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$, $\boxed{C_n^r = \frac{A_n^r}{r!}}$

Exemple

1. Calculez:

a) C_7^5 b) C_7^2 (Que remarquez-vous)?

Solution

a) $C_7^5 = \frac{A_7^5}{5!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1} = 21$

b) $C_7^2 = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$

On remarque que : $C_7^5 = C_7^2$ $(5 + 2 = 7)$

Corolaires importantes : $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $C_n^r = C_n^{n-r}$

Essayez de résoudre

(1) Sans utilisez une calculatrice calculez C_{12}^{9} et C_{17}^{14}

Activité

Utiliser d'une calculatrice

On peut utiliser les touches SHIFT ÷ pour écrire le symbole des combinaisons (C_n^r)

1) Utilisez la calculatrice pour trouver la valeur de $C_5^4 + C_7^2$

Solution

Appuyez successivement sur les touches

5 SHIFT ÷ 4 + 7 SHIFT ÷ 2 =

Réponse = 26

Exemple

(2) Si : $C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-47}$ trouvez la valeur de r.

Solution

$\because C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-47}$

Soit : $r = 2r - 47$ d'où : $r = 47$ refusée car elle est supérieur à la valeur de n.

Ou : $r + 2r - 47 = 28$ $\therefore 3r = 75$ $\therefore r = 25$

Essayez de résoudre

(2) Si $C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-5}$, trouvez la valeur de r.

Exemple

(3) De combien de façons peut-on choisir un équipe de 4 personnes parmi un ensemble de 9 personnes?

Solution

Puisque le choix est indépendant de l'ordre, alors chacun de ces choix est une combinaison.

Le nombre de façons $= C_9^4 = \dfrac{A_9^4}{4!} = 126$

Essayez de résoudre

(3) Dans un concours de jeu d'échecs, 7 personnes y ont participé. Trouvez le nombre de matches sachant qu'un concourant joue un seul matche?

Exemple principe du dénombrement

(4) De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 2 hommes et une femme parmi 7 hommes et 5 femmes?

Solution

Le nombre de façons de choisir deux hommes de 7 hommes = $C_7^2 = 21$

Le nombre de façons de choisir une femme de 5 femmes = $C_5^1 = 5$

Appliquant le principe du dénombrement, le nombre de façons = $21 \times 5 = 105$ façons

Pensé critique : De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 4 hommes ou 3 femmes parmi 6 hommes et 5 femmes ?

Essayez de résoudre

(4) Une classe comprend 10 garçons et 8 filles De combien de façons peut-on former une comité pentagonal d'étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

Activité Triangle de Pascal

Blaise Pascale (1623 - 1662) :

Il est un philosophe, mathématicien et physicien français, il a introduit la théorie de probabilités.

Aussi, il a crée un système ternaire des nombres qui est appelé le triangle de Pascale, il a également inventé une calculette pour effectuer les opérations de l'addition et de la soustraction.

Observez le triangle de Pascale ci-contre, puis répondez aux questions suivantes :

1- Que remarquez-vous de la manière d'écriture des nombres dans ce triangle ?

2- Existe-t-il une relation entre les éléments d'une ligne et les éléments de la ligne suivante?

3- Y-t-il une symétrie entre les nombres situant sur les cotés latéraux du triangle ?

D'après l'activité précédent, on remarque que :

Dans la formule C_n^r , si n est le nombre de lignes et r le nombre de colonne

- **La première ligne :** représente (n = 1) d'éléments parmi r = 0 ou r = 1

  D'où: $C_1^0 = 1$, $C_1^1 = 1$

- **La deuxième ligne :** représente (n = 2) d'éléments parmi r = 0 ou r = 1 ou r = 2

  D'où: $C_1^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$ ... etc.

On remarque également que :

- Chaque ligne commence par 1 car $C_n^0 = 1$, et se termine par 1 car $C_n^n = 1$
- Chaque nombre dans une ligne, sauf la première, est égal à la somme de deux nombres qui lui sont au dessus.
- **Dans la troisième ligne on trouve :** 1 , 1 + 2 , 2 + 1, 1
- **Dans la troisième ligne on trouve :** 1 , 1 + 3 , 3 + 3 , 3 + 1 , 1 … etc.
- Si n est pair, il y a une symétrie par rapport au nombre médian
- Si n est impair, il y a une symétrie par rapport aux deux nombres médians
- Cela s'accommode avec la relation $C_n^r = C_n^{n-r}$

Application sur l'activité :

Démontrez que : $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$

Exercices (2 - 3)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Le nombre de choix de 3 personnes parmi 5 personnes est égal à ……………

a) 15 b) 10 c) 20 d) 35

2) Le nombre de façons de répondre seulement à 4 questions parmi 6 est égal à ……………

a) 30 b) 15 c) 24 d) 10

3) Le nombre de façons de choisir une boule rouge et une autre blanche parmi 5 boules rouges et 3 boules blanches est égal à ……………

a) 15 b) 8 c) 60 d) 2

Répondez aux questions suivantes :

4) Calculez C_6^3 , C_9^1 , C_{12}^{11} et C_{100}^0

5) Si $C_n^3 = 120$, trouvez la valeur de C_n^{n-9}

6) Si $C_{n+1}^4 = \frac{5}{2} C_n^3$, trouvez la valeur de n.

7) Si $C_n^3 = 30\frac{1}{3}$ n, trouvez la valeur de n.

8) De combien de manières une comité pentagonal peuvent prendre une discision majoritaire ?

9 Une classe comprend 10 garçons et 8 filles De combien de façons peut-on former un comité de cinq étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

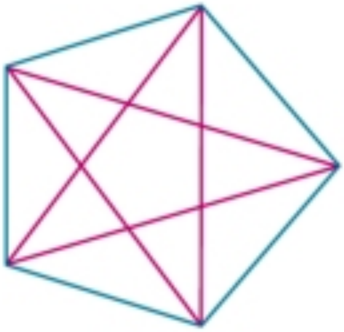
10 Ecrivez chacun de ce qui suit en fonction des arrangements :

a C_8^3 **b** C_{19}^2 **c** C_5^0 **d** C_x^{x-y}

11 Ecrivez chacun de ce qui suit en utilisant la formule ${}^nC_n$

a $\frac{A_8^2}{2!}$ **b** $\frac{A_9^3}{3!}$ **c** $\frac{A_{10}^4}{4!}$ **d** $\frac{A_8^0}{0!}$

Activité



Vous savez que la diagonale d'un polygone est le segment de droite joignant deux sommets non consécutifs et que :

Le nombre de diagonales d'un triangle = 0

Le nombre de diagonales d'un quadrilatère = 2

Le nombre de diagonales d'un pentagone = 5

Pouvez-vous trouvez le nombre de diagonales :

1) D'un hexagone, d'un octogone, d'un décagone.

2) Pouvez-vous trouver une formule en utilisant les combinaisons pour déterminer le nombre des diagonales d'un polygone ? Cherchez avec votre professeur à l'aide de WEB.

Résumé de l'unité

Principe fondamental du dénombrement : Soient m le nombre de façons d'effectuer un travail quelconque, n le nombre de façons d'effectuer un seconde travail, alors le nombre de façons d'effectuer ces travaux simultanément = m × n.

Arrangements : Soit X un ensemble de n éléments, alors chaque ordre de quelques ou tous les éléments de x est un arrangement.

Le nombre d'ARRANGEMENTS de n objets distincts pris r à r chaque fois est noté par A_n^r où:

$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ Par convention $A_n^0 = 1$

Théorème : La factorielle d'un nombre entier positif n s'écrit sous la forme n! il est égal au produit de tous les nombres entiers positifs inferieurs ou égale à $n! = n(n-1)(n-2)$ $\dots\dots\dots\dots \times 3 \times 2 \times 1$

Combinaisons : Soit X un ensemble de cordinal n. Le choix de r éléments (où $0 \leqslant r \leqslant n$) parmi les élément de X. Sans prendre l'ordre des éléments en comptte, est appelé un combinaisons.

- Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts noté C_n^r où $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$ **et** $n \in \mathbb{Z}^+$

Exercices généraux

Complétez ce qui suit :

1. Le nombre de façons de former un nombre de deux chiffres distincts parmi les nombres : 1, 2, 3, 4 est égal à ....

2. Si on vous a demandé de codé un coffre en utilisant 3 trois chiffres différents de zéro, alors le nombre de façons est égal à ....

3. Si $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^n$, alors n = ...

4. Si n! = 1! alors n = ...

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

5. Un homme voulait choisir une voiture parmi les modèles a ; b ; c et les couleurs : Blanche ; Rouge ; Argentée ; Noir . De combien de manières peut-il choisir une voiture ?

   a) 7 b) 12 c) 14 d) 24

6. Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1 ; 3 ; 6 ; 7?

   a) 9 b) 12 c) 24 d) 64

7. Soient $X = \{x : x \in \mathbb{N} ; 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ et $Y = \{(a , b) : a , b \in x \text{ et } a \neq b\}$. Quel le nombre d'éléments de Y ?

   a) 7 b) 10 c) 20 d) 25

8. $C_{12}^4 + C_{12}^3$ égale à

   a) 715 b) 710 c) 716 d) 720

9. Si $A_n^r = 336$ et $C_n^r = 56$ alors n et r sont

   a) (3 ; 2) b) (8 ; 3) c) (7 ; 4) d) (7 ; 3)

10. Une personne a 8 amis ; alors nombre de manières d'invité un ami ou plus pour diner est

    a) 250 b) 200 c) 255 d) 256

11. Si $C_n^{10} = {}^{n}C_n^{14}$,alors C_{25}^n égale à

    a) 24 b) 25 c) 1 d) 49

12. Calculez :

    a) C_5^5 b) $6!$ c) A_{23}^1

    d) C_{50}^{49} e) $\dfrac{13!}{14!}$ f) A_4^4

13 Si $C^{3}_{2n-1} = 84$? trouvez la valeur de $(n - 5)!$

14 Si $A^{r+1}_{8} = 336$; trouvez la valeur de C^{4}_{2r}

15 Soient $A^{3}_{n-m} = 210$ et $C^{4}_{n+m} = 715$, trouvez la valeur de n et celle de m

16 De combien de façons peut-on choisir sept étudiants parmi 10 pour faire un voyage touristique?

17 On a choisit trois étudiants parmi n étudiants pour assister à un colloque. Si le nombre de façons de choix était 10, trouvez n

18 De combien de façons peut-on éluer une comité formé d'un homme et de deux femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

19 Parmi 4 professeur; on veut choisir un professeur pour former les élèves à passer l'olymbiade puis un autre pour préparer les examens. De Combien de façons peut-on pour faire ce choix ?

20 Le nombre des équipes participants au tounoi de football est 12. Si chacque équipe joue deux matches avec chacun des autres équipes. Quel est le nombre de matches de ce tournoi ?

21 Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42$ b $12 \times n! = (n+2)!$ c $(n-4)! = 120$

d $(n-5)! = 1$ e $C^{3}_{n} = 84$ f $C^{r}_{12} = C^{2r+3}_{12}$

Épreuve cumulative

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1 Le nombre de façons de former un nombre premier qui se compose de trois chiffres parmi les chiffres 3 ; 4 ; 5 est ....

a 6 b 3 c 1 d 0

2 Le nombre de façons de former le nombre 5476 avec les chiffres 4 ; 5 ; 6 ; 7 is ....

a 24 b 16 c 1 d zero

3 Le nombre de façons de former un nombre de trois chiffres parmi 5 chiffres excepte 0 est ....

a $5 \times 4 \times 3$ b $5 + 4 + 3$ c $5 \times 5 \times 5$ d $3 \times 2 \times 1$

4 Si on utilise les lettres du mot « Vous » pour écrire un mot de trois lettres différentes, alors le nombre des mots obtenus égale à

a 3 b 6 c 9 d 1

5 $A^{6}_{9} =$ ....

a $9 \times 8 \times 7$ b $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ c $9!$ d $6!$

6 Calculez :

a $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$

b $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$

7 Calculez : $A_8^3 + A_8^2 + A_8^1$

8 Combien de triangles peut-on former avec 5 points coplanaires qui ne sont pas alignées trois à trois ?

9 Combien de nombres formés de trois chiffres distincts peut-on former parmi les chiffres $\{1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$?

10 **Trouvez la valeur de chacun de ce que suit :**

a $\frac{99!}{100!}$

b $0! + 1! + 2! + 3!$

c $\frac{19!}{20!}$

d $5! - 4!$

e $\frac{4!}{0!}$

11 Soient $X = \{ -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ et $Z = \{a , b\}: a \neq b , a \in x , b \in X \}$, Quel le nombre d'éléments de Z ?

12 **Dans chacun des cas suivants, trouvez la valeur de n :**

a $n! = 720$

b $n (2n - 1)! = 60$

c $C_n^{n-2} = 28$

d $A_{n+2}^4 = 56 \times A_n^2$

e $\frac{1!}{n!} = \frac{2}{(n+1)!}$

f $A_m^n = 24 C_m^n$

Vous pouvez servir du tableau suivant dans le cas d'échec de la réponse :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Voir	Principe de dénombrement	Principe de dénombrement	Principe de dénombrement	Principe de dénombrement	Arrangements	combinaisons	Arrangements	combinaisons	Principe de dénombrement	Factorielle	combinaisons	Arrangements/ combinaisons

Unité 3

Dérivation et Intégration

Introduction de l'unité

Sans doute, le calcul dSSiérentiel et intégral est considéré comme une nouvelle science utilisée dans plusieurs branches de connaissance et divers sciences tel que : la géométrie, la physique, la médecine, l'économie et la géographie. Le calcul différentiel est basé sur l'étude des différentiel et variations à travers des calculs y compris les moyennes et les taux de variations. On remarque que la comparaison de la variation avec le taux de variation comme la variation de la température, des prix, de la vitesse, de la production ainsi que l'étude de comportement des fonctions comme les fonctions des coûts et des bénéfices dans l'économie, pour maximiser les bénéfices ou l'étude de l'effet de prendre un médicament précis afin de diminuer le délai du traitement ou l'étude des schémas des tremblements de terre dans les constructions des immeubles et le calcul des taux de variation et autres.

Mais le calcul intégral est basé sur la recherche de la quantité en fonction de la connaissance de son taux de variation. Il est utilisé dans le calcul de l'aire au dessous de la courbe et l'intensité du travail fourni par l'effet d'une force variable. Le calcul dSSiérentiel et intégral comprend le calcul des opérations avec des quantités trop petites contrairement à l'Algèbre.

Finalement, l'étude de cette matière nous aidera à résoudre la majorité des problèmes qui se chevauchent avec les sciences précises sur lesquelles est basée l'évolution scientSiique et civile que nous souhaitons pour notre pays

Compétence attendu de l'unité

A l'issue de l'étude de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Reconnaître la notion fonction de La moyenne de variation et le taux de variation
- Déduire la première dérivée d'une fonction.
- Reconnaître l'interprétation géométrique de la première dérivée (La pente de la tangente).
- Déterminer La dérivée de, fonctions usuelles.
  - la fonction constante .
  - la fonction f: $f(x) = x^n$
  - la fonction f : $f(x) = x$
  - la fonction f: $f(x) = a\,x^n$
  - la somme et la différence de deux fonctions
  - le produit de deux fonctions.
  - fonction composée
  - le quotient de deux fonctions .
  - fonction composée et $y = (f(x))^n$
- Utiliser la dérivée dans des applications géométriques comme trouver l'équation de la tangente de la courbe en un point qui lui appartient
- Reconnaître la notion intégral – La dérivée réciproque.
- Reconnaître la notion intégral – La dérivée réciproque:
  - $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \,, n \neq -1$
  - $\int a f(x) \, dx = a \int f(x) dx$, dx ou a constante
  - $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx \int f(x) \pm \int g(x) \, dx$
  - $\int (a x + b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} (a x + b)^{n+1} + c, n \neq -1$

Vocabulaire de base

- Variation
- fonction de variation moyenne
- fonction du taux de variation
- Dérivation
- Une fonction dérivable
- première dérivée
- produit
- division
- mon-dérivable
- Integration

Leçons de l'unité

Lesson (3 - 1): Taux de variation.

Lesson (3 - 2): Dérivation.

Lesson (3 - 3): Dérivee des fonctions usuelles.

Lesson (3 - 4): Intégration

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique - ordinateur

Organigramme de l'unité

Unité 3

3 - 1 Taux de variation

Allez apprendre

- Fonction de variation.
- Fonction du taux de variation.
- Nombre dérivé

Vocabulaires de base

- Fonction de variation.
- Fonction du taux de variation.
- Nombre dérivé

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique

Réfléchisse et discutez

Pourquoi on laisse des espaces entre les rails ou des fragments entre les parties des ponts métalliques ?

Si la température augmente de 30° à 42° dans un délai du temps ou diminue de 48° à 22° dans un autre délai du temps, calculez la variation des températures dans chaque délai.............Que remarquez-vous ?

Si la longueur de l'un des rails est L mètres et sa température x se varie de x_1 à x_2 alors une variation s'est passée au température, on a donc:

La variation de $x =$ la valeur de x á la fin de la variation - la valeur de x au début de la variation Est-ce que la longueur du rail se varie suivant la variation de sa température ?

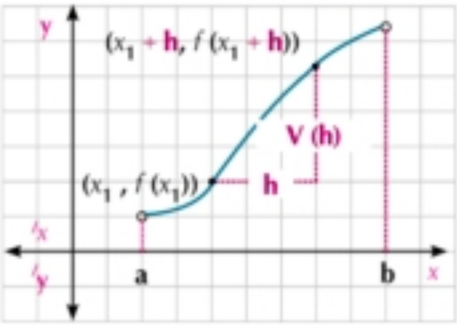
A apprendre **fonction de variation**

Si $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$ alors une variation de valeur de x : de x_1 à x_2 sur l'ensemble de définition de f implique à une variation de valeur de y : de $f(x_1)$ á $f(x_2)$

d'où la variation de $x = \Delta x$ (qui se lit delta x) $= x_2 - x_1$,

et la variation de $y = \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

Soit $(x_1 , f(x_1))$ un point de la courbe de la fonction f, alors pour toute variation de son abscisse de x de x_1 à $x_2 = x_1 + h$ où $x_1 + h \in]a , b[$, $h \neq 0$ correspond á une variation de son ordonnée qui est déterminée par la relation:



$v(h) = f(x_1 + h) - f(x_1)$. La fonction v est appelée fonction de variation de f en $x = x_1$

Remarque :

Les deux symboles Δx et h représentent la variation de x

Exemple

1) Si $f(x) = 3x^2 + x - 2$ et x varie de 2 à 2 + h, trouvez la fonction de variation v puis calculez la variation de f pour :

a) $h = 0{,}3$ b) $h = -0{,}1$

Solution

$\because f(x) = 3x^2 + x - 2$, x varie de 2 à $2 + h$

$\therefore x_1 = 2$, $f(2) = 3 \times 4 + 2 - 2 = 12$, et :

$$f(2 + h) = 3(2 + h)^2 + (2 + h) - 2 = 12 + 12h + 3h^2 + 2 + h - 2$$
$$= 3h^2 + 13h + 12$$

$$v(h) = f(2 + h) - f(2)$$
$$= (3h^2 + 13h + 12) - 12 = 3h^2 + 13h$$

a) Pour $h = 0{,}3$
$v(0{,}3) = 3(0{,}3)^2 + 13 \times 0{,}3$
$= 4{,}17$

b) Pour $h = -0{,}1$
$v(-0{,}1) = 3(-0{,}1)^2 + 13(-0{,}1)$
$= -1{,}27$

Essayez de résoudre

1) Soit $f(x) = x^2 - x + 1$. Trouvez la fonction de variation v en $x = 3$ puis calculez :

a) $v(0{,}2)$ b) $v(-0{,}3)$

A apprendre **fonction de taux de variation**

En divisant la fonction de variation v par h où $h \neq 0$ on obtient une nouvelle fonction T qui est appelée fonction de taux de variation de f en $x = x_1$ telle que :

$$T(h) = \frac{v(h)}{h} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemple

2) Si $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x^2 + 1$ Trouvez :

a) la fonction Le taux de variation en $x = 2$ puis calculez $T(0{,}3)$

b) Le taux de variation lorsque x varie de 3 à 4

Solution

a) $f(x_1) = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$, $f(x_1 + h) = f(2 + h)$

$\therefore\ f(2+h) = (2+h)^2 + 1 = h^2 + 4h + 5$

$\because\ T(h) = \dfrac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$

$\therefore\ T(h) = \dfrac{h^2 + 4h + 5 - 5}{h} = h + 4$ et $T(0{,}3) = 4{,}3$

b Lorsque x varie de 3 à 4 alors $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

et $f(3) = 9 + 1 = 10$, $f(4) = 16 + 1 = 17$

Taux de variation $= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{17 - 10}{4 - 3} = 7$

Essayez de résoudre

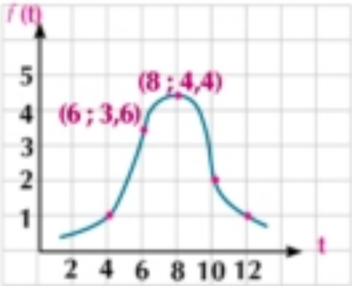
(2) Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$; trouvez :

a Fonction de taux de variation lorsque $x = 2$ puis trouvez $T(0{,}2)$

b Taux de variation lorsque x varie de 4,5 à 3

Exemple

(3) La figure ci-contre montre la courbe de $s = f(t)$ où s représente les ventes totales dans un marché des ventes des ordinateurs en millions livres égyptiennes, t représente le temps en mois. A l'aide de la figure, trouvez la moyenne de la variation des ventes totales lorsque t varie de :



a 4 à 8 **b** 8 à 10

Solution

a De la figure : $f(8) = 4{,}4$; $f(4) = 1$

Taux de variation de $s = \dfrac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \dfrac{4{,}4 - 1}{4} = 0{,}85$ millions livres / mois

C'est à dire la moyenne des ventes totales augmente de 0,85 millions livres par mois pendant cette période.

b De la figure : $f(10) = 2$; $f(8) = 4{,}4$

Taux de variation de $s = \dfrac{f(10) - f(8)}{10 - 8} = \dfrac{2 - 4{,}4}{2} = -1{,}2$ millions livres / mois

C'est à dire la moyenne des ventes totales diminue de 0,85 millions livres par mois pendant cette période.

