



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني
قطاع الكتب

مكتبة

الدراسية

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول



Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري



كتاب
الطالب

القسم العلمي

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

٢٠١٧-٢٠١٨



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني
قطاع الكتب

الرياضيات

البحث



الصف الثاني الثانوي

كتاب الطالب الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

٢٠١٧ - ٢٠١٨

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم



..... : الاسم

..... : المدرسة

..... : الفصل

..... : العنوان

..... : العام الدراسي



المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوءها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
- ٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
- ٣ تبني مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
(أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
(ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلي:
أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محباً للرياضيات ومبادراً بدراساتها - أن يكون المتعلم قادراً على العمل منفرداً أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطاً ومثابراً ومواظباً ومبتكراً - أن يكون المتعلم قادراً على التواصل بلغة الرياضيات.
- ٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
- ٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
- ٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفي ضوء ما سبق روعى في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هي: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة، ومخطط تنظيمي لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعي عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشاف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.
- ★ تنتهي كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.
- ★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمي يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.
- ★ ينتهي الكتاب باختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسي.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

- ١ - ١ الدوال الحقيقية. ٤
- ٢ - ١ بعض خواص الدوال. ١٦
- ٣ - ١ اطراد الدوال. ٢٥
- ٤ - ١ التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية. ٣٠
- ٥ - ١ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة. ٤٨
- ملخص الوحدة. ٥٧
- اختبار تراكمي. ٥٩

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

- ١ - ٢ الأسس الكسرية. ٦٢
- ٢ - ٢ الدالة الأسية وتطبيقاتها. ٦٩
- ٣ - ٢ المعادلات الأسية. ٧٥
- ٤ - ٢ الدالة العكسية. ٧٩
- ٥ - ٢ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني. ٨٤
- ٦ - ٢ بعض خواص اللوغاريتمات. ٩٠
- ملخص الوحدة. ٩٧
- اختبار تراكمي. ٩٩

المحتويات

الوحدة الثالثة

النهايات والإتصال

- ١ - ٣ مقدمة فى النهايات. ١٠٢
- ٢ - ٣ إيجاد نهاية الدالة جبريا. ١٠٩
- ٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللانهاية. ١١٧
- ٤ - ٣ نهاية الدوال المثلثية. ١٢٣
- ٥ - ٣ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة. ١٢٨
- ٦ - ٣ الإتصال. ١٣٣
- ملخص الوحدة. ١٤٢
- اختبار تراكمي. ١٤٤

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

- ١ - ٤ قانون قاعدة الجيب. ١٤٨
- ٢ - ٤ قانون قاعدة جيب التمام. ١٥٨
- ملخص الوحدة. ١٦٩
- اختبار تراكمي. ١٧٠
- اختبارات عامة. ١٧٢

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة



يعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسري الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر في الرياضيات والفيزياء، فقدم وعمم الكثير من التعبيرات الرياضية ومنها مفهوم الدالة (Function) وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو $y = f(x)$ (ص = د(س)) للدلالة على الدالة معتبراً أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س نختاره بحرية، وبذلك عرّف الدالة لا المنحنى مما ساهم في تحويل الهندسة إلى علاقات حسابية، كما حول جميع النسب المثلثية التي نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. أدخل أويلر العدد الثابت $e \approx 2.71828$ (عدد أويلر) كأساس اللوغاريتم الطبيعي، واكتشف العلاقة الرياضية $e^{i\pi} + 1 = 0$ والتي تربط بين أهم خمسة ثوابت في الرياضيات، كما ربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة. في هذه الوحدة ستعرف صوراً مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانياً مستخدماً التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية في حل مشكلات رياضية وحياتية في مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة



بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- ✚ يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- ✚ يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال الحقيقية (تركيب الدوال)
- ✚ يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية.
- ✚ يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- ✚ يتعرف الدالة الأحادية (one - to - one).
- ✚ يستنتج اطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- ✚ يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- ✚ يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة
- ✚ المقياس - الدالة التكعبية - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- ✚ يستنتج تأثير كل من التحويلات: $d(s) \pm a$ ، $d(s \pm b)$ ، $d(s) \pm c$ على الدوال السابقة.
- ✚ يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- ✚ يحل معادلات على الصورة: $|a + b| = |c + d|$ ، $|a + b| = |c + d| + e$ ، $|a + b| > |c + d|$ ، $|a + b| < |c + d|$ ، $|a + b| \geq |c + d|$ ، $|a + b| \leq |c + d|$
- ✚ يستخدم الدوال الحقيقية في حل مشكلات رياضية وحياتية في مجالات مختلفة.
- ✚ يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية في صورة أنشطة.
- ✚ يبحث عن التمثيل البياني للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيوجبرا "geogebra".
- ✚ يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في التمثيل البياني لبعض الدوال التي يصعب تمثيلها بالطرق العادية ثم دراسة خواص هذه الدوال.

المصطلحات الأساسية

Rational Function	دالة كسرية	Odd Function	دالة فردية	Real Function	دالة حقيقية
Asymptote	خط تقارب	One-to-One Function	دالة أحادية	Domain	مجال
Transformation	تحويل	Monotony of a Function	اطراد دالة	Co-domain	مجال مقابل
Translation	إزاحة (انتقال)	Increasing Function	دالة تزايدية	Range	مدى
Reflection	انعكاس	Decreasing Function	دالة تناقصية	Vertical Line	خط رأسي
Stretching	تمدد	Constant Function	دالة ثابتة		دالة متعددة التعريف
Graphical Solution	حل بياني	polynomial Function	دالة كثيرة الحدود	Piecewise-Defind Function	دالة مركبة
			دالة مقياس (قيمة مطلقة)	Composite Function	دالة زوجية
		Absolute Value Function		Even Function	

مخطط تنظيمي للوحدة



دروس الوحدة



- الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.
- الدرس (١ - ٢): بعض خواص الدوال.
- الدرس (١ - ٣): اطراد الدوال.
- الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.
- الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

الأدوات والوسائل



آلة حاسبة رسومية - حاسب آلي مزود ببرامج رسومية
(Graph, GeoGebra)

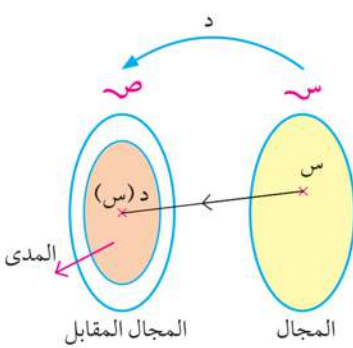
الدوال الحقيقية

Real Functions

١ - ١

استكشف

سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين S ، D بحيث تحدد لكل عنصر من عناصر S عنصرًا واحدًا من عناصر D ويرمز للدالة بأحد الرموز: f أو g أو h أو
إذا رمزنا للدالة ما من المجموعة S إلى المجموعة D بالرمز f فإنها تكتب رياضياً:
 $f: S \rightarrow D$ وتقرأ f دالة من S إلى D ويلاحظ:



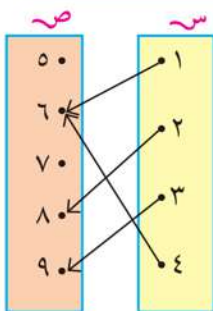
- ١- لكل عنصر $s \in S$ يتعين عنصر وحيد $d \in D$ بحيث $f(s) = d$ وتكتب:
تسمى المجموعة S مجال الدالة، وتسمى المجموعة D المجال المقابل للدالة.
- ٢- تسمى المجموعة $\{s \in S : f(s) = d\}$ مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر مجال الدالة.

Real Function

الدالة الحقيقية

تسمى الدالة f دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية منها.

مثال



- ١ العلاقة من المجموعة S إلى المجموعة D الممثلة في المخطط السهمي المجاور تمثل دالة، حيث:
المجموعة S هي مجال الدالة $= \{1, 2, 3, 4\}$
والمجموعة D هي المجال المقابل للدالة $= \{5, 6, 7, 8, 9\}$
أما مجموعة العناصر $\{1, 2, 3, 4\}$ فتعرف بمدى الدالة
كما يمكن تمثيل العلاقة السابقة بالمخطط البياني كما في الشكل التالي حيث:
بيان الدالة $= \{(1, 6), (2, 5), (3, 8), (4, 9)\}$

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

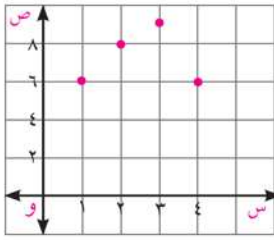
Function	دالة
Domain	مجال
Co-domain	مجال مقابل
Range	مدى
Arrow Diagram	مخطط سهمى
Cartesian Diagram	مخطط بياني
Vertical Line	خط رأسى
Piecewise Function	دالة متعددة التعريف

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تذكر أن

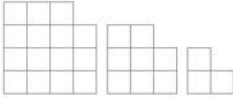
إذا كانت $f: S \rightarrow D$ فإن بيان f =
 $\{(s, f(s)) : s \in S\}$
 $f: S \rightarrow D$ ، $f(s) = d$



لاحظ أن:

- ١- الشكل البياني للدالة هو مجموعة من النقاط المنفصلة
- ٢- الخط الرأسى المار عند كل عنصر من عناصر مجال الدالة يقطع تمثيلها البياني فى نقطة وحيدة.

٩ حاول أن تحل



ص	س
٣	٢
٨	٣
.....	٤
.....	٥
.....	

١ فى النمط المقابل جميع المربعات متطابقة. إذا كان س عدد صفوف الشكل فى هذا النمط، ص مساحة الشكل بالوحدات المربعة.

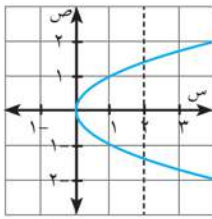
أ ما قيمة ص عندما س = ٥ ؟

ما قيمة ص عندما س = ٩ ؟

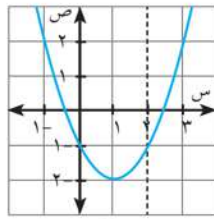
ب اكتب العلاقة الرياضية بين عدد صفوف الشكل ومساحته فى هذا النمط.

ج هل هذه العلاقة دالة من س إلى ص ؟ فسر إجابتك.

تعلم



ليست دالة



دالة

اختبار الخط الرأسى

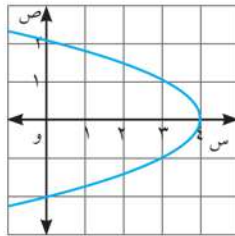
إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقاط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من س إلى ص ←

مثال

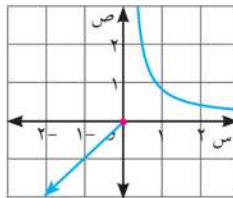
Identify the Relations Representing Function

تحديد العلاقات التى تمثل دالة

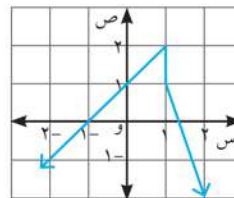
٢ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.



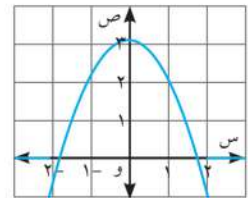
شكل (٤)



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

الحل

شكل (١) يمثل دالة فى س.

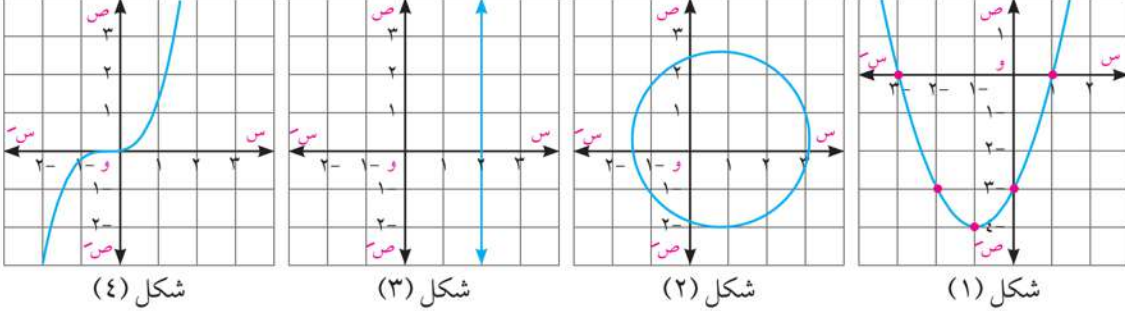
شكل (٢) لا يمثل دالة فى س لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (٠، ١) يقطع الشكل البياني فى عدد غير منته من النقاط.

شكل (٣) يمثل دالة فى س .

شكل (٤) لا يمثل دالة فى س لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

٤ حاول أن تحل

٢ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ مع ذكر السبب.



مثال

تعيين مدى الدالة بيانياً

٣ أ إذا كانت $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x + 1$

ارسم الشكل البياني للدالة f ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x + 1$

ارسم الشكل البياني للدالة f ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

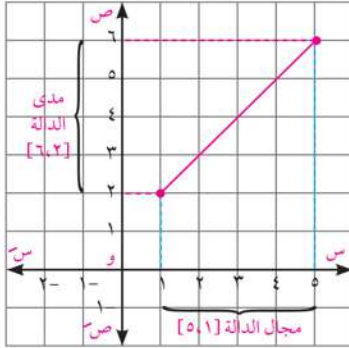
الحل

أ الدالة f دالة خطية مجالها $[0, 1]$ تمثل بيانياً بقطعة مستقيمة طرفيها

النقطتان $(0, 1)$ و $(1, 2)$ أى النقطتين $(0, 1)$ و $(1, 2)$.

مدى الدالة $f = [1, 2]$

وهو مجموعة الاحداثيات الصادية لجميع النقط التي تنتمي إلى منحنى الدالة.



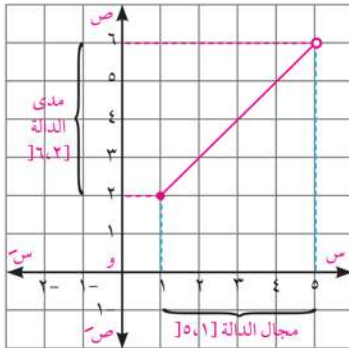
ب الدالة f دالة خطية مجالها $[0, 1]$ وواضح أن $f(x) = x + 1$

لكل $x \in [0, 1]$ فتمثل بيانياً بقطعة مستقيمة إحدى طرفيها النقطة

$(0, 1)$ مع إستبعاد النقطة الأخرى $(1, 2)$ من الشكل البياني بوضع

دائرة مفرغة عند هذه النقطة.

مدى الدالة $f = [1, 2)$



٤ حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 1 - x$

ارسم الشكل البياني للدالة f ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 1 - x$

ارسم الشكل البياني للدالة f ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

عمل تعاوني



السعر بالقروش	الاستهلاك الشهري (متر مكعب)
٤٠	حتى ٢٥
١٠٠	أكثر ٢٥ حتى ٥٠
١٥٠	أكثر من ٥٠

لترشيد استهلاك الكهرباء والمياه والغاز يتم حساب قيمة الاستهلاك الشهري منها تبعاً لشرائح خاصة تربط كمية الاستهلاك بقيمته.

يبين الجدول المقابل أسعار شرائح الاستهلاك الشهري من الغاز الطبيعي في المنازل بالقروش، احسب مع زميل قيمة استهلاك منزل من الغاز الطبيعي بالقروش للكميات التالية:

١- ٣٠ متر مكعب شهرياً.

٢- ٦٠ متر مكعب شهرياً.

[تضاف قيمة الضرائب المستحقة ورسوم تشغيل الخدمة بعد حساب قيمة الاستهلاك الشهري]

يمكن التعبير عن الجدول السابق بالدالة D لحساب قيمة استهلاك s متراً مكعباً من الغاز شهرياً حيث $s \in \mathbb{R}$ على النحو التالي:

$$D(s) = \begin{cases} 40s & \text{عندما } 0 \leq s \leq 25 \\ 100s - 1000 & \text{عندما } 25 < s \leq 50 \\ 150s - 4000 & \text{عندما } s > 50 \end{cases}$$

وهي دالة حقيقية متعددة التعريف (معروفة بأكثر من قاعدة)

تعلم



الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

٦ حاول أن تحل

٤ تحقق باستخدام الدالة السابقة من صحة اجابتك في عمل تعاوني، ثم احسب قيمة الاستهلاك الشهري من الغاز للكميات التالية:

ج ٥٤ متر مكعب

ب ٤٠ متر مكعب

أ ١٥ متر مكعب

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{عندما } x \geq 2 \\ x & \text{عندما } x < 2 \end{cases}$$

٤ إذا كانت $D(s)$ = $\begin{cases} 3 - s & \text{عندما } s \geq 2 \\ s & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$ عيّن مجال الدالة D ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

الحل

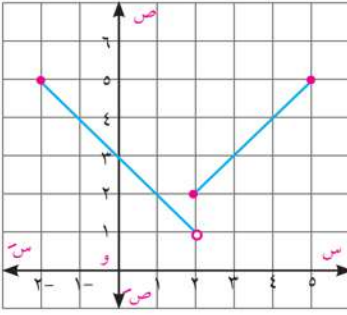
الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د(س) = 3 - س عندما $2 \leq س < 2$ أى على الفترة $]-2, 2[$

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان

(-2, 5)، (2, 1) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (2, 1)

لأن $2 \notin]-2, 2[$ كما فى الشكل المقابل.



القاعدة الثانية: د(س) = س عندما $س \geq 2$ أى على الفترة $[2, 5]$

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (2, 2)، (5, 5)

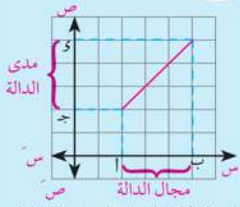
ويكون مجال الدالة $د =]-2, 2[\cup [2, 5] =]-2, 5]$

ويمكن من الرسم البياني نستنتج أن:

مجال الدالة $د =]-2, 5]$

مدى الدالة $د =]0, 5[$

لاحظ أن



في الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = $[ب, أ]$

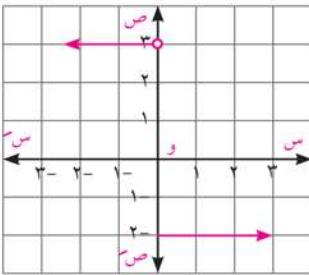
مدى الدالة = $[ج, ك]$

٦ حاول أن تحل

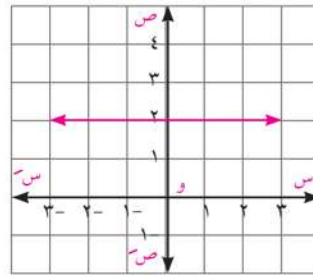
٥ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س - 1 & \text{عندما } س \geq 2 \\ س + 1 & \text{عندما } س \leq 0 \end{cases}$

عين مجال الدالة ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

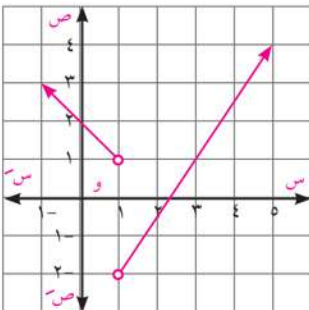
٦ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.



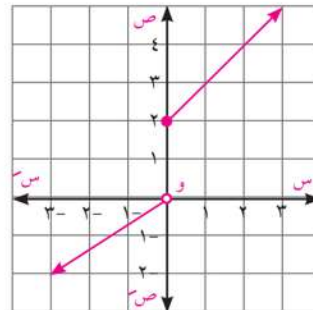
ب



أ



د



ج

تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

Determining Domains

تعيين مجال الدالة

مثال

٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

ب د_١(س) = $\sqrt{3-s}$

أ د_١(س) = $\frac{3+s}{9-s^2}$

د د_٤(س) = $\frac{1}{\sqrt{4-s^2}}$

ج د_٣(س) = $\sqrt{5-s}$

الحل

أ الدالة د_١ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع $9-s^2=0$ أي $s=3$ أو $s=-3$ وعليه يكون مجال الدالة د_١ هو $E = \{s, -3 < s < 3\}$.



ب مجال الدالة د_٣ هو جميع قيم س التي تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعي موجباً أو صفراً، أي قيم س التي تجعل $5-s \geq 0$.
∴ $s \leq 5$ ∴ مجال د_٣ = $]-\infty, 5]$.

ج د_٣(س) = $\sqrt{5-s}$ ، دليل الجذر عدد فردي ∴ مجال د_٣ = E



د تكون د_٤ معرفة عندما يكون $4-s^2 > 0$ وعليه فإن مجال د_٤ هو $]-2, 2[\cup]2, \infty[$ ∴ $E =]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

لاحظ:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[n]{r(s)}$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، $n > 1$ ، ر(س) كثيرة حدود

أولاً: عندما ن عدد فردي فإن مجال الدالة د = E

ثانياً: عندما ن عدد زوجي فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط $r(s) \geq 0$.

٦ حاول أن تحل

٧ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

ب د_٢(س) = $\sqrt{16-s^2}$

أ د_١(س) = $\frac{3+s^2}{2+s^3-s^2}$

د د_٤(س) = $\frac{5}{\sqrt{9-s^2}}$

ج د_٣(س) = $\sqrt{5-s}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{2}{s^2-6s+9}$ هو $E = \{s\}$ أوجد قيمة ك.

تعلم

Operations on Functions

العمليات على الدوال

إذا كانت D_1 ، D_2 دالتين مجالاهما M_1 ، M_2 على الترتيب ، فإن:

- ١ $(D_1 \pm D_2)(s) = D_1(s) \pm D_2(s)$ ، مجال $(D_1 \pm D_2)$ هو $M_1 \cap M_2$
- ٢ $(D_1 \cdot D_2)(s) = D_1(s) \cdot D_2(s)$ ، مجال $(D_1 \cdot D_2)$ هو $M_1 \cap M_2$
- ٣ $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)(s) = \frac{D_1(s)}{D_2(s)}$ حيث $D_2(s) \neq 0$ ، مجال $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$ هو $(M_1 \cap M_2) - F(D_2)$ حيث $F(D_2)$ مجموعة أصفار D_2

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجال D_1 ، D_2 باستثناء القيم التي تجعل $D_2(s) = 0$ في عملية القسمة.

مثال

٦ إذا كان $D(s) = s^2 - 4$ ، $R(s) = \sqrt{s+2}$ ، $E(s) = \sqrt{s-4}$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

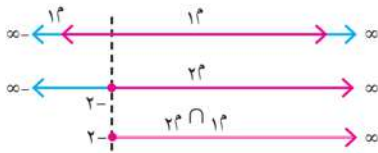
- أ $(R+D)$
- ب $(R-E)$
- ج $(D \cdot E)$
- د $\left(\frac{E}{D}\right)$

ثانياً: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

- أ $(R-E)(1)$
- ب $(D \cdot E)(5)$
- ج $\left(\frac{E}{D}\right)(3)$

الحل

أولاً: مجال $D = M_1 = E$ ، مجال $R = M_2 = [2, \infty)$ ، مجال $E = M_3 = [4, \infty)$



أ $(R+D)(s) = R(s) + D(s)$

$$s^2 - 4 + \sqrt{s+2}$$

ومجال الدالة $(R+D)$ هو $E \cap [2, \infty) = [4, \infty)$

ب $(R-E)(s) = R(s) - E(s)$

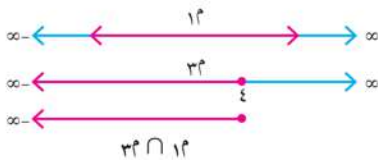
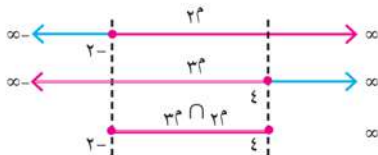
$$\sqrt{s+2} - \sqrt{s-4}$$

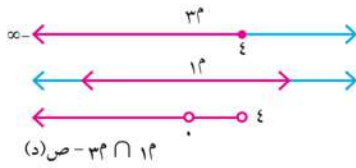
ومجال $(R-E)$ هو: $[2, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$

ج $(D \cdot E)(s) = D(s) \cdot E(s)$

$$(s^2 - 4)(\sqrt{s-4})$$

ومجال $(D \cdot E)$ هو $E \cap [4, \infty) = [4, \infty)$





تعلم

إذا كان مدى الدالة D تقاطع مجال الدالة R لا يساوي $\emptyset$ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة E تتركب من

الدالتين السابقتين وهي: $E = R \circ D$

وتقرأ R تركيب D ، أو R بعد D حيث تطبق الدالة D أولاً ثم الدالة R

ويكون $E(s) = (R \circ D)(s)$

$= R(D(s))$

من المخطط السابق يكون:

لاحظ أن



$$D(20000) \times \frac{1}{4} = (20000)D \\ 5000 =$$

ب $E(80000) =$

أ $E(20000) = R[D(20000)]$

$R(5000) =$

$= 1500 + 5000 = 6500$ وحدة

فكر: هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

لبحث الإجابة عن هذا السؤال أوجد $(R \circ D)(s)$ ، $(R \circ D)(s)$ حيث $D(s) = 4s^2$ ، $R(s) = 2s$

٤ حاول أن تحل

٩ إذا كان $D(s) = s^2 + 6$ ، $R(s) = 3s$

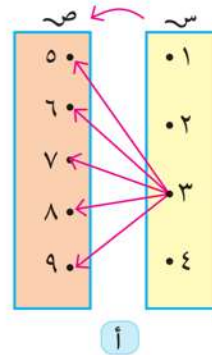
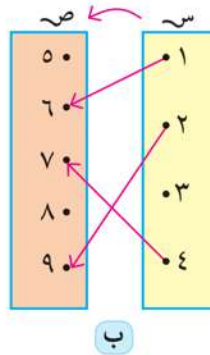
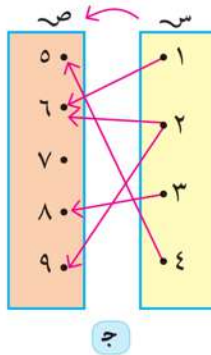
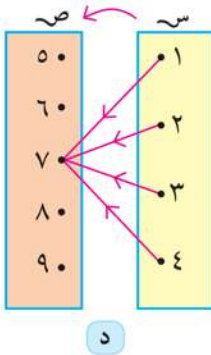
ثانياً: حدد قيم s التي تجعل $(R \circ D)(s) = 42$

أولاً: أوجد $(R \circ D)(3)$

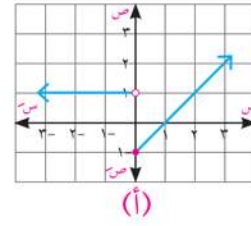
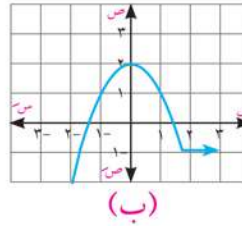
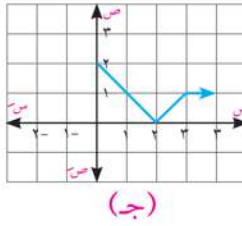
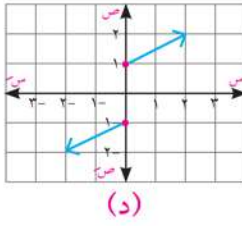
تمارين ١ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ أي المخططات الآتية تمثل دالة من S إلى V :



٢ أي من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة في س:



٣ العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي:

ب $\{(5, 3), (1, 2), (4, 3), (3, 2)\}$

أ $\{(9, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1)\}$

د $\{(5, 2), (5, 0), (5, 1), (5, 3)\}$

ج $\{(3, 3), (3, 2), (3, 1), (3, 0)\}$

٤ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ما عدا العلاقة:

ب $ص = س - ٢$

أ $ص = ٣ + س$

د $ص = حاس$

ج $ص = ٢ - س$

أجب عن ما يأتي:

٥ حدد مجال الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} ١ - س & \text{عندما } ٢ > س \geq ٤ \\ ٢ - س & \text{عندما } ٢ \geq س \geq ٢ \end{cases}$

ثم ارسم الشكل البياني للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٦ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

$$د(س) = \begin{cases} ٣ + س & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ١ - س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

٧ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣ + س & \text{عندما } ٢ - س > ٠ \\ ١ - س & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٨ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ١ + س & \text{عندما } ٣ - س > ٠ \\ ٢ + س & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

$$9 \text{ إذا كان: د(س) = } \left. \begin{array}{l} -4س + 3 \text{ عندما } س > 1 \\ -س^3 \text{ عندما } 1 \leq س \leq 2 \\ -س^2 + 1 \text{ عندما } س < 1 \end{array} \right\}$$

أوجد:

- أ د(صفر) ب د(١) ج د(٢)

١٠ **الربط بالميكانيكا:** إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر/ ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

$$ع(ن) = \left. \begin{array}{l} ٨ن \text{ عندما } ٠ \leq ن \leq ١٠ \\ ٨٠ \text{ عندما } ١٠ < ن < ٢٠ \\ -٤ن + ٨٨٠ \text{ عندما } ٢٠ \leq ن \leq ٢٢٠ \end{array} \right\}$$

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

- أ ع(١٠) ب ع(١٥٠) ج ع(٢١٠)

١١ **الربط بالتجارة:** تمثل الدالة د، حيث:

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{٥}{٣}س \text{ عندما } ٠ \leq س \leq ٥٠٠ \\ ٢٥٠٠ + س^٢ \text{ عندما } ٥٠٠ < س \leq ١٥٠٠ \\ \frac{٣}{٣}س + ١٠٠٠٠ \text{ عندما } ١٥٠٠ < س \leq ٦٠٠٠ \end{array} \right\}$$

المبلغ بالجنه الذي تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربائية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

- أ د(٥٠٠٠) ب د(١٠٠٠٠) ج د(٥٠٠٠٠)

١٢ **الربط بالهندسة:** إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة في طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد:

- أ ح(٣) ب ح($\frac{١٥}{٤}$)

١٣ **الربط بالهندسة:** إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة في طول نصف القطر

م (نق) ثم أوجد م($\frac{١}{٣}$)، م(٥).

١٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

$$أ د(س) = \frac{٣+س}{٦+س-٢س} \quad ب د(س) = \frac{١+س}{١+٣س}$$

د (س) $\sqrt[3]{2-4s} =$ د (س) $\sqrt[3]{2-4s} =$

د (س) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} =$ د (س) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} =$

د (س) $\sqrt[3]{2-4s} =$ د (س) $\sqrt[3]{2-4s} =$

د (س) $\frac{s^3}{1-s^2} =$ د (س) $\frac{s^3}{1-s^2} =$

١٥ إذا كان: د: ع $\leftarrow$ ع حيث د (س) $= 3-s$ ،

د: $[2, 3] \leftarrow$ ع حيث د (س) $= 2+s$ ،

فأوجد: د (س) ، د (س) ، د (س) مبيّنًا مجال كل دالة.

١٦ إذا كان: د (س) $= 2+s$ ومجال د $[3, 4]$ ، د (س) $= 2+s$ ومجال د $[1, 3]$ ،

أوجد: د (س) ، د (س) ، د (س) ، د (س) مبيّنًا مجال كل دالة.

١٧ إذا كان: د (س) $= 3+s$ ، ر (س) $= 5-s$ ، ق (س) $= s^2$

أوجد:

د (ق) د (س) (٢-)

ج (ق) (١)

ب (د) (٣-)

أ (د) (٢)

١٨ إذا كان: د (س) $= \frac{1}{s}$ ، ر (س) $= 3+s$

أوجد: د (د) (س) ، د (د) (س) وحدد مجال كل منهما.

١٩ إذا كان: د (س) $= 3-s^2$ ، ر (س) $= \sqrt[3]{2-4s}$

أوجد: د (د) (س) في أبسط صورة محددا المجال ثم أوجد د (د) (٣)

٢٠ تفكير إبداعي:

إذا كان ع (س) $= \sqrt[3]{2-4s}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون: ع (س) $=$ د (د) (س)

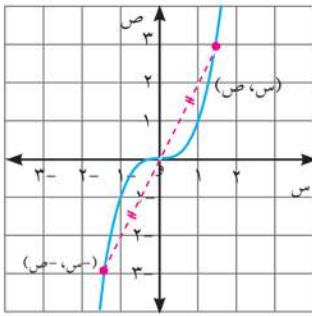
بعض خواص الدوال

Some Properties of Functions

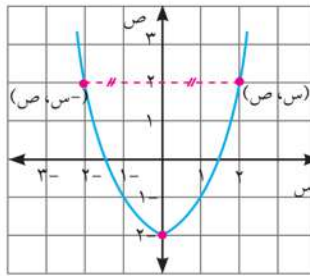
قد يتميز الشكل البياني للدالة $y = f(x)$ بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، ويمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصف المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول نقطة الأصل.
شكل (٢)



التماثل حول محور الصادات
شكل (١)

في شكل (١):

تكون النقطة $(-x, -y)$ هي صورة النقطة (x, y) الواقعة على الشكل البياني لمنحنى الدالة هي صورة النقطة (x, y) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

في شكل (٢):

يوضح الشكل البياني للعلاقة بين x ، y تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة $(-x, -y)$ هي صورة النقطة (x, y) الواقعة على نفس المنحنى.

٩ حاول أن تحل

١ في كل شكل من الأشكال الآتية بين المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.

سوف تتعلم

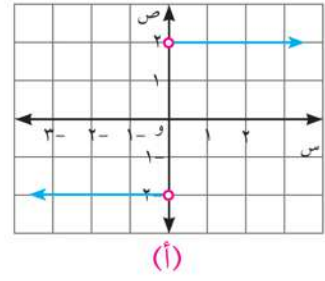
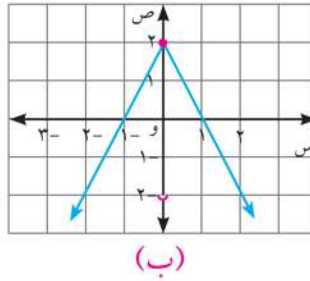
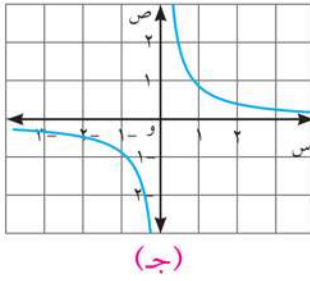
- التماثل في منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

المصطلحات الأساسية

- Symmetry تماثل
- Even Function دالة زوجية
- Odd Function دالة فردية
- One - to - One Function دالة أحادية
- Horizontal Line خط أفقي

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية - برامج
- رسومية للحاسوب



تفكير ناقذ:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

Even and Odd Functions

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة زوجية إذا كان د(-س) = د(س)، لكل س، -س $\in \mathbb{R}$ ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة فردية إذا كان د(-س) = -د(س)، لكل س، -س $\in \mathbb{R}$ ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س، -س إلى مجال الدالة، وإذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

مثال

١ ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

- أ د(س) = س^٢ ب د(س) = س^٣ ج د(س) = √(س+٣) د د(س) = جتا س

الحل

أ د(س) = س^٢، مجال د = $\mathbb{R}$

∴ لكل س، -س $\in \mathbb{R}$ ، يكون: د(-س) = (-س)^٢ = س^٢ = د(س)

أي أن: د(-س) = د(س) ∴ د دالة زوجية

ب د(س) = س^٣، مجال د = $\mathbb{R}$

∴ لكل س، -س $\in \mathbb{R}$ ، يكون: د(-س) = (-س)^٣ = -س^٣ = -د(س)

أي أن: د(-س) = -د(س) ∴ د دالة فردية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، د(س) = |س| حيث $0 \neq$ ، ن $\in \mathbb{R}$ دالة القوى،

وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجي، فردية عندما ن عدد فردي.

ج د(س) = $\sqrt{s+3}$ ، مجال د = $[-3, \infty]$

لاحظ أن $[-3, \infty] \ni 4$ بينما $[-3, \infty] \not\ni -4$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د د(س) = حتا س، مجال د = ع

∴ لكل س، -س $\ni$ ع يكون:

د(س) = حتا (-س) = حتا س

أي أن: د(س) = د(-س) ∴ د دالة زوجية

٢٤ حاول أن تحل

٢ ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

- | | | |
|--|---------------------------------|-------------------------------|
| أ د(س) = جاس | ب د(س) = س ² + جتا س | ج د(س) = س ³ - جاس |
| د د(س) = س ² جتا س | هـ د(س) = س ³ جاس | و د(س) = س ³ جتا س |
| ز د(س) = س ³ + س ² | ح د(س) = جاس + جتا س | ط د(س) = جاس جتا س |

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

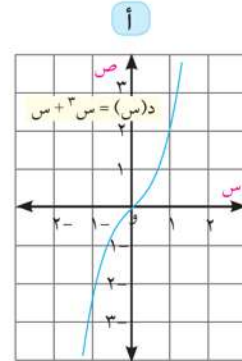
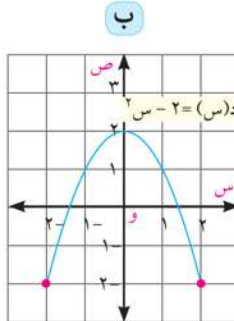
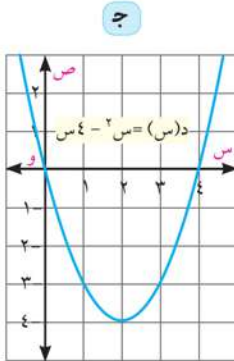
إذا كان كل من: د، د دالة زوجية، وكان كل من: ر₁، ر₂ دالة فردية، فإن:

- | | |
|--|---|
| ١ د ₁ + د ₂ دالة زوجية | ٢ ر ₁ + ر ₂ دالة فردية. |
| ٣ د ₁ × د ₂ دالة زوجية | ٤ ر ₁ × ر ₂ دالة زوجية. |
| ٥ د ₁ × ر ₂ دالة فردية | ٦ ر ₁ + ر ₂ ليست زوجية وليست فردية. |

باستخدام الخواص السابقة، تحقق من صحة إجابتك في بند حاول أن تحل (٢)

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبرياً.



الحل

أ د (س) = س^٣ + س، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
 مجال د = ع، ومنحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ أي أن الدالة فردية
 ∴ كل س، -س ∈ ع ∴ د(-س) = (س-)^٣ + (س-) = -س^٣ - س
 بالتبسيط: د(-س) = -س^٣ - س
 نأخذ (١-) عاملاً مشتركاً د(-س) = -(س^٣ + س)
 د(-س) = -د(س)

أي أن الدالة فردية.

ب د (س) = س^٢ - ٢، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن
 مجال د = [٢، ٢-]، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية
 ∴ كل س، -س ∈ [٢، ٢-] ∴ د(-س) = (-س)^٢ - ٢ = س^٢ - ٢
 بالتبسيط: د(-س) = س^٢ - ٢
 د(-س) = د(س) أي أن الدالة زوجية

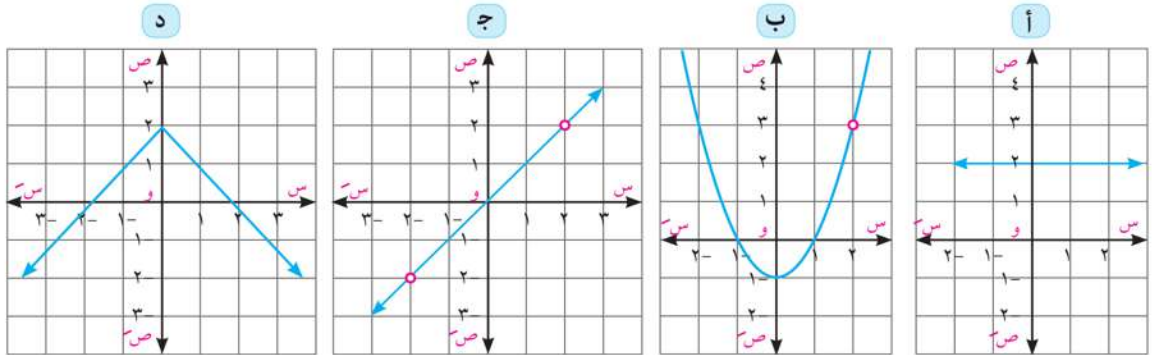
ج د (س) = س^٢ - ٤، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:

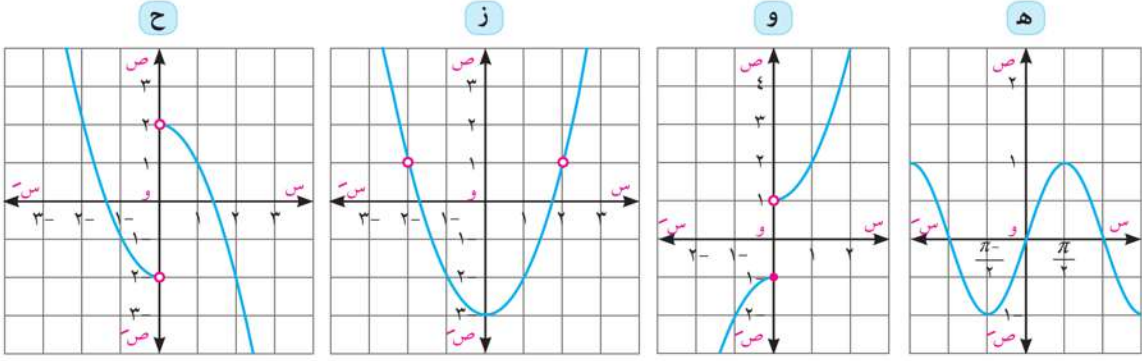
مجال د = ع، ومنحنى الدالة ليس متماثلاً حول محور الصادات، وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل؛
 أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∴ كل س، -س ∈ ع ∴ د(-س) = (-س)^٢ - ٤ = س^٢ - ٤
 بالتبسيط: د(-س) = س^٢ - ٤ ≠ س^٢ - ٤ = د(س) ∴ د ليست زوجية
 ولكن د(-س) = س^٢ - ٤ = د(س) ∴ د ليست فردية
 لذلك فإن أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ حاول أن تحل

٣ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.





مثال

٣ يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$$D(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \\ \frac{1}{s} & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

بين أن هذه الدالة زوجية وتحقق من ذلك جبرياً.

الحل

من الشكل البياني المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية.

التحقيق الجبري:

$$\begin{aligned} & \text{مجال } D =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[\\ & \therefore \text{كل } s, -s \in \text{مجال } D \therefore D(-s) = \begin{cases} \frac{1}{(-s)} - \frac{1}{(-s)} & \text{عندما } (-s) > 0 \\ \frac{1}{(-s)} & \text{عندما } (-s) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{عندما } s < 0 \quad \frac{1}{s} \\ & \text{عندما } s > 0 \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \end{aligned} \quad D(-s) = \begin{cases} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \end{cases} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\begin{aligned} & \text{عندما } s > 0 \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \\ & \text{عندما } s < 0 \quad \frac{1}{s} \end{aligned} \quad D(-s) = \begin{cases} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{cases} \quad \text{بتبديل كتابة القاعدتين}$$

أي أن $D(-s) = D(s)$ فالدالة زوجية.

٤ حاول أن تحل

$$D(s) = \begin{cases} s + 2 & \text{حيث } s \leq -2 \\ s - 2 & \text{حيث } s > -2 \end{cases} \quad \text{بيانياً.}$$

ثم بين: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبرياً.

الدالة الأحادية: One - to - One Function (Injective Function)

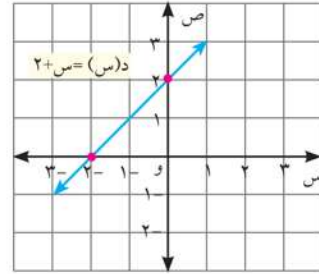
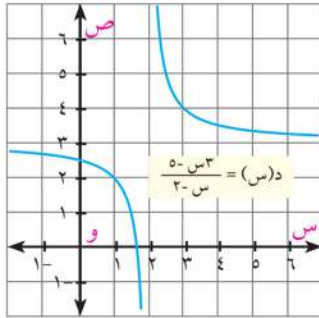
تعريف

الدالة د: س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

لكل أ، ب $\exists$ س، د (أ) = د (ب) فإن $أ = ب$ أو لكل أ $\neq$ ب فإن د (أ) $\neq$ د (ب)

مثال

٤ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د: س ← ص، أثبت أن د دالة أحادية.



الحل

أ د (س) = س + ٢، مجال د = ع

لكل أ، ب $\exists$ ع فإن د (أ) = ٢ + أ، د (ب) = ٢ + ببوضع د (أ) = د (ب) $\therefore ٢ + أ = ٢ + ب$ وبحذف ٢ من الطرفين $\therefore أ = ب$

لذلك فإن د دالة أحادية

ب د (س) = $\frac{س^٣ - ٥}{س - ٢}$ ، مجال د = ع - {٢}لكل أ، ب $\exists$ ع - {٢} فإن د (أ) = $\frac{٥ - أ^٣}{٢ - أ}$ ، د (ب) = $\frac{٥ - ب^٣}{٢ - ب}$ بوضع د (أ) = د (ب) $\therefore \frac{٥ - أ^٣}{٢ - أ} = \frac{٥ - ب^٣}{٢ - ب}$ بالضرب التبادلي $٣ - أ - ٦ - ب = ١٠ + ٥ - ب - ٦ - أ = ١٠ + ٥ - أ - ٦ - ب$ بالحذف والتبسيط $\therefore أ = ب$ لذلك فإن د دالة أحادية.

تعلم

Horizontal - Line Test اختبار الخط الأفقي

تكون الدالة د: س ← ص دالة إحادية إذا كان الخط الأفقي (الموازي لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.

٦ حاول أن تحل

٥ في بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التي تمثل دالة إحادية.

٦ أثبت أن د: $s \rightarrow$ دالة إحادية حيث:

أ د (س) = $2s - 3$

ب ر (س) = $\frac{3s - 5}{3 + 4s}$

مثال

٥ بيّن أن الدالة د: $s \rightarrow$ حيث د (س) = s^2 ليست دالة أحادية.

الحل

د (٢) = 4 ، د (٢-) = 4 ∴ د (٢) = د (٢-) = 4

∴ $2 \neq 2-$ ∴ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقي عند $v = 4$ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما ٢، ٢-.

٦ حاول أن تحل

٧ بين أن د: $s \rightarrow$ حيث د (س) = $s^2 - 1$ ليست دالة أحادية

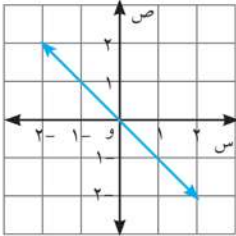
أ د (س) = $s^2 - 1$

ب ر (س) = $s^2 - 5s + 6$

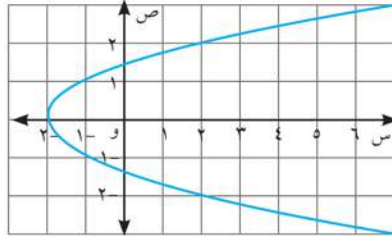
تفكير ناقذ: إذا كانت زوجية فهل يمكن أن تكون د أحادية؟ فسر ذلك؟

تمارين ١ - ٢

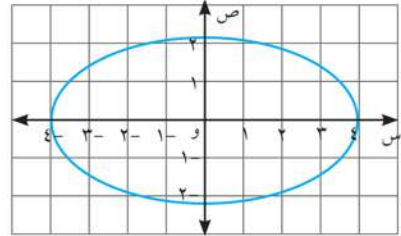
١ اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسر إجابتك.



شكل (٣)

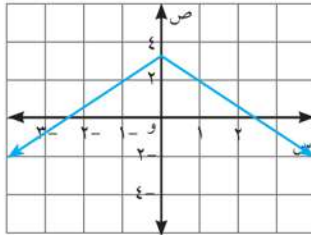


شكل (٢)

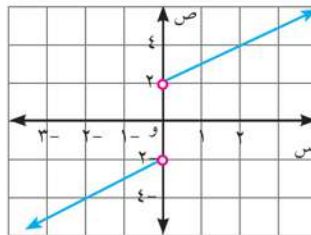


شكل (١)

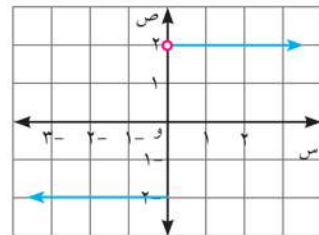
٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



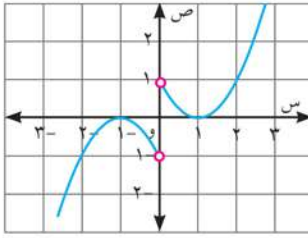
شكل (٣)



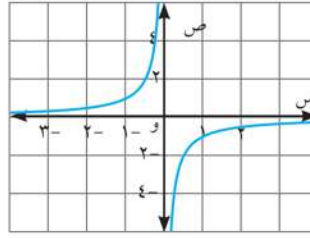
شكل (٢)



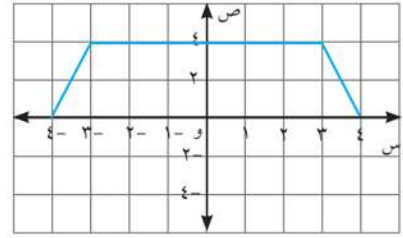
شكل (١)



شكل (٦)



شكل (٥)



شكل (٤)

٣ ابحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

- أ د(س) = س^٤ + س^٢ - ١ ب د(س) = س^٣ - س^٤ ج د(س) = س^٣ - $\frac{1}{س}$
- د د(س) = س^٣ - س^٢ هـ د(س) = $\frac{س^٢ + س^٣}{س - ٣}$ و د(س) = س حتاس
- ز د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ ح د(س) = $\frac{س^٢}{س + ١}$ ط د(س) = (س^٢ + ١)^٢

٤ إذا كانت د_١، د_٢ دوال حقيقية حيث د_١(س) = س^٥، د_٢(س) = حاس، د_٣(س) = س^٢،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

- أ د_١ + د_٢ ب د_١ + د_٣ ج د_١ × د_٢ د د_٢ × د_٣

٥ إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (س - ٣)^٢، ر(س) = (س + ٣)^٢

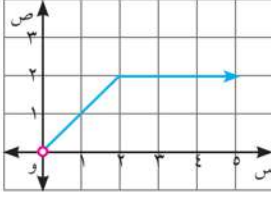
بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

- أ د + ر ب د - ر ج د . ر د $\frac{د}{ر}$

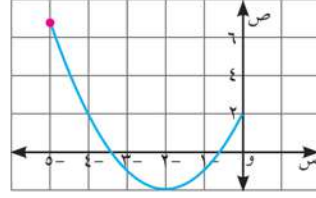
٦ ارسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كما يلي، ثم بين أى منها زوجية وأى منها فردية وأيها غير ذلك، وتحقق من ذلك جبرياً.

- أ د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س < ٠ \\ ٢- & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ ب د(س) = $\begin{cases} س- & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$
- ج د(س) = $\begin{cases} س-١ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س٧ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ د د(س) = $\begin{cases} س+١ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س-١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

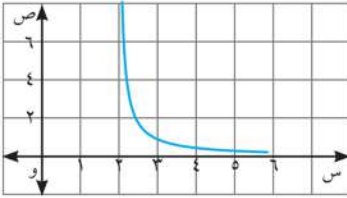
٧ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



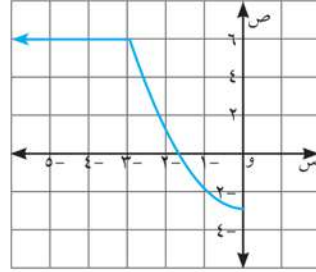
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

أولاً: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.
ثانياً: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.
ثالثاً: حدد مجال ومدى الدالة في كل حالة وبين أى الأشكال البيانية تمثل منحنى دالة احادية.

