



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

تأليف

أ. عمر فؤاد جاب الله

د. عصام وصفى روفائيل

أد. عفاف أبو الفتوح صالح

أ. سيرافيم الياس اسكندر

أ. محمود ياسر الخطيب

إشراف علمى

مستشار الرياضيات

مراجعة

أ/سمير محمد سعداوي

أ/فتحي أحمد شحاتة

إشراف تربوى

(مركز تطوير المناهج)

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

٢٠٢٠ - ٢٠٢١

الاسم:

الفصل:

المدرسة:

العنوان:

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

أبناءنا الأعزاء :

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثانى الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستك للرياضيات عملاً ممتعاً ومفيداً له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدرُوا، دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية، وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم وما سبق أن تم دراسته فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسباً داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات :

يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خارجى، واختبار فى نهاية كل وحدة، وفى نهاية الفصل الدراسى اختبارات عامة تساعدك على مراجعة المقرر كاملاً. نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لك ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

٢	مراجعة
٤	الدرس الأول: الجذر التكعيبي للعدد النسبي
٧	الدرس الثاني: مجموعة الأعداد غير النسبية $\mathbb{Q}$
٩	الدرس الثالث: إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي
١٣	الدرس الرابع: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
١٥	الدرس الخامس: علاقة الترتيب في $\mathbb{R}$
١٧	الدرس السادس: الفترات
٢٣	الدرس السابع: العمليات على الأعداد الحقيقية
٢٨	الدرس الثامن: العمليات على الجذور التربيعية
٣٣	الدرس التاسع: العمليات على الجذور التكعيبية
٣٥	الدرس العاشر: تطبيقات على الأعداد الحقيقية
٤٠	الدرس الحادي عشر: حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في $\mathbb{R}$

الوحدة الثانية: العلاقة بين متغيرين

٤٤	الدرس الأول: العلاقة بين متغيرين
٤٨	الدرس الثاني: ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية

الوحدة الثالثة: الإحصاء

٥٤	الدرس الأول: جمع البيانات وتنظيمها
٥٧	الدرس الثاني: الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع النازل وتمثيلهما بيانياً
٦١	الدرس الثالث: الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال

الوحدة الرابعة: متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين

٦٨	الدرس الأول: متوسطات المثلث ..
٧٢	الدرس الثاني: المثلث المتساوي الساقين ..
٧٤	الدرس الثالث: نظريات المثلث المتساوي الساقين ..
٨٣	الدرس الرابع: نتائج علي نظريات المثلث المتساوي الساقين ..

الوحدة الخامسة: التباين

٨٩	الدرس الأول: التباين ..
٩٣	الدرس الثاني: المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث ..
٩٧	الدرس الثالث: المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث ..
١٠٢	الدرس الرابع: متباينة المثلث ..

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	$\perp$	عمودي على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	$//$	يوازي
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{ab}$	القطعة المستقيمة ab
ن	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{ab}$	الشعاع ab
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{ab}$	المستقيم ab
$\sqrt[n]{}$	الجذر التربيعي للعدد a	φ و $(\angle)$	قياس زاوية $\angle$
$\sqrt[n]{}$	الجذر التكعيبي للعدد a	$\sim$	تشابه
$[a, b]$	فترة مغلقة	$<$	أكبر من
$[a, b[$	فترة مفتوحة	$\leq$	أكبر من أو يساوي
$[a, b[$	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	$>$	أقل من
$[a, b]$	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	$\geq$	أقل من أو يساوي
$[a, \infty[$	فترة غير محدودة	$\mathcal{L}(A)$	احتمال وقوع الحدث A
$\equiv$	تطابق		

الأعداد الحقيقية



مراجعة

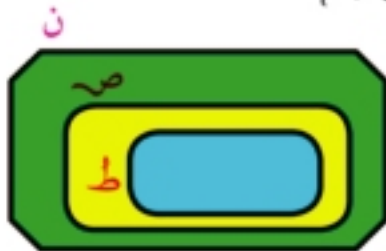
فكر وناقش

مجموعات الأعداد

- مجموعة أعداد العد : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الطبيعية : $\mathbb{P} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\mathbb{Z}^-$: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$



$$\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

القيمة المطلقة للعدد النسبي:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right|, \quad 0 = |0|, \quad 3 = |3|, \quad 7 = |7|$$

إذا كان $|a| = 0$ فإن $a = 0$

الصورة القياسية للعدد النسبي هي:

$$a \times 10^n \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq |a| < 10$$



مثلاً العدد $٢٥,٣٢ \times ١٠^٤$ في صورته القياسية = $٢,٥٣٢ \times ١٠^٥$
 في صورته القياسية = $٥,٣ \times ١٠^٤$

العدد النسبي المربع الكامل

هو العدد الموجب الذي يمكن كتابته على صورة مربع عدد نسبي أي (عدد نسبي)^٢

مثل ١، ٤، ٢٥، $\frac{٩}{١٦}$ ، $٢\frac{١}{٤}$ ، ...

العدد النسبي المكعب الكامل

هو العدد النسبي الذي يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبي أي (عدد نسبي)^٣

مثل ١، ٨، -٢٧، -٢١٦، $\frac{٨}{١٢٥}$ ، ...

الجزر التربيعي للعدد النسبي المربع الكامل

○ الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب هو العدد الذي مربعه يساوي أ

○ $\sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$

○ كل عدد نسبي مربع كامل له جذران تربيعيان كل منهما معكوس جمعي للآخر وهما

$\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{٧}$

مثلاً العدد $\frac{١٦}{٢٥}$ له جذران تربيعيان هما $\frac{٤}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٥}$

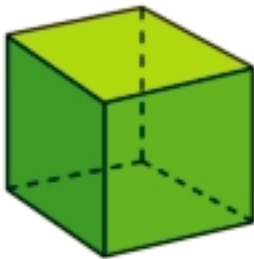
○ $\sqrt[٣]{٩}$ يعني الجذر التربيعي الموجب للعدد ٩ وهو ٣

○ $\sqrt[٣]{\left(\frac{١}{ب}\right)} = \left|\frac{١}{ب}\right|$ أي أن $\sqrt[٣]{(٧-)} = \sqrt[٣]{٧}$ $٧ = |٧-|$



الجذر التكعيبي للعدد النسبي

فكر وناقش



سبق أن تعلمت أن:

حجم المكعب = طول الحرف $\times$ نفسه $\times$ نفسه

أكمل

المكعب الذي طول حرفه ٧ سم يكون حجمه $\dots \times \dots \times \dots = \dots$ سم^٣

هيا نفكر

٥	١٢٥
٥	٢٥
٥	٥
١	١

إذا كان لدينا مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣، فما طول حرفه؟

نبحث عن ثلاثة أعداد متساوية حاصل ضربها = ١٢٥

يمكن تحليل العدد ١٢٥ إلى عوامله الأولية .

$$٥ \times ٥ \times ٥ = ١٢٥$$

∴ المكعب الذي حجمه ١٢٥ سم^٣، يكون طول حرفه ٥ سم.

تسمى ٥ الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥، وتكتب $\sqrt[3]{١٢٥} = ٥$

سوف تتعلم

كيفية إيجاد الجذر التكعيبي لعدد نسبي باستخدام التحليل.

إيجاد الجذر التكعيبي لعدد نسبي باستخدام الآلة الحاسبة.

حل معادلات تشمل إيجاد الجذر التكعيبي.

حل تطبيقات على الجذر التكعيبي لعدد نسبي.

المصطلحات الأساسية

جذر تكعيبي.

الجذر التكعيبي للعدد النسبي أ هو العدد الذي مكعبه يساوي أ

يرمز للجذر التكعيبي للعدد النسبي أ بالرمز $\sqrt[3]{}$

الجذر التكعيبي لعدد نسبي موجب يكون موجبًا، مثلًا $\sqrt[3]{١٢٥} = ٥$

الجذر التكعيبي لعدد نسبي سالب يكون سالبًا، مثلًا $\sqrt[3]{-٨} = -٢$ لماذا؟

$\sqrt[3]{٠} = ٠$ صفر = صفر

$\sqrt[3]{١} = ١$



إيجاد الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل:

○ يمكن تحليل العدد إلى عوامله الأولية.

○ يمكن استخدام الآلة الحاسبة.

لاحظ أن العدد النسبي المكعب الكامل له جذر تكعيبي واحد وهو عدد نسبي أيضًا، لماذا؟



أمثلة



١ استخدم التحليل لإيجاد قيمة كل من $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ ، $\sqrt[3]{216}$ ، $\sqrt[3]{1000}$ وتحقق من صحة إجاباتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad \frac{27}{8} = 3 \frac{3}{8}$$

$$\frac{2}{2} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{3 \frac{3}{8}}$$

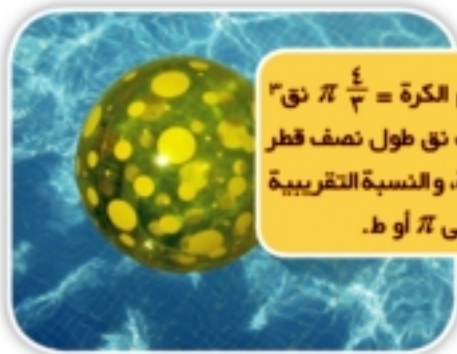
$$\begin{array}{r|l} 2 & 216 \\ 2 & 108 \\ 2 & 54 \\ 2 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad 6 = 3 \times 2 = \sqrt[3]{216}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1000 \\ 2 & 500 \\ 2 & 250 \\ 2 & 125 \\ 5 & 25 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array} \quad 10 = 5 \times 2 = \sqrt[3]{1000}$$

استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من صحة إجاباتك باستخدام

٢ أوجد طول نصف قطر الكرة التي حجمها ٤٨٥١ سم^٣ ($\frac{4}{3}\pi = \pi$)

الحل



حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^٣
حيث نق طول نصف قطر
الكرة، والنسبة التقريبية
تسمى π أو ط.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 9271 \\ 3 & 3087 \\ 3 & 1029 \\ 7 & 343 \\ 7 & 49 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}$$

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^٣

$$\frac{4}{3}\pi \times \frac{4851}{\pi} = 4851$$

$$\frac{9271}{8} = \frac{7 \times 3 \times 4851}{22 \times 4} = \text{نق}^3$$

$$\frac{7 \times 3}{22} = \text{نق}^3$$

$$\text{نق} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 3}{22}} = 10.5 \text{ سم}$$





تدرب

أوجد طولَ قطرِ الكرة التي حجمها $113,04$ سم³ ($\pi = 3,14$)

مثال



حل كلًّا من المعادلات الآتية في ن:

ب س $8 = 9 + 2$

د س $54 = 10 - 2(1 - 2)$

أ س $8 = 2$

ج س $125 = 2(2 - 2)$

الحل

ب س $8 = 9 + 2$

س $9 - 8 = 2$

س $1 = 2$

س $1 = \sqrt{1 - 2}$ ∴ مجموعة الحل = {1-}

د س $54 = 10 - 2(1 - 2)$

س $64 = 2(1 - 2)$

س $\sqrt{64} = 1 - 2$

س $8 = 1 - 2$

س $5 = 2$

س $\frac{5}{2} = 2$ ∴ مجموعة الحل = { $\frac{5}{2}$ }

أ س $8 = 2$

س $\sqrt{8} = 2$

∴ مجموعة الحل = {2}

ج س $125 = 2(2 - 2)$

س $\sqrt{125} = 2 - 2$

س $5 = 2 - 2$

س $7 = 2$

∴ مجموعة الحل = {7}



تدرب

حلّ المعادلات الآتية في ن: $27 = 2(1 + 2)$ ، $27 = 2(1 + 2)$



فكر وناقش

سوف تتعلم

مجموعة الأعداد غير النسبية.

المصطلحات الأساسية

عدد غير نسبي.

سبق أن علمت أن: العدد النسبي هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة

$$\frac{a}{b} : \text{حيث } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

فمثلاً: عند حل المعادلة $4x = 25$

$$x = \frac{25}{4}$$

$$\therefore x = \pm \frac{5}{2}$$

ونلاحظ أن كلاً من $\frac{5}{2}$ ، $-\frac{5}{2}$ عدد نسبي.

ولكن توجد كثير من الأعداد التي لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{a}{b}$

$$\text{حيث } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

فمثلاً: عند حل المعادلة $x^2 = 2$ فإننا لا نستطيع إيجاد عدد نسبي مربعه

يساوي 2

هو العدد الذي لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث

$$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

العدد غير النسبي

ومن أمثلة الأعداد غير النسبية:

أولاً: الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التي ليست مربعات كاملة

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$$

ثانياً: الجذور التكعيبية للأعداد التي ليست مكعبات كاملة

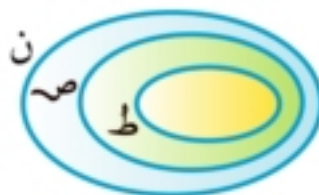
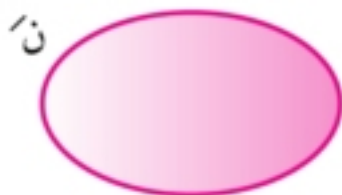
$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \dots$$

ثالثاً: النسبة التقريبية π

حيث إنه لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأي من هذه الأعداد. لماذا؟



ومثل هذه الأعداد وغيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$.



$$\mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

فكر هل $\sqrt{2} - 1$ عدد غير نسبي؟ لماذا؟

مثال

أكمل باستخدام أحد الرمز $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{Q}$.

..... $\ni \sqrt{8} - \sqrt{2}$ **أ**

..... $\ni \sqrt{6}$ **ب**

..... $\ni \pi$ **ج**

..... $\ni \sqrt{\frac{1}{4}}$ **د**

..... $\ni$ صفر **هـ**

..... $\ni \sqrt{4} - \sqrt{2}$ **و**

..... $\ni \left| \frac{3}{5} \right|$ **ز**

..... $\ni 4.7 \times 10^{-5}$ **ح**

..... $\ni \sqrt{9} - \sqrt{4}$ **ط**

ناقش معلمك في حل المثال السابق



إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي

فكر وناقش

سوف تتعلم

- إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي.
- تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد.
- حل معادلات في $\mathbb{N}$.

هل تستطيع إيجاد عددين نسبيين ينحصر بينهما العدد غير النسبي $\sqrt{2}$ ؟

نلاحظ أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ أي أن $1 < \sqrt{2} < 2$
أي أن $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$.

ولإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{2}$ نفحص قيم الأعداد التالية .

$$1,69 = 1,3^2 , 1,44 = 1,2^2 , 1,21 = 1,1^2$$

$$2,25 = 1,5^2 , 1,96 = 1,4^2$$

$$2,25 > 2 > 1,96$$

$$1,5 > \sqrt{2} > 1,4$$

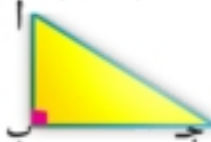
$$\text{أي أن } \sqrt{2} = 1,4 + \text{كسر عشري}$$

$$\text{أي أن } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

استخدم الآلة الحاسبة لتأكيد صحة إجابتك.

تمهيد: (في الشكل المقابل) المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب فيكون:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$



وتسمى بنظريه فيثاغورس وستدرس بالتفصيل بمنهج الهندسة

تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد

كيف نحدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2}$ على خط الأعداد .

إذا رسمنا المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب،

والمساوي الساقين بحيث أ ب = ب ج = وحدة طول واحدة

$$\text{فإن } AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2} \text{ وحدة طول.}$$



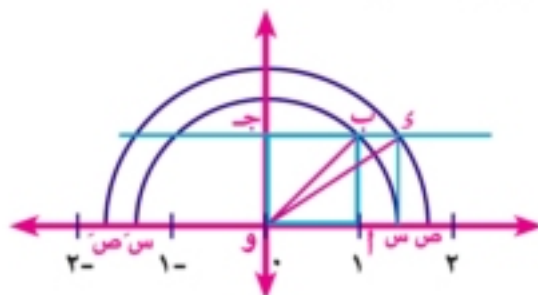
- ارسم خط الأعداد واركنز بسنّ الفرجار في نقطة و، وبفتحة تساوي طول $\overline{أ ج}$ ارسم قوساً يقطع خط الأعداد على يمين و في نقطة س، وهذه النقطة تمثل العدد $\sqrt{2}$



- يمكن بنفس فتحة الفرجار تحديد النقطة س التي تمثل العدد $\sqrt{2}$ حيث س على يسار النقطة و **فخر** حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2} + 3$ على خط الأعداد.

نشاط

ارسم المربع و أ ب ج الذي طول ضلعه وحدة طول.



طول قطره $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ وحدة طول.

∴ و ب $\sqrt{2}$

- اركنز بالفرجار في و، وارسم نصف دائرة طول نصف قطرها = طول و ب $\sqrt{2}$
- و أ $\cap$ نصف الدائرة = {س، س}، حيث س تمثل العدد $\sqrt{2}$ ، س تمثل $\sqrt{2}$
- ارسم س ك // أ ب ويقطع ج ب في ك
- $(و ك)^2 = (و س)^2 + (س ك)^2 = (\sqrt{2})^2 + (1)^2 = 2 + 1 = 3$
- ∴ و ك $\sqrt{3}$

- اركنز بالفرجار في و وبفتحة تساوي طول و ك ارسم نصف دائرة يقطع و أ في ص، ص
- ∴ و ص $\sqrt{3}$ أي أن النقطة ص تمثل العدد $\sqrt{3}$ ، والنقطة ص تمثل العدد $\sqrt{2}$
- أكمل بنفس الطريقة لتمثيل الأعداد $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، ... وكذلك $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، ...



أوجد :

أ عددان صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{5}$



- ب عددین صحیحین متتالین ينحصر بينهما العدد $\sqrt{12}$
 ج عددین صحیحین متتالین ينحصر بينهما العدد $\sqrt{10}$
 د عددین صحیحین متتالین ينحصر بينهما العدد $\sqrt{20}$

اثبت أن

- ١ $\sqrt{3}$ ينحصر بين ١,٨ ، ١,٧ ب $\sqrt{15}$ ينحصر بين ٢,٥ ، ٢,٤
 ٢ أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{11}$
 ٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt{2}$
 ٥ ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقطة التي تمثل العدد غير النسبي $\sqrt{3}$
 ٦ ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقطة التي تمثل العدد غير النسبي $\sqrt{2} + 1$

مثال (١)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في $\mathbb{R}$:

- أ $2 = x^2$ ب $5 = x^2$ ج $1 = \frac{x}{3}$ د $8 = x^2$

الحل

أ $2 = x^2$
 $\therefore x = \pm \sqrt{2}$
 مجموعة الحل $\{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$

ب $5 = x^2$
 $\therefore x = \pm \sqrt{5}$
 مجموعة الحل $\{ \sqrt{5}, -\sqrt{5} \}$

ج $1 = \frac{x}{3}$
 $\therefore 1 \times \frac{3}{1} = \frac{x}{1} \times \frac{3}{1}$
 $3 = x$
 $\therefore x = \frac{3}{1} = 3$
 مجموعة الحل $\{ 3 \}$

د $8 = x^2$
 $\therefore x = \pm \sqrt{8} = \pm \frac{\sqrt{4 \times 2}}{1} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{1} = \pm 2\sqrt{2}$
 مجموعة الحل $\{ 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \}$

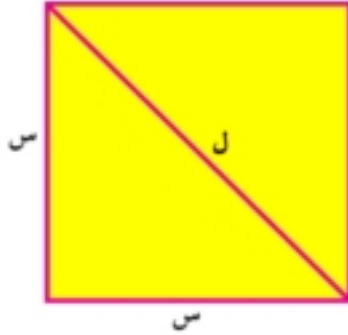


مثال (٢)



أوجد كلاً من طول ضلع وطول قطر مربع مساحته ٧ سم^٢.

الحل



إذا كان طول الضلع س سم فإن المساحة = س × س = س^٢

$$٧ = س^٢$$

$$\therefore س = \sqrt{٧} \text{ سم} \quad \therefore س = \sqrt{٧} \text{ سم لماذا؟}$$

لإيجاد طول قطر المربع: استخدم نظرية فيثاغورس

$$ل^٢ = س^٢ + س^٢ \quad \text{حيث ل طول قطر المربع}$$

$$\therefore ل^٢ = ١٤$$

$$\therefore ل = \sqrt{١٤} \text{ سم} \quad \therefore ل = \sqrt{١٤} \text{ سم لماذا؟}$$

مثال (٣)



دائرة مساحة سطحها ٣π سم^٢ أوجد محيطها.

الحل

مساحة سطح الدائرة = π نق^٢

$$٣π = π نق^٢$$

$$\therefore نق = ٣$$

$$نق = \sqrt{٣} \text{ سم} \quad \text{أو نق} = -\sqrt{٣} \text{ سم (مرفوض)}$$

$$\text{محيط الدائرة} = ٢π نق = \sqrt{٣} \times ٢π = ٢\sqrt{٣}π \text{ سم}$$



فكر وناقش

سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.
- العلاقة بين مجموعات الأعداد ط، ص، ن، ن، ح.

المصطلحات الأساسية

- عدد حقيقي.

سبق أن درسنا مجموعة الأعداد النسبية ن، ووجدنا أن هناك أعدادًا أخرى مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π ، ... وهذه الأعداد تكون مجموعة الأعداد غير النسبية ن اتحاد المجموعتين ن، ن يعطى مجموعة جديدة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية، ويرمز لها بالرمز ح.

$$ح = ن \cup ن$$

ح



تأمل شكل فن المقابل تجد أن:

- $ن \cap ن = \emptyset$
- أى عدد طبعى أو صحيح أو نسبى أو غير نسبى هو عدد حقيقى.

ط د ص د ن د ح وكذلك ن د ح

فكر أعط أمثلة من عندك لأعداد حقيقية بعضها نسبى وبعضها غير نسبى.

- كل عدد حقيقى تمثله نقطة واحدة على خط الأعداد.



أولاً: العدد صفر تمثله نقطة الأصل و.

ثانياً: الأعداد الحقيقية الموجبة تمثلها جميع نقاط خط الأعداد على يمين و
ثالثاً: الأعداد الحقيقية السالبة تمثلها جميع نقاط خط الأعداد على يسار و





تدرب

ح	ن
ص	ن
ط	

ضع كلاً من الأعداد الآتية في مكانها المناسب على شكل قن المقابل.

$5, 0, \sqrt{16}, \sqrt{2}, \frac{7}{9}, 0.6, \sqrt{5}, 9, 4, -\frac{1}{3}$

حدد على خط الأعداد النقطة أ التي تمثل العدد $\sqrt{8}$ ، والنقطة ب التي تمثل العدد $\sqrt{9}$ وأوجد طول أ ب.



وضح صحة أو خطأ كل من العبارتين:

أ كل عدد طبيعي هو عدد حقيقي موجب.

ب كل عدد صحيح هو عدد حقيقي.

لاحظ أن: $1 = \sqrt{1}$ لأن $1 = 1 \times 1 \times 1$

بينما $\sqrt{1} \neq 1$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب في نفسه يعطي 1.



ناقش مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل توجد أعداد غير حقيقية ؟



فكر وناقش

سوف تتعلم

علاقة الترتيب في ح.

المصطلحات الأساسية

علاقة ترتيب.

أكبر من.

أصغر من.

تساوى.

ترتيب تصاعدي.

ترتيب تنازلي.

إذا كانت أ، ب نقطتين تنتميان للمستقيم ل، وحددنا اتجاهًا معينًا كالمبين بالسهم فإنه يمكن القول إن:

- النقطة ب تلي النقطة أ، أى تكون على يمينها.
- النقطة أ تسبق النقطة ب، أى تكون على يسارها.

وهكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم، فإذا علمنا أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم تمثل عددًا حقيقيًا فإننا نقول إن:

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة

خواص الترتيب:

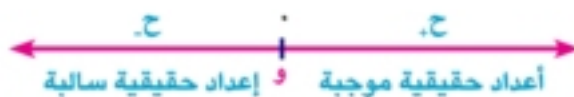
١ إذا كان س، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خط الأعداد النقطتان أ، ب على الترتيب فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

أ تلي ب ∴ س < ص	أ تسبق ب ∴ س > ص	أ تنطبق على ب ∴ س = ص

٢ إذا كانت س عددًا حقيقيًا تمثله النقطة أ على خط الأعداد، وكانت و هي نقطة الأصل التي تمثل العدد صفر فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

أ على يسار و ∴ س < ٠	أ على يمين و ∴ س > ٠	أ تنطبق على و ∴ س = ٠
ويقال إن س عدد حقيقي سالب.	ويقال إن س عدد حقيقي موجب.	





مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة: $ح_+ = \{س : س \in ح , س > 0\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة: $ح_- = \{س : س \in ح , س < 0\}$

$$ح = ح_+ \cup \{0\} \cup ح_-$$

لاحظ أن: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $ح_+ \cup \{0\} = \{س : س \in ح , س \geq 0\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $ح_- \cup \{0\} = \{س : س \in ح , س \leq 0\}$

مثال (1)



رتب الأعداد الآتية تصاعدياً $\sqrt{1}, 0, 6, \sqrt{20}, -\sqrt{45}, \sqrt{27}$

الحل

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{36} = 6, -\sqrt{45} = -1$$

الترتيب التصاعدي من الأصغر إلى الأكبر $-\sqrt{45}, -1, 0, \sqrt{1}, \sqrt{20}, \sqrt{27}, 6$

أي $-\sqrt{45}, -1, 0, \sqrt{1}, \sqrt{20}, \sqrt{27}, 6$

مثال (2) من الشكل المقابل :



أوجد مجموعة الأعداد التي تنتمي إليها س حيث س عدد صحيح

الحل

من الشكل نلاحظ أن : $س < س < س$

فعند اختيار س عدد صحيح سالب يحقق المتباينة السابقة

$$س = -3 < -9 < -27$$

∴ مجموعة الأعداد التي تنتمي إليها س هي $ص = \{-3, -9, -27, \dots\}$

اختر س عدد صحيح موجب . هل تتحقق المتباينة ؟ ناقش معلمك



سوف نتعلم

- الفترات المحدودة.
- الفترات غير المحدودة.
- العمليات على الفترات.