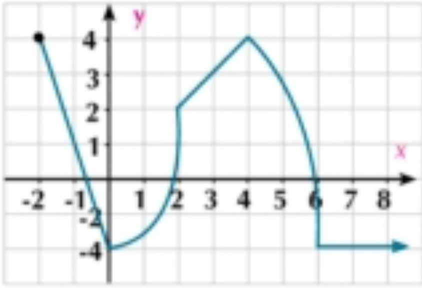
Essayez de résoudre

(3) En utilisant la figure de l'exemple 3, trouvez le taux de variation des ventes totales lorsque le temps varie de:

a 4 à 6 **b** 6 à 10 **c** 4 à 12

Réflexion critique :

La figure ci-contre montre la courbe de la fonction f où $y = f(x)$. Déterminez les intervalles dans lesquels le taux de variation de f est constante. Expliquez votre réponse.



A apprendre

Nombre dérivé

Soient $f :]\,a\,;\,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, $x_1 \in]\,a\,;\,b\,[$ et $(x_1 + h) \in]\,a, b\,[$:

Le nombre dérivé de f en $x = x_1$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} T(h)$ à condition que cette limite existe

Exemple

(4) Dans ce qui suit, trouvez le nombre dérivé de f en $x = x_1$ puis trouvez le nombre dérivé aux valeurs données de x

a $f(x) = 3x^2 + 2$ en $x = 2$ **b** $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ en $x = 3$

Solution

a $\because\ f(x) = 3x^2 + 2$ $\therefore$ en $x = x_1$ alors $f(x_1) = 3x^2_1 + 2,$

$$f(x_1 + h)^2 = 3\,(x_1 + h)^2 + 2 = 3x_1^2 + 6\,x_1\,h + 3h^2 + 2$$

Nombre dérivé de $f = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6\,x_1\,h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6x_1 + 3h) = 6x_1$$

Lorsque $x = 2$ $\therefore\ x_1 = 2$ et le nombre dérivé de $f = 6 \times 2 = 12$

b $\because f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ $\therefore$ en $x = x_1$ et :

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{2}{x_1 + h - 1} - \frac{2}{x_1 - 1}$$

$$= \frac{2x_1 - 2 - 2x_1 - 2h + 2}{(x_1 + h - 1)\,(x_1 + h)} = \frac{-\,2\,h}{(x_1 + h - 1)(x_1 - 1)}$$

Le nombre dérivé de $f = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{-\,2\,h}{(x_1 + h - 1)\,(x_1 - 1)} = \frac{-\,2}{(x_1 - 1)^2}$$

Lorsque $x = 3$ $\therefore x_1 = 3$ et le nombre dérivé $f = \dfrac{-\,2}{(3 - 1)^2} = -\dfrac{1}{2}$

Essayez de résoudre

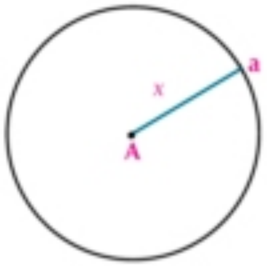
(4) Trouvez le taux de variation de f où $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ lorsque x varie de x_1 à $x_1 + h$ et en déduisez le nombre dérivé de f en $x = 5$

Exemple

5 **Applications quotidiennes :** On jette un caillou dans l'eau stagnante. Il forme une vague circulaire dont le rayon croit en conservant sa forme. Déterminez la limite de taux de variation de son aire par rapport à la longueur de son rayon lorsque le rayon est égal á 3,5 cm ($\pi = \frac{22}{7}$)

Solution

Modalisation:



Soit la longueur du rayon de la vague x cm

$\therefore$ Aire de la vague $A = \pi\ x^2$ cm^2

$\therefore\ A = f(x) = \pi\ x^2$

Lorsque x varie de x_1 à $x_1 + h$

Donc la limite de taux de variation de A $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\pi (x_1 + h)^2 - \pi x_1^2}{h}$$

$$= \pi \lim_{h \to 0} \frac{(x_1 + h)^2 - x_1^2}{h} = 2\pi\ x_1$$

Lorsque $x = x_1 = 3{,}5$ $\quad\therefore$ la limite de taux de variation de $A = 2 \times \frac{22}{7} \times 3{,}5 = 22$

Essayez de résoudre

5 Une plaque métallique a la forme d'un carré se dilate régulièrement en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire lorsque sa longueur varie de 3 à 3,4 puis calculez la limite du taux de variation de son aire si la longueur de son cote est égale à 5 cm.

Exercices 3 - 1

Choisissez la bonne réponse parmi les proposés

1 Si le taux de variation de $f = 2{,}4$ lorsque x varie de 3 à 3,2; alors la variation de f est égale à ....

a 0,32 **b** 0,48 **c** 3,6 **d** 7,2

2 Si le taux de variation de $f = 5$ lorsque x varie de 2 á 4 , $f(2) = 6$ alors $f(4)$ égale ....

a - 4 **b** 7 **c** 8 **d** 16

3 Le taux de variation du volume d'un cube lorsque son arête varie de 5 cm à 7 cm est égale á ....

a 125 **b** 343 **c** 218 **d** 109

4 Le taux de variation de f où $f(x) = x^2 + 3x + 5$ lorsque x varie de 1 à 3 est égale à ......

a 1 **b** 3 **c** 7 **d** 9

Répondez aux questions suivantes :

5) Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$; trouvez la variation de f lorsque

a) x varie de 2 à 2,1 b) $x = -2$, $h = 1$

6) Dans ce qui suit, trouvez le taux de variation de f en $x = x_1$ puis déduisez le nombre dérivé de f en x_1:

a) $f(x) = 2x^3$, $x_1 = 2$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_1 = 0$

7) **En lien avec les aires:** Une plaque métallique a la forme d'un carré. Elle se contracte, sous l'effet du froid en conservant sa forme. Calculez la limite de taux de variation de son aire par rapport à la longueur de son côté lorsque sa longueur est égale à 8cm.

8) **En lien avec les volumes:** Une sphère métallique se délatte sous l'effet de la chaleur en conservant sa forme. Calculez la limite de taux de variation de son volume par rapport à la longueur de son rayon lorsque la longueur de son rayon est égale à 7 cm.

9) **Décelez l'erreur :** Une plaque métallique a la forme d'un rectangle dont la longueur est égale au double de sa largeur. Elle se délatte sous l'effet de la température en conservant sa forme et le rapport entre ses dimensions. Calculez la limite de taux de variation de son aire par rapport à sa largeur lorsque sa largeur est égale à 10 cm .

Première solution

Soit la largeur x , $\therefore$ la largeur $2x$

Aire = longueur × largeur , $\therefore f(x) = 2x^2$

Limite de taux de variation = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h(2x_1 + h)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (4x_1 + 2h) = 4x_1$

en x_1 = 10 cm

Limite de taux de variation = 40

Deuxième solution

Soit la longueur x , $\therefore$ la largeur $\frac{1}{2}x$

Aire = longueur × largeur , $\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Limite de taux de variation = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(x_1 + \frac{1}{2}h)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (x_1 + \frac{1}{2}h) = x_1$

en x_1 = 10 cm

Limite de taux de variation = 10

10) **En lien avec l'agriculture:** Si la quantité y (mesurée en kg) produire par un arbre d'oranges dépende du nombre de kilogramme de x d'engrais selon la relation $y = 100 - \frac{42}{x+1}$
Calculez le taux de variation de y lorsque x varie de 1 à 2

3 - 2 Dérivation

Allez apprendre

- La première dérivée
- Interprétation géométrique de la premiere dérivée (pente de la tangente)

Vocabulaires de base

- La premi're dérivée
- Pente
- Tangente

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels graphisme

Réfléchisse et discuss

(1) La figure (1) montre la courbe de la fonction $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, $\overleftrightarrow{CD}$ coupe la courbe aux points $c(x_1, f(x_1))$, $d(x_1 + h, f(x_1 + h))$. Trouvez la pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD}$.

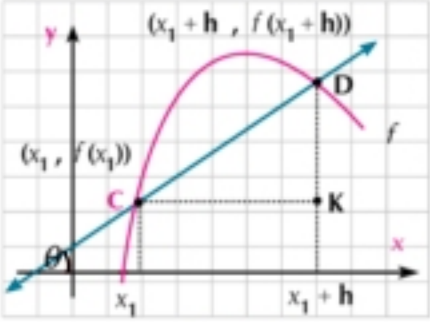


Figure (1)

(2) Si x varie de x_1 à $x_1 + h$ comparez le taux de variation de f et la pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD}$. La relation suivante est-elle vraie ? La pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD} = \tan\theta = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = T(h)$

(3) Si le point C $(x_1, f(x_1))$ est un point fixe de la courbe représentative de la fonction f. Le point D se déplace sur la courbe pour qu'il se rapproche du point C $\overleftrightarrow{CD}$ prend la position de $\overleftrightarrow{CN}$. Elle devient une tangente à la courbe en C. C'est-à-dire $h \longrightarrow 0$.
Trouvez la pente de la tangente à la courbe de f en C.

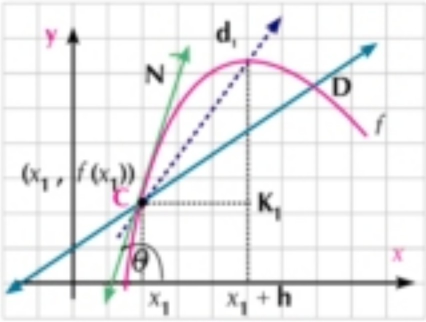


Figure (2)

Remarque :

La pente de la tangente en C $= \tan\theta = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

C'est-à-dire

La pente de la tangente de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est égale à la limite du taux de variation de f en $x = x_1$

Exemple

1. Trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = 3x^2 - 5$ au point A (2 ; 7) puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.

Solution

$\because f(2) = 3(2)^2 - 5 = 7$ $\therefore$ le point des coordonnées (2 ; 7) appartient à la courbe représentative de f

La pente de la tangente en $(x = 2)$ = nombre derivé de f en $(x = 2)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\therefore \text{ La pente de la tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 5 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (12 + 3h) = 12$$

et $\tan \theta = 12$ $\therefore \theta = \tan^{-1}(12) \simeq 85° \, 14'$

Essayez de résoudre

1. Trouver la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 - 4$ au point A (1 ; - 3)puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.

A apprendre *Première dérivée*

Pour toute valeur de x de l'ensemble de définition de la fonction f, correspond une seule valeur à la limite du taux de variation de f. Donc le nombre dérivé est aussi une fonction de la variable x qu'on l'appelle la dérivée de la fonction f.

Définition

Si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, x \in]a, b[$ alors la dérivée f' :

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ à condition que la limite existe.

Symboles de la dérivée :

Si $y = f(x)$on note la première dérivée par

f' ou y' qui se lit f prime ou y prime

$\frac{dy}{dx}$ qui se lit dy sur dx ou la dérivée de y par rapport à x

Remarquez que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est $f'(x_1)$

Exemple

(2) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^2 - x + 1$ puis trouvez la pente de la tangente au point de coordonnées $(-2 ; 7)$

Solution

$\because f(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore f(x + h) = (x + h)^2 - (x + h) + 1 \quad = x^2 + 2x\,h + h^2 - x - h + 1$,

$f(x + h) - f(x) = (2x + h - 1)\,h$

$\because f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\qquad \therefore f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2x + h - 1)\,h}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h - 1)$ $f'(x) = 2x - 1$

$\because f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$

$\therefore$ Le point de coordonnées $(-2 ; 7)$ est situé sur la courbe de f

La pente de la tangente au point $(-2 ; 7) = f'(-2) = 2(-2) - 1 = -5$

Essayez de résoudre

(2) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$, puis trouvez la pente de la tangente au point $(-1 ; 6)$.

A apprendre *dérivabilité d'une fonction*

On dit que la fonction f est dérivable en $x = a$ (a appartient à l'ensemble de définition de f) si et seulement si $f'(a)$ existe où $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple

(3) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = \sqrt{x - 1}$ puis trouvez $f'(5)$

Solution

$\because f(x) = \sqrt{x - 1}$ $\qquad \therefore$ L'ensemble de définition de $f = [1 ; \infty[$

$\therefore f(x + h) = \sqrt{x + h - 1}$

$f(x + h) - f(x) = \sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1}}{h}$ en multipliant par le conjugué du numérateur

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, \; x > 1$$

Remarquez que la fonction n'est pas dérivable en $x = 1$ car la limite n'existe pas

$$f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

Essayez de résoudre

3) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = \sqrt{x+5}$

Exercices 3 - 2

1) Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée de la fonction :

a) $f(x) = 5x + 2$

b) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = x^3 - 1$

d) $f(x) = x^2 + 2x$.

2) Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée de la fonction f puis déterminez les valeurs de x auxquelles la fonction n'est pas dérivable

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{3}{2x-5}$

d) $f(x) = \sqrt{x-4}$

3) Trouvez la première dérivée de la fonction f où $f(x) = x^3 + 4$ puis trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f au point de coordonnées $(-1, 3)$ qui lui appartient.

4) Trouvez la première dérivée de la fonction f où $f(x) = ax + b$ au point (x, y) où a et b sont deux nombres réels, $b \in R$.

5) Trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = 3x^2 - 8$ au point A $(2 ; 4)$ puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses.

6) Si $f(x) = ax^2 + b$ où a et b sont constant, trouvez :

a) la première dérivée de la fonction f au point $(x ; y)$.

b) les valeurs de a et b si la pente de la tangente à la courbe de la fonction f au point $(2 ; -3)$ qui lui appartient est égale à 12.

Unité 3

3 - 3 Derivée des fonctions usuelles

Allez apprendre

- Dérivée d'une fonction constante
- Dérivée de $f(x) = x^n$
- Dérivée de $f(x) = x$
- Dérivée de $f(x) = ax^n$
- Dérivée de la somme et la différence de deux fonction
- Dérivée du produit de deux fonctions
- Dérivée du quotient de deux fonction
- Dérivée d'une fonction composée
- Dérivée de $y = (f(x))^n$.

Vocabulaires de base

- La première dérivée
- Produit
- Quotient
- Règle de la dérivée d'une fonction composée.

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels graphisme

Découvrez

1 - En utilisant la définition, trouvez la première dérivée de ce qui suit:

$f(x) = x^3$ $\qquad f(x) = x^5$

2 - Pouvez-vous découvrir la dérivée de $f(x) = x^7$ sans utiliser la définition?

3 - Pouvez-vous déduire une règle pour trouver la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^n$?

A apprendre

Dérivé d'une fonction

1 - Dérivée d'une fonction constante

Si $y = c$ **où:** $c \in \mathbb{R}$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = 0$

Remarque que:

$y = f(x) = c\,, \quad f(x + h) = c$

$\because \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \; (h \neq 0)$

2 - Dérivée d'une fonction $f(x) = x^n$

Si $y = x^n$ **où:** $n \in \mathbb{R}$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$

Si $y = x$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = 1$

Si $y = a\,x^n$ **où:** $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{R}$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = a\,n\,x^{n-1}$

Example

1 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = -3$ **b** $y = x^4$ **c** $y = 5x$

d $y = \frac{3}{x^2}$ **e** $y = \sqrt{x^3}$

Solution

a $\because y = -3 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$ **b** $\because y = x^4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4\,x^3$

c $\because\ y = 5x$ $\qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = 5$

d $\because y = \dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ $\qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = -6x^{-3}$

e $\because y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $\qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ où $x \geqslant 0$

Essayez de résoudre

1 Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = x^7$ b $y = x^{10}$ c $y = x^{\frac{3}{2}}$ d $y = x^{-4}$

e $y = x^{-\frac{5}{3}}$ f $y = \dfrac{1}{x^5}$ g $y = \sqrt{x^9}$ h $y = \sqrt[3]{x^7}$

i $y = 3x^6$ j $y = -2x^{-5}$ k $y = \pi x^{-4}$ l $y = -4\sqrt[3]{x}$

Dérivée de la somme et la différence de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x , alors $f \pm h$ est aussi derivable par rapport à x , $\dfrac{d}{dx}(f \pm h) = \dfrac{df}{dx} \pm \dfrac{dh}{dx}$ et en générale :

$$\frac{d}{dx}(f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm \ldots \pm f_n)(x) = f_1'(x) \pm f'_2(x) \pm f'_3(x) \pm \ldots \pm f'_n(x)$$

Example

2 Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = 2x^6 + x^{-9}$ b $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

Solution

a $\because\ y = 2x^6 + x^{-9}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 12x^5 - 9x^{-10}$

b $\because\ y = \dfrac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

$= 1 - 2\sqrt{x} \quad = 1 - 2x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 0 - 2 \times \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -x^{-\frac{1}{2}}$

Essayez de résoudre

2 Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = 3x^2 + 5$ b $y = 2x^3 - 4x + 7$ c $y = 3x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$

d $y = 7x^4 - \dfrac{1}{4x}$ e $y = 3x^8 - 2x^{-5} + 8$ f $y = \dfrac{5}{x} + x\sqrt{x} + -4$

Dérivée du produit de deux fonctions:

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x alors la fonction (f × h) est aussi dérivable par rapport à x et $\frac{d}{dx}(f \times h) = f \, \frac{dh}{dx} + h \, . \, \frac{df}{dx}$

Example

(3) Si $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ trouvez $\frac{dy}{dx}$ puis trouvez $x = -1$

Solution

$\because y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) \times 3x^2 + (x^3 + 3) \times 2x$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

en $x = -1$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 5(-1)^4 + 3(-1)^2 + 6(-1) = 2$

Essayez de résoudre

(3) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = (2x + 3)(3x - 1)$

b $y = (2x + 5)^2$

c $y = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 4)$

d $y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

e $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$ puis $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$

Dérivée du quotient de deux fonctions:

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x et $h(x) \neq 0$ alors la fonction $(\frac{f}{h})$ est aussi dérivable par rapport à x et $\frac{d}{dx}(\frac{f}{h}) = \frac{h \frac{df}{dx} - f \frac{dh}{dx}}{h^2}$

C'est-à-dire $(\frac{f}{h})' = \frac{hf' - fh'}{h^2}$

Example

(4) Si $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$ trouvez $\frac{dy}{dx}$

Solution

$\because y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 + 1) \times 2x - (x^2 - 1) \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

Essayez de résoudre

4 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = \frac{2x-1}{x+1}$ b $y = \frac{2x+5}{1-4x}$ c $y = \frac{2x^2-1}{x+5}$

Dérivée d'une fonction composée

Définition

Si $y = f(z)$ est une fonction dérivable par rapport à z et $z = h(x)$ est dérivable par rapport à x alors $y = f(h(x))$ est dérivable par rapport à x et : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

Remarquez qu' y est une fonction composée en x

Cette régle est appellée (régle de la dérivée en chaîne)

Example

5 Si $y = (x^2 - 3x + 1)^5$ **trouvez** $\frac{dy}{dx}$

Solution

Soit $z = x^2 - 3x + 1$ $\therefore y = z^5$

y est dérivable par rapport à z (fonction polynôme en z) et $\frac{dy}{dz} = 5z^4$

est dérivable par rapport à x (fonction polynôme en x) et $\frac{dz}{dx} = 2x - 3$,

En appliquant la règle de la dérivée de la fonction d'une fonction composée

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 5z^2 \times (2x - 3)$,

En substituant de z $\therefore \frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \times (2x - 3)$

Essayez de résoudre

5 Si $y = (2x+3)^5$; **trouvez** $\frac{dy}{dx}$

Dérivée de la fonction $[f(x)]^n$

Si $y = [f(x)]^n$ où f est dérivable par rapport à x et n est un nombre naturel ,

alors: $\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$

Example

6. Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$ b) $y = (\frac{x-1}{x+1})^5$

Solution

a) $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 10(6x^3 + 3x + 1)^9 \times \frac{d}{dx}(6x^3 + 3x + 1) = 10(18x^2 + 3)(6x^3 + 3x + 1)^9$

$= 30(6x^2 + 1)(6x^3 + 3x + 1)^9$

b) $y = (\frac{x-1}{x+1})^5$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 5(\frac{x-1}{x+1})^4 \times \frac{(x+1)\times 1 - (x-1)\times 1}{(x+1)^2}$

$= 5(\frac{x-1}{x+1})^4 \times \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$

$= \frac{10}{(x+1)^2} \times (\frac{x-1}{x+1})^4 = \frac{10(x-1)^4}{(x+1)^6}$

Essayez de résoudre

6. Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$ a) $y = (2x^3 - 4x + 1)^9$ b) $y = (\frac{5x^2}{3x^2+2})^3$

Example

7. Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$

Solution

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 5 \times 1$

$= x^2 - 4x + 5$

Lorsque $f'(x) = 2$ $\therefore x^2 - 4x + 5 = 2$ $\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$

$\because (x-1)(x-3) = 0$ $\therefore x = 1$ ou $x = 3$

Essayez de résoudre

7. Dans ce qui suit, trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 7$:

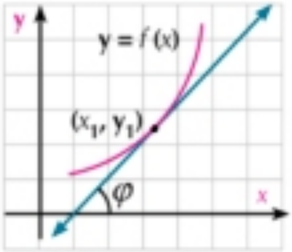
a) $f(x) = x^3 - 5x + 2$ b) $f(x) = (x-5)^7$

Pensé critique:

Si $y = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$; trouvez $\frac{dy}{dx}$

Application géométrique sur la dérivée

D'après l'interprétation géométrique de la première dérivée de la fonction f où $y = f(x)$ on a trouvé que la pente de la tangente m au point $(x_1; y_1)$ est égale à la première dérivée de la fonction en ce point .