٨ في كل من الدوال المعرفة كما يلي حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ د (س) = $3س + 1$ ب د (س) = $\frac{1+س^2}{2-س}$ ج د (س) = $س^2 + 1$

د د (س) = $س^2 - س - 3$ هـ د (س) = $س^4 + 2س^2 + 1$

٩ **الربط بالصناعة:** يعمل سعيد في مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٣, ٠ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

أ اكتب قاعدة الدالة د التي تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

ب هل الدالة د أحادية؟ فسر إجابتك.

١٠ **تفكير ابداعى:** مثل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية:

أ يمر بالنقط (٠، ٢)، (٢، ٢)، (٣، ٧) ويمثل دالة زوجية.

ب يمر بالنقط (٠، ٠)، (٢، ١)، (٣، ٥) ويمثل دالة فردية.

سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحنى دالة

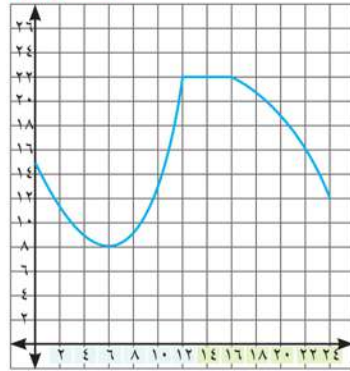
المصطلحات الأساسية

- اطراد. Monotony
- دالة تزايدية. Increasing Function
- دالة تناقصية. Decreasing Function
- دالة ثابتة. Constant Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

درجات الحرارة (جـ)



الزمن

فكر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة في أحد الأيام ، لاحظ التغير في درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

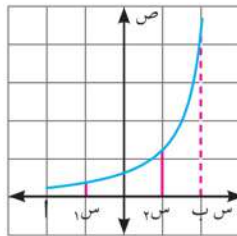
- فترات تناقص درجات الحرارة.
- فترات تزايد درجات الحرارة
- فترات ثبات درجات الحرارة.

تساعدنا صفات منحنيات الدوال في معرفة سلوك الدالة د وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت (د(س) كلما زادت س وهو ما يعرف باطراد الدالة.

تعلم

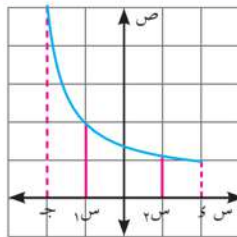
تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها **تزايدية** في الفترة $[a, b]$ ، إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، حيث: $s_1 < s_2$ ، فإن: $d(s_1) < d(s_2)$



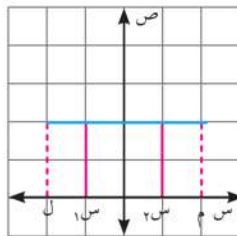
تناقص الدالة:

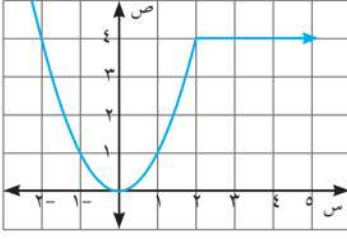
يقال للدالة د أنها **تناقصية** في الفترة $[a, b]$ ، إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، حيث: $s_1 < s_2$ ، فإن: $d(s_1) > d(s_2)$



ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها **ثابتة** في الفترة $[a, b]$ ، إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، حيث: $s_1 < s_2$ ، فإن: $d(s_1) = d(s_2)$





مثال

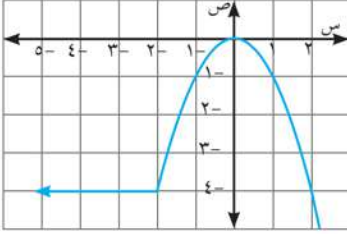
١ ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

الحل

◀ الدالة تناقصية في الفترة $]-\infty, 0]$

◀ الدالة تزايدية في الفترة $]0, 2]$

◀ الدالة ثابتة في الفترة $]2, \infty[$



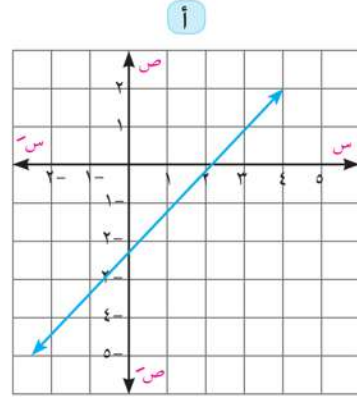
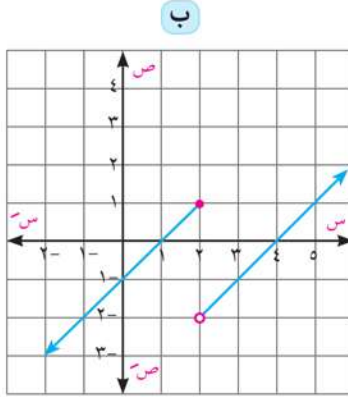
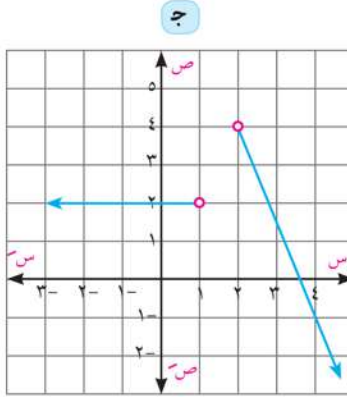
٢ حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل:

ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ← ص ، حيث ص = د(س) استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.



الحل

أ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ [الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$]

ب مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ [الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$]

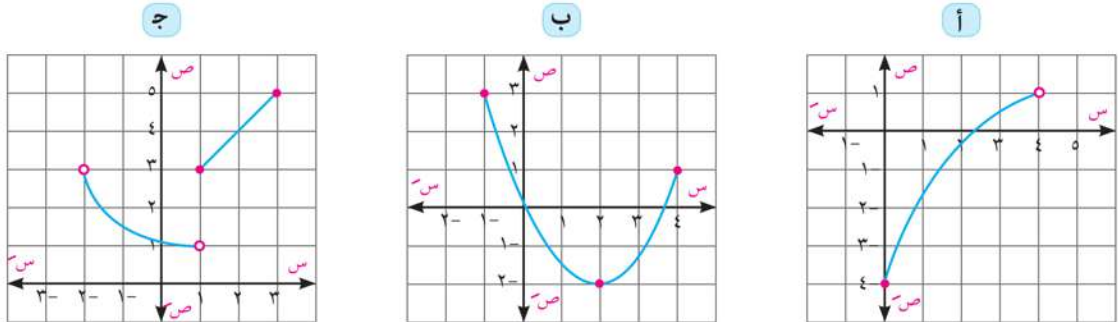
ج مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ [الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$]

د مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ [الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$]

هـ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ [الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$]

٩ حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:



تفكير ناقذ: أى من الأشكال السابقة يمثل دالة إحادية؟ فسر إجابتك

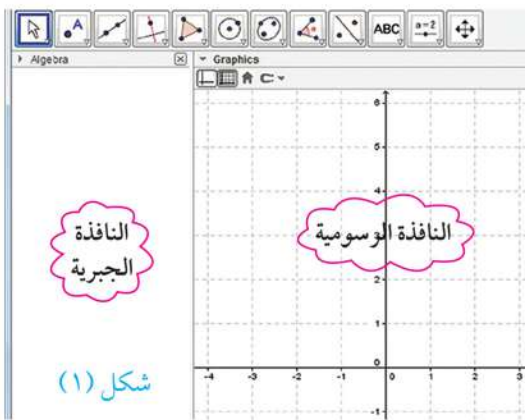
استخدام البرامج الرسومية في دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانياً، ومن أشهرها برنامج GeoGebra المجاني للتلابل أو الحاسوب.

نشاط

استخدم برنامج جيوجبرا في عمل التحويلات الهندسية للدوال

باستخدام برنامج GeoGebra مثل بيانياً الدالة د حيث: $D(s) = s^3 - 3s^2 + 2$ ، ومن الرسم:



شكل (١)

أوجد مجال ومدى الدالة.

ب ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها

زوجية أو فردية أو غير ذلك.

تمثيل الدالة بيانياً اتبع الخطوات التالية:

١- افتح نافذة الجبر والرسم البياني من برنامج (GeoGebra)

ثم اضغط **Graphics** واختر لتصل إلى

النافذة المبينة في شكل (١).

٢- في النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة

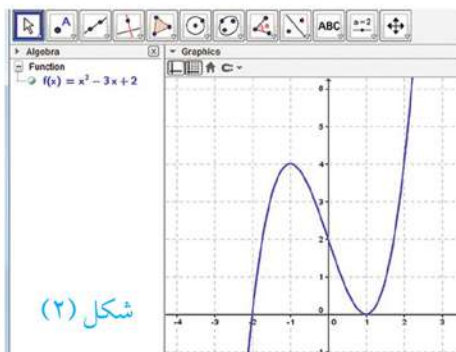
د(س) = $s^3 - 3s^2 + 2$ بمربع الإدخال (input)

على النحو التالي:

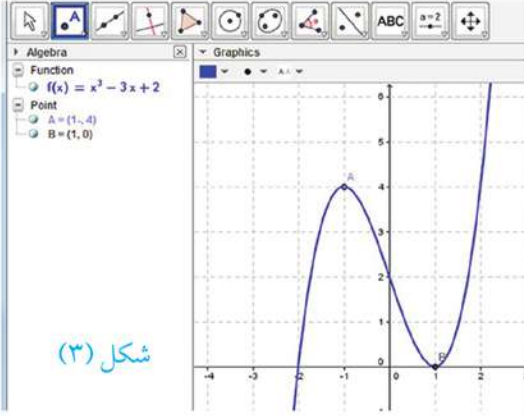
→

ثم اضغط فيظهر في النافذة البيانية منحنى الدالة،

وفي النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما في شكل (٢)



شكل (٢)



شكل (٣)

٣- لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر

من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط لإدخال لتظهر النقطة على المنحنى في النافذة الرسومية كما يظهر إحداثي النقطة في النافذة الجبرية كما في شكل (٣).

من الشكل البياني للدالة نجد:

أ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$

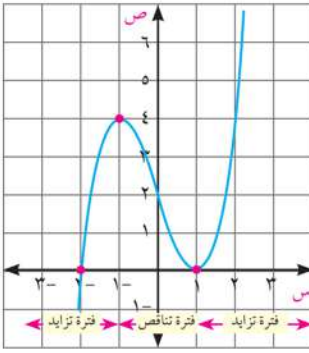
ب الدالة تزايدية في $[-\infty, 1]$ ، تناقصية في $[1, \infty]$ ، تزايدية في $[1, \infty]$ ، كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ:

النقطة (٢, ٠) هي نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة د ليست دالة أحادية.

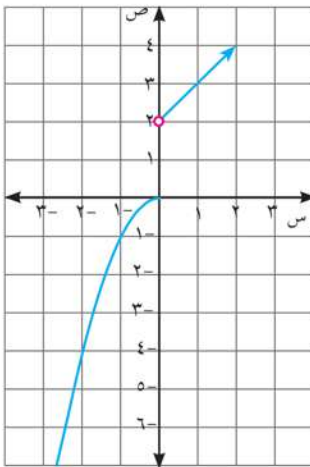
تدريب على النشاط

باستخدام برنامج Geogebra ارسم منحنى الدالة د: د(س) = ٣س - ٣س^٢ ومن الرسم ابحث اطراف الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك.

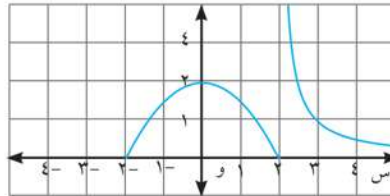


تمارين ١ - ٣

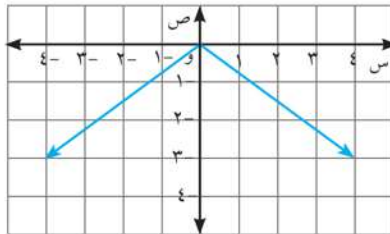
١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطار:



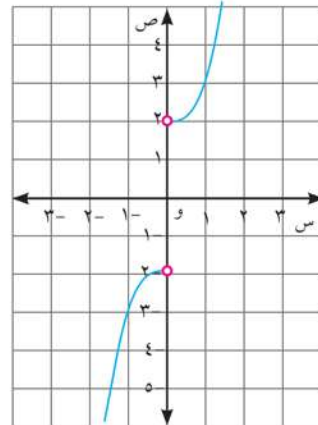
شكل (٤)



شكل (٢)

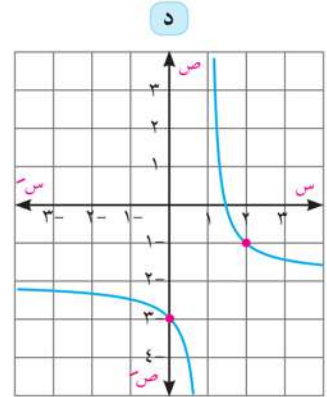
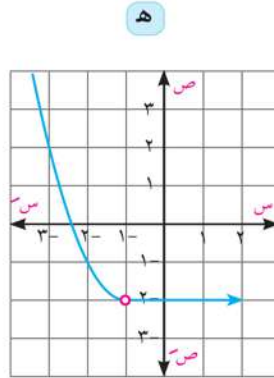
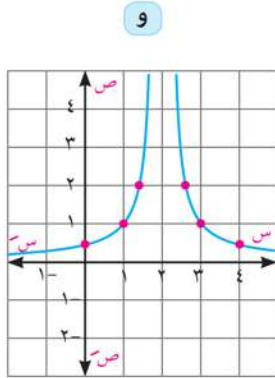
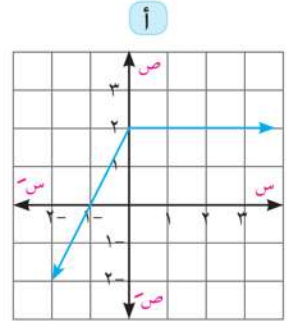
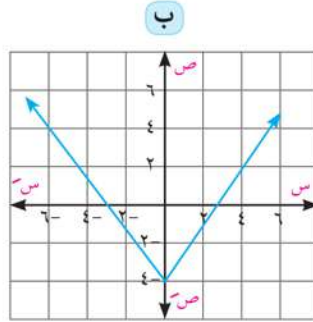
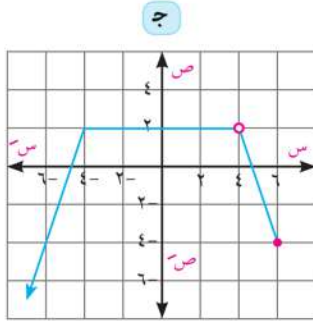


شكل (٣)



شكل (١)

٢ حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.



٣ إذا كانت د: $[-2, 6]$ ← ح

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -2 \leq x < 4 \\ \text{عندما } 1 \leq x \leq 6 \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

ا ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

٤ تفكير ابداعي

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

٥ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د في كل من ما يأتي ، ومن الرسم استنتج اطراد الدالة ومداها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

ج د(س) = (١-س) + ١

ب د(س) = ٤ - س^٢

ا د(س) = ٥ - س^٢

و د(س) = $\frac{1-s}{s-2}$

هـ د(س) = س^٣ - ٣س

د د(س) = س^٣

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometrical Transformations

الدالة كثيرة الحدود Polynomial Functions

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التي قاعدتها على الصورة:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0$$

حيث: $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ ، $a_n \neq 0$ ، $n \in \mathbb{N}$
وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة n ، ودرجة كثيرة الحدود هي أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل s .

الحظ:

- ١- إذا كان $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ فإن D تسمى كثيرة الحدود الثابتة.
- ٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالاً خطية، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالاً تربيعية، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالاً تكعيبية.
- ٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت، نحصل على دالة كثيرة الحدود.
- ٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.
- ٥- تتساوى دالتا كثيرتا الحدود D ، R إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى s المتناظرة فيهما متساوية.

مثال

- ١- إذا كان D ، R كثيرتا حدود حيث $D(s) = (s+5)^2$ ، $R(s) = s^2 + 3s + 4$ ، وكان $D(s) = R(s)$ أوجد قيمتي s ، t .

الحل:

$$D(s) = (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$$

$$R(s) = s^2 + 3s + 4$$

∴ $D(s) = R(s)$ ∴ معاملات قوى s المتناظرة متساوية

$$s^2 = s^2 \quad 10s = 3s \quad 25 = 4$$

$$7s = -21 \quad \therefore s = -3$$

٢- حاول أن تحل

- ١- إذا كان $D(s) = (s+2)^3$ ، $R(s) = s^3 + 5s + 8$ ، أوجد قيم s ، t التي تجعل $D(s) = R(s)$

سوف تتعلم

- ◀ دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية - الدالة التربيعية - الدالة التكعيبية)
- ◀ دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- ◀ الدالة الكسرية
- ◀ استخدام التحويلات الهندسية للدالة في رسم المنحنيات
- ص = $D(s) + A$
- ص = $D(s) + A$
- ص = $D(s) + A + B$
- ص = $D(s)$
- ص = $D(s) + A + B + C$
- ◀ التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- ◀ تحويل. Transformation
- ◀ انتقال. Translation
- ◀ انعكاس. Reflection
- ◀ رأسي. Vertical
- ◀ أفقي. Horizontal
- ◀ خط تقارب. Asymptotes

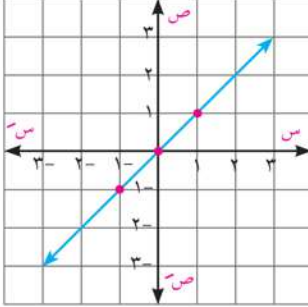
الأدوات المستخدمة

- ◀ آلة حاسبة علمية.
- ◀ برامج رسومية للحاسوب.

تعلم



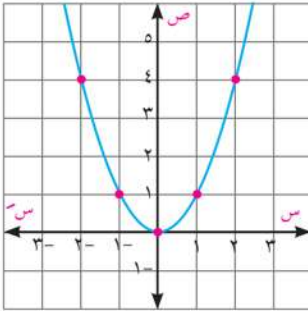
فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:



١) د(س) = س

الدالة د تربط العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)،
وميله = ١

(تحقق من: مدى د= ع، د فردية، د تزايدية في ع)



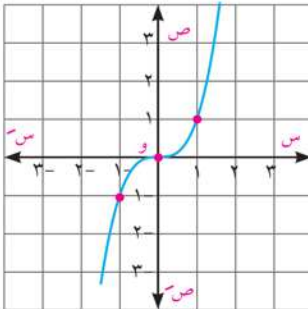
٢) د(س) = س^٢

الدالة د تربط العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل

حول محور الصادات، ونقطة رأس المنحنى هي (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د= ع، د زوجية، د تناقصية في]٠، ∞[،

تزايدية في]٠، ∞[)



٣) د(س) = س^٣

الدالة د تربط العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هي (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د= ع، د فردية، د تزايدية في ع)

مثال



٢) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س > ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$

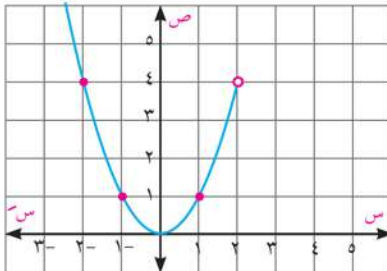
الحل



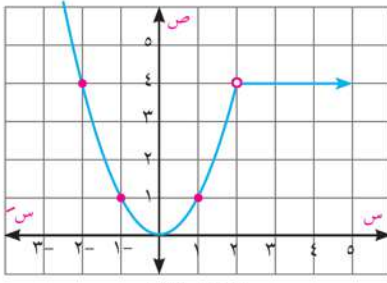
١) عندما س > ٢، د(س) = س^٢

نرسم د(س) = س^٢ لكل س ∈]٢، ∞[

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما في شكل (١)



شكل (١)



شكل (٢)

٢) عندما $s < 2$ ؛ $d(s) = 4$

ترسم الدالة الثابتة $d(s) = 4$ لكل $s \in]2, \infty[$

على نفس الشكل البياني كما في شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة $d = \mathbb{R} - \{2\}$ ، ومدى $d =]0, \infty[$

٤) حاول أن تحل

٢) ارسم الشكل البياني للدالة d حيث:

$$d(s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s > 0 \\ s & \text{عندما } s \leq 0 \end{cases}$$

ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرافها.

The Absolute Value Function

دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة):

تعلم

أبسط صورة لدالة المقياس هي $d(s) = |s|$ ، $s \in \mathbb{R}$
وتعرف كما يلي:

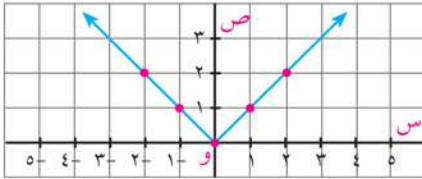
$$d(s) = \begin{cases} s & \text{عندما } s \geq 0 \\ -s & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

لاحظ أن: $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2}$ ، $0 = |0|$ ، $3 = |3| = |-3|$

أي أن: $|s| = \sqrt{s^2}$ ، $|s| = |-s|$ ، $|s| \geq 0$

الدالة d يمثلها شعاعان يبدآن من النقطة $(0, 0)$ ميل أحدهما 1 ، وميل الآخر -1

(تحقق من: مدى $d =]0, \infty[$ ، زوجية ، تناقصية في $]-\infty, 0[$ ، وتزايدية في $]0, \infty[$)



Rational Function

الدالة الكسرية

تعلم

أبسط صورة للدالة الكسرية هي:

$$d(s) = \frac{1}{s} ، s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

الدالة d تربط العدد بمعكوسه الضربي ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله

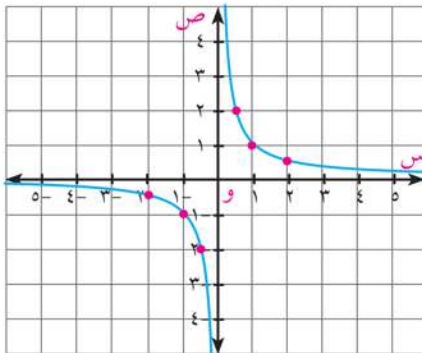
$(0, 0)$ ويتكون من جزأين أحدهما يقع في الربع الأول والآخر

يقع في الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولا يقطعهما

($s = 0$ ، $v = 0$ خطا تقارب للمنحنى)

(تحقق من: مدى $d = \mathbb{R} - \{0\}$ ، فردية ، تناقصية في $]-\infty, 0[$ ،

وتناقصية أيضًا في $]0, \infty[$)



٤) حاول أن تحل

$$٣) \text{ ارسم الشكل البياني للدالة } d(s) = \begin{cases} |s| & \text{عندما } s \geq 0 \\ \frac{1}{s} & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرافها.

Transformations of Graphs

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

Vertical Translation

أولاً: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

عمل تعاوني

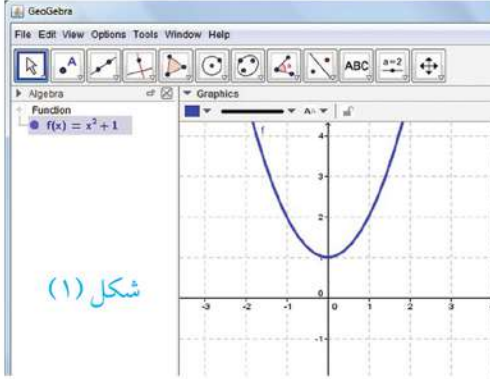
اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^٢

باستخدام برنامج Geogebra

٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسياً لأعلى

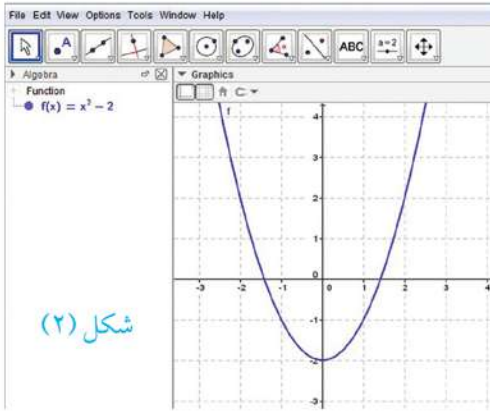
وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة

جديدة قاعدتها د(س) = س^٢ + ١ كما في شكل (١).

شكل (١)

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٢, ٠)، (٣, ٠)

وسجل ملاحظتك في كل مرة.



شكل (٢)

٤) اسحب منحنى د(س) = س^٢ وحدتين رأسياً إلى أسفل

ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها

د(س) = س^٢ - ٢ كما في شكل (٢)**فكر:** بين كيف يمكن رسم د(س) = س^٢ - ٥ باستخدام منحنىد(س) = س^٢ ؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

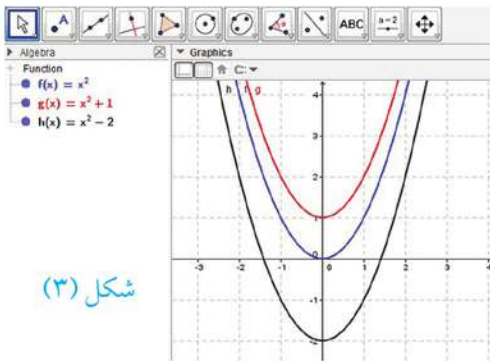
د(س) = س^٢ ، ر(س) = س^٢ + ١ ، ق(س) = س^٢ - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

تفكير ناقذ: باستخدام منحنى د(س) = س^٢ بين كيف يمكن

رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^٢ + ٤ب) ق(س) = س^٢ - ٥

شكل (٣)

رسم المنحنى ص = د(س) + ١

تعلم

لأي دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + ١ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها ١ من الوحدات في اتجاه
 و ص ، عندما < ٠ ، وفي اتجاه و ص عندما > ٠ .

مثال

٣ يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق

صورة للدالة د بإزاحة رأسية

اكتب قاعدة كل من ر، ق حيث د(س) = |س|

الحل

∴ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و ص

$$\therefore ر(س) = د(س) - ٣$$

$$\therefore د(س) = |س| \quad \therefore ر(س) = |س| - ٣$$

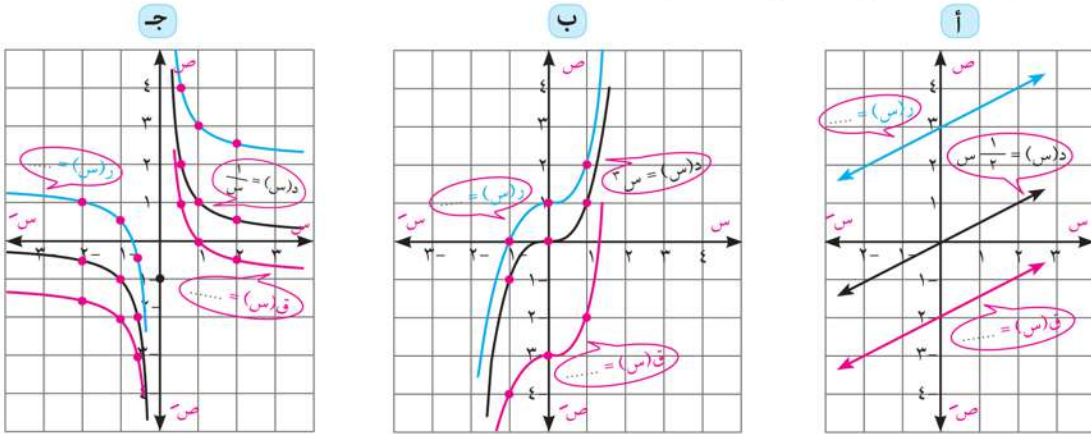
∴ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص

$$\therefore ق(س) = د(س) + ٢$$

$$\therefore د(س) = |س| \quad \therefore ق(س) = |س| + ٢$$

٤ حاول أن تحل

٤ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية، اكتب قاعدة كل من ر، ق في كل شكل.



Horizontal Translation

ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

عمل تعاوني

اعمل مع زميل:

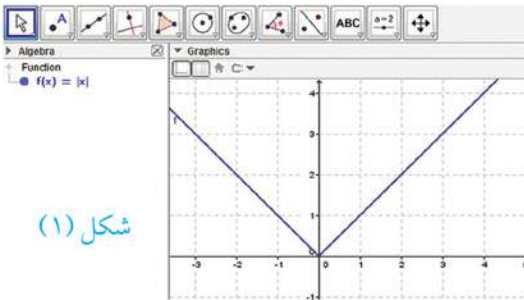
١ ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |س| مستخدمًا

برنامج Geogebra بكتابة قاعدة الدالة في مربع

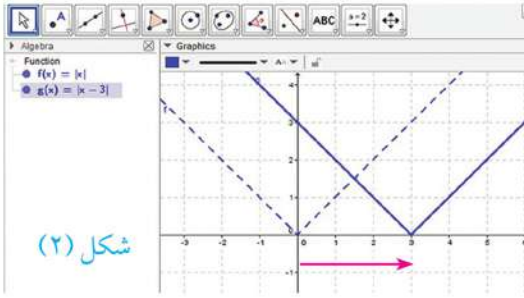
الإدخال على النحو التالي: abs(x) ثم اضغط إدخال

فيظهر منحنى الدالة في النافذة البيانية وقاعدتها

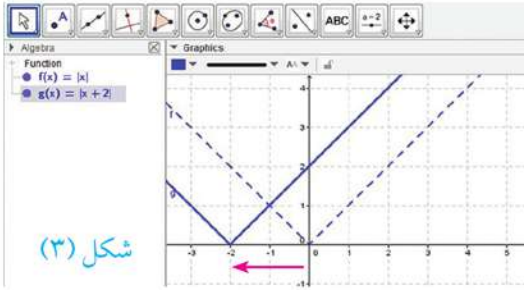
في النافذة الجبرية كما في شكل (١)



شكل (١)



٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًا في الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة في النافذة الجبرية كما في شكل (٢)

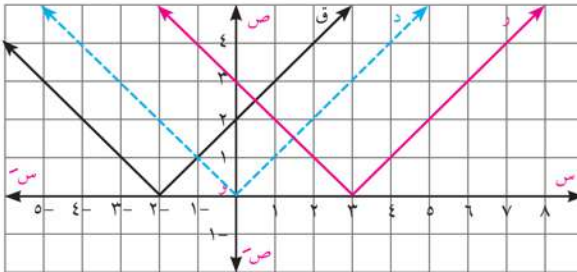


٣) اسحب منحنى الدالة أيضًا في الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما في شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟

فكر: بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) = |س - ٥|، ق(س) = |س + ٤|.

تعلم

رسم المنحنى ص = د(س + ١) لأي دالة د؛ يكون المنحنى، ص = د(س + ١) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها ١ من الوحدات في اتجاه وس عندما يكون $٠ < ١$ ، وفي اتجاه وس عندما يكون $٠ > ١$.



لاحظ: في الشكل المقابل: د(س) = |س|:

١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وس

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠).

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى

الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه وس

∴ ق(س) = |س + ٢|، نقطة بدء الشعاعين (٠، ٢-).

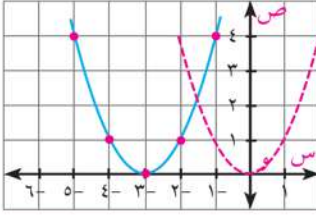
مثال

٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

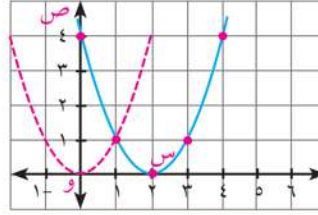
ب ع(س) = (س + ٣)^٢

أ ر(س) = (س - ٢)^٢

الحل



منحنى $y = (s+3)^2$ هو منحنى $y = (s)^2$ بإزاحة 3 وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هي $(-3, 0)$.



منحنى $y = (s-2)^2$ هو منحنى $y = (s)^2$ بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هي $(2, 0)$.

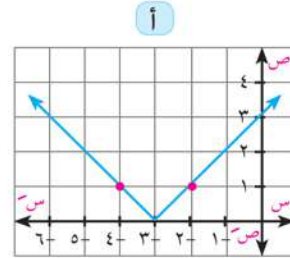
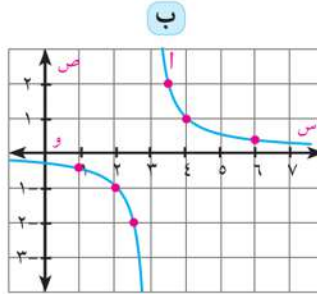
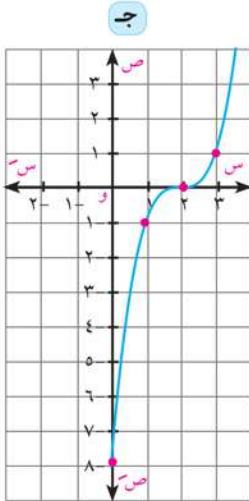
٦ حاول أن تحل

٥ استخدم منحنى الدالة $y = (s)^2$ حيث $y = (s)^2$ لتمثيل كل من الدالتين $y = (s+3)^2$ و $y = (s-2)^2$ حيث:

ب ع $y = (s-3)^2$

أ ر $y = (s+4)^2$

٦ اكتب قاعدة الدالة $y = (s)^2$ الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية:



تفكير ناقذ: إذا كان $y = (s)^2$ ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة $y = (s-3)^2 + 2$ حيث $y = (s-3)^2 + 2$

رسم المنحنى $y = (s+4)^2 + 3$

مما سبق نستنتج أن: المنحنى $y = (s+4)^2 + 3$ هو نفس منحنى $y = (s)^2$ بإزاحة أفقية قدرها 4 من الوحدات

(في اتجاه $s > 0$ ، وفي اتجاه $s < 0$ عندما $s < 0$)، ثم إزاحة رأسية قدرها 3 من الوحدات

(في اتجاه $s < 0$ ، وفي اتجاه $s > 0$ عندما $s > 0$)

٦ حاول أن تحل

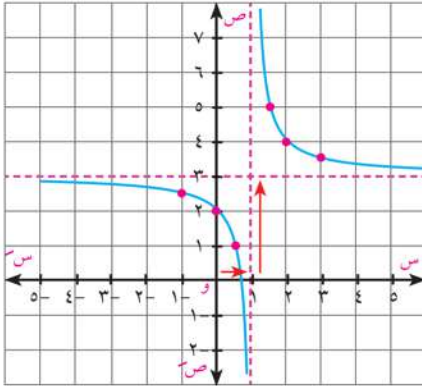
٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س + ٢) - ٤ ب ع(س) = (س - ٣) - ٢

مثال

٥ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = $\frac{1}{s-1} + 3$ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرافها:

الحل



منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{s}$

بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه وس (أ = ١ > ٠)، ثم

إزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وص وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هي النقطة (٣، ١)، مدى ر = ع - {٣}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية في $[-\infty, 1)$ ، وتناقصية أيضًا في $(1, \infty]$

تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن د(س) = $\frac{1}{s-1} + 3$ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

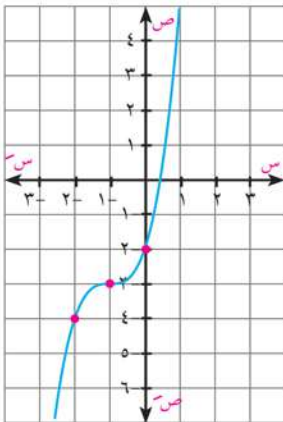
٦ حاول أن تحل

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{s}$ ، لتمثيل كل من:

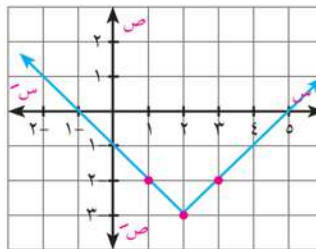
أ ر(س) = $\frac{1}{s+2} + 1$ ب ق(س) = $\frac{2-s}{3-s}$

٩ اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :

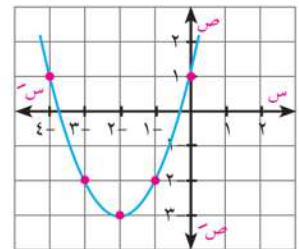
ج



ب



أ

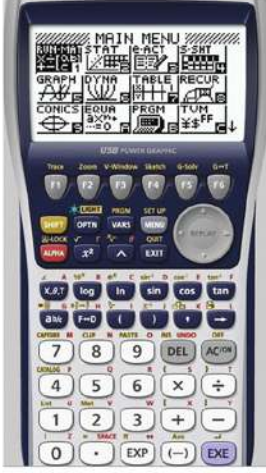


نشاط

استخدام الحاسبة البيانية في رسم الدوال

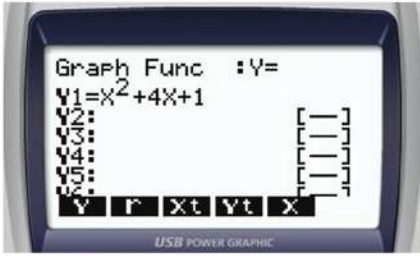
لاستخدام الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة $y = x^2 + 4x + 1$ حيث $D(س) = س^2 + 4س + 1$ اتبع الخطوات التالية:

- افتح الحاسبة واضغط **MENU** ثم تحرك بالأسهم على الشاشة وإختر **GRAPH**،
اضغط **EXE** والذي يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة.

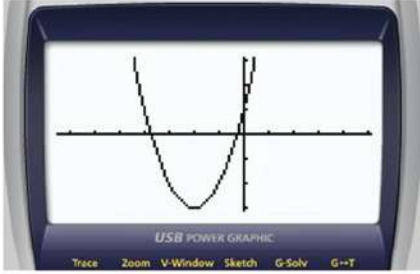


- اكتب عند $Y1$ في نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث
يستخدم مفتاح **T, θ, X** لكتابة المتغير x ولذلك اضغط
المفاتيح التالية:

إبدأ → **T, θ, X** **X²** **+** **4** **T, θ, X** **+** **1**



- لرسم الدالة اضغط **EXE** **EXE** → إبدأ
فتظهر النافذة الرسومية كما في الشكل المقابل.

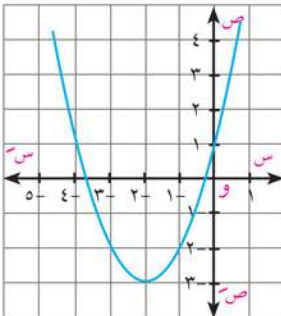


- استخدم مفتاح في النافذة الرسومية لدراسة الدالة.

لاحظ أن:

$$\begin{aligned} D(س) &= س^2 + 4س + 1 \text{ بإكمال المربع} \\ &= (س^2 + 4س + 4) - 3 \\ &= (س + 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

أي أن منحنى الدالة D (المعطاه) هو نفس منحنى الدالة $Y = (س + 2)^2 - 3$ حيث $R(س) = س^2$ بإزاحة قدرها 2 وحدة في اتجاه $\overrightarrow{OS}$ ، ثم 3 وحدات في اتجاه $\overrightarrow{OS'}$ ويمثله الرسم المقابل.

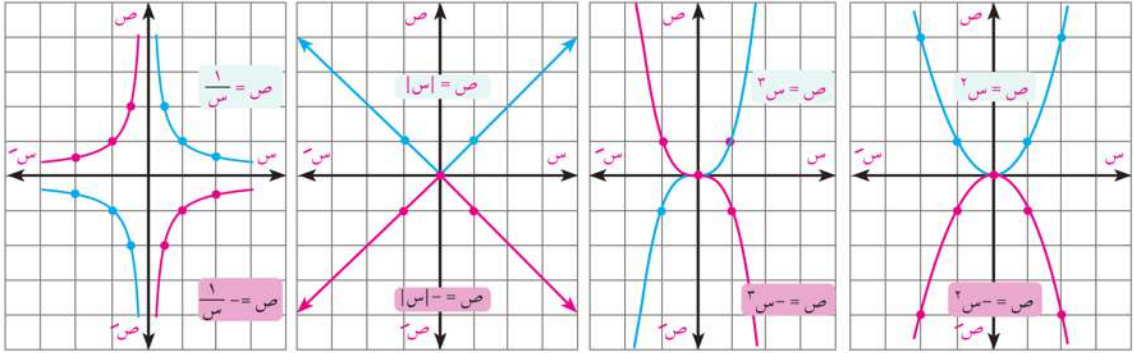


س ²	س	د
س	س	د
س	س	د

تطبيق: باستخدام الحاسبة الرسومية ارسم منحنى الدالة $y = \frac{1}{x-2} + 4$ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

ثالثاً: انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

تبين الأشكال التالية إنعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج ؟

تعلم

رسم المنحنى $y = -x$ د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى $y = -x$ د(س) هو نفس منحنى $y = x$ د(س) بانعكاس فى محور السينات

مثال

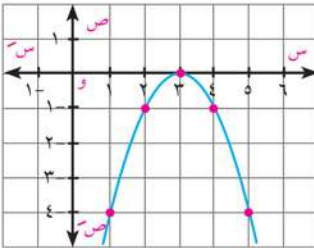
استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

٦ باستخدام منحنيات الدوال الاساسية ارسم منحنيات الدوال ر، ق، ع حيث:

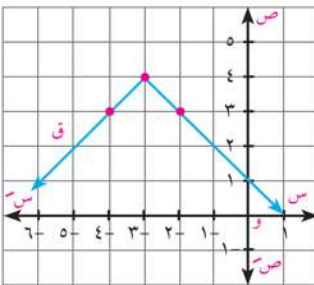
ب ق (س) $y = 4 - |x+3|$

أ ر (س) $y = -(x-3)^2$

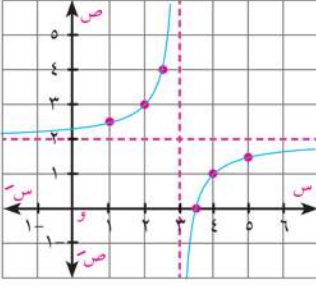
ج ع (س) $y = \frac{1}{x-2} - 2$



أ منحنى ر (س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) $y = x^2$ فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{OS}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.



ب منحنى ق (س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) $y = |x|$ فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{OS}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{OS}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هي النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأعلى.



ج منحني ع (س) هو إنعكاس لمنحني د (س) = $\frac{1}{س}$

في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها 3 وحدات

في اتجاه $\overleftarrow{س}$ ، وإزاحة رأسية قدرها 2 وحدة

في اتجاه $\overrightarrow{ص}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحني هي (2، 3)

٤ حاول أن تحل

١٠ في كل مما يأتي ارسم منحني الدالة ر حيث:

ب ر (س) = - (س - 3) ^٢

أ ر (س) = 3 - (س + 1) ^٢

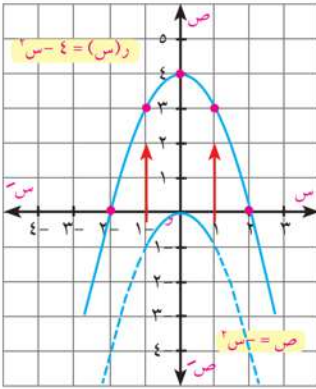
ج ر (س) = 3 - |س - 5|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

مثال

٧ مستخدماً التحويل المناسب، ارسم منحني الدالتين ر، ق حيث ر (س) = 4 - س ^٢، ق (س) = 4 - س ^٢



شكل (١)

الحل

أولاً: رسم منحني الدالة ر

منحني الدالة ر هو نفس منحني الدالة د: د (س) = س ^٢ بانعكاس

في محور السينات، ثم إزاحة رأسية مقدارها 4 وحدات في

اتجاه $\overleftarrow{ص}$ ويوضحه شكل (١)

ثانياً: رسم منحني الدالة ق

∴ ق (س) = 4 - س ^٢ ∴ ق (س) = |ر (س)|

فيكون الإحداثي الصادي لجميع نقط منحني الدالة ق موجباً حيث:

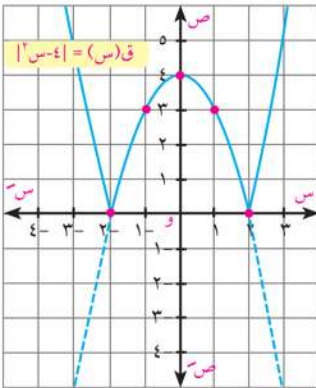
ص = |ر (س)|

∴ ص = $\left. \begin{array}{l} ر (س) \text{ عندما } ر (س) \leq 0 \\ -ر (س) \text{ عندما } ر (س) > 0 \end{array} \right\}$

أي أن منحني الدالة ق يقع في الربعين الأول والثاني فقط وهذا يعني

إنعكاساً لمنحني الدالة ر لكل ر (س) > 0 في محور السينات

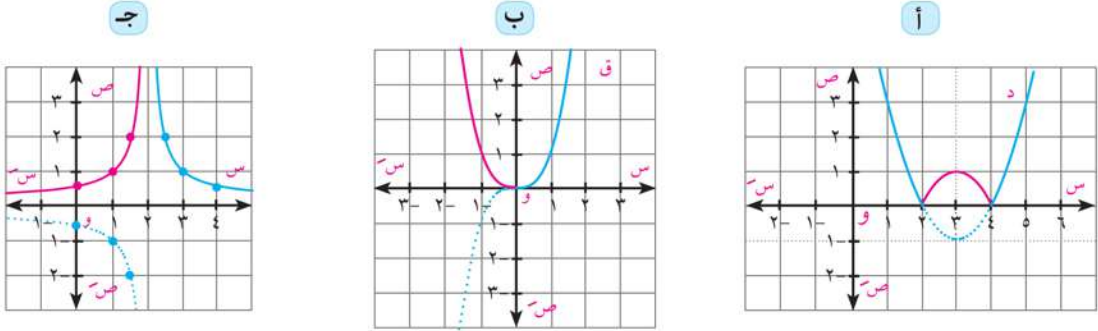
كما في شكل (٢).



شكل (٢)

٩ حاول أن تحل

١١ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:



Expanding of graphs

رابعاً: تمديد منحنى الدالة:

عمل تعاوني

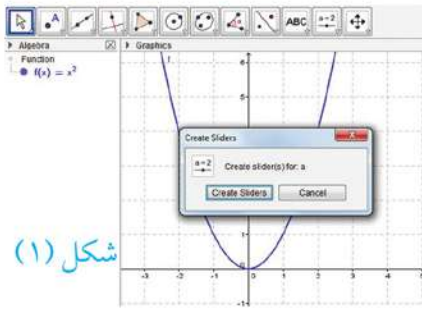
رسم منحنى ر(س) = أ د(س)
اعمل مع زميل.

١ ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^٢ باستخدام برنامج Geogebra
وفي مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

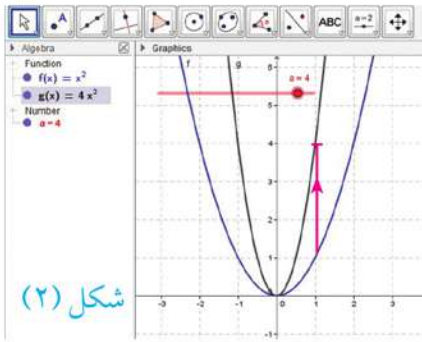
إبدأ → a $\times$ 2 ←

لتظهر لك نافذة جديدة (شكل ١)

اختر منها Create sliders

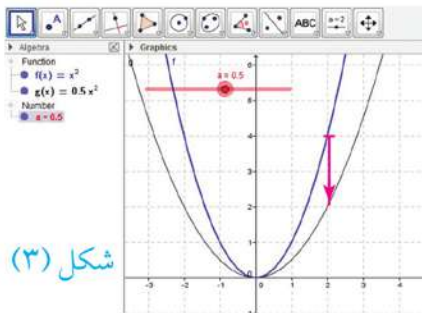


شكل (١)



شكل (٢)

٢ استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم أخرى لها حيث $a > 1$
ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د
لكل $s \in \mathbb{R}$ كما في شكل (٢) وعندما $a < 1$
كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ؟ وماذا تستنتج؟



شكل (٣)

تعلم

رسم المنحنى ص = أ د(س)
لأي دالة د؛ يكون المنحنى ص = أ د(س) هو تمديد رأسي
لمنحنى ص = د(س) إذا كان $a < 1$ ،
وإنكماش رأسي لمنحنى ص = د(س) إذا كان $a > 1$.

رسم منحنى الدالة ر: $(س) = د (س + ب) + ج$

مثال

استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث $(س) = |س|$ لتمثيل كل من الدالتين ر، ع:

أ ر $(س) = ٢ |س|$ ب ع $(س) = ٢ |س - ٧| + ٢$

الحل

أ منحنى ر $(س)$ هو تمديد رأسى لمنحنى الدالة د

معامل $٢ = ٠ < ٢$ وعلي ذلك فإن:

لكل $(س، ص) \Rightarrow$ بيان د

يكون $(س، ٢ ص) \Rightarrow$ بيان ر

ب منحنى ع $(س)$ هو نفس منحنى ر $(س)$ بإزاحة

أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه وس ←

وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه وص ←

٩ حاول أن تحل

١٢ استخدم منحنى الدالة د حيث $(س) = س^٢$ لتمثيل الدالتين ر، ع:

أ ر $(س) = -\frac{١}{٣} س^٢$ ب ع $(س) = \frac{١}{٣} س^٢ - ٢$

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرافها.

نشاط

تطبيق التحويلات الهندسية التي درستها في الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) Trigonometric functions

First: Translation on X - axis

أولاً: الإزاحة في اتجاه محور السينات

١ استخدم برنامج جيوجبرا (GeoGebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدرج على محور السينات بالراديان،

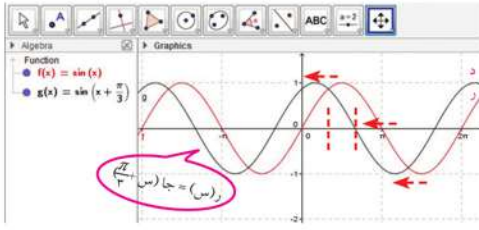
وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها في آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدرج (π) .

٢ في أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: $\sin(x)$ ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر،

تستطيع التحكم في اللون وسمك المنحنى، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر في أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط - منقط، شرطى، متصل، ...).

٣ بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: $\sin(x + (\pi/3))$ أى: ص = جا $(س + \frac{\pi}{3})$ ثم اضغط (enter) ولون

هذا المنحنى بلون آخر.



٤) قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

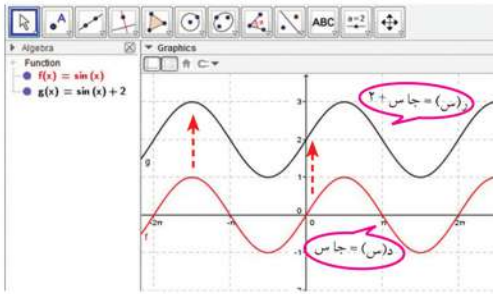
من الرسم نستنتج أن:
تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوي $\frac{\pi}{3}$ (كما في الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو $[-1, 1]$ وهو نفس مدى الدالة **جاس**، كما نلاحظ أن الدالة **جا (س + $\frac{\pi}{3}$)** ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لا يوجد تماثل لمنحنائها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

فكر:

ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هي: **جا (س - $\frac{\pi}{3}$)**.

Second: Translation on Y-axis

ثانياً: الإزاحة في اتجاه محور الصادات



١) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = **جاس** كما سبق.

٢) ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = **جاس + ٢**

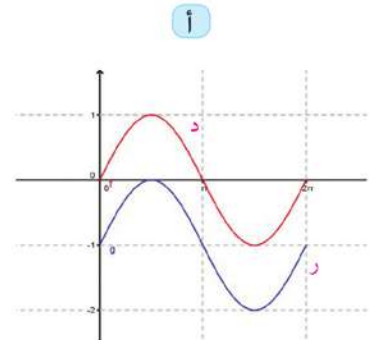
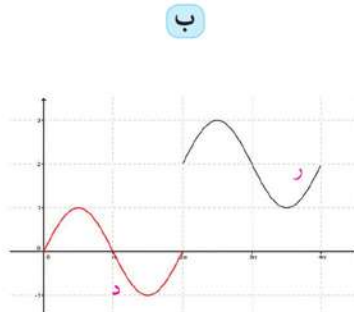
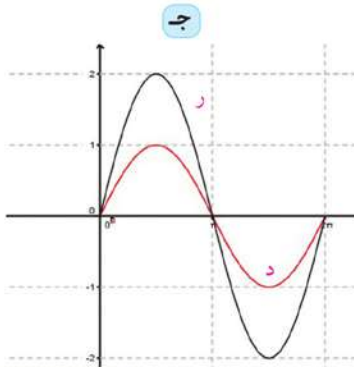
بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

من الرسم نستنتج أن
منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة **جاس**،
بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.
ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو $[1, 3]$ ؛ لأنه تم
إزاحته بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور
الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة **جاس + ٢**
ليست زوجية وليست فردية.