المصطلحات الأساسية

- فترة محدودة.
- فترة مغلقة.
- فترة مفتوحة.
- فترة نصف مفتوحة.
- فترة غير محدودة.
- اتحاد.
- تقاطع.
- فرق.
- مكملة.

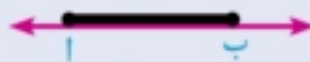
الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً، الفترات المحدودة

إذا كان $a < b$ فإننا نعرف كلاً من:

الفترة المغلقة $[a, b]$

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$



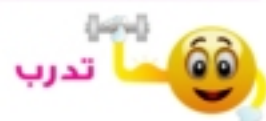
$[a, b]$ $\supset$ ح وعناصرها a ، b وجميع الأعداد الحقيقية بينهما
توضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين a ، b وتظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد.

الفترة المفتوحة (a, b)

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$



(a, b) $\supset$ ح وعناصرها هي جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين a ، b .
توضع دائرة مفتوحة (غير مظللة) عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين a ، b وتظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد



تدرب

اكتب كلاً من $[2, 5]$ ، $[2, 5)$ بطريقة الصفة المميزة ثم مثل كلاً منهما على خط الأعداد.



الفترات نصف المفتوحة أو (نصف المغلقة)

$[a, b[$  $[a, b[= \{s : a \leq s < b, s \in \mathbb{R}\}$ $[a, b[\supset \text{عناصرها العدد } b \text{ وجميع الأعداد المحصورة بين } a, b.$	$]a, b]$  $]a, b] = \{s : a < s \leq b, s \in \mathbb{R}\}$ $]a, b] \supset \text{عناصرها العدد } a \text{ وجميع الأعداد المحصورة بين } a, b.$
--	---



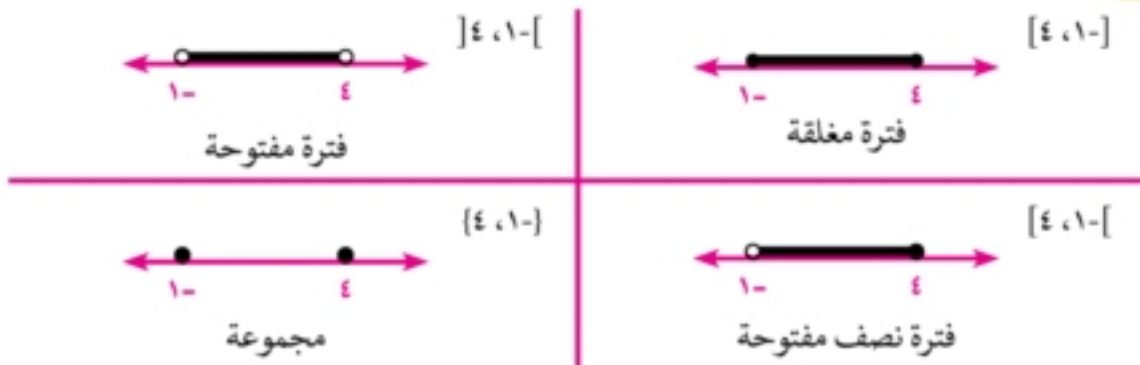
اكتب كلاً من الفترتين $[3, 5[$ و $]3, 5]$ بطريقة الصفة المميزة، و مثل كلاً منهما على خط الأعداد.

مثال (١)



مثل بيانياً على خط الأعداد كلاً من: $[4, 1-]$ ، $]4, 1-[$ ، $[4, 1-]$ ، $]4, 1-[$

الحل



ناقش مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل الفترة مجموعة منتهية أم غير منتهية؟



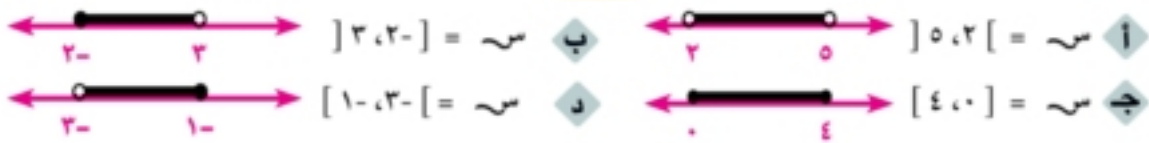
مثال (٢)

١ **اكتب** على صورة فترة، كلاً من المجموعات الآتية، ومثل كلاً منها على خط الأعداد:

أ $\sim = \{s : 2 < s < 5, s \in \mathbb{H}\}$ ب $\sim = \{s : 2 \leq s < 3, s \in \mathbb{H}\}$

ج $\sim = \{s : 0 \leq s \leq 4, s \in \mathbb{H}\}$ د $\sim = \{s : 3 > s \geq 1, s \in \mathbb{H}\}$

الحل



٢ **ضع** الرمز المناسب $\ni$ أو $\notin$ لتكون العبارة صحيحة:

أ $3 \in] 3, 1 [$ ب $2 \in] 3, 1 [$ ج $\frac{1}{2} \in] 1, 0 [$

د $\sqrt{2} \in] 2, 1 [$ هـ $4 \in] 5, 0 [$ و $\sqrt{8} \in] 2, 1 [$

ز $5 \in] 0, 6 [$ ح $2, 3 \times 10^5 \in] 1, 0 [$

الحل

أ $\notin$ ب $\notin$ ج $\ni$ د $\ni$ هـ $\ni$ و $\notin$ ز $\ni$ ح $\ni$

٣ **اكتب** الفترة التي يعبر عنها كل من الأشكال الآتية:



الحل

أ $] 3, 0 [$ ب $] 1, 4 [$

ج $] 1, 3 [$ د $] 6, 0 [$



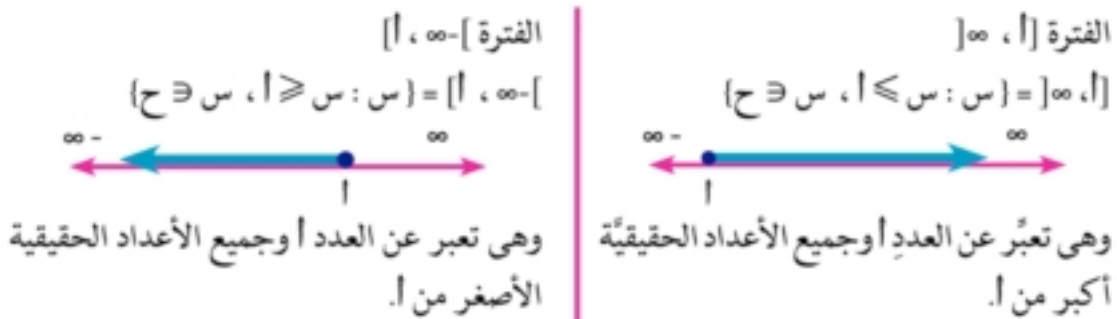
ثانيًا: الفترات غير المحدودة

تعلم أن: خط الأعداد الحقيقية مهما امتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين وسالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط.

- الرمز (∞) ويقرأ (لانهاية) وهو أكبر من أي عدد حقيقي يمكن تصوّره، $\infty \notin \mathbb{R}$
- الرمز $(-\infty)$ ويقرأ (سالب لانهاية) وهو أصغر من أي عدد حقيقي يمكن تصوّره، $-\infty \notin \mathbb{R}$
- الرمز $\infty, -\infty$ لا توجد نقط تمثلهما على خط الأعداد الحقيقية، وهما امتداد لخط الأعداد من جهتيه.



وإذا كان عددًا حقيقيًا فإننا نعرف الفترات غير المحدودة التالية:



اكتب كلًا من الفترتين $[-\infty, 3]$ و $[3, \infty)$ بطريقة الصفة المميزة، ثم مثلهما على خط الأعداد.



اكتب الفترتين $[-\infty, 3)$ و $(3, \infty)$ بطريقة الصفة المميزة، ثم مثلهما على خط الأعداد.



مجموعة الأعداد الحقيقية ح يمكن التعبير عنها على صورة الفترة $]-\infty, \infty[$

لاحظ أن:

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح $=]0, \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ح $=]-\infty, 0[$

مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $=]-\infty, \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $=]-\infty, 0[$



١ **اكتب** على صورة فترة كلاً من المجموعات الآتية، ومثلها على خط الأعداد.

أ $\sim]-\infty, 2] = \{s : s \leq 2, s \in \mathbb{R}\}$

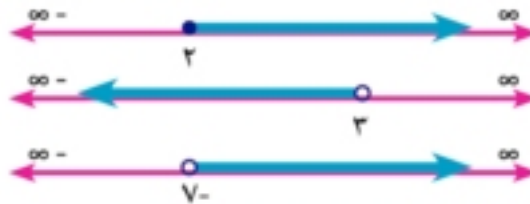
ب $\sim]-\infty, 3[= \{s : s < 3, s \in \mathbb{R}\}$

ج $\sim]-\infty, -7[= \{s : s < -7, s \in \mathbb{R}\}$

د $\sim]-\infty, \sqrt{8}] = \{s : s \geq \sqrt{8}, s \in \mathbb{R}\}$

هـ مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من -3

الحل



أ $\sim]-\infty, 2] = \{s : s \leq 2, s \in \mathbb{R}\}$

ب $\sim]-\infty, 3[= \{s : s < 3, s \in \mathbb{R}\}$

ج $\sim]-\infty, -7[= \{s : s < -7, s \in \mathbb{R}\}$

أكمل الحل

٢ **ضع** الرمز المناسب $\ni$ أو $\notin$ أو $\supset$ أو $\subset$ لتكون العبارة صحيحة:

أ $3 \in]-\infty, 4[$ ب $[1, 2] \subset]-\infty, 1[$

ج $5 \in]-\infty, 6[$ د $[0, 2] \subset]-\infty, 0[$

هـ $3 \times 10^1 \in]-\infty, 3[$ و $[1, 3] \subset]-\infty, 2[$

الحل

أ $\ni$ ب $\supset$ ج $\notin$ د $\supset$ هـ $\ni$ و $\subset$



العمليات على الفترات

حيث إن الفترات هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنه يمكن إجراء عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة على الفترات، ويمكن الاستعانة بالتمثيل البياني للفترات على خط الأعداد؛ لتحديد وتوضيح ناتج العملية ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

أمثلة



١ إذا كانت $S =] 3, 2- [$ ، $V =] 5, 1 =$ فأوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

ب $S \cup V$

أ $S \cap V$

الحل



أ $S \cap V =] 3, 2- [\cap] 5, 1 = = \emptyset$

ب $S \cup V =] 3, 2- [\cup] 5, 1 = = \emptyset$

٢ إذا كانت $M =] 2, \infty [$ ، $Y =] 3, 2- [$ فأوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

ج $M \cup Y$

ب $M \cap Y$

أ $M - Y$

و Y

هـ M

د $Y \cup \{ 3, 2 \}$

الحل



أ $M - Y =] 2, \infty [-] 3, 2- [=] 2, 3 [$

ب $M \cap Y =] 3, 2- [\cap] 2, \infty [=] 3, 2- [$

ج $M \cup Y =] 2, \infty [\cup] 3, 2- [=] 2, \infty [$

د $Y \cup \{ 3, 2 \} =] 3, 2- [\cup \{ 3, 2 \} =] 3, 2- [$

و $Y =] 3, 2- [$

هـ $M =] 2, \infty [$



تدرب

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ:

د $] 3, 1 = [] 4, 1 [\cap] 3, 1 - [$

أ $] 5, 2 - [= \{ 5, 2 \} - \{ 5, 2 - \}$

هـ $] 5, 2 - [= \{ 5, 1 \} \cup] 5, 2 - [$

ب $] 0, 1 - [= \{ 0, 1 - \} \cup] 3, 1 - [$

و $] \infty, 5 [= \{ 5, \infty - [-] \infty, 5 [$

ج $] 5, 2 [= \{ 5 \} - \{ 5, 2 \}$



فكر وناقش

سوف تتعلم

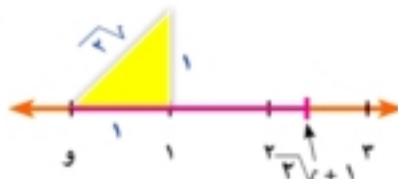
- العمليات على الأعداد الحقيقية.
- خواص العمليات على الأعداد الحقيقية.

المصطلحات الأساسية

- الانغلاق.
- الإبدال.
- الدمج.
- المحايد الجمعي.
- المعكوس الجمعي.
- المحايد الضربي.
- المعكوس الضربي.
- توزيع الضرب على الجمع أو الطرح.

أولاً: خواص جمع الأعداد الحقيقية

سبق أن حددنا موضع النقطة s التي تمثل العدد $\sqrt{2} + 1$ على خط الأعداد، وحيث إنه يمثل مجموع العددين الحقيقيين $\sqrt{2}$ ، فإن مجموع كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقي. أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح مغلقة تحت عملية الجمع.



الانغلاق إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $(a+b) \in \mathbb{R}$

فمثلاً: كل من $3+2$ ، $1+\sqrt{2}$ ، $2-\sqrt{5}$ ، $2+\sqrt{3}$ عدد حقيقي.

الإبدال إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $a+b = b+a$

فمثلاً: $2+\sqrt{3} = \sqrt{3}+2$ ، $3-\sqrt{5} = -\sqrt{5}+3$

الدمج إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ فإن $(a+b)+c = a+(b+c)$

فمثلاً: $(2+\sqrt{3})+3 = 5+(\sqrt{3}+2)$ خاصية الدمج

خاصية الإبدال $(\sqrt{2}+5)+3 =$

خاصية الدمج $\sqrt{2}+(5+3) =$

$\sqrt{2}+8 =$



إذا كان $a \in \mathbb{Z}$ فإن $a + 0 = 0 + a = a$

الصفر هو العنصر المحايد الجمعي

فمثلاً: $5 = 5 + 0 = 0 + 5$ ، $-4 = (-4) + 0 = 0 + (-4)$

لكل $a \in \mathbb{Z}$ يوجد $(-a)$ حيث $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (صفرًا)

وجود معكوس جمعي لكل عدد حقيقي

فمثلاً: $3 \in \mathbb{Z}$ ، معكوسه الجمعي $(-3) \in \mathbb{Z}$ حيث $3 + (-3) = (-3) + 3 = 0$ (صفرًا).



١ **أكمل** لتحصل على عبارة صحيحة:

..... + 0 = 0 + 2 = 2

..... = (11 + (-11)) + 11 = 11

(..... +) + 0 = 3 + 7 = 10

..... هو العدد الجمعي للعدد 8

..... هو العدد الجمعي للعدد (3 - 1)

..... = (-3) + 3 = 0

..... = 3 - 5 + 7 = 5

..... = (7 - 3) + (7 + 4) = 11

ط إذا كانت $a \in \mathbb{Z}$ ، $b \in \mathbb{Z}$ فإن $a + b \in \mathbb{Z}$ (مجموع العدد a و العدد b).

ي إذا كانت $a \in \mathbb{Z}$ ، $b \in \mathbb{Z}$ ، $c \in \mathbb{Z}$ فإن $(a + b) + c = a + (b + c)$

٢ ناقش مع معلمك / معلمتك و زملائك: موضحًا بأمثلة:

أ هل عملية الطرح إبدالية في $\mathbb{Z}$ ؟

ب هل عملية الطرح دمجية في $\mathbb{Z}$ ؟



ثانيًا: خواص ضرب الأعداد الحقيقية:

الانغلاق إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $a \times b \in \mathbb{R}$

مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الضرب.

أي أن حاصل ضرب كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقي.

مثلاً: $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times 5 \in \mathbb{R}$ ، $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{R}$ ، $-\sqrt{2} \times 5 = -5\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ، $\frac{2}{3} \times \pi = \pi \times \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$ ، $2 \times -\sqrt{5} = -\sqrt{5} \times 2 \in \mathbb{R}$ ، $2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times 2 \in \mathbb{R}$ ، $6 \in \mathbb{R} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 3$

الإبدال لكل عددين حقيقيين a, b يكون $a \times b = b \times a$

مثلاً: $\sqrt{2} \times 3 = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

الدمج لكل ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c ، ج يكون $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

مثلاً: $\sqrt{2} \times (\sqrt{2} \times 5) = (\sqrt{2} \times 5) \times \sqrt{2} = (5 \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 5 \times (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 5 \times 2 = 10$

الواحد هو العنصر المحايد الضربي لكل عدد حقيقي a يكون $a \times 1 = 1 \times a = a$

مثلاً: $\sqrt{2} \times 1 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

وجود معكوس ضربي لكل عدد حقيقي $a \neq 0$

لكل عدد حقيقي $a \neq 0$ يوجد عدد حقيقي $\frac{1}{a}$ حيث $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ (المحايد الضربي)

مثلاً: المعكوس الضربي للعدد $\frac{3}{2}$ هو $\frac{2}{3}$ حيث $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

لاحظ أن: $\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$ ، $a \neq 0$

أي أن $\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$ المعكوس الضربي للعدد a .

ناقش مع معلمك / معلمتك: هل عملية القسمة إبدالية في $\mathbb{R}$ ؟ هل عملية القسمة دمجية في $\mathbb{R}$ ؟



مثال



اكتب كلاً من الأعداد $\frac{6}{2\sqrt{}}$ ، $\frac{5}{3\sqrt{}}$ ، $\frac{15}{5\sqrt{2}}$ بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً.

الحل

لاحظ أن المحايد الضربي 1 يمكن كتابته بالصورة $\frac{2\sqrt{}}{2\sqrt{}}$ أو $\frac{3\sqrt{}}{3\sqrt{}}$ أو $\frac{5\sqrt{}}{5\sqrt{}}$...

$$\frac{6}{2\sqrt{}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{}} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{}}{2\sqrt{}} \times \frac{6}{2\sqrt{}} = \frac{6}{2\sqrt{}}$$

$$\frac{5}{3\sqrt{}} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \frac{3\sqrt{}}{3\sqrt{}} \times \frac{5}{3\sqrt{}} = \frac{5}{3\sqrt{}}$$

$$\frac{15}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{15}}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{}}{5\sqrt{}} \times \frac{15}{5\sqrt{2}} = \frac{15}{5\sqrt{2}}$$

تدرب



أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

..... = $2\sqrt{}$ × = $2\sqrt{}$ + $2\sqrt{}$ + $2\sqrt{}$ **أ**

..... × $5\sqrt{}$ = $5\sqrt{}$ × 3 **ب**

..... = $7\sqrt{}$ × $7\sqrt{}$ **ج**

..... = $5\sqrt{3}$ × $5\sqrt{2}$ **د**

هـ المحايد الضربي في ح هو العدد

و المعكوس الضربي للعدد $\frac{3}{2\sqrt{}}$ هو

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

$\frac{8}{2\sqrt{3}}$ **ب**

$\frac{15}{6\sqrt{}}$ **أ**

$\frac{25}{10\sqrt{2}}$ **د**

$\frac{6}{3\sqrt{}}$ - **ج**

لأي ثلاثة أعداد حقيقية أ، ب، ج يكون .

توزيع الضرب على الجمع

$1 \times (أ + ب) = (أ \times 1) + (ب \times 1) = أ + ب$

$أ \times (ب + ج) = (أ \times ب) + (أ \times ج) = أ \times ب + أ \times ج$



أمثلة



١ اختصر إلى أبسط صورة .

$$\begin{aligned} & \text{ب} \quad (\sqrt{2} + 3)(5 + \sqrt{2}) \\ & \text{ج} \quad (\sqrt{5} + 3)\sqrt{2} \\ & \text{د} \quad 2(\sqrt{3} - 2) \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} & \sqrt{5} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} = (\sqrt{5} + 3)\sqrt{2} \\ & 10 + \sqrt{6} = 5 \times 2 + \sqrt{5} \times 3 \times 2 = \\ & \text{ب} \quad (\sqrt{2} + 3)5 + (\sqrt{2} + 3)\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 3)(5 + \sqrt{2}) \\ & \sqrt{2} \times 5 + 3 \times 5 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} = \\ & \sqrt{2} \times 5 + 15 + 2 + \sqrt{2} \times 3 = \\ & 17 + \sqrt{2} \times 8 = \sqrt{2} \times 5 + 17 + \sqrt{2} \times 3 = \\ & 2(\sqrt{3} - 2) + \sqrt{3} - 2 \times 2 \times 2 + 2(2) = 2(\sqrt{3} - 2) \\ & 5 \times 9 + \sqrt{12} - 4 = \\ & \sqrt{12} - 49 = \end{aligned}$$

٢ أعط تقديراً لناتج $(\sqrt{8} + 1) \times (\sqrt{5} + 3)$ و تحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

أولاً: تقدير $\sqrt{5}$ هو ٢ $\therefore (\sqrt{5} + 3)$ تقديرها هو $5 = 2 + 3$

تقدير $\sqrt{8}$ هو ٣ $\therefore (\sqrt{8} + 1)$ تقديرها هو $4 = 3 + 1$

$\therefore (\sqrt{8} + 1)(\sqrt{5} + 3)$ تقديرها هو $20 = 4 \times 5$

ثانياً: عند استخدام الآلة الحاسبة لحساب $(\sqrt{8} + 1) \times (\sqrt{5} + 3)$

نجد أن الناتج ٢٠,٠٤٥٩ أي أن التقدير مقبول.



العمليات على الجذور التربيعية

فكر وناقش

إذا كان a ، b عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

أولاً: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

فمثلاً: $\sqrt{6} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{20} = \sqrt{10 \times 2} = \sqrt{10} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{75} = \sqrt{5 \times 15} = \sqrt{5} \times \sqrt{15}$

$\sqrt{b} \times \sqrt{a} = \sqrt{b \times a}$

فمثلاً: $\sqrt{5} \times \sqrt{4} = \sqrt{5 \times 4} = \sqrt{20}$

$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

ثانياً: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ حيث $b \neq 0$

فمثلاً: $\sqrt{5} \div \sqrt{9} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

ثالثاً: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ حيث $b \neq 0$

فمثلاً: $\sqrt{\frac{18}{9}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{18}}{3}$

$\sqrt{\frac{84}{9}} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{84}}{3}$

سوف تتعلم

- إجراء العمليات على الجذور التربيعية.
- ضرب عددين مترافقين.

المصطلحات الأساسية

- جذر تربيعي.
- عددان مترافقان.



أمثلة



١ اختصر لأبسط صورة $\frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{24} - \sqrt{32}$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{1\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \times 6 + \frac{2 \times 24\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - \frac{2 \times 16\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} &= \frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{24} - \sqrt{32} \\ \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 6 + \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \times 24\sqrt{6} - \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \times 16\sqrt{6} &= \\ 2\sqrt{3} &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4} = \end{aligned}$$

٢ إذا كان $\sqrt{2} = 1$ ، $\sqrt{5} = 2$ ، $\sqrt{10} = 3$ ، أوجد قيمة المقدار $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

الحل

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{5} - 2(\sqrt{10}) &= 1 + \sqrt{5} - 2(2) = 1 + \sqrt{5} - 4 = \sqrt{5} - 3 \\ \sqrt{5} - 3 &= 1 + \sqrt{5} - 4 = \sqrt{5} - 3 \\ \sqrt{5} + 9 &= 0 + \sqrt{5} + 4 = 2(\sqrt{10}) = 2(3) = 6 \\ 30 &= \sqrt{5} + 9 + \sqrt{5} - 3 = 2\sqrt{5} + 6 = 2(3) + 6 = 12 \end{aligned}$$



تدرب

١ ضع كلاً مما يأتي على صورة $\sqrt{a}$ حيث a ، ب عدنان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

$$\begin{aligned} \sqrt{54} &\text{ أ} & \sqrt{75} &\text{ ب} & \sqrt{28} &\text{ ج} \\ \sqrt{162} \times \frac{1}{3} &\text{ د} & \sqrt{72} \times 2 &\text{ هـ} & \sqrt{100} &\text{ و} \end{aligned}$$

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

$$\begin{aligned} \sqrt{28} \times 2 \times \sqrt{7} \times 3 &\text{ أ} & \sqrt{10} \times 2 \times \sqrt{5} &\text{ ب} & \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{18} \times 2 &\text{ ج} \\ \sqrt{300} - \sqrt{18} \times 5 + \sqrt{27} &\text{ د} & \sqrt{45} - \sqrt{20} &\text{ هـ} & \sqrt{8} + \sqrt{50} &\text{ و} \end{aligned}$$



أوجد قيمة كل من $s + 3$ ، $s \times 5$ في الحالات الآتية:

أ $s = 5\sqrt{3} + 3$ ، $s = 5\sqrt{3} - 1$

ب $s = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ ، $s = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

ج $s = 2\sqrt{3} - 5$ ، $s = 2\sqrt{3} - 5$

العددين المترافقان

إذا كان a ، b عددين نسبين موجبين

فإن $(a\sqrt{b} + \sqrt{b})$ ، $(a\sqrt{b} - \sqrt{b})$ هو مرافق للعدد الآخر .

ويكون مجموعهما $= \sqrt{b}^2 =$ ضعف الحد الأول

وحاصل ضربهما $= (a\sqrt{b} - \sqrt{b}) \times (a\sqrt{b} + \sqrt{b}) = (a\sqrt{b})^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2b - b$

= مربع الحد الأول - مربع الحد الثاني

حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدد نسبي

إذا كان لدينا عدد حقيقي مقامه على الصورة $(a\sqrt{b} \pm \sqrt{b})$ فيجب وضعه في أبسط صورة ، وذلك بضرب البسط والمقام في مرافق المقام .