C'est-à-dire $m = \frac{dy}{dx}$ au point $(x_1; y_1)$ et on peut l'écrire sous la forme $m=[\frac{dy}{dx}]_{(x_1;y_1)}$

et si la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses est φ alors $m = \tan\varphi = [\frac{dy}{dx}]_{(x_1;y_1)}$

Remarquez que:

1 Si m_1, m_2 sont les pentes de deux droites ℓ_1 et ℓ_2 :

$\ell_1 // \ell_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$ (condition de parallélisme)

, $\ell_1 \perp \ell_2$ si et seulement si $m_1\, m_2 = -1$ (condition de perpendicularité)

2 La pente de la tangente en un point est appelée la pente de la courbe en ce point et la perpendiculaire à la tangente de la courbe au point de contact est appelée la normale à la courbe en ce point .

$\therefore$ la pente de la normale au point $(x_1; y_1) = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1;y_1)}}$

Example

(8) Trouvez la pente de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = 2x^3 - 4x + 5$ au point de coordonnées (-2 ; -3) qui lui appartient.

Solution

$\because y = 2x^3 - 4x + 5$

$\therefore$ La pente de la tangente en un point quelconque $= \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 4$

Au point des coordonnées (-2 ; -3)

La pente de la tangente $= [\frac{dy}{dx}]_{(-2,-3)} = 6(-2)^2 - 4 = -20$

La pente de la perpendiculaire (la normale) $= \frac{-1}{\text{La pente de la tangente}} = \frac{-1}{20}$

Essayez de résoudre

(8) Dans ce qui suit, trouvez la pente de la tangente et de la normale aux courbes suivantes aux points donnés :

a $y = x - 7$ en $x = -1$

b $y = x + \frac{1}{x}$ en $x = 4$

c $y = \frac{5}{x-3}$ en $x = 2$

d $y = (x^3 - 2)(x + 1)$ en $x = 1$

Example

9) Trouvez les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = x^2 - 6x + 5$ auxquels :

a) la pente de la tangente = 2 b) la tangente // l'axe des abscisses

c) la tangente $\perp$ la droite d'équation $4y + x - 1 = 0$

Solution

$\because y = x^2 - 6x + 5$

$\therefore$ La pente de la tangente en un point quelconque $= \frac{dy}{dx} = 2x - 6$

a) $\because \frac{dy}{dx} = 2 = 2x - 6 \quad \therefore 2x = 8 \quad$ i.e. $\quad x = 4$

$\therefore y = (4)^2 - 6(4) + 5 = -3$

La pente de la tangente $= 2$ au point de coordonnées $(4 ; -3)$.

b) $\because$ La tangente // l'axe des abscisses $\therefore$ La pente de la tangente = la pente de l'axe des abscisses = 0

$\frac{dy}{dx} = 2x - 6 = 0 \qquad \therefore x = 3 , y = 9 - 18 + 5 = -4$

la tangente // l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3 ; -4)$

c) la tangente $\perp$ la droite d'équation: $4y + x - 1 = 0$ dont la pente est $\frac{-1}{4}$

La pente de la tangente $= -1 : \frac{-1}{4} = 4$

$2x - 6 = 4 \qquad \therefore x = 5, y = 0$

$\therefore$ la tangente $\perp$ la droite d'équation $4y + x - 1 = 0$ au point $(5, 0)$

Rappel

La pente de la droite $ax + by + c = 0$ est $\frac{-a}{b}$

Essayez de résoudre

9) Trouvez les points de la courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2$ auxquels la tangente:

a) l'axe des abscisses b) $\perp$ la droite d'équation : $x + 9y + 3 = 0$

A apprendre — Équation de la tangente à la courbe

Si (x_1, y_1) est un point de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$, m est la pente de la tangente en ce point, alors. Équation de la tangente à la courbe au point de coordonnées $(x_1; y_1)$ est

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Remarque : Equation de la normale à la courbe au point de coordonnées $(x_1 ; y_1)$ est :

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

Example

10 Trouvez l'équation de la tangente et de la perpendiculaire (la normale) à la courbe d'équation $y = 2x^2 - 5x + 1$ aux points qui lui appartient et d'abscisses = 2

Solution

$\because$ Le point appartient à la courbe $\therefore$ il vérifie son équation

En $x = 2$, $y = 2(2)^2 - 5(2) + 1 = -1$ $\therefore$ le point est (2; -1)

$\because$ $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$ $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 4 \times 2 - 5 = 3$

Au point des coordonnées (2; -1) la pente de la tangente = 3 et la pente de la perpendiculaire (la normale) = $\frac{-1}{3}$

$\therefore$ Equation de la tangente est , Equation de la normale est

$y - (-1) = 3(x - 2)$	$y - (-1) = \frac{-1}{3}(x - 2)$
$y + 1 = 3x - 6$	$3y + 3 = -x + 2$
$y - 3x + 7 = 0$	$3y + x + 1 = 0$

Essayez de résoudre

10 Dans ce qui suit, trouvez l'équation de la tangente et de la normale aux courbes suivantes aux points qui lui appartiennent :

a $y = x^3 + x^2 - 1$ en $x = -2$ **b** $y = (3x - 5)^7$ en $x = 2$

Example

11 Si la droite $y = ax^3 + bx^2$ est tangente à la courbe d'équation $y = 8x + 5$ au point de coordonnées (-1, -3) trouvez a et b.

Solution

$\because$ Le point de coordonnées (-1 ; -3) appartient à la courbe d'équation $y = a x^3 + b x^2$

$\therefore$ $-3 = a(-1)^3 + b(-1)^2$ d'où $a - b = 3$ (1)

La pente de la tangente en un point quelconque = $\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx$

$\because$ La droite d'équation $y = 8x + 5$ est tangente à la courbe au point (-1 ; -3)

$\therefore$ $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(-1\,,\,-3)}$ = la pente de la droite = 8

$\therefore$ $3a(-1)^2 + 2b(-1) = 8$ d'où $3a - 2b = 8$ (2)

D'après (1) et (2), **on trouve que:** $a = 2$, $b = -1$

Essayez de résoudre

11 Si la pente de la tangente de la courbe d'équation $y = x^2 + ax + b$ au point des coordonnées (1; 3) qui lui appartient est égale à 5, trouvez a et b

Exercices 3 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées:

1. Le taux de variation de $x^3 + 4$ par rapport à x en $x = 2$ est égale à
   a) 4 b) 8 c) $\frac{1}{4}$ d) 12

2. La pente de la tangente de la courbe d'équation $y = 3x - x^3$ en $x = 0$ est égale à
   a) 3 b) 0 c) -3 d) 6

3. La tangente à la courbe d'équation $y = x^2 - 8x + 2$ est parallèle à l'axe des abscisses en $x =$:
   a) -8 b) 2 c) 4 d) 0

4. Si la droite $x + y = 5$ est une tangente à la courbe d'équation $y = 3x^2 + 5x + 1$ en $x =$
   a) 1 b) 5 c) 3 d) -1

Complétez ce qui suit :

5. $\frac{d}{dx}(2x) =$ ....
6. $\frac{d}{dx}(3x^2 + 1) =$ ....
7. $\frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2+1)$ ....
8. $\frac{d}{dx}(x + \sqrt{x})$ ....
9. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^3}) =$ ....
10. $\frac{d}{dx}(5\pi) =$ ....
11. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) =$ ....
12. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}) =$ ....
13. $\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x + 2) =$ ....
14. $\frac{d}{dx}(\sqrt{2}\,x^7 - \frac{x^5}{5} + \pi) =$ ....

15. Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:
   a) $y = 3x^5$ b) $y = \frac{3}{4}x^{-8}$ c) $y = \frac{3}{2x^2}$ d) $y = 4\sqrt{x}$
   e) $y = \sqrt[3]{x^5}$ f) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ g) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ h) $y = x\sqrt{x}$

Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée par rapport à x .

16. $y = x^3 + 3x^2 - 5$
17. $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 7x - 9$
18. $y = 2x^6 + 3\sqrt{x}$
19. $y = \frac{4x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x}$
20. $y = x(3x^2 - \sqrt{x})$
21. $y = \frac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$
22. $y = (x^2 + 1)(2x + 5)$
23. $y = (x^2 - 7)(2x + 3)$

(24) $y = (x^2 + 3)\,(x^3 - 3x + 1)$

(25) $y = (x^2 - \sqrt{x}\,)\,(x^2 + 2\sqrt{x}\,)$

(26) $y = \dfrac{5x - 2}{5 \quad x + 1}$

(27) $y = \dfrac{x - 2}{x + 5}$

(28) Dans ce qui suite, trouvez $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ aux points donnés :

a $y = (\,x^2 - 2)^7$ at $x = 0$

b $y = (\,x^2 - x + 1)^{-4}$ en $x = 1$

(29) Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{d\,y}{d\,x}$:

a $y = (\,x + 3)^7$

b $y = (\,2x^2 - 3)^4$

c $y = (\,x^3 + x - 1)^5$

d $y^3 = 3x^2 + 1$

e $y = \sqrt[4]{(2x^3 - 4x + 7)^2}$

f $y = z^2 \quad , \quad z = 3x^2 + 2$

(30) Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + \dfrac{1}{x} - 1$ avec la direction positive de l'axe des abscisses.

(31) Trouvez les points de la courbe d'équation $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ auxquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

(32) Trouvez les pointe de la courbe d'équation $y = x^3 - 9x^2 - 16x + 1$ aux quels la pente de la courbe est égale à 5

(33) Trouvez l'équation de la tangente et de la perpendiculaire (la normale) à la courbe d'équation $y = 3x^2 - 7x + 2$ au point (2 ; 0) qui lui appartient .

(34) Trouvez l'équation de la tangente à chacune des courbes d'équation suivantes aux points dont l'abscisse est indiquée:

a $y = (x + 3)^3 \quad , \quad x = -1$

b $y = \dfrac{3}{x - 2} \quad , \quad x = 4$

c $y = \sqrt{x + 7} \quad , \quad x = 2$

d $y = (\,x - 5)\,(x + 5) \quad , \quad x = -3$

(35) Si la droite d'équation $5\,x - y - 6 = 0$ est tangente à la courbe d'équation $y = a\,x^3 + b\,x$ au point de coordonnées (1 ; -1), trouvez a et b.

Unité 3

3 - 4 Intégration

Allez apprendre

- La primitive d'une fonction
- Intégral algébriques illimité
- Intégral de quelques fonctions algébriques

Vocabulaires de base

- La dérivée réciproque
- Intégral

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels graphisme.

A découvrir

D'après votre étude précédant, vous savez que la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^3 + c$ et c est une constante est $f'(x) = 3x^2$.

c'est-à-dire $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ Dans ce cas là, la fonction f est appelée (nommée) la fonction principale (d'origine) de la fonction f'

Dans cette leçon, nous allons étudier une opération réciproque de la dérivée Comment trouvez la fonction primitive en connaissant sa dérivée ?

Pour trouver la fonction principale dont la dérivée par rapport à x est $5x^4$ soit $f(x) = 5x^4$

nous allons commencer par une méthode réciproque de la dérivée

$n\,x^{n-1} = 5x^4 \qquad \therefore n - 1 = 4 \ , \ n = 5$

$F(x) = x^5 \quad$ ou $\quad x^5 + 3 \quad$ ou $\quad x^5 - 2$

La fonction F est appelée la fonction primitive (d'origine).

Pouvez-vous découvrir la fonction primitive (d'origine) si :

a $f(x) = 2x$ **b** $f(x) = 7x^6$

A apprendre

Primitive

Si $y = x^2$ alors la première dérivée est $\frac{dy}{dx}$ est appelée intégral ou la primitive

Par exemple x^2 est prémitive de la fonction $2x$ Remarquez que $2x$ admet plusieurs prémitive comme $x^2 + 1$, $x^2 + 2$, $x^2 - 3$, ... Leurs dérivées $2x$ mais le constant est différent c .

$\therefore \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$ où (c) est constante.

Définition

On dit que la fonction F est une prémitive de la fonction f si $F'(x) = f(x)$ pour tout x appartient à l'ensemble de définition de f.

Exemple

1) Démontrez que : la fonction F où $F(x) = \frac{1}{2}x^4$ est une prémitive de la fonction f où $f(x) = 2x^3$.

Solution

On trouve la dérivée de la fonction F $\quad \therefore F'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 = 2x^3$

$\therefore F'(x) = f(x)$ **c'est á dire la fonction** (F) est une prémitive de la fonction f

Essayez de résoudre

1) Montrez que la fonction F où $F(x) = \frac{1}{2}x^6$ est une prémitive de la fonction f où $f(x) = 3x^5$

Pensé critique:

Quelle est la relation F_1,et F_2 si elles sont des prémitive de la fonction f ?

Intégral illimitée

L'ensemble des primitives de la fonction f est appelle l'intégral illimitée de cette fonction. On la note $\int f(x)\,dx$ **[qui se lit intégral de la fonction de x par rapport à x]**

Définition

si $F'(x) = f(x)$ alors $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

où c est une constante.

Remarquez que: $\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2 \qquad \therefore \int 3x^2\,dx = x^3 + c$

$\frac{d}{dx}(2x^7) = 14x^6 \qquad \therefore \int 14x^6\,dx = 2x^7 + c$

Pour déterminer la valeur de la constante c , on doit savoir la valeur de l'intégral en une valeur de la variable x (C'est en dehors du programme)

Exemple

2) **Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes :**

a) $\int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

b) $\int (7x^6 + \frac{4}{x^3})\,dx = x^7 - \frac{2}{x^2} + c$

Solution

a $\because \frac{d}{dx}(\frac{1}{8}x^8 + c) = x^7$ $\therefore \int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

b $\because \frac{d}{dx}(x^7 - \frac{2}{x^2} + c) = \frac{d}{dx}(x^7 - 2x^{-2} + c)$

$= 7x^6 - 2(-2)x^{-3} = 7x^6 + \frac{4}{x^3}$

$\therefore \int (7x^6 + \frac{4}{x^2})\,dx = x^7 - \frac{2}{x^2} + c$

Essayez de résoudre

(2) **Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes:**

a $\int x^{-4}\,dx = \frac{-1}{3}x^{-3} + c$ **b** $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

Exemple

(3) En utilisant la définition de l'intégral, trouvez la prémitive de la fonction f où:

a $f(x) = 5x^4$ **b** $f(x) = 18\,x^{\circ}$ **c** $f(x) = -3\,x^{-4}$

Solution

a $I(x) = \int 5x^4\,dx = x^5 + c$

b $I(x) = \int 18\,x^{\circ}\,dx = \int 3(6\,x^5)\,dx = 3\,x^6 + c$

c $I(x) = \int -3\,x^{-4}\,dx = x^{-3} + c$

Essayez de résoudre

(3) En utilisant la définition de l'intégral, trouvez la prémitives de ce qui suit: $20x^4$, $-5x^{-4}$

Pour trouver les prémitives des fonctions en utilisant la définition précédante, on a besoins de temps et d'effort, c'est pour celà, on utilise quelques formules simples de l'intégral (règles de l'intégral) qui facilitent le travail.

Règle (1) :

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ où **c** est une constante , **n** est un nombre rationnel , $n \neq -1$

Exemple

Trouvez :

(4) **a** $\int x^5\,dx$ **b** $\int x^{-3}\,dx$ **c** $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$ **d** $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$

Solution

a) $\int x^5\, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{1}{6} x^6 + c$

b) $\int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-3+1}}{-2} + c = -\frac{1}{2} x^{-2} + c$

c) $\int x^{\frac{2}{5}}\, d\,x = \frac{1}{\frac{7}{5}} x^{+1\frac{2}{5}} + c$

$= \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + c$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, d\,x = \int x^{\frac{-3}{5}}\, d\ x$

$= \frac{1}{\frac{2}{5}} x^{1+\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + c$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez :

a) $\int x^8\, d\,x$ b) $\int x^{\frac{2}{3}}\, dx$ c) $\int x^{\frac{7}{9}}\, d\,x$ d) $\int \sqrt[7]{x^5}\, dx$

Règle (2) :

$\int a \,.\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ où a est une constante

Exemple

(5) a) $\int 3x^4\, dx = 3\int x^4\, dx = 3\times \frac{1}{5}\ x^5 + c = \frac{3}{5}\ x^5 + c$

b) $\int 8x^{-5}\, dx = 8\int x^{-5}\, dx = 8 \times \frac{1}{-4}\ x^{-4} + c = -2\, x^{-4} + c$

Corollaire

$\int a\, dx = a\ x + c$

Donc:

$\int 5\, dx = 5\,x + c$, $\int -9\, dt = -9\,t + c$

$\int dx = x + c$, $\int \sqrt{7}\ \ dz = \sqrt{7}\ z + c$

Essayez de résoudre

(5) Trouvez :

a) $\int 3\, x^4\, d\,x$ b) $\int -2\, z\, dz$ c) $\int -x\, dx$ d) $\int -\frac{dx}{5}$

Règle (3) :

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Exemple

(6) Trouvez : **a** $\int (4x + 3x^2)\, dx$ **b** $\int \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}\, dx$

Solution

a $\int (4x + 3x^2)\, dx$

$= \int 4x\, dx + \int 3x^2\, dx$

$= 4\int x\, dx + 3\int x^2\, dx$

$= \frac{4}{2}x^2 + 3 \times \frac{1}{3}x^3 + c$

$= 2x^2 + x^3 + c$

b $\int \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}\, dx$

$= \int \frac{(x-4)(x+2)}{x+2}\, dx$

$= \int (x - 4)\, dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + c$

Essayez de résoudre

(6) Trouvez :

a $\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$

b $\int (\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3)\, dx$

c $\int 2x(x + 3)\, dx$

d $\int \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}\, dx$

Règle (4) :

$$\int [(ax + b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + c \text{ , } n \neq -1$$

Pensé critique:

1- Pouvez-vous vérifier que la relation précédente est correcte en utilisant la définition de la primitive? Argmentez votre solution.