تفكير ناقد:

في كل من الأشكال الآتية:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتي ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر بدلالة د وحدد مداها وابحث اطرافها.





تمارين ١ - ٤



١ حدد قيم a ، b ، c التي تجعل $D(s) = R(s)$ حيث

$$D(s) = (s + 1)s^3 + 3s^2 - 2, \quad R(s) = 5s^3 + (1 + j)s^2 + b$$

٢ ارسم منحنى الدالة D ، ومن الرسم حدد مداها وابتحث اطرافها

- أ $D(s) = \begin{cases} |s| & \text{عندما } s \geq 0 \\ s^2 & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$ ب $D(s) = \begin{cases} 4 & \text{عندما } s > 2 \\ s^2 & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases}$
 ج $D(s) = \begin{cases} s^3 & \text{عندما } s > 1 \\ 1 & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$ د $D(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \\ |s| & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

٣ منحنى $R(s) = s^3 + 4$ هو نفس منحنى $D(s) = s^2$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:

- أ $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{ص}}$ ب $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{س}}$ ج $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{ص}}$ د $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{ص}}$

٤ منحنى $R(s) = |s + 3|$ هو نفس منحنى $D(s) = |s|$ بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:

- أ $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{س}}$ ب $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{س}}$ ج $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{ص}}$ د $\overleftarrow{\text{و}} \text{ و } \overleftarrow{\text{ص}}$

٥ نقطة رأس منحنى الدالة $D(s) = (s - 2)(s^2 + 3)$ هي:

- أ $(3, 2)$ ب $(3, -2)$ ج $(3, 2)$ د $(3, -2)$

٦ نقطة تماثل منحنى الدالة D حيث $D(s) = \frac{1}{s-3} + 4$ هي:

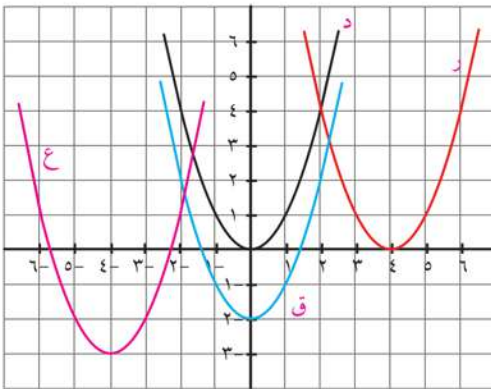
- أ $(4, 3)$ ب $(4, -3)$ ج $(4, 3)$ د $(4, -3)$

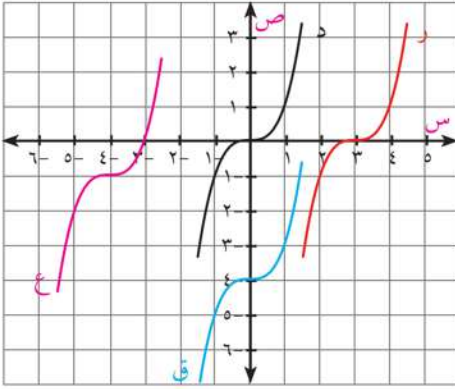
٧ رسم منحنى الدالة D حيث $D(s) = s^2$ ثم أزيح في

اتجاه محوري الإحداثيات
كما في الشكل المقابل.

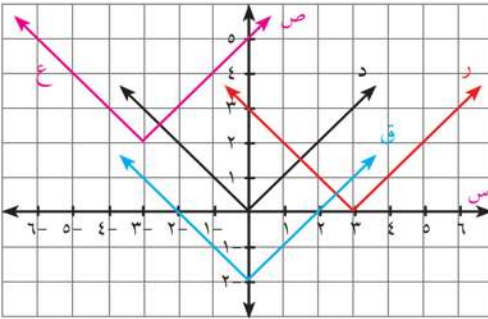
اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

ر، ق، ع



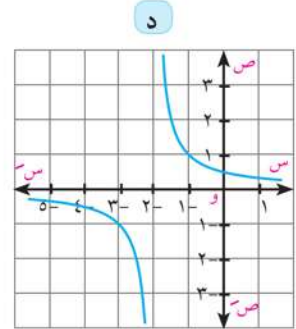
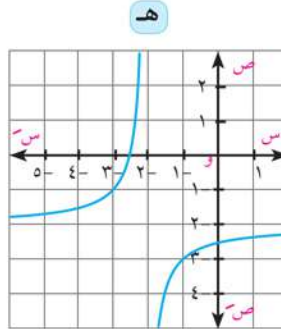
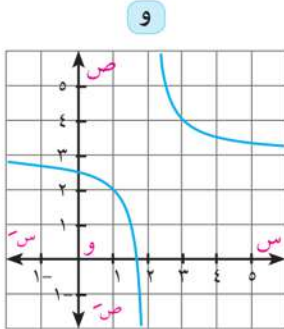
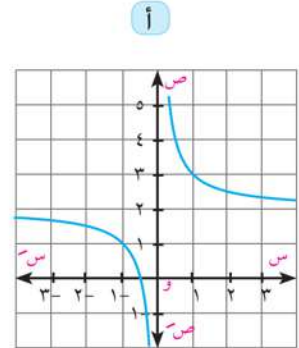
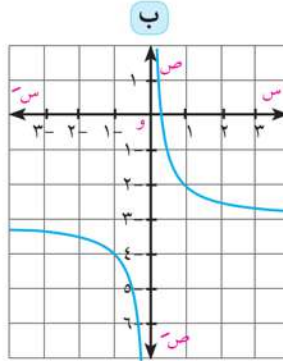
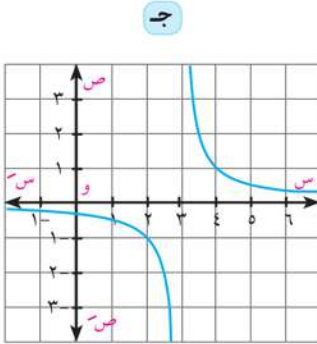


٨ في الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث
د(س) = س^٣ ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات
اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:
ر، ق، ع



٩ رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|
ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات
كما في الشكل المقابل.
اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:
ر، ق، ع

١٠ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ ، ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات. اكتب قاعدة كل دالة التي
تمثلها المنحنيات الآتية:



١١ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل ما يأتي بياناً:

- أ د_١(س) = س^٢ - ٤ ب د_٢(س) = س^٢ + ١ ج د_٣(س) = (س + ١)^٢
 د د_٤(س) = (س - ٣)^٢ هـ د_٥(س) = (س - ١)^٢ - ٢ و د_٦(س) = (س + ٣)^٢ - ٢

١٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بياناً:

- أ د_١(س) = |س| + ١ ب د_٢(س) = |س| - ٣ ج د_٣(س) = |س + ٢|
 د د_٤(س) = |س - ٥| هـ د_٥(س) = |س + ٢| + ١ و د_٦(س) = |س - ٣| - ٢

ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

١٣ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٣. لتمثيل ما يأتي بياناً:

- أ د_١(س) = د(س) - ٣ ب د_٢(س) = د(س) + ١ ج د_٣(س) = د(س) - (٢ - س)
 د د_٤(س) = د(س) + (٣ + س) هـ د_٥(س) = د(س) - (٢ - س) و د_٦(س) = د(س) + (٣ + س)

ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

١٤ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

- أ ق(س) = د(س) + (١ + س) ب ق(س) = د(س) - (٣ - س) ج ق(س) = د(س) + (٢ + س)
 د ق(س) = د(س) - (٤ - س) هـ ق(س) = د(س) + (٢ + س) - ٥ و ق(س) = د(س) - (٢ - س) + ٢

١٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل ما يأتي بياناً:

- أ د_١(س) = س^٢ - ٤ ب د_٢(س) = - (س - ٣)^٢ ج د_٣(س) = (س - ٢) - (٣ + س)^٢

١٦ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بياناً:

- أ د_١(س) = |س| - ٢ ب د_٢(س) = |س + ٥| ج د_٣(س) = |س - ٤| - |س - ٢|
 د د_٤(س) = |س| + ٢ هـ د_٥(س) = |س - ٢| - |س - ١| و د_٦(س) = |س - ٥| - |س + ٢|

١٧ ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرافها

- أ د_١(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{عندما } ٢ + ٢ \leq س \\ \text{عندما } ٢ - ٢ > س \end{array} \right\}$ ب د_٢(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{عندما } ١ + ٢ \geq س \\ \text{عندما } ١ - ٢ \geq س \end{array} \right\}$

- ج د_٣(س) = س |س| - ١ د د_٤(س) = $\frac{س^٢}{١ + س}$

١٨ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ ، فارسم الشكل البياني للدالة ل في الحالات الآتية:

- أ ل(س) = |د(س)| ب ل(س) = ٢ + |د(س)| ج ل(س) = |د(س) - ٢|

١٩ ارسم منحنى الدالة د ، وحدد مداها إذا كان:

أ د(س) = $\sqrt{١٦ - ٢س + ٨س - ٢س}$ ب د(س) = $|س - ٢| - ٣س$ ، س $\in [-١, ٤]$

٢٠ **الربط مع التجارة:** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل، اكتب الدالة التي تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

٢١ **الربط مع الميكانيكا:** يقطع جسم مسافة ف مترًا في ٣ دقائق إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا / دقيقة، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التي تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة اذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

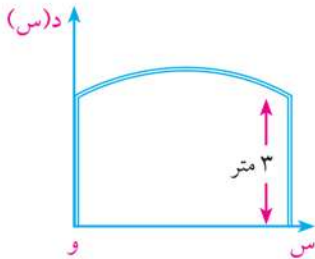
٢٢ **المجتمعات العمرانية:** خصصت قطع أراضي مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منها س مترًا ، ومساحتها ٤٠٠ مترًا مربعًا.

- أ بين أن طول قطعة الأرض يتناسب عكسيًا مع عرضها.
ب اكتب قاعدة الدالة د التي تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًا.
ج أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التي طولها ٢٥ مترًا وتحقق من ذلك جبريًا.

تفكير ابداعي:

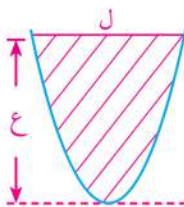
٢٣ إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ أصفاريًا للدالة د: د(س) = $(س - ١) - ٨$ حيث $س_١ > س_٢$ وكان $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ أصفاريًا للدالة ر: ر(س) = $٥ - (س - ١)²$ حيث $س_٣ > س_٤$ ، $س_٥$ فأى العبارات التالية صحيحة:

- أ $س_١ > س_٢ > س_٣ > س_٤ > س_٥$ ب $س_١ > س_٢ > س_٣ > س_٤ > س_٥$
ج $س_٣ > س_٤ > س_١ > س_٢ > س_٥$ د $س_٣ > س_٤ > س_١ > س_٢ > س_٥$



٢٤ **الربط مع الصناعة:** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د: د(س) = $(س - ٢)² + ٤$ كما في الشكل المقابل. أوجد:

- أ قيمة أ
ب أقصى ارتفاع للبوابة
ج عرض البوابة



٢٥ **الربط مع الهندسة:** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة في الشكل المقابل تعطى العلاقة $م = \frac{٢}{٣} ل ع$

- أ أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د: د(س) = $س² - ٦س + ٥$ بالوحدات المربعة

ب ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنى الدالتين د ، ر حيث ر(س) = $|س - ٣| - ٢$ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

أولاً: حل المعادلات

فكر وناقش

مثل بيانياً في شكل واحد منحنى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة خطية. لاحظ الرسم ثم اجب:

أ ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنى الدالتين معاً؟

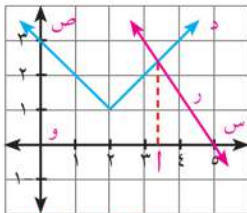
ب إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنين معاً، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين؟

ج استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

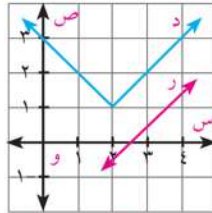
لاحظ أن:

١ عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س)، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.

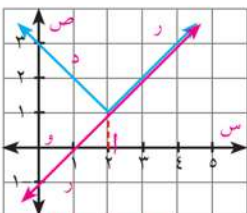
٢ لأي دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هي مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



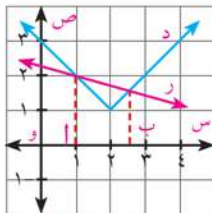
مجموعة الحل = {1}



مجموعة الحل = φ



مجموعة الحل = [0, ∞)



مجموعة الحل = {a, b}

حل المعادلة: |أ س - ب| = ج

مثال

١ حل المعادلة: |س - ٣| = ٥ بيانياً وجبرياً.

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانياً
- حل معادلات المقياس جبرياً
- حل متباينات المقياس بيانياً
- حل متباينات المقياس جبرياً
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

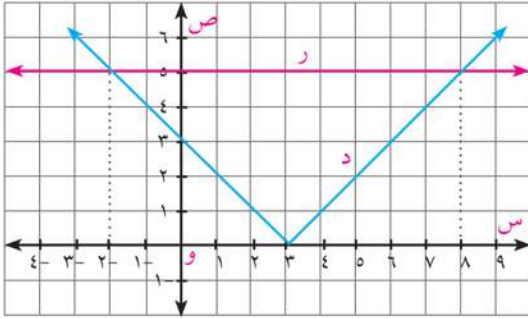
المصطلحات الأساسية

- Equation معادلة
- Inequality متباينة
- Graphical Solution حل بياني

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب

الحل



- بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥
- ١) نرسم منحنى الدالة د: د(س) = |س - ٣| بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات في اتجاه وس ←
- ٢) على نفس الشكل نرسم ر(س) = ٥، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٥، ٠)
- ∴ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (٥، ٢-) ، (٥، ٨)
- ∴ مجموعة حل المعادلة هي: {٨، ٢-}

الحل الجبري:

- من تعريف دالة المقياس: د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } س \leq ٣ \\ ٣ + س & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$
- عندما $س \leq ٣$: $٣ - س = ٥$ أى أن: $س = ٨ \notin]٣، -\infty]$
- عندما $س > ٣$: $٣ + س = ٥$ أى أن: $س = ٢- \in]٣، \infty[$
- مجموعة حل المعادلة هي: {٨، ٢-} وهذا يطابق الحل البياني.

٩ حاول أن تحل

١) حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً وجبرياً.

أ $٥ = |س - ٧|$ ج

ب $٠ = ١ + |س|$

أ $٠ = ٤ - |س|$

Properties of the Absolute Value

بعض خواص مقياس العدد

تعلم

١) $||ب| \times |أ|| = |ب| \times |أ|$ فمثلاً:

$٦ = ٣ \times ٢ = |٣ - | \times |٢|$ ، $٦ = |٦ - | = |٣ - \times ٢|$

٢) $|ب| + |أ| \geq |ب + أ|$

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددا ١، ب لهما نفس الإشارة فمثلاً:

$٩ = |٥ + | = |٥ + |٤ - |$ ، $٩ = |٥ - | = |٥ - ٤ - |$

لاحظ:

- ١) إذا كان: $|س| = أ$ فإن: $س = أ$ أو $س = -أ$ لكل $أ \geq ٠$
- ٢) إذا كان: $|س| = |ب|$ فإن: $س = ب$ أو $س = -ب$ لكل $ب \geq ٠$
- ٣) $|س|^٢ = |س|$ ، $|س|^٢ = |س|$ إذا كان $|س| = ٠$ ، $|س| = ١$
- ٤) إذا كان $|س| = |ب|$ فإن $س \in]٠، \infty[$ أو $س \in]-\infty، ٠[$
- ٥) إذا كان $|س| = |ب|$ فإن $س \in]٠، \infty[$ أو $س \in]-\infty، ٠[$

حل المعادلة $|س + ب| = |س - ج|$

مثال

٢ حل المعادلة: $|س - ٢| = |س - ٣|$ بيانيًا وجبريًا.

الحل

بوضع د(س) = $|س - ٢|$ ، ر(س) = $|س - ٣|$

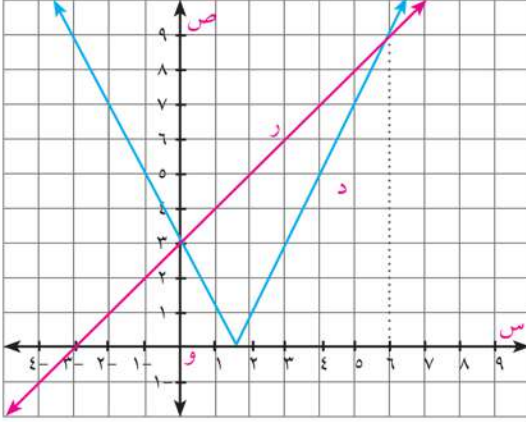
الحل البياني:

$$د: د(س) = |س - ٢| = |س - ٣| = ر(س) = |س - ٣|$$

$$\therefore د(س) = ٢ = |س - ٣|$$

منحنى د هو نفس منحنى $|س - ٣|$ بإزاحة أفقية

قدرها $\frac{٣}{٢}$ وحدة في اتجاه و س



ر: ر(س) = $|س - ٣|$ ويمثلها خط مستقيم ميله ١ ويمر بالنقطة (٣، ٠)

$\therefore$ نقط التقاطع هي (٣، ٠) ، (٩، ٦)

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة هي: {٦، ٠}

الحل الجبري:

$$\therefore |س - ٢| = |س - ٣| \begin{cases} \text{عندما } س \leq \frac{٣}{٢} & ٣ - س - ٢ = س - ٣ \\ \text{عندما } س > \frac{٣}{٢} & ٣ + س - ٢ = س - ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \text{عندما } س \leq \frac{٣}{٢} \quad \text{تكون } ٣ - س - ٢ = س - ٣ \quad \text{ومنها } س = ٦ \in] \frac{٣}{٢}, \infty]$$

$$، \text{ عندما } س > \frac{٣}{٢} \quad \text{تكون } ٣ + س - ٢ = س - ٣ \quad \text{ومنها } س = ٠ \in] -\infty, \frac{٣}{٢}]$$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة هي: {٦، ٠}

٩ حاول أن تحل

٢ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانيًا وجبريًا.

ج $|س - ٣| = ٣ - س$

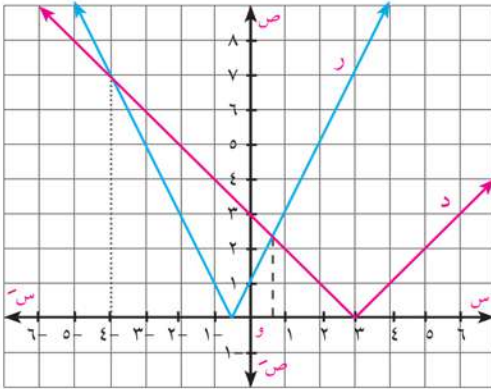
ب $|٥ + س| = س - ٤$

أ $|س + ٤| = ١ - س$

حل المعادلة: $|س + ب| = |س - ج|$

مثال

٣ حل المعادلة $|س - ٣| = |س + ١|$ بيانيًا.



الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = |س + ٢| = ١ + س
منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات
في اتجاه وس ←
ر: ر(س) = ٢ = |س + ٢|
منحنى ر هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها ١/٢
وحدة في اتجاه وس ← ، ويكون نقط تقاطع منحنيا
الدالتين د ، ر هي: (٧، -٤) ، (١/٣، ٠) ، (١/٣، ٠)
مجموعة حل المعادلة هي {١/٣، -٤}

٦ حاول أن تحل

٣ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً.

أ |س + ٧| = |س + ٣|

ب |س - ٢| + |س - ١| = صفر

مثال

٤ أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ |س + ٧| = |س - ٥|

ب $\sqrt{s^2 + 6s + 9} = 9 - 2s$

الحل

أ $\therefore |س + ٧| = |س - ٥|$

$\therefore س + ٧ = س - ٥$ أو $س + ٧ = -(س - ٥)$

$\therefore س = -٧$ (غير ممكن).

$\therefore س + ٧ = س - ٥$

أو $س + ٧ = -س + ٥$

أى أن: $٢س = -٢$

$\therefore س = -١$

أى أن مجموعة حل المعادلة هي { -١ }

التحقيق:

بالتعويض عن $س = -١$ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦
أى أن مجموعة الحل هي { -١ }

فكر:

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

ب $\therefore \sqrt{s^2 + 6s + 9} = 9 - 2s$

أى أن: $\therefore |س - ٣| = ٩ - ٢س$

فإن: $س - ٣ = ٩ - ٢س$

أى أن: $س = ٤ \in [٣، \infty)$

فإن: $س - ٣ = ٩ - ٢س$

أى أن: $س = ٦ \notin [٣، \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل هي { ٤ }

أولاً: عندما $س \leq ٣$

$\therefore س = ١٢$

ثانياً: عندما $س > ٣$

$\therefore س = ٦$

تذكر أن

٩

إذا كان أ، ب $\exists$ ع

وكان $|أ| = |ب|$

فإن: $أ = \pm ب$

تذكر أن

٩

لأي عدد حقيقي أ يكون:

$|أ| = \sqrt{أ^2}$

فكر:

١ هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حل للمعادلة؟ وضح ذلك.

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ $|س - ١| - ٢ = |س - ٢|$ ب $\sqrt{س^2 - ٤} = س + ٤$

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

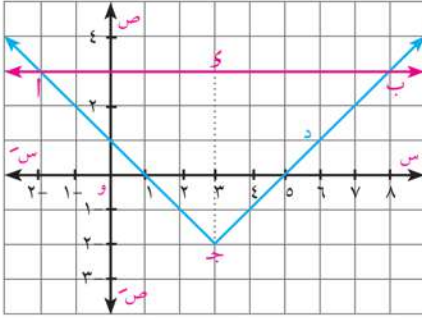
مثال

تخطيط المدن

٥ قطعة أرض محصورة بين منحنى الدالتين د، ر حيث:

د(س) = |س - ٣| - ٢ ، ر(س) = ٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمطار المربعة.

الحل



بتمثيل منحنى الدالتين د، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (٣، ٢-) ، ب (٣، ٨) ، و تكون قطعة الأرض على شكل

المثلث أ ب ج القائم الزاوية ج حيث

$$أ ب = (٢ -) - ٨ = ١٠ \text{ وحدات}$$

$$ج د = ٣ - (٢ -) = ٥ \text{ وحدات}$$

$$\therefore \text{مساحة } \triangle أ ب ج = \frac{١}{٢} \times أ ب \times ج د$$

$$= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٥ = ٢٥ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{مساحة قطعة الأرض} = ٢٥ (٨ \times ٨) = ١٦٠٠ \text{ متراً مربعاً.}$$

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين د، ر حيث:

$$د(س) = |س - ٢| - ١ ، ر(س) = ٥ - |س - ٢|$$

مثال

شبكات الطريق

٦ طريقان الأول يمثل منحنى الدالة د حيث د(س) = |س - ٥| ، والثاني يمثل منحنى الدالة ر حيث

$$ر(س) = ٥ - \frac{٢}{٣} س ، \text{ إذا تقاطع الطريقان في نقطتي أ، ب أوجد المسافة بين أ، ب لأقرب كيلو متر}$$

إذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

الحل

$$\text{يتقاطع الطريقان عندما د(س) = ر(س) ، ويكون } |س - ٥| = ٥ - \frac{٢}{٣} س$$

$$\therefore |1, 6|$$

$$س = 6, ص = 1$$

أي

$$\therefore س - ٥ = ٥ - \frac{2}{3}س$$

$$\therefore |٥, ٠| = ب$$

$$س = ٠, ص = ٥$$

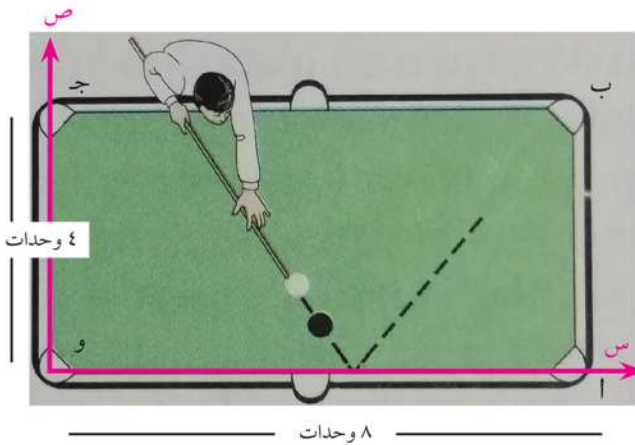
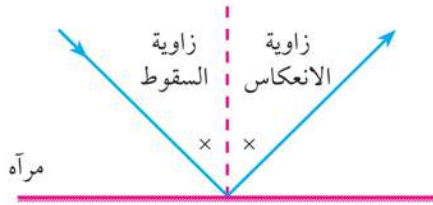
أي

$$أوس - ٥ = ٥ - \frac{2}{3}س$$

$$أب = \sqrt{(٥-١)^2 + (٥-٦)^2} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥} \approx ٤,٤٧$$

∴ المسافة بين أ، ب = $٢ \times ٥ = ١٠$ وحدات

∴ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلومترات



نشاط

إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساوياً لقياس زاوية الانعكاس، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة في بعض الحالات.

١) يوضح الشكل المقابل:

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء، باعتبار $س$ و $ص$ محوري الأحداث المتعامدة، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة $د(س) = \frac{4}{3}|س-٥|$ هل تسقط الكرة السوداء في الجيب ب؟ فسر إجابتك رياضياً.

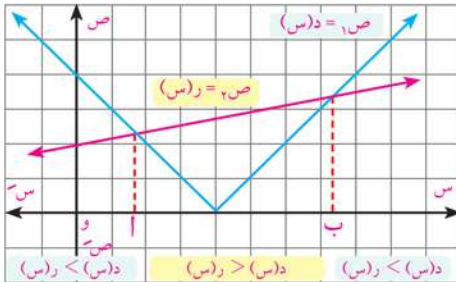
٦) حاول أن تحل

٦) في المثال السابق تحقق من نقط التقاطع لحل المعادلتين بيانياً.

Solving the Inequalities

ثانياً: حل المتباينات

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التي تجعل المتباينة صحيحة.

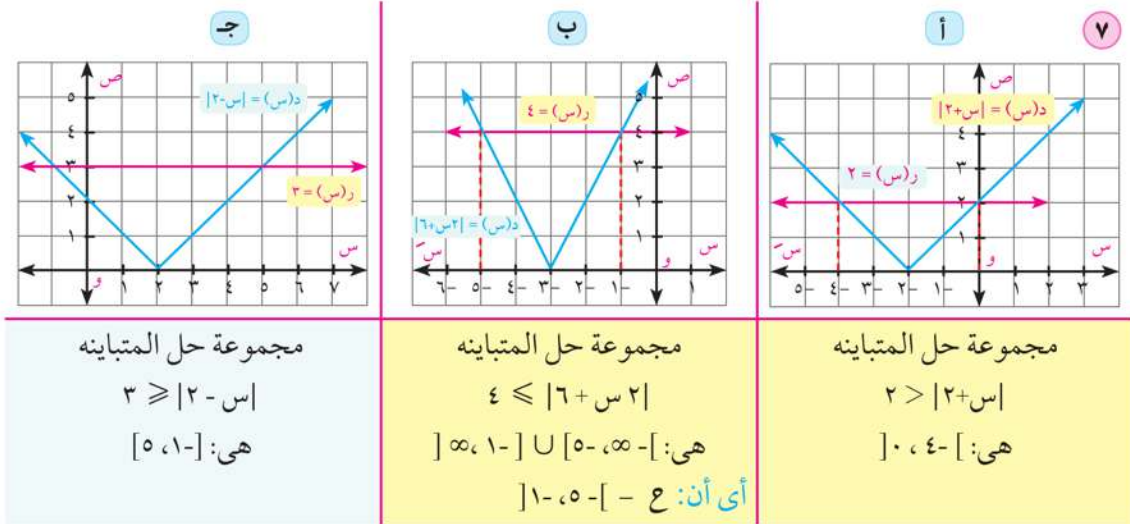


حل المتباينات بيانياً

يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:
 $د(س) = ٥$, $ص = ٣$, $ر(س) = ٣$ وتكون مجموعة حل المعادلة
 $د(س) = ر(س)$ هي {أ، ب}
أي أن: $ص = ٣$ عندما $س = أ$ أو $س = ب$

ويلاحظ: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > y \Leftrightarrow (x - y) > 0$ عندما $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Leftrightarrow (x - y) < 0$ عندما $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

مثال



٤ حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

أ $|x+2| \geq 2$ ب $|x+2| \leq 4$ ج $|x-2| < 3$

حل المتباينات جبريًا

تعلم

أولاً: إذا كان $|x| \geq a, a > 0$ فإن: $x \leq -a$ أو $x \geq a$

ثانياً: إذا كان $|x| \leq a, a > 0$ فإن: $-a \leq x \leq a$

مثال

٨ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ $|x-3| > 4$ ب $|x-3| \leq 4$

ج $|x-3| \leq 2$

الحل

أ $|x-3| > 4 \Rightarrow x-3 > 4 \text{ أو } x-3 < -4$

$\therefore x > 7 \text{ أو } x < -1$

$\therefore$ مجموعة الحل $=(7, \infty) \cup (-\infty, -1)$

تذكر أن

لكل من a, b, c ج

إذا كان: $a > b, b > c$

فإن $a > c$

إذا كان: $a > b$ فإن

$a + c > b + c$

$a > b$ ج عند $c < 0$

$a < b$ ج عند $c > 0$

إذا كان a, b موجبتان،

$a > b$ فإن $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

ب) $\therefore \sqrt{2(1-s)} = |s-1|$ أي أن: $|s-1| \leq 4$

$\therefore -1 \leq s-1 \leq 4$ أي $s \leq 5$ ، $s-1 \geq -4$ أي $s \geq -3$

$\therefore$ مجموعة حل المتباينة هي $[-3, 5]$ $\cup$ $[-3, \infty)$ $\cup$ $(-\infty, 5]$

ج) $\therefore \frac{1}{|3-s|} \leq 2$ وبأخذ المعكوس الضربي للطرفين $\therefore |3-s| \geq \frac{1}{2}$ ، $s \neq \frac{3}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq 3-s \leq \frac{1}{2}$ وبإضافة ٣ إلى المتباينة $\therefore -\frac{1}{2} + 3 \leq 3-s+3 \leq \frac{1}{2} + 3$

$\therefore \frac{5}{2} \leq s \leq \frac{7}{2}$ وبالقسمة على ٢ $\therefore \frac{5}{4} \leq s \leq \frac{7}{4}$

$\therefore$ مجموعة حل المتباينة هي $[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}] - \{\frac{3}{2}\}$

٦ حاول أن تحل

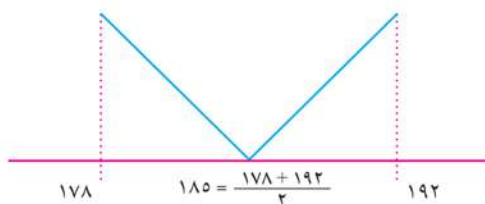
٨ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ) $|s-7| > 11$ ب) $|3s+7| \geq 8$ ج) $\sqrt{s^2-6s+9} \leq 8$ د) $\frac{1}{|s|} \leq 5$

مثال

(تطبيق حياتي على حل المتباينة)

٩ تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعي بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.



الحل

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = s سم
حيث $178 \leq s \leq 192$ ، بإضافة ١٨٥ الي
أطراف المتباينة.

$178 - 192 \geq 185 - s \geq 185 - 192$

$-14 \geq 185 - s \geq -7$

أي أن $|185-s| \geq 7$

٦ حاول أن تحل

٩ اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن:

أ) درجة طالب في اختبار ما تراوح بين ٦٠ الي ١٠٠ درجة.

ب) درجة حرارة مقاسة بالترموتر الطبي يتراوح بين 35°C ، 42°C

ج) توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تفكير ناقدي: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتي:

أ) $-4 \leq s \leq 4$ ب) $0 < s < 6$

ج) $s \geq 2$ أو $s \leq 2$ د) $[-2, 6]$



تمارين ١ - ٥



أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

- ١ | $3 = |2 - س|$ ٢ | $7 = |3 - 2س|$ ٣ | $3 = |2 - س|$
 ٤ | $0 = 2 - س + |2 + س|$ ٥ | $2 = |س| + |س|$ ٦ | $4 - س = |2 - س|$
 ٧ | $2 - س = |1 - س|$ ٨ | $|3 - س| = |2س - 6|$ ٩ | $\sqrt{س^2 - 6س + 9} = 2س + 9$

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

- ١٠ | $7 = |3 - س|$ ١١ | $0 = 2 - س + |2 + س|$ ١٢ | $4 - س = |2 - س|$
 ١٣ | $2س - 4 = |س + 1|$ ١٤ | $0 = س + |س|$ ١٥ | $|3 - س| = |2 + س|$

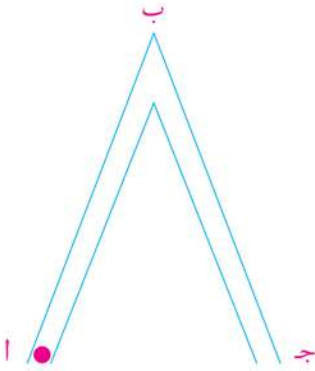
أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانياً:

- ١٦ | $2 > |1 - س|$ ١٧ | $3 > |2 - س|$ ١٨ | $3 < |س - 5|$
 ١٩ | $7 \leq |2س - 3|$ ٢٠ | $1 < |س + 3|$ ٢١ | $2 \leq |س - 5|$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية جبرياً:

- ٢٢ | $15 \geq |3 - س|$ ٢٣ | $4 > |3 - 2س|$ ٢٤ | $2 \leq |3 - 7س|$
 ٢٥ | $4 > 5 + |2 + س|$ ٢٦ | $\sqrt{س^2 - 2س + 1} \leq 4$ ٢٧ | $\sqrt{س^2 - 12س + 9} \geq 9$
 ٢٨ | $12 > |س - 3| + |6 - 4س|$ ٢٩ | $3 \leq \frac{1}{|5س - 3|}$ ٣٠ | $2 < \frac{1}{|3س - 2|}$

٣١ الربط بالميكانيكا:



يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث من الموضع ا إلى الموضع ج مروراً بالموضع ب دون توقف، وكانت المسافة بين الجسم والموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) $8 - 5 = |ن|$ حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالسنتيمترات.

أ احسب المسافة بين الجسم والموضع ب بعد ثانيتين و بعد ٨ ثوان ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك

ب متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب، فسر إجابتك.

ج متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب.

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

ملخص الوحدة

- ١ الدالة: هي علاقة بين مجموعتين غير خاليتين S ، V بحيث يكون لكل عنصر من عناصر S عنصرًا وحيدًا من عناصر V ، وتكتب رمزيًا بالصورة $D: S \rightarrow V$ ، وتحدد الدالة بثلاثة عناصر هي: المجال، المجال المقابل، وقاعدة الدالة.
وتسمى الدالة D دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.
- ٢ اختبار الخط الرأسى: إذا مثلت علاقة بمجموعة من النقاط في مستوى إحداثي متعامد وقطع الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلهما البياني في نقطة واحدة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة.
- ٣ دالة متعددة التعريف: هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.
- ٤ العمليات على الدوال: إذا كانت D_1 ، D_2 دالتين مجالاها M_1 ، M_2 فإن:

$$\langle (D_1 \pm D_2)(s) = (D_1(s) \pm D_2(s)) \rangle$$
 ، مجال $(D_1 \pm D_2)$ هو $M_1 \cap M_2$

$$\langle (D_1 \cdot D_2)(s) = (D_1(s) \cdot D_2(s)) \rangle$$
 ، مجال $(D_1 \cdot D_2)$ هو $M_1 \cap M_2$

$$\langle \left(\frac{D_1}{D_2}\right)(s) = \frac{D_1(s)}{D_2(s)} \rangle$$
 حيث $D_2(s) \neq 0$ ، مجال $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$ هو $(M_1 \cap M_2) - F(D_2)$
 حيث $F(D_2)$ مجموعة أصفار D_2
- ٥ تركيب الدوال: إذا كان مدى الدالة D مجموعة جزئية من مجال الدالة R فيمكن تركيب الدالة E من الدالتين ، D ، R حيث $E \circ R = R \circ D$ وتقرأ R تركيب D ويكون $E \circ R = (R \circ D)(s) = R[D(s)]$
- ٦ الدالة الزوجية والدالة الفردية:

الدالة الزوجية: يقال للدالة $D: S \rightarrow V$ إنها دالة زوجية إذا كان $D(-s) = D(s)$ لكل $s \in S$.

الدالة الفردية: يقال للدالة $D: S \rightarrow V$ إنها دالة فردية إذا كان $D(-s) = -D(s)$ لكل $s \in S$.
- ٧ الدالة الأحادية: الدالة $D: S \rightarrow V$ تسمى دالة أحادية إذا كان:
 لكل $a, b \in S$ و $D(a) = D(b)$ فإن $a = b$ أو لكل $a \neq b$ فإن $D(a) \neq D(b)$
- ٨ اختبار الخط الأفقى: تكون $D: S \rightarrow V$ دالة أحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازي لمحور السينات عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.
- ٩ اطراد الدوال: تكون الدالة D تزايدية في الفترة $[a, b]$ إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، $s_1 < s_2$ فإن $D(s_1) < D(s_2)$ وتكون D تناقصية في الفترة $[a, b]$ إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، $s_1 < s_2$ فإن $D(s_1) > D(s_2)$ وتكون D ثابتة في الفترة $[a, b]$ إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، $s_1 < s_2$ فإن $D(s_1) = D(s_2)$

- ١٠ الدالة الخطية: أبسط صورها: د(س) = س ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)
- ١١ الدالة التربيعية: أبسط صورها د(س) = س^٢ ، نقطة رأس المنحنى هي (٠، ٠)، معادلة محور التماثل س = ٠
- ١٢ الدالة التكعيبية: أبسط صورها د(س) = س^٣ ، نقطة تماثل منحنىها هي (٠، ٠)
- ١٣ دالة المقياس: (القيمة المطلقة)

أبسط صورة لدالة المقياس هي د(س) = |س|، وتعرف على النحو التالي: د(س) = $\begin{cases} س ، س \leq ٠ \\ -س ، س > ٠ \end{cases}$ ويمثلها شعاعان يبدآن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ وميل الآخر = -١ ويكون:

$$|س| \leq ٠ ، |س| = |س| ، |س| = \sqrt[٣]{س}$$

١٤ الدالة الكسرية: أبسط صورها هي د(س) = $\frac{١}{س}$ ، نقطة تماثل منحنىها هي (٠، ٠)

١٥ التحويلات الهندسية للدالة د، حيث ص = د(س)، أ < ٠ تحدد بالآتي:

- ◀ إذا كانت ص = د(س) + أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار أ
- ◀ إذا كانت ص = د(س) - أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار أ
- ◀ إذا كانت ص = د(س + أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور السينات بمقدار أ
- ◀ إذا كانت ص = د(س - أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار أ
- ◀ إذا كانت ص = -د(س) فإنها تمثل بانعكاس منحنى د في محور السينات.
- ◀ إذا كانت ص = أ - د(س) فإنها تمثل بتمدد رأسي لمنحنى د إذا كان أ < ٠ وإنكماش رأسي إذا كان ٠ < أ < ١

١٦ خواص مقياس العدد:

أ |أ| × |ب| = |أ × ب| ب |أ| + |ب| ≥ |أ + ب|

ج إذا كان |س| ≥ أ ، أ < ٠ فإن: -أ ≥ س

د إذا كان |س| ≤ أ ، أ < ٠ فإن: س ≤ أ أو س ≥ -أ

@ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:

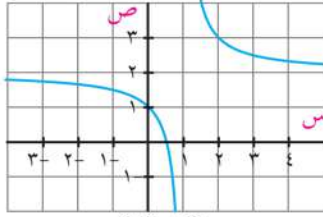




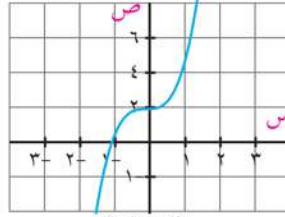
اختبار تراكمي



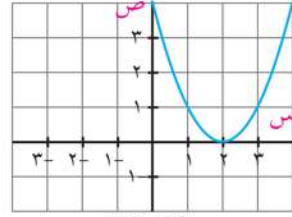
- ١ أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د، ر، ع حيث د(س) = س^٢، ر(س) = س^٢، ع(س) = $\frac{1}{س}$ فكانت كما في الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتي:



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

- أ قاعدة الدالة في شكل (١) هي.....
 ب قاعدة الدالة في شكل (٢) هي.....
 ج قاعدة الدالة في شكل (٣) هي.....
 د الدالة ليست أحادية كما في شكل.....
 ه مدى الدالة في شكل (١) هو.....
 ز نقطة تماثل الدالة في شكل (٣) هي.....
 ح معادلة محور تماثل الدالة في شكل (١) هي.....

- ٢ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلي:

أ د(س) = $\frac{س}{س^2 - ١٠}$

ب د(س) = $\sqrt{٢ + س}$

ج د(س) = $\frac{٣}{٣ - س}$

- ٣ إذا كانت د(س) = $\frac{1}{س}$ ، س ≠ ٠، ر(س) = ٢س فأوجد كلاً من:

(د+ر)(س)، (د.ر)(س)، $(\frac{ر}{د})(س)$ ثم أوجد قيمة (د+ر)(١)، (د.ر)(٢)، $(\frac{ر}{د})(٢)$

- ٤ ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س - ٣| + ١، ومن الرسم ابحث اطراد الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٤

- ٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ |س + ٢| = ٣ - س

ب |س| - ٢ = س

ج |٣ - ٢س| < ٥

- ٦ أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية، وارسم منحنى د، ثم أوجد بيانياً وجبرياً مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢ - س، وتحقق من صحة الحل.

- ٧ **الربط بالميكانيكا:** أطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ث من على سطح الأرض، فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالمتري، والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة ف = ٩٨ - ٩ ن، ٤ ن بيّن أن هذه الدالة ليست أحادية، ثم أوجد

- أ ارتفاع الصاروخ عن سطح الأرض بعد ثانيتين من لحظة انطلاقه.

- ب الزمن الذي يستغرقه الصاروخ حتى يكون على ارتفاع ٤٧٠، ٤ متراً من سطح الأرض.

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات في أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية $(\text{لوم } \text{س}) = \text{لوم } \text{س} + \text{لوم } \text{ص}$ ، ويرجع الفضل للعالم ليونهارت أولير في القرن الثامن عشر، بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة القوالت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلول ما.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:

- ✦ يتعرف الدالة الأسية د: $\text{س} \mapsto \text{أ}^{\text{س}}$ حيث $\text{أ} \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
- ✦ يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- ✦ يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- ✦ يحل معادلات أسية على الصورة $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ب}$.
- ✦ يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ب}$.
- ✦ يتعرف الدالة اللوغاريتمية $\text{ص} = \text{لوم } \text{س}$ أو $\text{د}(\text{س}) = \text{لوم } \text{س}$ حيث $\text{أ} \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ، $\text{س} \in \mathbb{R}^+$.
- ✦ يحول جبرياً من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- ✦ يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها.
- ✦ يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم $\text{ص} = \text{س}$ ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية فى فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- ✦ يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانياً.
- ✦ يتعرف قوانين اللوغاريتمات:
- ✦ $\text{لوم}(\text{س} \cdot \text{ص}) = \text{لوم } \text{س} + \text{لوم } \text{ص}$ حيث $\text{س} > 0$ ، $\text{ص} > 0$.
- ✦ $\text{لوم}(\frac{\text{س}}{\text{ص}}) = \text{لوم } \text{س} - \text{لوم } \text{ص}$ ، $\text{س} > 0$ ، $\text{ص} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } \text{س}^{\text{ن}} = \text{ن} \cdot \text{لوم } \text{س}$ ، $\text{س} > 0$ ، $\text{ن} \in \mathbb{R}$.
- ✦ $\text{لوم } \frac{1}{\text{س}} = -\text{لوم } \text{س}$ ، $\text{س} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } \text{س} = \frac{1}{\text{لوم } \frac{1}{\text{س}}}$ ، $\text{س} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } \text{ب} = \frac{1}{\text{لوم } \frac{1}{\text{ب}}}$ ، $\text{ب} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } \text{أ} = 1$ ، $\text{أ} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } 1 = 0$ ، $\text{أ} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } \text{أ} = 0$ ، $\text{أ} > 0$.
- ✦ $\text{لوم } 1 = 0$ ، $\text{أ} > 0$.
- ✦ يحل معادلات لوغاريتمية
- ✦ يحل مسائل تشتمل تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- ✦ يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة.
- ✦ يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

Symmetry	تماثل	Exponential Growth	نمو أسي	Exponent	أس
Compound Interest	فائدة مركبة	Exponential Decay	تضاؤل أسي	Power	قوة
Inverse Function	دالة عكسية	Even	زوجي	Base	أساس
Logarithm	لوغاريتم	Odd	فردى	Radicals	جذور
Exponential Form	صورة أسية	Laws of Exponents	قوانين الأسس	Rational Exponents	أسس كسرية
Logarithmic Form	صورة لوغاريتمية	Exponential Function	الدالة الأسية	Square Root	الجذر التربيعي
Common Logarithm	لوغاريتم معتاد	Exponential Equation	معادلة أسية	Cube Root	الجذر التكعيبي
Logarithmic Function	دالة لوغاريتمية	Increasing Function	الدالة المتزايدة	n^{th} Root	الجذر النوني
Logarithmic Equation	معادلة لوغاريتمية	Decreasing Function	الدالة المتناقصة	Real Root	جذر حقيقي

مخطط تنظيمى للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): الأسس الكسرية.
- الدرس (٢ - ٢): الدالة الأسية وتطبيقاتها.
- الدرس (٢ - ٣): المعادلات الأسية .
- الدرس (٢ - ٤): الدالة العكسية.
- الدرس (٢ - ٥): الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني.
- الدرس (٢ - ٦): بعض خواص اللوغاريتمات.

الأدوات والوسائل

- ورق رسم بياني - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

الأسس الكسرية

Rational Exponents

٢ - ١

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

الأسس الصحيحة:

تعريف

(١) لكل $a \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}^+$ فإن:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n \quad (\text{حيث العامل مكرر } n \text{ من المرات})$$

ويسمى (a^n) بالقوة النونية للعدد a ، حيث يسمى العدد a بالأساس، والعدد n بالأس ونقول أن n مرفوع للأس a .

(٢) $a^0 = 1$ لكل $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$(٣) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \quad a \neq 0$$

خواص الأسس الصحيحة:

إذا كان لكل $m, n \in \mathbb{N}^+$ ، $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ فإن:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^m = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

مثال

$$١ \quad \text{أثبت أن } \frac{2^{3-2} \times 4^{1+2} \times 9^{2-1}}{2^{-1} \times 4^2 \times 9^3} = 1$$

الحل

$$\frac{2^{3-2} \times 4^{1+2} \times 9^{2-1}}{2^{-1} \times 4^2 \times 9^3} = \frac{2^{1-2} \times (2^2)^{1+2} \times (3^2)^{2-1}}{2^{-1} \times (2^2)^2 \times (3^2)^3} = \frac{2^{1-2} \times 2^{2 \times 3} \times 3^{2 \times 1}}{2^{-1} \times 2^{4 \times 1} \times 3^{2 \times 3}} =$$

$$= \frac{2^{1-2+6} \times 3^{2-6}}{2^{-1+4} \times 3^{6-6}} = \frac{2^{5-2} \times 3^{-4}}{2^{3-1} \times 3^{0-0}} = \frac{2^{3-2} \times 3^{-4}}{2^{2-1} \times 3^{0-0}} = \frac{2^{1-2} \times 3^{-4}}{2^{1-1} \times 3^{0-0}} = \frac{2^{-1} \times 3^{-4}}{2^{0-0} \times 3^{0-0}} = \frac{2^{-1} \times 3^{-4}}{1 \times 1} = \frac{1}{2 \times 81} = \frac{1}{162}$$

(الطرف الأيسر)

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النوني.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

The n^{th} Power	القوة النونية
Base	الأساس
Exponent	الأس
n^{th} Root	جذر نوني
Rational Exponent	أس كسري

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

٩ حاول أن تحل

١ أوجد في أبسط صورة المقدار: $\frac{2(12) \times 3(27)}{3(81) \times 16}$

مثال

٢ أثبت أن: $\frac{5}{9} = \frac{2(25) \times 3(15) \times 125}{3(5) \times 3(75)}$

الحل

الطرف الأيمن

$$\begin{aligned} & \frac{2(25) \times 3(15) \times 125}{3(5) \times 3(75)} = \\ & \frac{2^2 \times 5^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 5^3}{3^1 \times 5^1 \times 3^1 \times 5^3} = \\ & \frac{2^2 \times 5^6 \times 3^2}{3^2 \times 5^4} = \\ & 2^2 \times 5^2 \times 3^0 = 100 \\ & \text{(الطرف الأيسر)} \quad \frac{5}{9} = \frac{5}{9} = \frac{2^2 \times 5^2}{3^2} = 100 \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

٢ أثبت أن: $\frac{11}{15} = \frac{1-2 \times 3 \times 4 - 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 - 1 + 2 \times 3 \times 2}$

تفكير ناقد:

أ إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، n عددًا صحيحًا فرديًا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتي:

(أ) $a^n < 0$ (ب) $a^n > 0$ (ج) $a^n \leq 0$ (د) $a^n > 1$

ب إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، n عددًا صحيحًا زوجيًا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتي:

(أ) $a^n < 0$ (ب) $a^n > 0$ (ج) $a^n = 1$ (د) $a^n \geq 0$

الجذر النوني:

تعلمت أن:

المعادلة $9 = 3^2$ لها جذران حقيقيان فقط هما $3 = \sqrt[2]{9}$ أو $-3 = \sqrt[2]{9}$

لاحظ أن $9 = 3^2$ ، $9 = (-3)^2$

كذلك المعادلة $8 = 2^3$ لها جذر حقيقي وحيد

هو $\sqrt[3]{8} = 2$ (باقي جذور المعادلة أعداد مركبة غير حقيقية)

لاحظ أن $8 = 2^3$

وعلى وجه العموم:

المعادلة $a = b^n$ حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}^+$ لها n من الجذور، ونناقش فيما يلي عدة حالات:

(١) إذا كان n عددًا زوجيًا، $a < 0$

فإن المعادلة $a = b^n$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[n]{a}$ ، $-\sqrt[n]{a}$ ، ويسمى الجذر النوني الذي له نفس إشارة a بالجذر النوني الأساسي للعدد a .

لاحظ أن



لأي عدد حقيقي يكون

$$||\sqrt[n]{a}| = \sqrt[n]{|a|}$$

مثل: المعادلة $x^4 = 16$ لها جذران حقيقيان هما $x = \sqrt[4]{16} = 2$ ، $x = -\sqrt[4]{16} = -2$ وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية).

لاحظ أن $x^4 = 16$ ، $x^4 = (-2)^4$

(٢) إذا كان عددًا زوجيًا، $a > 0$

فإن المعادلة $x^n = a$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).
مثل: المعادلة $x^2 = -9$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).