تدرب

أكمل

أ $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ مرافقه (.....) وحاصل ضربهما =

ب $3\sqrt{3} - 5$ مرافقه (.....) وحاصل ضربهما =

ج $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ مرافقه (.....) وحاصل ضربهما =



أمثلة



١ إذا كانت $s = \frac{8}{\sqrt{3}-5}$ ، ص $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$

اكتب كلًا من s ، v بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا ثم أوجد $s + v$

الحل

$$s = \frac{8}{\sqrt{3}-5} \times \frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}+5} = \frac{8(\sqrt{3}+5)}{3-25}$$

$$\frac{8(\sqrt{3}+5)}{3-25} = \frac{8(\sqrt{3}+5)}{2(\sqrt{3}-12)}$$

$$\frac{4(\sqrt{3}+5)}{\sqrt{3}-12}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \times \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}-2}{-1} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$$

$$s + v = \frac{4(\sqrt{3}+5)}{\sqrt{3}-12} + \frac{2-\sqrt{3}}{1} = \frac{4(\sqrt{3}+5) + (2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-12)}{\sqrt{3}-12}$$

٢ إذا كانت $s = \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ ، ص $\sqrt{3}-\sqrt{7}$

اثبت أن s ، v عدنان مترافقان، ثم أوجد قيمة كل من المقدارين

$s^2 - 2s + v$ ، $(s - v)^2$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$$s = \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{3-7}$$

$$s = \frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{-4} = -(\sqrt{3}+\sqrt{7})$$

$$s^2 - 2s + v = (-\sqrt{3}-\sqrt{7})^2 - 2(-\sqrt{3}-\sqrt{7}) + (\sqrt{3}-\sqrt{7})$$

$$= (3 + 7 + 2\sqrt{21}) + (2\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) + (\sqrt{3} - \sqrt{7})$$

$$= 10 + 2\sqrt{21} + 3\sqrt{3} + \sqrt{7}$$

$$= 12$$

$$(s - v)^2 = (-\sqrt{3}-\sqrt{7} - (\sqrt{3}-\sqrt{7}))^2 = (-2\sqrt{3})^2 = 12$$



$$\therefore (\sqrt{3} \sqrt{2}) = (\sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2} - \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2}) = (\text{س} - \text{ص})$$

$$12 = 3 \times 4 =$$

$$\text{س}^2 - \text{ص}^2 = (\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$$

وبلاحظ أن

في المثال السابق احسب كلًا من

أ (س + ص)

ب (س - ص)

ماذا تلاحظ

ج (س + ص)(س - ص)

د س² - ص²

الحل

أ $\sqrt{3} \sqrt{2} = \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2} - \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2} = \text{س} + \text{ص}$

ب $(\sqrt{3} \sqrt{2} - \sqrt{7} \sqrt{2}) - \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2} = \text{س} - \text{ص}$

ج $\sqrt{3} \sqrt{2} \times \sqrt{7} \sqrt{2} = (\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$

$$= \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2} - \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{2} \times \sqrt{7} \sqrt{2} = (\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$$

$$= \sqrt{21} \sqrt{4} =$$

د $(\sqrt{3} \sqrt{2} - \sqrt{7} \sqrt{2}) - (\sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{7} \sqrt{2}) = \text{س}^2 - \text{ص}^2$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{21} \sqrt{2} - \sqrt{7}) - (\sqrt{3} + \sqrt{21} \sqrt{2} + \sqrt{7}) =$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{21} \sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - \sqrt{21} \sqrt{2} + \sqrt{7} =$$

$$= \sqrt{21} \sqrt{4} =$$

وبلاحظ أن $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = \text{س}^2 - \text{ص}^2$



العمليات على الجذور التكعيبية

فكر وناقش

لأى عددين حقيقيين a ، b :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b} \quad 1$$

فمثلاً: $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2 \times 5} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{4 \times 3} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}$$

لأى عددين حقيقيين a ، b :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b} \quad 2$$

فمثلاً: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{5 \times 8} = \sqrt[3]{40}$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2 \times 64} = \sqrt[3]{128}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad 3$$

فمثلاً: $\sqrt[3]{\frac{12}{3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad 4$$

فمثلاً: $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$

فكر إذا ضربنا كلاً من البسط والمقام في $\sqrt[3]{4}$ ، فأوجد الناتج في أبسط صورة.

سوف تتعلم

العمليات على الجذور التكعيبية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التكعيبي.



أمثلة



١ اختصر لأبسط صورة:

$$١٦\sqrt{٥} + \frac{١-}{٤}\sqrt{٨} + ٥٤\sqrt{٢} \quad \text{أ}$$

$$١٣\frac{٨}{٩}\sqrt{٦} - ٢٤\sqrt{٢} \quad \text{ب}$$

الحل

$$\frac{٢ \times ٨\sqrt{٥}}{٢} + \frac{٢}{٢} \times \frac{١-}{٤}\sqrt{٨} + \frac{٢ \times ٢٧\sqrt{٢}}{٢} = ١٦\sqrt{٥} + \frac{١-}{٤}\sqrt{٨} + ٥٤\sqrt{٢} \quad \text{أ}$$

$$\frac{٢\sqrt{٢} \times ٨\sqrt{٢} \times ٥}{٨\sqrt{٢}} + \frac{٢-\sqrt{٢}}{٨\sqrt{٢}} \sqrt{٨} + \frac{٢\sqrt{٢} \times ٢٧\sqrt{٢}}{٢} =$$

$$\frac{٢\sqrt{٢} \times ٢ \times ٥}{٢} + \frac{٢\sqrt{٢} \times \sqrt{٨}}{٢} + \frac{٢\sqrt{٢} \times ٢٧}{٢} =$$

$$٢\sqrt{٢} \times ٩ = ٢\sqrt{٢} \times ١٠ + ٢\sqrt{٢} \times ٤ + ٢\sqrt{٢} \times ٢٧ =$$

$$\frac{١٣٥\sqrt{٢}}{٨\sqrt{٢}} \times ٦ - \frac{٣ \times ٨\sqrt{٢}}{٨\sqrt{٢}} = \frac{١٣٥}{٨}\sqrt{٦} - ٢٤\sqrt{٢} = ١٣\frac{٨}{٩}\sqrt{٦} - ٢٤\sqrt{٢} \quad \text{ب}$$

$$١٥ - ٣\sqrt{٢} \times ٢ = \frac{٥}{٢} \times ٦ - ٣\sqrt{٢} \times ٨\sqrt{٢} =$$

٢ إذا كانت س = $\sqrt{٣}$ ، ١ = ص،

فأوجد قيمة كل من :

$$\text{ب} (س - ص)^٢$$

$$\text{أ} (س + ص)^٢$$

الحل

$$(١ - \sqrt{٣} + ١ + \sqrt{٣})^٢ = (س + ص)^٢ \quad \text{أ}$$

$$٢٤ = ٣ \times ٨ = (٣\sqrt{٢} \times ٢) =$$

$$(١ + \sqrt{٣} - ١ + \sqrt{٣})^٢ = (س - ص)^٢ \quad \text{ب}$$

$$٨ = (٢)^٢ =$$



تطبيقات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

الدائرة



محيط الدائرة = 2π نق وحدة طولية.

مساحة الدائرة = π نق² وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة، π (النسبة التقريبية)

أمثلة



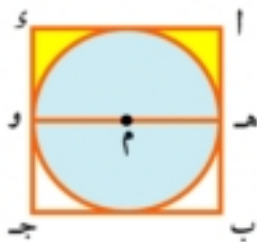
١ أوجد محيط دائرة مساحتها ٣٨,٥ سم² ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل

مساحة الدائرة = π نق²

$$\frac{49}{4} = \frac{7 \times 38,5}{22} = \pi \text{ نق}^2 \therefore \frac{22}{7} = \frac{38,5}{\text{نق}^2}$$

$$\therefore \text{نق} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ سم}$$



٢ في الشكل المقابل الدائرة م مرسومة داخل

المربع أ ب ج د، فإذا كانت مساحة الجزء

الملون باللون الأصفر $10 \frac{5}{\sqrt{2}}$ سم²

أوجد محيط هذا الجزء ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل

نفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق .

$\therefore$ طول ضلع المربع = 2 نق

سوف تتعلم

حل تطبيقات على الجذور

التربيعية والتكعيبية

المصطلحات الأساسية

دائرة.

متوازي المستطيلات.

مكعب.

أسطوانة دائرية قائمة.

كرة.



مساحة الجزء باللون الأصفر = مساحة المستطيل أ ه و ي - مساحة نصف الدائرة

$$١٠ \frac{٥}{٧} = \text{نق} ٢ \times \text{نق} ٢ - \frac{٢٢}{٧} \times \frac{١}{٢} - \text{نق} ٢$$

$$\frac{٧٥}{٧} = \text{نق} ٢ - \text{نق} ٢ \frac{١١}{٧} = \text{نق} ٢ \frac{٣}{٧}$$

$$\therefore \text{نق} ٢ = ٣٥ \text{ سم}$$

محيط الجزء باللون الأصفر = (أ ه + ه و + و ي) + محيط الدائرة

$$٣٥ \frac{٥}{٧} \text{ سم} = ٥ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢ \times \frac{١}{٢} + (٥ + ١٠ + ٥) =$$



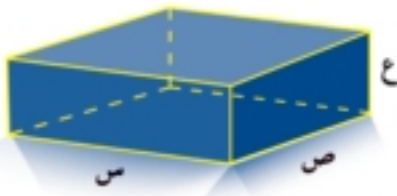
١ دائرة مساحتها ٦٤π سم^٢. أوجد طول نصف قطرها، ثم أوجد محيطها لأقرب عدد صحيح $(\pi \approx ٣,١٤)$.



٢ في الشكل المقابل: أ ب قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة $١٢,٣٢$ سم^٢ أوجد محيط الشكل.



٣ في الشكل المقابل: دائرتان متحدتان في المركز م طول نصفى قطريهما ٣ سم، ٥ سم. أوجد مساحة الجزء الملون بدلالة π .



متوازي المستطيلات

هو مجسم جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل، وكل وجهين متقابلين متطابقان إذا كانت أطوال أحرفه س، ص، ع فإن:

$$\text{المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{المساحة الجانبية} = ٢(س + ص) \times ع \quad \text{وحدة مربعة}$$

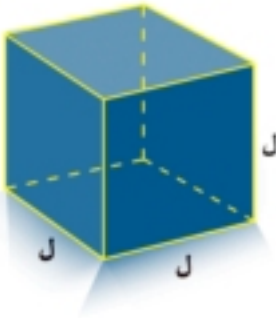
$$\text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + ٢ \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$\text{المساحة الكلية} = ٢(س ص + ص ع + س ع) \quad \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{حجم متوازي المستطيلات} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{حجم متوازي المستطيلات} = س \times ص \times ع \quad \text{وحدة مكعبة}$$





حالة خاصة: المكعب

هو متوازي مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن

مساحته الجانبية = $4ل^2$ وحدة مربعة

مساحة كل وجه = $ل^2$ وحدة مربعة

حجم المكعب = $ل^3$ وحدة مكعبة

مساحته الكلية = $6ل^2$ وحدة مربعة

مثال



أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه 125 سم^3

الحل

$$\text{حجم المكعب} = ل^3 \therefore 125 = ل^3 \therefore ل = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ سم}$$

$$\text{المساحة الكلية} = 6ل^2 = 6(5)^2 = 150 \text{ سم}^2$$

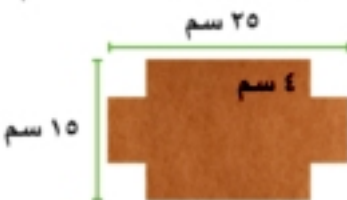
تدرب



١ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه 720 سم^3 وارتفاعه 5 سم

أوجد مساحته الكلية.

٢ أيهما أكبر حجمًا: مكعب مساحته الكلية 294 سم^2 أم متوازي مستطيلات أبعاده 7 سم ، 5 سم ، 3 سم .



٣ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعدها 25 ، 15 سم

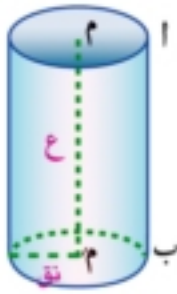
قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه 4 سم .

ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازي

مستطيلات، أوجد حجمه ومساحته الكلية.



الأسطوانة الدائرية القائمة



هي مجسمٌ له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرة، أما السطحُ الجانبيُّ فهو سطحٌ منحنيٌّ يسمى سطح الأسطوانة.
 ○ إذا كانت م، م مركزى قاعدتى الأسطوانة فإن م م هو ارتفاع الأسطوانة.



هيا نفكر إذا كانت أ $\in$ الدائرة م، ب $\in$ الدائرة م، أ ب // م م

○ و قطعنا سطح الأسطوانة الجانبي عند أ ب

وبسطنا هذا السطح فإننا نحصل على سطح المستطيل أ ب أ'

ويكون أ ب = ارتفاع الأسطوانة، أ أ' = محيط قاعدة الأسطوانة.



مساحة المستطيل أ ب أ' = المساحة الجانبيَّة للأسطوانة.

المساحة الجانبيَّة للأسطوانة = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع = 2π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبيَّة + مجموع مساحتي القاعدتين

$$= 2\pi \text{ نق ع} + 2\pi \text{ نق}^2 \text{ وحدة مربعة}$$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع = π نق² ع وحدة مربعة



مثال

قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب ج د، فيه أ ب = ١٠ سم، ب ج = ٤٤ سم، طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة، بحيث ينطبق أ ب على د ج أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi = \frac{22}{7}$).

الحل

محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤ سم.

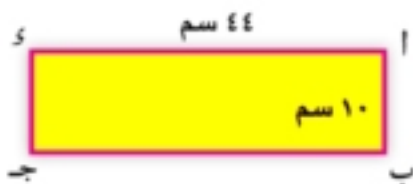
$$2\pi \text{ نق} = 44$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times \text{نق} = 44$$

$$\therefore \text{نق} = 7 \text{ سم}$$

حجم الأسطوانة = π نق² ع

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 10 = 1540 \text{ سم}^3$$





١ أسطوانة دائرية قائمة، طول نصف قطر قاعدتها ١٤ سم، وارتفاعها ٢٠ سم. أوجد حجمها ومساحتها الكلية.

٢ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^٣، وارتفاعها ٢٤ سم أوجد مساحتها الكلية ($\pi = 3,14$)
٣ أيهما أكبر حجمًا: أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم، أم مكعب طول حرفه ١١ سم.

الكرة

هي مجسمٌ سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة).



إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها هو مركز الكرة، وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة نق.

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$ وحدة مكعبة.
مساحة سطح الكرة = $4 \pi \text{ نق}^2$ وحدة مربعة.



كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^٣ أوجد مساحة سطحها

الحل

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3 \\ \pi 562,5 &= \frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3 \\ \therefore \text{نق}^3 &= \frac{3}{4} \times 562,5 = 421,875 \\ \text{نق} &= \sqrt[3]{421,875} = 7,5 \text{ سم} \\ \text{مساحة سطح الكرة} &= 4 \pi \text{ نق}^2 = 4 \pi (7,5)^2 = 225 \pi \text{ سم}^2 \end{aligned}$$



أوجد الحجم ومساحة السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم ($\pi = \frac{22}{7}$)



الوحدة الأولى الدرس الحادي عشر

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

فكر وناقش

أولاً حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

نعلم أن المعادلة $3 - 2 = 4$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى

حيث أن س المتغير (المجهول)

ولحل هذه المعادلة في ح

بإضافة 2 إلى طرفي المعادلة

$$3 - 2 = 4$$

ويمكن الضرب في المعكوس الضربي لمعامل س

$$3 = 6$$

$$6 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3}$$

$$2 = 2$$



أي أن مجموعة الحل = { 2 }

ويمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

أمثلة



أوجد في ح مجموع حل المعادلة $\sqrt[3]{x} - 3 = 1$ ومثل

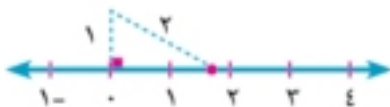
الحل على خط الأعداد.

الحل

$$\sqrt[3]{x} - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 4 \Rightarrow x = 64$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل هي } \{ 64 \}$$

ويمثل الحل على خط الأعداد



كما بالشكل المقابل.

سوف تتعلم

حل المعادلة من الدرجة الأولى

في متغير واحد.

حل المتباينات من الدرجة

الأولى في متغير واحد.

المصطلحات الأساسية

المعادلة.

الدرجة المعادلة.

المتباينة.

الدرجة المتباينة.

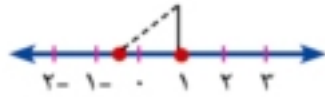
حل المعادلة.

حل المتباينة.



٢  **أوجد** في ح مجموعة حل المعادلة $\sqrt{x} + 1 = 2$ ، ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل



س $\sqrt{x} + 1 = 2$ $\therefore$ س $\sqrt{x} - 1 = 2$ $\therefore$ س $\sqrt{x} = 3$
ويمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل.

 **تدرب**

١  **أوجد** في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد.

ج س $2 = 3 - x$

ب س $2 = 4 + x$

أ س $1 = 6 + x$

و س $\sqrt{x} = 1 - 5$

هـ س $\sqrt{x} = 1 - 1$

د س $0 = 5 + x$

ثانيًا: حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح وتمثيل الحل على خط الأعداد.

الخواص التالية تستخدم لحل المتباينة في ح وتكتب مجموعة الحل على صورة فترة:
إذا كانت أ ، ب ، ج أعدادًا حقيقية وكان $a > b$ فإن:

١ **أ + ج > ب + ج.** **خاصية الإضافة.**

٢ **إذا كانت ج < ٠ فإن $a \times ج > ب \times ج$.** **خاصية الضرب في عدد حقيقي موجب.**

٣ **إذا كان ج > ٠ فإن $a \times ج < ب \times ج$.** **خاصية الضرب في عدد حقيقي سالب.**

 **أمثلة**

١  **أوجد** مجموعة حل المتباينة $2 - 1 \leq 5$ في ح ومثل الحل بيانيًا.

الحل



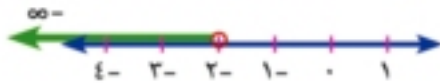
بإضافة ١ إلى طرفي المتباينة تصبح $2 \leq 6$
بضرب طرفي المتباينة في $(\frac{1}{3} < 0)$ س $3 \leq 2$
 $\therefore$ مجموعة الحل في ح هي $[3, \infty)$
ويمثلها الشعاع باللون الأخضر على خط الأعداد.



٢  **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة $5 - 3 < 11$ ، ومثل الحل بيانياً.

الحل

بإضافة (-5) إلى طرفي المتباينة فيكون $3 < 6$
بضرب طرفي المتباينة في $(-\frac{1}{3})$ ينتج أن:
 $\therefore 2 > -5$



أي أن مجموعة الحل في ح هي $[-5, \infty)$

ويمثلها الجزء باللون الأخضر على خط الأعداد

٣  **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة $3 \geq 2$ س $5 > 1$ ومثل الحل بيانياً

الحل

بإضافة (1) إلى حدود المتباينة $3 \geq 2$ س $1 + 5 > 1 + 1$
أي $2 \geq 2$ س $6 > 2$ ، وبضرب حدود المتباينة في $(\frac{1}{3} < 0)$
 $1- \geq 3 > 1-$



$\therefore$ مجموعة الحل في ح هي $[3, \infty)$

ويمثلها على خط الأعداد الجزء باللون الأخضر.

في مثال ٣ ما مجموعة حل المتباينة في ط؟
ما مجموعة حل المتباينة في ص؟

٤ **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة $3 + 5 \geq 3 + 2$ س $9 + 2 > 3 + 5$ ومثل الحل بيانياً :

الحل

$3 + 5 \geq 3 + 2$ س $9 + 2 > 3 + 5$ بإضافة $(2-)$
 $3 + 3 \geq 3 + 3$ س $9 > 3 + 5$ بإضافة $(3-)$
 $6 \geq 3$ س $6 > 8$ يضرب حدود المتباينة
 $2 \geq 0$ س $2 > 0$



مجموعة الحل في ح هي $[2, \infty)$



العلاقة بين متغيرين



العلاقة بين متغيرين

فكر وناقش



يمتلك شخص أوراقاً مالية فئة ٥٠ جنيهاً، وأوراقاً مالية فئة ٢٠ جنيهاً، فإذا اشترى هذا الشخص جهازاً كهربائياً ثمنه ٣٩٠ جنيهاً.

فكر: كم عدد الأوراق من كل نوع التي يعطيها للبائع؟

نفرض أن س: عدد الأوراق فئة ٥٠ جنيهاً، فتكون قيمتها ٥٠س جنيهاً.

وأن ص: عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهاً، فتكون قيمتها ٢٠ص جنيهاً.

والمطلوب: معرفة س، ص التي تجعل: $٥٠س + ٢٠ص = ٣٩٠$

تسمى هذه العلاقة **معادلة من الدرجة الأولى**، في متغيرين يمكن قسمتهُ طرفي المعادلة على ١٠ فنحصل على معادلة مكافئة لها، وهي:

$$٥س + ٢ص = ٣٩$$

$$\text{وتكون ص} = \frac{٣٩ - ٥س}{٢}$$

لاحظ أن: كل من س، ص أعداد طبيعية، وفي هذه الحالة تكون س عددًا فردياً.

يمكن تكوين الجدول المقابل لمعرفة الإمكانيات المختلفة وهي:

س	ص	(س، ص)
١	١٧	(١٧، ١)
٣	١٢	(١٢، ٣)
٥	٧	(٧، ٥)
٧	٢	(٢، ٧)
٩	سالبة	لا تصلح

يعطى البائع ورقة واحدة فئة ٥٠ جنيهاً، ١٧ ورقة فئة ٢٠ جنيهاً.

أو ٣ ورقات فئة ٥٠ جنيهاً، ١٢ ورقة فئة ٢٠ جنيهاً.

أو ٥ ورقات فئة ٥٠ جنيهاً، ٧ ورقات فئة ٢٠ جنيهاً.

أو ٧ ورقات فئة ٥٠ جنيهاً، ورقتين فئة ٢٠ جنيهاً.

سوف تتعلم

العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

مصطلحات أساسية

متغير.

علاقة.

معادلة من الدرجة الأولى.





تدرب

١ مع شخص أوراقاً مالية فئة ٥ جنيهاً، وأوراقاً مالية فئة ٢٠ جنيهاً. اشترى هذا الشخص من المركز التجاري بما قيمته ٧٥ جنيهاً، ما الإمكانيات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعى الأوراق المالية التى معه؟

٢ مثلث متساوى الساقين، محيطه ١٩ سم، ما الإمكانيات المختلفة لأطوال أضلاعه، علماً بأن أطوال أضلاعه ≥ ٣ صـ.

لاحظ أن: مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

دراسة العلاقة بين متغيرين

أس + ب ص = جـ حيث $ا \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س، ص

ويمكن إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقق هذه العلاقة.

مثلاً:

بدراسة العلاقة $٢س - ص = ١$

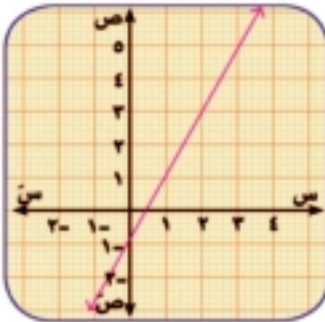
عند س = ١	تكون ص = ١	$\therefore (١, ١)$	تحقق العلاقة
عند س = ٠	تكون ص = -١	$\therefore (٠, -١)$	تحقق العلاقة
عند س = ٣	تكون ص = ٥	$\therefore (٣, ٥)$	تحقق العلاقة
عند س = -١	تكون ص = -٣	$\therefore (-١, -٣)$	تحقق العلاقة

وهكذا نجد أن هناك عددًا لانتهائى من الأزواج المرتبة التى تحقق هذه العلاقة.

لاحظ أن:

١ يمكن تمثيل العلاقة $٢س - ص = ١$ ، بيانيًا باستخدام بعض الأزواج المرتبة التى حصلنا عليها.

٢ كل نقطة $\in$ الخط المستقيم باللون الأحمر، يمثلها زوج مرتب يحقق العلاقة $٢س - ص = ١$.





١ أوجد أربع أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية ، ومثلها بيانياً:

أ $س + ص = ٣$ ب $س - ٢ص = ٥$

ج $ص = ٢$ د $س = ١$

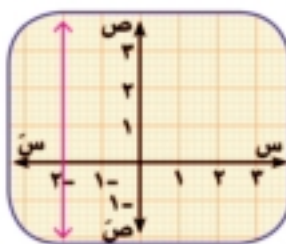
٢ إذا كان (٢، ٣-) تحقق العلاقة ٣ س + ب ص = ١، فأوجد قيمة ب.

٣ إذا كان (ك، ٢ك) تحقق العلاقة س + ص = ١٥، فأوجد قيمة ك.

التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين

العلاقة **أ س + ب ص = جـ** حيث **أ، ب** كلاهما معاً $\neq ٠$ تسمى علاقة بين المتغيرين س ، ص ويمثلها بيانياً خط مستقيم.

إذا كانت **ب = ٠** يمثلها مستقيم يوازي محور الصادات.

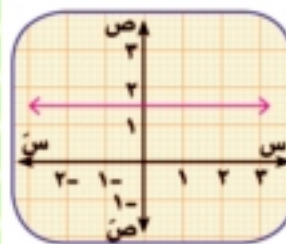


مثلاً: العلاقة س = -٢
يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، ٢-) ويكون موازياً لمحور الصادات.

حالة خاصة:

العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.

إذا كانت **أ = ٠** يمثلها مستقيم يوازي محور السينات.



مثلاً: العلاقة ٢ ص = ٣
أي: ص = $\frac{٣}{٢}$
يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) ويكون موازياً لمحور السينات.

حالة خاصة:

العلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.