Exemple

(7) Trouvez :

a $\int (3x - 2)^5\, dx$

b $\int (2x - 7)^{-3}\, dx$

c $\int \frac{7}{\sqrt{3x - 4}}\, dx$ si $x > \frac{4}{3}$

Solution

a $\int (3x-2)^5\,dx = \frac{1}{3(5+1)}(3x-2)^{5+1} + c = \frac{1}{18}(3x-2)^6 + c$

b $\int (2x-7)^{-3}\,dx = \frac{1}{2(-3+1)}(2x-7)^{-3+1} + c = -\frac{1}{4}(2x-7)^{-2} + c$

c $\int \frac{7}{\sqrt{3x-4}}\,dx = \int 7(3x-4)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{7}{3(-\frac{1}{2}+1)}(3x-4)^{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{7}{3(-1+\frac{1}{2})}(3x-4)^{\frac{1}{2}} = \frac{14}{3}\sqrt{3x-4} + c$

Essayez de résoudre

7 Trouvez: **a** $\int 9(4-3x)^2\,dx$ **b** $\int \frac{15}{(3x-5)^6}\,dx$

Exercices 3 - 4

Trouvez:

1. $\int x^2\,dx$
2. $\int x^7\,dx$
3. $\int 8x\,dx$
4. $\int -4x^3\,dx$
5. $\int 9x^8\,dx$
6. $\int 12x^{-4}\,dx$
7. $\int 5\,dx$
8. $\int (5\sqrt[3]{x}\,dx$
9. $\int -3x^7\,dx$
10. $\int -\frac{8}{5}x^{-3}\,dx$
11. $\int \frac{7}{3}t^6\,dn$
12. $\int \frac{12}{5}f^5\,df$
13. $\int (x+1)\,dx$
14. $\int (5-2t)\,dn$
15. $\int (t^3-6t^4)\,dn$
16. $\int (x^3+x^2+x)\,dx$
17. $\int 2(3x^2+7)\,dx$
18. $\int (ax^2-bx+c)\,dx$
19. $\int x(x+3)\,dx$
20. $\int 7x^2(x^4-1)\,dx$
21. $\int (x-1)(x+1)\,dx$
22. $\int (x-2)(2-x)\,dx$
23. $\int (2x+3)(x-1)\,dx$
24. $\int x^2(2x+\frac{1}{x})\,dx$
25. $\int \frac{3x^2-4x}{x}\,dx$
26. $\int \frac{x^7+5x^6-x^3}{x^3}\,dx$
27. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$
28. $\int \frac{x^3-27}{x-3}\,dx$
29. $\int \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}\,dx$
30. $\int \frac{x^2-5x+6}{x-3}\,dx$
31. $\int (x+4)^3\,dx$
32. $\int 7(2x-7)^6\,dx$
33. $\int (8-3n)^4\,dn$
34. $\int 6(x-3)^{-4}\,dx$
35. $\int (2x-3)^{\frac{7}{3}}\,dx$
36. $\int 15\sqrt{(3x-2)^5}\,dx$

Résumé de l'unité

Fonction de variation – taux de variation

- Si $y = f(x)$ et x varie de x à $x + h$ alors la fonction de variation $v(h) = f(x + h) - f(x)$
- Taux de variation $T(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Nombre derivé = $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Le nombre derivé est nommé la première dérivée de la fonction et on la note $f'(x)$ ou' :

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ [la première dérivée est représentée e par l'un des symboles $\dfrac{dy}{dx}$ ou y' ou $f'(x)$]

Dérivabilité :

- $f(x)$ est dérivable en $x = a$ si et seulement si $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe.

Derivée des fonctions usuelles :

La fonction $f(x)$	La dérivée de la fonction f' (x)
1- a où a est une constante	0
2- x^n où $n \in \mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$
3- ax^n où a constante , $n \in \mathbb{R}$	$a\,n\,x^{n-1}$
4- $f(x) \pm h(x) \pm \dots k(x)$	$f'(x) \pm h'(x) \pm \dots k'(x)$
5- $f(x) . h(x)$ où f et h sont dérivables	$f(x) \times h'(x) + h(x) \times f'(x)$
6- $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ où f et h sont dérivables $h(x) \neq 0$	$\dfrac{h(x) \times f'(x) - f(x) \times h'(x)}{(h(x))^2}$
7- Si $y = f(z)$ et $z = h(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \times \dfrac{dz}{dx}$
Si $y = f(z)$ et $z = h(x)$	$f'(h(x)) \times h(x - x_1)'(x)$

Applications géométriques :

1- Si $y = f(x)$ alors la pente de la tangente de la courbe de la fonction f en un point quelconque qui lui appartient $= \dfrac{dy}{dx}$.

2- Si (x_1 , y_1) est un point de la courbe de la fonction $y = f(x)$ talors l'équation de la tangente au point (x_1 , y_1) est: $y - y_1 = m(x - x_1)$ où $m = (\dfrac{dy}{dx})$ et la pente de la tangente au point (x_1 , y_1) et l'équation de la perpendiculaire (la normale) et $y - y_1 = \dfrac{-1}{m}(x - x_1)$

La primitive d'une fonction :

- On dit que la fonction F est la primitive de la fonction f si $F(x) = f(x)$ pour tout x appartient à l'ensemble de définition de f.
- Si $F'(x) = f(x)$ alors $\int f(x)\,dx = F(x) +$ où c est une constante (constante de l'intégral).

Règles de l'intégral

1- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ où c est une constante , n est un nombre rationnel , $n \neq -1$

2- $\int a\,.\,f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$ où a est une constante

3- $\int [f(x) \pm h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$

4- $\int [(ax + b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1} + c$, $n \neq -1$

Exercices généraux

(1) Si $f(x) = 5x - x^2$ trouvez la fonction de variation v en $x = x_1$ puis trouvez :

- (a) la fonction de variation $v(h)$ en $x_1 = 1$
- (b) la valeur de la variation de la fonction lorsque x_1 varie de 2 à 2,01.
- (c) la valeur de la variation de la fonction lorsque x_1 varie de 1 à 0,98

(2) Si $f(x) = x^2 - 3x$ trouvez:

- (a) Le taux de variation T(h) en $x = 2$
- (b) Le taux de variation lorsque x varie de 2 à 2,03

(3) Trouvez le taux de variation de la fonction f où $f(x) = \frac{1}{x}$ puis calculez le taux de variation de cette fonction en $x = \sqrt{3}$

(4) Trouvez le taux de variation de la fonction f où $f(x) = x^2 - 2x + 3$ puis calculez:

- (a) Le taux de variation lorsque x varie de -2 à -1,9
- (b) Le nombre dérivé de cette fonction lorsque $x = 3$

(5) Trouvez le taux de variation de la fonction f où $f(x) = \sqrt{x}$, puis calculez le nombre dérivé de cette fonction en $x = 4$

(6) Une plaque métallique à la forme d'un carré se dilate régulièrement en conservant sa forme. Calculez la limite de taux de variation de son aire par rapport á la longueur de son côté lorsque la longueur de son côté = 25 cm

(7) Une plaque métallique à la forme d'un cercle se dilate régulièrement en conservant sa forme. Calculez la limite de taux de variation de son aire par rapport á la longueur de son rayon lorsque la longueur de son rayon = 14 cm ($\pi = \frac{22}{7}$)

8) Un cube se dilate régulièrement en conservant sa forme. . Calculez la limite de taux de variation de son volume par rapport à la longueur de son arête lorsque la longueur de son arête = 5 cm.

9) Un cube se dilate régulièrement en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire totale par rapport á la longueur de son arête lorsque la longueur de son arête varie de 6 à 6,3 puis calculez la limite de taux de variation de son volume lorsque la longueur de son arête est 8cm

10) Dans ce qui suite, trouvez $\frac{dy}{dx}$

a) $y = x^2 - 3x$

b) $y = 5x^3 + 3x^2 - 4x + 7$

c) $y = 2x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 7x - 5$

d) $y = 2x^3 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + 5$

11) Trouvez la pente de la tangente à la courbe de chacune des fonctions suivantes

a) $y = x^2 - 2x + 3$ au point de coordonnées $(1 , 2)$

b) $y = x^3 - 2x + 1$ au point de coordonnées $(-1 , 2)$

c) $y = x^3 + x^2 - x + 1$ au point de coordonnées $(1 , 2)$

d) $y = x - \frac{1}{x}$ en $x = 1$

12) Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses de chacune des courbes suivantes :

a) $y = x^2 - 3x + 2$ au point de coordonnées $(2 ; 0)$

b) $y = x^3 - x^2 -4$ au point de coordonnées $(1 ; -4)$

c) $y = (x- 1) (2x + 1)$ au point de coordonnées $(0; -1)$

d) $y = x(x - 1) (x + 9)$ au point de coordonnées $(0 ; 0)$

13) Trouvez la première dérivée de ce qui suit :

a) $y = \frac{3x -2}{2x +3}$

b) $y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1}$

14) Trouvez la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x}{x + 2}$ au point de coordonnées $(-1, -1)$ qui lui appartient.

15) Trouvez la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + x+1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$

16)) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = z^3$ et $z = 2x + 1$

b) $y = z^5$ et $z = x^3 + 1$

c) $y = z^4$ et $z = 3x^2 - x + 2$

d) $y = z^4$ et $z = 2x^3 + 5$

Trouvez les intégrales suivantes :

17) $\int (x^2 - 3x - 1)\, dx$

18) $\int (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}})\, dx$

19) $\int (x - 2)(x + 2)\, dx$

20) $\int (x - 5)(x + 1)\, dx$

21) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1}\, dx$

22) $\int \frac{x^3 - 27}{x - 3}\, dx$

23) $\int 6(x - 2)^5\, dx$

24) $\int 3(x + 3)^{-4}\, dx$

Épreuve cumulative

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1. Si le taux de variation de $f = 3{,}2$ lorsque x varie de 7 à 7,2, alors la variation de $f = \ldots$
   - a) -6,4
   - b) 6,4
   - c) 1,6
   - d) -1,6

2. $\frac{d}{dx}(2-3x)^{-2}\,dx$
   - a) $12x^{-2} - 27x^{-4}$
   - b) $\frac{1}{3}(2-3x)^{-1}$
   - c) $6(2-3x)^{-3}$
   - d) $-2(2-3x)^{-3}$

3. La pente de la tangente de la courbe $y = (2x-3)^5$ en $x = 2$ est
   - a) 1
   - b) $\frac{1}{12}$
   - c) 5
   - d) 10

4. $\int (x^2 - 3)\,dx =$
   - a) $2x$
   - b) $x^3 - 3x$
   - c) $\frac{1}{3}x^3 - 3x + c$
   - d) $2x - 3 + c$

Répondez á ce qui suit:

5. Trouvez la première dérivée de chacune des fonctions suivantes :
   - a) $y = 3x^2 - 5x + 2$
   - b) $y = x(x^2 - 3x + 5)$
   - c) $y = (x-2)(x+2)$
   - d) $y = \frac{x-1}{x+1}$

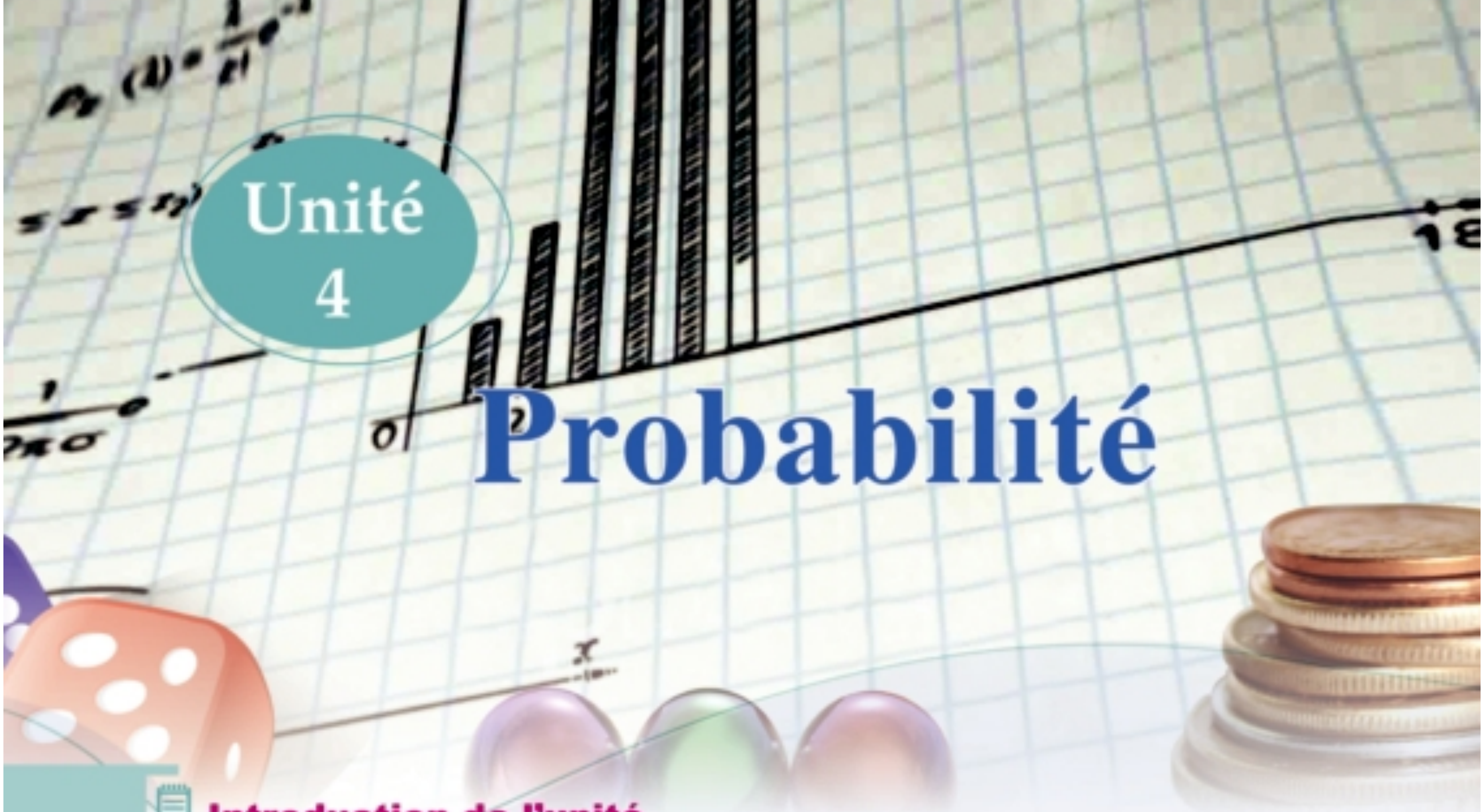
6. Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:
   - a) $y = z^2$, $z = x^4 - 6$
   - b) $y = 7z^3$, $z = \frac{1+x}{1-x}$

7. Trouvez :
   - a) $\int (5x^4 - 3x^2 + 3)\,dx$
   - b) $\int 2x(x^2+3)\,dx$
   - c) $\int (2x+3)^5\,dx$
   - d) $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$

8. Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (x-2)(x+1)$ aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

9. Trouvez les points de la courbe $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ auxquels la tangente est parallèle á l'axe des abscisses

10. Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe $y = x^2 + \frac{1}{x} - 1$ avec la direction positive de l'axe des abscisses en $x = 1$.



Unité 4

Probabilité

Introduction de l'unité

Les racines de la science de la probabilité s'étendent à la renaissance dans les études des astrologues et les jeux de loteries qui ont impliqué à l'étude de l'apparition de certains éléments parmi un grand nombre d'éléments. Des autres recherches sur cette science ont menées par Girolamo Cardan en seizième siècle et développées par Pierre de Fermat et Blaise Pascal en dix-huitième siècle.

En dix-neuvième siècle au cours de l'évolution de la science de probabilité, des multiples de définitions ont apparu, parmi lesquelles ceux qui sont simples, peuvent être acquises à partir d'une perception concrète et ceux qui ont besoin de recourir à l'expérimentation pour examiner le nombre d'occurrence d'un élément parmi plusieurs en répétant l'expérience plusieurs fois sous certains contraints. La probabilité est la mesure de la possibilité de l'occurrence d'un événement.

En dix-neuvième siècle, Laplace l'un des fondateurs de cette science découdra la théorie de la probabilité, par ailleurs Adolph Quételet présenta le premier œuvre statistique d'une manière scientifique en 1853. A partir de cette datte, la statistique et probabilité est devenue une science utile dans les différents domaines également dans les recherches scientifiques, elle devenue la science de prévision des questions de l'avenir. Dans cette unité, nous allons aborder quelques notions et définitions de base de la probabilité et de son calcul

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaitre la notion expérience aléatoire
- Reconnaitre la notion univers des éventualités
- Ecrire l'univers des éventualités de quelques expériences aléatoires
- Reconnaitre la notion événement: élémentaire certain - impossible.
- Découvrir les opérations Reconnaitre la notion événements incompatibles.
- Reconnaitre les opérations sur les événements comme (union – intersection – différence – complémentaire)
- Reconnaitre la notion probabilité.
- Utiliser les axiomes de probabilités pour calculer la probabilité de la réalisation d'un événement.
- Résoudre des applications mathématiques en utilisant les axiomes de probabilité statistiques et des probabilités
- Résoudre des problèmes dans la vie quotidienne en utilisant les lois de probabilités.

Vocabulaires de base

- Statistiques
- Probabilité
- Expérience aléatoire
- Univers des éventualités
- Pièce de monnaie
- Dé
- Evénement
- Evénement élémentaire
- Evénement composé
- Evénement certain
- Evénement impossible
- Opérations sur les événements
- Evénements incompatibles

Leçons de l'unité

Leçon (4 - 1):Calcul de probabilité.

Aides pédagogiques

- Calculatrice Scientifique
- Calcul de probabilité
- Logiciel de graphisme

Organigramme del'unité

Unité 4

4 - 1 Calcul de probabilité

Allez apprendre

- Notion d'expérience aléatoire et d'univers des éventualités
- Notion d'événement – événement élémentaire – événement certain – événement impossible
- Reconnaitre les opérations sur les événements comme (union – intersection – différence – complémentaire)
- Événements incompatibles
- Lois de De Morgan
- Notion de probabilité.
- Calcul de probabilité.
- Axiomes de probabilités et applications quotidiennes

Vocabulaires de base

- Expérience aléatoire
- Univers des éventualités
- Événement
- Événement élémentaire
- Événement certain
- Événement impossible
- Événements incompatibles.
- Probabilité
- Axiomes de probabilité

Aides pédagogiques

- Calculatrice.

Préface:

On a déjà étudié les notions de bases simplifiées des probabilités, dans cette leçon nous allons continuer à développer les études de ces notions et les opérations sur les événements pour calculer la probabilité de la réalisation d'un événement à partir des exemples variés de la vie quotidienne.

Vocabulaires de base

Apprendre

Expérience aléatoire: C'est une expérience dont on peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir, laquelle de ces issues sera réalisée.

Exemple

1. Laquelle des expériences suivantes est une expérience aléatoire ?
   - **a** On lance un dé non pipé et on observe le nombre apparu sur la face supérieure.
   - **b** On observe la couleur d'une boule tirée au hasard d'un sac contenant des boules colorées.
   - **c** On jette une pièce de monnaie et on note le résultat apparu sur la face supérieure.
   - **d** On observe la couleur d'une boule tirée au hasard d'un sac contenant des boules identiques colorées : la première est blanche, la deuxième est noire, la troisième est rouge et la quatrième est verte.

Solution

Les expériences (a),(c),(d) sont des expériences aléatoires car on peut déterminer á l'avance tous les résultats possibles mais on ne peut pas déterminer le résultat exact avant la réalisation de l'expérience. L'expérience (b) n'est pas aléatoire car on ne peut pas déterminer á l'avance les résultats de cette expérience avant sa réalisation.

Essaie de résoudre

1. Laquelle des expériences suivantes est aléatoire ?

a On jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat apparu sur la face supérieure.

b On observe le nombre inscrit sur une carte tirée au hasard d'un sac contenant des cartes numérotées (sans savoir ses nombres) .

c On observe le nombre inscrit sur une carte tirée au hasard d'un sac contenant 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20 .