(٣) إذا كان n عددًا فرديًا، $a \in \mathbb{R}$

فإن المعادلة $x^n = a$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[n]{a}$ (باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)
مثل: المعادلة $x^3 = -32$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[3]{-32} = -2$ (لاحظ أن $(-2)^3 = -32$)

(٤) إذا كان n عددًا زوجيًا، $a = 0$

فإن المعادلة $x^n = 0$ صفر لها حل حقيقي وحيد هو $x = 0$ (المعادلة لها n من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر عندما $n < 1$).

٦ حاول أن تحل

٣ أوجد في $\mathbb{C}$ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $x^4 = 81$ ب $x^3 = 243$ ج $x^4 = -16$ د $x^3 = -64$

تفكير ناقد: وضح بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد a وبين $\sqrt[6]{a}$

تعلم

الأسس الكسرية Rational Exponents

تعلمت أن الجذر التربيعي للعدد الحقيقي غير السالب a هو العدد الذى مربعه يساوى a وبفرض $a^{\frac{1}{2}}$ تمثل الجذر التربيعي الأساسى للعدد a .

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ، $a^{\frac{2}{2}} = a$ ومنها $a^{\frac{2}{2}} = a$ ، $\therefore a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

أى أن $a^{\frac{1}{2}}$ هى الجذر التربيعي الأساسى للعدد a أى أن $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

بالمثل $a^{\frac{1}{3}}$ هى الجذر التكعيبي الأساسى للعدد a أى أن $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ وعمومًا $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(١) لأي عدد حقيقي $a \geq 0$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ يكون $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $a > 0$ ، n عدد صحيح فردى أكبر من ١

(٢) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $n \in \mathbb{N}$ عدنان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، $n < 1$ ، $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

تعميم قوانين الأسس

قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

مثال

٣ أوجد قيمة كل مما يأتي (إن أمكن)

- أ $\frac{1}{4}(16)$ ب $\frac{1}{3}(27)$ ج $\frac{1}{5}(243)$ د $\frac{1}{2}(9)$ هـ $\frac{1}{3}(27)$ و $\frac{1}{4}(16)$

الحل

أ $\frac{1}{4}(16) = 2$ ب $\frac{1}{3}(27) = 3$ ج $\frac{1}{5}(243) = 3$ د $\frac{1}{2}(9) = 3$ هـ $\frac{1}{3}(27) = 3$ و $\frac{1}{4}(16) = 2$

[لاحظ أن $3 = \sqrt[5]{243}$ ت] $\frac{1}{5}(243) = 3$ $\frac{1}{3}(27) = 3$ $\frac{1}{4}(16) = 2$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد قيمة كل مما يأتي (إن أمكن):

- أ $\frac{1}{4}(125)$ ب $\frac{1}{3}(81)$ ج $\frac{1}{5}(128)$ د $\frac{1}{2}(343)$

فسر لماذا؟

العدد $(8)^{\frac{1}{3}}$ معرف في $\sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{C}$ ، بينما العدد $(8)^{\frac{1}{2}}$ غير معرف في $\mathbb{C}$

Properties of n^{th} Roots

خواص الجذور النونية

(١) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(٢) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ، $b \neq 0$ حيث كل من $\sqrt[n]{a}$ ، $\sqrt[n]{b}$ معرف

مثال

٤ أوجد في أبسط صورة كل من:

- أ $\sqrt[4]{16}$ ب $\sqrt[4]{16}$ ص $\sqrt[4]{16}$

الحل

أ $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ ب $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ ص $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

لاحظ أن



$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ إذا كان n زوجي
 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ إذا كان n فردي

٩ حاول أن تحل

٥ أوجد في أبسط صورة كل من:

ب $\sqrt[6]{(س + ٢ص)^{18}}$ ج $\sqrt[4]{١٦ | ١٢}$

مثال

٥) أوجد في أبسط صورة كل من

$$\frac{\frac{1}{7}(147) \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{7}(73)} \quad \text{ب}$$

الحل

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}) \times (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}) \times (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}) = \text{المقدار } i$$

$$\frac{\frac{1}{r}v \times \frac{1}{r}r \times \frac{1}{r}r}{\frac{1}{r}v \times \frac{1}{r}r} = \frac{\frac{1}{r}(v \times r) \times \frac{1}{r}r}{\frac{1}{r}(v \times r)} = \text{المقدار ب}$$

٤٦ حاول أن تحل

٦ أثبت أن:

$$r_o = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times 120}{\frac{1}{2} \cdot 10 \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times 120} \quad \text{b}$$

حل المعادلات الأسية في ع

مثال

٦ أوجد في $\mathcal{C}$ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

ب $81 = \frac{4}{9}(3 + س)$ ا $۱۲۸ = \frac{۷}{۷} س$

د $۳۲ = \sqrt[۵]{س} - \sqrt[۵]{۳۱}$ ج $۰ = ۳۶ + \frac{۲}{۳} س - \frac{۴}{۳}$

الحل

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{(128)} &= \text{س} & 128 &= \sqrt[5]{\text{س}} \\ \sqrt[5]{(4)} &= \text{س} & 4 &= \sqrt[5]{\text{س}} \end{aligned}$$

ب) $81 = \frac{4}{3}(3 + 2)$
 $(3 + 2) = \frac{3}{4}(81)$ برفع الطرفين للقوة 3
 $1^3 = \frac{4}{3}(3 + 2)$

لاحظ أن



إذا كان

$$1 = \frac{2}{n}$$

فیان س = ۲۱

حيث م عدد فردی

إذا كان

$$s = \frac{1}{2}$$

فإن $\pm = 1$

حيث م عدد زوجي

م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

$$٢ \text{ س } + ٣ = \pm (١٢٣)^{\frac{1}{2}} \quad ٢ \text{ س } + ٣ = \pm ٣$$

$$\therefore \text{س} = ١٢$$

$$٢ \text{ س } = ٢٤$$

$$\therefore \text{س} = -١٥$$

$$٢ \text{ س } = -٣٠$$

$$\text{م.ح} = \{١٢, -١٥\}$$

$$\text{د} \quad ٠ = \sqrt[٢]{٣١ - \text{س}} - \sqrt[٢]{٣٢ - \text{س}}$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = \sqrt[٢]{٣١ - \text{س}} - \sqrt[٢]{٣٢ - \text{س}}$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = (١ + \frac{١}{٢}) (٣٢ - \text{س})$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = ١ + \frac{١}{٢}$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = ١ - \frac{١}{٢} \quad \text{مرفوض}$$

$$\text{إما س} - \frac{١}{٢} = ٣٢ - \text{س}$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = ٣٢$$

$$\text{س} = (٣٢ + \frac{١}{٢})$$

$$\text{س} = ٦٤$$

$$\text{م.ح} = \{٦٤\}$$

$$\text{ج} \quad ٠ = \sqrt[٢]{١٣ - \text{س}} + \sqrt[٢]{٣٦ - \text{س}}$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = (٩ - \frac{١}{٢}) (٣٦ - \text{س})$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = ٩ - \frac{١}{٢}$$

$$\text{س} - \frac{١}{٢} = ٩$$

$$\text{س} = (٩ + \frac{١}{٢})$$

$$\text{س} = ١٨$$

$$\text{س} = ٢٧$$

$$\text{م.ح} = \{٨, ٢٧, -٢٧, -٨\}$$

٦ حاول أن تحل

٧ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\text{ج} \quad ٤ = \sqrt[٢]{٣ - \text{س}} - \sqrt[٢]{٤ - \text{س}}$$

$$\text{ب} \quad (١ + \text{س})^{\frac{١}{٢}} = \sqrt[٢]{٣٢}$$

$$\text{أ} \quad \text{س} = ٨١$$

تمارين ٢ - ١

$$\text{١} \quad \text{اختصر} \quad \frac{\sqrt[٢]{٢ \times ١٤ \times ٨}}{\sqrt[٢]{٣ \times ٢٦}}$$

٢ متى تكون العلاقة $\sqrt[٢]{١٢} \times \sqrt[٢]{١٢} = \sqrt[٢]{١٢}$ صحيحة لجميع قيم أ، ب الحقيقية.

٣ أكمل ما يأتي:

$$\text{ب} \quad (٦\frac{١}{٢})^{\frac{١}{٢}} \text{ في أبسط صورة تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{أ} \quad (٨)^{\frac{١}{٢}} \text{ في أبسط صورة تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{د} \quad \sqrt[٢]{\frac{٣}{٨}} \text{ في أبسط صورة تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{ج} \quad (\frac{١٦}{٢٢٥})^{\frac{١}{٢}} \text{ في أبسط صورة تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{هـ} \quad (٢٥ - ٢٣)^{\frac{١}{٢}} \text{ في أبسط صورة تساوى } \dots\dots\dots$$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

$$\text{أ} \quad \text{إذا كان } ٣ = ٢ \text{ فإن } ٣٥ = ٢ \text{ تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{ب} \quad (٢ \div ٧)^{\frac{١}{٢}} \text{ تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{ج} \quad \text{إذا كان } \text{س} = ٦٤ \text{ فإن } \text{س} \text{ تساوى } \dots\dots\dots$$

$$\text{د} \quad \text{أي مما يأتي لا يساوي } (\sqrt[٢]{٦})^{\frac{١}{٢}}$$

$$(١٠, ٤, ٢, ٢٥٠)$$

$$(٢, -٢, \frac{١}{٢}, -\frac{١}{٢})$$

$$(٥١٢, ١٦, ٤, ٢)$$

$$((\sqrt[٢]{٦})^{\frac{١}{٢}}, (\sqrt[٢]{٦})^{\frac{١}{٢}}, \text{س}^{\frac{١}{٢}}, (\text{س}^{\frac{١}{٢}})^{\frac{١}{٢}})$$

- هـ إذا كان $٤^س = ١٢٨$ فإن $س$ تساوي
 و مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س - ٢) = ١٦$ يساوي
 ز إذا كان $٣^س = ٤$ فإن $٩^س + ١٦^س$ تساوي

٥ اكتشاف الخطأ:

- أ $٩ = \sqrt[٢]{٨١} = \sqrt[٢]{(٩-)} = \sqrt[٢]{٩-} = ٩-$
 ب إذا كان $٨١ = ٤^س$ فإن $٨١^س = ٣$.
 ج $٩ = \sqrt[٢]{٨١} = \sqrt[٢]{(٩-)} = \sqrt[٢]{٩-} = ٩-$

- ٦ الربط بالهندسة: إذا كان طول نصف قطر كرة $س$ يعطى بدلالة الحجم $ح$ من العلاقة $س = \frac{٢}{\pi} \sqrt[٣]{\frac{٢}{٣} ح}$. أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٢٢}{٣} \pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة.

- ٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

- أ $س = \frac{١}{٣}$
 ب $٨١ = ٤^س$
 ج $٣٢ = \sqrt[٥]{(١-س)}$
 د $٢٤٣ = \sqrt[٥]{(٩ + س - ٢)}$
 هـ $س = ٥ - \sqrt[٢]{٤ + س}$ صفر
 ز $٣^س - ٢٥^س - ٥٤ = صفر$
 ح $٣(س + ١) = ٤(س - ١)$

- ٨ إذا كان $س = ٣$ $٣^ص = ٢٧$ فما قيمة $س + ص$

- ٩ تفكير ابداعي: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- أ إذا كان $س > ص$ فإن: $\sqrt[٢]{س} - \sqrt[٢]{ص} - \sqrt[٢]{س - ص} = ١ + \sqrt[٢]{١ + س - ٢}$
 ب إذا كان $١ = \sqrt[٢]{\frac{٢}{٧} \sqrt[٢]{٢}}$ فأى الأعداد الآتية عدد نسبي
 (س، -س، صفر، -١)
 (١٢، ١٦، ١٨، ٢٤)

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقرَّبًا الناتج إلى رقمين عشريين)

أ $\frac{٥-٣ \times \sqrt[٤]{٧}}{٧-٣}$

ب $\sqrt[٢]{-(٠,٠١)} + \sqrt[٢]{-(٢٣)}$





سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانياً.
- خواص الدالة الأسية.



المصطلحات الأساسية

- دالة أسية. Exponential Function
- نمو أسى. Exponential Growth
- تضاؤل أسى. Exponential Decay



الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تذكر أن

الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقي.

الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لا يساوى الواحد.

نشاط



تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين فى كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمان، ويستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفى نفس الظروف.

يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.

الزمن بالساعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الخلايا	١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤

- أكمل الجدول السابق.
- عبر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.
- ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.
- عبر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور ٨ ساعات.

تعلم



الدالة الأسية Exponential Function

تسمى الدالة د حيث د(س) = a^s حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، س $\in \mathbb{R}$ بالدالة الأسية.

مثال:

- د(س) = 2^s دالة أسية أساسها (٢) وأسسها (س).
- د(س) = 5^{s+1} دالة أسية أساسها (٥) وأسسها (س+١).
- د(س) = $(\frac{1}{3})^{2s}$ دالة أسية أساسها ($\frac{1}{3}$) وأسسها (٢س).

٦ حلول أن تحل

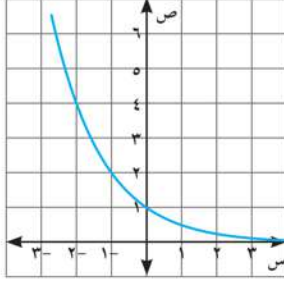
١ بين أى الدوال الآتية دالة أسية.

- أ د(س) = 2^s
- ب د(س) = $(2)^s$
- ج د(س) = $\frac{3}{s+1}$
- د د(س) = $s^3 - 1$
- هـ د(س) = $(\frac{3}{4})^{s-1}$
- و د(س) = $(-2)^s$

Graphical Representation of Exponential Function

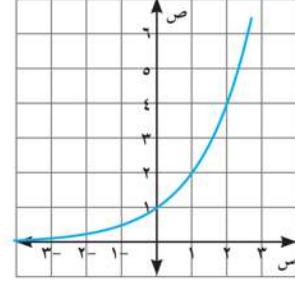
التمثيل البياني للدالة الأسية

مثل بيانيًا كل من الدالتين $y = 2^x$ ، $y = (\frac{1}{2})^x$
وذلك على فترة اختيارية $x \in [-3, 3]$



$y = (\frac{1}{2})^x$

س	د ₁ (س)	د ₂ (س)
3-	$\frac{1}{8}$	8
2-	$\frac{1}{4}$	4
1-	$\frac{1}{2}$	2
صفر	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$

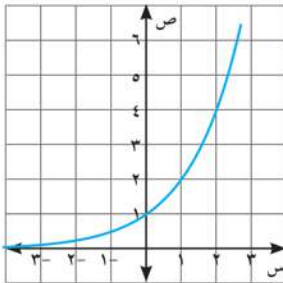


$y = 2^x$

خواص الدالة الأسية $y = a^x$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$

- 1) مجال الدالة الأسية $y = a^x$ هو $[-\infty, \infty]$ ومداها $(0, \infty]$
- 2) إذا كان $a > 1$ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسي معاملة a .
- 3) أما إذا كان $0 < a < 1$ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضؤل أسي معاملة a .
- 4) منحنى الدالة $y = a^x$ يمر دائمًا بالنقطة $(0, 1)$ لجميع قيم $a > 0$ ، $a \neq 1$
- 5) $y = a^x$ هي دالة احادية (One - to - One)
- 6) منحنى الدالة $y = a^x$ هو صورة منحنى الدالة $y = (\frac{1}{a})^x$ بالانعكاس على محور الصادات
- 7) $y = a^x$ عندما $x \rightarrow \infty$ حيث $a < 1$
- 8) $y = a^x$ عندما $x \rightarrow \infty$ حيث $0 < a < 1$

٤ حاول أن تحل



- 1) الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على $\mathbb{R}$ ، حيث $y = 3^x$. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة د المعرفة على $\mathbb{R}$ ، حيث $y = (\frac{1}{3})^x$ ، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين ، ثم بيّن أي منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.
- 2) **تفكير ناقذ:** إذا كانت $y = a^x$ حيث $a > 1$ رتب كل مما يأتي ترتيبًا تصاعديًا $y = 7$ ، $y = -2$ ، $y = (\sqrt{5})^6$ ، $y = 0$.

مثال

1) إذا كانت $y = 3^x$ فأكمل ما يأتي:

- أ) $y = 2$ ب) $y = 2 + 3^x = \dots \times (3)$ ج) $y = 3^x \times (3 - 2) = \dots$

الحل

$$\text{ب) د (س) } = 3^{2+s} = 3^2 \times 3^s = 9 \times 3^s \text{ (س)}$$

$$\text{أ) د (٢) } = 3^2 = 9$$

$$\text{ج) د (س) } \times \text{د (-س)} = 3^s \times 3^{-s} = 3^{s-s} = 3^0 = 1$$

٦ حاول أن تحل

٤) في كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البياني المناسب حيث:

$$\text{ج) ص } = 3^{-s}$$

$$\text{ب) ص } = 3^{-s}$$

$$\text{أ) ص } = 3^s$$

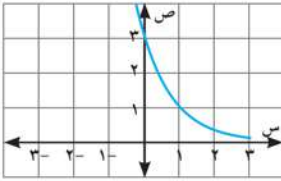
$$\text{و) ص } = 3^{1-s}$$

$$\text{هـ) ص } = 3^{1-s}$$

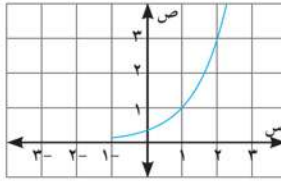
$$\text{د) ص } = 3^{-s}$$

$$\text{ح) ص } = 3^{s-1}$$

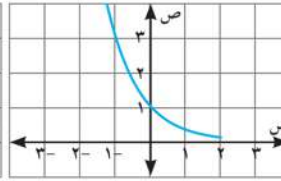
$$\text{ز) ص } = 3^{s-1}$$



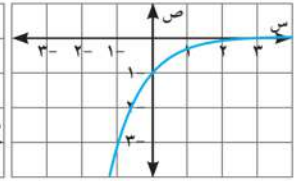
شكل (٤)



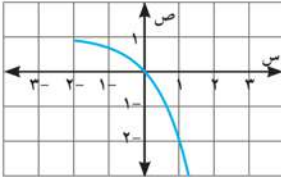
شكل (٣)



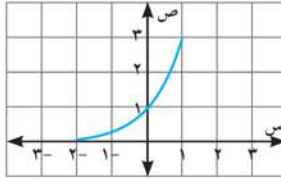
شكل (٢)



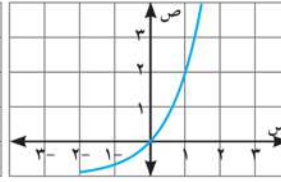
شكل (١)



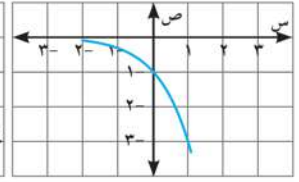
شكل (٨)



شكل (٧)



شكل (٦)



شكل (٥)

تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة $a^x = b$

النمو والتضاؤل: Growth and Decay

يوجد العديد من الظواهر في الحياة اليومية يمكن أن نمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الاضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفيروسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة.

وفي مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى.

أولاً: النمو الأسى: Exponential growth

يمكن استخدام الدالة $y = a(1+r)^t$ ، حيث $a = (١)$ ، لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، حيث t هي الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

الربح المركب: عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر في أحد البنوك التي تعطي ربح سنوي مركب r (نسبة مئوية) لعدد n من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوي إلى s فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة:

$$ج = أ \left(1 + \frac{r}{s} \right)^{ns}$$

مثال

٢) أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية:

أ) العائد السنوي ب) العائد الربع سنوي ج) العائد الشهري

الحل

باستخدام العلاقة $ج = أ \left(1 + \frac{r}{s} \right)^{ns}$ حيث s التقسيم السنوي:

(أ) العائد السنوي $s = 1$

$$ج = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢ \text{ جنيه}$$

(ب) العائد ربع سنوي $s = 4$

$$ج = ٥٠٠٠ \left(1 + \frac{٠,٠٨}{4} \right)^{4 \times ١٠} = ١١٠٤٠,٢ \text{ جنيه}$$

(ج) العائد الشهري $s = 12$

$$ج = ٥٠٠٠ \left(1 + \frac{٠,٠٨}{12} \right)^{12 \times ١٠} = ١١٠٩٨,٢ \text{ جنيه}$$

٤) حاول أن تحل

٥) يتكاثر النحل في أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل في البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد n أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

ثانيًا: التضائل الأسى: Exponential decay

يمكن استخدام الدالة $د(١ - r)^n$ لتمثيل التضائل الأسى بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، حيث n هي الفترة الزمنية، $أ$ القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للتضائل في الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

٣) **الربط بالتجارة:** اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولاً: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد n سنة من شرائها.

ثانيًا: احسب لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

الحل

$$120000 = A, \quad r = \frac{12}{100} = 0.12, \quad \text{الفترة الزمنية } n = 6 \text{ سنوات}$$

أولاً: دالة التضائل الأسية هي: $D(n) = A(1+r)^n$ وبالتعويض عن قيم A, r فإن:

$$D(n) = 120000(1+0.12)^n \quad \text{أى أن: } D(n) = 120000(1.12)^n$$

ثانياً: بالتعويض عن $n = 6$ فى دالة النمو الأسية:

$$D(6) = 120000(1.12)^6 = 174849.41$$

سعر السيارة المتوقع بعد مرور 6 سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

٦ حلل أن تحل

٦ الربط بالطب: يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبي، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا فى الساعة.

أ اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية فى جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب قدر كمية العقار المتبقية فى جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.

تمارين ٢ - ٢

١ أكمل ما يأتى:

أ تكون الدالة D حيث $D(n) = A^n$ دالة أسية إذا كانت A ، n

ب الدالة الأسية r حيث $r(n) = 3^{-n}$ أساسها هو

ج الدالة w حيث $w(n) = (\frac{1}{3})^{n+1}$ ليست دالة أسية لأن

د إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية $D(n) = A^n$ مع المستقيم $n = 0$ هى النقطة (.....،)

ه معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين D, r حيث: $D(n) = 3^n$ ، $r(n) = (\frac{1}{3})^n$ هو

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التى أساسها A تزايدية إذا كانت

(أ) $A < 0$ (ب) $A < 1$ (ج) $0 < A < 1$ (د) $A = 1$

ب تكون الدالة الأسية التى أساسها A تناقصية إذا كانت:

(أ) $A < 0$ (ب) $A > 1$ (ج) $0 < A < 1$ (د) $A > 1$

ج الدالة الأسية D حيث $D(n) = A^n$ ، $A < 1$ يقترب خطها البياني من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(ج) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د فى الدالة الأسية D حيث $D(n) = A^n$ ، $A < 1$ تكون $D(n) < 1$ عندما:

(أ) $s \in \mathbb{C}$ (ب) $s \in \mathbb{C}^+$ (ج) $s \in \mathbb{C}^-$ (د) $s \in \mathbb{C}^*$

هـ في الدالة الأسية s حيث $s = |s|e^{i\theta}$ ، تكون $1 > |s| > 0$ عندما $s \in \mathbb{C}^*$

(أ) $[0, \infty)$ (ب) $[0, \infty)$ (ج) $[1, \infty)$ (د) $[-1, \infty)$

٢ بين أي من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

أ د(س) 2^s ب د(س) $\frac{2}{3}(5)^s$ ج د(س) $\frac{1}{1-s}$

د د(س) $3^s - 1$ هـ د(س) $(\frac{2}{3})^{1-s}$ و د(س) $(-7)^s$

٤ مثل الدالة د في كل مما يأتي بياناً، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيّن أي منها تزايدية وأي منها تناقصية:

أ د(س) 3^s ب د(س) $(\frac{1}{3})^s$ ج د(س) $3 - (2)^s$ د د(س) $2 + (s)^1 + 1$

هـ د(س) $(\frac{1}{3})^{s+2} - 2$ و د(س) $2 = (\frac{2}{3})^{1-s} + 1$ ز د(س) $-(\frac{1}{3})^s + \frac{3}{4}$

٥ **الربط بالأدخار:** أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠ جنيه في أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠٪، كم يصبح جملة رصيده

بالجنيه بعد ١٠ سنوات، علماً بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:

$C = (1+r)^n$ حيث C المبلغ، r النسبة المئوية للفائدة، n عدد السنوات

٦ **الربط بالاتصالات:** يتناقص عدد الهواتف الأرضية في إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل

١٠٪، فإذا كان عدد الهواتف في إحدى السنوات ٥٤٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور n سنة، ثم قدر عدد الهواتف بعد مرور ٣ سنوات.

٧ **الربط بالاستثمار:** بلغ عدد الأبقار في أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ

١٨٪ سنوياً تقريباً، فأوجد عدد الأبقار في المزرعة بعد ٤ سنوات.

٨ **الربط بالسكان:** بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات في جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط

زيادة ٤٪ سنوياً.

أولاً: اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلي بعد n سنة.

ثانياً: قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

٩ **الربط بالرياضة:** يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها في إحدى الدورات

الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين في أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) في المباراة (هـ)، ثم قدر عدد المشجعين في المباراة العاشرة.

١٠ **تفكير إبداعي:** إذا كان د(س) $2^s =$ فاثبت أن المقدار $\frac{1}{1+(s)} + \frac{1}{1-(s)}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

استكشاف

من الجدول الآتي بين متى تتساوى 3^2 مع 2^3 :

س۱	۲-	۱-	۰	۱	۲	۴
س۲	۴-	۲-	۰			
س۳	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱			

تعلم

المعادلة الأسية

Exponential Equation

إذا تضمنت المعادلة متغيراً في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل $(3^x = 27)$ فنجد:

أولاً: إذا كان $A = \emptyset$ **حيث** $A \neq \{0, 1, \dots\}$ **فإن** $m = n$.

مثال

أوجد في $\mathcal{C}$ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$2^{-5} \wedge = 2^{-5} (\sqrt[2]{2})$ **ب** $\frac{1}{2\sqrt{2}} = 2^{-5/2}$ **ا**

الحل

$$2-3 = 1+3 \therefore \frac{1}{27} = 1+3 \quad \text{!}$$

∴ $\{4-\}$ = مجموعة الحل ومنها $3- = 1 +$ $4- =$ ∴

$${}^2_{-5}(32) = {}^2_{-5}\left(\frac{1}{2} \times 2\right) \therefore {}^2_{-5}8 = {}^2_{-5}(\sqrt[2]{2}) \quad \text{ب}$$

$${}^{(2-s)}_2 = {}^{(3-s)}_{\frac{3}{2}} \therefore {}^{2-s}_2 = {}^{2-s}_{(\frac{3}{2})} \therefore$$

$$\therefore \frac{3}{2} \text{ س } - \frac{9}{2} = 3 \text{ س } - 6$$

$$\therefore 3 \text{ س} - 9 = 6 \text{ س} - 12$$

$$\therefore 3\text{س} - 6\text{س} = 9 - 12$$

٣- س = ٣ ومنها س = ١ $\therefore$ مجموعة الحل = {١}

٤٩ حاول أن تحل

❶ أوجد في مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\frac{1}{32} = \frac{{}^5P_{(20+23)}}{{}^5P_{71}} \quad \text{ب} \qquad \frac{1}{16} = \frac{{}^5P_{23}}{{}^5P_{33}} \quad \text{ا}$$

ثانيًا: إذا كان $a = b$ حيث $a, b \notin \{0, 1, -1\}$ ، فإن

إما: م = صفر

أ: $a = 1$ عندما عدد فردي ، $a = \pm 1$ عندما عدد زوجي.

سوف تتعلم

◀ حل المعادلة الأسية جبريًا.

◀ حل المعادلة الأسية بيانياً.

المصطلحات الأساسية

◀ معادلة أسية

Exponential Equation

الحل البياني Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

◀ حاسب آلی مزود پیرامیج

رسومية.

◀ آلة حاسبة علمية.

مثال

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $2^x - 5 = 2^{x-3}$ ب $3^{x+2} = 7^{x+1}$

الحل

أ $2^x - 5 = 2^{x-3}$ $\therefore$ س - 3 = صفر ومنها س = 3

$\therefore$ مجموعة الحل = {3}

ب $3^{x+2} = 7^{x+1}$ $\therefore$ س = 1 + 3 = 4 $\therefore$ س = 1 + 7 = 8

$\therefore$ س + 1 = صفر ومنها س = -1 $\therefore$ مجموعة الحل = {-1}

٦ حاول أن تحل

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ $5^x - 2 = 5^{x-5}$ ب $3^{x+2} = 4^{x+3}$

تفكير ناقذ: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة س $2^{x-2} = 4^{x-2}$

مثال

٥ إذا كانت د(س) = 3

أ أثبت أن د(س + 2) × د(س - 2) = د(2س) ب إذا كان د(س + 1) - د(س - 1) = 72 أوجد قيمة س

الحل

أ الطرف الأيمن $3^{x+2} \times 3^{x-2} = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ $\therefore$ الطرف الأيسر $3^{2x} = 9^x$

ب $72 = (1 + 3)^x - (1 - 3)^x$ $\therefore$ $72 = 4^x - 2^x$

$72 = 4^x - 2^x$ $\therefore$ $72 = (2^2)^x - 2^x$

$72 = 2^{2x} - 2^x$ $\therefore$ $72 = 2^{2x} - 2^x$

$72 = 2^{2x} - 2^x$ $\therefore$ $72 = 2^{2x} - 2^x$

٦ حاول أن تحل

٣ إذا كان د(س) = 8، د(س) = 4

أ أثبت أن $128 = \frac{(2+3)^x + (1+3)^x}{(2-3)^x + (1-3)^x}$ ب حل المعادلة د(س) + د(س - 3) = 80

مثال

٦ إذا كانت $د(س) = ٣^س$

أوجد $س$ التي تحقق المعادلة: $د(س) + د(٥ - س) = ١٢$:

الحل

بالتعويض في المعادلة $د(س) + د(٥ - س) = ١٢$

$$٣^س + ٣^{٥-س} = ١٢$$

$$٣^س \times ٣^٥ - س + ٣^٥ - س = ١٢ \times ٣^٥ - س$$

$$٣^س + ٣^{٥-س} - ٢٥ + س = ١٢ \times ٣^٥ - س$$

$$٣^س + ٣^{٥-س} - ١٢ \times ٣^٥ + ٢٥ = ٠$$

$$(٣^س - ١٢) (٣^{٥-س} - ١) = ٠$$

$$٣^س = ١٢ \text{ ومنها } س = ٢$$

$$٣^{٥-س} = ١ \text{ ومنها } س = ٥$$

٤ حاول أن تحل

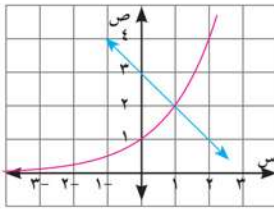
٤ في المثال السابق أثبت أن: $\frac{١٧}{٤} = \frac{د(١-س)}{د(١+س)} + \frac{د(١+س)}{د(١-س)}$

حل المعادلات الأسية بيانياً Solving Exponential Equations Graphically

نشاط

٧ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين $د(س) = ٣^س$ ، $د(س) = ٣ - س$ ، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٣^س = ٣ - س$

الحل



باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنى الدالتين $د(س) = ٣^س$ ، $د(س) = ٣ - س$ ، ومن الرسم نوجد

إحداثيات نقطة التقاطع هي $(١, ٢)$

نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدالتين $د(س) = ٣^س$ ، $د(س) = ٣ - س$ هو $(١, ٢)$ لذلك فإن

مجموعة حل المعادلة: $٣^س = ٣ - س$ هو $\{١\}$.

٤ حاول أن تحل

٥ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلا من الدالتين:

$$د(س) = ٣^س، د(س) = ٣ + س \text{ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة } ٣^س = ٣ + س$$



تمارين ٢ - ٣



١ اختر الإجابة الصحيحة:

أ إذا كان $2^x = 8$ ، فإن $x =$
 (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٣

ب إذا كان $5^x = 4^{-1}$ ، فإن $x =$
 (أ) ٥ (ب) ١ (ج) ١٠ (د) صفر

ج $(\frac{1}{3})^{x-1} = 1$ حيث $1 < \text{صفر}$ ، فإن $x =$
 (أ) ١ (ب) ٣- (ج) ٢ (د) ٣

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $2^x = 4$ ب $3^{-x} = \frac{1}{9}$ ج $7^{-x} = 1$
 د $5^x + 3^x = 5^2 + 3^2$ هـ $27 = \sqrt[3]{3}$ و $162 = 2^x + 3^x - 3^x + 3^x$
 ز $5^x + 3^x = 25 + 27$ ح $12 = 2^x + 3^x$ ط $84 = 5^x(\frac{1}{3}) + 3^x(\frac{1}{3}) + 1^x(\frac{1}{3})$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$3^x \times 5^y = 75$ ، $3^x \times 5^z = 45$

٤ إذا كانت $د(س) = 3^x$ ، $د(س) = 9^x$ فأوجد قيمة $س$ التي تحقق $د(س) + د(س-١) = ٧٥٦$

٥ إذا كانت $د(س) = 7^x + 1$ فأوجد قيمة $س$ التي تحقق $د(س-١) + د(س-٢) = ٥٠$

٦ أوجد بيانياً مستخدماً أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

أ $3^{-x} = 3 - س$ ب $3^x = 3 - ٢س$

٧ تفكير إبداعي: إذا كان $س^٢ = ٣$ وكان $س^١ = ١$ فما قيمة $س^١$ ؟

٨ الربط بالأعداد: إذا كان مجموع الأعداد $٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + + ٢^١٠$ يعطى بالعلاقة $ج(١ - ٢)$

أ أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب أوجد عدد الحدود في النمط ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

٩ حل كلاً من المعادلات الآتية:

أ $3^{x-2} = (\frac{1}{3})^x$ ب $٧^{-٢} + ٧^{-٣} = ٥٠$

١٠ تفكير إبداعي:

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$٩^x + ٣^x - ٣^x - ٣^x = ٠$



سوف تتعلم

- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا وجبريًا.



المصطلحات الأساسية

Function	دالة
Inverse Function	دالة عكسية
	دالة أحادية
One - to One Function	
Domain	مجال
Range	مدى
Reflection	انعكاس



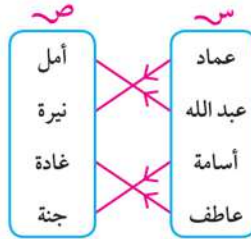
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلي.



فكر و ناقش

الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء س = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.



١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من س إلى ص

هل العلاقة تمثل دالة؟ وإذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "ابنة" من ص إلى س هل العلاقة تمثل دالة؟



تعلم

The Inverse Function

الدالة العكسية

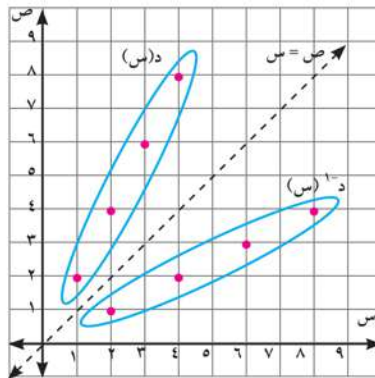
إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة د⁻¹ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان:



مثال

١) إذا كانت دالة بيانها كالآتي: $D = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$. أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلها في شكل واحد.

الحل



حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.

∴ د(س) = {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)}

∴ د⁻¹(س) = {(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)}

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د⁻¹

متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

أي أن د⁻¹(س) هي صورة د(س) بالانعكاس

في المستقيم ص = س

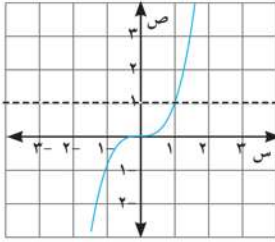
٩ حاول أن تحل

١ أوجد بيان الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:

١	٠	١-	٢-	٣-	س
$\frac{1}{3}$	٠	١	٣	٧	د(س)

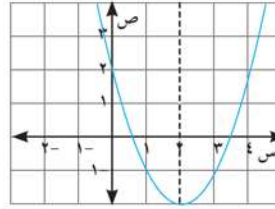
اختبار الخط الأفقي

إذا قطع أي خط أفقي منحنى دالة ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية.



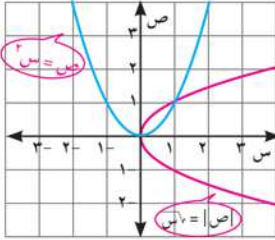
اختبار الخط الرأسي

إذا قطع أي خط رأسي منحنى ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة.



لاحظ أن:

إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.
مثل $ص = س^2$ (ليست أحادية) معكوسها $|ص| = \sqrt{ص}$ لا يمثل دالة.



من خواص الدالة العكسية:

١- يقال أن د(س)، س(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان
(د ° س)(س) = س و (س ° د)(د) = د

٢- مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية د⁻¹(س)
مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د⁻¹(س)

تفكير ناقذ:

ما مجال الدالة د حيث د(س) = س² التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

مثال

٢ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = س² + ١ ومثل الدالة ومعكوسها بياناً في شكل واحد.

لاحظ أن



لإيجاد الدالة العكسية أولاً نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

الحل

$$ص = ٢س + ١$$

$$\therefore س = ٢ص + ١$$

$$\therefore ٢ص = س - ١$$

$$\therefore ص = \frac{١}{٢}(س - ١)$$

بتبديل المتغيرات

$$\text{أي د}^{-١}(س) = \frac{١}{٢}(س - ١)$$

س	١	٠	١-
د(س)	٣	١	١-
د ^{-١} (س)	٠	$\frac{١-}{٢}$	١-

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د^{-١} منحنيهما متماثلان بالنسبة

للمستقيم $ص = س$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد الدالة العكسية للدالة $ص = س^٢$ ومثلها في شكل واحد.

مثال

٣ إذا كانت د دالة بحيث $د(س) = ٣ + \sqrt{١-س}$ فأوجد

أ مجال د(س) ومدى د(س)

ب د^{-١}(س) وعين مجالها ومداه

الحل

أ د(س) معرفة لجميع قيم $س - ١ \leq ٠$ أي $س \leq ١$

$\therefore$ مجال د(س) $=]١، \infty[$

$\therefore \sqrt{١-س} \leq ٠$ لجميع قيم س الواقعة في مجال الدالة

$$\therefore ٣ + \sqrt{١-س} \leq ٣ \iff د(س) \leq ٣$$

$\therefore$ مدى د(س) $=]٣، \infty[$

ب $\therefore ص = ٣ + \sqrt{١-س}$

بإستبدال المتغيرات س ، ص

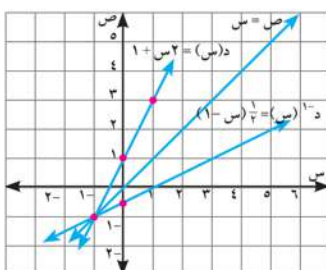
بتربيع الطرفين

$$ص = ٣ + \sqrt{١-ص} \iff ٣ - ص = \sqrt{١-ص}$$

$$(٣ - ص)^٢ = ١ - ص$$

$$\therefore ص = (٣ - ص)^٢ \iff د^{-١}(س) = (٣ - ص)^٢$$

مجال د^{-١}(س) $=]٣، \infty[$ ومداه $=]١، \infty[$



٩ حاول أن تحل

٣ إذا كانت د: $\mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ بحيث د(س) = $\frac{1}{1+s}$

أ أوجد د^{-١}(س) وعين مجالها ومدنها

ب مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البياني لكل د(س)، د^{-١}(س)

تمارين ٢ - ٤

١ أكمل:

أ إذا كانت الدالة د = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)} فإن د^{-١} =

ب الشكل المقابل يمثل دالة د: س $\rightarrow$ ص فإن د^{-١}(٢) =

ج صورة النقطة (١، ٢) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة

د إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن د^{-١}(٦) =

ه إذا كان د: س $\rightarrow$ ٤س فإن د^{-١}: س $\rightarrow$

٢ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ:

- أ مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها.
ب الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية.
ج الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية.
د الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية.

٣ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ د(س) = $\frac{1}{4}س + ٤$ ب د(س) = ٤س

ج د(س) = $\frac{4}{س} + ٥$ د د(س) = $\frac{3}{س}$

ه د(س) = $٨س - ٣$ و د(س) = $\sqrt[3]{٢س - ٤}$

ز د(س) = $\sqrt[3]{٢س - ٣}$ ح د(س) = $٢س$ حيث س $\leq$ صفر

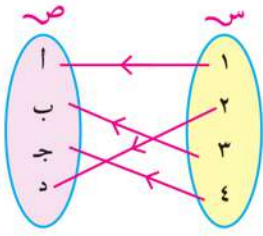
ط د(س) = $٢ + (١ - س)^2$ حيث س ≤ ١ ي د(س) = $٨س + ٧$ حيث س ≤ ٤

ك د(س) = $\sqrt[3]{٩س - ٢}$ حيث س ≥ ٣ ل د(س) = $\sqrt[3]{٩س - ٢}$ حيث س ≥ ٠

م د(س) = $\sqrt[3]{٩س - ٢}$ حيث س ≥ ٣

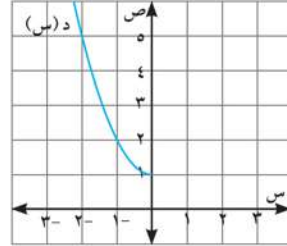
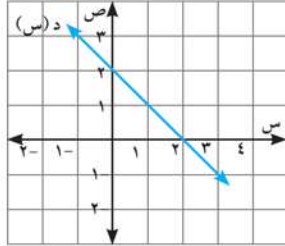
٤ د = {(١، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ٤)}

٥	٢	١	٢-	س
١-	١	٤	٧	د(س)



- ٤ أ إذا كانت $d(s) = s$. أوجد $d^{-1}(s)$ ومثلها بيانيًا.
ب الشكل المقابل يمثل دالة d من S إلى V فأوجد قيمة $d^{-1}(2) + d^{-1}(3)$ (ج).

- ٥ في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحني الدالة العكسية $d^{-1}(s)$



٦ اكتشاف الخطأ:

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة $d(s) = \frac{s-5}{s}$

حل رنا

بتبديل المتغيرات
بالضرب التبادلي

$$\begin{aligned} \therefore \frac{s-5}{s} &= v \\ \therefore \frac{s-5}{v} &= s \\ \therefore v \cdot s - 5 &= v \cdot s \\ \therefore v \cdot s - 5 &= v \cdot s \\ \therefore v \cdot s - 5 &= v \cdot s \\ \therefore v \cdot s - 5 &= v \cdot s \\ \therefore \frac{s-5}{1-s} &= d^{-1}(s) \end{aligned}$$

حل وائل

$$\begin{aligned} \therefore d(s) &= \frac{s-5}{s} \\ \therefore \frac{1}{d(s)} &= \frac{s}{s-5} \\ \therefore d^{-1}(s) &= \frac{s}{s-5} \div 1 = \frac{s}{s-5} \\ \therefore \frac{s}{s-5} \times 1 &= \frac{s}{s-5} \\ \therefore d^{-1}(s) &= \frac{s}{s-5} \end{aligned}$$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

- ٧ سؤال مفتوح: هل يمكن أن تكون الدالة d هي نفسها الدالة العكسية d^{-1} ؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

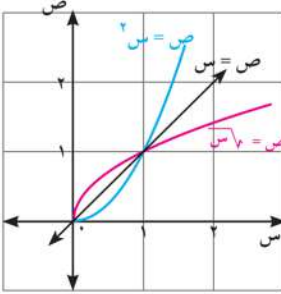
- ٨ في كل مما يأتي عين المجال الذي يكون فيه للدالة d دالة عكسية:

- أ $d(s) = s^2$ ب $d(s) = s^3$ ج $d(s) = \frac{1}{s}$

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

Logarithmic Function and Its Graph

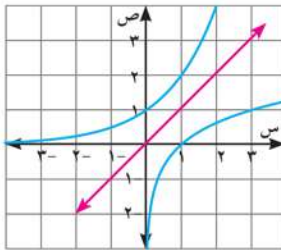
التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الأسية



استكشف

علمت أن الدالة $y = 2^x$ هي الدالة العكسية للدالة $y = \log_2(x)$ لكل $x \leq 0$ (صورتها بالانعكاس في المستقيم $y = x$)

فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $y = \log_2(x)$ حيث $x > 0$ بيانياً من خلال تمثيل قيم x ، y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.



س = 2^ص		ص = log_2(س)	
ص	س	ص	س
3-	1/8	1/8	3-
2-	1/4	1/4	2-
1-	1/2	1/2	1-
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

نجد مما سبق أن معكوس $y = 2^x$ هو $y = \log_2(x)$ ويسمى المتغير x في المعادلة $y = \log_2(x)$ لوغاريتم x . ويكتب $y = \log_2(x)$ ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس 2

تعلم

Logarithmic Function

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة $y = \log_a(x)$ حيث $x > 0$ هي الدالة العكسية للدالة $y = a^x$ وتسمى $y = \log_a(x)$ بالـ y لوغاريتم x للأس a وتسمى a بالأساس a .
 مجال الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a(x)$ هو $x > 0$
 مدى الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a(x)$ هو $y \in \mathbb{R}$
 الصورة $y = \log_a(x)$ تكافئ الصورة $x = a^y$

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

- Logarithm لوغاريتم
- Inverse Function دالة عكسية
- Domain مجال
- Common Logarithm اللوغاريتم المعتاد

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

إرشادات للدراسة

تسمى $y = \log_a(x)$ بالـ y لوغاريتم x للأس a وتسمى a بالأساس a .
 المجال $x > 0$
 المدى $y \in \mathbb{R}$
 الصورة $y = \log_a(x)$ تكافئ الصورة $x = a^y$

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $١٦ = ٤^٢$ تكافئ $٤ = ١٦$ لو $٢٥ = ٥^٢$ ب تكافئ $٢ = ٢٥$ لو
 ج $\frac{1}{16} = ٤^{-٢}$ تكافئ $٤ = \frac{1}{16}$ لو $١٠ = ٢^{-٢}$ د تكافئ $٢ = ١٠$ لو

٩ حاول أن تحل

١ حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

أ $٤٩ = ٧^٢$ ب $٥١٢ = ٣^{-١٠}$ ج $\frac{81}{625} = \left(\frac{3}{5}\right)^٤$ د $\frac{1}{125} = ٥^{-٣}$

اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.

مثل: ٧ لو تكتب ٧ لو ١٢٧ تكتب ١٢٧ لو

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

أ $٨١ = ٣^٤$ تكافئ $٨١ = ٣^٤$ لو $٧ = ١٢٨$ ب $٧ = ١٢٨$ لو
 ج $٢ = \frac{1}{100}$ لو $٢ = \frac{1}{100}$ تكافئ $\frac{3}{4} = ٢٧$ د $\frac{3}{4} = ٢٧$ لو

٩ حاول أن تحل

٢ حول من الصورة اللوغاريتمية للصورة الأسية:

أ $٣ = ١٢٥$ لو ب $٥ = \frac{1}{٣٤٣}$ لو ج $٠ = ١$ لو د $٣ = ١٠٠٠$ لو

مثال

حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم

١ أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $٠,٠٠١$ لو ب $\frac{27}{٤}$ لو

الحل

أ $٠,٠٠١$ بوضع ص = لو

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$٠,٠٠١ = ١٠^{-٣}$

$١٠^{-٣} = \left(\frac{1}{10}\right)^٣$

وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{-٣} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

$٣ = -٣$ لذلك فإن لو $٠,٠٠١ = ٣ = -٣$

٩ حاول أن تحل

أ $٠,٠٠٠٠١$ لو ب ١٢٨ لو

ب $\frac{27}{٤}$ بوضع ص = لو

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$\frac{27}{٤} = ٣^{\frac{3}{٢}}$ من خواص الأسس

$\frac{3}{٢} = \frac{٣}{٤}$

لذا فإن $\frac{3}{٢} = \frac{٣}{٤}$ لو

مثال

- ٢ أوجد في E مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
- أ $لو٣ = (٥ - س)١$ ب $لو٣ = (٢ + س)٢$

الحل

أ المعادلة لكل قيم $س$ التي تحقق $س٢ - ٥ < ٥$ ؛ أي $س < ٥$ (مجال تعريف المتغير) وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

$$\therefore ٣ = ١٣ - س٢ \quad \therefore ٢ = س٢ - ٨$$

$\therefore س = ٤ \in$ مجال تعريف المتغير $\therefore$ مجموعة الحل هي $\{٤\}$

ب المعادلة معرفة لقيم $س$ التي تحقق

$$\left. \begin{array}{l} س٢ + ٢ < صفر \\ س < صفر \\ س \neq ١ \end{array} \right\} \text{أي} \left. \begin{array}{l} س٢ + ٢ < صفر \\ س < صفر \\ س \neq ١ \end{array} \right\}$$

أي $[صفر, \infty)$ - $\{١\}$ (مجال تعريف المتغير)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

$$\therefore س٢ = س٢ + ٢ \quad \therefore س٢ - س٢ = ٢ - صفر$$

$$\therefore (س - ٢)(س + ٢) = صفر \quad \therefore س = ٢ \text{ أو } س = -٢$$

$$\therefore س = -١ \notin \text{مجال تعريف المتغير} \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{٢\}$$

٦ حاول أن تحل

- ٤ أوجد في E مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
- أ $لو٣ = ٣$ ب $لو٣ = ٥$

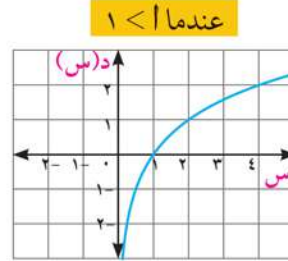
تعلم

Graphical Representation of the Logarithmic Function

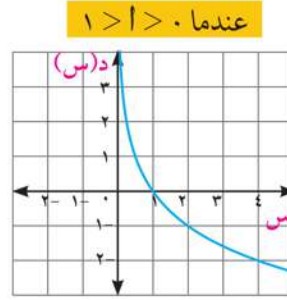
التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:

تمثل الدالة $د(س) = لو٣$ حيث $س \neq ١$ بيانياً كما في الأشكال الآتية:

المجال: $س > ٠$
 المدى: $س$
 التقاطع مع محور $س$: $(٠, ١)$
 الاطراد: تزايدية $س$



المجال: x
 المدى: x
 التقاطع مع محور y : $(0, 1)$
 الاطراد: تناقصية على مجالها x



تفكير ناقذ: هل يمكنك استنتاج العلاقة بين منحنى الدالة الأسية ومنحنى الدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.