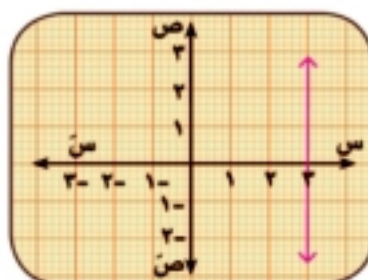
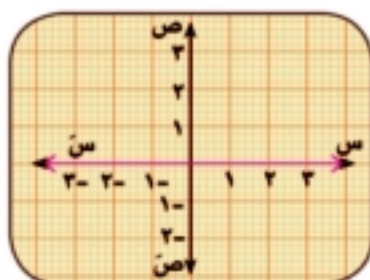


١ مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية:

أ $س = ٢$ ب $س + ص = ١$



٢ أوجد العلاقة التي يمثلها الخطُ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ في كلٍّ من الشكلين التاليين:



مثال



مثل بيانياً العلاقة: $ص = ٢ + س$

الحل

يمكن اختيار مجموعة من الأزواج المرتبة التي تحقق هذه العلاقة:

يحقق العلاقة	(٢، ١-)	$١- = س$	$٢ =$ بوضع ص	مثلاً:
يحقق العلاقة	(٠، ٢)	$٢ = س$	$٠ =$ بوضع ص	
تحقق العلاقة وهكذا ..	(١-، ٥)	$٥ = س$	$١- =$ بوضع ص	

ويمكن وضع هذه النتائج في صورة جدولٍ كالآتي:

س	١-	٢	٥	٠
ص	٢	٠	١-	$\frac{٢}{٢}$

وتمثل هذه العلاقة الخطُ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ.

ناقش مع معلمك:

- ١ ماذا تلاحظُ على تغير قيمة ص كلما زادت قيمة س؟
- ٢ متى يمرُّ الخطُ المستقيمُ الممثل للعلاقة $ص = ٢ + س$ بـ نقطة الأصل؟



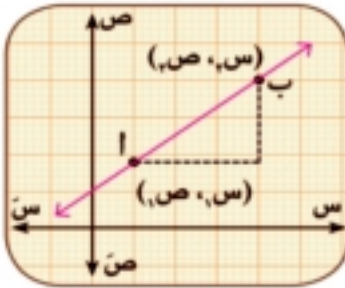
الوحدة الثانية

الدرس الثاني

ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية

فكر وناقش

إذا لاحظنا تحرك نقطة على خط مستقيم من الموضع $A(s_1, v_1)$ إلى الموضع $B(s_2, v_2)$ حيث $s_2 > s_1$ وكل من $A, B \in$ المستقيم **فإن:**
التغير في الإحداثي السيني $= s_2 - s_1$
ويسمى بالتغير الأفقي
التغير في الإحداثي الصادي $= v_2 - v_1$
ويسمى



سوف تتعلم

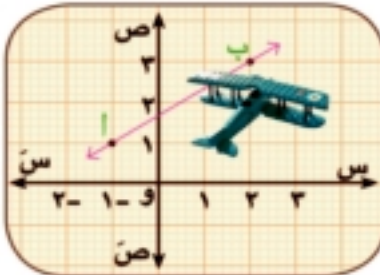
- ميل الخط المستقيم.
- تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم.

مصطلحات أساسية

- ميل.
- ميل موجب.
- ميل سالب.
- الميل يساوي صفرًا.
- الميل غير معرف.

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} \quad \text{حيث } s_2 > s_1$$

في الأمثلة الآتية ستدرس الحالات المختلفة للتغير الرأسى $(v_2 - v_1)$:



مثال ١



إذا كانت: $A(1, 1)$ و $B(3, 2)$.

فإن: ميل $AB = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$



تلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ على الخط المستقيم لأعلى لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ ص, < ص, الميل موجب.

مثال ٢

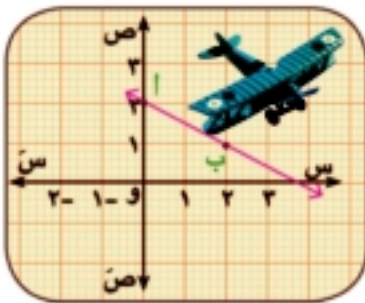


إذا كانت: أ (٢، ٠)، ب (١، ٢)

فإن: ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{2-0}{1-2} = -\frac{2}{1} = -2$

تلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ على المستقيم لأسفل لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ ص, > ص, الميل سالب.



مثال ٣

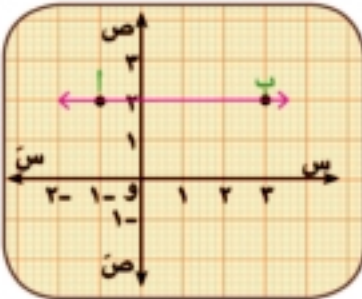


إذا كانت: أ (٢، ١)، ب (٢، ٣)

فإن: ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{3-1}{2-2} = \frac{2}{0} = \text{صفر}$

تلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ أفقيًا لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ ص, = ص, الميل = صفر.



مثال ٤

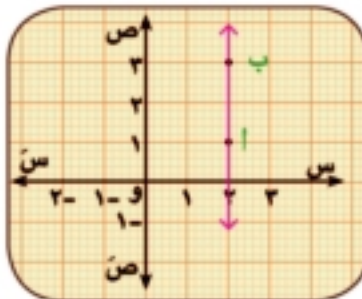


إذا كانت: أ (١، ٢)، ب (٣، ٢) فإننا لانستطيع حساب الميل؛ لأن تعريف الميل يشترط وجود تغير في الإحداثي السيني.

أي: س, - س, ≠ ٠

وتلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ رأسيًا لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ س, = س, الميل غير معرف.



الوحدة الثانية: الدرس الاول



تدرب

١ في كل من الحالات التالية، أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

- أ | $(1, 2), (2, 1)$ ب | $(0, 5), (1, 4)$
ج | $(1, 2), (3, 1)$ د | $(1, 3), (2, 3)$

٢ إذا كانت أ | $(1, 2), (2, 3)$ ب | $(2, 3), (3, 4)$ ج | $(3, 4), (4, 5)$ أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ ، ومثل كلاً منهما بياناً ماذا تلاحظ؟

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين أمام كل عبارة:

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

أولاً: الجدول الآتي يبين علاقة س، ص، وهي:
(ص = س + ٤ أو ص = س + ١ أو ص = ٢س - ١ أو ص = ٣س - ٢)

ثانياً: إذا كان $(2, 5)$ يحقق العلاقة $٣س - ص = ج$ فإن $ج =$

(١ أو ١- أو ١١ أو ١١-)

ثالثاً: $(2, 3)$ لا يحقق العلاقة (ص = س + ٥ أو ص = ٣س - ٣ أو ص = س + ٧ أو ص = س - ١)

رابعاً: تستهلك آلة للرّي ٤٧، ٢ من اللتر من السولار؛ لتشغيلها ٣ ساعات، فإذا عملت الآلة ١٠ ساعات، فإنها تستهلك من اللتر من السولار.
(٧، ٢ أو ٨ أو ٨، ٤ أو ٩، ٦)

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث أ | $(3, 1)$ ب | $(5, 2)$ هل النقطة ج | $(1, 8) \in \overleftrightarrow{AB}$

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

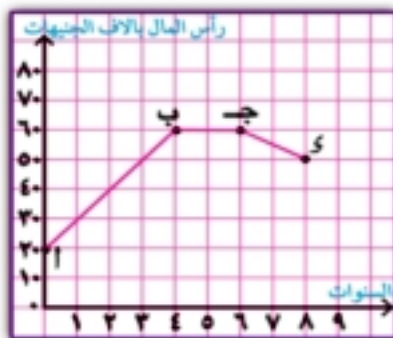
تطبيق (١)

الشكل المقابل: يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات.

- أ أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ ما دلالة كل منها؟
ب احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها.

الحل

أ | $(20, 0)$ ب | $(60, 4)$ ج | $(60, 6)$ د | $(50, 8)$



أولاً: ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{20 - 60}{4 - 6} = 10$ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال السنوات الأربعة. الأولى بمعدل ١٠ آلاف جنيه.

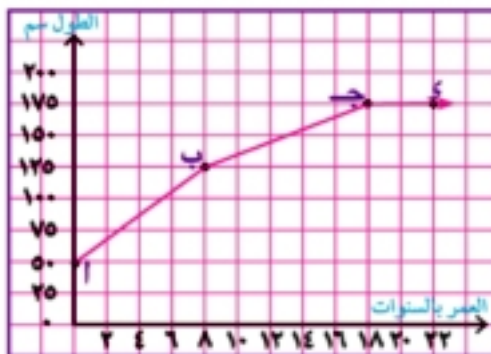
وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتاً خلال السنتين الخامسة والسادسة.

وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه.

ثانياً: رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثي الصادي لنقطة أ = ٢٠ ألف جنيه.



تدرب

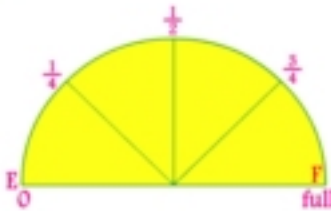


الشكل المقابل يوضح العلاقة بين طول شخص (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات.

أولاً: أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ وما دلالة كل منها؟

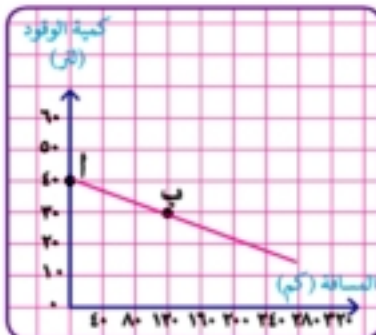
ثانياً: احسب الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.

تطبيق (٢)



ملاً حازم خزان سيارته بالوقود، وسعة هذا الخزان ٤٠ لترًا، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم، وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{3}{4}$ سعة الخزان، ارسم الشكل البياني الذي يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التي قطعها السيارة (علماً بأن هذه العلاقة خطية)، واحسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان.

الحل



عند البدء: أ (٤٠، ٠)

المسافة المقطوعة كمية الوقود المستخدمة

بعد قطع ١٢٠ كم ب (٣٠، ١٢٠)

ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{40 - 20}{120 - 30} = \frac{1}{3}$

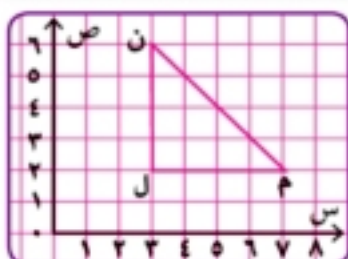
هذا الميل يعنى أن كمية الوقود بالخزان تنقص بمعدل لتر واحد كل ١٢ كم.



يفرغ الخزان عندما تقطع السيارة مسافة = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}} = \frac{40}{\frac{1}{12}}$

$$= \frac{12}{1} \times 40 = 480 \text{ كم.}$$

لاحظ أن: أ ب يقطع محور المسافة في النقطة (0, 480) وهي تعبّر عن المطلوب.



٥ في الشكل المقابل:

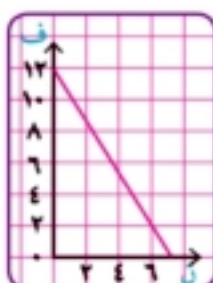
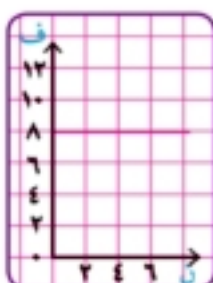
ل م ن مثلث قائم الزاوية في ل ، و (م) = 45° فإذا كان
ل (2, 3) ، م (7, 2) أوجد إحداثي ن واحسب ميل م ن .

الحل

إحداثي ن = (6, 3)

$$\text{ميل م ن} = \frac{2-3}{7-6} = \frac{-1}{1} = -1$$

٦ كل من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم.
حدد موضع الجسم عند بدأ الحركة، وعند ن = 6 ثوان ، وأوجد ميل المستقيم في كل حالة (ماذا
يمثل الميل؟).



ناقش معلمك في حل رقم ٦



الإحصاء



جمع البيانات وتنظيمها

فكر وناقش

إذا بحثت ظاهرة التكدس المرورى وطرق علاجه:

• ما مصادرك للحصول على البيانات؟

• كيف يمكنك جمع البيانات حول

هذه الظاهرة؟

• ما الطرق الإحصائية التى سوف

تستخدمها لتحليل البيانات؟

• هل تستطيع تفسير النتائج التى توصلت إليها؟

• ما مقترحاتك لعلاج هذه الظاهرة وتحقيق السيولة المرورية؟

سوف تتعلم

• كيفية جمع البيانات وتنظيمها
• فى جداول تكرارية ذات
مجموعات.

المصطلحات الأساسية

• جمع البيانات.
• تنظيم البيانات.
• جدول تكرارى ذو
مجموعات.

جمع البيانات

عمل تعاونى تعاون مع زملائك فى جمع البيانات من مصادرها بتوزيع

الأدوار:

أ المجموعة الأولى: اجمع بيانات ابتدائية عن الظاهرة محل الدراسة
عن طريق استبيان تدور أسئلته حول (وسيلة المواصلات المستخدمة
فى التنقل - حالة الطرق - زمن التكدس المرورى - وجود إشارات
استرشادية على الطرق - التواجد الأمنى).

ب المجموعة الثانية: اجمع بيانات ثانوية عن الظاهرة محل الدراسة من
النشرات المرورية - الإنترنت - مصادر الإعلام.

ج المجموعة الثالثة: لاحظ أى الطرق أكثر ازدحامًا، وسلوك قائدى
السيارات والتزامهم بقوانين المرور، ومدى التزام المشاة بأداب
الطريق، وعبور الطرق من المناطق المعدة لعبور المشاة.



تنظيم وتحليل البيانات

تعاون مع زملائك في إعداد جدول تكراريّ لوسيلة المواصلات التي يستخدمها زملاؤك.

وسيلة المواصلات	مترو	حافلة	سيارة خاصة	تاكسي	دراجة	سيرًا على الأقدام	المجموع
التكرار							

حدّد الوسيلة الأكثر استخدامًا (المنوال)

- هل هذه الوسيلة مناسبة؟ هل تساعد في علاج ظاهرة التكدّس المروري؟ لماذا؟
- ما مقترحاتك لعلاج هذه الظاهرة في ضوء ماتوصلت إليه من نتائج؟

تنظيم البيانات وعرضها في جداول تكرارية

مثال



فيمايلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالبًا في إحدى الاختبارات

١٢	١٣	٧	٦	٨	٥	٤	٧	١٠	٧
٩	١٣	١٢	١٥	٩	١١	١٢	١١	٩	٢
١٧	٨	١٣	٣	١٤	٩	٣	١٩	١٤	٥

المطلوب: تكوين الجدول التكراريّ ذي المجموعات لهذه البيانات .

الحل

لتكوين الجدول التكراريّ ذي المجموعات نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نوجد أكبر قيمة لهذه البيانات و أصغر قيمة لها؟

باعتبار مجموعة البيانات السابقة هي سـ

فإن: سـ = {س : ٢ ≤ س ≤ ١٩}

أي أن: قيم سـ تبدأ من ٢ وتنتهي عند ١٩

أي أن: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٩ - ٢ = ١٧

ثانيًا: تجزأ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية المدى وليكن ٦ مجموعات.

∴ مدى المجموعة = $\frac{17}{6}$ تقرب من ٣

ثالثًا: تصبح المجموعات الجزئية كالتالي.



المجموعة الأولى	- ٢	المجموعة الثالثة	- ٨
المجموعة الثانية	- ٥	المجموعة الرابعة	- ١١

وهكذا

لاحظ أن ٢ - معناها مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوى ٢ والأقل من ٥ وهكذا.

رابعاً: تسجل البيانات فى الجدول التالى:

المجموعة	العلامات	التكرار
- ٢	////	٤
- ٥	/ ///	٦
- ٨	// ///	٧
- ١١	/// ///	٨
- ١٤	///	٣
- ١٧	//	٢
المجموع		٣٠

خامساً: يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات، ويمكن كتابته رأسياً أو أفقياً والصورة الأفقية للجدول هى كالاتى:

المجموعة	- ٢	- ٥	- ٨	- ١١	- ١٤	- ١٧	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢	٣٠



الوحدة الثالثة

الدرس الثاني

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانياً

فكر وناقش

أولاً: الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانياً

مثال



يبين الجدول الآتى التوزيع التكرارى لأطوال ١٠٠ تلميذ بالسنتيمترات فى إحدى المدارس:

(مجموعات) الطول بالسنتيمتر	١١٥	١٢٠	١٢٥	١٣٠	١٣٥	١٤٠	١٤٥	المجموع
عدد التلاميذ (التكرار)	٨	١٢	١٩	٢٣	١٨	١٣	٧	١٠٠

١ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟

٢ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟

٣ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟

كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد لهذه البيانات ومثله بيانياً

الحل

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟ لا

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟ وما عددهم؟ نعم، ٦٢ تلميذاً.

كيف توجد عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟ نجمع عدد

التلاميذ فى مجموعات الطول الأقل من المجموعة ١٤٥

و الآن للإجابة عن التساؤلات السابقة بطريقة أكثر سهولة نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، وذلك كالتالى:

سوف تتعلم

- كيفية تكوين كل من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- التمثيل البياني لكل من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.

المصطلحات الأساسية

- توزيع تكرارى.
- جدول تكرارى.
- جدول تكرارى متجمع صاعد.
- جدول تكرارى متجمع نازل.
- منحنى تكرارى متجمع صاعد.
- منحنى تكرارى متجمع نازل.



جدول التكرار المتجمّع الصاعد	
التكرار المتجمّع الصاعد	الحدود العليا للمجموعات
صفر	أقل من ١١٥
٨	أقل من ١٢٠
٢٠	أقل من ١٢٥
٣٩	أقل من ١٣٠
٦٢	أقل من ١٣٥
٨٠	أقل من ١٤٠
٩٣	أقل من ١٤٥
١٠٠	أقل من ١٥٠

أي

التكرار المتجمّع الصاعد	الحدود العليا للمجموعات
٠	أقل من ١١٥
٨ = ٨ + ٠	أقل من ١٢٠
٢٠ = ١٢ + ٨	أقل من ١٢٥
٣٩ = ١٩ + ٢٠	أقل من ١٣٠
٦٢ = ٢٣ + ٣٩	أقل من ١٣٥
٨٠ = ١٨ + ٦٢	أقل من ١٤٠
٩٣ = ١٣ + ٨٠	أقل من ١٤٥
١٠٠ = ٧ + ٩٣	أقل من ١٥٠

ولتمثيل الجداول التكراري المتجمّع الصاعد بيانياً:

- ١ نخصص المحور الأفقي للمجموعات والمحور الرأسي للتكرار المتجمّع الصاعد.
- ٢ نختار مقياساً للرسم على المحور الرأسي بحيث يتسع المحور للتكرار الكلي المتجمّع الصاعد عدد عناصر المجموعة.
- ٣ نمثل التكرار المتجمّع الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البياني لها بالتتابع.



ثانيًا الجدول التكراري المتجمّع النازل وتمثيله بيانيًا :

من التوزيع التكراري السابق ، والذي يبين أطوال ١٠٠ طالب بالسنتيمترات في إحدى المدارس .
أوجد: عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٥٠ سم فأكثر .
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠ سم فأكثر .
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥ سم فأكثر .
كوّن الجدول التكراري المتجمّع النازل، ثم مثله بيانيًا .

الحل

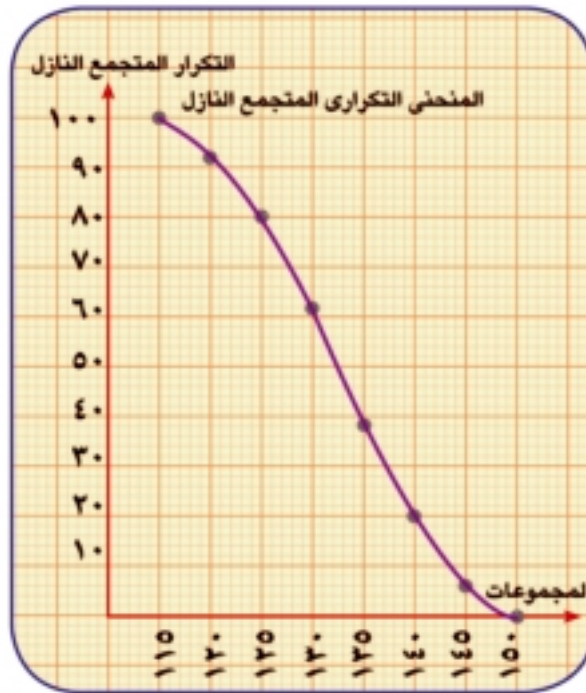
لا يوجد تلاميذ أطوالهم ١٥٠ سم فأكثر .
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠ سم فأكثر هو $١٣ + ٧ = ٢٠$ طالبًا
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥ سم فأكثر هو
أكمل: $١٩ + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$

للإجابة عن هذه التساؤلات بصورة أكثر سهولة نكون الجدول التكراري المتجمّع النازل كالآتي:

جدول التكرار المتجمّع النازل		الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمّع النازل
التكرار المتجمّع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات		
١٠٠	١١٥ فأكثر	١١٥ فأكثر	$١٠٠ = ٨ + ٩٢$
٩٢	١٢٠ فأكثر	١٢٠ فأكثر	$٩٢ = ١٢ + ٨٠$
٨٠	١٢٥ فأكثر	١٢٥ فأكثر	$٨٠ = ١٩ + ٦١$
٦١	١٣٠ فأكثر	١٣٠ فأكثر	$٦١ = ٢٣ + ٣٨$
٣٨	١٣٥ فأكثر	١٣٥ فأكثر	$٣٨ = ١٨ + ٢٠$
٢٠	١٤٠ فأكثر	١٤٠ فأكثر	$٢٠ = ١٣ + ٧$
٧	١٤٥ فأكثر	١٤٥ فأكثر	$٧ = ٧ + ٠$
صفر	١٥٠ فأكثر	١٥٠ فأكثر	٠



ولتمثيل هذا الجدول بيانياً نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ، وذلك لنحصل على التمثيل البياني التالى:



الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملاً بأحد المطابع :

- ٥٠	- ٤٥	- ٤٠	- ٣٥	- ٣٠	- ٢٥	- ٢٠	المجموعات
٥	٣	٩		١٠	٧	٦	التكرار

المطلوب:

- أكمل الجدول.
- ارسم فى شكل واحد المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.
- من الرسم أوجد :
أولاً : عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٥ سنة.
ثانياً : عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٥ سنة.

ناقش معلمك فى الحل



الوحدة الثالثة

الدرس الثالث

الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال

فكر وناقش

أولاً: الوسط الحسابي

سبق أن درست كيفية إيجاد الوسط الحسابي لمجموعة من القيم وعلمت أن:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

فمثلاً: إذا كان أعمار ٥ تلاميذ هي ١٣، ١٥، ١٦، ١٤، ١٧ سنة فإن:

$$\text{الوسط الحسابي لأعمارهم} = \frac{١٧+١٤+١٦+١٥+١٣}{٥} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥ \text{ سنة}$$

$$١٧ + ١٤ + ١٦ + ١٥ + ١٣ = ٥ \times ١٥$$

لاحظ أن:

الوسط الحسابي: هو أبسط المتوسطات جميعاً ، وأكثرها تداولاً ، وهو القيمة التي لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية، ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم نقسم على عدد المفردات.

إيجاد الوسط الحسابي لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات:

كيف يمكن إيجاد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	- ١٠	- ٢٠	- ٣٠	- ٤٠	- ٥٠	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠٠

لاحظ: لإيجاد الوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي مجموعات نتبع الخطوات التالية:

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الوسط الحسابي من جدول تكراري ذي مجموعات
- كيفية حساب الوسيط من جدول تكراري ذي مجموعات.
- كيفية حساب المنوال من جدول تكراري ذي مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- وسط حسابي.
- وسيط.
- مدرج تكراري.
- منوال.



١ نحدّد مراكز المجموعات:

مركز المجموعة الأولى = $\frac{٢٠+١٠}{٢} = ١٥$. مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠+٢٠}{٢} = ٢٥$... وهكذا
ونظرًا لأن مدى المجموعات الجزئية متساو، وكل منها = ١٠
نعتبر الحد الأعلى للمجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون:

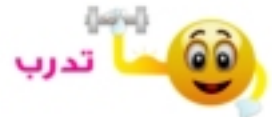
$$\text{مركزها} = \frac{٦٠+٥٠}{٢} = ٥٥$$

٢ نكون الجدول الرأسي الآتي:

المجموعة	مركز المجموعة	التكرار	مركز المجموعة × التكرار
م	ك	م × ك	
- ١٠	١٥	١٥٠	
- ٢٠	٢٥	٥٠٠	
- ٣٠	٣٥	٨٧٥	
- ٤٠	٤٥	١٣٥٠	
- ٥٠	٥٥	٨٢٥	
المجموع		١٠٠	٣٧٠٠

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$$

$$٣٧ = \frac{٣٧٠٠}{١٠٠} =$$



١ إذا كان الوسط الحسابي لدرجات تلميذ في الخمسة أشهر الأولى هي ٢٣,٨ فما الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الشهر السادس ليكون الوسط الحسابي لدرجاته ٢٤ درجة؟

٢ فيما يلي التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طفلًا بالكيلوجرامات.

الوزن بالكيلو جرام	- ٦	- ١٠	- ١٤	- ١٨	- ٢٢	- ٢٦	- ٣٠	المجموع
التكرار	٢	٣		٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.



ثانيًا: الوسيط

هو القيمة التي تتوسط مجموعة المفردات بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساويًا لعدد القيم الأكبر منها.

إيجاد الوسيط لتوزيع تكرار ذي المجموعات بيانياً:

- ١ نشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد أو النازل ، ثم نرسم المنحنى التكراري المتجمع له.
- ٢ نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$.
- ٣ نحدد النقطة أعلى المحور الرأسى (التكرار) والتي تمثل ترتيب الوسيط.
- ٤ نرسم مستقيماً أفقيًا من نقطة أيقطع المنحنى فى نقطة نرسم منها عمودًا على المحور الأفقى ؛ ليقطعه فى نقطة تمثل الوسيط.