A apprendre

Définition

Univers des éventualités (Univers des issues)

➢ L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience et on le note U.

Remarque : ➢ Le nombre d'éléments de l'univers des éventualités est noté card(U).

➢ L'univers des éventualités est fini si le nombre de ses éléments est limité et il est infini si le nombre de ses éléments est illimité. Dans la suite, nous allons étudier les univers des éventualités finis.

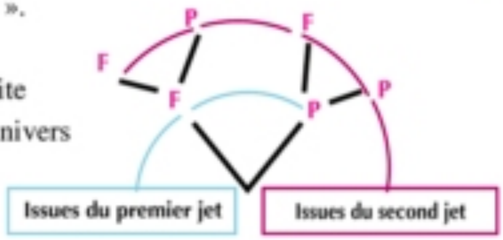
Expériences aléatoires usuelles :

Jeter une pièce de monnaie

1- Si on jette une pièce de monnaie une fois et on observe le résultat apparu sur la face supérieure : U = { E ; P}

Où : F symbolise « face » et P symbolise « pile ».

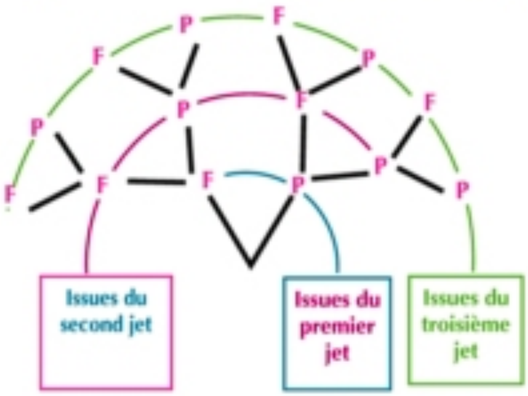
On a card(U) = 2



2- Si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on observe la succession des faces et des piles, l'univers des éventualités de cette expérience est :

U = { (F ; F) ; (F ; P) ; (P ; F) ; (P ; P)}

On a card (U) = $2 \times 2 = 4 = 2^2$



3- Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suite et on observe la succession des faces et des piles, on peut obtenir l'univers des éventualités de cette expérience de l'arbre ci-contre:

U = { {(F ; F ; F) ; (F ; F ; P) ,
(F ; P ; F) ; (F ; P ; P) ,
(P ; F ; F) ; (P ; F ; P) ,
(P ; P ; F) ; (P ; P ; P) }

On a card (U) = $2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$

On remarque que :

1- Si on jette une pièce de monnaie m fois de suite, on a card (U) = 2^m

2- (F ; P) ≠ (P ; F) pourquoi?

3- Si on jette simultanément, deux pièces de monnaie, distinctes (en forme et en volume)l'univers des éventualités de cette expérience est le même que quand on jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Dans ce cas, chaque résultat sera sous la forme d'un couple (face de la première pièce ; face de la seconde pièce).

Lancer un dé

1- Si on lance un dé une fois et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, l'univers des éventualités de cette expérience est :

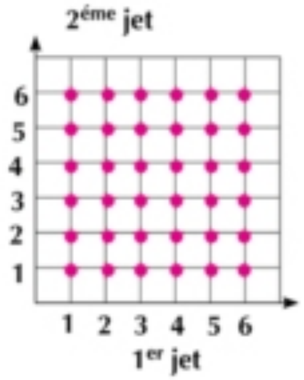
$U = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ On a $card(U) = 6$

2- Si on lance un dé deux fois de suite et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, l'univers des éventualités de cette expérience est l'ensemble des couples ayant pour premier élément le résultat du premier jet et pour second élément le résultat du deuxième jet d'où : $U = \{ (x ; y) : x \in \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et $y \in \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}\}$ Les figures suivantes illustrent le résultat.

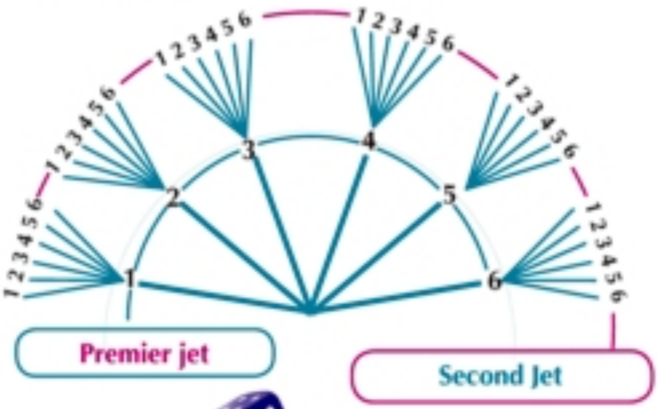
a Forme du tableau :

Jet premier / Deuxième	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

b Forme géométrique :



c L'arbre graphique



On remarque que :

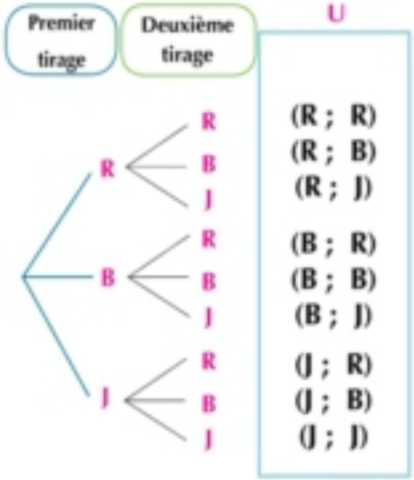
1- $card (U) = 6 \times 6 = 36 = 6^2$

2- $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

3- Si on lance deux dés simultanément une fois, l'univers des éventualités de cette expérience est le même que quand on lance un seul dé deux fois de suit.

Exemple

(2) Un sac contient trois boules identiques de couleurs différentes. La première est rouge, la seconde est blanche et la troisième est jaune. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre avec remise et on observe la succession des couleurs. Écrivez l'univers des éventualités.



Solution

On note la boule rouge par le symbole R, la boule blanche par le symbole B et la boule jaune par le symbole J:

Lors d'un tirage la remise d'une boule tirée permet de la retirer dans le tirage suivant. La figure suivante montre l'arbre de l'univers des éventualités où carde (U) = $3^2 = 9$

U = {(R ; R), (R ; B), (R ; J), (B ; R), (B ; B), (B ; J), (J ; R), (J ; B), (J ; J)}

Enrichissez votre connaissance

Si on tire une boule sans remise c-à-d ne remet pas la boule dans le sac après son tirage.
Donce il n'y aura pas de possibilité d'apparaitre dans le deuxiéme tirage.

Essayez de résoudre

(2) Une boîte contient trois boules identiques numérotées de 1 à 3. On tire deux boules l'une après l'autre avec remise et on observe le numéro de la boule tirée. Écrivez l'univers des éventualités de cette expérience et le nombre de ses éléments.

A apprendre

definition

L'événement

- L'événement est un sous ensemble de l'univers des éventualités.

L'événement élémentaire (simple)

- C'est un sous-ensemble de l'univers des éventualités qui contient un seul élément.

definition

L'événement certain

C'est l'événement dont les éléments sont les mêmes que ceux de l'univers des éventualités U.

L'événement impossible

C'est l'événement qui ne contient aucun élément. Il est noté ϕ. C'est un événement qui ne se réalise jamais.

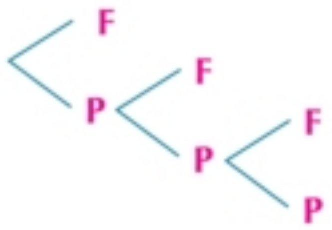
Exemple

(3) On jette une pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'on obtienne face une fois et pile 3 fois. Ecrivez l'univers des éventualités puis déterminez les événements suivants:-

A «obtenir face une fois au plus» C «obtenir pile deux fois au moins»

B «obtenir face une fois au moins» D «obtenir face deux fois au moins»

Solution



D'aprés l'arbre, on trouve

U = {F , (P ; F), (P ; P ; F),(P ; P ; P)}

A = {F ; (P ; F), (P ; P , F), (P ; P ; P)} = U

B = {F ; (P ; F), (P ; P; F)}

C = {(P ; P ; F) , (P ; P ; P)}

D = { } = ϕ événement impossible.

Essayez de résoudre

(3) On jette une pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'on obtienne deux faces ou deux piles une fois et pile 3 fois. Ecrivez l'univers des éventualités puis déterminez les événements suivants :

A «obtenir face une fois au moins» B «obtenir pile deux fois au plus»

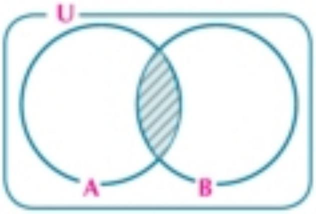
C «obtenir pile une fois au plus»

Opérations sur les événements.

A apprendre

(1) L'intersection

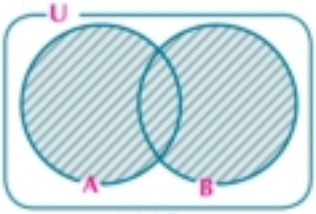
L'intersection des deux événements A et B est l'événement A ∩ B qui contient les éléments de l'univers des éventualités appartenant à A et B à la fois. Cela signifie la réalisation de A et B (**réalisation des deux événements à la fois**).



A ∩ B

(2) L'union

L'union des deux ensembles A et B est l'événement A ∪ B qui contient les éléments de l'univers des éventualités appartenant à A ou B ou les deux à la fois. Cela signifie la réalisation de A ou B (**réalisation de l'un des deux au moins**) .

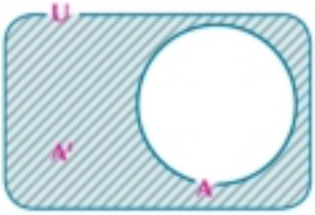


A ∪ B

(3) La complémentarité

L'événement A' : est appelé le complément de l'événement A.

L'événement A : contient tous les éléments de l'univers des éventualités n'appartenant pas à l'événement A. Cela signifie la non réalisation de l'événement A.



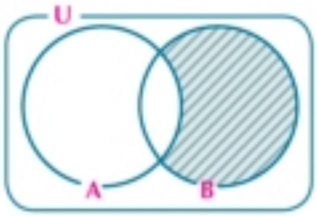
Remarque que : $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \phi$

(4) La différence

L'événement $A - B$ contient tous les éléments de l'univers des éventualités U appartenant à A et n'appartenant pas à B. Ce sont les mêmes éléments que $A \cap B'$

Cela signifie la réalisation **de A et la non réalisation de B (réalisation de A seulement).**

$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$



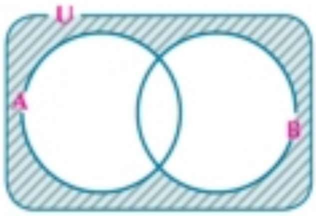
(5) Lois de De Morgan

Si A et B sont deux événements de U, alors :

(1) $A' \cap B' = (A \cup B)'$

Cela signifie la non réalisation de l'un des deux événements)

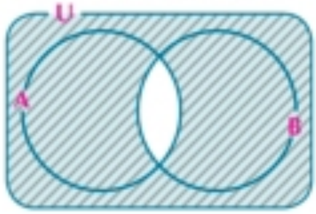
ou (la non réalisation de A et la non réalisation de B)



(2) $A' \cup B' = (A \cap B)'$

Cela signifie la non réalisation des deux événements á la fois

ou (la réalisation de l'un des deux événements au plus)



A apprendre

Evénements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si la réalisation de l'un d'eux implique la non réalisation de l'autre.

Par exemple : **1-** Si A l'événement « réussir dans un examen » et B l'événement « échouer au même examen ». alors la réalisation de l'un des deux événements implique la non réalisation de l'autre.

2- Si on lance un dé une fois et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, alors $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Si A est l'événement « obtenir un nombre impair » donc $A = \{1 ; 3 ; 5\}$

B est l'événement « obtenir un nombre pair » donc $B = \{2 ; 4 ; 6\}$

Alors $A \cap B = \phi$ donc la réalisation de l'un des deux événements implique la non réalisation de l'autre.

definition

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \phi$
- On dit que plusieurs événements sont incompatibles si et seulement s'ils sont incompatibles deux à deux.

Remarquez que :

1- Si $A \cap B = \phi$, alors A et B sont incompatibles .
Si A ; B et C sont trois événements de U et si : $A \cap B = \phi$, $B \cap C = \phi$, $A \cap C = \phi$ alors A , B et C sont des événements incompatibles et réciproquement.

2- Les événements élémentaires dans une expérience aléatoire sont incompatibles.

3- Un événement A et son complémentaire A\` sont incompatibles.

Exemple

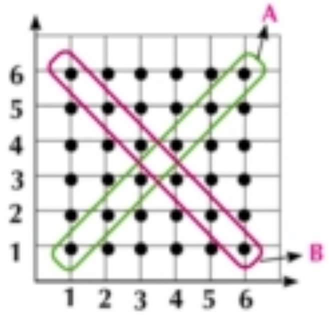
(4) On lance deux dés distincts et on observe les nombres inscrits sur les deux faces supérieures.

a Représentez l'univers des éventualités géométriquement puis écrivez chacun des deux événements suivants :
L'événement A « obtenir le même nombre sur les deux faces »
L'événement B « obtenir deux nombres dont la somme est égale à 7 »

b Les deux événements A et B sont-ils incompatibles ? Expliquez votre répons

Solution

a Les éléments de l'univers des éventualités de cette expérience sont des couples dont le nombre $= 6^2 = 36$
La figure ci-contre est la représentation géométrique de l'univers des éventualités où chacun de ses éléments représente un point comme le montre la figure



A = {(1 ; 1), (2 ; 2), (3 ; 3), (4 ; 4) , (5 ; 5) , (6 ; 6) }
B = { (6 ; 1) , (5 ; 2), (4 ; 3) , (3 ; 4) , (2 ; 5) , (1 ; 6) }

b $\because A \cap B = \phi$ $\therefore$ A et B sont deux événements incompatibles

Essayez de résoudre

(4) Dans l'exemple précédant, écrivez les deux événements suivants :
l'événement C « obtenir deux nombres dont la somme est 5 »
l'événement D « obtenir deux nombres l'un est le double de l'autre »
C et D sont-ils incompatibles ? Expliquez votre répons.

Probabilité

A apprendre

Calcul de probabilité :

Si tous les résultats de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire (les événements élémentaires) ont la même possibilité , alors la probabilité de la réalisation d'un événement . $A \subset U$, (notée) P(A) où :

$$P(A) = \frac{\text{card }(A)}{\text{card }(U)} = \frac{\text{nombre des resultas de l'evenement A}}{\text{nombre des resultats de U}}$$

Exemple

(5) Une boîte contient 10 boules identiques, 5 blanches, 2 rouges et les autres vertes. On tire au hasard une boule, calculez la probabilité des événements suivants :

L'événement A « la boule tirée est rouge »

L'événement B « la boule tirée est rouge ou verte »

L'événement C « la boule tirée ne est pas verte »

Solution

La probabilité que la boule tirée soit rouge = $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(U)} = \frac{\text{nombre des boules rouges}}{\text{nombre total des boules}} = \frac{2}{10} = 0.2$

La probabilité que la boule tirée soit rouge ou verte $= \frac{\text{nombre des boules rouges+nombre des boules vertes}}{\text{nombre total des boules}}$

$$= \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

La probabilité que la boule tirée ne soit pas verte = P(C)

= La probabilité que la boule tirée soit rouge ou blanche $= \frac{2+5}{10} = 0.7$

Réfléchissez : Peut-on trouver P (C) d'une autre méthode ? Expliquez.

Essayez de résoudre

(5) Dans l'exemple précédant, calculez la probabilité des événements suivants :

L'événement D « la boule tirée soit rouge ou blanche »

L'événement E « la boule tirée soit rouge , blanche ou verte »

À apprendre

Axiomes de la probabilité

1- Pour tout $A \subset U$ il existe un nombre réel appelé la probabilité de l'événement A et noté P(A) tel que : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

2- $P(U) = 1$

3- Si $A \subset U$, $B \subset U$ et si A et B sont deux événements incompatibles, Alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

D'après les axiomes précédents, on remarque que :

Le premier axiome signifie que la probabilité de la réalisation d'un événement est un nombre réel appartenant á l'intervalle [0 ; 1]

Le deuxième axiome signifie que la probabilité de la réalisation de l'événement certain = 1

On peut généraliser **le troisième axiome** pour un nombre fini d'événements incompatibles.

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$

où $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ sont des événements incompatibles deux à deux.

Résultats importants

(1) $P(\phi) = 0$

(2) $P(A') = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Enrichissez votre connaissance

Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

Exemple

6 A et B sont deux événements d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où :
$P(A) = \frac{3}{8}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calculez :

a $P(A \cup B)$ **b** $P(A')$ **c** $P(A - B)$ **d** $P(A' \cap B')$

Solution

a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

b $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

c $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

Essayez de résoudre

6 Dans l'exemple précédent, calculez les probabilités suivantes :

a $P(B')$ **b** $P(B - A)$ **c** $P(A' \cup B')$

Exemple

7 A et B sont deux événements d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où $P(A) = \frac{5}{8}$,
$P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A - B) = \frac{3}{8}$ calculez :

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A' \cap B')$ **d** $P(A' \cup B)$

Solution

a $P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

c $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

d $P(A' \cup B) = P(A \cap B')' = 1 - P(A \cap B') = 1 - P(A - B)$
$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Réfléchissez : Peut-on trouver $P(A' \cup B)$ d'une autre méthode ?

Essayez de résoudre

7) Dans l'exemple précédent, trouve :

a) $P(A')$ b) $P(A' \cup B')$ c) $P(B \cap A')$

Exemple

8) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A') = \frac{1}{3}P(A)$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$ trouvez :

a) L'événement A « la réalisation de l'un des événements au moins »

b) L'événement B « la réalisation de l'un des événements au plus »

c) L'événement C « la réalisation de B seulement »

d) L'événement D « la réalisation de l'un des événements seulement »

Solution

$\because P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$ $\quad \therefore P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ $\quad \therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$\because P(A') = \frac{1}{3}P(A)$ $\quad \therefore 1 - P(A) = \frac{1}{3}P(A)$ $\quad \therefore \frac{4}{3}P(A) = 1$ $\quad \therefore P(A) = \frac{3}{4}$

a) L'événement A « la réalisation de l'un des événements au moins » $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

b) L'événement B « la réalisation de l'un des événements au plus » $= P(A \cap B)'$

$= P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$

c) L'événement C « la réalisation de B seulement » $= P(B - A)$

$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

d) L'événement D « la réalisation de l'un des événements seulement »

$= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

Réfléchissez : Peut-on trouver la probabilité de la réalisation de l'un des événements seulement d'une autre méthode?

Essayez de résoudre

8) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cup B)' = 0.1$. Trouvez la probabilité des événements:

a) L'événement A « la réalisation de l'un des deux événements au moins »

b) L'événement B « la réalisation de A seulement »

c) L'événement C « la réalisation de l'un des événements seulement »

d) L'événement D « la réalisation de l'un des deux événements au plus »

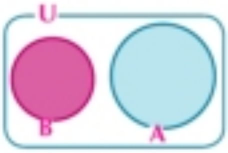
Exemple

9) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P la fonction de probabilité définie sur U où:

$P(B) = 3\,P(A)$, $P(A \cup B) = 0.72$, trouvez : $P(A)$, $P(B)$ dans chacun des cas suivants:

1) Si A et B sont deux événements incompatibles. 2) Si $A \subset B$

Solution

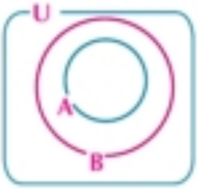


Soit $P(A) = x$ $\therefore P(B) = 3x$

1) $\because$ A et B sont deux événements incompatibles.

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ d'où $0.72 = 3x + x$

$\therefore x = 0.18$; $P(A) = 0.18$ et $P(B) = 0.54$



2) $\because A \subset B$ $\therefore A \cup B = B$

$P(A \cup B) = P(B) = 3x = 0.72$

$\therefore P(A) = 0.24$, $P(B) = 0.72$

Essayez de résoudre

9) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P la fonction de probabilité définie sur U où:

$P(B) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ trouvez $P(A)$ dans chacun des cas suivants.

a) Si A et B sont deux événements incompatibles. b) Si $B \subset A$

Pensé critique :

Comment peut-on calculer $P(A)$ si $A \subset U$, U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P est la fonction de probabilité définie sur U et $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{3}{7}$

Essayez de résoudre

10) Soient E l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où $U = \{A , B , C\}$, si $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{2}{3}$ et $\frac{P(B')}{P(B)} = \frac{5}{2}$ trouvez $P(C)$

Exemple

10) **En lien avec le milieu scolaires :** Si la probabilité qu'un étudiant réussisse son examen de physique est 0,85 ; la probabilité qu'il réussisse son examen de mathématiques est 0,9 et la probabilité qu'il réussisse les deux examens ensemble est 0,8 , calculez la probabilité de :

a) La réussite de l'étudiant à l'un des deux examens au moins.

b) La réussite de l'étudiant en mathématiques seulement.

c) La non réussite de l'étudiant aux deux examens ensemble.