مثال

٣ مثل الدوال الآتية بيانيًا:

أ د(س) = لو_٣ س

ب د(س) = لو_٣ س

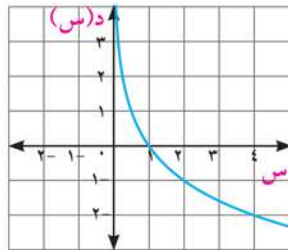
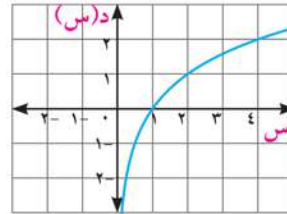
الحل

أ لاحظ أن: الأساس $1 < 2$

ب لاحظ أن: الأساس $1 > \frac{1}{2} > 0$

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢



استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

١ لإيجاد لو_٣ ٤ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:

٢ لإيجاد لو_٣ ٣٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:

تدريب

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

أ لو_٣ ١٢

ب لو_٣ ٢٤

ب لو_٣ $\frac{1}{27}$

د لو_٣ ١٢٨

log 2 = 4

log 3 = 1.579783597



تمارين ٢ - ٥



١ عبّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

أ $2^{-3} = \frac{1}{9}$ ب $\frac{16}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$ ج $5 = \text{صفر}$ د $4 = \left(\sqrt[4]{2}\right)^4$

٢ عبّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

أ $2 = 100$ ب $\frac{5}{3} = \sqrt[3]{27}$ ج $1 = \text{صفر}$ د $4 = 121$

٣ عيّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

أ $\text{د(س)} = \text{لو}_3(2+1)$ ب $\text{د(س)} = 2 \text{ لوس}$ ج $\text{د(س)} = \text{لو}_{(3-5)}(3-5)$

٤ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ $\text{لو}_3 16$ ب $\text{لو}_{\frac{5}{3}} 5$ ج $\text{لو}_8 1$ د $\text{لو}_{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{27}$

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{لو}_3 27 = \text{س} + 2$ ب $\text{لو}_3(3+2) = 2$ ج $\text{لو}_3(1+2) = \text{صفر}$

د $\text{لو}_3(\text{لو}_3 \text{س}) = 1$ هـ $\text{لو}_4[13 + \text{لو}_3(\text{س}-1)] = 2$ و $\text{لو}_3(4-2) = \text{س}$

٦ مثل بيانياً كل من الدوال الآتية:

أ $\text{د(س)} = \text{لو}_3 \text{س}$ ب $\text{د(س)} = \text{لو}_3(\text{س}+1)$

٧	٣	١	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	س
						د(س)

٩	٣	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	س
					د(س)

٧ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث $\text{ر(س)} = \text{لو}_3 \text{س}$ ، $\text{د(س)} = 6 - \text{س}$ ، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة $\text{لو}_3 \text{س} = 6 - \text{س}$.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ إذا كان $\text{لو}_3 \text{س} = 2$ فإن $\text{س} = \dots$

أ ٩ ب ٨ ج ٣ د ٥

٩ إذا كان $\text{لو}_3 16 = 4$ فإن $\text{س} = \dots$

أ $\{16\}$ ب $\{2\}$ ج $\{2, -2\}$ د $\{1\}$

١٠ $\text{لو}_3 125 = \dots$

أ $\sqrt[3]{3}$ ب ٣ ج ٥ د ١٢٥

١١ مجال الدالة د حيث د(س) = لو_(س-١) ٣ هو

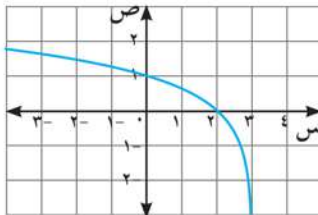
- أ [٠، ∞[∪]١، ٠[ب]١، ∞[ج]٠، ١[د]١، -١[

١٢ لو ١٠٠ =

- أ ١ ب ٢ ج ٣ د ١-

١٣ إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو_٣ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) =

- أ ١ ب ٢ ج ١/٤ د ٢-



١٤ الشكل المقابل يمثل الدالة

- أ ص = ٣^{١-س} ب ص = ٣^{١+س}

- ج ص = لو_٣(٢-س) د ص = لو_٣(٣-س)

١٥ أوجد قيمة س في كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

- أ لو_٣ ٨١ ب لو_٣ ١/٨ ج لو_٣ ٣٤٣ د لو_٣ ٠,٠٠١

١٦ أوجد قيمة كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

- أ لو_٣ ٣ = ٣/٤ ب لو_٣ (٢ - س) = ٠ ج لو_٣ (٦ + س) = ٢
د لو_٣ لو_٣ س = ٠ هـ لو_٣ (٢/٣ - س) = ١ و لو_٣ |١ + س| = ١

١٧ **الربط بالتعليم:** إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول

الثانوي وعدد الأشهر (س) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(س) = ٧٠ - ٤س لو_٣ (١ + س)

فأوجد درجات هذا الطالب:

أولاً: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوي (س = ٠)

ثانياً: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوي.

١٨ **تطبيقات:** في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى

أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(س) = ٨٥ - ٢٥س لو_٣ (١ + س) حيث س عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د(س) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.

أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.

ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.

ج درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

بعض خواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

استكشف

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

(١) $(\log_2 8 + \log_2 4)$ ، $\log_2 32$ (٢) $(\log_2 40 + \log_2 5)$ ، $\log_2 100$

(٣) $(\log_2 27 - \log_2 9)$ ، $\log_2 3$ ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات Some Properties of Logarithms

إذا كان ؛ فإن: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $\log_a 1 = 0$ (٢) $\log_a a = 1$ صفر

حاول إثبات كل من ١، ٢ من تعريف اللوغاريتم.

(٣) خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

$\log_a s + \log_a t = \log_a (s \cdot t)$ حيث $s, t > 0$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع $\log_a s = x$ ، $\log_a t = y$ $\Rightarrow s = a^x$ ، $t = a^y$

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

$s = a^x$ ، $t = a^y$ $\Rightarrow s \cdot t = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

فتكون $\log_a (s \cdot t) = x + y = \log_a s + \log_a t$ أي أن $\log_a (s \cdot t) = \log_a s + \log_a t$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: $\log_a s + \log_a t = \log_a (s \cdot t)$

وبالتعويض عن قيمتي ب، ج تكون $\log_a s + \log_a t = \log_a (s \cdot t)$

مثال

(١) أوجد قيمة $\log_2 10$ في أبسط صورة إذا كان $\log_2 5 \approx 0.69$ ، $\log_2 2 \approx 0.30$ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$\log_2 10 = \log_2 (2 \times 5)$

$= \log_2 2 + \log_2 5$

$= 0.30 + 0.69 = 0.99 \approx 1$ باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن $\log_2 5 \approx 0.69$ ، $\log_2 2 \approx 0.30$

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية.
- Logarithmic Equations
- مقياس ريختر.
- Richter Scale

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\log 2 \quad \text{REPLAY} \quad 1 \quad 0 \quad = \quad 3.321928095$$

٦ حاول أن تحل

١ أوجد قيمة لو ١٥ في أبسط صورة إذا كان لو ٥ $\simeq 1,465$ ، ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

٤ خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

لو $\frac{ص}{س}$ = لو س - لو ص حيث س، ص $\in \mathbb{R}^+$ (حاول أن تثبت صحة العلاقة)

مثال

٢ أوجد قيمة المقدار: لو ٣٠ - لو ٣.

الحل

$$\text{لو } 30 - \text{لو } 3 = \text{لو } \frac{30}{3} = \text{لو } 10 = 1$$

٦ حاول أن تحل

٢ أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: لو ٢ = ١ - لو ٥

٥ خاصية لوغاريتم القوة:

لو s^n = n لو س حيث $n \in \mathbb{R}$ ، س > 0 .

مثال

٣ أوجد في أبسط صورة لو $\sqrt[4]{125}$.

الحل

$$\text{لو } \sqrt[4]{125} = \text{لو } (5)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \text{ لو } 5 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 0 \text{ لو } \frac{3}{4} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

٦ حاول أن تحل

٣ ضع في أبسط صورة

$$\text{لو } \sqrt[4]{343} \quad , \quad \text{لو } \sqrt[4]{43}$$

لاحظ أن: لو $\left(\frac{1}{س}\right) = - \text{لو س}$ حيث س $\in \mathbb{R}^+$

٦ خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س $\in \mathbb{R}^+$ ، ص $\in \mathbb{R}^+$ ، $\{1\} \neq \mathbb{R}^+$ ، أثبت أن: لو $\frac{ص}{س}$ = لو $\frac{ص}{س}$

لاحظ أن



$$\left(\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{30} = \sqrt[4]{125}\right)$$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

بوضع: $ع = لو ص$

$$ص = ع$$

$$ع لو ص = لو ص$$

$$فتكون ع = \frac{لو ص}{لو ص}$$

٩ حاول أن تحل

بالتحويل إلى الصورة الأسية
يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

$$أي أن: لو ص = \frac{لو ص}{لو ص}$$

٤ استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: أ لو ٨ ب لو ٢٤٣

٧- خاصية المعكوس الضربي: $لو أ = \frac{1}{لو \frac{1}{أ}}$

تفكير ناقد: إذا كانت أ، ب $\in ع - \{١\}$ فأثبت أن $لو أ = \frac{1}{لو \frac{1}{أ}}$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: $لو ٧ \times لو ٣$ في أبسط صورة.

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

مثال

٤ اختصر لأبسط صورة:

$$أ ٢ لو ٢٥ + لو (\frac{1}{٥} + \frac{1}{٣}) + ٢ لو ٣ - ٣٠ لو ب ٤٩ لو ٥ \times ٨ لو ١ \times ٩ لو ٧$$

الحل

$$أ المقدار = ٢ لو ٢٥ + لو \frac{٨}{١٥} + لو ٣ - ٢ لو ٣ - ٣٠ لو = ٢ لو ١٠٠$$

خاصية ٥
خاصية ٣، ٤

$$ب المقدار = \frac{٤٩ لو ٥}{٨ لو ١} \times \frac{٨ لو ١}{٩ لو ٧} \times \frac{٩ لو ٧}{٧ لو ٢} = \frac{٤٩ لو ٥}{٧ لو ٢} = ٢$$

خاصية ٦

٩ حاول أن تحل

$$٥ اختصر: لو ٠,٠٠٩ - لو \frac{٢٧}{١٦} + لو \frac{١٥}{٨} - لو \frac{١}{١٢}$$

$$٦ أثبت أن: \frac{لو ٧٢٩ - لو ٦٤}{لو ٩ - لو ٤} = ٣$$

$$٧ إذا كان س^٢ + ص^٢ = ٨ س ص، أثبت أن: ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص$$

Solving Logarithmic Equations

حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\log_3(1-s) + \log_3(s+1) = \log_3 8$ ب $\log_3 s + \log_3 s = 3$

الحل

أ المعادلة معرفة لكل $s \in \{s: 1-s < \text{صفر}\} \cap \{s: s+1 < \text{صفر}\}$

أي $s < 1$ (مجال تعريف المتغير)

$$\log_3(1-s) + \log_3(s+1) = \log_3 8$$

$$\therefore \log_3(1-s)(s+1) = \log_3 8$$

$$\therefore 1-s = 8$$

خاصية ٣

$$\therefore s = -7$$

وحيث إن $s = -7$ لا تنتمي لمجال تعريف المتغير $\therefore$ مجموعة الحل = $\{3\}$

ب المعادلة معرفة لكل $s < \text{صفر}$ ، $s \neq 1$

خاصية ٧

$$\therefore \log_3 s + \log_3 s = 2$$

بالضرب في $\log_3 s$

$$\therefore (\log_3 s)^2 = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore (\log_3 s - 1) = 2 = \text{صفر}$$

$$\therefore (\log_3 s)^2 - 2 = 1 + \text{صفر}$$

$$\therefore s = 3 \in \text{مجال تعريف المتغير}$$

$$\therefore \log_3 s = 1$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{3\}$$

٦ حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ع:

أ $\log_3 s + \log_3(s+2) = 1$ ب $\log_3(8-s) + 2\log_3 s = 6$ ج $\log_3 s - \log_3 100 = 1$

Solving Exponential Equations Using Logarithms

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

مثال

استخدام الآلة الحاسبة في حل المعادلات اللوغاريتمية

٦ أوجد قيمة s في كل مما يأتي مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ $5^{1+s} = 5$ ب $3 \times 4^{1+s} = 5$

الحل

أ $5^{1+s} = 5$

$$\therefore \log_5 5^{1+s} = \log_5 5$$

$$\therefore 1+s = 1$$

يأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\therefore (1+s) \log_5 5 = \log_5 2$$

أي أن: $s = \frac{\log_5 2}{\log_5 5} - 1$ $s \approx 1,32$

استخدام الآلة الحاسبة:

$$\log 5 \div \log 2 = 1.321928095$$

يأخذ لوغاريتم للطرفين

ب $5 \times 3 = 2^{-s} \times 4^{1+s}$

$$\begin{aligned} \therefore \log 5 \times 3 &= \log (2^{-s} \times 4^{1+s}) \\ \therefore \log 5 + \log 3 &= \log 2^{-s} + \log 4^{1+s} \\ \therefore \log 5 + \log 3 &= -s \log 2 + (1+s) \log 4 \\ \therefore \log 5 + \log 3 &= -s \log 2 + \log 4 + s \log 4 \\ \therefore \log 5 + \log 3 &= \log 4 + s (\log 4 - \log 2) \\ \therefore s &= \frac{\log 5 + \log 3 - \log 4}{\log 4 - \log 2} \approx 25,56 \end{aligned}$$

استخدم الآلة الحاسبة:

$$\log 3 + \log 4 + 2 \log 5 = \log 25,56104553$$

٤ حاول أن تحل

٩ أوجد قيمة s لأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

ب $3 + s = 2^{-s} \times 4$

أ $13,4 = 2^{-s} \times 3$

تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

مثال

٧ **الربط بالجيولوجيا:** إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة $d = \log(\frac{ش}{ش_0})$ ، حيث

$ش$ هي شدة الزلزال، $ش_0$ الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفري لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل 10^6 مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ $d = \log(\frac{ش}{ش_0})$ ، $ش = 10^6 ش_0$ $\therefore d = \log(\frac{10^6 ش_0}{ش_0}) = \log 10^6 = 6$

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب $\therefore$ درجة الزلزال $7,1$

$\therefore 7,1 = \log(\frac{ش}{ش_0})$ $\therefore \frac{ش}{ش_0} = 10^{7,1}$ فتكون $ش = 10^{7,1} ش_0$

أي أن شدة الزلزال تعادل 12590000 مرة تقريباً قدر الشدة الابتدائية.

٩ حاول أن تحل

١٠ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة $E = 10^{\circ(1,3)^n}$ ، حيث E عدد السكان ، n السنة

أ احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

ب في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.



تمارين ٢ - ٦



١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

د $\log_7 49$

ج $\log_{\frac{1}{4}} 16$

ب $\log_3 32$

أ $\log 1000$

ح $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

ز $\log_8 1$

و $\log_8 2$

هـ $\log 0,001$

٢ اختصر لأبسط صورة

ج $\frac{\log 25}{\log 5}$

ب $\log_3 15 - \log_3 3$

أ $\log 2 + \log 5$

و $1 + \log 3 - \log 2 - \log 15$

هـ $\log 54 - \log 3 - \log 2$

د $\log_3 5 \times \log_3 2$

ح $\frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_3 12}$

ز $\log_a a + \log_{ab} b + \log_{ab} a$

٣ علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ، حيث S ، $V \in \mathbb{R}^+$ ، a ، $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$:

أ $\log(S+V) = \log S + \log V$ () ب $\log(S+V) = \log S \times \log V$ ()

ج $\log(SV) = \log S + \log V$ () د $\log_2 5 = 5 \log_2 2$ ()

هـ $\log(\frac{S}{V}) = \log S + \log V^{-1}$ () و $\frac{\log S}{\log V} = \frac{\log V}{\log S}$ ()

ز إذا كان $S > 0$ صفر فإن $\log S = 4$ ()

٤ إذا كان $\log 2 = S$ ، $\log 3 = V$ أوجد بدلالة S ، V كل من: $\log 6$ ، $\log_{18} 12$

٥ أوجد قيمة S في كل مما يأتي مقرباً الناتج لرقمين عشريين.

د $S \log 100 = 10$

ج $7 = \frac{5}{S^{10}}$

ب $7^S + 3 = 2$

أ $5 = 2^S - 3^S$

٦ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو س = ١ - لو (س - ٣) ب لو (س + ٦) = ٢ لو س ج لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

د (لو س) - ٢ = لو س = ٣ ه (لو س) = ٢ لو س = ٩ و ٣ لو س = ٢ لو ٢

ز لو س = لو س ح لو س + لو س = ٢ ط لو (٢ - ٤) + س - ٥ = صفر

٧ استخدم الحاسبة في إيجاد قيمة كل من:

أ لو ٣,١٥ ب لو ٢٥ ج ٢ لو ٣ - ٥ لو ٧ د $\frac{200 \times 100 \times 3}{200 \times 7}$

٨ استخدم الحاسبة في إيجاد عدد أرقام العدد ٤٧

٩ **الربط بالكيمياء:** يعرف الرقم الهيدروجيني للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين في المحلول (H⁺) **أى أن:** PH = - log (H⁺)

أ احسب الرقم الهيدروجيني لمحلول تركيز الهيدروجين فيه 10⁻³

ب احسب تركيز الهيدروجين في محلول رقمه الهيدروجيني 9

١٠ **الربط بالسكان:** إذا كان عدد سكان احد المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧٪

أ أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

ب بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.

١١ إذا كان س = ٥ + ٢ - ٦ أوجد فى أبسط صورة قيمة لو (س + ١)

١٢ **اكتشف الخطأ:** قامت كل من أميرة وإسراء بحل السؤال اختصر: لو س + ٢ = لو ص - ٤ - لو س ص

حل إسراء

المقدار = لو $\frac{س \times ص}{س}$ = لو س ص = لو س ص

= لو (س ص) = ٢ = لو س ص

= ٢ (لو س + لو ص)

حل أميرة

المقدار = ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س ص

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ (لو س + لو ص)

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س - ٢ لو ص

= لو س + ٢ لو ص

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

١٣ **تفكير ابداعى:** بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:

لو (ظا ١) + لو (ظا ٢) + لو (ظا ٣) + + لو (ظا ٨٩)

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

ملخص الوحدة

(١) الأسس الصحيحة

- أ $1^n = 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1$ (العامل 1 مكرر n من المرات)
 ب $1^n = 1$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ ، $\{0\}$ ج $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ، $\frac{1}{1^n} = 1$ حيث $a \neq 0$
 قوانين الأسس الصحيحة لكل $m, n \in \mathbb{Z}$ ، $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، فإن:

- أ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ب $(a^m)^n = a^{m \times n}$ ج $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 د $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ هـ $a^0 = 1$ (ب) $a^0 = 1$ (أ) $a^0 = 1$

(٢) الجذور النونية المعادلة $x^n = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ لها n من الجذور

- أ n عدد زوجي، $a \in \mathbb{R}^+$ يوجد جذران حقيقيان (باقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)، أحدهما موجب والآخر سالب، ويسمى الجذر الموجب بالجذر الأساسي، ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$
 ب n عدد زوجي، $a \in \mathbb{R}^-$ ليس للمعادلة جذور حقيقية (جميع الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)
 ج n فردي، $a \in \mathbb{R}$ يوجد للمعادلة جذر حقيقي وحيد (باقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)، ويسمى هذا الجذر بالجذر الأساسي
 د $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $a = 0$ يوجد للمعادلة حل وحيد هو الصفر (لها n من الجذور المكررة وكل منها يساوي صفر).

(٣) خواص الجذور النونية: إذا كان $\sqrt[n]{a}$ ، $\sqrt[n]{b}$ فإن:

- أ $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ ب $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ج $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ د $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ حيث $a \neq 0$

(٤) الأسس الكسرية

- أ لأي عدد حقيقي $a \geq 0$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $\sqrt[n]{a}$ يكون $a^{\frac{1}{n}}$
 هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $a > 0$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من ١
 ب على ذلك يكون $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $m, n \in \mathbb{Z}^+$ عدنان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، $n < 1$ ، $a \in \mathbb{R}$

(٥) الدالة الأسية: إذا كانت د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ حيث د(س) = a^s لكل $s \in \mathbb{R}$ فإن د تسمى دالة أسية أساسها a (٦) خواص منحني الدالة الأسية: د(س) = a^s أ مجال الدالة = $\mathbb{R}$ ب المدى = $\mathbb{R}^+$

- ج الدالة متزايدة على مجالها لكل $a > 1$ وتسمى بدالة النمو الأسّي معاملها a .
 د الدالة متناقصة على مجالها لكل $0 < a < 1$ وتسمى بدالة التضاؤل الأسّي معاملها a .

(٧) المعادلة الأسية: إذا كان $a^n = a^m$ حيث $a \neq 0$ ، $a \neq 1$ ، فإن $n = m$

إذا كان $a^n = a^m$ حيث $a \neq 0$ ، $a \neq 1$ ، فإن

إما $n = m$ = صفر أو $a = 1$ = ب في حالة n عدد فردي أو $a = -1$ = ب في حالة n عدد زوجي

(٩) الدالة العكسية إذا كانت دالة أحادية من مجموعة S إلى مجموعة S ، فإن الدالة D^{-1} من S إلى S تسمى دالة عكسية للدالة D إذا كان لكل $(s, v) \in D$ فإن $(v, s) \in D^{-1}$.

(١٠) منحني الدالة D^{-1} هو صورة منحني D بالانعكاس في المستقيم $v = s$.

(١١) لكي يكون للدالة D دالة عكسية على فترة معينة يجب أن تكون دالة أحادية على نفس الفترة أي يحقق منحني D اختبار الخط الأفقي (إذا قطع أي مستقيم أفقي المنحني في نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحني يمثل دالة أحادية).

◀ يقال إن $D(s)$ ، $R(s)$ دالة عكسية للأخرى إذا كان $(D \circ R)(s) = s$ ، $(R \circ D)(s) = s$

◀ مجال الدالة $D(s)$ هو مدى الدالة العكسية $D^{-1}(s)$

◀ ومدى الدالة $D(s)$ هو مجال الدالة العكسية $D^{-1}(s)$

(١٢) الدالة اللوغاريتمية

أ إذا كانت $A \in \mathbb{R}^+$ فإن الدالة $v = \log_a s$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية $s = a^v$

ب $a^b = b$ فإن $b = \log_a a^b$ (التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس).

ج اللوغاريتم المعتاد: هو لوغاريتم أساسه ١٠ {لاحظ أن $\log_{10} 10 = 1$ ، $\log_{10} 1 = 0$ }

(١٣) خواص الدالة اللوغاريتمية أ مجال الدالة $= \mathbb{R}^+$ ب المدى $= \mathbb{R}$

ج الدالة $v = \log_a s$ متزايدة لكل $a > 1$ ومتناقصة لكل $0 < a < 1$

(١٤) خواص اللوغاريتمات: إذا كانت $A \in \mathbb{R}^+$ - {١}

أ $\log_a 1 = 0$ ب $\log_a a = 1$ ج $\log_a s^m = m \log_a s$ حيث $s > 0$

د $\log_a s + \log_a v = \log_a (s \cdot v)$ حيث $s, v > 0$

هـ $\log_a s - \log_a v = \log_a \frac{s}{v}$ حيث $s, v > 0$

و $\log_a s = \frac{\log_b s}{\log_b a}$ حيث $s > 0$ ، $a, b > 0$ ، $a \neq 1$ ، $b \neq 1$

ز $\log_a s \times \log_a v = \log_a (s^v)$

@ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:





اختبار تراكمي



١ أوجد قيمة كل من:

أ $(32)^{\frac{1}{5}}$

ب $\sqrt[3]{16}$

ج لو $(0, 3)$ لو 2^{-}

٢ اختصر لأبسط صورة:

أ $\frac{5 \times 2^2 \times 4}{10 - 2^3}$

ب $\frac{5 \times 2^3 \times 3 - 2^3 \times 3 \times 4}{2^3 \times 3 - 1 + 2^3 \times 3 \times 2}$

ج لو $2 + 4$ لو 3

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ $2 = 3$ مقرباً الناتج لأقرب رقم عشري.

ج $2 = 2 - 2 + 1 = 1$

ب لو $3 = 2$ لو 3

د $3 = 3 - \frac{1}{3} = 32$ صفر

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

أ العدد $2^{22} + 2^{23} + 2^{24}$ يقبل القسمة على

(د) 9

(ج) 7

(ب) 5

(أ) 3

ب إذا كان لو $(11 + 2) = 2$ فإن $2 =$

(د) 91

(ج) 89

(ب) 22

(أ) 9 -

ج مجموع جذور المعادلة $2 = 16$ يساوي

(د) صفر

(ج) $2 \pm$

(ب) 2 -

(أ) 2

د لو (θ) + لو (θ) = حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(د) 1 -

(ج) 2

(ب) صفر

(أ) 1

٥ إذا كان لو $(س + ص) = \frac{1}{4}$ (لو س + لو ص) + لو 2 أثبت أن س = ص.

٦ **الربط بالفيزياء:** يعطى الزمن الدوري للبندول بالعلاقة $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث ن الزمن بالثواني، ل طول البندول

بالسم، و عجلة السقوط الحر وتساوي 9.8 م/ث²

أ أوجد الزمن لبندول كبير طوله 73 سم.

ب يراد تصنيع بندول لا يستغرق أكثر من 10 ثانية لاتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

٧ **الربط بالجيولوجيا:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة م بالعلاقة: م = لوس، حيث س

سعة الموجة التي تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت 10 درجات على مقياس

ريختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت 7 درجات على نفس المقياس.

الوحدة الشاشة

النهايات والاتصال Limits and Continuity

مقدمة الوحدة

ظهرت أولى أفكار حساب التفاضل والتكامل في أعمال الرياضي الإغريقي أرشميدس Archimedes ، الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل: حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدمًا في ذلك طرقًا كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة في التكامل، وفي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين شغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل حتى قام كل من الإنجليزي نيوتن Newton والألماني لايبنيز Leibnitz كل على حدة باكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

والتفاضل والتكامل أو الحسبان Calculus هو أحد فروع الرياضيات التي تدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدالة وتحليلها ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيرًا ما يحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ ما فيها من أنشطة يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف بعض الكميات غير المعينة مثل: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times 0$ ، ...
- ✚ يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:
- ✚ بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- ✚ يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ إن $\frac{f(a)}{g(a)}$ هو عدد حقيقي.
- ✚ يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ إن $\frac{f(a)}{g(a)}$ هو عدد حقيقي.
- ✚ يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- ✚ يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.
- ✚ يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية .
- ✚ يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند نقطة يختلف حولها تعريف الدالة.
- ✚ يتعرف مفهوم اتصال الدالة:
- ✚ اتصال دالة عند نقطة - اتصال دالة على فترة - إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة.
- ✚ يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.

المصطلحات الأساسية

Polynomial Function	دالة كثيرة الحدود	Unspecified Quantity	كمية غير معينة
Limit of a Function at Infinity	نهاية الدالة عند اللانهاية	Undefined	غير معرف
Trigonometric Function	دالة مثلثية	Right Limit	نهاية يميني
Limit of a Trigonometric Function	نهاية دالة مثلثية	Left Limit	نهاية يسري
Continuity of a Function	اتصال دالة	Limit of a Function	نهاية دالة
		Direct Substitution	تعويض مباشر

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلي - برامج رسومية

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): مقدمة في النهايات.

الدرس (٣ - ٢): إيجاد نهاية الدالة جبرياً.

الدرس (٣ - ٣): نهاية الدالة عند اللانهاية.

الدرس (٣ - ٤): نهايات الدوال المثلثية.

الدرس (٣ - ٥): بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

الدرس (٣ - ٦): الاتصال.

مخطط تنظيمي للوحدة



مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

١ - ٣

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل. وفي هذه الوحدة سوف نتعرف على مفهوم نهاية الدالة من الناحية البينانية والجبرية. ولكن قبل ذلك دعنا نتعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تذكر أن

∞ هي رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقي يمكن تصوره أو تخيله.

أضف إلى معلوماتك

مجموعة الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R} = \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$

فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

$9 - 4$	$4 \div 28$	5×3
$3 + \infty$	$0 \div 0$	$0 \div 7$
	$\infty - \infty$	$\infty \div \infty$

الكميات غير المعينة:

تعلم

في بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١، ٢، ٣ بينما بعض النواتج لا يمكن تحديدها مثل باقي العمليات. **لاحظ أن:** $0 \div 7$ غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لا معنى لها. والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $0 \div 0$. حيث يوجد عدد لا نهائي من الأعداد إذا ضرب كل منها في صفر كان الناتج صفرًا، لذلك فإن $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ (لماذا؟)

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، $-\infty$ كالآتي:

لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن:

$$-\infty = -|a| + \infty \quad -1 = |a| + \infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \infty > a \\ \infty < a \end{array} \right\} = -\infty \quad \left. \begin{array}{l} \infty < a \\ \infty > a \end{array} \right\} = \infty$$

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- كمية غير معينة

Unspecified Quantities

Undefine غير معرف

Extended Real Numbers مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة

Right Limit نهاية يمنى

Left Limit نهاية يسرى

Value of a Function قيمة دالة

Limit of a Function نهاية دالة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال

١ أوجد ناتج العمليات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكناً:

أ $\infty + 4$ ب $\infty - 3$ ج $3 \div 0$ د $0 \div 5$
 هـ $\infty + \infty$ و $0 \div 0$ ز $\infty \times 5$ ح $\infty - \times 6$

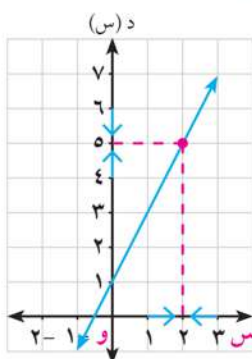
الحل

أ ∞ ب ∞ ج 0 د غير معرفة
 هـ ∞ و كمية غير معينة ز ∞ ح ∞

٢ حاول أن تحل

١ أوجد ناتج العمليات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكناً:

أ $(-2) \div 0$ ب $0 \div 7$ ج $9 \div 0$ د $0 \times \infty$
 هـ $\infty \times (-7)$ و $12 + (\infty -)$ ز $\infty + \infty$ ح $\infty \div \infty$



نهاية دالة عند نقطة:

ادرس قيم الدالة د حيث د(س) = $1 + 2س$ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول الآتي:

د(س)	س > ٢
٤,٨	١,٩
٤,٩٨	١,٩٩
٤,٩٩٨	١,٩٩٩
٤,٩٩٩٨	١,٩٩٩٩
.....	
↓	↓
د(٢) ← ٥	س ← ٢

د(س)	س < ٢
٥,٢	٢,١
٥,٠٢	٢,٠١
٥,٠٠٢	٢,٠٠١
٥,٠٠٠٢	٢,٠٠٠١
.....	
↓	↓
د(٢) ← ٥	س ← ٢

نلاحظ من النشاط السابق أن:

عندما تقترب س من اليمين ومن اليسار من العدد (٢) فإن د(س) تقترب من العدد (٥) أي أن د(٢) = د(-٢) = ٥ ونعبر عن ذلك رياضياً كالآتي: $\lim_{س \rightarrow ٢} (١ + ٢س) = ٥$ والتمثيل البياني للدالة يوضح ذلك:

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما تقترب س من أ من جهتي اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوي ل وتكتب رمزياً: $\lim_{س \rightarrow أ} د(س) = ل$ وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوي ل

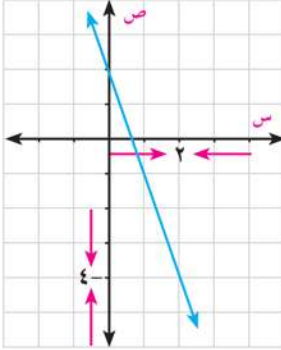
تعريف

مثال

تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

٢ قدر نهاية $\lim_{s \rightarrow 2} (3 - s)$ بيانياً وعددياً

الحل



بيانياً: تمثل الدالة الخطية: $ص = 3 - 2$ s بيانياً كما بالشكل المقابل:

ومن الرسم نلاحظ أن:

عندما $s \leftarrow 2$ فإن $د(س)$ $\leftarrow 1$

أى أن: نهاية $\lim_{s \rightarrow 2} (3 - s) = 1$

عددياً: نكون جدولاً لقيم $د(س)$ وذلك باختيار قيم s تكون قريبة من العدد 2 من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتي:

1,9	1,99	1,999	→	2	←	2,001	2,01	2,1	س
3,7-	3,97-	3,997-	→	1-	←	4,003-	4,03-	4,3-	د(س)

يبين الجدول أنه كلما s اقترب من العدد 2 من اليمين أو اليسار فإن قيم $د(س)$ تقترب من العدد 1

٤ حاول أن تحل

٢ قدر نهاية كل مما يأتي بيانياً وعددياً.

ب) نهاية $\lim_{s \rightarrow 0} (2 - s)$

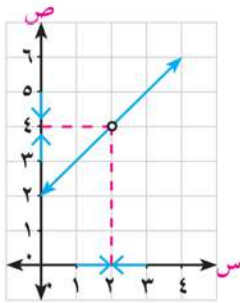
أ) نهاية $\lim_{s \rightarrow 3} (1 - s)$

مثال

تقدير النهاية (النهاية لاتساوي قيمة الدالة)

٣ قدر نهاية $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s-4}{s-2}$ بيانياً وعددياً.

الحل



بيانياً: يبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة $د(س) = \frac{s-4}{s-2}$ حيث $s \neq 2$.

ونلاحظ من الشكل أنه عندما $s \leftarrow 2$ فإن قيمة $د(س)$ $\leftarrow 4$

لذلك فإن: نهاية $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s-4}{s-2} = 4$

عددياً: نكون جدولاً لقيم $د(س)$ ، وذلك باختيار قيم s القريبة من العدد 2

1,9	1,99	1,999	→	2	←	2,001	2,01	2,1	س
3,9	3,99	3,999	→	4	←	4,001	4,01	4,1	د(س)

يبين الجدول أنه كلما اقتربت s من العدد 2 من اليمين أو اليسار فإن قيم $د(س)$ تقترب من العدد 4.

لاحظ من هذا المثال أن:

١ الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين ÷ عندما $s = 2$

(٢) وجود نهاية للدالة عندما $s \leftarrow 2$ لا تعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $s = 2$ حيث إن $s \in \mathbb{C} - \{2\}$ وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهمًا في النهايات.

٤ حاول أن تحل

(٣) قدر نهاية كل مما يأتي بيانيًا وعدديًا:

ب نها $\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}$

ا نها $\frac{s^2 - 1}{s + 1}$

نشاط

استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)
استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:

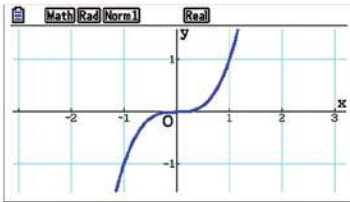
(١) د(س) = s^2 عند $s \leftarrow 0$ صفر

(٢) د(س) = $(\frac{s^2 - 1}{s - 1})$ عند $s \leftarrow 1$

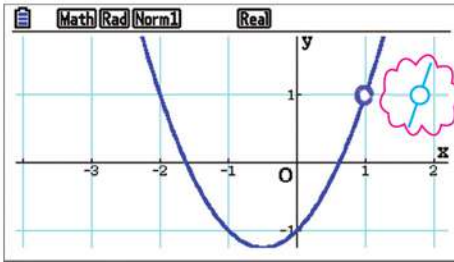
(٣) د(س) = $\frac{js}{s}$ عند $s \leftarrow 0$ صفر

يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل (Geogebra)

في الحاسب الآلي أو في التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتي:



(١) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث: د(س) = s^3
من الرسم نها د(س) = صفر

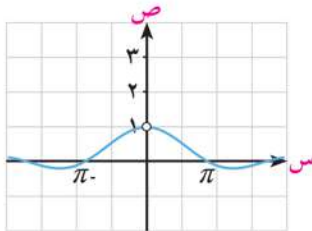


(٢) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث

$$د(س) = (\frac{s^2 - 1}{s - 1})$$

من الرسم نها د(س) = ١

(لاحظ الفجوة عند النقطة (١ ، ١))



(٣) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \frac{js}{s}$$

من الرسم نجد أن نها $\frac{js}{s} = 1$

نستنتج من النشاط السابق أن:

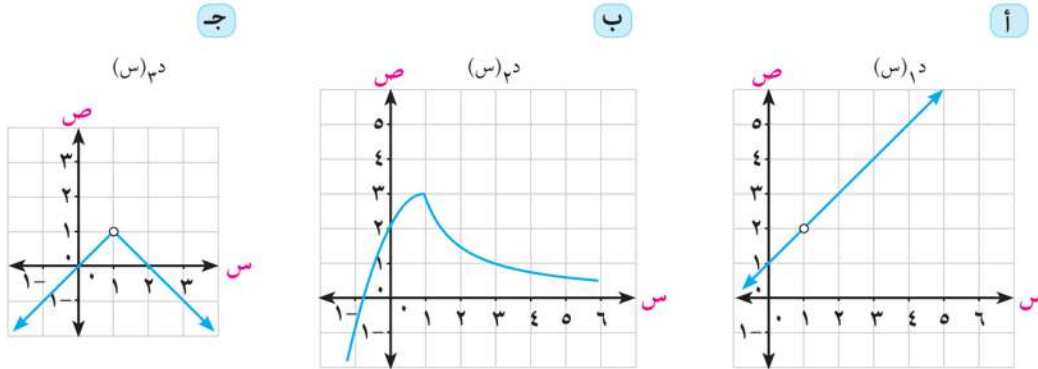
إن وجود نهاية للدالة عندما $s \leftarrow a$ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $s = a$

تفكير ناقد: إذا كانت الدالة د معرفة عند $s = 1$ فهل هذا يعني وجود النهاية عند 1 فسر إجابتك.
تدريب على النشاط: باستخدام الحاسبة البيانية أو بأحد البرامج الرسومية للحاسوب أو التابلت قدر كلاً مما يأتي:

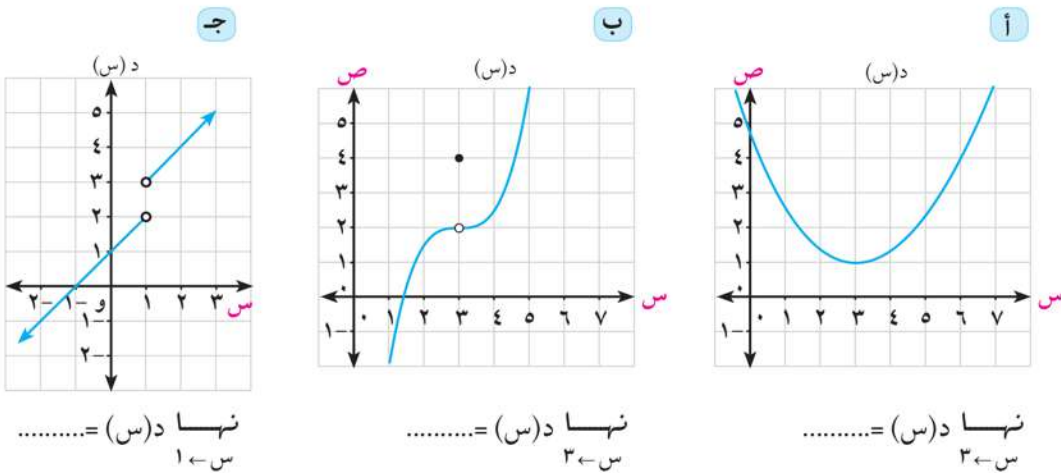
أ نها $(2 - s)$ س $\leftarrow 0$ ب نها $\frac{s^2 + 8}{s^2 + 2}$ س $\leftarrow 2$ ج نها $\frac{s^3 + 3}{s}$ س $\leftarrow 0$

تمارين ٣ - ١

١ قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند $s \leftarrow 1$

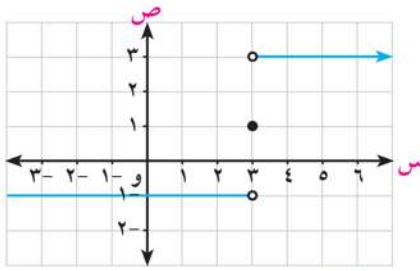


٢ قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:



٣ من الرسم البياني أوجد:

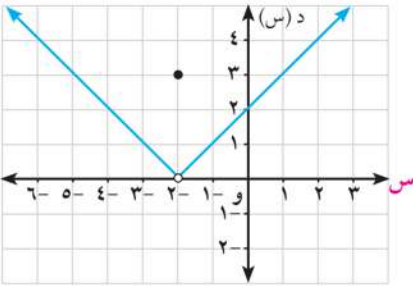




٤ من الرسم البياني المقابل أوجد

أ نها د(س) س ← ٣

ب د(٣)



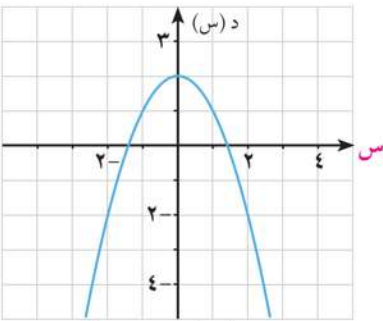
٥ من الرسم البياني المقابل أوجد:

أ نها د(س) س ← ٢

ب د(٢-)

ج نها د(س) س ← ٠

د د(٠)

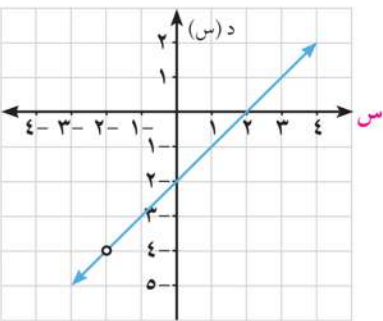


د(س) = ٢ - ٢س

٦ من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها (٢ - س²) س ← ٠

ب د(٠)

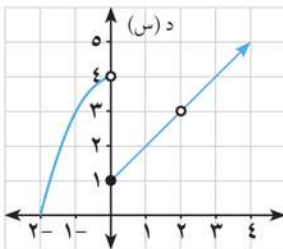


د(س) = $\frac{٤-٢س}{٢+س}$

٧ من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها $\frac{٤-٢س}{٢+س}$ س ← ٢

ب د(٢-)



٨ من الشكل البياني المقابل أوجد:

ب نها د(س) س ← ٠

أ د(٠)

د نها د(س) س ← ٢

ج د(٢)

٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 4)$ حيث $D(x) = 5x + 4$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1)$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)					؟				

١١ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1+x}$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)					؟				

١٢ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

١٣ باستخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل مما يأتي ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الإرشادية.

ب نها $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4)$

د نها $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8}{x^2 - 2}$

و نها $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$

ح نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x|}$

أ نها $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 4)$

ج نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

ه نها $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x)$

ز نها $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة في إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \text{ إذا } g(a) \neq 0$$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تحليل Factorization
- قسمة تركيبيّة Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند $s = a$ بيانياً أو عددياً عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من $s = a$ وفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية في رسم الشكل البياني لكل من الدالتين:

$$d_1(s) = \frac{s^2 - 2s}{s - 2}, \quad d_2(s) = s + 1$$

ماذا تلاحظ؟

أوجد: نها $d_1(s)$ ، نها $d_2(s)$

ماذا تستنتج؟

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of a Polynomial Function

إذا كانت $d(s)$ كثيرة حدود، $a \in \mathbb{R}$

فإن: نها $d(s)$ عند $s = a$ = $d(a)$

تذكر أن

تسمى الدالة كثيرة حدود إذا كانت على الصورة
 $d(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$
 حيث: $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \neq 0$ ، $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

مثال

التعويض المباشر

أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ نها $(s^2 - 3s + 5)$ عند $s = 2$

ب نها (-4) عند $s = 3$

الحل

أ نها $(s^2 - 3s + 5)$ عند $s = 2$
 $3 = 5 + 6 - 4 =$

ب نها (-4) عند $s = 3$
 $-4 = (-4)$

(بالتعويض المباشر)

لاحظ أن $d(s) = -4$ ثابتة لكل قيم $s \in \mathbb{R}$

٩ حاول أن تحل

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

- أ نها (٢-س) س ← ٣
ب نها (٣س² + س - ٤) س ← ٢
ج نها (٧) س ← ٢

نظرية

إذا كان نها د(س) = ل ، نها و(س) = م ،
فإن:

- ١ نها ك د(س) = ك.ل س ← ١ حيث ك ≠ ٠
٢ نها [د(س) ± و(س)] = ل ± م س ← ١
٣ نها د(س).و(س) = ل.م س ← ١
٤ نها د(س) / و(س) = ل / م س ← ١ بشرط م ≠ ٠
٥ نها د(س) / ن(س) = ل / ن س ← ١ حيث ل ≠ ٠

مثال

استخدام النظرية

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

- أ نها (٧+س³) / (٥-س²+س) س ← ١
ب نها (٦س⁴ - ٣) س ← ٢

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{7+s^3}{5-s^2+s} &= \frac{7+1^3}{5-1^2+1} = \frac{8}{5-1+1} = \frac{8}{5} \\ \text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow 2} \sqrt{6s^4 - 3} &= \sqrt{6(2^4) - 3} = \sqrt{96 - 3} = \sqrt{93} \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

٢ احسب النهايات الآتية:

- أ نها (٣-س²) / (١+س²) س ← ٢
ب نها (١+س²) / (١+س²) س ← ٢

إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

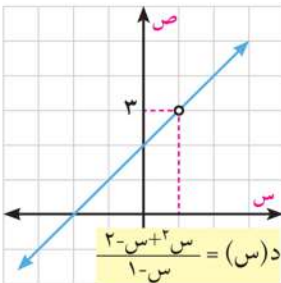
لا يمكن إيجاد نها د(س) حيث د(س) = $\frac{2-s+2}{1-s}$ باستخدام التعويض المباشر

حيث نصل إلى إحدى حالات عدم التعيين $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، ويبين الشكل المقابل

التمثيل البياني للدالة د حيث نجد أن نها د(س) = ٣

وبعد تبسيط الدالة واختصار العوامل المتشابهة غير الصفريية نصل للدالة

و(س) = س + ٢ حيث و(س) = د(س) لجميع قيم س ∈ ع - {١}.



إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ لكل $\epsilon > 0$ - $\delta > 0$

وكانت نها $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ فإن نها $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

مثال

استخدام التحليل

٣ استخدم التحليل لإيجاد النهايات الآتية:

أ نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ ب نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

الحل

أ نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{0}{0}$ غير معينة عند $x = 1$

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفريه فإنه يمكن كتابة $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ على الصورة:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1 - 2 = -1$

من ذلك نجد إن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$ لكل $x \neq 1$

وحيث أن نها $\lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$

فإنه طبقاً للنظرية ٣ نستنتج أن نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$

طريقة القسمة المطولة

ب نجد أن دالة البسط $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 0$ وذلك بالتعويض عن $x = 1$ ، كذلك دالة المقام

$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ بالتعويض أيضاً عن $x = 1$ وهذا يعني أن العامل $(x - 1)$ مشترك في

كل من البسط والمقام، ونظرًا لصعوبة تحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها $(x - 1)$

نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار $x^2 - 3x + 2$ كالآتي:

$x^2 - 3x + 2$	$\div$	$x - 1$	$=$	$x + 2$
$x^2 - 3x + 2$		$x - 1$		
		$1 +$		
		$2 -$		
		0		

في عملية القسمة المطولة

(١) نرتب حدود كل من

المقسوم والمقسوم عليه

ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً

بنفس الطريقة.

(٢) نقسم الحد الأول من

المقسوم على الحد الأول

من المقسوم عليه ونكتب

نتائج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة في

المقسوم عليه ويطرح

الناتج من المقسوم

للحصول على الباقي.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى

الانتهاء من عملية القسمة.

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة

تسمى طريقة القسمة التركيبية

نستخدم في هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلي:

خطوة ١: نكتب معاملات المقسوم مرتبه تنازلياً وتساوى

المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة s كما بالشكل:

خطوة ٢: اترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول في قيمة s واكتب الناتج

أسفل المعامل الثاني ثم اجمع.

خطوة ٣: كرر عمليتي الضرب والجمع.

نجد أن معاملات خارج القسمة هي: ١، -١، -١ على الترتيب لذلك، فإن خارج

القسمۃ هو س^۲ - س - ۱

أى أن: $(1 - s)(1 - s^2) = 1 + s^2 - s^3$

$$\frac{1}{3} = \frac{1-s-s^2}{s+s^2} \quad \text{نہا} \quad = \frac{(1-s-s^2)(1-s)}{(s+s^2)(1-s)} \quad \text{نہا} \quad \text{لذلك فإن:}$$

٩ حاول أن تحل

٣ أوجد:

ب) $\frac{2 \text{ سو } - 8}{2 \text{ سو } - 12}$ نہا $\frac{2 \text{ سو } - 4}{2 \text{ سو } - 12}$

۵

فہرست

۳-۱۰-۳ س

۳-۲+۲ س

۳-۱ س

ا) $\frac{س^۲+۸}{س-۲}$ نہ ل

ج۔ $\frac{س^2 - ۵س + ۶}{س - ۲}$ نہ لے سکتے ہیں۔

Conjugate

استخدام المرافق

مثال 

٤ أوجد النهايات الآتية:

ب) نہا

$$\frac{س^۲ - ۵س}{س^۳ - ۴س + ۳}$$

۱۔ $\frac{1 - \sqrt{3 - 3s}}{4 - s}$ نہا
س ← ۴

الحل 

أ لاحظ أن: د (س) = $\frac{\sqrt{1-3-s}}{s-4}$ غير معينة عند س = 4

لذلك نبحت عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط و المقام.

$$\begin{aligned} \frac{1-s-s^2}{(1+s-s^2)(1-s)} &= \frac{1+\sqrt{1-s-s^2}}{1+s-s^2} \times \frac{1-\sqrt{1-s-s^2}}{1-s} \\ \frac{(1-s)}{(1+s-s^2)(1-s)} &= \\ \frac{1}{1+s-s^2} &= \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \frac{3 + \sqrt{4 + s}}{3 + \sqrt{4 + s}} \times \frac{s - 5}{s - 5} = \frac{s - 5}{s - 5} = \frac{s - 5}{s - 5}$$

$$\frac{(3 + \sqrt{4 + s})(s - 5)}{(s - 5)} = \frac{(3 + \sqrt{4 + s})(s - 5)}{s - 5}$$

$$30 = (3 + 3) 5 = (3 + \sqrt{4 + s}) s =$$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

$$\text{أ) } \frac{2 - \sqrt{1 - s}}{s - 5}$$

$$\text{ب) } \frac{1 + s}{2 - 5 + \sqrt{s}}$$



إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) = $\frac{s - 1}{s - 1}$ فإن نها $\frac{s - 1}{s - 1} = 1$ نـ ١

نشاط

استعن بمعلمك للبحث في الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).