مثال ١

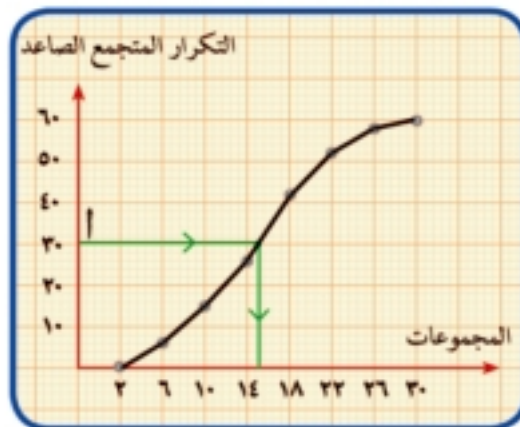
التوزيع التكراري الآتى يبين درجات ٦٠ طالبًا فى أحد الاختبارات

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٦	٩	١٢	١٥	١٠	٥	٣	٦٠

أوجد الوسيط لهذا التوزيع مستخدمًا جدول التكرار المتجمع الصاعد.

الحل

- ١ نشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد. $\frac{60}{2} = 30$ نوجد ترتيب الوسيط =
- ٢ نرسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد ومن الرسم نوجد الوسيط.



الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢	٠
أقل من ٦	٦
أقل من ١٠	١٥
أقل من ١٤	٢٧
أقل من ١٨	٤٢
أقل من ٢٢	٥٢
أقل من ٢٦	٥٧
أقل من ٣٠	٦٠

من الرسم الوسيط = ١٤,٨ من الدرجة



فخر هل يمكنك إيجاد الوسيط باستخدام الجدول التكرارى المتجمع النازل؟
هل تختلف قيمة الوسيط فى هذه الحالة.

مثال ٢

التوزيع التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع.

الأجر بالجنيه (المجموعات)	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	المجموع
عدد العمال (التكرار)	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

المطلوب:

- رسم المنحنيين المتجمع الصاعد والنازل لهذا التوزيع معاً.
- هل يمكن إيجاد الأجر الوسيط من هذا المنحنى؟

الحل

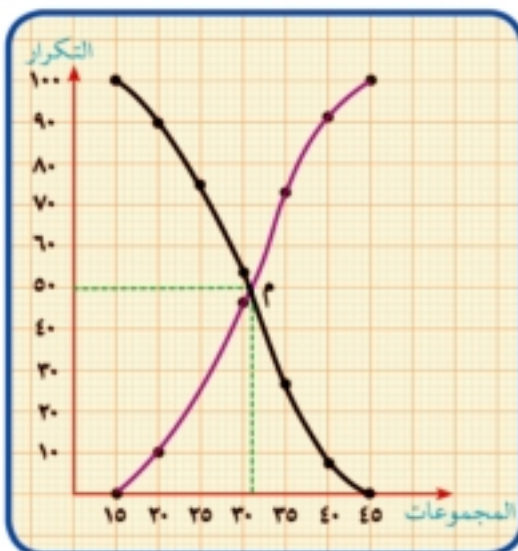
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع
أقل من ١٥	صفر	١٥ فأكثر	١٠٠
أقل من ٢٠	١٠	٢٠ فأكثر	٩٠
أقل من ٢٥	٢٥	٢٥ فأكثر	٧٥
أقل من ٣٠	٤٧	٣٠ فأكثر	٥٣
أقل من ٣٥	٧٢	٣٥ فأكثر	٢٨
أقل من ٤٠	٩٢	٤٠ فأكثر	٨
أقل من ٤٥	١٠٠	٤٥ فأكثر	صفر

لاحظ أن:

المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد يتقاطع مع المنحنى التكرارى المتجمع النازل فى نقطة واحدة هى نقطة م .



الوحدة الثالثة الدرس الثالث



الإحداثي الرأسى لنقطة م = 50 =
 $\frac{100}{2}$ =
 ترتيب الوسيط =

∴ الإحداثي الأفقي لنقطة م يعين الوسيط
 كل 10 مم من المحور الأفقي تمثل 5 جنيهات
 أكمل 2 مم تمثل
 الأجر الوسيط = $30 + \frac{5 \times 2}{10} = 31$ جنيهًا.

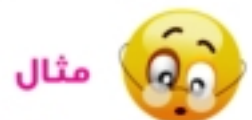


ارسم منحنى التكرار المتجمع النازل للتوزيع التكرارى التالى ثم أوجد قيمة الوسيط.

المجموعات	- 5	- 10	- 15	- 20	- 25	- 30	المجموع
التكرار	4	6	10	17	10	3	50

ثالثًا: المنوال

هو القيمة الأكثر شيوعًا فى مجموعة المفردات أى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها من القيم.



الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات 40 تلميذًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	- 2	- 6	- 10	- 14	- 18	- 22	- 26
التكرار	3	5	8	10	7	5	2

أوجد المنوال لهذا التوزيع بيانيًا.

الحل

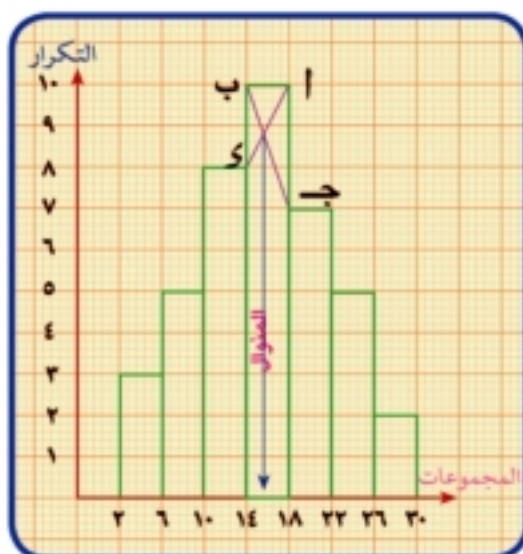
يمكن إيجاد المنوال لهذا التوزيع بيانيًا باستخدام المدرج التكرارى ، وذلك كالآتى:

أولاً: ارسم المدرج التكرارى

١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقيًا لتمثيل المجموعات، والآخر رأسيًا لتمثيل تكرار كل مجموعة.



- ٢ نقسم المحور الأفقي إلى عددٍ من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب لتمثيل المجموعات.
- ٣ نقسم المحور الرأسي إلى عددٍ من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يمكن تمثيل أكبر تكرار في المجموعات.
- ٤ نرسم مستطيلًا قاعدته هي المجموعة (٢-) وارتفاعه يساوي التكرار (٣).
- ٥ نرسم مستطيلًا ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هي المجموعة (٦-) وارتفاعه يساوي التكرار (٥).
- ٦ نكرر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٢٦-).



ثانيًا: إيجاد المنوال من المدرج التكرارى:

لإيجاد المنوال من المدرج التكرارى نلاحظ أن

المجموعة الأكثر تكرارًا هي المجموعة (١٤ -) وتسمى المجموعة المنوالية. لماذا؟

نحدد نقطة تقاطع $\overline{ا ب}$ من الرسم، ونسقط منها عمودًا على المحور الأفقى يحدد القيمة المنوالية للتوزيع.

من الرسم ما القيمة المنوالية؟

ناقش معلمك فى الحل



متوسطات المثلث
والمثلث المتساوي الساقين

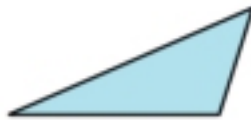
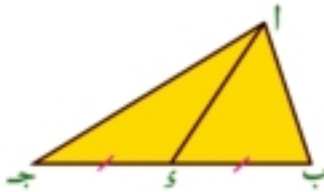


متوسطات المثلث

فكر وناقش

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

في $\triangle$ ا ب ج: $\therefore$ $\overline{ك}$ منتصف ب ج
فيكون $\overline{ا ك}$ متوسط للمثلث
- ما عدد متوسطات أى مثلث؟
- ارسم المتوسطات فى كل من المثلثات التالية:



سوف تتعلم

متوسطات المثلث

المثلث الثلاثينى الستينى.

المصطلحات الأساسية

متوسط للمثلث.

مثلث ثلاثينى ستينى

نظرية (1)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة



فى $\triangle$ ا ب ج: إذا كانت $\overline{ك}$ منتصف ب ج،
هـ منتصف ا ج، و $\overline{و}$ منتصف ا ب .

فإن: $\overline{ا ك}$ ، $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ج و}$ تتقاطع فى نقطة واحدة.

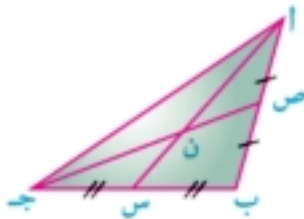


تدرب

فى الشكل المقابل:

ا ب ج مثلث فيه س منتصف ب ج،

ص منتصف ا ب، $\overline{ا س} \cap \overline{ج ص} = (ن)$.



١ ارسم ب ن ليقطع ا ج في ع،
أوجد بالقياس طول ا ع ، طول ج ع .
هل ا ع = ج ع ؟ فسر إجابتك؟

٢ قس الأطوال ثم أكمل:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} , \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ن ص}}{\text{ن ج}} , \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن ا}}$$

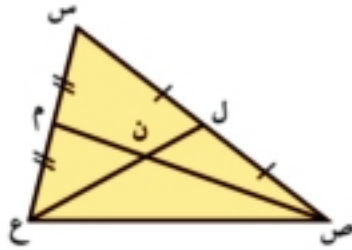
إذا كانت قياساتك دقيقة فإن $\frac{1}{4} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} , \frac{1}{4} = \frac{\text{ن ص}}{\text{ن ج}} , \frac{1}{4} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن ا}}$

نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة
أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

تدرب

أكمل



ل ع = ١٥ سم ، ص م = ١٨ سم ، س ص = ٢٠ سم
ن ل = ، ن ص =
محيط $\triangle$ ن ل ص =



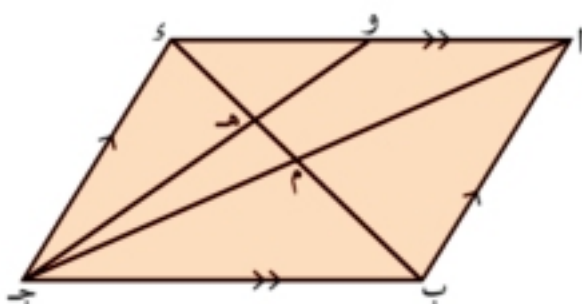
م ه = ٣ سم ، م ج = ٨ سم
م ا = ، م ي =
م ه = ، م ج = ج ي

حقيقة

ا ي متوسط في $\triangle$ ا ب ج ، م $\in$ ا ي .
إذا كان: ا م = ٢ م ي

فإن: م تكون نقطة تقاطع متوسطات المثلث ا ب ج .





مثال (١)



في الشكل المقابل:

أ ب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م،

هـ د م حيث $هـ د = ٢ هـ م$ ،

رسم جـ هـ فقطع أ د في و.

أثبت أن: أ و = و د

البرهان: في $\square$ أ ب ج د

$\therefore$ أ ج د $\cap$ ب د = م

في $\triangle$ و أ ج

$\therefore$ م منتصف أ ج

$\therefore$ هـ د م حيث $هـ د = ٢ هـ م$

$\therefore$ هـ نقطة تقاطع متوسطات المثلث

$\therefore$ هـ د م

$\therefore$ م منتصف أ ج

$\therefore$ م منتصف للمثلث

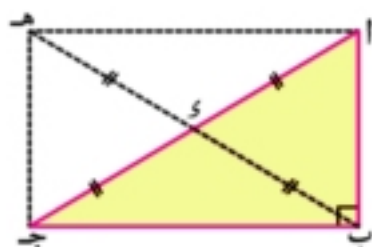
$\therefore$ جـ و م منتصف للمثلث، و منتصف أ د

نظرية (٣)



طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي

نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات: أ ب جـ مثلث فيه $\angle$ ب = 90°

بـ د متوسط في $\triangle$ أ ب جـ

المطلوب: إثبات أن: بـ د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

العمل: نرسم بـ د ونأخذ نقطة هـ $\exists$ بـ د بحيث بـ د = هـ د

البرهان:

$\therefore$ الشكل أ ب جـ هـ فيه أ جـ ، بـ هـ ينصف كل منهما الآخر

$\therefore$ الشكل أ ب جـ هـ متوازي أضلاع

$\therefore$ $\angle$ ب = 90° $\therefore$ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل



$$\therefore \text{ب ه} = \text{ا ج}$$

وهو المطلوب

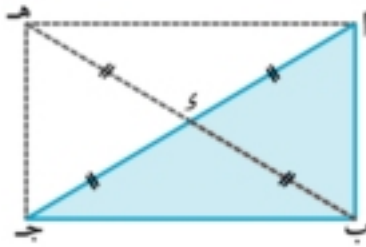
$$\therefore \text{ب ي} = \frac{1}{2} \text{ا ج}$$

$$\therefore \text{ب ي} = \frac{1}{2} \text{ب ه}$$

عكس نظرية ٣



إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات: ا ب ج مثلث، $\overline{\text{ب ي}}$ متوسط، $\text{ي ا} = \text{ب ي} = \text{ي ج}$

المطلوب: إثبات أن $\angle \text{ا ب ج} = 90^\circ$

العمل: نرسم $\overline{\text{ب ي}}$ ونأخذ نقطة ه $\in \overline{\text{ب ي}}$ بحيث $\text{ب ي} = \text{ي ه}$

البرهان:

$$\therefore \text{ب ي} = \frac{1}{2} \text{ب ه} = \frac{1}{2} \text{ا ج}$$

$$\therefore \text{ب ه} = \text{ا ج}$$

$\therefore$ الشكل ا ب ج ه فيه $\overline{\text{ا ج}}$ ، $\overline{\text{ب ه}}$ متساويان في الطول وينصف كل منهما الآخر

$\therefore$ الشكل ا ب ج ه مستطيل

وهو المطلوب

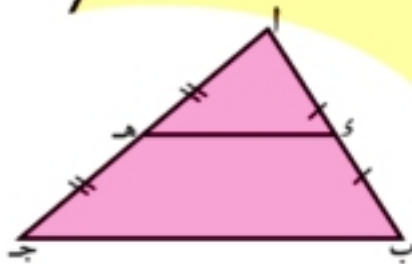
$$\therefore \angle \text{ا ب ج} = 90^\circ$$

نتيجة



طول الضلع المقابل لزاوية قياسها 30° في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

تذكر أن



في المثلث ا ب ج إذا كانت ي منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ،
ه منتصف $\overline{\text{ا ج}}$ فإن

$$\text{١} \text{ ي ه} = \frac{1}{2} \text{ب ج}$$

$$\text{٢} \text{ ي ه} \parallel \overline{\text{ب ج}}$$



المثلث المتساوي الساقين

فكر وناقش

سوف تتعلم

خواص المثلث المتساوي الساقين.

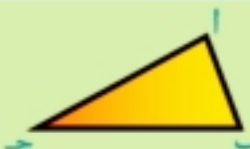
تصنيفات المثلث المتساوي الساقين.

المصطلحات الأساسية

مثلث متساوي الساقين.

مثلث متساوي الأضلاع.

مثلث مختلف الأضلاع.

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوي الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوي الأضلاع (متطابق الأضلاع)
		
$a \neq b \neq c$	$a = b \neq c$	$a = b = c$

في الشكل المقابل:

لاحظ أن: الضلعين a ، b متطابقان (متساويان في الطول).



لذلك يسمى المثلث a b c بالمثلث المتساوي الساقين وتسمى النقطة a رأس المثلث، b c قاعدته والزوايتان b ، c زاويتا قاعدة المثلث



خواص المثلث المتساوي الساقين

في أي مثلث متساوي الساقين:

- مانوع كل من زاويتي القاعدة؟ (حادّة - قائمة - منفرجة)
- مانوع زاوية الرأس؟

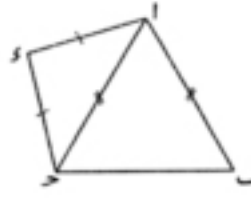
مثال



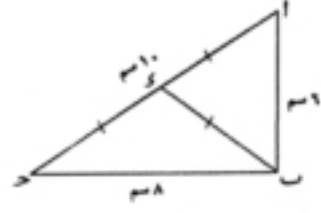
في كل من الأشكال الآتية اذكر المثلثات المتساوية الساقين وحدد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتي القاعدة وزاوية رأس المثلث .



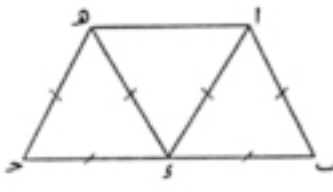
(شكل ٣)



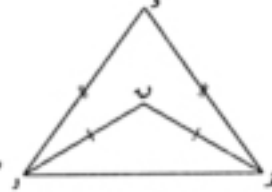
(شكل ٢)



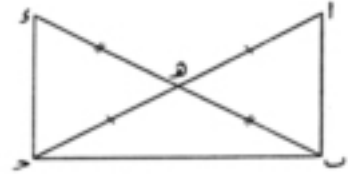
(شكل ١)



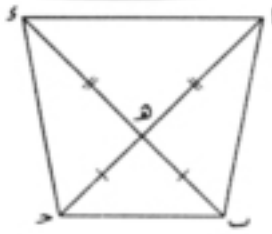
(شكل ٦)



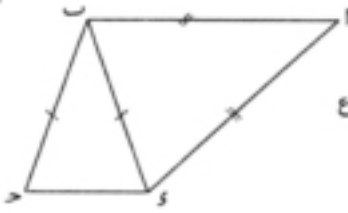
(شكل ٥)



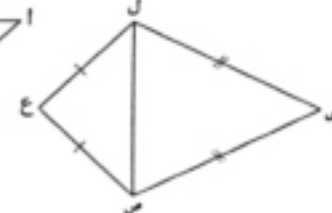
(شكل ٤)



(شكل ٩)



(شكل ٨)



(شكل ٧)

ناقش مع معلمك في الحل



نظريات المثلث المتساوي الساقين

فكر وناقش

هل توجد علاقة بين قياس زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين؟
للتعرف على ذلك قم بالنشاط التالي:

نشاط



باستخدام الفرجار

١ ارسم عدة مثلثات متساوية الساقين
كما يوضح ذلك الرسم المقابل
حيث $AB = AC$.

٢ **أوجد** باستخدام

المنقلة قياس كل من زاويتي القاعدة $\triangle ABC$ ، $\triangle ADB$.

٣ سجل البيانات التي حصلت عليها في جدول كالآتي، وقارن بين القياسات في كل حالة.

رقم المثلث	و ($\triangle ABC$)	و ($\triangle ADB$)
١		
٢		
٣		

٤ احفظ نشاطك في ملف الإنجاز

نظرية (١)

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

المعطيات: $AB = AC$ فيه $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$

المطلوب: إثبات أن $\angle B \equiv \angle C$

سوف تتعلم

العلاقة بين زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين.

العلاقة بين قياسات زاويا المثلث المتساوي الأضلاع.

العلاقة بين الضلعين المقابلين لزاويتين متساويتين في مثلث.

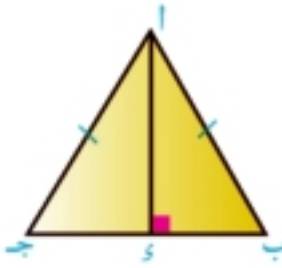
إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع.

المصطلحات الأساسية

مثلث متساوي الساقين.

زاويتا القاعدة.





(معطى)
(ضلع مشترك)
(وتر و ضلع)
وهو المطلوب

العمل : نرسم $\overline{اى} \perp \overline{بج}$

البرهان : المثلثان $\triangle اىب$ ، $\triangle اىج$ قائما الزاوية فيهما

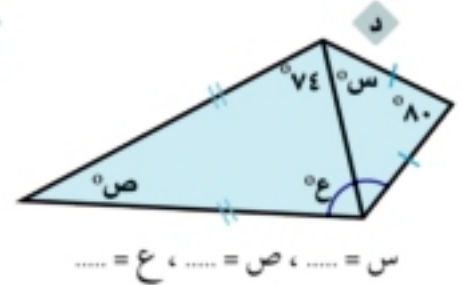
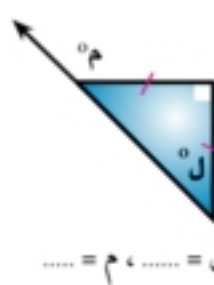
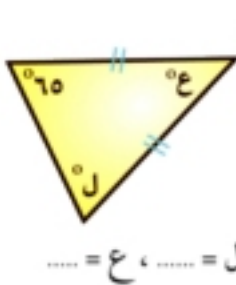
$$\left. \begin{array}{l} \overline{اب} \equiv \overline{اج} \\ \overline{اى} \end{array} \right\}$$

$\therefore \triangle اىب \equiv \triangle اىج$

وينتج من التطابق أن $\angle ب \equiv \angle ج$



١ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية:





٢ في الشكل المقابل Δ جـ مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC$

و $(\Delta) = 40^\circ$ ، $\angle B = \angle C$ ، $BD = CE$

أولاً: **أوجد** $\angle B$ و (Δ)

ثانياً: **اثبت أن** $\Delta ABE \equiv \Delta ACD$

فكر هل مكملات الزوايا المتساوية في القياس تكون متساوية القياس؟

نتيجة

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة ويكون قياس كل منها 60°



مثال (١)

في الشكل المقابل: Δ جـ مثلث متساوي الأضلاع.

$\angle B = \angle C$ بحيث $B = C = 60^\circ$.

اثبت أن $AD \perp BC$

المعطيات: $AB = AC = BC$ ، $\angle B = \angle C$ ، $\angle B = \angle C = 60^\circ$

المطلوب: إثبات أن: $AD \perp BC$

البرهان: Δ جـ متساوي الأضلاع.

نتيجة $\therefore \angle B = \angle C = \angle A = 60^\circ$

$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$ ، Δ جـ خارجة عن Δ جـ

(١) $\angle B = \angle C = 60^\circ + \angle A = 120^\circ$

في Δ جـ

(٢) $\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$

من (١)، (٢) ينتج أن: $\angle B = \angle C = 60^\circ$



$$\therefore \angle (باى) = \angle (باج) + \angle (جاي)$$

$$\therefore \angle (باى) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{با} \perp \overline{اي} \text{ وهو المطلوب}$$

لاحظ أن: قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

مثال



٢ في الشكل المقابل: $اب = اى$ ، $بج = جى$

اثبت أن $\triangle ابج \equiv \triangle ايج$

المعطيات: $اب = اى$ ، $بج = جى$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ابج \equiv \triangle ايج$

البرهان: في $\triangle ابى$

$$\therefore اب = اى$$

$$\therefore \angle (ابى) = \angle (ايب) \quad (1)$$

في $\triangle جبى$

$$\therefore جب = جى$$

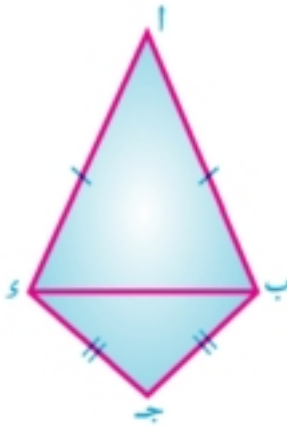
$$\therefore \angle (جبى) = \angle (جيب) \quad (2)$$

بجمع (1)، (2) ينتج أن:

$$\angle (ابى) + \angle (جبى) = \angle (ايب) + \angle (جيب)$$

$$\therefore \angle (ابج) = \angle (ايج)$$

$$\therefore \triangle ابج \equiv \triangle ايج \text{ وهو المطلوب.}$$





فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم لقياس الزاوية:



س = ، ص =



س = ، ص =



س = ، ص =

٦ $\overline{أه}$ منصف $\triangle جاء$



س =

٥ $\overline{أه} \parallel \overline{ب ج}$



س =

٤ $\overline{أ س} \parallel \overline{ب ج}$



س = ، ص =

نشاط ارسم المثلث $أ ب ج$ فيه $ب ج = ٧$ سم، $\angle ب = ٥٠^\circ$ و $\angle ج = ٥٠^\circ$ ثم قس طول كل من $أ ب$ ، $أ ج$ ، كرر النشاط باختيار قياسات أخرى لطول $ب ج$ وقياس زاويتي $ب$ ، $ج$ و أكمل الجدول:

رقم المثلث	ب ج	$\angle ب$	$\angle ج$	أ ب	أ ج
١	٧ سم	٥٠°	٥٠°		
٢					
٣					
٤					

١ هل طول $أ ب$ = طول $أ ج$ ؟ ٢ هل $أ ب \equiv أ ج$ ؟

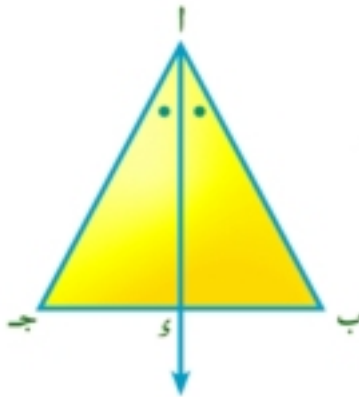
٢ كيف يمكنك تفسير هذه النتائج هندسياً؟



نظرية (٢)



إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، ويكون المثلث متساوي الساقين.



المعطيات : $\triangle ABC$ فيه $\angle B \equiv \angle C$

المطلوب : إثبات أن $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$

العمل : ننصف $\angle A$ بـ $\overline{AD}$ بالمنصف $\overline{AD}$ يقطع $\overline{BC}$ في D

البرهان : $\angle B \equiv \angle C$: $\therefore \angle B \equiv \angle C$

$\therefore \angle B = \angle C$ ($\angle B$)

$\therefore \overline{AD}$ ينصف $\angle A$ بـ $\overline{AD}$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ ($\angle A$)

$\therefore$ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية $= 180^\circ$

$\therefore \angle B = \angle C$ ($\angle B$)

$\therefore$ المثلثان ABD ، ACD فيهما

$\overline{AD}$ ضلع مشترك

$\angle B = \angle C$ ($\angle B$)

$\angle BAD = \angle CAD$ ($\angle A$)

$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD$

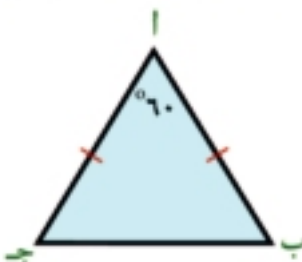
وينتج من التطابق أن $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$

ويكون $\triangle ABC$ متساوي الساقين.