Solution

Soient A l'événement « réussite de l'étudiant en physique » et B l'événement « réussite de l'étudiant en mathématiques .

On a : $P(A) = 0.85$, $P(B) = 0.9$, $P(A \cap B) = 0.8$

a) La probabilité de la réussite de l'étudiant à l'un des deux examens au moins = $P(A \cup B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.85 + 0.9 - 0.8 = 0.95$

b) La probabilité de la réussite de l'étudiant en mathématiques seulement signifie la probabilité de la réussite en mathématiques et la non réussite en physique c'est-à-dire $P(B - A)$ $\therefore P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0.9 - 0.8 = 0.1$

c L'événement « non réussite de l'étudiant aux deux examens ensemble» = $(A \cap B)$;
C'est l'événement complémentaire de l'événement $(A \cap B)$
$\therefore P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.8 = 0.2$

Application de la vie courante:

Essayez de résoudre

11 Pour être recruté à un poste dans une entreprise, la personne doit passer deux tests, l'un est théorique et l'autre est pratique. La probabilité de réussir le test théorique est 0,75 ; la probabilité de réussir le test pratique est 0,6 et la probabilité de réussir les deux tests ensemble est 0,5. Une personne se présente pour la première fois pour avoir ce poste. Calculez la probabilité de :

a Réussir le test théorique seulement. **b** Réussir l'un des deux tests au moins.

Pensé critique:

En lien avec le sport : A Lors d'une conférence de presse, l'entraineur d'une équipe déclare que la probabilité que son équipe gagne le match d'allée est 0,7 , la probabilité qu'elle gagne le match de retour est 0,9 et la probabilité qu'elle gagne les deux matchs ensemble est 0,5. Les déclarations de l'entraineur de l'équipe sont-elles compatibles avec la notion de probabilité ? Expliquez votre réponse.

Exemple

11 On lance un dé non truqué deux fois de suite et observe les nombres apparus sur la face supérieure. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants

(1) A « la somme des deux nombres est plus petit ou égale á 4 »

(2) B « l'un des deux nombre est le double de l'autre »

(3) C « la différence absolue des deux nombres est 2 »

(4) D « la somme des deux nombres est plus grand que 12 »

Solution

card (U) = 36

(1) $A = \{(1\,;1), (1\,;2), (1\,;3), (2\,;1), (2\,;2), (3\,;1)\}$ $\therefore$ card (A) = 6 $\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) $B = \{(1\,;2), (2\,;1), (2\,;4), (4\,;2), (3\,;6), (6\,;3)\}$ $\therefore$ card (B) = 6 $\therefore P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(3) $C = \{(1\,;3), (3\,;1), (2\,;4), (4\,;2), (3\,;5), (5\,;3), (4\,;6), (6\,;4)\}$ $\therefore P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

(4) $\because D = \phi$, $\therefore P(D) = 0$ car ce n'est possible d'avoir deux nombres dont la somme est plus grand que 12 ,

Essayez de résoudre

12 Dans l'exemple précédent, calculez les probabilités des événements suivants :

(1) l'événement A « Les deux nombres apparus sont égaux »

(2) l'événement B« Le nombre de la première lance est pair et le nombre de la deuxième lance est impair »

Exemple

(12) On jette une pièce de monnaie non pipée trois fois de suite et on observe la succession des piles et des faces. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

(1) l'événement A « obtenir face une fois seulement .

(2) l'événement B « obtenir face deux fois au moins .

(3) l'événement C « obtenir face deux fois exactement .

Solution

U = { (F ; F ; F), (F ; F ; P), (F ; P ; F), (F ; P ; P) ,
(P ; F ; F), (P ; F ; P) , (P ; P ; F), (P ; P ; P)},
et card (U) = 8

(1) $\because$ A est l'événement « obtenir face une fois seulement.

$\therefore$ A = { (F ; P ; P) , (P ; F ; P), (P ; P ; F)} ,

$\because$ cord (A) = 3 $\quad\therefore P(A) = \frac{3}{8}$

(2) $\because$ B est l'événement « obtenir face deux fois au moins »
c'est-à-dire obtenir deux ou trois faces

$\therefore$ B = { (F ; F ; P) , (F ; P ; F), (P ; F ; F), (F ; F ; F)}

$\because$ card (B) = 4 $\quad\therefore P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(3) $\because$ C est l'événement «obtenir face deux fois exactement»

$\therefore$ C = { (F ; F ; P), (F ; P ; F), (P ; F ; F)} $\because$ card (C) = 3 $\quad\therefore P(C) = \frac{3}{8}$

Essayez de résoudre

(13) Dans l'exemple précédent, Calculez la probabilité des événements suivants :

(1) l'événement A « obtenir le même résultat dans les trois jets»

(2) l'événement B « obtenir face une fois au plus.»

(3) l'événement C « obtenir un nombre impair de faces»

(4) l'événement D « obtenir pile une fois au moins.»

(5) l'événement F « obtenir un nombre de faces équivalent au nombre de piles.»

Exemple

(13) **En lien avec la société :** Dans l'un des conférences il y avait 200 personnes de nationalité différentes comme l'indique le tableau ci-dessous.

	Parle arabe	Parle anglais	Parle français	Total
Homme	50	45	25	120
Femme	45	30	5	80
total	95	75	30	200

Si on choisit une personne au hasard, trouvez la probabilité que la personne choisie soit :

a Une femme qui parle arabe.

b Un homme qui parle anglais.

c Une personne qui parle l'arabe ou français.

d Une personne qui parle l'arabe et l'anglais.

e Une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe.

Solution

a La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui parle arabe = $\frac{45}{200} = 0.225$

b La probabilité que la personne Choisissez soit un homme qui parle l'anglais = $\frac{45}{200}$ = 0.225

c La probabilité que la personne Choisissez soit une personne qui parle l'arabe ou français $= \frac{95+30}{200} = 0.625$

d La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe $= p(\phi) = 0$

e La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe $= \frac{5}{200} = 0.025$

Essayez de résoudre

(14) Dans l'exemple précédant, Calculez la probabilité que la personne Choisissez :

a Une personne qui ne parle pas l'anglais . **b** une personne qui parle l'allemand .

c Une femme qui parle le français ou l'anglais .

d Un homme qui parle l'arabe ou une femme qui parle l'anglais .

Exercices (4 - 1)

(1) Un élève veut acheter un cartable. Il a le choix entre trois sortes de cartables à deux volumes différents et à deux couleurs différentes noire et marron. Représenter l'univers des éventualités de cette situation par un arbre graphique.

(2) On jette une pièce de monnaie puis un dé et on note le résultat apparu sur leurs faces supérieures.

a Ecrivez l'univers des éventualités puis détermine les événements suivants:

- l'événement A « obtenir face et un nombre impair ».
- l'événement B « obtenir pile et un nombre pair »
- l'événement C « obtenir un nombre premier plus grand que 2»
- l'événement D « obtenir un nombre divisible par 3»

(3) On jette un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure, détermine les événements suivants :

- l'événement A « obtenir deux nombres égaux. »
- l'événement B « obtenir deux nombres dont la somme est 9 ».

- l'événement C «obtenir deux nombres dont la somme est 13 ».
- l'événement D « obtenir 3 une seul fois».

4 Formez un nombre de deux chiffres différents parmi les chiffres $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique, écrivez l'univers des éventualités puis détermine les événements suivants :

- l'événement A « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est impaire».
- l'événement B « obtenir un nombre dont le chiffre des dizaine est impaire ».
- l'événement C « obtenir un nombre dont les deux chiffres sont impaires».
- l'événement D « obtenir un nombre dont le chiffre des unités ou le chiffre des dizaines est impair».

5 Un sac contient 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20. On tire au hasard une carte et on note le nombre inscrit sur cette carte, Déterminez les événements suivants :

(a) L'événement A « obtenir un nombre pair supérieur á 10 »
(b) L'événement B « obtenir un diviseur de 12»
(c) L'événement C « obtenir un nombre impair divisible par 3 »
(d) L'événement C « obtenir un nombre multiple de 2 et de 5 »
(e) L'événement D « obtenir un nombre premier »
(f) L'événement F « obtenir un nombre vérifiant l'inéquation $5x - 3 \leqslant 17$

6 Parmi 8 cartes identiques numérotées de 1 á 8, on tire au hasard deux cartes l'une après l'autre avec remise. Quel est le nombre des éléments de l'univers des éventualités :

(a) Si l'événement A « le nombre dans le deuxième tirage est le triple du nombre dans le premier tirage »
(b) l'événement B « la somme des deux nombres est supérieure á 13 » Ecrivez A et B. A et B sont ils incompatibles ? Expliquez votre réponse.

7 On jette une pièce de monnaie trois fois de suites et on note la succession des faces et des piles. Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique puis déterminez les événements suivants :

(a) l'événement A « obtenir pile deux fois au moins »
(b) l'événement B « obtenir pile deux fois au plus »
(c) l'événement C « obtenir face dans le premier jet »
(d) l'événement D « ne pas obtenir face dans les trois jets »

8 On jette une pièce de monnaie puis un dé. On note les résultats apparus sur les faces supérieures de la pièce et du dé. Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique puis déterminz les événements suivants :

(a) l'événement A « obtenir pile et un nombre pair »
(b) l'événement B « obtenir face et un nombre impair »
(c) l'événement C « la non réalisation de A ou la non réalisation de B »
(d) l'événement D « la réalisation de A seulement »
(e) l'événement E « la réalisation de A et la réalisation de B »

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

9 Si on jette un dé une seule fois, alors la probabilité d'obtenir un nombre impair inferieur á 5 est :

a $\frac{2}{5}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{6}$

10 Si on jette un dé deux fois de suite, alors la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le

premier jet et un nombre premier dans le deuxième jet est :

a $\frac{1}{3}$ b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{9}$ d $\frac{1}{4}$

11 Une boite contient 3 boules blanches, 5 boules rouges et 7 boules vertes, si on tire au hasard une boule, alors la probabilité que la boule tirée soit blanche ou verte est :

a $\frac{1}{5}$ b $\frac{2}{3}$ c $\frac{7}{15}$ d $\frac{1}{2}$

12 Une boite contient 9 cartes identiques numérotées de 1 á 9, si on tire au hasard une carte, alors la probabilité que la carte tirée porte un nombre qui divise 9 ou un nombre impair est :

a $\frac{1}{3}$ b $\frac{7}{9}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{5}{9}$

13 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $B \subset A$ et $P(A) = 2P(B) = 0.6$ alors $P(A - B)$ est égale à:

a 0.6 b 0.3 c 0.4 d 0.2

14 On jette un dé régulier dont ses faces portent les nombres 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

a Calculez la probabilité de chacun des événements suivants:

- L'événement A «obtenir un nombre impair».
- L'événement B «obtenir un nombre premier».
- L'événement C «obtenir un nombre pair».
- L'événement D « obtenir un nombre plus grand que 12».
- L'événement G « obtenir un nombre formé d'un seul chiffre »
- L'événement F « obtenir un nombre formé de deux chiffres ».

b Calculez : $P(A \cup C)$, $P(U \cup F)$, $P(B \cap D)$.

15 Soit $U = \{ A ; B ; C ; D \}$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 3 P(B)$, $P(C) = P(D) = \frac{7}{18}$. Calculez P(A) et P(B) plus grand que 12 ».

16 Soit A et B deux événements incompatibles de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A \cup B) = 0.6$, $P(A - B) = 0.25$ Trouvez, P(A), P(B).

17 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ trouvez :

a $P(A')$ b $P(A \cup B)$ c $P(A - B)$ d $P(A' \cap B')$

18 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et : $P(A) = 0.4$, $P(B') = 3P(B)$ et $P(A \cap B) = 0.2$, Calculez la probabilité des événements suivants :

a la réalisation de A seulement . b la réalisation de A ou B

c la réalisation de A et la non réalisation de B .

19 Une boîte contient des boules coloriées identiques parmi lesquelles il y a 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules jaunes. On tire une boule au hasard.

Calculez la probabilité que la boule tirée soit :

a soit rouge. b soit bleu ou jaune.

c ne soit pas bleu . d ne soit ni rouge ni jaune.

20 Une boite contient des cartes numérotées de 1 á 30. On tire au hasard une carte, Calculez la probabilité que la carte tirée porte:

a un nombre divisible par 3
b un nombre divisible par 5
c un nombre divisible par 3 et par 5
d un nombre divisible par 3 ou par 5

21 On jette une fois trois pièces de monnaie distinctes. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

- L'événement A « obtenir face une ou deux fois»..
- L'événement B « obtenir face au moins une fois ».
- L'événement C « obtenir face une fois au plus »..
- L'événement D « obtenir pile deux fois de suite au moins »..

22 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre inscrit sur la face supérieure .
Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

- L'événement « obtenir le nombre 4 lors du premier jet»..
- L'événement « la somme des deux nombres obtenus est égale à 8 ».
- L'événement « la somme des deux nombres obtenus est inferieure ou égale á 5 ».

23 **En lien avec le sport :** Dans un échantillon constitué de 60 personnes, on trouve que 40 personnes supportent le club Al Hilal, 28 personnes supportent le club Al Negma et 8 personnes ne supportent aucun des deux clubs si on choisit une personne de l'échentillion, qu'elle est la probabilité que la personne choisie soit un support:

a de l'un des deux clubs au moins?
b des deux clubs ensemble?
c du club Al Hilal seulement?
d de l'un des deux clubs seulement?

24 On jette une pièce de monnaie puis un dé. O note le résultat apparu sur la face supérieure de cette pièce et le nombre apparu sur ce dé. Si l'événement A « obtenir face et un nombre premier» , l'événement B « obtenir un nombre pair.
Calculez la probabilité de chacun des événements suivants:

a la réalisation de l'un des deux événements au moins
b la réalisation des deux événements á la fois
c la réalisation de B seulement
d la réalisation de l'un des deux événements seulement .

25 On tire au hasard une carte parmi 50 cartes numérotées de 1 á 50
Calculez la probabilité que la carte tirée porte un nombre :

a qui est multiple de 7
b qui est carrée parfait
c qui est multiple de 7 et carrée parfait
d qui n'est ni carrée parfait ni multiple de 7

26 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et :
$P(B) = \frac{4}{5} P(A)$, $P(A - B) = 0.24$ et $P(B \cap A') = 0.15$ Trouvez :
$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B')$

27 Tarek a écrit 75 messages sur un ordinateur. Il a trouvé que 60% de ce qu'il a écrit sont sans erreur. Zeyad a écrit 25 messages. Il a trouvé que 80% de ce qu'il a écrit sont sans erreur. Si on choisi au hasard un message de ce qu'ils ont écrit, trouve la probabilité que le message choisi soit :

a sans erreur.
b écrit par Zeyad.
c écrit par zeyad et sans erreur .
d Tarek l'a écrit avec des erreurs.

28 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que:
$P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.8$ et $P(A' \cup B') = 0.5$, alors trouvez $P(A' \cap B)$

Résumé de l'unité

1 **Expérience aléatoire :** C'est une expérience dont on peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir, laquelle de ces résultats sera réalisé.

2 **Univers des éventualités (univers des résultats)** L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience et on le note U

3 **L'événement :** C'est un sous ensemble de l'univers des éventualités.

4 **L'événement élémentaire :** C'est un sous ensemble de l'univers des éventualités qui contient un seul élément.

5 **L'événement certain:** C'est l'événement dont les éléments sont le même que l'univers U.

6 **L'événement impossible :** C'est l'événement qui ne contient aucun élément. Il est noté ϕ .

7 **Opérations sur les événements:** L'intersection – l'union – la complémentarité – la différence.

8 **Événements incompatibles**

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \phi$.
- On dit que plusieurs événements sont incompatibles si et seulement si ils sont incompatibles deux à deux

9 **Axiomes de la probabilité**

- Si U est univers d'une expérience aléatoire et ses événements élémentaires sont équiprobables
- Alors la probabilité de la réalisation de $A \subset U$ qui est notée $P(A) = \dfrac{\text{card (A)}}{\text{card (U)}}$

10 **Axiomes de la probabilité**

- Pour tout $A \subset U$, il existe un nombre réel appelé la probabilité de l'événement A et notée P(A) tel que : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(U) = 1$
- Si $A \subset U$; $B \subset U$ et A, B sont deux événements incompatibles, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

11 Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ....\cup A_n = U$ et ils sont tous incompatibles deux á deux, alors $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$

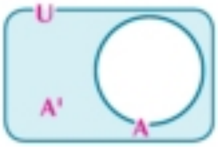
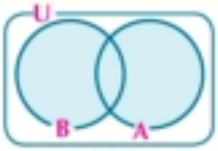
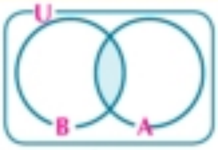
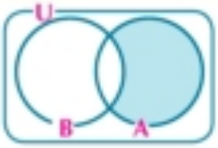
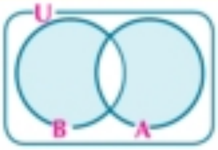
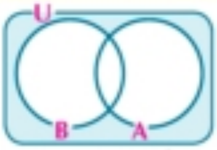
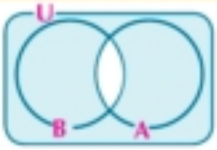
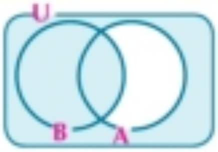
12 $P(\phi) = 0$

13 Si $A \subset U$ où U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, alors $P(A') = 1 - P(A)$

14 Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors

a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ b $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

15 Événements sous la forme verbale, leurs présentations par le diagramme de Venn et leurs probabilités :

Forme verbale de l'événement	Représentation de l'événement par un diagramme de Venn	Probabilité de la réalisation de l'événement
Non réalisation de l'événement A		$P(A') = 1 - P(A)$
Réalisation de A ou B (réalisation de l'un d'eux au moins)	 $A \cup B$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Réalisation de A et B (réalisation des deux á la fois)	 $A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
Réalisation de A seulement (réalisation de A et non réalisation de B)	 $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B')$
Réalisation de l'un des deux événements seulement (réalisation de A seulement ou B seulement)	 $(A - B) \cup (B - A)$	$P((A - B) \cup (B - A))$ $= P(A - B) + P(B - A)$ $= P(A \cup B) - P(A \cap B)$
Non réalisation d'aucun des deux événements (non réalisation de A et non réalisation de B	 $(A \cup B)' = A' \cap B'$	$P(A \cup B)' = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$
Non réalisation des deux événements á la fois (non réalisation de A ou non réalisation de B)	 $(A \cap B)' = A' \cup B'$	$P(A \cap B)' = P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$
Non réalisation de A seulement (réalisation de B ou non réalisation de A)	 $(A - B)' = B \cup A'$	$P(A - B)' = 1 - P(A - B) = P(B \cup A')$ $= P(A') + P(A \cap B)$

Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

On jette un dé deux fois de suite :

1. (1) La probabilité d'obtenir 5 dans le premier jet et 6 dans le deuxième est

   a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{6}$

2. La probabilité d'obtenir 5 dans l'un des deux jets et 6 dans l'autre est

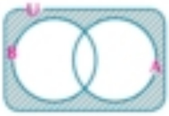
   a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{36}$ d) $\frac{1}{18}$

3. La probabilité d'obtenir deux nombres égaux dans les deux jets est

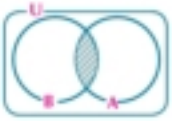
   a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{18}$

Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, choisissez l'événement qui représente la partie hachurée :

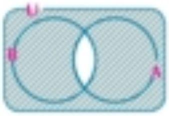
4. a) $U - (A \cup B)$ b) $A' \cup B'$
   c) $U - (A' \cup B')$ d) $(A \cap B)'$



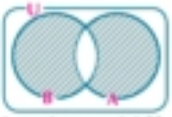
5. a) $A \cap B$ b) $A \cup B'$
   c) $(A \cup B)'$ d) $A' \cup B'$



6. a) $(A \cup B) - (A \cap B)$ b) $U - (A \cap B)'$
   c) $U - (A \cup B)'$ d) $U - (A \cap B)$



7. a) $U - (A \cap B)$ b) $A' \cap B'$
   c) $(A - B) \cup (B - A)$ d) $U - (A \cup B)'$



8. Parmi les chiffres du nombre 4321, forme des nombres formés des deux chiffres différents. Représente l'univers des éventualités par un arbre graphique puis écrivez -le et les événements suivants:

   l'événement A « ensemble des nombres premiers »

   l'événement B « ensemble des nombres divisible par 3 »

   l'événement C « ensemble des nombres divisible par 3 et par 5 »

   l'événement D « obtenir des nombres dont le chiffre des unités est le double de celui des dizaines »

9. On jette un dé une seule fois et on note le nombre apparu sur la face supérieurs.

   Calculez la probabilité que ce nombre soit:

   a) premier b) un diviseur de 6 c) impair divisible par 3

(10) Si A et B sont deux événements de l'univers d'une expérience aléatoire.