مثال

إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)

$$\text{٥ أوجد } \frac{s - 81}{s - 3}$$

الحل

$$\text{نها } \frac{s - 81}{s - 3} = \frac{3^3 - 3^4}{3 - 3} = 3(3) 4 = 108$$



نتائج على النظرية:

$$\text{٢- نها } \frac{s - 1}{s - 1} = \frac{s - 1}{s - 1} = 1$$

$$\text{١- نها } \frac{s - 1}{s - 1} = \frac{s - 1}{s - 1} = 1$$

مثال

٦ أوجد:

$$\text{ب) } \frac{s - 32}{s - 4}$$

$$\text{أ) } \frac{s - 625}{s - 5}$$

$$\text{د) } \frac{s - 32}{s - 64}$$

$$\text{ج) } \frac{s - 32}{s - 2}$$

الحل

أ) نها $\frac{50 - (5 + 5)}{5} = 35 \times 4 = 140$ س ← ٥

ب) نها $\frac{20 - 5}{22 - 2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ س ← ٢

ج) نها $\frac{32 + (4 - 5)}{2 - 5} = \frac{32 - 1}{-3} = \frac{31}{-3} = -\frac{31}{3}$ س ← ٢

$80 = 5(2 - 4)$

د) نها $\frac{32 - \sqrt{16}}{64 - 3} = \frac{32 - 4}{61} = \frac{28}{61}$ س ← ١٦

$\frac{0}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{0}{1} = \left(\frac{1}{4} \times 16\right) \times \frac{0}{1} = 4 \times 0 = 0$

لاحظ أن



$\frac{0}{4} \times 42 = \frac{0}{4} (42) = \frac{0}{4} 16$

$32 = 02 =$

كذلك فإن:

$64 = \frac{3}{16}$

٩ حاول أن تحل

٥ أوجد:

ج) نها $\frac{2 - \sqrt{35 + 5}}{7 - 5} = \frac{2 - \sqrt{40}}{2}$ س ← ٧

ب) نها $\frac{128 - \sqrt{16}}{16 - 5} = \frac{128 - 4}{11} = \frac{124}{11}$ س ← ١٦

أ) نها $\frac{625 - 5}{5 + 5} = \frac{620}{10} = 62$ س ← ٥

تفكير إبداعي:

إذا كان نها $\frac{64 - 5}{2 - 5} = \frac{59}{-3} = -\frac{59}{3}$ فما قيمة: ن ، ل



تمارين ٢ - ٣



أكمل ما يأتي:

٣) نها $\frac{2 - 5}{5} = \frac{-3}{5}$ س ← ٥

٢) نها $\frac{3 - 5}{1 + 5} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ س ← ١

١) نها $\frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ س ← ٢

٦) نها $\frac{2 - \sqrt{36}}{2 - 5} = \frac{2 - 6}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ س ← ٢

٥) نها $\frac{0 - 5}{1 - 5} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$ س ← ١

٤) نها $\frac{4 - 5}{2 - 5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ س ← ٢

٨) نها $\frac{1 - 2}{3 - 2} = \frac{-1}{1} = -1$ س ← ٢

٧) نها $\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 4} = \frac{\frac{2}{3}}{-3} = -\frac{2}{9}$ س ← ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٩) نها $\frac{1 - 3}{1 + 5} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ تساوى

٥ ليس للدالة نهاية

ج ٣

ب ٢

أ ٣

١٠. نها $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ تساوى
 أ $\frac{\pi}{2}$ ب $\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{2}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية
١١. نها $\frac{\sqrt{1-\text{س}}}{16-\text{س}}$ تساوى:
 أ صفر ب $\frac{1}{2}$ ج ١ د ليس للدالة نهاية
١٢. نها $\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ تساوى
 أ $\frac{\pi}{4}$ ب ١ ج $\frac{4}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية
١٣. نها $\frac{\text{س}^{\circ}-243}{\text{س}^3-27}$ تساوى
 أ ٠ ب $\frac{5}{3}$ ج ١٥ د ٩
١٤. نها $\frac{\text{س}^2-14}{\text{س}^2-2}$ لها وجود فإن ا تساوى:
 أ ١- ب ١ ج ٢ د ٤
١٥. نها $\frac{0}{\text{س}^2(2-\text{س})}$ تساوى:
 أ $\frac{0}{2}$ ب صفر ج ٥ د ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

١٦. نها $\frac{(\text{س}^2-3\text{س}+2)}{\text{س}^3}$
 ١٧. نها $\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^3-3}$
 ١٨. نها $\frac{(\text{س}^2-\text{جاس})}{\frac{\pi}{2}-\text{س}}$
١٩. نها $\frac{\text{جتا } 2\text{س}}{\pi-\text{س}}$
 ٢٠. نها $\frac{1+\text{س}}{1+\text{س}^2}$
 ٢١. نها $\frac{\text{س}-9}{\text{س}^2-81}$
٢٢. نها $\frac{\text{س}^2-7\text{س}+10}{\text{س}^2-2\text{س}}$
 ٢٣. نها $\frac{\text{س}^2+6\text{س}+5}{\text{س}^2-3\text{س}-4}$
 ٢٤. نها $\frac{\text{س}+\sqrt{1-\text{س}}}{9-\text{س}}$
٢٥. نها $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\text{س}+2}}{\text{س}}$
 ٢٦. نها $\frac{2+\text{س}}{16-\text{س}^2}$
 ٢٧. نها $\frac{(\frac{2}{\text{س}}+\frac{\text{س}-2}{1-\text{س}})}{\text{س}}$
٢٨. نها $\frac{\text{س}^3+3\text{س}^2-12\text{س}+4}{\text{س}^2-4\text{س}}$
 ٢٩. نها $\frac{\text{س}^3-4\text{س}^2-\text{س}+4}{\text{س}^2-7\text{س}-4}$
 ٣٠. نها $\frac{\text{س}^2-9}{\text{س}^3-2\text{س}^2+2\text{س}-10}$
٣١. نها $\frac{\text{س}^{\circ}-32}{\text{س}^2-2}$
 ٣٢. نها $\frac{\text{س}^{\circ}-(16)^2}{\text{س}^2-2}$
 ٣٣. نها $\frac{\sqrt{1-\text{س}}}{1-\text{س}}$
٣٤. نها $\frac{\text{س}^9-512}{\text{س}^2-2}$
 ٣٥. نها $\frac{\text{س}^7-5\sqrt{125}}{\text{س}^4-250}$
 ٣٦. نها $\frac{\sqrt{3-\text{س}}}{81-\text{س}}$

۳۷

س ۷-۱۲۸
س ۵-۳۲

نہا
س ۲

۳۸ (س-۵) ۱-۷
س-۷

۳۹) $\frac{2 - 25 + \sqrt{\quad}}{7 - \text{س}}$ نہا
 $\text{س} \leftarrow 7$

۴۰  نہا
س ← ۲

٤١ نہا (س- ٢٢ھ) ١٧- ١٧ھ
٥١ھ

۴۲) نہا
س ← ۳
س ← ۲۴۳
س ← ۸۱

٤٣ نهـ
 $\frac{11 - 4(5 + 3)}{6}$

(۴۴)
 نہا
 س ← ۱
 $\frac{\sqrt{3-8+2\text{س}}}{1+\text{س}}$

٤٥) نہا
 $\frac{2 - \sqrt{7 + 3s}}{3 + s}$ س ← ٣

$$\frac{2 - 1 + \sqrt{s}}{3 - 6 + \sqrt{s}} \quad \text{نہا} \quad \text{س} \leftarrow 3 \quad (46)$$

$$\frac{\text{س}^2 - \text{س} - 2}{\text{س} + 1} \quad \text{نہا} \quad \text{س} \leftarrow 1 \quad (47)$$

۴۸ نہا
س ← ۰

۴۹) $\left(\frac{3}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right)$ نہا
س ← ۱

50. نہا

$$\frac{\text{س}^2 + 4\text{س} + 4}{\text{س}^3 + \text{س}^2 - 8\text{س} - 12}$$

51. نہا
س ← 4

نشاط



٥٢ **الربط بالحجم** صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤ سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها ٥ سم.

أولاً: ارسم شكلاً توضيحياً للعبة.
ثانياً: أثبت أن حجم اللعبة يعطى بالعلاقة $C = S(24 - 2S)$
ثالثاً: أوجد حجم اللعبة عندما $S = 4$ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما $S \leftarrow 4$ مستخدماً الجدول التالي:

0	٤,٥	٤,١	→	٤	←	٣,٩	٣,٥	٣	س
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	→	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	←	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	ع

رابعاً: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند $s = 4$ **تفكير إبداعي:**

۵۳) إذا كان نهـا $\frac{د(س) - ۵}{س - ۲} = ۱$ فأوجد: نهـا $\frac{د(س)}{س - ۲}$

٥٤) إذا كان نهـا $\frac{د(س)}{س} = ٥$ فأوجد:

ب نہا
س ← ۰

ا نہا د (س)
س ←

٥٥ **الربط بالتجارة:** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة $D(s) = 2, 0, s + 40, s + 150$. أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبري.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

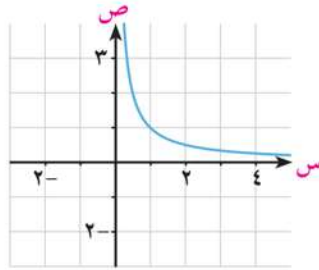
- نهاية دالة عند اللانهاية.
- Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

نحتاج في كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow \infty$ والنشاط التالي يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب في رسم الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$.
حيث: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$.
ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم x الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟
من الشكل المرسوم نلاحظ أن:

كلما زادت قيم x واقتربت من ما لانهاية اقتربت قيم $f(x)$ من عدد محدد.
أكمل الجدول التالي لإيجاد العدد الذي تقترب منه $f(x)$ (س)

س	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	س $\rightarrow \infty$
د(س)	٠,١	٠,٠١				س $\rightarrow ?$

تعلم

Limit of a Function at Infinity

نهاية دالة عند اللانهاية

من النشاط السابق نجد أنه كلما اقتربت x من ما لانهاية اقتربت قيم $f(x)$ من الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \{ \text{حيث } \exists \epsilon > 0, \text{ ثابت} \}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

قواعد أساسية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{حيث } x = \text{ثابت}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{إذا كان } n \text{ عددًا موجبًا فإن } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند $x \rightarrow \infty$ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع $x \rightarrow \infty$ بدلًا من $x \rightarrow a$

مثال

١ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s} \right)$ نها $\infty \leftarrow s$

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4 \right)$ نها $\infty \leftarrow s$

ثم تحقق من ذلك بيانيًا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} 3 + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 3 + 0 = 3$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s} \right) = 3$

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4 \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s} - \lim_{s \rightarrow \infty} 4 = 0 - 4 = -4$

$3 - 4 = -1 \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0 \quad \therefore -4 = 0 - 4$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4 \right) = -4$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{0}{s} \right)$ نها $\infty \leftarrow s$

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(0 + \frac{2}{s} \right)$ نها $\infty \leftarrow s$

مثال

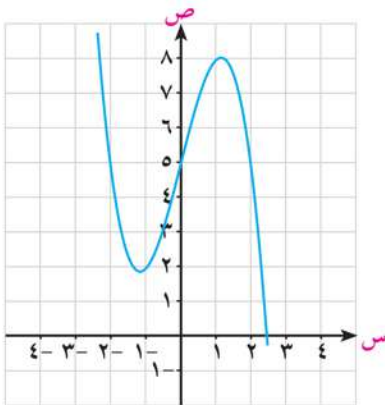
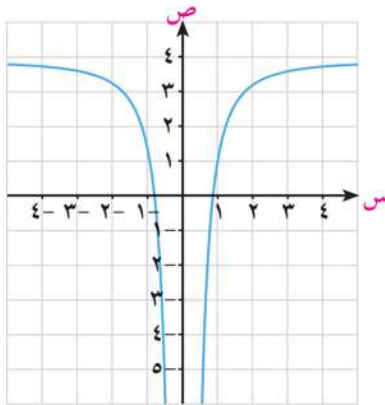
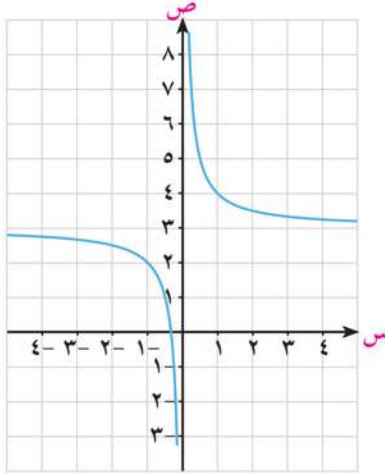
٢ أوجد: نها $\infty \leftarrow s$ $(5 + 3s)$

الحل

نها $\infty \leftarrow s$ $\left(\frac{0}{s} + 1 - \frac{4}{s} \right)$

$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{0}{s} + 1 - \frac{4}{s} \right) = 0 + 1 - 0 = 1$

$\infty - \infty = 1 - 0 = 1$



٩ حاول أن تحل

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ نها (س) $\frac{2+7}{2}$ س $\leftarrow \infty$

ب نها (س) $\frac{3-4}{3}$ س $\leftarrow \infty$

مثال

٣ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

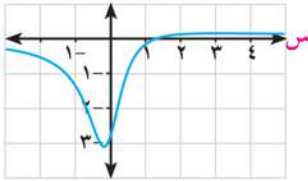
أ نها (س) $\frac{3-2}{1+3}$ س $\leftarrow \infty$

ب نها (س) $\frac{3-2}{1+3}$ س $\leftarrow \infty$

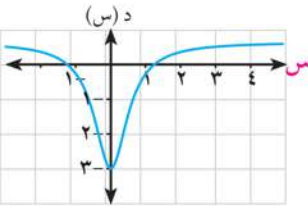
ج نها (س) $\frac{3-2}{1+3}$ س $\leftarrow \infty$

الحل

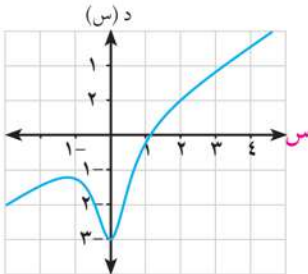
في كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على س^٢ (أعلى قوة للمتغير س في المقام).



أ نها (س) $\frac{3-2}{1+3}$ س $\leftarrow \infty$ = $\frac{0-0}{0+3} = \frac{(\frac{3}{\text{س}} - \frac{2}{\text{س}})}{(\frac{1}{\text{س}} + 3)}$ نها (س) $\leftarrow \infty$



ب نها (س) $\frac{3-2}{1+3}$ س $\leftarrow \infty$ = $\frac{(\frac{3}{\text{س}} - 2)}{(\frac{1}{\text{س}} + 3)}$ نها (س) $\leftarrow \infty$



ج نها (س) $\frac{3-2}{1+3}$ س $\leftarrow \infty$ = $\frac{(\frac{3}{\text{س}} - 2)}{(\frac{1}{\text{س}} + 3)}$ نها (س) $\leftarrow \infty$

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد نها (س) حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
- النهاية تساوى صفراً إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.
- النهاية تعطى $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.
- يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولا تعتبر طريقة حل.

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد:

أ نها (س) $\frac{1+3-2}{2}$ س $\leftarrow \infty$

ب نها (س) $\frac{5-3}{2-3}$ س $\leftarrow \infty$

ج نها (س) $\frac{1+3-2}{2-3}$ س $\leftarrow \infty$

مثال

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$ نها

الحل

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$ نها

$\therefore s \rightarrow \infty$

$\therefore s < 0$ أي أن $|s| = s$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$ نها

بقسمة كل من البسط والمقام على s^3

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 - 2)}{(s^3 + 1)} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = 1$

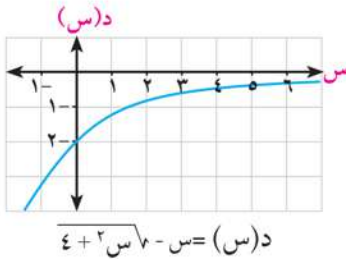
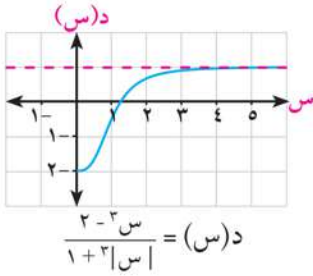
ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 - 2\sqrt{s} + 4)$ نها

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 - 2\sqrt{s} + 4)}{(s^2 - 2\sqrt{s} + 4)} \times \frac{(s^2 - 2\sqrt{s} + 4)}{1}$ نها

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 2\sqrt{s} + 4}{s^2 - 2\sqrt{s} + 4}$ نها

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4 - 2\sqrt{s} + s^2}{s^2 - 2\sqrt{s} + 4}$ نها

$\therefore s \rightarrow \infty$



$\therefore s < 0$ أي أن $|s| = \sqrt[3]{s} = s$ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[3]{s}$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 2\sqrt{s} + 4}{s^2 - 2\sqrt{s} + 4} = \frac{4 - 2\sqrt{s} + s^2}{s^2 - 2\sqrt{s} + 4}$ نها

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 - 5s^2 - 3\sqrt{s})$ نها

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 - 5s^2 - 3\sqrt{s}}{25 + 4s^2}$ نها



تمارين الدرس ٣ - ٣



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $(\frac{3}{s} + 1)$ $\infty \leftarrow s$
 ٢) نها $(\frac{3}{s} - 2)$ $\infty \leftarrow s$
 ٣) نها $(7-)$ $\infty \leftarrow s$
 ٤) نها $(s^2 - 3)$ $\infty \leftarrow s$
 ٥) نها $\frac{1+s^2}{s}$ $\infty \leftarrow s$
 ٦) نها $\frac{s^3 - 5}{1+s^2}$ $\infty \leftarrow s$
 ٧) نها $\frac{s^3 + 5}{s^3 - 5}$ $\infty \leftarrow s$
 ٨) نها $\frac{s^3}{1-s^2}$ $\infty \leftarrow s$
 ٩) نها $(\frac{4}{s} + \frac{7}{s} - 3)$ $\infty \leftarrow s$
 ١٠) نها $(s - \sqrt{1+s^2})$ $\infty \leftarrow s$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١١) نها $\frac{s^6}{s^3 + s^2}$ تساوى
 أ) صفر ب) ٢ ج) ٣ د) ٥
 ١٢) نها $\sqrt{1 + \frac{4}{s}}$ $\infty \leftarrow s$
 أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٥
 ١٣) نها $\frac{s+3}{s^2 - 2}$ $\infty \leftarrow s$
 أ) صفر ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) ٥
 ١٤) نها $\frac{s+1}{s^2 - 1}$ $\infty \leftarrow s$
 أ) صفر ب) $\frac{1}{2}$ ج) ١ د) ٥
 ١٥) نها $\sqrt{\frac{s+1}{1-s^4}}$ $\infty \leftarrow s$
 أ) ١- ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) ١

أوجد:

- ١٦) نها $\frac{3}{s^2}$ $\infty \leftarrow s$
 ١٧) نها $(s^3 + 5s^2 + 1)$ $\infty \leftarrow s$
 ١٨) نها $\frac{s^7 - 2}{s^3 + 2}$ $\infty \leftarrow s$
 ١٩) نها $\frac{s^2}{s^3 + 3}$ $\infty \leftarrow s$
 ٢٠) نها $\frac{s^4}{s^3 + 2}$ $\infty \leftarrow s$
 ٢١) نها $\frac{s^6 - 5s^3 - 2}{s^2 + s + 4}$ $\infty \leftarrow s$

٢٢) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4s + 1}$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٣) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 - 2}{s^3 + 4s^2 + 1}$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٤) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 1}{s^4 - 5s - 1}$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٥) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 6}{s^2(1 - s)}$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٦) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^2}{s^2 + 3} + 7 \right)$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٧) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s^3} - \frac{5}{s^2} \right)$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٨) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^3}{s^2(3 - s)} + \frac{s}{1 + s^2} \right)$ نها $s \rightarrow \infty$

٢٩) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-s}{s^2 + 4\sqrt{s}}$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٠) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 - 4s + 5}{s^2(1 - s^3)}$ نها $s \rightarrow \infty$

٣١) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\sqrt{s^4 - 2s^2 + 1} - \sqrt{s^5 + 4s^2 + 7} \right)$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٢) $\lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\sqrt{s^4 + 2s^2 + 1} - 2 \right)$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٤) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s^3 - 8}$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٥) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 - 4}{s^2 + 9}$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٦) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 - 3)^2(2 + s)}{s^3(s^2 + 7)}$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٧) إذا كان $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\sqrt{s^3 + 3s^2 + 5s} - 2s \right) = 3$ فما قيمة كل من أ، ب.

٣٨) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + 5}{s^2 - 3s + 1}$ نها $s \rightarrow \infty$

٣٩) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 1 - s^3 + s^2}{s^4 - s^3 + s^2 - 1}$ نها $s \rightarrow \infty$

٤٠) تفكير إبداعي

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة الكارت نصف جنيه، فكانت التكلفة الإجمالية ج = $\frac{1}{p} s + 5000$ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

ب) ١٠٠٠٠٠ كارت

أ) ١٠٠٠٠ كارت

٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لا نهائيًا من الكروت.



سوف تتعلم

نهايات بعض الدوال المثلثية.



المصطلحات الأساسية

دالة مثلثية

Trigonometric Function

نهاية دالة مثلثية

Limit of a Trigonometric Function

نشاط



إذا كانت دالة حيث $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s} = 0$ والمطلوب دراسة قيم الدالة عندما $s \rightarrow 0$ حيث s قياس الزاوية بالتقدير الدائري
كون جدولاً لدراسة سلوك الدالة $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s} = 0$ عندما تقترب s من الصفر مستخدماً التقدير الدائري

س	١	٠,١	٠,٠١	←	٠	→	٠,٠١	٠,١	١-
$\frac{\cos s}{s}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٩٩٨	←		→		٠,٩٩٨٣	٠,٨٤١٥

من الجدول السابق استنتج $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s} = 0$ هنا

تعلم



إذا كانت s قياس الزاوية بالتقدير الدائري فإن:

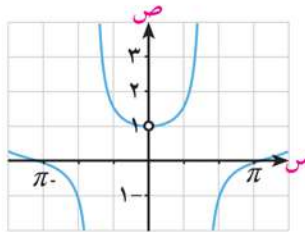
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s} = 1 \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{s} = 1$$



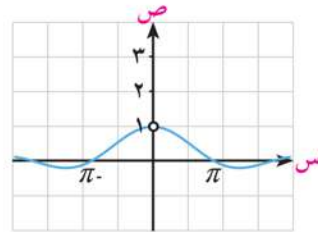
الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

برامج رسومية



$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s} = 0$$



$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{s} = 1$$

تعبير شفهي

إذا كانت s قياس الزاوية بالتقدير الستيني فهل يمكن إيجاد $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s}$ هنا
فسر إجابتك.

$$\text{نتيجة ١: } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\cos s}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s}{s} = 1$$

أضف إلى معلوماتك

يوجد لهذه النظرية أكثر من برهان يمكن الاطلاع عليه من الرابط:

<http://math.stackexchange.com/question/75130>

مثال

١) أ) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^3}{s} = 3$ نها $\leftarrow$ س
 ب) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2}{s^7} = \frac{2}{s^5}$ نها $\leftarrow$ س
 ج) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^2 \text{ جتا } s}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s}{s} = 5$ نها $\leftarrow$ س

٢) حاول أن تحل

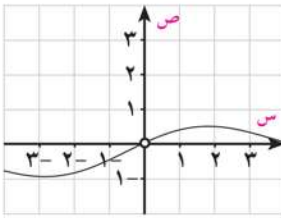
أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2}{s^3}$ نها $\leftarrow$ س
 ب) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{4s}{s^5}$ نها $\leftarrow$ س
 ج) $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\pi s}{s-1}$ نها $\leftarrow$ س

نتيجة ٢

أ) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s} = \text{صفر}$ نها $\leftarrow$ س

استعن بمدرسك في برهان نتيجة (٢)



مثال

٢) أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s}$ نها $\leftarrow$ س
 ب) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2}$ نها $\leftarrow$ س

الحل

أ) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s} \times \frac{s}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2} \times s = 1 \times 0 = 0$ نها $\leftarrow$ س

ب) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2} \times \frac{s + 1}{s + 1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2 + s}$ نها $\leftarrow$ س

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2 + s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2(1 + \frac{1}{s})} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{1 + 1} \times 2(1) = \frac{1}{2}$ نها $\leftarrow$ س

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2 + s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2 + s} \times \frac{s}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s} \times \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{1 + 1} \times 2(1) = \frac{1}{2}$ نها $\leftarrow$ س

٢) حاول أن تحل

أوجد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{6s^2 \text{ قتا } s^2}{s}$ نها $\leftarrow$ س
 ب) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s^2}$ نها $\leftarrow$ س

تذكر أن

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \text{جتا } s}{s} = 1$

مثال

٣ أوجد النهايات الآتية:

ا
نہا
س ← ۰

ج
نہا
س ← ۰

س^۲ - س + جا س
س^۲
جا (۱ - جتا س)
۱ - جتا س

الحل

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\text{حاس}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{س}^2}{\text{س}} \right)$$

ج. نہا
س ← ۰

اعتبر ۱ - جتا س = ص

عندما س ← . نجد أن ص ← .

$$\therefore \text{نہا} = \frac{\text{جا (۱-جتاس)}}{۱ - \text{جتاس}}$$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد النهايات الآتية:

۱ نہا جا ۳ س
س ۰ ۵ س ۲-۴ س

ج نہا
س ← ۰

جا ۲ س
س ۳

$$\begin{array}{r} \text{ب} \quad \text{نہا} \\ \text{س} + \text{س جتا س} \\ \text{جا س جتا س} \\ \text{د} \quad \text{نہا} \\ \text{س} + \text{س} \\ \text{جا } 3^2 \text{ س} \\ \text{س } 5 \end{array}$$

ب نہا س ← ۰ $\frac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ بقسمۃ کل من البسط والمقام علی س

$$= \frac{\text{نہا}}{\text{س} \leftarrow} \times \frac{\text{جاس} + 1}{\text{جاس} \times \text{جاس}}$$

$$\frac{\text{نہا} (1 + \text{جتاں})}{\text{نہا} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \text{جتاں}} =$$

$$۲ = \frac{۱+۱}{۱} = \frac{۰\text{ حتما} + ۱}{۰\text{ حتما} \times ۱} =$$

د نہا
س ← ۰

$$\frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{\text{نہا}}{\text{س} \leftarrow \text{جا ۳ س}} \right) \frac{۲}{\text{س}}$$

$$r(r) \times \frac{1}{\rho} =$$

$$\frac{p}{q} =$$

ب نہا جا (س-۱)
س ← ۱ س + ۲، س - ۲

د نہا س جا ۲ س + جا ۲ س
س ۱ طا ۲ س + س ۲



تمارين ٣ - ٤



أكمل ما يأتي:

- ١) نها جتا ٣ س =
س ← ٠
- ٢) نها جا ٢ س =
س ← $\frac{\pi}{4}$
- ٣) نها ظا س =
س ← ٠
- ٤) نها جا ٧ س =
س ← ٠
- ٥) نها ظا ٣ س =
س ← ٠
- ٦) نها جا (٥ - س) =
س ← ٥
- ٧) نها جا π س =
س ← ٠
- ٨) نها جا ٢ س =
س ← ٠
- ٩) نها ٢ + ٣ س =
س ← ٠
- ١٠) نها ١ - جتا س =
س ← ٠
- ١١) نها ٢ س =
س ← ٠
- ١٢) نها ٣ س قتا ٢ س =
س ← ٠
- ١٣) نها جا ٢ س =
س ← ٠
- ١٤) نها جا ٣ س ظا ٣ س =
س ← ٠

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١٥) نها جا ٣ س تساوي
س ← ٠
- أ) صفر
ب) $\frac{1}{3}$
ج) ١
د) ٣
- ١٦) نها ظا ٤ س تساوي
س ← ٠
- أ) صفر
ب) $\frac{4}{5}$
ج) ١
د) $\frac{5}{4}$
- ١٧) نها جا ٢ س + ٣ ظا س تساوي
س ← ٠
- أ) ١
ب) $\frac{5}{6}$
ج) $\frac{6}{5}$
د) ٢
- ١٨) نها س جا ٢ س تساوي
س ← ٠
- أ) $\frac{4}{9}$
ب) $\frac{1}{3}$
ج) $\frac{2}{3}$
د) $\frac{4}{3}$
- ١٩) نها جا $\frac{1}{3}$ س تساوي
س ← ٠
- أ) $\frac{1}{6}$
ب) $\frac{3}{8}$
ج) $\frac{1}{2}$
د) $\frac{2}{3}$
- ٢٠) نها جا س حيث س بالتقدير الستيني
س ← ٠
- أ) ١
ب) $\frac{\pi}{180}$
ج) $\frac{180}{\pi}$
د) π

أوجد:

٢١) نهـا $\frac{\text{جا س}}{\text{س}^5}$ س ← ٠

٢٣) نهـا $\frac{\text{ظا}^2 \text{س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٥) نهـا $\frac{\text{جا س} (١ - \text{جتا س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٢٧) نهـا $\frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٩) نهـا $\frac{(١ - \text{جتا}^2 \text{س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣١) نهـا $\frac{\text{س} - \text{س} \text{جتا س}}{\text{جا}^3 \text{س}}$ س ← ٠

٣٣) نهـا $\frac{\text{س} \text{جتا} (-\text{س}^2 + ١)}{\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}}}$ س ← ٠

٣٥) نهـا $\frac{(١ + \text{جتا س}) \times ١ - \text{جتا س}}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٧) نهـا $\frac{\text{جا}^5 \text{س} + \text{جا}^3 \text{س} + \text{جا}^5 \text{س}}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٩) نهـا $\frac{\text{س}^2 + \text{س}^3 \text{جا س} + \text{س}^5 \text{جا س}}{\text{س}^2 - \text{ظا}^3 \text{س}}$ س ← ٠

٤١) نهـا $\frac{\text{ظا}^2 \text{س} + \text{س}^3 \text{جا س}}{\text{س}^2 \text{جا}^3 \text{س} - \text{ظا}^5 \text{س}}$ س ← ٠

٤٣) نهـا $\frac{١ - \text{جتا}^3 \text{س}}{\text{جتا}^2 \text{س} - ١}$ س ← ٠

٤٥) نهـا $\frac{\text{ظا}^3 \text{س}^2 + \text{جا}^2 \text{س}^5}{\text{س}^3}$ س ← ٠

٤٧) نهـا $\frac{\text{جا} (\text{جا س})}{\text{س}^5 \text{جا س}}$ س ← ٠

٤٩) نهـا $\frac{\text{س} (\text{قتا}^2 \text{س} - \text{ظتا}^3 \text{س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٢٢) نهـا $\frac{\text{جا س}}{\text{ظا س}}$ س ← ٠

٢٤) نهـا $\frac{٣ (١ - \text{جتا س})}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٦) نهـا $\frac{\text{جتا س} \text{ظا س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٨) نهـا $\frac{\text{ظا}^2 \text{س}^3}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٠) نهـا $\frac{\text{جتا س} - ١}{\text{جا س}}$ س ← ٠

٣٢) نهـا $\frac{١ - \text{ظا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ س ← ٠

٣٤) نهـا $\frac{\text{س}^2 - ٣ \text{جا س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٣٦) نهـا $\frac{\text{ظا}^3 \text{س}^2 + \text{جا}^2 \text{س}^5}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٨) نهـا $\frac{(٢ \text{س}^2 + \text{جا}^3 \text{س} - ٤)}{\text{س}^2 + \text{ظا}^6 \text{س}}$ س ← ٠

٤٠) نهـا $\frac{١ - \text{جتا س} + \text{جا س}}{١ - \text{جتا س} - \text{جا س}}$ س ← ٠

٤٢) نهـا $\frac{\text{س} \text{ظا}^2 \text{س}}{\text{س}^2 + \text{جا}^3 \text{س}}$ س ← ٠

٤٤) نهـا $\frac{٢ - \text{جتا}^3 \text{س} - \text{جتا}^4 \text{س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٤٦) نهـا $\frac{١ - \text{جتا}^3 \text{س}}{\text{جتا}^5 \text{س} - ١}$ س ← ٠

٤٨) نهـا $\frac{\text{س}}{\text{جتا} (\frac{\pi}{4} - \text{س})}$ س ← ٠

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

Existence of Limit of a Function at a Point

فكر و ناقش

شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د حيث

$$\left. \begin{array}{l} \text{لكل } s < 2 \\ \text{لكل } s > 2 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} 1 - s \\ s - 3 \end{array}$$

أوجد نها $d(s)$ (النهاية اليمنى)

أوجد نها $d(s)$ (النهاية اليسرى)

هل نها $d(s)$ = نها $d(s)$

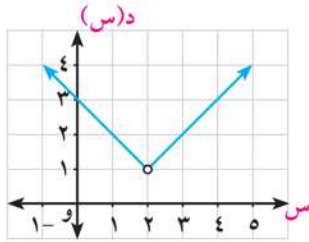
شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

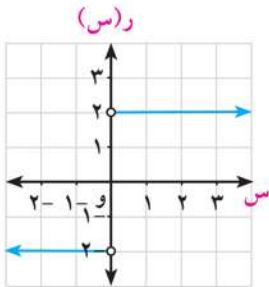
$$\left. \begin{array}{l} \text{لكل } s < 0 \\ \text{لكل } s > 0 \end{array} \right\} r(s) = \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}$$

أوجد نها $r(s)$

أوجد نها $r(s)$ هل نها $r(s)$ = نها $r(s)$



شكل (١)



شكل (٢)

Limit of a Function نهاية الدالة

تعلم

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د تساوى ل عندما س تؤول إلى أ إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث

وتكتب رمزياً:

نها $d(s) = ل$ إذا وفقط إذا كان: د $(+) = د (-) = ل$

حيث: د $(+) = نها د(s)$ «النهاية اليمنى للدالة»

د $(-) = نها د(s)$ «النهاية اليسرى للدالة»

سوف تتعلم

- النهاية اليمنى للدالة عند نقطة.
- النهاية اليسرى للدالة عند نقطة.
- بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- Right Limit نهاية يمنية
- Left Limit نهاية يسرى

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مثال توضيحي

أ لاحظ في شكل (١) أن:

$$١- = (+١) د , ٣ = (-١) د$$

$$\therefore د(-١) \neq د(+١)$$

∴ لا يوجد نهاية للدالة د عند س ← ١ ∴ نها د(س) غير موجودة
س ← ١

ب لاحظ في شكل (٢) أن:

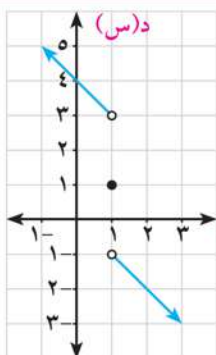
$$٣ = (-١) د , ٣ = (+١) د$$

$$\therefore د(-١) = د(+١) = ٣$$

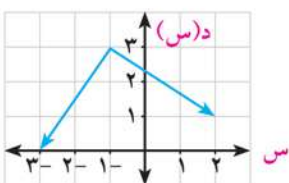
$$\therefore \text{نها د(س)} = ٣$$

٩ حاول أن تحل

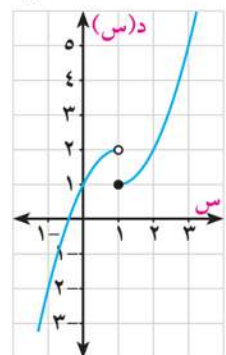
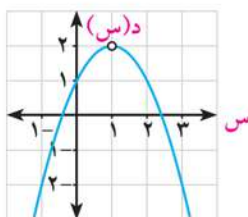
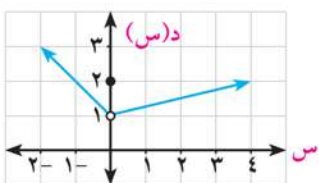
١ ادرس الشكل البياني لكل دالة من الدوال الآتية ثم أوجد:



شكل (١)



شكل (٢)



أ د (-٠)

ب د (+٠)

ج نها د(س)
س ← ٠

أ د (-١)

ب د (+١)

ج نها د(س)
س ← ١

أ د (-١)

ب د (+١)

ج نها د(س)
س ← ١

مثال

١ ابحث وجود نهاية الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س} | \text{س} - ١ \\ ٢ - \frac{| \text{س} |}{\text{س}} \end{cases}$

الحل

بإعادة تعريف الدالة

$$د(س) = \begin{cases} \text{س} - \text{س} - ١ & \text{عندما } \text{س} > ٠ \\ ٢ - \frac{\text{س}}{\text{س}} & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\therefore د(-٠) = \text{نها د(س)} = \text{نها } (\text{س} - \text{س} - ١) = \text{نها } \text{س} - ١ = -١$$

$$\therefore \text{نها د(س)} = -١$$

$$\therefore د(-٠) = د(+٠) = -١$$

$$\therefore د(+٠) = \text{نها } -١ = -١$$

٩ حاول أن تحل

٢ إذا كان د(س) = $\left\{ \begin{array}{l} |س - ٣| \text{ س} \neq ٣ \\ ٢ \text{ س} = ٣ \end{array} \right.$

فأبحث وجود نها د(س)
س ← ٣

مثال

٢ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث: د(س) = $\left\{ \begin{array}{l} \frac{س^٢ + ٢س}{س} \text{ لكل س} > ٠ \\ \frac{س + ٢س}{س^٢ - ٣س} \text{ لكل س} < ٠ \end{array} \right.$ عندما س ← ٠

الحل

د(٠-) = نها $\frac{س^٢ + ٢س}{س}$ س ← ٠- = نها $\frac{س(س + ٢)}{س}$ س ← ٠- = نها (س + ٢) س ← ٠- = ٢
د(٠+) = نها $\frac{س + ٢س}{س^٢ - ٣س}$ س ← ٠+ = نها $\frac{س(١ + ٢س)}{س(س - ٣)}$ س ← ٠+ = نها $\frac{١ + ٢س}{س - ٣}$ س ← ٠+ = $\frac{٢ + ١}{٢ - ٣} = ٣$

∴ د(٠-) ≠ د(٠+) ∴ نها د(س) غير موجودة
س ← ٠

٩ حاول أن تحل

٣ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← π حيث د(س) = $\left\{ \begin{array}{l} \frac{جاس}{س - \pi} \text{ لكل س} > \pi \\ \frac{جاس}{س - \pi} \text{ لكل س} < \pi \end{array} \right.$

مثال

٣ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ١ حيث: د(س) = $\sqrt{١ - س}$

الحل

∴ د(س) معرفة لجميع قيم س - ١ ≤ ٠ ∴ مجال الدالة د(س) = [١، ∞)



∴ د(٠+) = نها د(س) = نها $\sqrt{١ - س}$ س ← ٠+ = نها $\sqrt{١ - س}$ س ← ٠+ = ١ - صفر

د(٠-) غير معرفة لأن الدالة غير معرفة على يسار ١
∴ د(س) ليس لها نهاية عندما س ← ١

٩ حاول أن تحل

٤ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣ حيث د(س) = $\sqrt{٣ - س}$

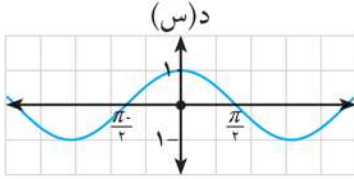


تمارين ٣ - ٥



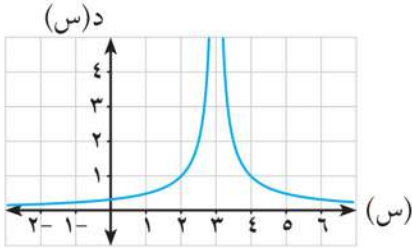
أكمل ما يأتي:

١ من الشكل البياني المقابل:



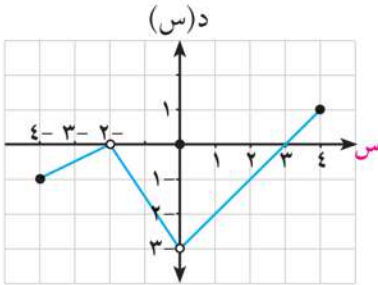
- أ نها $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$
 ب نها $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

٢ من الشكل البياني المقابل:



- أ نها $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$
 ب نها $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

٣ من الشكل البياني المقابل:



- أ نها $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$
 ب نها $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$
 ج نها $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$
 د نها $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$
 ه نها $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$
 نها $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) =$

٤ الدالة معرفة على E حيث $D(f) = \{x \mid x \geq 2\}$

- أ نها $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$
 ب نها $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

٥ الدالة معرفة على E حيث $D(f) = \{x \mid x \leq -3\}$

- أ نها $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) =$
 ب نها $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) =$

٦ إذا كانت $D(f) = \{x \mid x \leq 1\}$ لكل $x \leq 1$

- أ نها $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
 ب نها $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

لكل $x \leq 1$

لكل $x > 1$

- ب نها $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
 أ نها $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

لكل $x < 1$

لكل $x \geq 1$

- ب نها $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
 أ نها $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

- ب نها $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
 أ نها $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية :

٧ نهـا د(س) حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} 2 \text{ س} \\ 2 \leftarrow \text{س} \end{array} \right\}$ لكل س $2 >$
لـكـل س $2 \leq$

٨ نهـا د(س) حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} 1 + 2 \text{ س} \\ 3 \leftarrow \text{س} \end{array} \right\}$ لكل س $3 >$
لـكـل س $3 \leq$

٩ نهـا د(س) حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} 2 + 2 \text{ س} \\ 1 + 3 \text{ س} \end{array} \right\}$ لكل س $0 >$
لـكـل س $0 \leq$

١٠ نهـا د(س) حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} 1 + 2 \text{ س} \\ 1 - \text{س} \end{array} \right\}$ لكل س $1 - >$
لـكـل س $1 - <$

١١ أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية عندما س $\leftarrow 1$ حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{2(1-\text{س})}{|1-\text{س}|} \\ 6\text{س} - 3\text{م} \end{array} \right\}$ لكل س $1 >$
لـكـل س $1 <$

١٢ ابـحـث وـجـود نـهـايـة لـلـدـالـة د عـنـدـمـا س $\leftarrow 1$ حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{2 \text{ جـا س}}{\pi - \text{س}} \\ 1 + \text{جـتا س} \end{array} \right\}$ لكل س $\pi >$
لـكـل س $\pi <$

عندما س $\leftarrow \pi$

١٣ أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان نهـا د(س) = $\left. \begin{array}{l} 7 = \text{د(س)}, 2 \text{ س} + 3 \text{ م} \\ 5 \text{ س} + \text{ك} \end{array} \right\}$ لكل س $2 >$
لـكـل س $2 <$

١٤ أوجد قيمة ك التي تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س $\leftarrow 1 -$ حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} 2 \text{ س} + \text{ك} \\ 4 + \text{س} \end{array} \right\}$ لكل س $1 - >$
لـكـل س $1 - <$

١٥ ابـحـث وـجـود نـهـايـة لـلـدـالـة د عـنـدـمـا س $\leftarrow 0$ حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{5 \text{ س} + 2 \text{ ظـا س}}{6 \text{ س} + 3 \text{ جـا س}} \\ 3 \text{ جـتا س} \end{array} \right\}$ لكل س $0 <$
لـكـل س $0 >$

١٦ ابـحـث وـجـود نـهـايـة لـلـدـالـة د حـيـث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{3 \text{ س}}{3 \text{ ظـا س}} \\ 3 \text{ جـتا س} \end{array} \right\}$ لكل س $0 >$
لـكـل س $0 >$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3} >$ $\frac{\pi}{3}$

أ عندما س $\leftarrow \frac{\pi}{3}$ ب س $\leftarrow \frac{\pi}{3}$ ج س $\leftarrow 0$

١٧ ابـحـث وـجـود نـهـايـة لـلـدـالـة د(س) = $\frac{1}{2 - \text{س}}$ عندما س $\leftarrow 2$

سوف تتعلم

- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

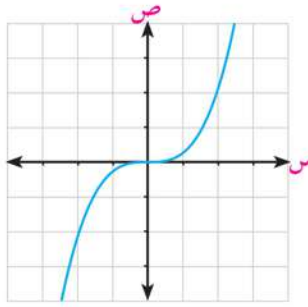
- اتصال دالة عند نقطة
- Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة على فترة
- Continuity of a Function on Interval

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

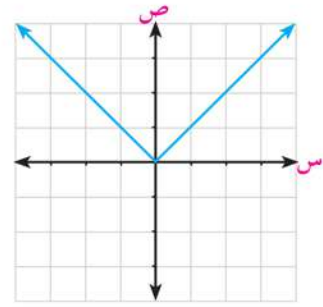
فكر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟



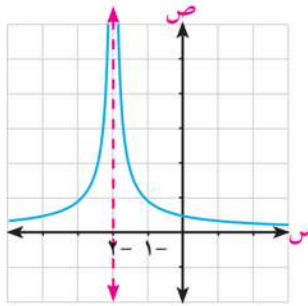
$$f(x) = x^2$$

شكل (٢)



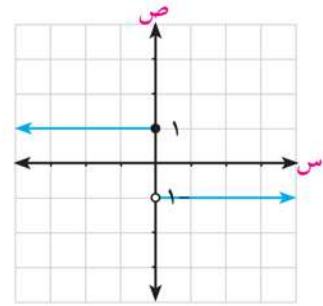
$$f(x) = |x|$$

شكل (١)



$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

شكل (٤)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{لكل } x < 1 \\ x - 1 & \text{لكل } x > 1 \end{cases}$$

شكل (٣)

في شكل (١)، (٢) نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أي نقطة.

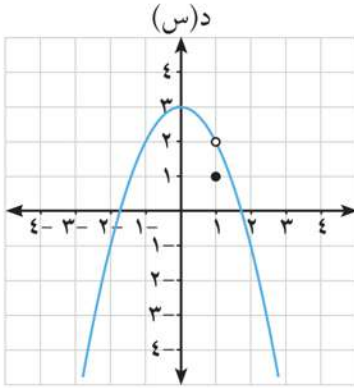
في شكل (٣) منحنى الدالة غير متصل عند $x = 1$

في شكل (٤) منحنى الدالة غير متصل عند $x = -2$

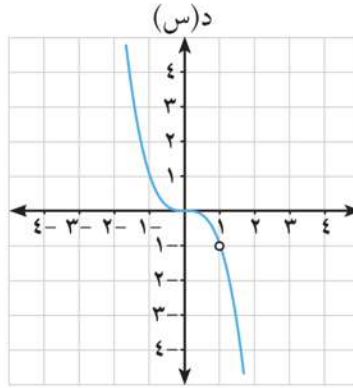
مما سبق نستنتج أن الدالة (د) تكون متصلة عند $x = a$ إذا كان منحنى الدالة لا يعاني انقطاعاً عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند $x = a$ إذا انقطع منحنىها عند هذه النقطة.

Continuity of a function at a Point

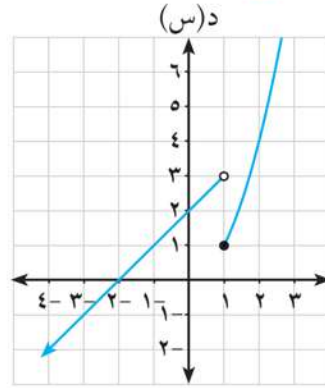
اتصال دالة عند نقطة



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد نها $f(x)$ ، $f(1)$ إن وجدت.

في الشكل (١): نها $f(x)$ عند $x=1$ ، نها $f(x)$ عند $x=1$ أي أن نها $f(x)$ غير موجودة بينما $f(1) = 1$

في الشكل (٢): نها $f(x)$ عند $x=1$ ، نها $f(x)$ عند $x=1$ أي أن نها $f(x)$ غير معرفة.

في الشكل (٣): نها $f(x)$ عند $x=1$ ، نها $f(x)$ عند $x=1$ أي أن نها $f(x)$ بينما $f(1) = 1$

أي أن: نها $f(x) \neq f(1)$

لذلك تكون الدالة f في كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند $x=1$

تكون الدالة f متصلة عندما $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معاً:

د(ا) معرفة < نها د(س) موجودة < نها د(س) = د(ا)

تعريف

مثال

بحث اتصال دالة عند نقطة

لكل $s \geq 1$
لكل $s < 1$

١) ابحث اتصال الدالة f حيث $f(x) = \begin{cases} s & \text{if } s \geq 1 \\ s+1 & \text{if } s < 1 \end{cases}$

أ) عند $s=0$ ب) عند $s=1$

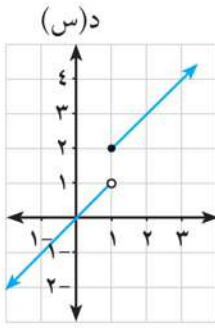
الحل

أ) بحث الاتصال عند $s=0$

د(0) = 0، نها د(س) = نها س = 0، س < 0

أي أن نها د(س) = د(0)

لذلك فإن الدالة متصلة عند $s=0$



- ب) بحث اتصال الدالة عند $s = 1$
- نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة $s = 1$ تختلف عن قاعدتها يسار تلك النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمنية ونهاية يسرى للدالة عند $s = 1$
- د(1) = نهـا_{س ← 1} = (س + 1) ، د(1) = نهـا_{س ← 1} = (س - 1) = نهـا_{س ← 1}
- أي أن: د(1) ≠ د(1) وهذا الشرط يكفي لعدم اتصال الدالة د عند $s = 1$ والشكل البياني يوضح عدم اتصال الدالة عند $s = 1$

٦ حاول أن تحل

- ١) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} 4 - س & \text{عندما } س \geq 1 \\ 2 + س & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$ عند $s = 1$

مثال

التحقق من اتصال دالة عند نقطة

- ٢) ابحث إتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

أ) د(س) = $\frac{3 + س}{2 - س}$ عند $s = 2$ ، $s = 3$ ب) د(س) = $5 - |س - 3|$ عند $s = 3$

الحل

- أ) أولاً: بحث اتصال الدالة عند $s = 2$

∴ مجال الدالة = $\mathbb{R} - \{2\}$

∴ د(س) غير متصلة عند $s = 2$

ثانياً: بحث اتصال الدالة عند $s = 3$

∴ د(3) = $\frac{3 + 3}{2 - 3} = -6$ ، ∴ نهـا_{س ← 3} = $\frac{3 + س}{2 - س} = \frac{3 + 3}{2 - 3} = -6$

∴ نهـا_{س ← 3} = د(3) = -6 ∴ د(س) متصلة عند $s = 3$

ب) بإعادة تعريف الدالة د(س) = $\begin{cases} 8 - س & \text{عندما } س \leq 3 \\ 2 + س & \text{عندما } س > 3 \end{cases}$

∴ د(3) = 5 ، ∴ د(3) = نهـا_{س ← 3} = (8 - س) = 5 ، د(3) = نهـا_{س ← 3} = (س + 2) = 5

∴ نهـا_{س ← 3} = د(3) = 5 أي أن د(3) = نهـا_{س ← 3} د(س)

لذلك فإن الدالة متصلة عند $s = 3$

٦ حاول أن تحل

- ٢) ابحث اتصال كل من الدوال لآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

أ) د(س) = $\frac{4 - س}{2 - س}$ عند $s = 1$ ، $s = 2$ ب) د(س) = $3 - |س - 2|$ عند $s = 2$

إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة

إذا كانت د(س) غير متصلة عند س = ١ وكانت نها س ← ١ د(س) لها وجود فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د حتى تصبح متصلة عند س = ١.

مثال

٣ أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س = ١

١ د(س) = $\frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$ ب د(س) = $\left. \begin{array}{l} س^٣ + ٢س، س < ١ \\ س - ٥، س > ١ \end{array} \right\}$

الحل

١ لكي تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن نها س ← ١ د(س) = د(١)

∴ نها س ← ١ د(س) = $\frac{(س - ١)(س + ٣)}{س - ١} = س + ٣$

أي أن نها س ← ١ د(س) = ٤

لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون د(س) = $\left. \begin{array}{l} س + ٣، س < ١ \\ س - ٥، س = ١ \\ س، س > ١ \end{array} \right\}$

ب لكي تكون الدالة متصلة عند س = ١، لا بد أن تكون د(١) = نها س ← ١ د(س)

∴ د(١) = (+١) = نها س ← ١ د(س) = س + ٣ = ١ + ٣ = ٤، د(١) = (-١) = نها س ← ١ د(س) = س - ٥ = ١ - ٥ = -٤

∴ د(١) ≠ د(١) لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عند س = ١

ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

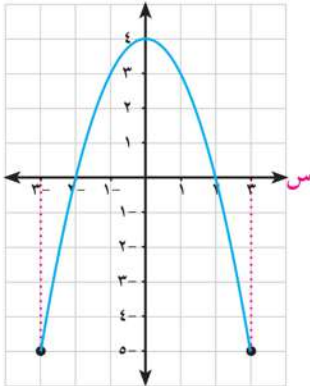
٦ حاول أن تحل

٣ أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث د(س) = $\frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٦س - ٦}{س - ٣}$

٤ بين أن د(س) = $\frac{س^٣ + ٢س^٢ - ١٥س - ٣}{س - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

ثم أوجد قيمة ه التي تجعل د(س) = $\left. \begin{array}{l} س + ١، ه \\ س - ٣، س \neq ٣ \end{array} \right\}$ عندما س ≠ ٣

متصلة عند س = ٣
د(س)



continuity of a Function on an Interval

اتصال دالة على فترة

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = س - ٤ س = ٢

في الفترة [٣، ٣-] ولكي تكون د متصلة على الفترة [٣، ٣-]

فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

أي أن: نها س ← ١ د(س) = د(١) لكل ١ ∈ [٣، ٣-]

نها س ← ٣ د(س) = د(٣-)، نها س ← ٣ د(س) = د(٣)

ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتي:

تعريف

٢

إذا كانت د معرفة على الفترة [أ، ب].

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة [أ، ب]

٢- نها د(س) = د(أ) ، نها د(س) = د(ب)
 س ← أ س ← ب

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة

١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ع أو على مجال تعريفها.