نتيجة



إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع.



في الشكل المقابل $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين فيه:

$\angle B = \angle C$ ، $\angle B = \angle C = 60^\circ$

أكمل $\angle B = \angle C$ ($\angle B$) $\angle C = \angle B$ ($\angle C$) =

أي أن: $\angle B \equiv \angle C$ $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ABC$

$\therefore \triangle ABC$ هو مثلث

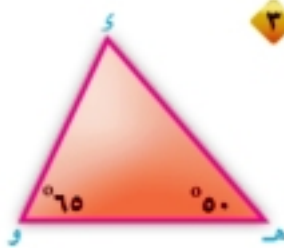


لاحظ أن: المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه 60° يكون متساوي الأضلاع.

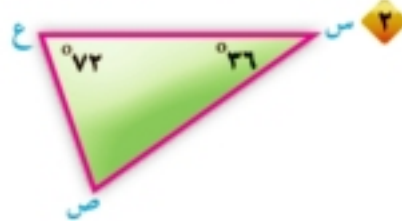


تدرب

في كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول كما في المثال ١ :



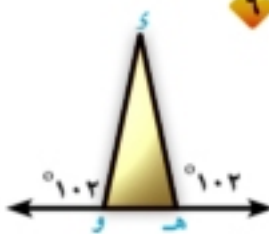
..... =



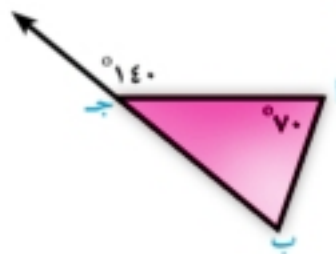
..... =



ا ب = ا ج



..... =



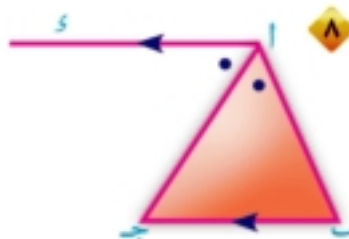
..... =



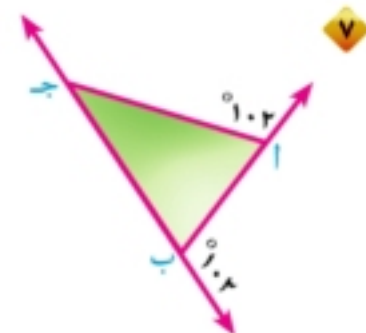
..... =



..... =

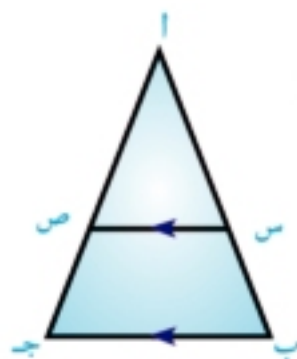
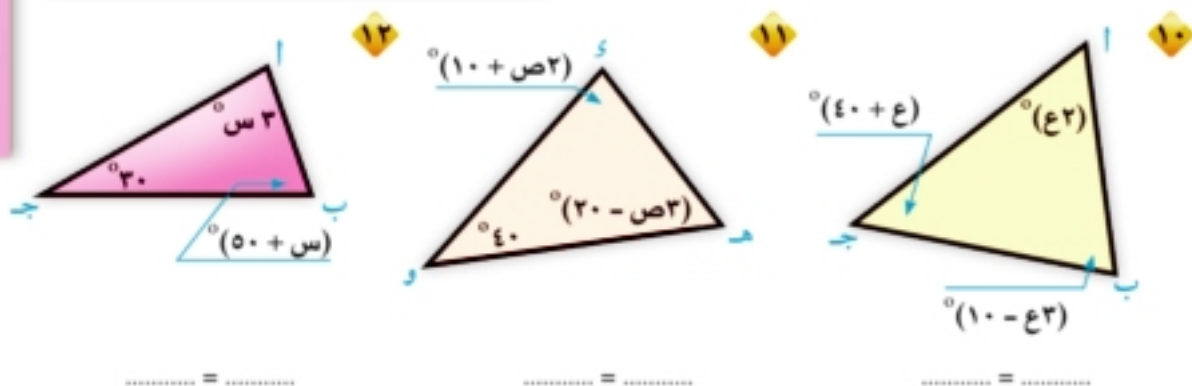


..... =



..... =





أمثلة



١ في الشُّكْل المَقَابِل: ا ب جـ مِثْلث فِيهِ ا ب = ا جـ، س ص // ب جـ

 **اثبت أن** Δ اس ص متساوي الساقين.

المعطيات: $\overline{ab} = \overline{ac}$ ، $\overline{sv} // \overline{pb}$ ج.

المطلوب : إثبات أن $A \cup A^c = U$

البرهان: في Δ ا ب ج $\therefore$ ا ب = ا ج

(i) $\therefore (a \setminus b) \cap c = (a \setminus (b \cap c))$

∴ $\overline{SS} \parallel \overline{JJ}$ ، $\overline{AB}$ قاطع لهما

∴ $W(\Delta_{ASV}) = W(\Delta_{ABJ})$ بالتناظر (٢)

بالمثل $\because \overline{SV} \parallel \overline{BJ}$ ، $\overleftrightarrow{AJ}$ قاطع لهما

∴ $\omega(\Delta \text{ اص س}) = \omega(\Delta \text{ اج ب})$ بالتناظر (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

$$\varphi(\Delta \cup \{s\}) = \varphi(\Delta \cup \{s'\})$$

في Δ اس ص

$$\omega(\Delta \text{ اس ص}) = \omega(\Delta \text{ اص س})$$

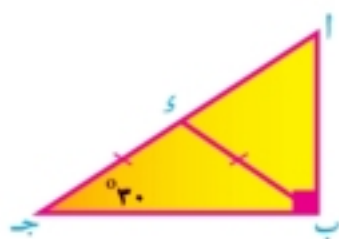
∴ اس = اص

وهو المطلوب

أي أن المثلث AS ص متساوي الساقين

فکر هل يمكنُ استنتاجُ أن س ب = ص جـ؟ فسر إجابتك.





٢ في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، و $\angle ج = 30^\circ$ ،
 $\exists$ أ جـ بحيث $ك ب = ك جـ$

اثبت أن $\triangle أ ب ك$ متساوي الأضلاع.

المعطيات: و $\angle أ ب ج = 90^\circ$ ، و $\angle ج = 30^\circ$ ، $ك ب = ك ج$

المطلوب: إثبات أن $أ ب = ب ك = أ ك$

البرهان: في $\triangle ك ب ج$ $\therefore ك ب = ك ج$

$\therefore \angle ك ج ب = \angle ج ب ك = 30^\circ$

في $\triangle أ ب ج$ $\therefore \angle أ ب ج = 90^\circ$ ، و $\angle ج ب ك = 30^\circ$

$\therefore \angle أ ب ك = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (١)

$\therefore \angle أ ك ب$ خارجة عن $\triangle ك ب ج$

$\therefore \angle أ ك ب = \angle ج ب ك + \angle ك ج ب = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

و $\angle أ ب ك = 60^\circ$ (٢)

في $\triangle أ ب ك$ $\therefore$ مجموع قياسات زوايا $\triangle$ الداخلة $= 180^\circ$

$\therefore \angle أ ك ب = (60^\circ + 60^\circ) - 180^\circ = 60^\circ$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) $\therefore \angle أ ب ك = \angle ك ب ج = \angle ج ب ك = 60^\circ$

أي أن $\triangle أ ب ك \equiv \triangle ك ب ج \equiv \triangle ج ب ك$

$\therefore$ المثلث $أ ب ك$ متساوي الأضلاع **أي أن** $أ ب = ب ك = أ ك$.



نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين

فكر وناقش

سوف تتعلم

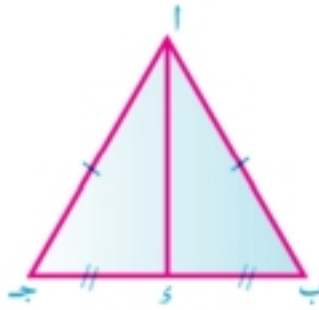
نتائج على نظريات المثلث
المتساوي الساقين.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوي الساقين.
- منصف زاوية الرأس.
- منصف قاعدة المثلث.
- محور تماثل القطعة
المستقيمة.

نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من
الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة

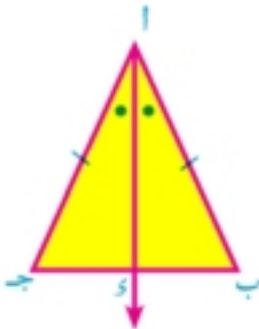


في الشكل المقابل
 $\triangle ABC$ فيه $AB = AC$
، AD متوسط فيه
فإن: AD ينصف $\angle A$
، $AD \perp BC$

لاحظ أن: $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ لماذا؟

نتيجة (٢)

منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي
الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها.



في الشكل المقابل:
 $\triangle ABC$ فيه $AB = AC$
، AD ينصف $\angle A$
فإن AD منتصف BC ، $AD \perp BC$
لاحظ أن: $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ لماذا؟



نتيجة (٣)



المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة وزاوية الرأس.

في الشكل المقابل:



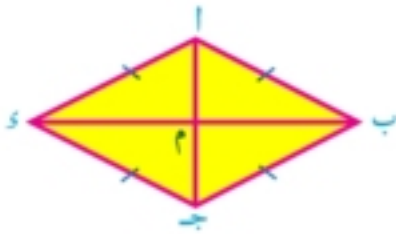
$\triangle$ ا ب ج فيه ا ب = ا ج ، ا ي $\perp$ ب ج

فإن ي تنصف ب ج ، و ($\angle$ ب ا ي) = و ($\angle$ ج ا ي)

لاحظ أن $\triangle$ ا ي ب $\equiv$ $\triangle$ ا ي ج لماذا؟



في الشكل المقابل:



ا ب ج د شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية في الطول.

هذا الشكل يسمى معين ، قطراه ا ج ، ب د

يتقاطعان في نقطة م.

لاحظ أن $\triangle$ ا ب د $\equiv$ $\triangle$ ج ب د لماذا؟

$\therefore$ و ($\angle$ ا ب د) = و ($\angle$ ج ب د)

في $\triangle$ ا ب ج ، ا ب = ب ج ، ب م ينصف $\angle$ ا ب ج

$\therefore$ ب م $\perp$ ، م منتصف ا ج

في $\triangle$ ب ا د ، ا ب = ا د ، ا م $\perp$ ب د

$\therefore$ ا م ينصف $\angle$ ، م منتصف ب د

هل قطرا المعين متعامدان؟

هل قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر؟

هل قطر المعين ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما؟ سجل إجابتك .



محاور التماثل

أولاً: محور التماثل للمثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته.

في الشكل المقابل:

$\triangle$ $أ ب ج$ فيه $أ ب = أ ج$ ، $أ ك \perp ب ج$

فإن $أ ك$ هو محور تماثل للمثلث $أ ب ج$ المتساوي الساقين.

ناقش:

هل يوجد للمثلث المتساوي الساقين أكثر من محور تماثل؟

كم عدد محاور التماثل في المثلث المتساوي الأضلاع؟

هل توجد للمثلث المختلف الأضلاع محاور تماثل؟

ثانياً: محور تماثل القطعة المستقيمة:

يسمى المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها

محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللإختصار يسمى محور القطعة المستقيمة.

في الشكل المقابل:

إذا كانت $ك$ منتصف $أ ب$ ، المستقيم $ل \perp أ ب$ حيث $ك \in ل$

فإن المستقيم $ل$ هو محور $أ ب$

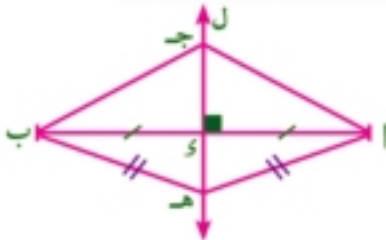
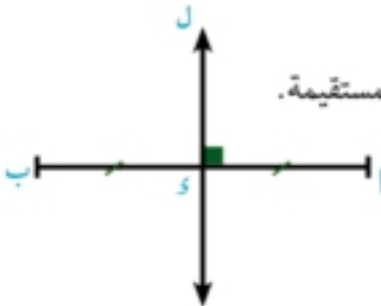
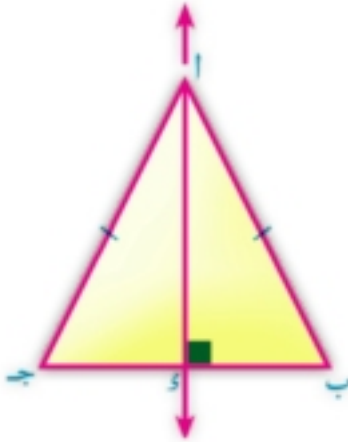
خاصية هامة

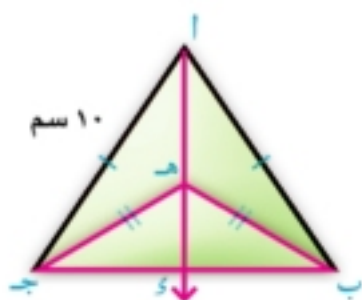
أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

لاحظ أن:

١ إذا كانت $ج \in ل$ فإن $أ ج = ب ج$

٢ إذا كان $هـ = أ$ فإن $هـ ب = ل$ لماذا؟





مثال



١ في الشكل المقابل

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 10 \text{ سم}, \quad \overline{AD} \perp \overline{BC} \text{ عند } D$$

فإذا كان $\overline{BD} = 6$ سم، أوجد طول كل من $\overline{AD}$ ، $\overline{CD}$

المعطيات: $\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

المطلوب: إيجاد $\overline{AD}$ ، $\overline{CD}$

البرهان: $\therefore \overline{AB} = \overline{AC} \quad \therefore$ تقع على محور $\overline{BC}$

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$ $\therefore$ تقع على محور $\overline{BC}$

$\therefore \overline{AD}$ هو محور $\overline{BC}$

ويكون $\overline{D}$ منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overline{D}$ منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{BD} = 6$ سم $\therefore \overline{CD} = 4$ سم

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore$ في $\triangle ABD$ القائمة الزاوية في D

$$(\angle A)^2 + (\angle B)^2 = (\angle D)^2$$

$$9 + 100 = (\angle A)^2$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{109} \text{ سم}$$

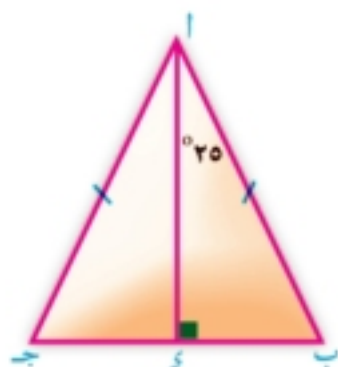
٢ في الشكل المقابل

$\triangle ABC$ فيه $\overline{AB} = \overline{AC}$ ،

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\angle B = 25^\circ$

$\overline{BD} = 4$ سم أوجد

١ $\angle A$ ، $\angle C$ ٢ طول $\overline{AD}$



الحل

المعطيات: $\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\angle B = 25^\circ$ ، $\overline{BD} = 4$ سم

المطلوب: $\angle A$ ، $\angle C$ ، طول $\overline{AD}$.



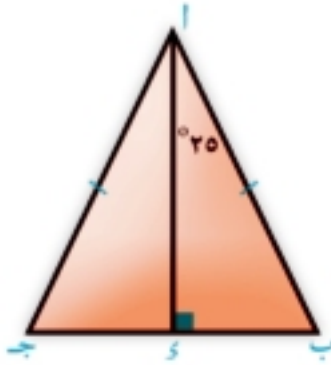
البرهان : في $\triangle$ ا ب ج

$$\therefore \overline{ا ب} = \overline{ا ج} , \overline{ا ي} \perp \overline{ب ج}$$

$\therefore \overline{ا ي}$ ينصف القاعدة $\overline{ب ج}$ وينصف $\angle$ ب ا ج

$$\therefore \angle (ا ج ب) = \angle (ا ب ج) = ٢٥^\circ$$

$$\angle ج = \frac{1}{2} \angle ب ج ا = \frac{1}{2} \times ٥٠ = ٢٥^\circ$$

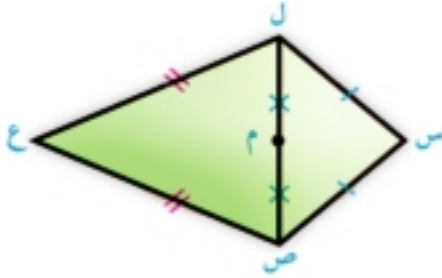


تدرب

١ في الشكل المقابل

$$س ص = س ل , ع ص = ع ل , ل م = م ص$$

اثبت ان س ، م ، ع على استقامة واحدة.



٢ في الشكل المقابل:

$$ب ي = ج هـ$$

$$\angle (ا ب ج) = \angle (ا ج ب)$$

$$\angle (ا ب ج) = \angle (ا ج ب) = ٩٠^\circ$$

برهن أن: $\angle (ا ب ج) = \angle (ا ج ب)$



٣ في الشكل المقابل:

$$\overline{ا ب} = \overline{ا ج} , \overline{ا ب} \parallel \overline{ا ج}$$

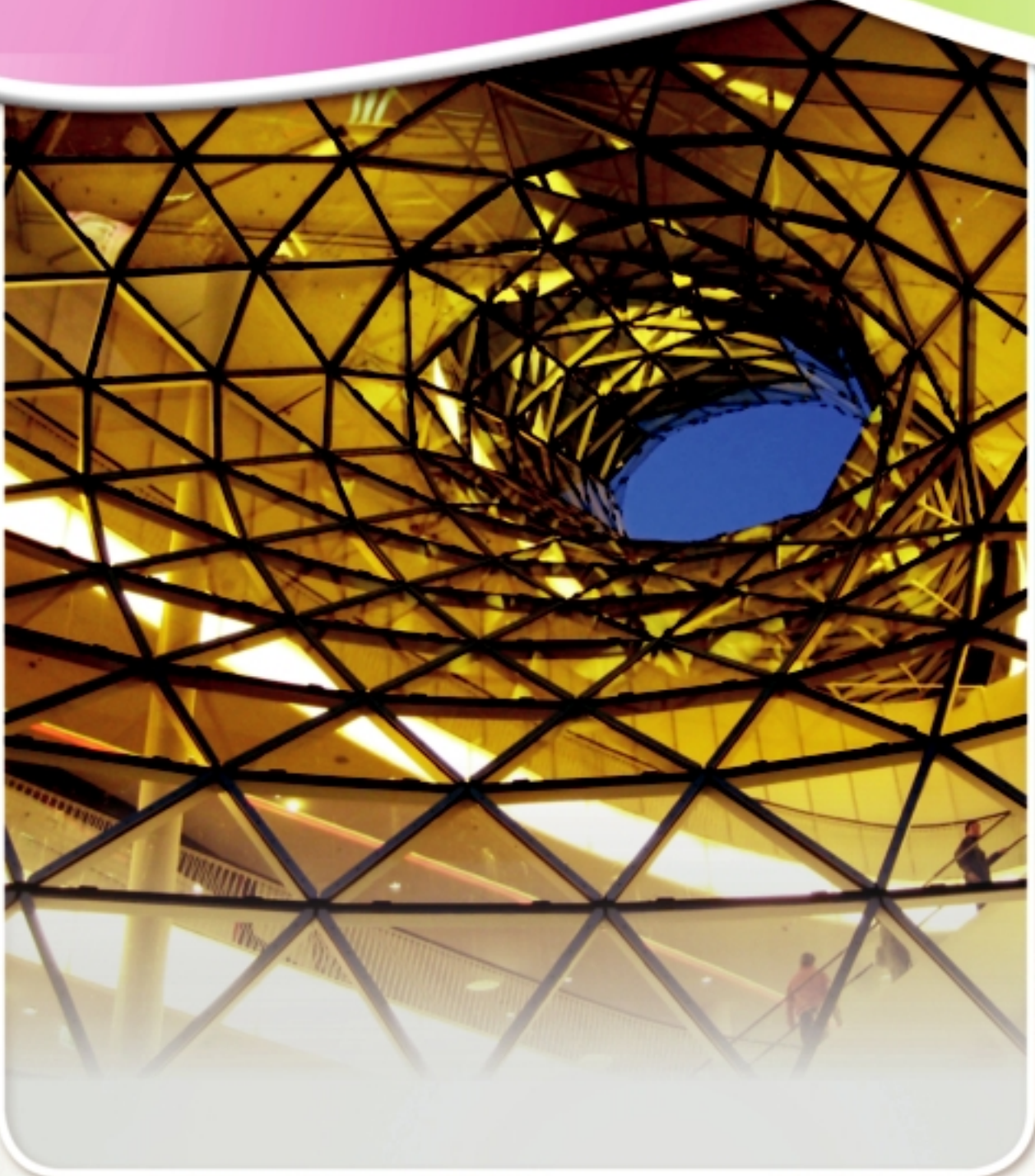
$$\overline{ا ب} \parallel \overline{ا ج}$$

اثبت: أولاً: $\angle هـ = \angle و$

ثانياً: $\angle (ا ب ج) = \angle (ا ج ب)$



التباين



فكر وناقش

مفهوم التباين

- ١ هل جميع تلاميذ فصلك لهم نفس الطول؟
 - ٢ هل هناك اختلاف بين قياس الزاوية الحادة والزاوية القائمة والزاوية المنفرجة؟
- ماذا يعنى هذا الاختلاف؟

لاحظ أن:

التباين يعنى وجود اختلاف في أطوال التلاميذ، وفي قياسات الزوايا، ويعبر عنه بعلاقة التباين، والتي تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين.

سوف تتعلم

- ت مفهوم التباين.
- ت مسلمات التباين.

المصطلحات الأساسية

- ت تباين
- ت مسلمة
- ت أكبر من <
- ت أصغر من >
- ت يساوى =

أمثلة



- ١ إذا كانت: $\triangle$ أ ب ج حادة فإن: $\angle$ أ ب ج $> 90^\circ$

- ٢ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث فيه

$$أ ب = ٤ \text{ سم، } ب ج = ٣,٥ \text{ سم،}$$

$$أ ج = ٢,٤ \text{ سم}$$

فإن: $أ ب < ب ج$ ، $ب ج < أ ج$

أي أن $أ ب < ب ج < أ ج$





فى الشكل المقابل أوجد: وه (أ ج ب) ، وه (أ ج د) ،
 وه (أ ا هـ) ثم أكمل باستخدام < أو >:
 وه (أ ا هـ) وه (أ ج ا)
 وه (أ ا ج) وه (أ ج ب)
 وه (أ ج د) وه (أ ب ج)
 وه (أ ج د) وه (أ ا هـ)

لاحظ أن: جميع العلاقات السابقة تسمى **متباينات**.

مسلمات التباين

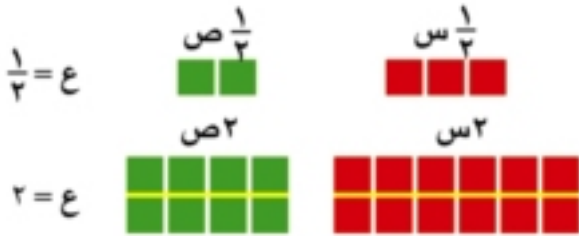
لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع:



١ إذا كان: $س < ص$
 فإن: $س + ع < ص + ع$



٢ إذا كان: $س < ص$
 فإن: $س - ع < ص - ع$



٣ إذا كان: $س < ص$ ، ع عددًا موجبًا
 فإن: $س \times ع < ص \times ع$



٤ إذا كان: $س < ص$ ، $ص < ع$
 فإن: $س < ع$



٥ إذا كان: $س < ص$ ، $ا < ب$
 فإن: $س + ا < ص + ب$

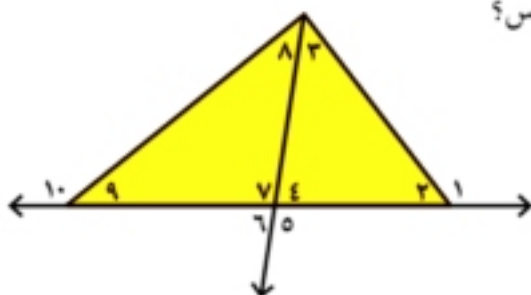


تذكر أن: قياس أى زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلية ماعدا المجاورة لها.



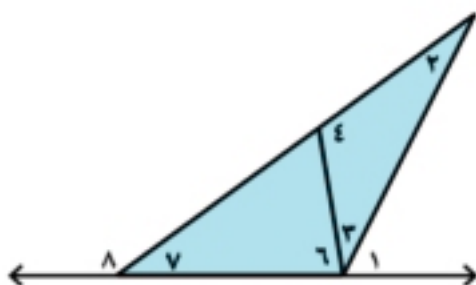
تدرب

١ فى الشكل المقابل: أى من الزوايا التالية لها أكبر قياس؟



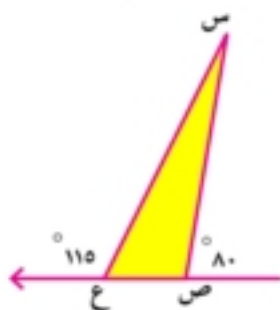
- أ $\angle 1$ ، $\angle 3$ ، $\angle 4$
 ب $\angle 4$ ، $\angle 8$ ، $\angle 9$
 ج $\angle 2$ ، $\angle 3$ ، $\angle 7$
 د $\angle 7$ ، $\angle 8$ ، $\angle 10$

٢ فى الشكل المقابل عين:

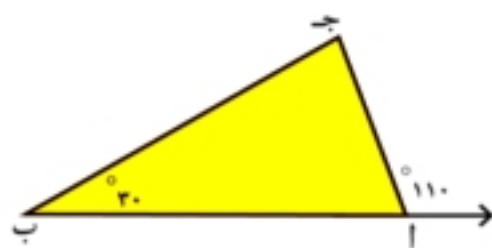


- أ جميع الزوايا التى قياسها أقل من $(\angle 1)$
 ب جميع الزوايا التى قياسها أكبر من $(\angle 6)$
 ج جميع الزوايا التى قياسها أقل من $(\angle 4)$

٣ رتب قياسات زوايا المثلث أ ب ج تصاعدياً، قياسات زوايا المثلث س ص ع تنازلياً.