Complète ce qui suit pour obtenir des propositions correctes :

a Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :

➢ $A \cap B =$ .... ➢ $A - B =$ .... ➢ $B - A =$ ....

b Si $B \subset A$ alors:

➢ $(A \cap B) =$ .... ➢ $A \cup B =$ .... ➢ $B - A =$ ....

c Si $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0.5$ et $P(A \cap B) = 0.1$ alors:

➢ $P(A \cup B) =$ .... ➢ $P(B - A) =$ .... ➢ $P(A' \cap B') =$ ....

d Si $A \cap B = \phi$, $P(A') = 0{,}7$ et $P(B') = 0.4$ alors:

➢ $P(A \cup B) =$ .... ➢ $P(A \cap B) =$ .... ➢ $P(A - B) =$ ....

(11) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, $A \subset B$, $P(A) = \frac{1}{2}$, et la probabilité de la réalisation de B seulement est égale à 0,2. Calculez la probabilité de la non réalisation de B.

(12) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire , P est la fonction de la probabilité définie sur U et $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = x$ et $P(A \cup B)' = \frac{1}{3}$

a Trouvez x si ➢ A et B sont incompatibles. ➢ $A \subset B$.

b Si $x = \frac{1}{4}$ trouvez $P(A \cap B)$.

(13) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Exprimez chacun des événements suivants par des expressions symboliques puis représentez-les par un diagramme de Venn:

a la non réalisation de A

b la réalisation des deux événements A ou B.

c la réalisation de B seulement .

d la réalisation de A et la non réalisation de B.

e la non réalisation des deux événements á la fois .

f la réalisation de l'un des deux événements seulement .

(14) On jette une pièce de monnaie trois fois de suite. On note la succession des faces et des piles. Représentez l'univers des éventualités de cette expérience par un arbre graphique puis calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

a L'événement A « obtenir face deux fois exactement »

b L'événement B « obtenir face deux fois au plus »

c L'événement C « obtenir pile une fois au plus »

d L'événement D « obtenir le même résultat dans les trois jets » .

15 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

a Dessiner une figure géométrique représentant l'univers des éventualités U sur laquelle, montrez les événements suivants .

- L'événement A « obtenir deux nombres dont la somme est un nombre impair et plus grand que 6 ».
- L'événement B « obtenir deux nombres dont l'un est 2 et la somme $\leqslant 5$ ».
- L'événement C « obtenir deux nombres égaux ».

b Lesquels des événements A ; B et C sont incompatibles deux à deux?

c Calculez ce que suit: $P(A \cup B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cup C)'$, $P(B - C)$.

16 Parmi cinq cartes identiques numérotées de 2 à 6, on tire deux cartes l'une après l'autre avec remise et on observe le nombre inscrit sur la carte tirée pour former tous les nombres à deux chiffres possibles. Trouver la probabilité que :

a le chiffre des unités soit un nombre premier.

b le chiffre des dizaines soit impair.

c le chiffre des unités soit un nombre premier ou son chiffre des dizaines soit un nombre impair.

Journal:

17 Dans un échantillon de 50 personnes on trouve que 27 personnes lisent le journal A, 24 personnes lisent le journal B et 9 personnes lisent les deux journaux ensemble. On choisit une personne de cet échantillon au hasard. Calculez la probabilité que la personne choisie lise.

a le journal A seulement.

b l'un des deux journaux au mois.

Tourisme :

18 Dans l'un des spectacles du son et lumière présenté aux Pyramides, il y avait 200 personnes de nationalité différentes comme l'indique le tableau ci-contre. Si on choisit un spectateur au hasard à l'aide des tickets d'entrée pour lui offrir un souvenir, trouve la probabilité que la personne choisie soit :

	Arabe	Européen	Américain	Total
Homme	32	47	15	94
Femme	23	63	20	106
total	55	110	35	200

a un homme européen.

b une femme américaine.

c une femme.

d une personne qui a une nationalité arabe ou une européenne.

19 Soit $U = \{A ; B; C\}$, l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que ,
$20P(A) = 15P(B) = 12P(C)$ trouvez : $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$

Épreuve cumulative

Complétez ce qui suit :

1. Si on jette un dé une fois et on note le nombre apparu sur la face supérieure, alors l'univers des éventualités U = ...
2. Si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat apparu sur la face supérieure, alors l'événement « avoir face une fois au plus » = ...
3. Si on jette un dé puis une pièce de monnaie, et on note le résultat apparu sur la face supérieure de chacun, alors l'événement « avoir un nombre premier » = ...
4. Si on jette un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure, alors l'événement « la somme des deux nombres est 5 » = ...
5. Si on tire au hasard une carte parmi 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20 et on note le nombre inscrit sur la carte tirée, alors l'événement « le nombre inscrit sur la carte tirée est divisible par 3 » = ...
6. Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suites et on note la succession des faces et des piles, alors l'événement « avoir deux faces exactement » = ...
7. Si $A \subset U$ où U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A') = 3\,P(A)$ trouvez $P(A')$.
8. Une boite contient 20 cartes identiques numérotées de 1 à 20. Si on tire aléatoirement une carte de cette boite, trouvez la probabilité que le nombre inscrit soit :

   a) divisible par 6 b) premier supérieur à 10 c) un facteur de 12

9. Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A \cup B) = 0.85$, $P(A) = 0.75$ et $P(B') = 0.6$ trouvez :

   a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cap B')$ c) $P(A' \cup B')$

10. Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = \frac{2}{3} P(B)$; la probabilité de l'événement « l'un de deux événements est réalisé au plus» est égal à 0,75 et la probabilité que l'un de deux événements est réalisé au moins est égal à 0,6 ; trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

    a) la réalisation des deux événements simultanément .
    b) la réalisation de l'un des deux événements seulement .
    c) la réalisation de A et la non-réalisation de B.

11. Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A') = \frac{3}{5}$ $P(A \cup B) = 0.45$; trouvez $P(B)$ dans chacun des cas suivants :

    a) A et B sont deux événements incompatibles b) $A \subset B$

    c) $P(B - A) = 0.2$

12) **Un groupe touristique :** se compose de 19 Russes, 17 Italiens et 14 Français. Si on choisit au hasard un touriste parmi eux, calculez la probabilité que le touriste choisit:

a) soit Russe ou français .
b) ne soit pas Français .
c) soit Européen .
d) soit Néerlandais.

13) **En lien avec l'environnement scolaires :** Dans la cérémonie d'hommage des étudiants supérieures, la probabilité que le gouverneur assiste à cette cérémonie est égal à 0,8 ; la probabilité que le directeur général assiste à cette cérémonie est égal à 0,9 et la probabilité que les deux assistent en même temps est égal à 0,75. Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) l'assistance du gouverneur seulement .
b) l'assistance de l'un de deux au moins.
c) la non-assistance de deux ensemble.

14) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 0.6$; $P(B') = 0.3$ et $P(A \cup B) = 0.9$; Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) la réalisation de A ou B
b) la réalisation de A et non B
c) la réalisation de A seulement ou B seulement

15) Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $U = \{A, B, C\}$

$\frac{P(C')}{P(C)} = \frac{7}{3}$ et $2\,P(B) = 3\,P(B')$, trouvez $\frac{P(C')}{P(C)}$

16) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 0.6$; $P(B) = 0.5$ et $P(A' \cup B') = 0.7$. Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) la réalisation de A et B ensemble
b) la réalisation de A seulement
c) la réalisation de l'un de deux événements au moins
d) la réalisation de l'un de deux événements seulement

17) 50 candidats se sont présentés pour un poste dans une banque comme indiqué par le tableau ci-contre. On choisit au hasard un candidat. Trouvez la probabilité que le candidat choisi soit :

Sexe	licenciée	baccalauréat	Total
Mâle	16	14	30
Femelle	12	8	20
Total	28	22	50

a) une femme .
b) baccalauréat .
c) licenciée .
d) femme ou licenciée .

Epreuves Générales

Epreuve (1) — Algèbre

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. La règle de la suite (1×2) , (2×3) , (3×4) , (4×5) , (5×6) est ....
   - a) $(n - 1)(n + 1)$
   - b) $n(n + 1)$
   - c) $2n(n + 1)$
   - d) $(n + 1)(n + 2)$

2. La moyenne arithmétique de nombres 8 et 12 est ....
   - a) 8
   - b) 12
   - c) 10
   - d) 2

3. La somme de la série $\sum_{r=1}^{3} 3r$ = ...
   - a) 1
   - b) 3
   - c) 6
   - d) 18

4. P_5^3 = ...
   - a) 5
   - b) 3
   - c) 60
   - d) 15

Question (2) :

1. Trouvez le rang du premier terme négatif dans la suite (11 ; 9 ; 7 ; ...)

2. Soit la suite arithmétique $(16 + 40x \,;\, 50x - 9 \,;\, ... \,;\, 3x + 15 \,;\, 5x + 6)$, Trouvez la valeur de x puis trouvez le nombre des termes de la suite.

Question (3) :

1. Une suite géométrique positive $t_1 + t_2 = 48$, $t_3 + t_4 = 192$
   - a) Déterminez la suite.
   - b) Trouvez la somme de dix premiers termes.

2. Ecrivez chacune du développement des séries suivantes, puis trouver la somme, ensuite vérifiez à l'aide de la calculatrice
   - a) $\sum_{r=2}^{7} (1 - 2r)$
   - b) $\sum_{r=1}^{8} \left(\frac{-1}{2}\right)^r$

Question (4) :

1. Trouvez la valeur de :
   - a) $5! - 3!$
   - b) $5! \times 2!$

2. Déterminez l'ensemble solution des équations suivante :
   - a) $C_{12}^{r} = C_{12}^{r^2+3}$
   - b) $(n - 8)! = 1$

Epreuve (2) Algèbre

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. La moyenne géométrique de nombres 4 et 16 est ....

   a) 8　　b) 8　　c) $\pm$ 8　　d) 4

2. La somme des termes de la suite (1 ; 3 ; 5 ; ... ; 17 ; 19) est ....

   a) 20　　b) 50　　c) 100　　d) 30

3. La moyenne arithmétique de nombres x et 16 est 3 alors x ....

   a) -10　　b) 3　　c) 16　　d) 6

4. $C_5^r = 10$ alors $r =$ ....

   a) 5　　b) 3　　c) 10　　d) 1

Question (2) :

1. Insérez huit moyennes arithmétiques entre 2 et 29.Puis calculez la somme de ses moyennes.

2. Une suite géométrique positive infinie, la somme de ses premier et deuxième termes est 36. Le carré de son troisième terme est 36. Déterminez la suite, puis calculez la somme de ses termes à partir de son premier terme.

Question (3) :

1. Une suite géométrique positive $t_2 = 12$, $t_4 = 2\,t_3$ Trouvez la somme de ses sept premiers termes.

2. Calculez la somme des séries suivantes :

   a) $\sum_{r=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}$　　b) $\sum_{k=3}^{9} (3k+1)$

Question (4) :

1. Trouvez la valeur de :

   a) $5! - 2!$　　b) $\sum_{r=1}^{3} C_4^r$

2. De combien de méthodes peut- on arranger 5 personnes dans un rangé?

Epreuve (3) Algèbre

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :-

1. Une suite géométrique telle que $t_n = \frac{1}{2} t_{n-1}$ alors la raison de la suite :
   a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$
2. Si $t_n = 15 - 3n$ alors le premier terme négatif dans la suite est:
   a) t_3 b) t_5 c) t_6 d) t_{15}
3. Le septième terme de la suite (t_n) où $t_n = 8 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$ est
   a) 8 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{8}$
4. $C_n^r = l$ alors $l \in$
   a) $\mathbb{Z}$ b) $\mathbb{Z}^+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{N}$

Question (2) :

1. Si on a inséré des moyennes arithmétiques entre 2 et 47 le rapport entre le deuxième moyenne et le dernière moyenne est 2 : 7. Quel est le nombre des moyennes ?
2. Une suite géométrique son troisième terme est 9, le sixième terme est 243.Déterminez la suite, puis calculez la somme de huit premiers termes de la suite.

Question (3) :

1. Si $t_{n+1} - t_n = 2$ d'une suite arithmétique, et son premier terme = 6. . Déterminez la suite, Puis trouvez la somme de ses dix premiers termes.
2. Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis trouver la somme.
   a) $\sum_{r=3}^{7} (\frac{1}{3})^{2r+1}$ b) $\sum_{r=1}^{5} (\frac{1}{3})^r$

Question (4) :

1. De combien de méthodes peut- on éluer 3 hommes et deux femmes parmi 4 hommes et 3 femmes?
2. Trouvez la valeur de
   a) A_8^3 b) $A_5^3 - A_5^2$

Epreuve (4) Algèbre

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :-

1) $(T_n) = (3n - 5)$ est une suite arithmétique, sa raison = ... et son premier terme = ...

a) 3 ; 1 b) 1 ; 3 c) 3 ; -2 d) 5 ; -2

2) La moyenne arithmétique de deux nombres positifs différents est .... leur moyenne géométrique

a) > b) < c) = d) ⩾

3) Si $t_n - t_{n+1} = 3$ alors, la raison de la suite arithmétique (t_n) = ...

a) 3 b) -3 c) 1 d) -1

4) Si $C_n^3 = 56$ alors n = ...

a) 8 b) 2 c) 10 d) 5

Question (2) :

1) Trouver le nombre des termes de la suite arithmétique de premier terme = 3 et le dernière terme est 39 et la somme de n termes est 210.

2) Soit la série arithmétique (3 + 6 + 9 + 12 + ...). Trouvez :

a) la somme de ses 15 premiers termes.

b) la somme des termes de la série à partir du cinquième terme jusqu'au quinzième terme.

Question (3) :

1) (a ; 320 ; b ; c ; 40 ; ...) une suite géométrique positive, déterminez la valeur de a ; b et c. Puis trouvez la somme de tous ses termes à partir du première terme.

2) Ecrivez trois suites géométriques de premier terme 3 tels que la première est croissante la deuxième est décroissante et la troisième est constante. Puis trouver la somme à l'infinie de l'une de ses suites.

Question (4) :

1) Ecrivez tous les sous-ensembles de deux éléments peut-on former de l'ensemble {a ; b ; c ; d ; e}

2) Trouvez l'ensemble solution des équations suivantes :

a) $(n - 4)! = 720$ b) $C_9^r = C_9^{r-1}$

Epreuve (5) Algèbre

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :-

1. Une suite géométrique dans la quelle (t_n) alors sa raison $t_{n-1} = \frac{3}{5} t_n$ est égale à :

   a) 3 b) 5 c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{3}{5}$

2. Si a , 24 , b sont trois termes consécutives d'une suite arithmétique, alors la valeur de (a + b) = ...

   a) 24 b) 48 c) 12 d) 6

3. La moyenne géométrique de deux nombres = 7, alors leur produit = ...

   a) 7 b) 49 c) 14 d) –49

4. Si $C_n^3 = 35$ alors n = ...

   a) 3 b) 5 c) 7 d) 10

Question (2) :

1. Soit la suite géométrique (2; 4; 8; ....). Trouver :

   a) Le cinquième terme b) le rang du terme dont la valeur est 512

2. Insérer septe moyennes géométriques entre $\frac{81}{16}$ et $\frac{16}{81}$

Question (3) :

1. Trouvez le nombre des termes de la suite arithmétique (8; 11; 14; .....; 50) Puits trouvez la valeur de dixième terme à partir de fin.

2. Combien de termes de la suite (27, 24, 21, ...) faut - il additionner à partir du premier terme pour que la somme soit nul?

Question (4) :

1. Trouvez la valeur de

   a) $A_6^3 + A_6^1$ b) $\sum_{r=1}^{r=5} C_6^r$

2. De combien de méthodes peut-on porter une chemise et un pantalon choisis parmi 4 chemises et 3 pantalons?

Epreuve (6) Dérivation, intégration et probabilité

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1. Le taux de variation de la fonction $f(x) = x^2$ lorsque x varie de 1 à 2 est égal à ....

   a) -3 b) 1 c) 4 d) 3

2. La dérivée première de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 3$ est ....

   a) $2x$ b) $2x - 3$ c) x^2 d) $3 - 2x$

3. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cap B) =$ ....

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) 1

4. $\int 3x^2\, dx =$ ....

   a) $x^3 + c$ b) $x^2 + c$ c) $3x^2 + c$ d) x^3

Question (2) :

1. Si $f(x) = x^2 + 1$ trouvez le nombre dérivé, puis calculez sa valeur en $x = 1$
2. Si A et B sont deux événements incompatibles et $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$. Trouvez $P(A \cup B)$

Question (3) :

1. Si $y = (x^2 + 1)(x^2 + 3)$ trouvez $\frac{dy}{dx}$
2. Dans l'expérience a lancer, un dé en observant le nombre apparu sur la face supérieure. Déterminez l'espace des univers, puis déterminez les événements suivants.
   - L'événement A « le nombre apparu est premier»
   - L'événement B « le nombre apparu est divisible par 6»
   - L'événement C « le nombre apparu est divisible par 7»

Question (4) :

1. Déterminez la mesure de l'angle qui fait la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 - 2x$ avec la direction positive de l'axe des abscisses au point de coordonnées (1 ; -1).
2. Trouvez :

   a) $\int (2x + 3)\, dx$ b) $\int \frac{x^3 + 1}{+1}\, dx$

Epreuve (7) Dérivation, intégration et probabilité

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) Si $f(x) = 2x$, alors $\int f(x)\, d\, x$ est égal à

a) x^2 b) $x^2 + c$ c) $2x$ d) $2x + c$

2) La dérivée première de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ est

a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{-1}{x^2}$ c) x d) x^2

3) Si on jette un dé deux fois de suite, alors la probabilité d'obtenir deux nombres égaux dans les deux jets est :

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{18}$

4) La mesure de l'angle positive qui fait la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 - 1$ avec le sens positive de l'axe des abscisses en $x = \frac{1}{2}$ est égal à

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) π

Question (2) :

1) Trouvez le nombre dérivé de la fonction $f(x) = 2x - x^2$ en $x = 2$

2) Une boîte contient 6 cartes numérotées de 1 à 6. On tire, au hasard une carte et on note le nombre apparu. Déterminez la probabilité des événements suivants

- A «l'événement obtenir un nombre premier»
- B «l'événement obtenir un nombre pair et divisible par 3»

Question (3) :

1) Trouvez la dérivée première de la fonction $y = (x - 1)(x + 1)$

2) Si A et B sont deux événements d'une espace des univers tels, que :
$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ .Trouvez

a) $P(A')$ b) $(A \cup B)$

Question (4) :

1) Trouvez les coordonnées des points de la courbe $y = x^2 + 2$ auxquels la pente de la tangente est égale à 2.