٢- الدالة الكسرية: متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

٣- دالة الجيب د(س) = جا (س) وجيب التمام د(س) = جتا س: متصلة على ع

٤- دالة الظل: د(س) = ظاس متصلة على ع - س: س = $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ، $n \in \mathbb{Z}$

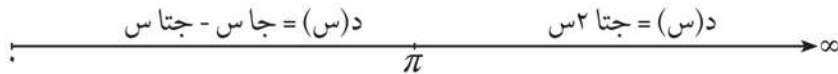
مثال



٤ ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة $[\infty, 0]$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جا س - جتا س} \\ \text{لكل } 0 \leq \text{س} \leq \pi \\ \text{لكل } \text{س} < \pi \end{array} \right\} = \text{حيث د(س)}$$

الحل



د(س) معرفة على الفترة $[\infty, 0]$

لكي نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة وأيضاً من اليمين عند الصفر.

١ د(س) = جا س - جتا س متصلة على الفترة $[\pi, 0]$

كذلك د(س) = جتا س متصلة على الفترة $[\infty, \pi]$

٢ د(٠) = جا ٠ - جتا ٠ = ١ ، نها (جا س - جتا س) = -١
 س ← ٠ س ← ٠

أي أن: د(٠) = نها د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠
 س ← ٠

٣) نبحث اتصال الدالة عندما $s = \pi$

$$د(\pi) = \pi - \text{جتا } \pi = 1$$

$$د(-\pi) = -\text{جتا } (-\pi) = 1, د(+\pi) = \text{جتا } \pi = 1$$

$$د(-\pi) = 1, د(+\pi) = 1 \text{ أي أن: } د(-\pi) = د(+\pi) = د(\pi)$$

∴ متصلة عند $s = \pi$ من (١)، (٢)، (٣) الدالة متصلة على $[-\infty, \infty]$

٤) حاول أن تحل

٥) ابحث اتصال الدالة د حيث

$$د(s) = \begin{cases} 1 + \text{جاس} & \text{س} \geq \frac{\pi}{2} \\ 2 + (s - \frac{\pi}{2})^2 & \text{س} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال

٥) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad د(s) &= s^2 - 3s + 2 \\ \text{ب} \quad د(s) &= \frac{s^2 - 4}{s + 4} \\ \text{ج} \quad د(s) &= \frac{\text{جاس} + \text{جتا } s}{s^2 - 1} \\ \text{د} \quad د(s) &= \frac{\text{ظاس}}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

الحل

$$\text{أ} \quad د(s) = s^2 - 3s + 2 \text{ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهي متصلة على } \mathbb{R}$$

$$\text{ب} \quad د(s) = \frac{s^2 - 4}{s + 4} \text{ دالة كسرية مجالها } \mathbb{R} - \{-4\}, \text{ مجموعة أصفار المقام } = \{-4\}$$

أي أن الدالة متصلة على $\mathbb{R} - \{-4\}$

$$\text{ج} \quad د(s) = \frac{\text{جاس} + \text{جتا } s}{s^2 - 1}$$

∴ جاس، جتا س متصلة على $\mathbb{R}$ ، دالة المقام $(s^2 - 1)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، أصفار المقام $= \{-1, 1\}$

∴ الدالة د متصلة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\text{د} \quad د(s) = \frac{\text{ظاس}}{s^2 + 1}$$

$$\text{دالة البسط: ظاس متصلة على } \mathbb{R} - \{s: s = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

دالة المقام: $s^2 + 1 > 0$ لجميع قيم س فلا توجد أصفار للمقام.

أي أن د متصلة على $\mathbb{R} - \{s: s = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

لاحظ أن

إذا كانت د، د_٢ متصلتين على ع فإن:
 ١- د_٢ ± د_٢ متصلة على ع
 ٢- د_٢ × د_٢ متصلة على ع
 ٣- $\frac{د_2}{د_2}$ تكون متصلة على ع
 عدا مجموعة أصفار المقام.

٩ حاول أن تحل

٦ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ د (س) = ٧
 ب د (س) = $\frac{س-٢}{س٢-٥س+٦}$
 ج د (س) = $\frac{س٢+١}{س٢-١}$
 د د (س) = (س + ١) جتا س

نشاط

٧ الربط بالكيمياء

إذا كان معدل التفاعل في تجربة كيميائية يعطى بالدالة س حيث س (س) = $\frac{٦,٠٦}{س+١٢}$ ، س تركيز المحلول.
 ابحث في الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:
 أ مثل الدالة بيانياً بأحد البرامج الرسومية.
 ب ابحث اتصال هذه الدالة.

مثال

٦ بين أن الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س٢+س+١}$ متصلة على ع

الحل

حيث أن س^٢ + س + ١ موجب لجميع قيم س $\exists$ ع
 (المميز = ب^٢ - ٤أ - ١ = ٤ - ١ = ٣ > ٠ صفر)

مجموع مربعين

أو س^٢ + س + ١ = $(س + \frac{١}{٢})^2 + \frac{٣}{٤}$

∴ س^٢ + س + ١ موجب لجميع قيم س $\exists$ ع

معرفة لجميع قيم س $\exists$ ع

∴ د (س) = $\sqrt{س٢+س+١}$

لكل أ $\exists$ المجال ع نجد أن

د (أ) = $\sqrt{١+أ+أ٢}$

نها د (س) = $\sqrt{س٢+س+١}$ نها س ← س ← س

∴ د (أ) = $\sqrt{١+أ+أ٢}$ نها د (س) لكل أ $\exists$ ع

∴ د (س) متصلة على ع

٩ حاول أن تحل

٨ ابحث اتصال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س-٢}$ على مجالها.



تمارين ٣ - ٦



ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

$$\textcircled{1} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 + 2, \text{ س} \geq 1 \\ \text{س}^3, \text{ س} < 1 \end{array} \right\} \text{ عند س} = 1$$

$$\textcircled{2} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 - 1, \text{ س} \geq 2 \\ \text{س}^2 - 1, \text{ س} < 2 \end{array} \right\} \text{ عند س} = 2$$

$$\textcircled{3} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 - 3\text{س} + 2, \text{ س} \geq 3 \\ \text{س}^2 - 2\text{س} - 1, \text{ س} < 3 \end{array} \right\} \text{ عند س} = 3$$

$$\textcircled{4} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} + 4, \text{ س} > 2 \\ \text{س}^2 - 1, \text{ س} \geq 2 \\ \text{س}^2 - 1, \text{ س} \leq 1 \end{array} \right\} \text{ عند س} = 2$$

$$\textcircled{5} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جا}(\text{س} - 2)}{\text{س}^2 - 4}, \text{ س} > 2 \\ \frac{1 - \text{جتا} \text{س}}{\text{س}}, \text{ س} < 2 \end{array} \right\} \text{ عند س} = 2$$

$$\textcircled{6} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \text{جتا} \text{س}}{\text{س}}, \text{ س} < 0 \\ \frac{2 \text{ جا} \text{س}}{\text{س}}, \text{ س} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ عند س} = 0$$

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:

$$\textcircled{9} \text{ د (س) } = \frac{\text{س}^3 + 2}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$$

$$\textcircled{8} \text{ د (س) } = \frac{\text{س} - 1}{1 + 2\text{س}}$$

$$\textcircled{7} \text{ د (س) } = \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 1$$

$$\textcircled{12} \text{ د (س) } = \frac{|2 + \text{س}|}{2(2 + \text{س})}$$

$$\textcircled{11} \text{ د (س) } = \frac{\text{س}}{2 - |\text{س}|}$$

$$\textcircled{10} \text{ د (س) } = \frac{\text{س}^2 - 3}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 15}$$

$$\textcircled{15} \text{ د (س) } = \text{س}^3 \text{ جا } 2\text{س}$$

$$\textcircled{14} \text{ د (س) } = \text{س}^2 + \text{جتا } 2\text{س}$$

$$\textcircled{13} \text{ د (س) } = \text{جا} \text{س} - 3 \text{ جتا } (1 + \text{س})$$

$$\textcircled{18} \text{ د (س) } = \frac{\text{ظا} \text{س}}{\text{س}^2 - 9}$$

$$\textcircled{17} \text{ د (س) } = \frac{\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا} \text{س}}{\text{س}^2 - 9}$$

$$\textcircled{16} \text{ د (س) } = \text{ظا}^2 \text{س} - 1$$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

$$\textcircled{19} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{س}^3 + \text{ظا}^2 \text{س}}{\text{س}^5}, \text{ س} > \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} > \text{س} \geq 0, \text{ على الفترة } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{20} \text{ د (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{س}^{1-6}}{\text{س}^{1-2}}, \text{ س} > 4 \\ \frac{\text{س}^3}{1 - \text{س}}, \text{ س} \geq 1 \\ \text{س}^2, \text{ س} \geq 4 \end{array} \right\} \text{ على الفترة } [-4, 6]$$

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

$$\textcircled{21} \text{ د (س) } = \frac{\text{س}^3 + \text{س}}{\text{س}^2 + \text{س} + 9} \text{ متصلة على ع}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{81 - 4(3+s)}{s} \\ \text{حيث } s \neq 0 \\ \text{متصلة على } \mathbb{C} \\ \text{عندما } s = 0 \end{array} \right\} = \text{د(س)} \quad (22)$$

أوجد قيمتي الثابتين ب ، ج في كل مما يأتي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s+1}{s} \\ \text{حيث } 1 < s < 3 \\ \text{متصلة على } \mathbb{C} \end{array} \right. \\ \text{س}^2 + \text{ب س} + \text{ج} = 0 \end{array} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s+2}{s} \\ \text{حيث } 2 < s < 3 \\ \text{متصلة على } \mathbb{C} \end{array} \right. \\ \text{س}^3 - \text{ب س}^2 - \text{ج} = 0 \end{array} \right\} \quad (24)$$

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكناً :

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s+2}{s} \\ \text{حيث } s \leq 2 \\ \text{عند } s = 2 \end{array} \right. \\ \frac{s-4}{s-2} \end{array} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s^3 - 1 + \text{جتا } s}{s} \\ \text{حيث } s < 0 \\ \text{عند } s = 0 \end{array} \right. \\ \frac{3}{s} \text{ جتا } s \end{array} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(s-3)^3 + (s-3)}{s-3} \\ \text{حيث } s < 3 \\ \text{عند } s = 3 \end{array} \right. \\ \text{جتا } (s-3) \end{array} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \frac{s^2 - 6}{s-3} \\ \text{عند } s = 3 \end{array} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s-2}{s} \\ \text{حيث } s \geq 2 \\ \text{عند } s = 2 \end{array} \right. \\ \frac{s-2}{s} \end{array} \right\} \quad (29)$$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

ملخص الوحدة

(١) مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة $\mathbb{R}$ هي $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

أ $\infty = | + \infty$ ب $-\infty = | + \infty$ ج $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ د $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

د $\left. \begin{array}{l} \cdot > | \text{ إذا كان } | \\ \cdot < | \text{ إذا كان } | \end{array} \right\} = | \times \infty$ هـ $\left. \begin{array}{l} \cdot > | \text{ إذا كان } | \\ \cdot < | \text{ إذا كان } | \end{array} \right\} = | \times -\infty$

(٢) إذا كانت قيمة d تقترب من قيمة وحيدة l ، عندما $s \leftarrow |$ من جهة اليمين وجهة اليسار فإن $\text{نها} d(s) = l$ وتقرأ نهاية $d(s)$ عندما تقترب s من l .

(٣) وجود نهاية الدالة عندما $s = l$ لا تعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $s = l$ ، والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند $s = l$ فهذا لا يعني بالضرورة وجود النهاية.

(٤) $\text{نها} (f(s) + g(s)) = \text{نها} f(s) + \text{نها} g(s)$ ب $\text{نها} (f(s) - g(s)) = \text{نها} f(s) - \text{نها} g(s)$ ج $\text{نها} (f(s) \cdot g(s)) = \text{نها} f(s) \cdot \text{نها} g(s)$ د $\text{نها} \left(\frac{f(s)}{g(s)} \right) = \frac{\text{نها} f(s)}{\text{نها} g(s)}$ بشرط $g(s) \neq 0$

(٥) إذا كانت $d(s) = c(s)$ لكل $s \in \mathbb{R}$ وكان $\text{نها} c(s) = l$ فإن $\text{نها} d(s) = l$

(٦) إذا كان $\text{نها} d(s) = l$ ، $\text{نها} f(s) = m$ فإن:

أ $\text{نها} k d(s) = k \cdot l$ ب $\text{نها} [d(s) \pm f(s)] = l \pm m$ ج $\text{نها} \frac{1}{d(s)} = \frac{1}{l}$ د $\text{نها} \frac{f(s)}{d(s)} = \frac{m}{l}$ بشرط $l \neq 0$

هـ $\text{نها} (d(s))^n = l^n$ و $\text{نها} \sqrt[n]{d(s)} = \sqrt[n]{l}$ حيث $l \geq 0$ ز $\text{نها} \sqrt[n]{d(s)} = \sqrt[n]{l}$ حيث $l < 0$ ح $\text{نها} \sqrt[n]{d(s)} = \sqrt[n]{l}$ حيث $l > 0$

ط $\text{نها} \sqrt[n]{d(s)} = \sqrt[n]{l}$ حيث $l < 0$ ي $\text{نها} \sqrt[n]{d(s)} = \sqrt[n]{l}$ حيث $l > 0$

بعض نظريات ونتائج النهايات:

أ $\text{نها} \frac{f(s) - g(s)}{h(s)} = \frac{\text{نها} f(s) - \text{نها} g(s)}{\text{نها} h(s)}$ ب $\text{نها} \frac{f(s) + g(s)}{h(s)} = \frac{\text{نها} f(s) + \text{نها} g(s)}{\text{نها} h(s)}$ ج $\text{نها} \frac{f(s) \cdot g(s)}{h(s)} = \frac{\text{نها} f(s) \cdot \text{نها} g(s)}{\text{نها} h(s)}$ د $\text{نها} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{\text{نها} f(s)}{\text{نها} g(s)}$ بشرط $g(s) \neq 0$

هـ $\text{نها} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{\text{نها} f(s)}{\text{نها} g(s)}$ بشرط $g(s) \neq 0$ و $\text{نها} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{\text{نها} f(s)}{\text{نها} g(s)}$ بشرط $g(s) \neq 0$ ز $\text{نها} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{\text{نها} f(s)}{\text{نها} g(s)}$ بشرط $g(s) \neq 0$ ح $\text{نها} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{\text{نها} f(s)}{\text{نها} g(s)}$ بشرط $g(s) \neq 0$

(٨) نهاية دالة عند اللانهاية:

أ $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$ ب $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$ ج $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$ د $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$

هـ $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$ و $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$ ز $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$ ح $\text{نها} \frac{1}{s} = 0$

(٩) عند إيجاد $\text{نها} \frac{f(s)}{g(s)}$ حيث كل من $d(s)$ ، $r(s)$ دوال كثيرات الحدود فإن:

أ النهاية تعطى عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

ب النهاية تساوى صفراً إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

ج النهاية تعطى $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط $<$ درجة المقام.

١٠ أ نها جاس = جا، حيث $\exists \epsilon$ ، نها جتاس = جتا حيث $\exists \epsilon$
 س ← ا

ب نها ظاس = ظا حيث $\exists \epsilon$ ، نها $\neq \frac{\pi}{4} + n\pi$ لكل $n \in \mathbb{Z}$
 س ← ا

ج إذا كانت $\sin$ زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإن: نها $\frac{\cos}{\sin} = 1$ ، نها $\frac{\tan}{\sin} = 1$
 س ← ا

د نها جتاس = 1 ، نها $\frac{1 - \cos}{\sin} = 0$
 س ← ا

١١ يقال إن نهاية د(س) عندما $\sin$ تؤول إلى تساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتها من اليمين ومن اليسار عندما $\sin$ تؤول إلى امتساويتين وكل منهما تساوى ل.

وتكتب رمزياً: نها د(س) = ل إذا وفقط إذا كان: د(+) = د(-) = ل حيث:
 س ← ا

أ د(+) = نها د(س) ، د(-) = نها د(س)
 س ← ا

١٢ تكون الدالة د متصلة عندما $\sin$ = ا إذا تحققت الشروط الآتية معاً:

أ نها د(س) موجودة ب د(ا) موجودة ج نها د(س) = د(ا)
 س ← ا

١٣ إذا كانت د(س) معرفة على الفترة [ا، ب] تكون الدالة د متصلة على الفترة [ا، ب] إذا كانت:
 أ د(س) متصلة على الفترة [ا، ب]

ب نها د(س) = د(ا) ج نها د(س) = د(ب)
 س ← ا

١٤ بعض أنماط الدوال المتصلة:

◀ الدالة كثيرة الحدود متصلة على $\mathbb{R}$ أو على مجال تعريفها.

◀ الدالة الكسرية متصلة على $\mathbb{R}$ ما عدا أصفار المقام

◀ دالة الجيب وجيب التمام متصلة على $\mathbb{R}$

◀ دالة الظل د(س) = ظاس متصلة على $\mathbb{R} - \{ \sin: \sin = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:





اختبار تراكمي



أكمل كلاً مما يأتي:

$$٢) \sqrt{١ - س^٢ - ٣س} (س) \sqrt{١ - س^٢ - ٣س} + (س) = \dots\dots\dots$$

$$١) س^٢ - س - ٦ = (س - \dots\dots\dots)(س + \dots\dots\dots)$$

$$٤) \dots\dots\dots = \frac{\text{جتا } \pi}{\pi}$$

$$٣) \dots\dots\dots = \frac{س^٢ - ٢س + ٥ - ٤}{س - ١}$$

$$٦) \dots\dots\dots = \frac{س^٣ - ٢س}{س} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ١ \leftarrow س \\ ١ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$٥) \dots\dots\dots = \frac{\text{جتا } \frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}}$$

$$٨) \dots\dots\dots = \frac{س^٢ - ٥س}{س} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٠ \leftarrow س \\ ٠ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$٧) \dots\dots\dots = \frac{س^٣ - ٢س}{س^٢} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٠ \leftarrow س \\ ٠ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$١٠) \dots\dots\dots = \frac{١ - \text{جتا } ٢س}{س} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٠ \leftarrow س \\ ٠ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$٩) \dots\dots\dots = \frac{س^٢ - ٣س + ٥ - ٤}{س^٣ - ٤} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} \infty \leftarrow س \\ \infty \leftarrow س \end{matrix}$$

احسب النهايات الآتية (إن وجدت):

$$١٢) \dots\dots\dots = \frac{س^٩ - ١}{س - ١} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٠ \leftarrow س \\ ٠ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$١١) \dots\dots\dots = \frac{٢ - \text{جا } ٤س}{\text{جا } ٣س} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٠ \leftarrow س \\ ٠ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$١٤) \dots\dots\dots = \frac{س^٣ + ٢س^٢ + س - ٢}{س^٢ - ٢س + ٢} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٢ \leftarrow س \\ ٢ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$١٣) \dots\dots\dots = \frac{س^٣ + ٤س^٢ + ٩ - ٢س}{س^٣ - ٩} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٣ \leftarrow س \\ ٣ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$١٥) \dots\dots\dots = \frac{س^٢ + س}{س + ١} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ١ \leftarrow س \\ ١ \leftarrow س \end{matrix} \quad \text{د(س) حيث د(س) = } \frac{س^٢ + س}{س + ١}$$

$$١٦) \dots\dots\dots = \frac{\text{جتا } ٢س}{س^٢ - \pi} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{٢} \leftarrow س \\ \frac{\pi}{٢} \leftarrow س \end{matrix} \quad \text{د(س) حيث د(س) = } \frac{\text{جتا } ٢س}{س^٢ - \pi}$$

$$\frac{\pi}{٢} > \text{لكل س} \\ \frac{\pi}{٢} < \text{لكل س}$$

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

$$١٧) \dots\dots\dots = \left. \begin{matrix} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} \\ \frac{س^٢ - ٤}{س - \pi} \end{matrix} \right\} \quad \begin{matrix} \text{لكل س} \neq ٢ \\ \text{لكل س} = ٢ \end{matrix}$$

ب) على ع

أ) عند س = ٢

$$١٨) \dots\dots\dots = \frac{س^٩ - ٩}{س^٢ + ٦ - ٥س} \quad \text{د(س) حيث د(س) = } \frac{س^٩ - ٩}{س^٢ + ٦ - ٥س}$$

$$\begin{matrix} ٠ > س \\ ٢ \geq س \\ ٢ < س \end{matrix} \quad \text{فأوجد}$$

$$١٩) \dots\dots\dots = \left. \begin{matrix} س - ٢ \\ س^٢ \\ س^٢ \end{matrix} \right\} \quad \text{إذا كان د(س) = } \left. \begin{matrix} س - ٢ \\ س^٢ \\ س^٢ \end{matrix} \right\}$$

$$ج) \dots\dots\dots = \frac{س^١}{س - ٢} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٢ \leftarrow س \\ ٢ \leftarrow س \end{matrix} \quad \text{د(س) حيث د(س) = } \frac{س^١}{س - ٢}$$

$$ب) \dots\dots\dots = \frac{س^١}{س - ١} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ١ \leftarrow س \\ ١ \leftarrow س \end{matrix} \quad \text{د(س) حيث د(س) = } \frac{س^١}{س - ١}$$

$$أ) \dots\dots\dots = \frac{س^١}{س - ٠} \quad \text{نهيا} \quad \begin{matrix} ٠ \leftarrow س \\ ٠ \leftarrow س \end{matrix} \quad \text{د(س) حيث د(س) = } \frac{س^١}{س - ٠}$$

$$٢٠) \dots\dots\dots = \frac{١}{س - ١} - \frac{١}{س - ٢} \quad \text{أوجد قيم } \frac{١}{س - ١} \text{ التي تجعل نهيا د(س) لها وجود حيث د(س) = } \frac{١}{س - ١} - \frac{١}{س - ٢}$$

أوجد النهايات الآتية:

٢١) نها $\frac{٥ + س٣}{٨ - س٦}$ س $\leftarrow \infty$

٢٢) نها $\frac{س٤ + ٢}{٥ - س٣}$ س $\leftarrow \infty$

٢٣) نها $\frac{١ + ٢س٢ - ٣س٥}{س٣ - ١}$ س $\leftarrow \infty$

٢٤) نها $\frac{٢ + ٢س}{٦ - س٣}$ س $\leftarrow \infty$

٢٥) نها $\frac{١}{س٣ - ٢س٥ + ٣س٢}$ س $\leftarrow \infty$

٢٦) نها $\frac{١}{س٣ - ٢س}$ س $\leftarrow \infty$

٢٧) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبيّنة:

أ) د(س) = $\left. \begin{array}{l} ٣ + س٢ \\ \frac{١٦}{س} + ٧ \end{array} \right\}$ س ≥ ٤ عند س = ٤

ب) د(س) = $\left. \begin{array}{l} ١ - \frac{س}{س٣} \\ \frac{س}{س٣} \end{array} \right\}$ س < ٠ عند س = ٠

٢٨) إذا كانت د(س) = $\left. \begin{array}{l} ١ - س \\ ١ \end{array} \right\}$ س $\neq ٤$ س = ٤

س(س) = $\left. \begin{array}{l} ٤س - ١٠ \\ ٦ - س \end{array} \right\}$ س $\neq ٤$ س = ٤

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند س = ٤

أ) د(س) ب) س(س) ج) د(س). س(س)

د) |د(س)| ه) س(س) - ٦ د(س) و) س(د(س))

٢٩) أوجد قيم ك التي تجعل الدالة متصلة على ع

أ) د(س) = $\left. \begin{array}{l} ١ - س٧ \\ ٢ - س \end{array} \right\}$ س ≥ ١ س ≤ ٢ ك س ≥ ٢ ك س < ٢

ج) د(س) = $\left. \begin{array}{l} ٩ - س٢ \\ ك \end{array} \right\}$ س ≤ ٣ س > ٢

٣٠) أوجد قيمة ك، م التي تجعل الدالة الآتية متصلة على ع

د(س) = $\left. \begin{array}{l} ٥ + س٢ \\ م(١ + س) + ك \\ ٧ + س٢ + س \end{array} \right\}$ س ≤ ٢ ١ < س < ٢ س ≥ ١

٣١) ادرس اتصال الدالة د:

أ) د(س) = $\frac{١}{س٢ - ٢س}$ على مجالها ب) د(س) = $\frac{٢ - س}{س٢ - ٢س}$ على ع

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات Trigonometry

مقدمة الوحدة

حساب المثلثات Trigonometry هو أحد فروع مادة الرياضيات ويعتبر قدماء المصريين أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات حيث استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم ، وترجع معرفتنا بحساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها واستخدموها في إيجاد بعض العلاقات التي تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، كما ساهم علماء العرب والمسلمين في حل المعادلات المثلثية كما استخدموا المماسات والقواطع ونظائرها في قياس المسافات والزوايا كما ابتكروا طريقة لإنشاء جداول للجيب في المثلثات المستوية. ونشير هنا إلى العالم السويسري ليونارد اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) الذي قدم تعبيراً جديداً للدوال المثلثية ، كما استخدم الكثير من الرموز الرياضية التي تساعد في استخدام المسائل الرياضية المتقدمة التي تدرس في جميع المدارس والجامعات حتى الآن وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التي تربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

مخرجات تعلم الوحدة

في نهاية الوحدة وتنفيذاً للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث ، والتي تنص على: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيب زوايا المقابلة لها.
- ✚ يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث ، والتي تنص على: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيب زوايا المقابلة لها.
- ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث.
- ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يوجد حلان لزواوية مجهولة).
- ✚ يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها في حل تمارين متنوعة.
- ✚ يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث.
- ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد طول ضلع مجهول في هذا المثلث.
- ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث.
- ✚ يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأي مثلث في حل هذا المثلث في الحالات الآتية:
- ✚ إذا علم في المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.
- ✚ إذا علم في المثلث طول ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- ✚ إذا علم في المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.
- ✚ يستخدم الآلة الحاسبة في حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام لأي مثلث.
- ✚ يدرس الحالة المبهمة (Ambiguous Case) في حل المثلث كنشاط جماعي وأبحاث علمية.

المصطلحات الأساسية

حساب المثلثات	Trigonometry	حل وحيد	Unique Solution	زاوية مقابلة لضلع	Opposite Angle of a Side
قاعدة الجيب	Sine Rule	أقصر ضلع	Shortest Side	أصغر زاوية	Smallest Angle
زاوية حادة	Acute Angle	أطول ضلع	Longest Side	أكبر زاوية	Largest Angle
زاوية منفرجة	Obtuse Angle	مساحة المثلث	Area of The Triangle	قاعدة جيب التمام	Cosine Rule
زاوية قائمة	Right Angle	أطوال أضلاع المثلث	The Lengths of The Sides of the Triangle		
حالة مبهمه	Ambiguous Case				
حلول ممكنة	Possible Solutions				

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١ - ٤): قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس (٢ - ٤): قانون (قاعدة) جيب التمام.

مخطط تنظيمي للوحدة



قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

٤ - ١

سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتي الحادتين والآن سوف نتعلم طرقاً أخرى لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.



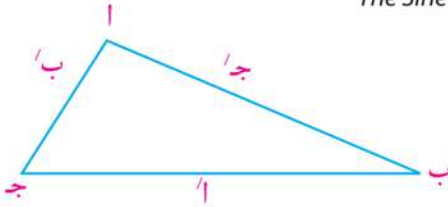
نشاط

أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل. قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم) تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.

تعلم

The Sine Rule

قانون (قاعدة) الجيب



في المثلث أ ب ج إذا استخدمنا الرمز أ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ، والرمز ب للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب، والرمز ج للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ج، فإنه

يمكن استخدام قانون مساحة المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.

أي أن: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ صيغ مساحات المثلث المتساوية

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين $\times$ جيب الزاوية بينهما

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

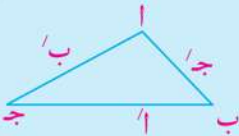
المصطلحات الأساسية

- حساب المثلثات Trigonometry
- قاعدة الجيب Sine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle
- حالة مبهمه
- The Ambiguous Case

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

تذكر أن



مساحة المثلث Δ ب ج
 $\frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ج} \times \sin \alpha =$
 $\frac{1}{2} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \sin \beta =$
 $\frac{1}{2} \times \text{ا} \times \text{ج} \times \sin \gamma =$

بضرب كل عبارة في ٢

بقسمة كل عبارة على $\sin \alpha$

بالتبسيط

من خواص التناسب

$$\begin{aligned} \frac{\text{ب}}{\sin \alpha} &= \frac{\text{ج}}{\sin \beta} = \frac{\text{ا}}{\sin \gamma} \\ \frac{\text{ب}}{\sin \alpha} &= \frac{\text{ج}}{\sin \beta} = \frac{\text{ا}}{\sin \gamma} \end{aligned}$$

أي أن: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أي: $\frac{\text{ب}}{\sin \alpha} = \frac{\text{ج}}{\sin \beta} = \frac{\text{ا}}{\sin \gamma}$

تعلم ذاتي: هل يمكنك إثبات قانون الجيب بطرق أخرى؟ وضح ذلك

استخدام قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

مثال

١ أوجد طول أكبر ضلع في المثلث Δ ب ج الذي فيه $\angle \alpha = 33^\circ ٥٤'$ ، و $\angle \beta = 22^\circ ٤٩'$ ، $\angle \gamma = 124^\circ ٥٠'$ سم

الحل

تذكر أن

في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولاً مقابلاً للزاوية الأكبر قياساً، ويكون الضلع الأصغر طولاً مقابلاً للزاوية الأصغر قياساً.

(التباين في المثلث)

أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية

$$\angle \gamma = 124^\circ ٥٠' - (\angle \alpha + \angle \beta) = 124^\circ ٥٠' - (33^\circ ٥٤' + 22^\circ ٤٩') = 68^\circ ٥٠'$$

$$\angle \gamma = 68^\circ ٥٠' - (33^\circ ٥٤' + 22^\circ ٤٩') = 68^\circ ٥٠'$$

∴ أكبر طول ضلع هو جـ لأنه يقابل أكبر زاوية في المثلث وهي زاوية جـ

$$\frac{\text{ج}}{\sin \gamma} = \frac{\text{ا}}{\sin \alpha} \quad \therefore \frac{\text{ج}}{\sin 68^\circ ٥٠'} = \frac{124,٥}{\sin 33^\circ ٥٤'}$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{124,٥ \times \sin 68^\circ ٥٠'}{\sin 33^\circ ٥٤'} = 148,٤ \text{ سم}$$

٦ حاول أن تحل

١ أوجد طول أصغر ضلع في المثلث Δ ب ج الذي فيه $\angle \alpha = 43^\circ$ ، و $\angle \beta = 65^\circ$ ، $\angle \gamma = 8,٤^\circ$ سم

حل المثلث باستخدام قانون الجيب Solving the triangle using the sine rule

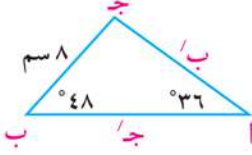
المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

أولاً: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

٢ حل المثلث Δ ب ج حيث $\angle \alpha = 8^\circ$ سم، و $\angle \beta = 36^\circ$ ، و $\angle \gamma = 48^\circ$

الحل



$$\begin{aligned} \text{و} \angle ج = 180^\circ - (48^\circ + 36^\circ) &= 96^\circ \\ \therefore \frac{\text{ج ا}}{\sin 36^\circ} &= \frac{\text{ا ب}}{\sin 48^\circ} \\ \therefore \text{ا ب} &= \frac{8 \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 10,114 \text{ سم} \end{aligned}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولاً من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

$$\rightarrow \text{ابدأ} \quad (8 \times \sin 48) \div \sin 36 =$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{ج ا}}{\sin 36^\circ} &= \frac{\text{ج ب}}{\sin 96^\circ} \\ \therefore \text{ج ب} &= \frac{8 \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 13,035 \text{ سم} \end{aligned}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

$$\rightarrow \text{ابدأ} \quad (8 \times \sin 96) \div \sin 36 =$$

٤ حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب ج حيث أ = 8 سم، و $\angle ا = 60^\circ$ ، و $\angle ب = 40^\circ$

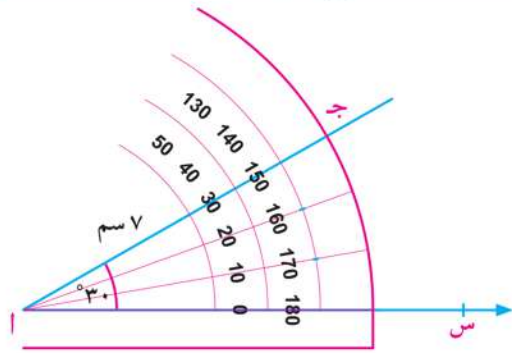
ثانياً: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (يوجد حلين لزاوية مجهولة)

الحالة المبهمة Ambiguous Case

ارسم المثلث أ ب ج (إن أمكن ذلك) حسب القياسات الموجودة في الجدول المقابل:

طول أ ب بالسم	و $\angle ا$	طول ب ج بالسم
7	30°	3,5
5		
2		

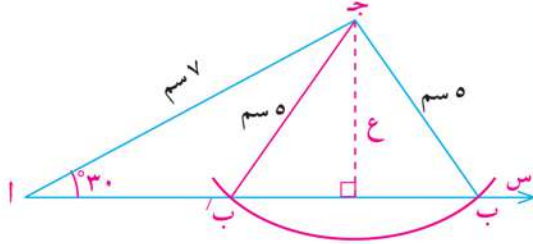
٢ - من نقطة أ أرسم أ ب بطول 7 سم وتصنع زاوية قياسها 30° مع $\overrightarrow{اس}$



١ - من نقطة أ أرسم $\overrightarrow{اس}$

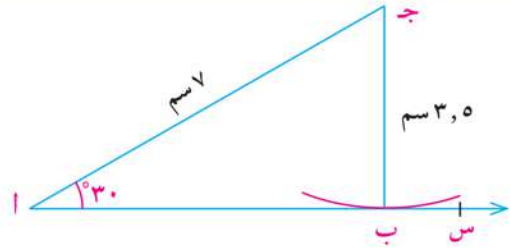


٤ - عندما يكون $\angle B = 50^\circ$ سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار 5 سم وارسم قوسًا يقطع $\overleftrightarrow{AS}$. ماذا تلاحظ؟



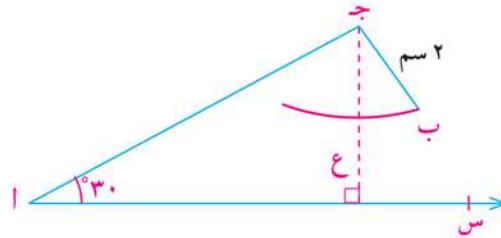
◀ قس طول $\overline{JB}$ ، طول $\overline{JB}$ ماذا تلاحظ؟
 ◀ قارن بين طول $\overline{JB}$ وطول العمود المرسوم من نقطة ج على $\overleftrightarrow{AS}$ ماذا تلاحظ؟

٣ - عندما يكون $\angle B = 30^\circ$ سم أركز سن الفرجار عند النقطة ج وبفتحة طولها $3,5$ سم ارسم قوسًا يمس $\overleftrightarrow{AS}$ في نقطة ب.



◀ قس طول $\overline{JB}$ وقارن طوليه مع طول العمود المرسوم من ج على $\overleftrightarrow{AS}$ ماذا تلاحظ؟

٥ - عندما يكون $\angle B = 20^\circ$ سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار 2 سم وارسم قوسًا، هل يقطع هذا القوس $\overleftrightarrow{AS}$ ؟

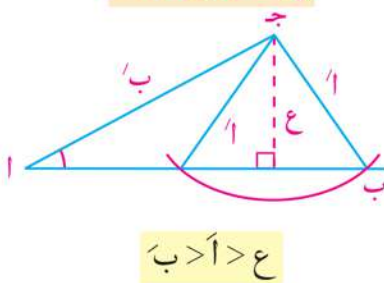


◀ قارن بين طول $\overline{JB}$ وطول العمود المرسوم من ج على $\overleftrightarrow{AS}$ ماذا تلاحظ؟

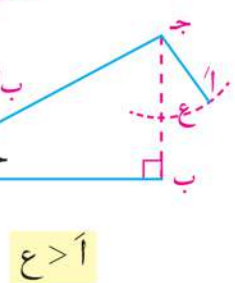
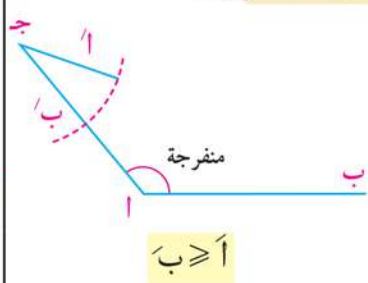
تدريب:

◀ أعد الخطوات السابقة في حالة ما تكون $\triangle$ ج منفرجة وبين الحالات المختلفة لرسم المثلث.
 ◀ من الخطوات السابقة يمكن استنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث $\triangle$ ب ج بمعلومية $\angle A$ ، $\angle B$ باعتبار أن $\angle C$ هو أقصر بعد من ج إلى $\overleftrightarrow{AB}$

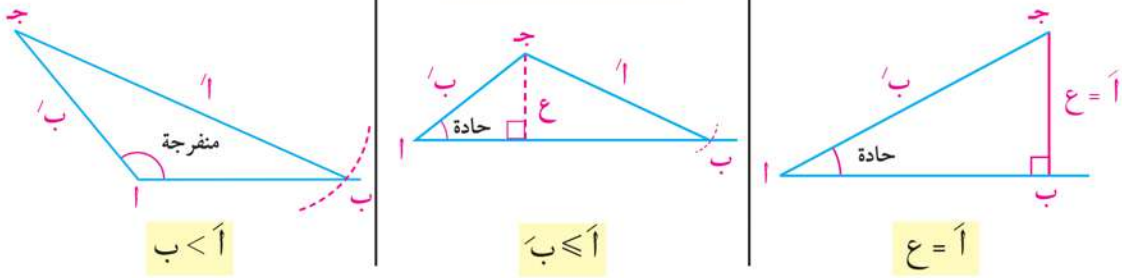
يوجد حلان للمثلث



لا يوجد مثلث يحقق هذه الشروط



يوجد حل وحيد للمثلث



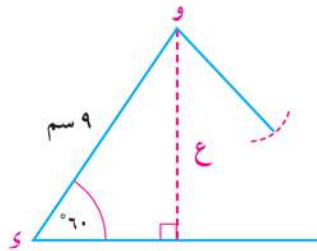
مثال تطبيق

٣ بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

- أ $\triangle$ أ ب ج الذي فيه $\angle$ (ب) = 110° ، $b = 8$ سم، $c = 5$ سم
 ب $\triangle$ د هـ ز الذي فيه $\angle$ (د) = 60° ، $d = 7$ سم، $h = 9$ سم
 ج $\triangle$ ل م ن الذي فيه $\angle$ (ل) = 40° ، $l = 12$ سم، $m = 15$ سم

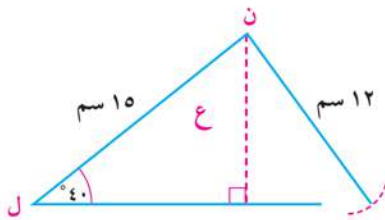
الحل

أ $\therefore \angle$ منفرجة، $b < c$
 $\therefore$ يوجد للمثلث حل وحيد
 $\therefore$ ج ا ج = $\frac{5 \times \sin 110^\circ}{8} \approx 0,5873$
 ومنها $\angle$ (ج) $\approx 36^\circ$
 $\therefore$ $\angle$ (ا) $\approx 180^\circ - (36^\circ + 110^\circ) \approx 34^\circ$
 $\therefore \frac{a}{\sin 34^\circ} \approx \frac{8}{\sin 110^\circ}$
 $\therefore a \approx \frac{8 \times \sin 34^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 4,8$ سم
 أى أن: $\angle$ (ا) $\approx 34^\circ$ ، $\angle$ (ج) $\approx 36^\circ$ ، $a \approx 4,8$ سم



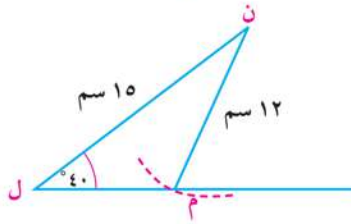
ب $\therefore \angle$ حادة، $d > h$

$e = h - d \sin 60^\circ \approx 7,8 - 6,06 \approx 1,74$
 $\therefore d > e$ (حيث $7,8 > 1,74$)
 فلا يوجد حل للمثلث



ج $\therefore \angle$ حادة، $l > m$ (حيث $12 > 15$)

$e = m - l \sin 40^\circ \approx 15 - 7,71 \approx 7,29$
 $\therefore e > l > m$ (حيث $7,29 > 12 > 15$)
 لذلك يوجد للمثلث ل م ن حلان.

الحل الثاني: $\triangle$ منفرجة

دالة الجيب موجبة في الربع الثاني ،

$$\text{جام} \approx ٨٠,٣٥$$

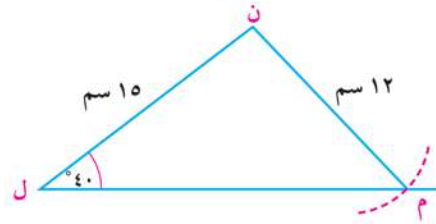
$$\text{و. (} \triangle \text{م) } \approx ١٨٠ - ٥٣,٤٦ - ٤٠ \approx ٨٦,٥٤$$

$$\text{و. (} \triangle \text{ن) } \approx ١٨٠ - (٤٠ + ٨٦,٥٤) \approx ٥٣,٤٦$$

$$\approx ١٣,٤٦$$

$$\therefore \frac{١٢}{\text{جا } ٤٠} = \frac{\text{ن}}{\text{جا } ١٣,٤٦}$$

$$\therefore \text{ن} \approx \frac{١٢ \times \text{جا } ١٣,٤٦}{\text{جا } ٤٠} \approx ٤,٣٥ \text{ سم}$$

الحل الأول: $\triangle$ حادة

$$\therefore \frac{١٢}{\text{جا } ٤٠} = \frac{١٥}{\text{جا } \text{م}}$$

$$\therefore \text{جا م} = \frac{١٥ \times \text{جا } ٤٠}{١٢} \approx ٨٠,٣٥$$

$$\text{و. (} \triangle \text{م) } \approx ٥٣,٤٦$$

$$\text{و. (} \triangle \text{ن) } \approx ١٨٠ - (٤٠ + ٥٣,٤٦) \approx ٨٦,٥٤$$

$$\approx ٨٦,٥٤$$

$$\therefore \frac{١٢}{\text{جا } ٤٠} = \frac{\text{ن}}{\text{جا } ٨٦,٥٤}$$

$$\therefore \text{ن} \approx \frac{١٢ \times \text{جا } ٨٦,٥٤}{\text{جا } ٤٠} \approx ١٨,٦٣ \text{ سم}$$

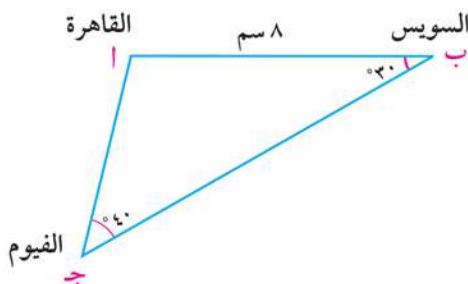
أى أن: أحد الحلين هو: و. (م) $\approx ٥٣,٤٦$ ، و. (ن) $\approx ٨٦,٥٤$ ، ن $\approx ١٨,٦٣$ سمالحل الآخر هو: و. (م) $\approx ١٢٦,٥٤$ ، و. (ن) $\approx ١٣,٤٦$ ، ن $\approx ٤,٣٥$ سم

٤ حاول أن تحل

٣ بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

أ $\triangle$ أب ج الذي فيه و. (ا) $= ١٠٠^\circ$ ، أ = ١٢ سم، ب = ١٥ سمب $\triangle$ هـ و الذي فيه و. (هـ) $= ٣٥^\circ$ ، هـ = ٩ سم، و = ٥ سمج $\triangle$ م ن ل الذي فيه و. (م) $= ٥٢^\circ$ ، م = ٢١ سم، ن = ٢٦ سم

مثال

٤ الربط بالجغرافيا: الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا إذا كانت المسافة على الخريطة بين السويس والقاهرة ٨ سم وقياس الزاوية عند الفيوم ٤٠° فأوجد لأقرب كيلو متر:

أ المسافة بين القاهرة والفيوم.

ب المسافة بين السويس والفيوم.

علمًا بأن كل اسم على الرسم يمثل ١٦,٧٥ كم

الحل

$$\text{و. (} \triangle \text{ا) } = (٣٠ + ٤٠) - ١٨٠ = ١١٠^\circ$$

$$\therefore \frac{٨}{\text{جا } ٤٠} = \frac{\text{ب ج}}{\text{جا } ١١٠} = \frac{\text{ا ج}}{\text{جا } ٣٠}$$

$$\therefore \text{أ ج} = \frac{٨ \times \text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جا } ٤٠^\circ} \approx ٦,٢٢ \text{ سم}$$

∴ المسافة بين القاهرة والفيوم $\approx ١٦,٧٥ \times ٦,٢٢ \approx ١٠٤$ كم
 ∴ المسافة بين السويس والفيوم $\approx ١٦,٧٥ \times ١١,٧ \approx ١٩٦$ كم

٤ حاول أن تحل

٤ في النشاط صفحة (١٥٤):

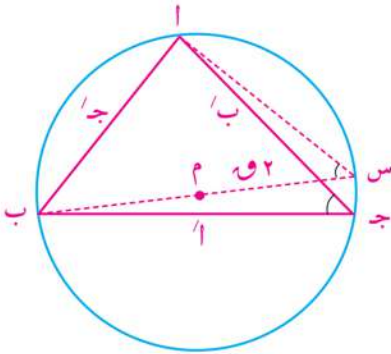
- أ استخدم الأدوات الهندسية لإيجاد قياسات زوايا المثلث والمسافة بين الفيوم والإسكندرية.
 ب أوجد باستخدام قاعدة الجيب المسافة الحقيقية بين:
 أولاً: الإسماعيلية والفيوم.
 ثانياً: الإسماعيلية والإسكندرية.

تطبيقات هندسية لقانون الجيب Geometrical Applications on the Sine Rule

في أى مثلث أ ب ج يكون: $\frac{\text{أ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ب}}$

حيث م طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب ج

تمرين مشهور



البرهان:-

إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث حاد الزوايا

نرسم الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أ ب ج الحاد الزوايا ثم
 نرسم القطر ب س والوتر س أ

$$\therefore \angle (ب س أ) = ٩٠^\circ, \quad \angle (ب س أ) = \angle (أ ب ج), \quad \angle (أ ب ج) = \angle (أ ب ج)$$

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا أ}}, \quad \frac{\text{أ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا أ}}$$

فيكون أ ب = ب س جا ج

$$\therefore \text{ج} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ج}}$$

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن: $\frac{\text{أ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ب}}$

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جا ب}}$$

تعلم ذاتي: أثبت القانون السابق إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث منفرج الزاوية.

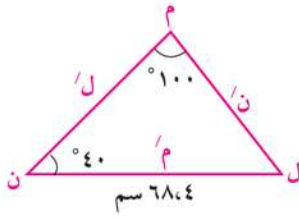
مثال

٥ مثلث ل م ن فيه م = ٦٨,٤ سم، $\angle (م) = ١٠٠^\circ$ ، $\angle (ن) = ٤٠^\circ$ أوجد:

- أ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن
 ب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

ج مساحة سطح المثلث ل م ن

الحل



(قانون الجيب)

وهو المطلوب (١)

وهو المطلوب (٢)

$$\text{مساحة المثلث ل م ن} = \frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{م} \times \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \times 68.4 \times 44.64 \times \sin 40^\circ = 981.1 \text{ سم}^2$$

٩ حاول أن تحل

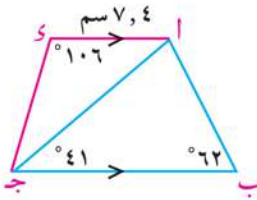
٥ أ ب ج مثلث فيه أ = ٢٥ سم، و (ب) = ٦٨° ، و (ج) = ١٠٣° أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

مثال

٦ أ ب ج د شبه منحرف فيه أ د // ب ج ، أ د = ٧،٤ سم، و (ب) = ٦٢° ، و (د) = ١٠٦° ، و (أ ج ب) = ٤١° . أوجد

أولاً: طول كل من أ ج ، ب ج
ثانياً: مساحة سطح شبه المنحرف أ ب ج د لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



(بالتبادل)

$$\therefore \text{و (د أ ج) = و (أ ج ب) = } 41^\circ$$

$$\text{و (أ ج د) = } 180^\circ - (106^\circ + 41^\circ) = 33^\circ$$

$$\therefore \frac{7.4}{\sin 33^\circ} = \frac{\text{أ ج}}{\sin 106^\circ} \therefore \text{أ ج} = \frac{7.4 \times \sin 106^\circ}{\sin 33^\circ} = 13.06 \text{ سم}$$

$$\text{و (ب أ ج) = } 180^\circ - (62^\circ + 41^\circ) = 77^\circ$$

$$\therefore \frac{13.06}{\sin 77^\circ} = \frac{\text{ب ج}}{\sin 62^\circ} \therefore \text{ب ج} = \frac{13.06 \times \sin 62^\circ}{\sin 77^\circ} = 14.41 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة سطح شبه المنحرف أ ب ج د} = \frac{1}{2} \times \text{أ ج} \times \text{ب ج} \times \sin 41^\circ + \frac{1}{2} \times \text{أ ج} \times \text{د ج} \times \sin 41^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 13.06 \times (14.41 + 7.04) \times \sin 41^\circ \approx 93 \text{ سم}^2$$

٩ حاول أن تحل

٦ أ ب ج د شكل رباعي فيه ج د = ١٠٠ سم، و (ب ج أ) = ٣٦° ، و (ب د أ) = ٥٥° ، و (ب ج د) = ٨٥° ، و (د ج أ) = ٨٧° ، أوجد طول كل من ب د ، أ ج لأقرب سنتيمتر.

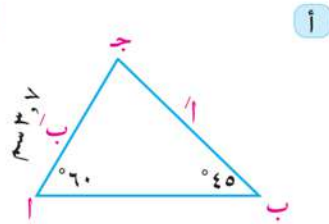
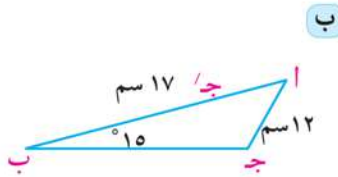
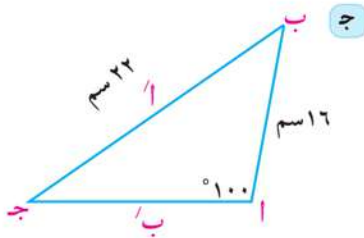


تمارين ٤ - ١



أكمل كل مما يأتي:

- ١) في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع
 - ٢) في المثلث ABC إذا كان 2 جا $A = 3$ جا $B = 4$ جا C فإن A : B : $C =$
 - ٣) ABC مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $10\sqrt{3}$ سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث =
 - ٤) مثلث ABC فيه $\angle A = 60^\circ$ ، و $\angle B = 40^\circ$ ، $\angle C = 80^\circ$ ، فإن $A =$ سم
 - ٥) في المثلث ABC ج يكون $\frac{2}{3} \frac{b}{c} =$
- اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-
- ٦) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC الذي فيه $\angle A = 30^\circ$ ، $A = 10$ سم هو:
 أ ١٠ سم ب ٢٠ سم ج ٥ سم د ٤٠ سم
 - ٧) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC ج يساوي ٤ سم، و $\angle A = 30^\circ$ فإن A هو:
 أ ٤ سم ب ٢ سم ج $4\sqrt{3}$ د $\frac{1}{16}$
 - ٨) في المثلث ABC ج يكون المقدار 2 مو جا A مساوياً:
 أ ١ ب ٢ ج $\frac{1}{2}$ د (ΔABC)
 - ٩) إذا كان مو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث ABC ص فإن $\frac{ص}{2}$ جاص يساوي:
 أ ١ مو ب ٢ مو ج $\frac{1}{4}$ مو د ٤ مو
 - ١٠) ΔABC فيه، و $\angle A = 30^\circ$ ، $M = 7$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوي:
 أ ٧ سم ب $3,5$ سم ج ١٤ سم د $\frac{14}{3\sqrt{3}}$
 - ١١) في المثلث ABC ص ع إذا كان 3 جا $S = 4$ جا $V = 2$ جا C فإن S : V : C تساوي:
 أ ٢: ٣: ٤ ب ٦: ٤: ٣ ج ٦: ٤: ٣ د ٦: ٣: ٤
 - ١٢) حل كل مثلث مما يلي:



- ١٣) بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق.