و $(\angle \dots) < (\angle \dots) < (\angle \dots)$ و $(\angle \dots)$



و $(\angle \dots) > (\angle \dots) > (\angle \dots)$ و $(\angle \dots)$

٤ فى الشكل المقابل: ج $\supset$ أ ب ، د $\supset$ أ ب



فإذا كان: أ ب < ج د
 فإن: أ ج ب د



مثال



في الشكل المقابل:

وهـ ($\triangle$ ا ج ب) < وهـ ($\triangle$ ا ب ج) ، $\angle$ ب = $\angle$ ج

اثبت أن: وهـ ($\triangle$ ا ج د) < وهـ ($\triangle$ ا ب د)

المعطيات: وهـ ($\triangle$ ا ج ب) < وهـ ($\triangle$ ا ب ج) ، $\angle$ ب = $\angle$ ج

المطلوب: إثبات أن: وهـ ($\triangle$ ا ج د) < وهـ ($\triangle$ ا ب د)

البرهان: $\because \angle$ ب = $\angle$ ج

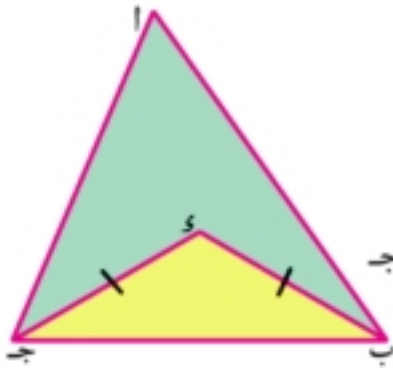
(١) $\therefore$ وهـ ($\triangle$ ج ب د) = وهـ ($\triangle$ ب ج د)

(٢) $\therefore$ وهـ ($\triangle$ ا ج ب) < وهـ ($\triangle$ ا ب ج)

$\therefore$ بطرح (١) من (٢) ينتج أن:

وهـ ($\triangle$ ا ج ب) - وهـ ($\triangle$ ج ب د) < وهـ ($\triangle$ ا ب ج) - وهـ ($\triangle$ ب ج د)

$\therefore$ وهـ ($\triangle$ ا ج د) < وهـ ($\triangle$ ا ب د) وهو المطلوب



المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث

فكر وناقش

نشاط



١ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC$

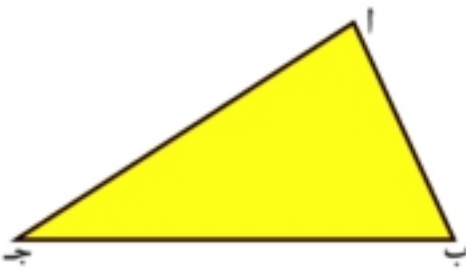
عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس ج،

ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين ب، جـ المقابلتين للضلعين أ جـ، أ ب المتساويين في الطول؟

عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأسين أ، جـ، ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين المقابلتين للضلعين ب جـ، أ ب المختلفين في الطول؟

هل اختلاف طولاً ضلعين في المثلث يؤدي إلى اختلاف قياسا الزاويتين المقابلتين لهما؟

٢ ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع.



إطوى المثلث بحيث ينطبق

الرأس أ على الرأس ب ماذا

تلاحظ على قياس الزاويتين أ،

ب المقابلتين للضلعين ب جـ،

أ جـ المختلفين في الطول؟

كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ ماذا تلاحظ؟

هل يوجد في هذا المثلث زوايا متساوية في القياس؟

سوف تتعلم

المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث.

المصطلحات الأساسية

زاوية.

قياس زاوية.

أكبر زاوية في مثلث.

أصغر زاوية في مثلث.

أكبر ضلع في مثلث.

أصغر ضلع في مثلث.



لاحظ أن: إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع.



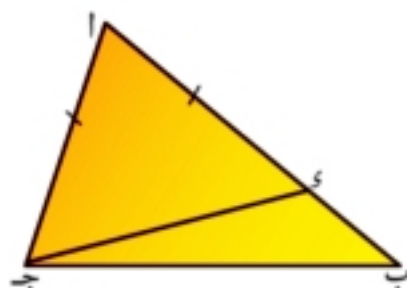
ارسم المثلث ABC بـ AB مختلف الأضلاع ثم قس أطوال أضلاعه الثلاثة ، وقياسات زواياه المناظرة ثم أكمل الجدول التالي:

أطوال الأضلاع	قياسات الزوايا المقابلة
$AB = \dots \text{سم}$	$\angle C = \dots^\circ$
$BC = \dots \text{سم}$	$\angle A = \dots^\circ$
$CA = \dots \text{سم}$	$\angle B = \dots^\circ$

ماذا تلاحظ؟

نظرية (٣)

إذا اختلف طولاً ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر.



المعطيات: $\triangle ABC$ فيه $AB < AC$

المطلوب: إثبات أن: $\angle C < \angle B$ و $\angle A < \angle B$

العمل: نأخذ D على AB بحيث $AD = AC$

البرهان: $\triangle ACD$ فيه $AD = AC$

(١) $\therefore \angle ACD = \angle ADC$ و $\angle A < \angle B$

$\therefore \angle ACD$ خارجة عن $\triangle ABC$

(٢) $\therefore \angle ACD < \angle B$ و $\angle A < \angle B$

من (١)، (٢) نستنتج أن

$\angle A < \angle B$ و $\angle C < \angle B$

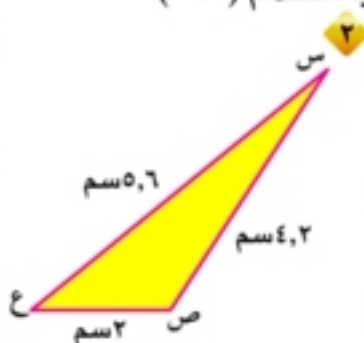
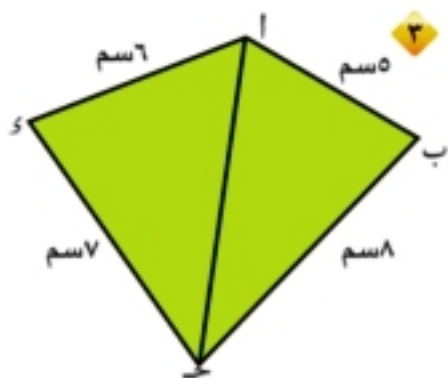
فيكون $\angle C < \angle B$ و $\angle A < \angle B$

$\therefore \angle C < \angle B$ و $\angle A < \angle B$ وهو المطلوب.





في كل من الأشكال التالية اكمل باستخدام ($>$ ، $<$)



و (أ) و (ب)	و (ع) و (ص)	و (أ ب ج) و (د ب ج أ)
و (أ) و (ج)	و (س) و (ص)	و (د ع ج أ) و (د ج أ)
و (ب) و (ج)	و (ع) و (س)	و (د ب ج) و (د ب ج ع)

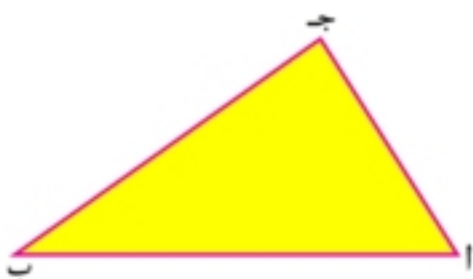
لاحظ أن:

قياس أكبر زاوية في المثلث $< ٦٠^\circ$

قياس أصغر زاوية في المثلث $> ٦٠^\circ$ لماذا؟



في الشكل المقابل:



أ ب ج مثلث فيه أ ب < ب ج < ج أ

برهن أن: و (ج) < و (أ) < و (ب)

المعطيات: أ ب < ب ج < ج أ

المطلوب: إثبات أن و (ج) < و (أ) < و (ب)

البرهان: في $\triangle$ أ ب ج

(١) $\therefore$ أ ب < ب ج $\therefore$ و (ج) < و (أ)

(٢) $\therefore$ ب ج < ج أ $\therefore$ و (أ) < و (ب)

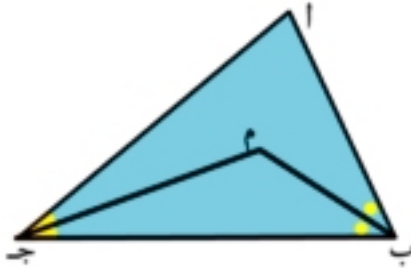
من (١)، (٢) وباستخدام مسلمة التباين ينتج أن:

و (ج) < و (أ) < و (ب)



تذكر أن: أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زوايا المثلث في القياس
وأصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زوايا المثلث في القياس.

مثال



في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث، م ينصف $\overline{AB}$ ، ج م ينصف $\triangle ABC$ ، ج م ينصف $\triangle ABC$
فإذا كان: $m < j$

برهن أن: $m < j$ و $(\triangle ABC)$

المعطيات: م ينصف $\overline{AB}$ ، ج م ينصف $\triangle ABC$ ، ج م ينصف $\triangle ABC$
، $m < j$

المطلوب: إثبات أن $m < j$ و $(\triangle ABC)$

البرهان: في $\triangle ABC$

(١) $m < j$ و $(\triangle ABC)$

$m < j$

في $\triangle ABC$

(٢) $m < j$ و $(\triangle ABC)$ $\therefore m < j$ و $(\triangle ABC)$

(٣) $m < j$ و $(\triangle ABC)$ $\therefore m < j$ و $(\triangle ABC)$

$\therefore$ من (١)، (٢)، (٣): $m < j$ و $(\triangle ABC)$ من مسلمات التباين

$\therefore m < j$ و $(\triangle ABC)$ وهو المطلوب



الوحدة الخامسة

الدرس الثالث

المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

فكر وناقش

سوف تتعلم

المقارنة بين أطوال الأضلاع في مثلث.

المصطلحات الأساسية

- أطول ضلع في مثلث.
- أصغر ضلع في مثلث.
- أكبر زاوية في مثلث.
- أصغر زاوية في مثلث.
- قطعة مستقيمة عمودية.

نشاط 1 في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث زواياه مختلفة في القياس.



اطو المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب. ماذا تلاحظ على طولي الضلعين ب ج ، أ ج المقابلين للزاويتين أ، ب المختلفتين في القياس؟

- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس ج، ماذا تلاحظ؟
- عندما ينطبق الرأس ج على الرأس أ، ماذا تلاحظ؟
- هل يوجد في هذا المثلث أضلاع متساوية في الطول؟

لاحظ أن: إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال أضلاعه المقابلة لهذه الزوايا.

نشاط 2 ارسم المثلث أ ب ج بحيث تكون زواياه مختلفة في القياس، ثم قس أطوال الأضلاع المقابلة وأكمل الجدول الآتي:

قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع المقابلة له
و (أ) = °.....	ب ج = سم
و (ب) = °.....	ج أ = سم
و (ج) = °.....	أ ب = سم

ماذا تلاحظ؟

- هل أكبر زاوية في القياس يقابلها أكبر ضلع في الطول؟ وأصغر زاوية في القياس يقابلها أصغر ضلع في الطول؟
- هل يمكن ترتيب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً أو تنازلياً تبعاً لقياسات الزوايا المقابلة لها؟



نظرية (٤)



إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى .



المعطيات: $\triangle$ ا ب ج فيه $\angle ج < \angle ب$ و $\angle ا > \angle ب$

المطلوب: إثبات أن: $ا ب < ا ج$

البرهان: $\therefore$ ا ب ، ا ج قطع مستقيمة

$\therefore$ يجب أن تتحقق إحدى الحالات التالية:

(١) $ا ب > ا ج$ (٢) $ا ب = ا ج$ (٣) $ا ب < ا ج$

إذا لم تكن $ا ب < ا ج$

فإما $ا ب = ا ج$ أو $ا ب > ا ج$

إذا كان $ا ب = ا ج$ فإن $\angle ج = \angle ب$ و $\angle ا > \angle ب$

وهذا يخالف المعطيات **حيث إن** $\angle ج < \angle ب$ و $\angle ا > \angle ب$

وإذا كان $ا ب > ا ج$ فإن $\angle ج > \angle ب$ و $\angle ا > \angle ب$ حسب النظرية السابقة

وهذا يخالف المعطيات **حيث أن** $\angle ج < \angle ب$ و $\angle ا > \angle ب$

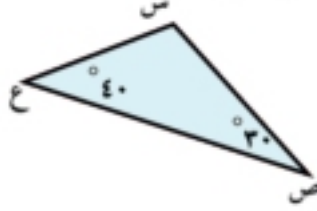
$\therefore$ يجب أن يكون $ا ب < ا ج$

وهو المطلوب

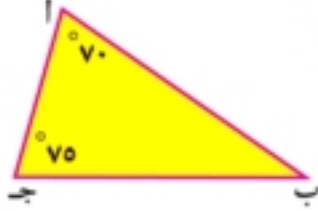




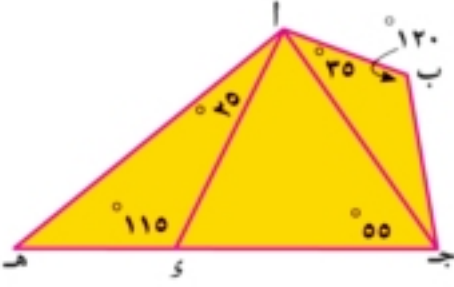
في الأشكال التالية أكمل باستخدام < أو > أو =



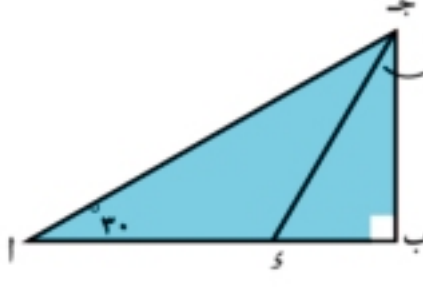
س ص س ع
ص ع س ص
ص ع س ع



ا ب ا ج
ا ب ب ج
ا ج ب ج



ب ج ا ب
ج د ج ا
ا د ا هـ
ج د ا د



ا ج ب ج
ب ج د ب
ا ج ب د
ج د ا ج

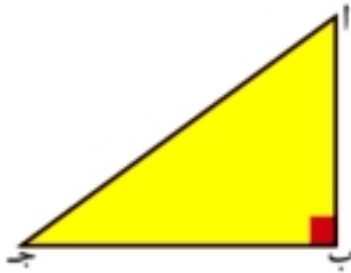


نتائج

نتيجة (1)



في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث.



في الشكل المقابل: $\triangle$ ا ب ج قائم الزاوية في ب.

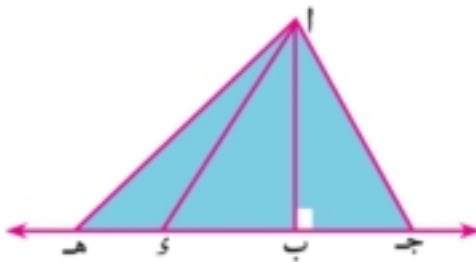
$\therefore \angle$ ا حادة $\therefore \angle$ ب $<$ و $\angle$ ج $<$ و $\angle$ ا

فيكون ا ج $>$ ب ج

$\therefore \angle$ ب $<$ و $\angle$ ج $<$ و $\angle$ ا

فيكون ا ج $>$ ا ب

لاحظ أن في المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولاً.



هيا نفكر

ا ج $<$ ا ب لماذا؟

ا ب $<$ ا ج لماذا؟

ا هـ $<$ ا ب لماذا؟

هل طول ضلع القائمة في المثلث القائم الزاوية أصغر من طول الوتر . لماذا؟



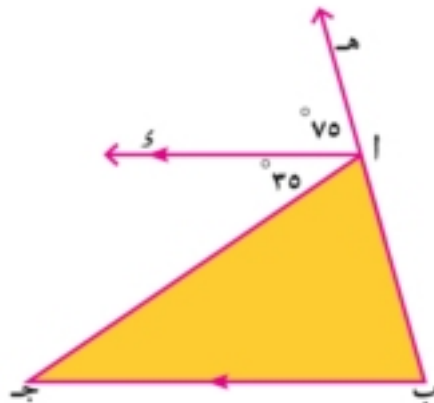
نتيجة (٢)



طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.

تعريف: بُعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.

مثال



في الشكل المقابل: $\triangle ABC$ مثلث، $AD \perp BC$
 $\angle C = 30^\circ$ و $AD \parallel BC$ و $\angle A = 70^\circ$
 برهن أن: $\angle A < \angle B$

المعطيات: $AD \parallel BC$ و $\angle A = 70^\circ$ و $\angle C = 30^\circ$

المطلوب: إثبات أن $\angle A < \angle B$

البرهان: $\because AD \parallel BC$ $\therefore$ $\angle A$ و $\angle B$ قاطع لهما

بالتناظر (١) $\therefore \angle A = \angle B$ و $\angle A = 70^\circ$

بالتبادل (٢) $\therefore \angle A = \angle B$ و $\angle C = 30^\circ$

من (١)، (٢) يكون:

في المثلث ABC

$\angle A = \angle B$ و $\angle C = 30^\circ$

أي أن $\angle A < \angle B$ و $\angle C = 30^\circ$

$\therefore \angle A < \angle B$

وهو المطلوب



سوف تتعلم

متباينة المثلث.

المصطلحات الأساسية

متباينة.

متباينة المثلث.



نشاط

باستخدام المسطرة المدرجة والفرجار، حاول رسم المثلث $أ ب ج$ حيث:

١ $أ ب = ٤$ سم ، $ب ج = ٥$ سم ، $أ ج = ٦$ سم

٢ $أ ب = ٦$ سم ، $ب ج = ٣$ سم ، $أ ج = ٢$ سم

٣ $أ ب = ٩$ سم ، $ب ج = ٤$ سم ، $أ ج = ٣$ سم

٤ $أ ب = ٨$ سم ، $ب ج = ٣$ سم ، $أ ج = ٥$ سم

في أي من الحالات السابقة أمكنك رسم المثلث، وماذا تستنتج؟

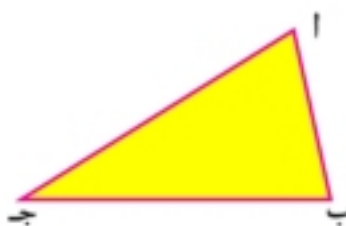
حقيقة: في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أي أن: في أي مثلث $أ ب ج$ يكون:

$$أ ب + ب ج > أ ج$$

$$ب ج + أ ج > أ ب$$

$$أ ب + أ ج > ب ج$$



فمثلاً: الأعداد ٩، ٣، ٥ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث؛ لأن مجموع أصغر عددين $٩ = ٥ + ٣$ ، $٨ > ٩$ ولا تحقق متباينة المثلث.

مثال



في المثلث $أ ب ج$ إذا كان $أ ب = ١٠$ سم،

$$ب ج = ٨,٥$$

أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع $أ ج$.



الحل

- (١) $اج > اب + ب ج$ $\therefore اج > ١٨,٥$
 لكن $اج + ب ج < اب$ متباينة المثلث
 (٢) $اج < اب - ب ج$ $\therefore اج < ١,٥$
 من (١)، (٢) $١٨,٥ < اج < ١,٥$
 $\therefore اج \in [١,٥, ١٨,٥]$



أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طول الضلعين الآخرين هما:

- أ ٦ سم، ٩ سم ب ٥ سم، ١٢ سم ج ٧ سم، ١٥ سم د ٢ سم، ٩ سم، ٣ سم

الحل

أ: متباينة المثلث

تنص على أن: مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

- $\therefore$ الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث = $[٣, ١٥]$
 لاحظ : لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ٣ سم (لماذا)
 لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ١٥ سم (لماذا)

ناقش معلمك لإستكمال حلول

(ب) . (جـ) . (د)



الأنشطة والتدريبات

الوحدة الأولى

تمارين للمراجعة

١  **أكمل** بوضع كل من الأعداد الآتية على صورة $\frac{1}{p}$ حيث أ. ب عدنان صحيحان ليس بينهما عوامل مشتركة، ب $\neq$.

أ = ٠,٢ ب = ٠,٣ ج = ٢٥%
د = |٠,٧٥ - | هـ = ٦- و = $1\frac{1}{4}$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات بين القوسين أمام كل عبارة

- أ مجموعة حل المعادلة $5 + 5 - |5| = 5$ في ط هي ()
ب العدد النسبي المحصور بين $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ هو ()
ج حاصل ضرب العدد النسبي $\frac{1}{p}$ في معكوسه الجمعي = (صفر -، $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{p}$)
د = |٢ - | + |٤ - | + |٦ - | (صفر -، |١٢ - |، ١٢ -، ٦)
هـ = $\sqrt{21}$ (١ -، ١ -، |١ |، |٢ |)

٣  **أوجد** قيمة س التي تحقق كلا من المعادلات الآتية :

أ = ٢٠ = ٣ + س
ب = ١٢ = ١١ + س
ج = ١ = ٥ + س
د = ٧ = ٣ + س

٤  **أوجد** الناتج في كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ = $\sqrt{144 + 25}$
ب الصورة القياسية للعدد ٠,٠٠٠١٥ هي
ج = $|0,6 - | + \sqrt{0,16}$
د = $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$
هـ مجموع الجذرين التربيعين للعدد $2\frac{1}{4}$ =
و = $\sqrt{0,25}$

الجزر التكعيبي للعدد النسبي تمارين (١ - ١)

١ أكمل الجدول الآتي:

العدد أ	٨	١٢٥	٢٧		$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{125}$		
$\sqrt[3]{\quad}$								

٢ أكمل

$\sqrt[3]{125} = \dots\dots\dots$ أ $\sqrt[3]{343} = \dots\dots\dots$ ب $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ ج
 $\sqrt[3]{0,001} = \dots\dots\dots$ د $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ هـ $\sqrt[3]{9} = \dots\dots\dots$ و

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة أمام كل عبارة:

- أ $\sqrt[3]{(8-)} = \dots\dots\dots$
 ب $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{25} = \dots\dots\dots$
 ج $\sqrt[3]{0,25} + \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \dots\dots\dots$
 د $\sqrt[3]{0,008} \times \sqrt[3]{1000} = \dots\dots\dots$
 هـ المساحة الجانبية لمكعب حجمه ٢١٦ سم^٣ = سم^٢
 و $\sqrt[3]{\quad} = \sqrt[3]{8}$
 ز $\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$
 أ $(2 \text{ أو } 2- \text{ أو } 4 \text{ أو } 4-)$
 ب $(10 \text{ أو } 0 \text{ أو } 5 \text{ أو } 5\pm)$
 ج $(\frac{3}{4} \text{ أو } \frac{1}{4} \text{ أو } 2 \text{ أو } 2-)$
 د $(\frac{1}{4} \text{ أو } 10 \text{ أو } 2 \text{ أو } 2-)$
 هـ $(36 \text{ أو } 6 \text{ أو } 144 \text{ أو } 216)$
 و $(س^3 \text{ أو } س^2 \text{ أو } س \text{ أو } س^4)$
 ز $(1 \text{ أو } 0 \text{ أو } 1- \text{ أو } \frac{11}{4})$

٤ أوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية:

أ $\sqrt[3]{5} = \dots\dots\dots$ ب $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \dots\dots\dots$ ج $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{\quad} = \dots\dots\dots$
 د $\sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ هـ $\sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{125} - \dots\dots\dots$ و $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\quad}$

٥ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في ن:

أ $0 = 27 + س^3$ ب $8 = 7 + س^3$ ج $343 = (س + 3)^3$
 د $18 = 10 + (س - 2)^3$

٦ مسائل تطبيقية

- أ إناء مكعب الشكل سعته لتر واحد ، احسب طول حرفه.
 ب كرة حجمها $\frac{1372}{81}\pi$ وحدة مكعبة. أوجد طول قطرها (حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$)

مجموعة الأعداد غير النسبية ن

تمارين (١-٢)

تذكر أن

- العدد النسبي هو الذي يمكن وضعه على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث $q \neq 0$ ، $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}^*$.
- العدد غير النسبي هو الذي لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث $q \neq 0$ ، $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}^*$.

١  أكمل باستخدام أحد الرمزین ن أو ن.