2) Trouvez :

a) $\int -2z\ dz$ b) $\int ((x-1)^5 + 3)\, d\, x$

Epreuve (8) Dérivation, intégration et probabilité

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Le nombre dérivé de la fonction : $f(x) = x^2 - 1$ en $x = -2$ est égal à ....

   a) 4 b) -4 c) -1 d) 1

2. $\int x^{-2}\, d\, x =$ ....

   a) $-x^{-1} + c$ b) $-\frac{1}{x}$ c) $1 + \frac{1}{x^2}$ d) $x^{-3} + c$

3. Si les événements A et B sont incompatibles, alors $P(A \cap B) =$ ....

   a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) P(A)

4. La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ en $x = 1$ est égal à

   a) 1 b) -1 c) 0 d) indéfinie

Question (2) :

1. Si $f(x) = 2x - x^2$ Trouvez :

   a) La fonction de variation v(h) en x = 1

   b) Le taux de variation lorsque x varie de 1 á 1,1

2. Si A et B sont deux événements d'une espace des univers tel que :
   $P(B) = 3P(A)$, $P(A \cup B) = 0.72$. Trouvez P(A) et P(B) si:

   a) A et B sont incompatibles b) $A \subset B$

Question (3) :

1. Si $y = 4x^3 - 5x^2 + 4x + 9$, trouvez $\frac{d\, y}{d\, x}$

2. Une urne contient 4 boules blanche, 5 boules rouge, 3 boules noire. On tire au hasard une boule, trouvez la probabilité pour que la boule tirée soit :

   a) rouge b) non blanche c) blanche ou noire

Question (4) :

1. Trouvez les points de la courbe d'équation $y = x^3 + 3x^2 - 1$ auxquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. Trouvez les intégrals suivantes :

   a) $\int (x-5)(x-1)\, d\, x$ b) $\int 6(x-2)^5\, d\, x$

Epreuve (9) Dérivation, intégration et probabilité

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Le nombre dérivé de la fonction $f(x) = x^2$ en $x = 1$ est égal à :

   a) 2 b) 1 c) -1 d) -2

2. La probabilité de l'événement certain est égale à :

   a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) -1

3. La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{x^2}$ en $x = 1$ est égal à

   a) 0 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 1

4. $\int (x^2 - 1)\, d\, x$

   a) $x^3 - x$ b) $\frac{1}{3}x^3 - x + c$ c) $\frac{1}{3}x^3 + c$ d) $-\ x + c$

Question (2) :

1. Trouvez le nombre dérivé de la fonction: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $x = 2$

2. Si $S = \{a ; b ; c\}$ est une espace des univers, trouvez :

   $P(A)$ si $P(B) = 2P(A)$ et $P(C) = \frac{1}{4}$, puis trouvez $P(A \cup C)$

Question (3) :

1. Trouvez la dérivée première de ce qui suit :

   a) $y= \frac{x}{x+1}$ b) $y = x^3 + x^2 - 1$

2. Si A est la probabilité de la réussite d'un élève dans l'examen de physique et B est la probabilité de la réussite de cet élève dans l'examen de mathématiques tels que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Calculez :

   a) la probabilité de la réussite de l'élève dans l'un de deux examens au moins.

   b) la probabilité de la réussite de l'élève dans l'examen de la physique.

Question (4) :

1. Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (x - 1)(x + 1)$ aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

2. Trouvez :

   a) $\int (2x - 3)^5\, d\, x$ b) $\int 2x(x^2 + 3)\, d\, x$

Epreuve (10) Dérivation, intégration et probabilité

Répondez aux questions suivantes :

Question (1) : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2}) =$

   a) x^{-2} b) $\frac{-2}{x^3}$ c) $-2x^{-2}$ d) x^{-3}

2. Le taux de variation de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ lorsque x varie de 4 à 4,41 est égal à

   a) 40 b) 0.41 c) $\frac{41}{10}$ d) $\frac{10}{41}$

3. $\int 5\, dx =$

   a) 5 b) $5x + c$ c) $5x$ d) $5 + x$

4. La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = 2x^2$ au point de coordonnées (1 ; 2) est égal à

   a) 2 b) 1 c) 4 d) 0

Question (3) :

1. Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si $y = (3x - 1)^5$
2. Si on lance une pièce de monnaie trois fois de suite, calculez la probabilité de chacun des évènements suivants :

   A « l'évènement obtenir face une seule fois»

   B « l'évènement obtenir face deux fois au moins»

Question (3) :

1. Trouvez la dérivée première de ce qui suit :

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x^2 + x$

2. Dans un lycée, il y a 20 professeurs et 4 administratives. On veut choisir deux au hasard, pour accompagner les élèves dans une mission. Quelle est la probabilité pour que les deux accompagnés soient:

   a) deux professeurs b) administrateur et professeur
   c) deux administrateurs

Question (4) :

1. Trouvez la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ au point (1 ; 2)
2. Trouvez :

   a) $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}\, dx$ b) $\int 4\,(x - 2)^3\, dx$

Réponses de quelques exercices et des épreuves

Unité (1) : Principe de dénombrement et arrangements et Combinaisons.

Réponses de quelques exercices (1 – 1)

1) 9 2) 19 3) 1 4) 19 5) a 6) d

7) a infini b fini c infini d fini

8) a (2, 6, 12, 20, 30)
 b $(-\frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$
 c $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243})$
 d (-1, 0, -1, 4, -9)

9) a Pattern $(t_n) = 4n + 61$
 b $(t_n) = 3(-2)^{n-1}$
 c $(t_n) = (\frac{1}{2})^n$

10) a (8 , 10 , 12 , 14 , 16)
 b $t_n = 2n + 6$ c 20
 d le douzième jour

11) a (1 + 4 + 7 + 10 + 13)
 b (3 + 9 + 11 + 17 + ... à 8 termes)
 c $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... \infty)$
 d $(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... \infty)$

12) a 65 b (2 + 7 + 14 + 23 + 34), 80

14) a (3 × 32 + 3 × 16 + 3 × 8 + 3 × 4)
 b Périmètre de quatrième triangle = 12 cm
 c 180 cm

15) a $(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + ...) = \sum_{1=r}^{n} 3^n$
 b 243 c 363

Réponses des exercices (1 - 2)

1) Suite arithmétique r = 3
2) n'est pas une suite
3) Suite arithmétique r = 6
4) Suite arithmétique constante r = 0
5) Suite arithmétique r = 2x + y
6) (2 , 7 , 12 , ...) 7) (7 , 4 , 1 , ...)
8) $(-4 , -\frac{15}{4} , -\frac{7}{2} , ...)$
9) 20 10) 28
11) $t_n = 85 - 84$ 12) $t_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}n$
13) 10 14) 15
15) c 16) d
17) d 18) 3

Réponses des exercices (1 - 3)

1) 210 2) 110 3) 200
4) 243 5) 90 6) 35
7) 24 8) $\sum_{r=1}^{n} (52 + r5)$ $\sum_{r=1}^{4}$ 9) (1 - r)
10) faux ; correction : la somme = 0
11) faux ; correction : la somme de nef premiers termes = 0 ou la somme de six premiers termes = 204
12) $a = 14, d = 4, S_n = \frac{10}{2}[2 \times 14 + 9 \times 4] = 320$
13) $S_{15} = \frac{15}{2}(a + l) = \frac{15}{2}(4 + 26) = 225$
14) (420)
15) - 260 16) 1020 17) 1107

Réponses des exercices (1 - 4) :

1) n'est pas une suite géométrique
2) suite géométrique $q = \frac{1}{3}$
3) suite géométrique q = 2
4) suite géométrique $q = \frac{1}{2}$
5) suite géométrique -3 = r
6) n'est pas une suite géométrique

Complétez :

11) un 12) un 13) 162
14) $T_n = 3(-2)^{n-1}$ 15) ±8 16) 25

Choisissez :

18) d 19) b 20) b 21)

Réponses des exercices (1 – 5)

1) b 2) a 3) c 4) c 5) a

Réponses de quelques exercices généraux

1) 1 2) $\sum_{1=r}^{10} 5r$ 3) $t_n = 4n - 1$
4) ± 12 5) a = 7 6) 19
7) 80 8) 31

Réponses de l'épreuve cummulativé

1. La suite est un ordre d'un ensemble des nombres réels. La série est la somme des termes de la suite.
2. Le nième terme d'une suite arithmétique est à la forme $t_n = a + (n-1)\,r$ où a est le premier terme et r est la raison.
   Le nième terme d'une suite géométrique est à la forme $t_n = aq^{n-1}$ où a est le premier terme et q est la raison .

Questions à une courte réponses

4. a 14 b $\frac{1}{2}$
   c -15 d 1

Unité (2) : Principe de dénombrement, Arrangements et Combinaisons

Réponses des exercices (2 – 1)

1. d 2. c 3. d
4. $3^3 = 27$ 5. 6
8. Le nombre des nombres $= (10)^8 = 100000000$

Réponses des exercices (2 – 2)

1. d 2. b 3. a
4. d 5. c 6. c
7. b 8. 6 9. 16
10. $A_4^2 = 12$
12. nombre de méthodes $= 3 \times 4 = 12$
13. nombre de méthodes pour choisir = 15
14. a $A_6^1 = 6$ b $A_6^2 = 30$
15. a 42 b 0
    c 120 d 12
    e 64 f 5041
16. a 4 b 6
    c n = 3 d 7
17. a ${}^7l_n = {}^7l_3$, n = 3
    b $(2n)! = 24$, n = 2
18. n = 7 ou n = 8
19. $A_{10}^3 = 720$
20. $A_8^3 = 336$
21. à droite $= (n+2)(n+1) = A_{n+2}^2$

Réponses des exercices (2 – 3)

1. b 2. b 3. a
4. 20 , 9 , 12 , 1
5. 10 6. 9 7. 15
8. $C_5^5 + C_5^4 + C_5^3 = 16$
9. $C_{10}^3 \times C_8^2 = 3360$
10. a $\dfrac{A_8^3}{3!}$ b $\dfrac{A_{19}^2}{2!}$
    c $\dfrac{A_n^1}{0!}$ d $\dfrac{A_x^y}{y!}$
11. a 28 b 84
    c 210 d 1

Réponses des exercices généraux

1. $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$
2. ${}^39 = 729$
3. $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^n$
   ${}^42 = 2^n \quad \therefore n = 4$
4. $\because$ n!=1! , $\therefore n = 0$ ou $n = 1$
5. b 6. c
7. c 8. a
9. b 10. b
11. a 1 b 720 c 23
    d 50 e $\frac{1}{14}$ f 24
12. n = 5 , n - 5! = 1 13. r = 2 , $C_{2r}^4 = 1$
14. m = 3 , n =10 15. $C_{10}^7 = 120$
16. n = 5
17. $C_7^1 \times C_5^2 = 7 \times 10 = 70$
18. 12
19. $A_{12}^2 = 132$

(20) **a** $n = 4$ **b** $n = 2$ **c** $n = 9$

d $n = 5$ ou $n = 6$ **e** $n = 9$ **f** $r = 3$

Réponses de l'épreuve cumulative

(1) **d** (2) **c** (3) **c** (4) **b**

(5) **b**

(6) **a** 32 **b** 0

(7) 400 (8) 10

(9) 120

(10) **a** $\frac{1}{100}$ **b** 10 **c** $\frac{1}{20}$

d 96 **e** 24

(11) $C_6^2 = 15$

(12) **a** $n = 6$ **b** $n = \frac{5}{2}$

c $n = 8$ **d** $n = 6$

e $n = 1$ **f** $n = 4$

Unité (3): Dérivation et Intégration :

Réponses des exercices (3 – 1)

(1) **b** (2) **d** (3) **d** (4) **c**

(5) $d(x) = x^2 + 2x - 1$

$\because$ Lorsque x varie de x_1 à $x_1 + h$

$\therefore F(h) = f(x_1 + h) - f(x_1)$

$= (x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h) - 1 - x_1^2 - 2x_1 + 1$

$= 2x_1 h + h^2 + 2h$

a 0.61

b 1

Réponses des exercices (3 – 2)

(1) En utilisant la définition de la dérivée on trouve :

a $f'(x) = 5$ **b** $f'(x) = 6x$

c $f'(x) = 3x^2$ **d** $f'(x) = 2x + 2$

(2) **a** $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ f n'est pas dérivable en $x = 0$

b $d'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2}$

f n'est pas dérivable en $x = -3$

c $d'(x) = \frac{-6}{(2x-5)^2}$

f n'est pas dérivable en $x = \frac{5}{2}$

d $d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$

f n'est pas dérivable en x $x \geqslant 4$

Réponses des exercices (3 – 3):

(1) d (2) a (3) c (4) d

(5) 2 (6) $6x$ (7) $4x^3 - 4x$

(8) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (9) $\frac{-3}{x^4}$ (10) 0

(11) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ (12) $\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ (13) $10x + 3$

(14) $7\sqrt{2}\,x^6 - x^4$

(15) **a** $15x^4$ **b** $-6x^{-9}$ **c** $\frac{-3}{x^3}$

d $\frac{2}{\sqrt{x}}$ **e** $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

f $\frac{-1}{x\sqrt{x}}$

ز $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ **ح** $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(16) $3x^2 + 6x$ (17) $2x^3 - 2x^2 + 7$

(18) $12x^5 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ (19) $4 - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

(20) $9x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(21) $6\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

(22) $6x^2 + 10x + 2$ (23) $6x^2 + 6x - 14$

(24) $5x^4 + 2x - 9$ (25) $4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

(26) $\frac{15}{(5x+1)^2}$ où $x \neq -\frac{1}{5}$

(33) $y - 5x + 10 = 0$, $5y + x - 2 = 0$

(35) $c = 3$, $b = -4$

Réponses des exercices (3 - 4)

(1) $\frac{1}{3}x^3 + c$ (2) $\frac{1}{8}x^8 + c$

(3) $4x^2 + c$ (4) $-x^4 + c$

(5) $x^9 + c$ (6) $-\frac{4}{x^3} + c$

(7) $5x + c$ (9) $-\frac{3}{8}x^8 + c$

(10) $\frac{4}{5}x^{-2} + c$ (11) $\frac{1}{3}n^7 + c$

(12) $\frac{2}{5}g^6 + c$ (13) $\frac{1}{2}x^2 + x + c$

(14) $5n - n^2 + c$ (15) $\frac{1}{4}n^4 - \frac{6}{5}n^5 + c$

(20) $x^7 - \frac{7}{3}x^3 + c$ (21) $\frac{1}{3}x^3 - x + c$

(27) $\frac{1}{2}x^2 + x + c$ (28) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 9x + c$

(29) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ (30) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

(31) $\frac{1}{4}(x+4)^4 + c$ (32) $\frac{1}{2}(2x-7)^7 + c$

(33) $\frac{-1}{15}(8 - 3n)^5 + c$

(34) $-2(x-3)^{-3} + c$

Réponses des exercices généraux :

(10) a $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$

b $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 6x - 4$

c $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 5x^2 + 7$

d $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

(11) a 0 b 1 c 4 d 2

(12) a 45° b 45° c 135° d $96' 20^\circ$

(14) 2 (15) 0

(16) a $\frac{dy}{dx} = 6(2x+1)^2$

b $\frac{dy}{dx} = 15x^2(x^3+1)^4$

c $\frac{dy}{dx} = 4(6x-1)(3x^2 - x + 2)^3$

d $\frac{dy}{dx} = 24x^2(2x^3+5)^3$

(17) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + c$

(18) $\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + c$

(19) $\frac{1}{3}x^3 - 4x + c$

(20) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + c$

(21) $\frac{1}{2}x^2 + x + c$

(22) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + c$

(23) $(x-2)^6 + c$

(24) $-(x+3)^{-3} + c$

Réponses de l'épreuve cummulativé

(1) b (2) c (3) d (4) c

(5) a $6x - 5$ b $3x^2 - 6x + 5$

c $2x$ d $\frac{2}{(x+1)^2}$

Unité 4: Probabilité

Réponses des exercices (4 - 1)

(5) A = { 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20} , B = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}
C = { 3 ; 9; 15} , D = { 10 ;20} , F = { 1 ; 2; 3 ; 4}

(9) c (10) d (11) p (12) d (13) d

(15) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{18}$

(18) a 0.2 b 0.45 c 0.55

(22) $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{5}{18}$ (23) $\frac{13}{15}$; $\frac{4}{15}$; 0.4 ; 0.6

Réponses des exercices

(1) c (2) d (3) c (4) a (5) a

(6) d (7) c (11) l (B′) = 0.3

(14) $P(A) = \frac{3}{8}$ $P(B) = \frac{7}{8}$ $P(C) = \frac{1}{2}$ $P(D) = \frac{1}{4}$

(17) a 0.36 b 0.84

(18) a 0.235 b 0.1 c 0.53 d 0.825

Réponses de l'épreuve cummulativé

(1) G = {1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

(2) { (y ; k), (k ; y), (k ; k)}

(3) {(2 ; y), (2 ; k), (3 ; y) , (3 ; k), (5 ; y), (g ; k)}

(4) { (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1)}

(5) { 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18}

(6) { (y ; y ; k), (y ; k ; y), (k ; y ; y)}

(8) a 0.15 b 0.2 c 0.3

(9) a 0.3 b 0.45 c 0.7

(10) a 0.25 b 0.35 c 91

Epreuve 1 :

Question 1:

① b ② c ③ d ④ c

Question 2:

① $n = 7$ ② 2

Question 3:

① a (16; 32; 64; ....) b 16368

② 1 $(-3) + (-5) + (-7) + (-9) + (-11) + (-13) = -48$

Question 4:

① a 114 b 240

② a $r = 3$ b 8 ou 9

Epreuve 2 :

Question 1:

① c ② c ③ a ④ b

Question 2:

① (5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26) , somme = 124

② 48

Question 3:

① 762 ② a 1.4999 b 133

Question 4:

① a 118 b 14

② $5\,! = 120$

Epreuve 3:

Question 1:

① a ② c ③ d ④ b

Question 2:

① 8 ② (1; 3; 9; ...) , 3280

Question 3:

① (6; 8 ; 10; ...) , 150

Question 4:

① $C_4^3 \times C_3^2 = 12$ ② a 336 b 40

Epreuve 4:

Question 1:

① a ② a ③ b ④ a

Question 2:

① 10 ② a 360 b 330

Question 3:

① $a = 640$ $b = 160$

$S = 80$ la somme à l'infinie = 1280

② (3; 5; 7; ...) , $(3; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; ...)$, (3; 3; 3; ...)

$S_\infty = 6$

Question 4:

① $C_5^2 = 10$ ② a $n = 10$, b $r = 5$

Epreuve 5:

Question 1:

① c ② b ③ b ④ c

Question 2:

① a 32 b 9 ② $(\frac{27}{8}; \frac{3}{4}; ...; \frac{8}{27})$

Question 3:

① $n = 15$, T_{10} à partie du dernier = 23

② $n = 19$

Question 4:

① a 126 b 62C ② 12 façons

Epreuve 6

Question 1:

① d ② a ③ c ④ a

Question 2:

① 2 ② 0.7

Question 3:

① $4x^3 + 8x$

Question 4:

① 0 ② a $x^2 + 3x + c$

b $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$

Epreuve 7:

Question 1:

① b ② b ③ c ④ a

Question 2:

① -2 ② $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$,

Question 3:

① $\frac{dy}{dx} = 2x$ ② a $\frac{2}{3}$ b $\frac{11}{24}$

Question 4:

① (1; 3) ② a $-Z^2 + c$

b $\frac{1}{6}(x-1)^6 + 3x + c$

Epreuve 8 :

Question 1:

① b ② a ③ a ④ b

Question 2:

① a $-h^2$ b -0.1

Question 3:

① $y = 12x^2 - 10x + 4$ ② $\frac{5}{12}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{12}$

Question 4 :

① (0; -1) , (-2; 3)

② a $x^3 - 3x^2 + 5x + C$ b $(x-2)^6 + c$

Epreuve 9:

Question 1:

① a ② b ③ b ④ b

Question 2:

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$

Question 3:

① a $\frac{-1}{(x+1)^2}$ b $3x^2 + 2x$

② a $\frac{5}{6}$ b $\frac{1}{6}$

Question 4:

① $y = 2x - 2$, $y = -2x - 2$

② a $\frac{1}{12}(2x-3)^6 + c$ b $\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + c$

Epreuve 10:

Question 1:

① c ② d ③ b ④ c

Question 2:

① $15(3x-1)^4$ ② $P(A) = \frac{3}{8}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

Question 3:

① a $\frac{-1}{x^2}$ b $2x + 1$

② a $\frac{95}{138}$ b $\frac{20}{69}$ c $\frac{1}{46}$

Question 4:

① zero ② a $\frac{1}{2}x^2 - 3x + c$ b $(x-2)^4 + c$

المواصفات الفنيـة:

رقـم الكتـــاب:	1590/10/15/22/2/71
مقـاس الكتـــاب:	$\frac{١}{٨}$ (٥٧ × ٨٢) سم
طبـــع المتــن:	٤ لون
طبـــع الغــلاف:	٤ لون
ورق المتــــن:	٨٠ جم أبيض
ورق الغـــلاف:	٢٠٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٤٨ صفحة

http://elearning.moe.gov.eg