- أ و $\angle A = 105^\circ$ ، $A = 8$ سم، $B = 5$ سم
- ب و $\angle A = 47^\circ$ ، $A = 4$ سم، $B = 6$ سم
- ج و $\angle A = 38^\circ$ ، $A = 10$ سم، $B = 14$ سم
- د و $\angle A = 36,87^\circ$ ، $A = 9$ سم، $B = 10$ سم

١٤ حل المثلث أ ب ج مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة.

- أ و (أ) = 40° ، و (ب) = 30° ، ب = ١٠ سم ب و (أ) = 50° ، أ = ٤ سم، ب = ٣ سم
ج و (ب) = 33° ، ب = ٧ سم، ج = ١٠ سم د و (ج) = 116° ، ج = ١٢ سم، أ = ١٠ سم

١٥ حل المثلث أ ب ج في كل مما يأتي:

- أ و (أ) = 32° ، أ = ١٧ سم، ب = ١١ سم ب و (أ) = 49° ، أ = ٣٢ سم، ب = ٣٨ سم
ج و (ب) = 70° ، ب = ١٤ سم، ج = ١٤ سم د و (ج) = 103° ، ب = ٤٦ سم، ج = ٦١ سم

١٦ أ ب ج مثلث فيه و (أ) = 60° ، و (ب) = 45° ، أثبت أن: أ: ب: ج = $2: 3\sqrt{2}: 1$

١٧ أ ب ج متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٩، ٧٧ سم وقطره أ ج، ب ي يصنعان مع ضلعه أ ب زاويتين مقدارهما $36^\circ ٢٢'$ ، $58^\circ ٤٤'$ ، أوجد طولي القطرين.

١٨ أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٨، ٣٥٦ سم، و (أ) = $41^\circ ٢٠'$ ، و (ب) = $59^\circ ١٧'$ أوجد:

- أ ب طول العمود النازل من ج على أ ب

١٩ أ ب ج ي شبه منحرف فيه أ ب // ب ج، أ ي = ٧، ١٠ سم، و (ب) = 100° ، و (أ) = $61^\circ ١٩'$ ، و (ج) = $33^\circ 50'$ ، أوجد طول كل من أ ج، ب ج

٢٠ أ ب ج شكل رباعي فيه و (ب ج) = 85° ، و (أ ج) = 87° ، و (ب ج) = 36° ، و (أ ب) = 55° ج ي = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من ب ي، أ ج لأقرب متر.

٢١ أ ب ج مثلث فيه ج ا = ٣٥، ٠، ج = ١٤ سم، أوجد بدلالة π مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج.

٢٢ أ ب ج مثلث فيه أ = ٥٨، و (ب) = 38° ، و (ج) = 62° أوجد طول العمود النازل من أ على أ.

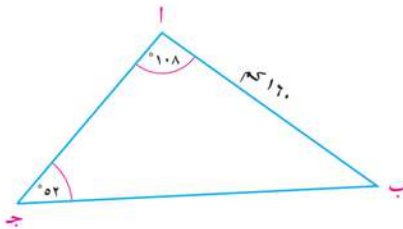
٢٣ أ ب ج مثلث فيه و (أ) = 60° ، و (ب) = 45° ، فإذا كان أ + ب = $2 + 3\sqrt{2}$ سم فأوجد كل من أ، ب

٢٤ أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠ سم، إذا كان و (أ) = 42° ، و (ب) = $74^\circ ٤٨'$ ، أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب ج

٢٥ أ ب ج مثلث فيه ج = ١٩ سم، و (أ) = 112° ، و (ب) = 33° ، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من ب، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

٢٦ **الربط بالحرفافيا:** الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ، ب، ج، أوجد لأقرب كيلو متر:

- أ المسافة بين أ، ج ب المسافة بين ب، ج



٢٧ **مسألة مفتوحة:** أ ب ج مثلث فيه و (ب) = 58° ، أ = ٤٢ سم. أوجد ب التي لاتجعل حلًا للمثلث أ ب ج عندها. فسر إجابتك

٢٨ **تفكير ابداعي:**

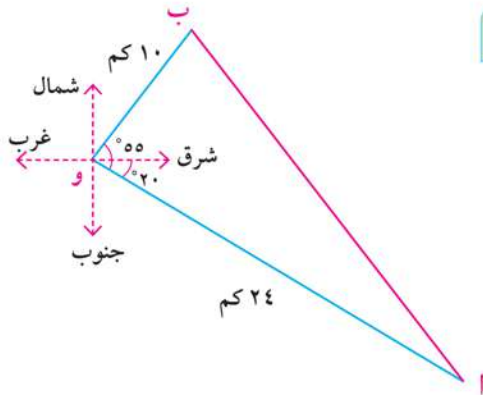
أ في المثلث أ ب ج أثبت أن: $\frac{3 - 4 \cos A}{3 \cos A - 4} = \frac{3 - 4 \cos B}{3 \cos B - 4}$

ب إذا كانت م هي مساحة سطح المثلث أ ب ج أثبت أن م = $\frac{2}{3} (\cos A + \cos B + \cos C)$

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule

٢ - ٤



فكر و ناقش

تحركت سفينتان A، B في نفس اللحظة من أحد الموانئ، فإذا تحركت A في اتجاه 20° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة 24 كم وتحركت B في اتجاه 55° شمال الشرق حيث قطعت مسافة 10 كم في نفس الزمن.

أوجد المسافة بين السفينتين في نهاية هذا الزمن.

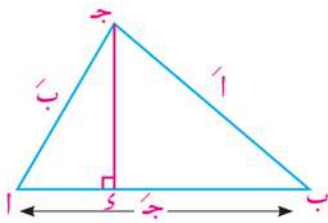
استخدم القياسات الهندسية بمقياس رسم مناسب وذلك لإيجاد طول AB.

هل يمكنك استخدام قانون الجيب لإيجاد طول AB؟

هل يمكنك استنتاج قانون آخر لإيجاد طول AB بمعلومية طول كل من OA، OB وقياس الزاوية المحصورة بينهما؟ فسر إجابتك.

تعلم

The Cosine Rule



(بأخذ ب² عامل مشترك)

تذكر أن

متطابقة فيثاغورث

$$ج^2 = أ^2 + ب^2$$

قانون (قاعدة) جيب التمام

في Δ ب ج القائم الزاوية في ج:

$$ب^2(ج) = أ^2(ج) + ج^2(ب) \quad (\text{نظرية فيثاغورث})$$

أي أن:

$$أ^2(ب) = ب^2(أ) + ج^2(ب) - ج^2(ب) \quad (\text{بفك الأقواس})$$

$$ب^2(أ) = ب^2(أ) + ج^2(ب) - ج^2(ب) \quad (\text{بالتبسيط})$$

ومن ذلك يكون:

$$ج^2(أ) = ب^2(أ) + ج^2(ب) - ج^2(ب)$$

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

- قاعدة جيب التمام Cosine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

تعلم ذاتي: أثبت نفس القانون السابق إذا كانت Δ منفرجة في Δ أ ب جـ.

تعبير شفهي: اكتب بطريقة مماثلة قيمة كل من $\sin B$ ، $\sin C$ ، جتا ب، جتا جـ.

تفكير ناقد: هل القانون السابق صحيح إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ؟ فسر إجابتك.

ارشاد



يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أ، ب، جـ في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أ ب جـ يكون:

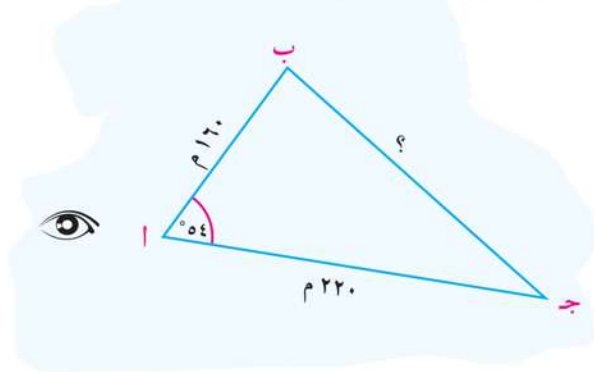
$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ومنه} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{ومنه} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{ومنه} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

نشاط



١ استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث باستخدام قاعدة جيب التمام.

أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليهما باستخدام جهاز قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى (أ) يساوي ١٦٠ متراً وبعده عن النقطة الثانية (ب) يساوي ٢٢٠ متراً، و $\angle A = 54^\circ$. استخدم هذه البيانات لحساب المسافة بين النقطتين لأقرب كيلو متر.



١ - حدد بدقة البيانات التي رصدها المهندس

باستخدام جهاز قياسات المسافات.

٢ - حدد المطلوب.

٣ - مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب

مستخدماً الأدوات الهندسية اللازمة..

٤ - قس بالستيمترات طول ب جـ.

٥ - أوجد الطول الحقيقي للمسافة بين ب، جـ

بالكيلو مترات.

٦ - هل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتي ب، جـ؟

وضح ذلك.

٧ - قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول ب جـ باستخدام القياسات

الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

تذكر أن



الطول الحقيقي = الطول في الرسم + مقياس الرسم

من النشاط السابق نجد أن:

١ - مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو متراً

٢ - باستخدام القياس: طول ب جـ = ٩ سم في الرسم

٣ - طول ب جـ الحقيقي $\approx 20 \times 9 \approx 180$ كم

٤ - قاعدة جيب التمام هي: $\text{ب}^2 = \text{ج}^2 + \text{أ}^2 - 2 \cdot \text{ج} \cdot \text{أ} \cdot \cos \angle \text{جأ}$

بالتعويض: $\text{أ}^2 = (160)^2 + (220)^2 - 2 \cdot 160 \cdot 220 \cdot \cos 54^\circ \approx 32619,9$
فتكون: $\text{أ} \approx 180,6$ كم.

٥ - النتائج تكون أدق عندما يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.



٦ - استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد الناتج:
أبدأ
1 6 0 χ^2 + 2 2 0 χ^2 - 2 $\times$ 1 6 0 $\times$
2 2 0 $\times$ Cos 5 4) = $\sqrt{\quad}$ =

تطبيق على النشاط: أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين
في $\triangle$ أ ب ج الذي فيه:

أ $\text{أ} = 36$ سم، $\text{ب} = 84$ سم، $\angle \text{ج} = 101^\circ$

ب $\text{ب} = 2$ سم، $\text{ج} = 5$ سم، $\angle \text{أ} = 60^\circ$

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

١ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب ج الذي فيه $\text{أ} = 6$ ، $\text{ب} = 2$ ، $\text{ج} = 8$.

الحل

$\therefore$ أكبر زاوية في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا $\therefore \angle \text{أ}$ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\text{جأ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{أ}^2}{2 \cdot \text{ب} \cdot \text{ج}} = \frac{2^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{4 + 64 - 36}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

باستخدام الآلة الحاسبة

أبدأ

3.2 χ^2 + 2.8 χ^2 - 4.6 χ^2 = $\div$ (2 $\times$ 3.2 $\times$ 2.8)
= Shift Cos = ...

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية أ منفرجة

$\therefore \angle \text{أ} = 99^\circ 53' 49''$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب ج الذي فيه $\text{أ} = 11$ سم، $\text{ب} = 10$ سم، $\text{ج} = 8$ سم

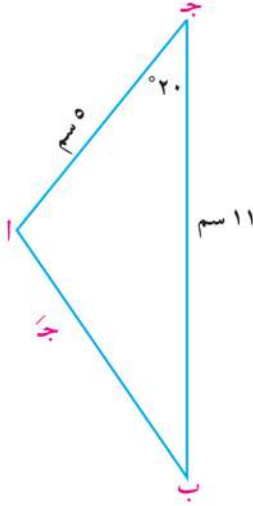
استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

أولاً: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included

مثال



٢ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ١١ سم، ب = ٥ سم، و (ج) = ٢٠°

الحل

يجب إيجاد ج، و (أ)، و (ب)

∴ ج = أ² + ب² - ٢ أ ب جتا ج (قانون جيب التمام)

$$= (١١)² + (٥)² - ٢(١١)(٥) \text{ جتا } ٢٠°$$

$$\text{ج} = \sqrt{(١١)² + (٥)² - ٢(١١)(٥) \text{ جتا } ٢٠°} \approx ٦,٥٢٩ \text{ سم}$$

$$\text{جتا أ} = \frac{ب² + ج² - أ²}{٢ ب ج} = \frac{(٥)² + (٦,٥٢٩)² - (١١)²}{٢(٥)(٦,٥٢٩)} \approx -٠,٨١٧$$

$$\text{و (أ)} = ١٤٤,٩٤°$$

$$\text{و (ب)} = ١٨٠° - [٢٠° + ١٤٤,٩٤°] = ١٥,٢١٤°$$

لاحظ أن:

في المثال السابق عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلاً من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

١- في حالة استخدام قانون الجيب:

◀ فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائماً موجب.

٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:

◀ إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالباً.

◀ وإذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجباً.

◀ يسمح أيضاً قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علماً بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.

ارشاد



يمكنك استخدام قانون الجيب أيضاً لحساب و (أ)، و (ب) بعد إيجاد ج، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

٩ حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ٦ سم، ب = ٤ سم، ج = ١٤,٢°

$$\text{و (ب)} = ٤٢,١٨°$$

ثانيًا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

٣ حل المثلث أ ب ح الذي فيه أ = ٩ سم، ب = ٧ سم، ح = ٥ سم.

الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ، ب، ح

$$\therefore \text{جتا } \angle \text{أ} = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{2 \times ب \times ح} = \frac{٧^2 + ٥^2 - ٩^2}{2 \times ٧ \times ٥} = -٠,١$$

$$\angle \text{أ} \approx ٩٥,٤٤٢١^\circ$$

$$\text{جتاب } \angle \text{ب} = \frac{أ^2 + ح^2 - ب^2}{2 \times أ \times ح} = \frac{٩^2 + ٥^2 - ٧^2}{2 \times ٩ \times ٥} = ٠,٦٣٣$$

$$\angle \text{ب} \approx ٥٠,٤٢٦٣^\circ$$

$$\angle \text{ح} = ١٨٠^\circ - [\angle \text{أ} + \angle \text{ب}] = ٣٣,٣٣٢٦^\circ$$

٤ حاول أن تحل

٣ حل المثلث أ ب ح الذي فيه أ = ١٢ سم، ب = ٤ سم، ح = ١ سم، ٢١ سم

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة المبهمة والتي سبق دراستها في قانون الجيب، ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة والمثال التالي يستخدم هذا المدخل.

مثال حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية:

٣ حل المثلث أ ب ح الذي فيه أ = ٦ سم، ب = ٧ سم، $\angle \text{أ} = ٣٠^\circ$

الحل

المطلوب إيجاد ح، $\angle \text{ب}$ ، $\angle \text{ح}$

(قانون جيب التمام)

$$\therefore أ^2 = ب^2 + ح^2 - 2 \times ب \times ح \times \cos \angle \text{أ}$$

$$٦^2 = ٧^2 + ح^2 - 2 \times ٧ \times ح \times \cos ٣٠^\circ$$

$$٠ = ح^2 - ٣\sqrt{٧} \times ح + ١٣$$

$$\text{أي } ح^2 - ٣\sqrt{٧} \times ح + ١٣ = ٠$$

$$\therefore ح = \frac{٣\sqrt{٧} \pm \sqrt{(٣\sqrt{٧})^2 - 4 \times ١ \times ١٣}}{2} \quad (\text{القانون العام لحل المعادلة التربيعية})$$

$$\therefore ح = ١٠,٩٣٥ \text{ أو } ١,١٨٨$$

كل قيمة موجبة لـ ح تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد جتا ب فإنه:

$$\text{جتا ب} = \frac{أ^2 + ح^2 - ب^2}{2 \times أ \times ح}$$

عندما $\hat{C} = 1,188$

$$\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2(7) - 2(6) + 2(1,188)}{2(6)(1,188)}$$

$$\hat{C} = 0,812 = \hat{C}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (144,314^\circ)$$

$$\hat{C} \approx 35,685^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (144,314^\circ + 35,685^\circ)$$

$$\hat{C} \approx 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$

$$\hat{C} \approx 0^\circ$$

عندما $\hat{C} = 10,935$

$$\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2(7) - 2(6) + 2(10,935)}{2(6)(10,935)}$$

$$\hat{C} = 0,812 = \hat{C}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (144,314^\circ)$$

$$\hat{C} \approx 35,685^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (144,314^\circ + 35,685^\circ)$$

$$\hat{C} \approx 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$

$$\hat{C} \approx 0^\circ$$

تفسير: في أحد المثلثين $\hat{C} = 10,935$ ، و $\hat{C} = 35,685^\circ$ ، و $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (144,314^\circ)$ ، وفي المثلث الآخر $\hat{C} = 1,188$ ، و $\hat{C} = 35,685^\circ$ ، و $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (144,314^\circ)$. قارن هذه النتائج مع النتائج التي حصلنا عليها في المثال رقم (٣) من الدرس الأول (ص ١٥٨) الذي يحل المثلث نفسه بمعلومية قانون الجيب.

٤ حاول أن تحل

حل المثلث أ ب ح الذي فيه $\hat{A} = 6^\circ$ ، $\hat{B} = 11^\circ$ سم، و $\hat{C} = 63^\circ$

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام Geometric Applications on the Cosine Rule

مثال

أ ب ح مثلث فيه $\hat{A} = 63^\circ$ سم، $\hat{B} = 27^\circ$ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلاً من $\hat{C}$ ، وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad (\text{محيط المثلث}) \quad \hat{A} = 63^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ \quad (\text{أي}) \quad \hat{B} + \hat{C} = 117^\circ \quad (1)$$

$$\hat{B} - \hat{C} = 27^\circ \quad (\text{معطى}) \quad (2)$$

من (١)، (٢) بالجمع ينتج أن:

$$2\hat{B} = 104^\circ \quad \text{أي أن} \quad \hat{B} = 52^\circ \text{ سم}$$

$$\hat{C} = 117^\circ - \hat{B} = 117^\circ - 52^\circ = 65^\circ$$

ونلاحظ أن $\hat{C}$ هو أصغر أضلاع المثلث أ ب ح∴ $\hat{C}$ هي أصغر زوايا المثلث أ ب ح

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (63^\circ + 52^\circ) = 65^\circ$$

$$\hat{C} = 65^\circ$$

مساحة المثلث $أ ب ح = \frac{1}{2} أ ب ج ا ح$

$$= \frac{1}{2} \times 63 \times 52 \times \sin 2237^\circ \approx 630 \text{ سم}^2$$

٤ حاول أن تحل

١. $\Delta أ ب ح$ فيه $ب = 4$ سم، $أ = 11$ سم، $أ - ح = 1$ سم، أثبت أن $و (أ) = 2$ و $و (ب) = 1$ ، ثم أوجد محيط المثلث $أ ب ح$ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

مثال

٢. $أ ب ح$ شكل رباعي فيه $أ ب = 22$ سم، $و (أ ب) = 65^\circ$ ، $و (أ ب) = 50^\circ$ ، $ب ح = 25$ سم، $و (أ ب) = 18$ سم، أوجد: $و (أ ب ح)$ ، $و (أ ب ح)$.

الحل

في $\Delta أ ب ح$

$$و (أ) = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ) =$$

$$= 115^\circ - 65^\circ =$$

$$\therefore و (أ) = 65^\circ \text{ و } و (ب) = 65^\circ$$

$$\therefore أ ب = ب ح = 22 \text{ سم}$$

في $\Delta ب ح ح$

$$\text{جتا } و (أ ب ح) = \frac{ب(ب) + ب(ب) - ب(ب)}{2 ب(ب)}$$

$$= \frac{22^2 + 22^2 - 25^2}{2 \times 22 \times 22} \approx 0.7137$$

$$\therefore و (أ ب ح) \approx 44.86^\circ$$

$$\text{جتا } و (أ ب ح) = \frac{ب(ب) + ب(ب) - ب(ب)}{2 ب(ب)} = \frac{22^2 + 22^2 - 25^2}{2 \times 22 \times 22} \approx 0.5167$$

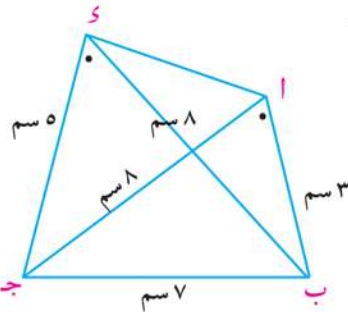
$$\therefore و (أ ب ح) \approx 58.48^\circ$$

٤ حاول أن تحل

١. $أ ب ح$ شكل رباعي فيه $و (أ ب) = 90^\circ$ ، $ب = 10$ سم، $أ = 8$ سم، $و (أ ب) = 30^\circ$ ، أوجد $أ ح$ لأقرب سنتيمتر.

مثال

٢. $أ ب ح$ شكل رباعي فيه $أ ب = 3$ سم، $أ ح = 8$ سم، $ب ح = 7$ سم، $ح = 5$ سم، $ب = 8$ سم، أثبت أن الشكل $أ ب ح$ رباعي دائري.



الحل

في $\triangle$ ا ب ح

$$\frac{1}{2} = \frac{{}^2(٧) - {}^2(٣) + {}^2(٨)}{٣ \times ٨ \times ٢} = \frac{{}^2ب - {}^2ح + {}^2ا}{٢ب \cdot ح} = جتا ا$$

∴ $\angle ا = ٦٠^\circ$ (١)

في $\triangle$ ب ي ح

$$\frac{1}{2} = \frac{{}^2(٧) - {}^2(٨) + {}^2(٥)}{٨ \times ٥ \times ٢} = \frac{{}^2(ح) - {}^2(ب) + {}^2(ا)}{٢(ح) \cdot (ب)} = جتا ي$$

∴ $\angle ي = ٦٠^\circ$ (٢)

∴ $\angle ا = \angle ي = ٦٠^\circ$ وهما مرسومتان على ب ج وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل ا ب ح ي رباعي دائري. (وهو المطلوب).

٤ حاول أن تحل

٤ ا ب ح ي شكل رباعي فيه ا ب = ٩ سم، ب ح = ٥ سم، ح ي = ٨ سم، ي ا = ٩ سم، ا ح = ١١ سم. أثبت أن الشكل ا ب ح ي رباعي دائري.

تمارين ٢ - ٤

أكمل كلاً مما يأتي:

- ١ استخدم لحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما
- ٢ استخدم لحل المثلث بمعلومية قياس زاويتين وطول ضلع فيه
- ٣ في أي مثلث ل م ن يكون: ${}^2ل + {}^2م - {}^2ن =$ ، جتا ل = $\frac{{}^2م + {}^2ن - {}^2ل}{2 \cdot م \cdot ن}$
- ٤ في المثلث ا ب ج، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي°
- ٥ مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧، ٥ سم، ٤، ٧ سم، ٣، ٤ سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي°
- ٦ $\triangle$ س ص ع فيه س = ١٠ سم، ص = ٦ سم، $\angle ع = ٦٠^\circ$ فإن ع =
- ٧ في $\triangle$ ل ك م يكون ${}^2ل + {}^2م - {}^2ك =$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٨ قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هي:
 - أ ١٥٠°
 - ب ١٢٠°
 - ج ٦٠°
 - د ٣٠°
- ٩ في أي مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{{}^2ل + {}^2م - {}^2ن}{2 \cdot ل \cdot م}$ مساوياً:
 - أ جتا ل
 - ب جتا م
 - ج جتا ن
 - د لا شيء مما سبق

١٠ في المثلث س ص ع يكون ص^٢ + ع^٢ - س^٢ = ٢ ص ع ×
 أ جتا س ب جا ع ج جتا ع د جاس

١١ في المثلث ا ب ج، أ: ب: ج = ٢: ٣: ٢ فإن جتا ا تساوى
 أ $\frac{1}{8}$ ب $\frac{1}{8}$ ج $\frac{1}{4}$ د $\frac{3}{4}$

أجب عن الاسئلة الآتية:

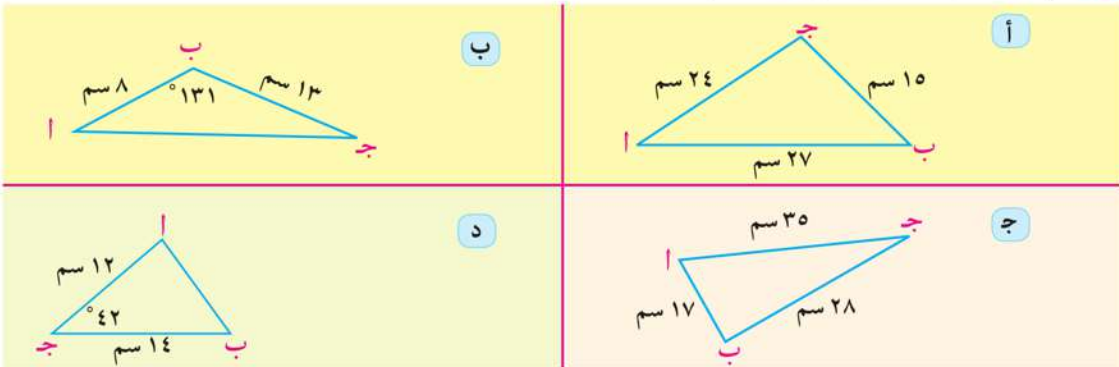
١٢ بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

- أ = أ = ٤ سم، ج = ١٦ سم، و () = ١١٥° ب = أ = ١٢ سم، ج = ٧ سم، و () = ٢٧°
 ج = أ = ٥ سم، ج = ١٢ سم، و () = ٦٥° د = أ = ١٤ سم، ب = ١٨ سم، و () = ٤٢°

١٣ في المثلث ا ب ج إذا كان:

- أ = أ = ٥ سم، ب = ٧ سم، ج = ٨ سم فثبت أن و () = ٦٠°
 ب = أ = ٣ سم، ب = ٥ سم، ج = ٧ سم فثبت أن و () = ١٢٠°
 ج = أ = ١٣ سم، ب = ٧ سم، ج = ١٣ سم فأوجد و ()
 د = أ = ١٣ سم، ب = ٨ سم، ج = ٧ سم فأوجد و ()
 هـ = أ = ١٠ سم، ب = ١٧ سم، ج = ٢١ سم فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث
 و = أ = ٥ سم، ب = ٦ سم، ج = ٧ سم فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث
 ز = أ = ١٧ سم، ب = ١١ سم، و () = ٤٢° ج = مقرباً لأقرب رقمين عشريين
 ح = ب = ١٦ سم، ج = ١٤ سم، و () = ٧٢° ج = مقرباً لأقرب رقمين عشريين

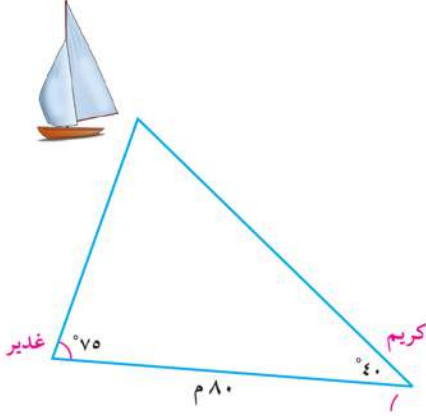
١٤ في التمارين من (أ إلى د) حل المثلث ا ب ج:



١٥) في التمارين من (أ إلى هـ) هل يمكن تكوين مثلث أ ب ج؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:

- أ) $\angle A = 55^\circ$ ، $b = 12$ سم، $c = 7$ سم
 ب) $a = 3$ ، $b = 7$ سم، $\angle C = 63^\circ$ ، $\angle E = 64^\circ$ سم
 ج) $a = 12$ سم، $b = 21$ سم، $\angle A = 90^\circ$
 د) $a = 1$ سم، $b = 5$ سم، $\angle C = 4^\circ$ سم
 هـ) $\angle A = 42^\circ$ ، $a = 7$ سم، $b = 10$ سم

تطبيقات هندسية:



١٦) متوازي أضلاع طولاً ضلعيه المتجاورين ١٨ سم، ٢٦ سم، وقياس الزاوية بينهما 39° ، أوجد طول أصغر قطر له مقرباً لأقرب رقمين عشريين.

١٧) أ ب ج د شكل رباعي فيه $a = 9$ سم، $b = 5$ سم، $c = 8$ سم، $d = 9$ سم، $\angle A = 11^\circ$ سم، أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

١٨) أ ب ج د متوازي أضلاع فيه $a = 9$ سم، $b = 13$ سم، $c = 20$ سم، أوجد طول b و

١٩) أ ب ج د مثلث محيطه ٧٠ سم، $\angle A = 26^\circ$ ، أوجد مساحة سطحه.

٢٠) **الربط بالملاحة البحرية:** يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟

قرب إجابتك لأقرب متر.

٢١) **الربط بالزراعة:** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طول ضلعيها ٩٨ م، ٦٤ م، وقياس الزاوية

المحصورة بينهما 52° فما طول هذا السياج؟

٢٢) **البرهنة النظرية:** أ ب ج د مثلث فيه d منتصف b ج،

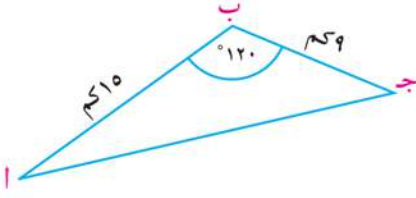
أثبت أن: $(a+b)^2 = (a+c)^2 + (b+c)^2$

وإذا كان: $a = 5$ سم، $b = 8$ سم، $c = 12$ سم أوجد d .

٢٣) **البرهنة النظرية (للمتفوقين):** في المثلث أ ب ج إذا كان: $(a+b+c)^2 = (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b-c)^2$

فأثبت أن: $a^2 = b^2 + c^2$ ، $\angle A = 90^\circ$ ، ثم أوجد $\angle C$ عندما $a = 1$

تطبيقات حياتية:



٢٤ مسافات: يركب كريم دراجته البخاريه ليقطع المسافة من

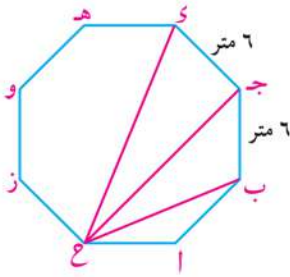
المدينة أ إلى المدينة جـ مروراً بالمدينة ب بسرعة منتظمة

مقدارها ٣٦ كم/س، ثم يعود من المدينة جـ إلى المدينة أ

بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. أوجد:

أ المسافة بالكيلو متر بين المدينة جـ، المدينة أ

ب الزمن الكلي بالدقيقة للرحلة كلها.



٢٥ التصميم المعماري: صمم مهندس معماري مبنى على شكل مثنى منتظم، طول

كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار ع ب، ع جـ، ع د.

٢٦ اكتشف الخطأ: أ ب جـ مثلث فيه أ = ٧ سم، ب = ١٠ سم، جـ = ٥ سم

و (أ) = ٦٢، ٤١. أوجد و (ب)

حل كريم

$$\therefore \text{جتاب} = \frac{1^2 + 7^2 - 10^2}{2 \times 1 \times 7} = \frac{1 + 49 - 100}{14} = \frac{-50}{14} \approx -3.5714$$

$$\therefore \text{و (ب)} \approx 111.8^\circ$$

حل زياد

$$\therefore \frac{1}{\text{جـ ب}} = \frac{1}{\text{جـ أ}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{جـ ب}} = \frac{10}{41.62} \approx 0.2408$$

$$\therefore \text{جـ ب} = \frac{1}{0.2408} \approx 4.15$$

$$\therefore \text{و (ب)} = 71.09^\circ$$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

ملخص الوحدة

١ قانون (قاعدة) الجيب: في أي مثلث، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أي أنه في أي مثلث $أ ب ج$ يكون:

$$\frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج} = 2 \text{ نق}$$

(حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث $أ ب ج$)

وقد أمكن استخدام هذا القانون (القاعدة) في حل المثلث في الحالات التالية:

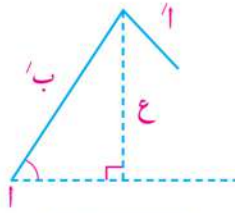
◀ إذا علم طول أحد أضلاعه وقياسا زاويتين.

◀ إذا علم طولاً ضلعين فيه وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

٣ تحديد عدد المثلثات والحالة المبهمة:

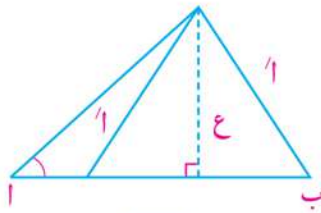
الحالة المبهمة: التي يكون معلوماً فيها طولاً ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

وبفرض أن طولاً الضلعين هما $أ$ ، $ب$ والزاوية الحادة $أ$ ، ارتفاع المثلث $ع = ب \sin أ$ فإن:



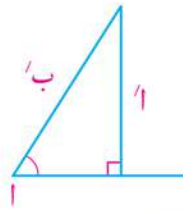
لا يوجد مثلث

$$ع > ب$$



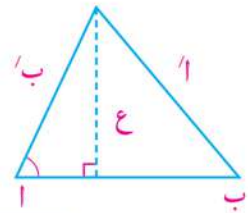
مثلثان

$$ع > ا > ب$$



مثلث وحيد

$$ع = ا$$



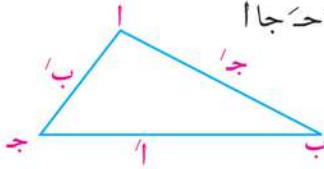
$$ع \leq ا$$

مساحة سطح أي مثلث = نصف حاصل ضرب طولى أي ضلعين متجاورين $\times$ جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$\text{مساحة سطح المثلث } أ ب ج = \frac{1}{2} أ ب \sin ج = \frac{1}{2} أ ج \sin ب = \frac{1}{2} ب ج \sin أ$$

قانون (قاعدة) جيب التمام: ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث $أ ب ج$ يكون



$$أ^2 = ب^2 + ج^2 - 2 ب ج \cos أ \quad \text{ومنه} \quad \cos أ = \frac{ب^2 + ج^2 - أ^2}{2 ب ج}$$

$$ب^2 = أ^2 + ج^2 - 2 أ ج \cos ب \quad \text{ومنه} \quad \cos ب = \frac{أ^2 + ج^2 - ب^2}{2 أ ج}$$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب \cos ج \quad \text{ومنه} \quad \cos ج = \frac{أ^2 + ب^2 - ج^2}{2 أ ب}$$

استخدام قانون جيب التمام في حل المثلثات: يمكن استخدام قاعدة جيب التمام في حل المثلث إذا علم:

◀ طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

◀ أطوال أضلاعه الثلاثة.

◀ طولاً ضلعين وقياس زاوية (حيث يقدم قانون جيب التمام مدخلاً بديلاً للحالة المبهمة، والتي سبق

دراستها في قانون الجيب، حيث إنه لإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام، نحصل

على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الممكنة الناتجة.



اختبار تراكمي



أسئلة الاختيار من متعدد

- ١) بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة جتا 120° :
 أ $\frac{1}{2}$ ب $-\frac{1}{2}$ ج $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ٢) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبان؟
 أ 52° ب 150° ج 200° د 315°
- ٣) ما قيمة ع في هذا المنحدر؟ مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة:
 أ ٥,٨ ب ٦,١ ج ١٢,٣ د ١٩,١
- ٤) ما قيمة أ لأقرب جزء من عشرة في Δ أ ب ج الذي فيه $\angle ب = 6^\circ$ سم، $\angle ج = 7^\circ$ سم، و $\angle ا = 30^\circ$:
 أ ٣,٤ سم ب ٣,٥ سم ج ٣,٦ سم د ٦,٦ سم
- ٥) إذا كان ضلع النهاية لزاوية قياسها θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ فإن ظا θ تساوي:
 أ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ب $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ج $\frac{4}{\sqrt{3}}$ د $\sqrt{3}$
- ٦) المتطابقة المثلثية التي تربط بين ظا هـ، قا هـ تعطى على الصورة:
 أ $\text{قا}^2 \text{هـ} - \text{ظا}^2 \text{هـ} = 1$ ب $\text{ظا}^2 \text{هـ} + \text{قا}^2 \text{هـ} = 1$ ج $\text{ظا}^2 \text{هـ} - \text{قا}^2 \text{هـ} = 1$ د $(1 + \text{ظا}^2 \text{هـ}) = \text{قا}^2 \text{هـ}$
- ٧) نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ج، الذي فيه $\angle ا = 60^\circ$ ، $\angle ب = 30^\circ$ سم يكون طوله:
 أ ٢ سم ب $\sqrt{3}$ سم ج $2\sqrt{3}$ سم د $\frac{\sqrt{3}}{2}$ سم
- ٨) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}$ مساوياً:
 أ جتام ب جان ج جتال د جام

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

- ٩) أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية فيما يأتى:
 أ جا 225° ب قا 150° ج ظا $\frac{\pi}{4}$ د جتا $\frac{\pi}{6}$
- ١٠) أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركين مع ضلع النهاية مع كل زاوية من الزوايا الآتية:
 أ 135° ب 315° ج 45° د $\frac{\pi}{3}$
- ١١) حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:
 أ 300° ب 135° ج $\frac{\pi}{8}$ د $\frac{\pi}{4}$
- ١٢) أوجد طول القوس المقابل للزاوية 210° في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم.
 [إرشاد: طول القوس (ل) = هـ $\times$ نق]

١٣ إذا كان $\angle A = \frac{\pi}{3}$ حيث $\frac{\pi}{3} > \pi > \frac{\pi}{4}$ ، ظا ب $\frac{3}{4} = \pi$ ، أوجد قيمة $\angle A$ جتا ب + جتا ا جاب.

إرشادات للاختبار: السؤال (١٣) أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين ا، ب، واضعاً في الاعتبار الربع الذي تقع فيه كل زاوية ثم عوض في المقدار المعطى.

١٤ في المثلث س ص ع إذا كان $\angle S = 10^\circ$ ، و $\angle S = 30^\circ$ ، و $\angle S = 45^\circ$ ، فأوجد ص مقرباً لرقم عشري واحد.

١٥ ا ب ج مثلث فيه $\angle A = 4^\circ$ سم، $\angle B = 5^\circ$ سم، $\angle C = 6^\circ$ سم، أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث، ثم أوجد مساحته.

أسئلة ذات إجابات طويلة:

١٦ ا ب ج مثلث فيه و $\angle A = \frac{\pi}{3}$ و $\angle B = \frac{\pi}{4}$ و $\angle C = \frac{\pi}{6}$ ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه $\angle S = 10^\circ$ ، أوجد مساحة المثلث ا ب ج.

١٧ ا ب ج مثلث فيه $\angle A = 13^\circ$ سم، $\angle B = 14^\circ$ سم، $\angle C = 15^\circ$ سم، أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

١٨ حل المثلث ل م ن الذي فيه $\angle M = 17^\circ$ سم، و $\angle L = 16^\circ 33'$ ، و $\angle N = 19^\circ 44'$

١٩ حدد إذا كان المثلث ا ب ج في كل مما يأتي حل واحد، أم حلان،

أم ليس له حل. أوجد عدد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أ $\angle A = 20^\circ$ سم، $\angle B = 28^\circ$ سم، و $\angle C = 42^\circ$

ب $\angle A = 5^\circ$ سم، $\angle B = 7^\circ$ سم، و $\angle C = 60^\circ$

ج $\angle A = 15^\circ$ سم، $\angle B = 10^\circ$ سم، و $\angle C = 120^\circ$

٢٠ مستعيناً بالشكل المقابل أثبت أن:

$$\angle A^2 = \angle B^2 + \angle C^2 - 2 \angle B \angle C \cos A$$

(إرشاد: استخدام قانون البعد بين نقطتين لإيجاد $\angle B$)

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ارجع إلى	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١
٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١

اختبارات عامة

الجبر

الاختبار الأول

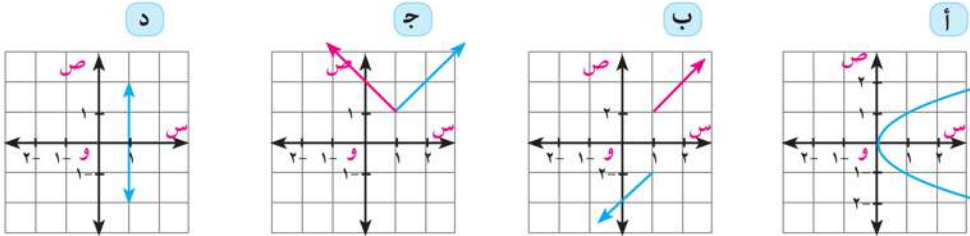
أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) إذا كان $٢ = ٣٥$ فإن $٢٥ = ٣$

- أ ١٠ ب ٦ ج ٥ د ٤

٢) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو:



٣) إذا كان منحنى ص = لو، (١ - اس) يمر بالنقطة $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ فإن $ا =$

- أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٨

٤) الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هى:

أ د_١(س) = س + ٢ ب د_٢(س) = س^٢ ج د_٣(س) = |س| د د_٤(س) = ٥

السؤال الثانى:

١) عين مجال كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = $\frac{س}{س-١}$ ب س(س) = $\frac{١}{١+س} + \frac{١-س}{١-س}$

٢) إذا كانت د دالة حيث د(س) = $\begin{cases} س^٢ ، & س < ٠ \\ س-٢ ، & س > ٠ \end{cases}$ فارسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

السؤال الثالث:

- ١ إذا كان د: ع $\leftarrow$ ع حيث د (س) = ٣ - ١، د: [٣، ٢] $\leftarrow$ ع حيث د (س) = ٣ - ٢ س فارسم الدالة (د + ١) (س) محدداً مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.
- ٢ أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س + ١ ومثلها في شكل واحد.

السؤال الرابع:

- ١ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
- أ لو س = ١ - لو (س - ٣) ب |س + ٢| = |س - ٣|
- ٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^٢ في رسم كل من:
- أ د (س) = د (س + ٢) ب د (س) = س^٢ + ٣

السؤال الخامس:

- ١ أوجد مجموعة حل المتباينة |س - ٢| ≤ ٧
- ٢ أوجد مجموعة حل المعادلة: س^٤ - ١٠ س^٢ + ٩ = صفر

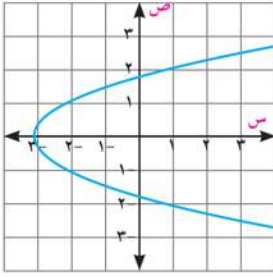
الجبر

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

- ١ إذا كانت ٣ - س = ٢ - س^٢ فإن س =
- أ ٣ ب ٢ - ج صفر د ٢
- ٢ إذا كانت ص = $\sqrt{s}$ لكل س ≤ . فإن الدالة العكسية لها ص =
- أ ص = $\frac{1}{s^2}$ ب ص = س^٢ ج ص = س^٣ - ١ د ص = س^{-1/3}
- ٣ إذا كانت (د) دالة فردية على [س، س] فإن د(-س) + د(س) =
- أ ٢ س ب غير معرفة ج ٢ - س د صفر



٤ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذي معادلته

أ س = صفر ب ص = صفر

ج ص = -٢ د س = ٢

السؤال الثاني:

١ إذا كان د(س) = $\frac{1}{1+(س)}$ + $\frac{1}{1-(س)}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.

٢ اختصر لابسطة صورة: لو $\frac{1}{ب} \times \frac{2}{ج} \times \frac{3}{د}$ لو ج

السؤال الثالث:

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل مما يأتي:

أ د(س) = |س| + ١ ب د(س) = |س| - ٢

٢ ارسم منحنى كل من الدوال الآتية و حدد مداها ثم ابحث اطرافها:

أ د(س) = $\sqrt{٢ - س^٢ - ٤س + ٤}$ ب د(س) = |س| - ٢ - ٤س + ١ حيث س $\in [٠, ٤]$

السؤال الرابع:

١ ابحث نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س جتا س ب د(س) = $\begin{cases} س^٢ & س \leq ٠ \\ |س| & س > ٠ \end{cases}$

ج د(س) = س^٢ |س| - ١

٢ أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتي:

أ |س| + س = ٠ ب |٢س - ٣| - |٦س - ٤| < ٠

السؤال الخامس:

١ إذا كان د(س) = س^٢ - ١ ، س(س) = ١ + س فارسم الدالة $\frac{د}{س}$ (س) مبيئاً مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرافها.

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\frac{١٦ \times ٨ \text{ لو}}{٦٤} + ٢٥ \text{ لو}$

الاختبار الثالث

تفاضل وحساب مثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

$$١) \text{ نها } \frac{س^٥ + ٣}{س^٢(س^٣ + ٣)} = \frac{س^٥ + ٣}{س^٥(س^٣ + ٣)}$$

$$أ) \frac{٥}{٨} \quad ب) ١ \quad ج) \frac{١}{٢} \quad د) \frac{٥}{٣}$$

٢) في Δ أ ب ج إذا كان ٤ ج أ = ٣ ج ب = ٦ ج ج فإن $\angle$ ج $\approx$

$$أ) ٨٩^\circ \quad ب) ٢٩^\circ \quad ج) ٥٧^\circ \quad د) ٨٢^\circ$$

$$٣) \text{ إذا كانت د(س) = } \left. \begin{array}{l} \frac{١-س^٢}{١-س} \\ \frac{١-س^٢}{١٢} \end{array} \right\} \text{ متصلة عند س = ١ فإن أ تساوى:}$$

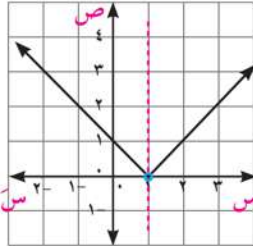
$$أ) \text{ صفر} \quad ب) ٢- \quad ج) ٢ \quad د) ١$$

$$٤) \text{ في } \Delta \text{ س ص ع المقدار } \frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢سص} \text{ يساوى:}$$

$$أ) \text{ جتا س} \quad ب) \text{ جتا ص} \quad ج) \text{ جتا ع} \quad د) \text{ جاع}$$

السؤال الثاني:

$$١) \text{ أوجد } \text{نها} \frac{س^٣ - ٣٢}{س^٢ - ٢س + ٣ - ١٠} \quad ب) \text{ نها} \frac{\text{جا } ٥س + \text{جا } ٣س}{س}$$

٢) حل المثلث Δ أ ب ج الحاد الزوايا الذى فيه أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم.

السؤال الثالث:

١) من الرسم البياني المقابل أوجد:

$$أ) \text{ نها د(س)} \quad ب) \text{ نها د(س)} \quad ج) \text{ د(١)} =$$

٢) أ ب ج د متوازي الأضلاع فيه $\angle$ أ = ٥٠° ، و $\angle$ ب ج = ٧٠° ، ب د = ٨ سم أوجد محيط متوازي الأضلاع.

السؤال الرابع:

١) أ ب ج مثلث فيه أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، و $\angle$ أ = ٤٠° أوجد $\angle$ ب.

٢) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

$$\text{د(س)} = \left. \begin{array}{l} \frac{س^٢ - ١}{س} \\ \frac{س^٢ - ١٢}{س} \end{array} \right\} \text{ ، } \begin{array}{l} س \leq ٢ \\ س > ٢ \end{array}$$

السؤال الخامس:

- ١) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{\text{ظا س}}{\text{جا س}} \text{ عندما } س < ٠ \\ \frac{\text{س} + ٥}{\text{س} + ٣} \text{ عندما } س > ٠ \end{array} \right\}$ عندما س $\rightarrow$.
- ٢) نها $\frac{\text{س} - ٤ - \sqrt{١٥ + \text{س}}}{\text{س} - ١}$ س $\rightarrow$ ١

تفاضل وحساب مثلثات

الاختبار الرابع

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

- ١) نها $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٩}$ س $\rightarrow$ ٣
- أ ٣ ب $\frac{١}{٩}$ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٦}$
- ٢) في Δ ا ب ج يكون جتا (ا + ب) =
- أ $\frac{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{ج}^٢}{٢\text{ا}\text{ب}}$ ب $\frac{\text{ا}^٢ + \text{ج}^٢ - \text{ب}^٢}{٢\text{ا}\text{ب}}$ ج $\frac{\text{ب}^٢ + \text{ج}^٢ - \text{ا}^٢}{٢\text{ب}\text{ج}}$ د $\frac{\text{ج}^٢ - \text{ا}^٢ - \text{ب}^٢}{٢\text{ا}\text{ب}}$
- ٣) ا ب ج مثلث فيه $\frac{\text{جا}}{٣} = \frac{\text{ج ب}}{٥} = \frac{\text{جا ج}}{٤}$ فإن أ: ب: ج =
- أ ٨: ٥: ٦ ب ٦: ٥: ٨ ج ٤: ٢: ٧ د ٦: ٥: ٣
- ٤) نها $\frac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٣}}{١ + \text{س}^٢}$ س $\rightarrow$ ∞
- أ ١ ب $\frac{٣}{٢}$ ج $\frac{١}{٢}$ د ٣

السؤال الثاني:

- ١) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} \text{ س} \neq ٣ \\ \text{متصلة عند س} = ٣ \text{ فأوجد قيمة ا.} \end{array} \right\}$ س = ٣
- ٢) ا ب ج مثلث فيه $\frac{١}{٣} \text{ جا ا} = \frac{١}{٤} \text{ جا ب} = \frac{١}{٥} \text{ جا ج}$ وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

السؤال الثالث:

- ١) أوجد: نها $\frac{١ - \text{جتا س} + \text{جا س}^٣}{١ - \text{جتا س} + \text{ظا س}^٢}$ س $\rightarrow$.
- ٢) حل المثلث ا ب ج الذي فيه أ = ٩ سم، ب = ١٥ سم، و(ج) = ١٠٦°

السؤال الرابع:

١ أوجد نها $\frac{(س+٣)^٠-١}{س^٢-٤}$ $\lim_{س \rightarrow ٢}$

٢ ا ب ج د شكل رباعي فيه ا ب = ٢٧ سم، ب ج = ١٢ سم، ج د = ٨ سم، د ا = ١٢ سم، ا ج = ١٨ سم. أثبت أن ا ج ينصف د ب ا د ثم أوجد مساحة الشكل ا ب ج د.

السؤال الخامس:

١ أوجد قيمة: نها $\frac{\sqrt{س+٤}-٢}{س^٢+س}$ $\lim_{س \rightarrow \infty}$ **ب** نها $\frac{١}{س}$ $\lim_{س \rightarrow \infty}$

٢ شكل خماسي منتظم محيطه ٣٠ سم. أوجد مساحة سطحه.

مواصفات الكتاب

مقاس الكتاب	$\frac{1}{8} (٨٢ \times ٥٧)$
عدد صفحات الكتاب بالغلاف	١٨٨
طباعة المتن	٤ لون
طباعة الغلاف	٤ لون
ورق المتن	٧٠ جرام
رقم الكتاب	٢٤٠

[http:// elearning.moe.gov.eg](http://elearning.moe.gov.eg)

شركة البركة للطباعة