- | | | |
|--|---|--|
| $\exists 0$  | $\exists \sqrt{10}$  | $\exists 5$  |
| $\exists \sqrt{6}$  | $\exists \sqrt{8}$  | $\exists 0,7$  |
| | $\exists \pi$  | $\exists \sqrt{9}$  |

٢ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ:

- | | |
|--|--|
| () $\exists 2,3 \times 10^9$  | () $\exists -5$  |
| () $\exists \frac{\text{صفر}}{0}$  | () $\exists \sqrt{4}$  |
| () $\exists \sqrt{1000}$  | () $3 < \sqrt{7}$  |
| () $2 < \sqrt{10}$  | () $\sqrt{9} < \sqrt{20}$  |
| () طول ضلع مربع مساحة سطحه ٦ سم ^٢ هو عدد نسبي.  | |

٣  اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين

- | |
|---|
| المربع الذي طول ضلعه $\sqrt{3}$ سم تكون مساحة سطحه = سم ^٢ ($\sqrt{3}$ أو ٩ أو ٣ أو ٦)  |
| العدد غير النسبي المحصور بين ٣ ، ٤ هو ($\sqrt{10}$ أو $\sqrt{7}$ أو $\frac{1}{8}$ أو ٣، ٥)  |
| العدد غير النسبي المحصور بين -٢ ، -١ هو ($\sqrt{3}$ أو $\sqrt{7}$ أو $\frac{1}{4}$ أو -٣)  |

ايجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي

تمارين (١-٣)

١ ضع دائرة حول العدد غير النسبي في كل مما يأتي:

$$\sqrt[3]{3}, \sqrt{-2}, 0, \sqrt{1}, 0, \sqrt[3]{-9}, -\sqrt{\frac{4}{25}}$$

٢ أوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية ، وبين ما إذا كانت $s \in \mathbb{N}$ أم $s \in \mathbb{Z}$

أ $4s^2 = 9$

ب $2s^2 = 6$

ج $s^2 = 125$

د $s^2 = 10$

هـ $s^2 = (1-1)$

٣ أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{10}$ ، وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

٤ فخر إذا كانت س عددًا صحيحًا فأوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية:

أ $s > \sqrt{7} + 1$ ب $s > \sqrt{80} + 1$ ج $s > \sqrt{125} + 1$

د $s > \sqrt{5} + 1$ هـ $s > \sqrt{30} + 1$ و $s > \sqrt{100} + 1$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات بين القوسين أمام كل عبارة:

أ العدد غير النسبي المحصور بين ٢، ٣ هو ($\sqrt{10}$ أو $\sqrt{7}$ أو ٢، ٥ أو $\sqrt{3}$)

ب $\sqrt{10} = \dots\dots\dots$ (٢، ٩٩ أو ٣، ٧١ أو ٣ أو ٣، ٢)

ج أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt{25}$ هو (٥ أو ٣ أو ٢ أو ١٢، ٥)

د المربع الذي مساحته ١٠ سم^٢ يكون طول ضلعه سم (٥ أو ٥- أو $\sqrt{10}$ أو $\sqrt{10}$)

هـ المكعب الذي حجمه ٦٤ سم^٣ يكون طول حرفه سم (٨ أو ٤ أو ١٦ أو ٦٤)

٦ ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقطة أ التي تمثل العدد $\sqrt{2}$

و النقطة ب التي تمثل العدد $\sqrt{2} + 1$

و النقطة ج التي تمثل العدد $\sqrt{2} - 1$

٧ ارسم المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب حيث أ ب = ٢ سم ، ب ج = ٣ سم واستخدم الشكل في

تحديد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{13}$ ، والنقطة التي تمثل العدد $\sqrt{13}$ على خط الأعداد.

مجموعة الأعداد الحقيقية ج

تمارين (١-٤)

١ ادرس المخطط السابق وأجب بوضع علامة (✓) إذا كانت العبارة صحيحة وعلامة (X) إذا كانت العبارة خطأ:

- أ كل عدد طبيعي هو عدد صحيح .
 ب الصفر $\in$ مجموعة الأعداد النسبية .
 ج $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$.
 د أي عدد غير صحيح هو عدد نسبي .
- ()
 ()
 ()
 ()

٢ أكمل الجدول التالي بوضع علامة (✓) في المكان المناسب كما في الحالة الأولى :

العدد	عدد طبيعي	عدد صحيح	عدد نسبي	عدد غير نسبي	عدد حقيقي
-٥	X	✓	✓	X	✓
$\sqrt{2}$					
$1\frac{1}{2}$					
$\sqrt[3]{9}$					
$ -2 $					
$-\sqrt{4}$					
$\frac{5}{3}$					
٠,٣					
$\sqrt{1-}$					

علاقة الترتيب في ج تمارين (١-٥)

١ رتب تنازلياً: $\sqrt{70}$ ، $\sqrt{50}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{62}$

٢ إذا كانت س $\geq$ ح فاذا ذكر ما إذا كانت س موجبة أو سالبة أو خلاف ذلك في كل من الحالات الآتية:

أ س < 0 ب س > 0 ج س $< |5|$

٣ اثبت أن $\sqrt{3}$ ينحصر بين $1,7$ ، $1,8$ ، مثل الأعداد $\sqrt{3}$ ، $1,7$ ، $1,8$ على خط الأعداد.

٤ أوجد طول ضلع مربع مساحته 5سم^2 ، هل طول الضلع عدد نسبي؟

٥ أوجد طول حرف مكعب حجمه $1,728\text{سم}^3$ ، هل طول الحرف عدد نسبي؟

٦ ضع العلامة المناسبة (< أو > أو =)

أ $\sqrt{5}$ ٢ ب $\sqrt{7}$ ٢,٦ ج $\sqrt{24}$ ٢- د $\sqrt{2} + 1$ $\sqrt{3}$ هـ $\sqrt{8}$ $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5} - 3$ $\sqrt{1}$

٧ أوجد طول ضلع مربع مساحته 7سم^2 ، هل طول ضلعه و طول قطره عدد نسبي؟

٨ أوجد طول حرف مكعب حجمه 125سم^3 ، هل طول الحرف عدد نسبي؟

٩ مكعب مساحته الكليه $13,5\text{سم}^2$ ، أوجد طول حرفه، هل طول الحرف عدد نسبي؟

الفترات

تمارين (١ - ٦)

أكمل الجدول الآتي كما بالمثال الأول:

الفترة	التعبير بصورة الصّفة المميزة	تمثيلها على خطّ الأعداد
$[-1, 2]$	$\{s : -1 \leq s \leq 2, s \in \mathbb{R}\}$	
$]1, 3]$		
$[2, \infty[$		
	$\{s : s > 0, s \geq 3, s \in \mathbb{R}\}$	
	$\{s : s < -1, s \in \mathbb{R}\}$	
$]5, 1[$		
	$\{s : s < 0, s \in \mathbb{R}\}$	

أكمل بوضع أحد الرموز $\in$ أو $\notin$:

أ	$3 \in]2, 2[$	د	$\sqrt{9} \in]-\infty, 3[$
ب	$(-\sqrt{1}) \in]1, \infty[$	هـ	$ -2 \in]2, \infty[$
ج	$2 \in]7, 1[$	و	$1, 3 \times 10^{-5} \in \mathbb{C}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

أ	$[7, 2] - [7, 2] = \{0\}$ أو $\emptyset$ أو $]7, 2[$ أو $\{0\}$
ب	$]5, 0[\cup]8, 3[=]8, 3[$ أو $]5, 3[$ أو $]5, 0[$ أو $]8, 0[$
ج	$[3, 2] \cap [5, 1] = [3, 2]$ أو $]3, 1[$ أو $]3, 1[$ أو $]3, 1[$
د	$]-2, 1[- [4, 1] = [4, 1]$ أو $]1, 1-[$ أو $]1, 1-[$ أو $]1, 1-[$

٤ إذا كانت $s \in]4, 1-]$ ، $s \in]-\infty, 2]$ ، $s \in [4, 3]$ أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًّا من:

أ	$s \cup s$	ب	$s \cap s$	ج	$s - s$	د	$s - s$
هـ	$s \cap s$	و	$s - s$	ز	$s - s$	ح	$s - s$

العمليات على الأعداد الحقيقية

تمارين (١ - ٧)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس أمام كل عبارة:

أ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ (أو $\sqrt{5}$ أو $\sqrt{6}$ أو $\sqrt{7}$)

ب $\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{10}$ (أو $\sqrt{10}$ أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{5}$)

ج $\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{2} = \sqrt{10}$ (أو $\sqrt{10}$ أو $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ أو $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ أو $\sqrt{6} + 1$)

د $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4}$ (أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{4}$ أو 2)

هـ $\frac{6}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ (أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}$ أو $\sqrt{6}$)

و $\sqrt{2}(\sqrt{5}) = \sqrt{10}$ (أو $\sqrt{10}$ أو $\sqrt{5}$ أو 40)

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

أ $\sqrt{2}(\sqrt{5} + 2)$ (أو $\sqrt{2} + \sqrt{10}$)

ب $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$ (أو $2 + \sqrt{2}$)

٣ اكتب كلًا من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا:

أ $\frac{10}{\sqrt{5}}$ (أو $\frac{2\sqrt{5}}{1}$)

ب $\frac{8}{\sqrt{6}}$ (أو $\frac{4\sqrt{6}}{3}$)

٤ اختصر إلى أبسط صورة:

أ $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5}$ (أو $\sqrt{5}$)

ب $(\sqrt{5} + 1) - (\sqrt{5} - 2)$ (أو 3)

٥ إذا كانت $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 2$ ، $\sqrt{2} - \sqrt{3} = 2$ أوجد قيمة كل من:

أ $2 + \sqrt{3}$ (أو $2 - \sqrt{3}$)

ب $2 - \sqrt{3}$ (أو $2 + \sqrt{3}$)

٦ إذا كانت $\sqrt{5} + 2 = 2$ ، $\sqrt{5} - 2 = 2$ قُدِّر قيمة كل من:

أ $\sqrt{5} + 2$ (أو $\sqrt{5} - 2$)

ب $\sqrt{5} - 2$ (أو $\sqrt{5} + 2$)

اختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

العمليات على الجذور التربيعية

تمارين (٨ - ١)

١  اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين أمام كل عبارة:

- أ $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{2} = \dots\dots\dots$ ($\sqrt{30}$ أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{2}$)
- ب $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = \dots\dots\dots$ (2 أو 12 أو $7\sqrt{2}$ أو $5\sqrt{2}$)
- ج $\sqrt{10} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \dots\dots\dots$ ($\sqrt{10}$ أو 10 أو 18 أو $\sqrt{18}$)
- د المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هو $\dots\dots\dots$ ($-\frac{\sqrt{3}}{4}$ أو $\sqrt{3}$ أو $\sqrt{3}\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}\sqrt{2}$)
- هـ العدد التالي في النمط: $\sqrt{2}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \dots\dots\dots$ هو ($\sqrt{50}$ أو $\sqrt{75}$ أو $\sqrt{60}$ أو $\sqrt{90}$)

٢  أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

- أ إذا كانت $s = \sqrt{2} + 3$ فإن مرافقها $\dots\dots\dots$ وحاصل ضربهما $\dots\dots\dots$
- ب المعكوس الضربي للعدد $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ في أبسط صورة هو $\dots\dots\dots$
- ج  **فخر** إذا كانت $s = 5$ فإن $s(\sqrt{5} + 5) = \dots\dots\dots$ أو $\dots\dots\dots$
- د  **فخر** إذا كانت $s = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ فإن قيمة s في أبسط صورة هي $\dots\dots\dots$
- هـ $\sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{2} = \dots\dots\dots$

٣ اختصر لأبسط صورة $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{5} = \dots\dots\dots$

٤ إذا كانت $s = \frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$ ، $v = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$ فأوجد قيمة $s^2 v^2$

٥ إذا كان $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1$ ، $b = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ أوجد قيمة $a^2 - b^2$ في أبسط صورة.

٦ إذا كانت $s = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ ، $v = \sqrt{2} - \sqrt{5}$

أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار $\frac{s+v}{s-v}$

٧ إذا كانت $s = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ ، $v = \frac{2}{s}$

أوجد قيمة المقدار $\frac{s+v}{s-v}$ في أبسط صورة.

العمليات على الجذور التكعيبية

تمارين (١ - ٩)

١ ضع كلاً مما يأتي على صورة $\sqrt[3]{b}$ حيث a ، b عدنان صحيحان، b أصغر قيمة موجبة ممكنة.

أ $\sqrt[3]{128}$

ب $\sqrt[3]{1000}$

ج $\sqrt[3]{54}$

د $\sqrt[3]{686}$

هـ $\sqrt[3]{1715}$

و $\sqrt[3]{3160}$

٢ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ $\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

ب $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250}$

ج $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{125}$

د $\sqrt[3]{100} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

هـ $\sqrt[3]{\frac{7}{27}} - \sqrt[3]{\frac{56}{2}}$

و $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} \div \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

٣ إذا كانت $\sqrt[3]{5} = 1 + b$ ، $\sqrt[3]{5} - 1 = a$ احسب قيمة كل من:

أ $(b - a)^3$

ب $(b + a)^3$

٤ اثبت أن

أ $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} = 0$

ب $1 = (\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}) \div \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{54}$

٥ اختر الاجابه الصحيحه مما بين القوسين :

أ إذا كانت $\sqrt[3]{3} = 1 + a$ ، $\sqrt[3]{3} - 1 = b$ ، فإن $(a + b)^3 = \dots\dots\dots$

(٨ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤)

ب $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

($\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ ، ٣ ، $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ، $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$)

ج إذا كانت $\sqrt[3]{3} = 1 + a$ ، $\sqrt[3]{3} - 1 = b$ ، فإن $(a - b)^3 = \dots\dots\dots$

(٤٠ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٦)

د (١ ، صفر ، ١٠ ، $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$)

هـ $\sqrt[3]{\frac{49}{4}} + \sqrt[3]{\frac{125}{4}} = \sqrt[3]{\frac{174}{4}}$

و ($\sqrt[3]{14}$ ، ٨ ، $\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{8}$)

ز $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8}$

ح $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$

($\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{12}$ ، $\sqrt[3]{20}$ ، $\sqrt[3]{8}$)

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

تمارين (١ - ١٠)

١. اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:
 - أ. المساحة الجانبية للأسطوانة الدائرية القائمة التي طول قطر قاعدتها l وارتفاعها e ($\pi l^2 e$ ، πl^2 ، $\pi l e$ ، $\pi l^2 e^2$)
 - ب. حجم كرة طول قطرها 6 سم = سم^٣ (288π ، 36π ، 12π ، 288)
 - ج. مكعب حجمه $2\sqrt{2}$ سم^٣ فإن طول حرفه = سم ($1,5$ ، 8 ، 2 ، $2\sqrt{7}$)
 - د. طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها 40π سم^٣ وارتفاعها 10 سم يساوي سم ($1,2,3,5$)
 - هـ. متوازي المستطيلات الذي أبعاده $2\sqrt{7}$ ، $3\sqrt{7}$ ، $6\sqrt{7}$ من السنتيمترات يكون حجمه = ($2\sqrt{18}$ ، $6\sqrt{6}$ ، $36,6$)
٢. أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:
 - أ. الكرة التي حجمها $\frac{9}{4}\pi$ سم^٣ يكون طول نصف قطرها سم
 - ب. أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها n ، وارتفاعها e فإن مساحتها الجانبية = وحجمها =
 - ج. مكعب طول حرفه 4 سم فإن مساحته الكلية = سم^٢
 - د. المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات =
٣. كرة حجمها 36π سم^٣ وضعت داخل مكعب مست أوجه المكعب الستة أوجد:
 - أ. طول نصف قطر الكرة
 - ب. حجم المكعب
٤. كرة من المعدن طول قطرها 6 سم صهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 3 سم احسب ارتفاع الأسطوانة.
٥. إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوي طول نصف قطر قاعدتها اوجد ارتفاع الأسطوانة علمًا بأن حجمها 72π سم^٣.
٦. كرة معدنية جوفاء طول نصف قطرها الداخلي $2,1$ سم وطول نصف قطرها الخارجي $3,5$ سم. أوجد كتلتها لأقرب جرام علمًا بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته 20 جم ($\frac{22}{7} = \pi$)

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح تمارين (١ - ١١)

١ **أكمل** لتحصل على عبارة صحيحة حيث $s \in \mathbb{H}$

أ إذا كان $s > 15$ فإن $s \leq 3$ ب إذا كان $s - 3 \leq 4$ فإن $s \leq 4$

ج إذا كان $s - 2 \geq 3$ فإن $s \geq 3$ د إذا كان $s - 1 < 4$ فإن $s < 4$

هـ إذا كان $\sqrt{s} \leq 4$ فإن $s \leq 4$

٢ **أوجد** على صورة فترة مجموعة الحل في ح لكل من المتباينات التالية، ومثل الحل على خط الأعداد:

أ $s - 1 > 5$ ب $s + 2 \leq 5$ ج $s + 2 \geq 3$ د $s - 5 < 3$

هـ $s - 1 > 6$ و $s + \frac{1}{4} \geq 1$ ز $s + \frac{1}{4} \geq 2$

٣ **أوجد** على صورة فترة مجموعة الحل في ح لكل من المتباينات التالية، ومثل الحل على خط الأعداد:

أ $s + 1 > 5$ ب $s - 5 \geq 2$ ج $s - 3 \geq 1$

د $s - 4 \geq 7$ هـ $s + 4 > 7$ و $s + 3 > 4$

ز $s - 5 > 1$ ح $s - 3 \geq 1$ ط $s - 2 > 5$

٤ **أوجد** على صورة فترة مجموعة الحل في ح لكل من المتباينات التالية، ومثل الحل على خط الأعداد:

أ $s - 3 \geq 3$ ب $s - 1 > 5$ ج $s - 3 \geq 3$

د $s - 3 > 5$ هـ $s + 1 \geq \sqrt{9}$ و $s - 3 \geq 23$

تمارين عامة على الأعداد الحقيقية

١ أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

أ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \dots\dots\dots$

ب إنشاءً على شكل مكعب سعتة ٨ ثنرات يكون طول حرفه الداخلي = سم.

ج مجموعة الحل في ح للمعادلة $x^2 + 9 = 0$ هي

د $2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \dots\dots\dots$

هـ المستطيل الذي بعده $(1 + \sqrt{5})$ سم، $(1 - \sqrt{5})$ سم تكون مساحته = سم².

و $\sqrt{16} - \sqrt{54} = \dots\dots\dots$

ز $[-5, 1] - [-5, 1] = \dots\dots\dots$

ح مجموعة الحل في ح للمعادلة $\sqrt{x} - 1 = 3$ هي

ط الكرة التي طول قطرها ٦ ل وحدة طولية يكون حجمها وحدة مكعبة.

ي $|\sqrt{125} - \sqrt{\dots\dots\dots}| = \dots\dots\dots$

٢ أوجد على صورة فترة مجموعة الحل في ح لكل من المتباينات التالية ، ومثل الحل على

خط الأعداد:

أ $5 < 3 - x$ ب $4 - x \leq 2$

ج $x \geq 2 - 1$ د $x - 1 > 3 - 1$

هـ $4 \geq x + 5$ و $5 < x + 7$

٣ إذا كانت $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$ فأثبت أن $x + \frac{1}{x} = 22$

٤ أوجد في أبسط صورة: $\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{4} + \sqrt{54}$

٥ أسطوانة دائرية قائمة حجمها 72π سم^٣، ارتفاعها ٨ سم. أوجد مساحتها الكلية.

٦ **أوجد** مستعيّنًا بخطّ الأعداد $[٦, ٣] \cap [٧, ٤]$

٧ إذا كانت $س = \frac{٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥}}{٥\sqrt{٧}}$ ، $ص = \frac{٢\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٧}}$

فأوجد قيمة **أ** $س + ٢ص$ **ب** $س ص$ وأثبت أن $س + ٢ص = ٣٨$ **ج** $س ص$

٨ إذا كانت $س = \frac{٢ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $ص = \frac{٢ - \sqrt{٥}}{٢}$

فأوجد قيمة $(س + ص) + (س - ص)$.

٩ إذا كانت $س = \frac{٣\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٧}}{٣\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٧}}$ ، $ص = \frac{٢}{٣\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٧}}$

فأوجد قيمة $(س + ٢ص + ص)$

١٠ إذا كانت $أ = \frac{٢\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٧}}$ ، $ب = \frac{٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٧}}$

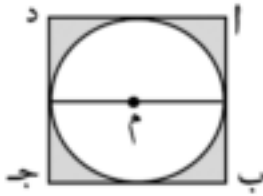
فأوجد قيمة $أ - ب$

١١ إذا كانت $س = \frac{٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٧}}$ ، $ص = \frac{٢\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٧}}$

فأثبت أن $س + ٢ص = ٣٨$

١٢ في الشكل المقابل : دائرة مرسومة داخل

المربع أ ب ج د فإذا كانت مساحه الجزء



المظلل $\frac{١}{٤} ٤٧$ سم^٢ أوجد محيط هذا الجزء $(\frac{٢٢}{٧} = \pi)$

١٣ قطعه من الورق على شكل مستطيل أ ب ج د ، فيه أ ب = ١٠ سم ، ب ج = ٤٤ سم ، طويت على

شكل أسطوانه دائريه قائمه ، بحيث ينطبق أ ب على د ج أوجد حجم الاسطوانه الناتجة $(\frac{٢٢}{٧} = \pi)$

نشاط تكنولوجيا

أوجد: $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{1250}$

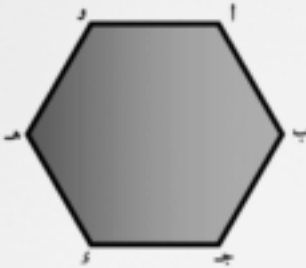
افتح برنامج إكسل وسجل الأرقام المبنية في الخلايا A1، B1، D1 لإيجاد الجذر التكعيبي للخلية A1، اكتب في الخلية F1 الشكل الآتي $A1^{(1/3)}$ ثم ENTER يصبح الناتج 3

لإيجاد الجذر التربيعي للخلية B1 اكتب في الخلية H2 الشكل الآتي $B1^{(1/2)}$ ثم ENTER يظهر الناتج 3,5

لإيجاد الجذر التكعيبي للخلية J1 اكتب في الخلية J2 الشكل الآتي $D1^{(1/3)}$ ثم ENTER يظهر الناتج 0,5

اكتب في الخلية L2 حاصل جمع $F2 + H2 + J2$ بعد كتابة يساوي يظهر الناتج 1

نشاط



نشاط ارسم شكلاً سداسياً منتظماً طول ضلعه 4 سم.

1 أوجد قياس زاويته الداخلية.

2 ارسم أقطاره A، B، C، D، E، F.

استنتج طول كل منها بدون قياس.

3 ارسم دائرة تمر بـ O. أوجد مساحته.

اختبار الوحدة

١ **أكمل** لتحصل على عبارة صحيحة:

- أ $[-2, 3] \cap \mathbb{C} = \dots$
- ب المعكوس الضربي للعدد $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ هو $\dots$
- ج $\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{45}, \sqrt{80}, \dots$ أكمل بنفس التسلسل.
- د إذا كانت $\sqrt{3} = 7 + \sqrt{3}$ ، $\sqrt{3} = 7 - \sqrt{3}$ فإن (س + ص) = $\dots$
- هـ الدائرة التي محيطها 20π سم تكون مساحتها $\dots\pi$ سم²

٢ **اختر** الإجابة الصحيحة من بين الأقواس أمام كل عبارة:

- أ مكعب حجمه 64سم^3 فإن مساحته الجانبية = ... سم² (٤ أو ٨ أو ٦٤ أو ٩٦)
- ب $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \dots$ (٣ أو $\sqrt{3}$ أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}$)
- ج المعكوس الضربي للعدد $-\frac{\sqrt{6}}{12}$ هو $\dots$ ($\frac{12}{\sqrt{6}}$ أو $-\frac{\sqrt{6}}{12}$ أو $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{2}$)
- د $\sqrt{54} + \sqrt{2} = \dots$ ($5\sqrt{2}$ أو $2\sqrt{2}$ أو $2\sqrt{4}$ أو $2\sqrt{4}$)
- هـ $[-4, 3] - [4, 3] = \dots$ ($[4, 3]$ أو $[-4, 3]$ أو $[5, 3]$ أو $[-4, 3]$)

٣ اختصر لأبسط صورة $\sqrt{18} + \sqrt{50} + \frac{1}{\sqrt{12}}$

٤ متوازي مستطيلات مصنوع من الرصاص أطوال أحرفه 7سم ، 24سم ، 21سم ، شكلت منه مادة لتكون كرة. أوجد طول نصف قطرها. ($\frac{22}{7} = \pi$)

٥ إذا كانت $\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$ ، $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$ أوجد قيمة $\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$

٦ مستعينًا بخط الأعداد أوجد $[-3, 1] \cup [0, 5]$ على صورة فترة

٧ أسطوانة دائرية قائمة حجمها 924سم^3 ، وارتفاعها 6سم أوجد مساحتها الجانبية ($\frac{22}{7} = \pi$).

٨ إذا كانت $\sqrt{10} = 2 + \sqrt{3}$ ، $\sqrt{3} = 26 - 1$ أعط تقديرًا لحاصل ضرب س × ص واستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الفرق بين تقديرك والإجابة الصحيحة.

٩ أوجد مجموعة الحل في ح ومثل الحل على خط الأعداد

أ $1 < 2 + 3 \geq 9$ ب $3 = \sqrt{2} + 3$

الوحدة الثانية

العلاقة بين متغيرين
تمارين (٢-١)

١ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كل من العلاقات الآتية ، ومثلها بيانيا :

$$(أ) \text{ س} + \text{ص} = ٥ \quad (ب) \text{ ٢س} - \text{ص} = ٣$$

$$(جـ) \text{ ٣س} - \text{ص} = ٨ \quad (د) \text{ ٢س} - \text{٣ص} = ٤$$

$$(هـ) \text{ ٢ص} - ٥ = ٠ \quad (و) \text{ ص} - ٢س = ٠$$

$$(ز) \text{ س} + ٣ = ٠ \quad (ح) \text{ س} + \text{ص} + ٣ = ٠$$

٢ الجدول الآتي يمثل العلاقة بين المتغير س ، ص : حيث $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$

س	١	٢	٣	٤
ص	٣	ك	٩	١٢

أ - أوجد قيمه ك ب - مثل هذه العلاقة بيانياً

٣ إذا كانت (٣ ، ١) تحقق العلاقة : $٥ = \text{س} + \text{ب}$ ، فأوجد قيمة ب

٤ إذا كانت (ك ، ٢) تحقق العلاقة : $٢ = \text{س} - ٥$ ، فأوجد قيمة ك

٥ مثل بيانياً كلًا من العلاقات الآتية : أ $\text{س} + \text{ص} = ٢$ ب $\text{٢س} - \text{ص} = ٣$

٦ مثل المستقيم الذي يمثل العلاقة $\text{س} + ٢ = ٣$ ، وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات في النقطة أ ويقطع محور الصادات في النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أ ب حيث نقطة و هي نقطة الوصل.

٧ ارسم المستقيم الذي يمثل العلاقة : $٤ = \text{ص} - ٣$ ، وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات في النقطة أ ، ويقطع محور الصادات في النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أ ب حيث ونقطة الأصل .

ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية

تمارين (٢-٢)

١ أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

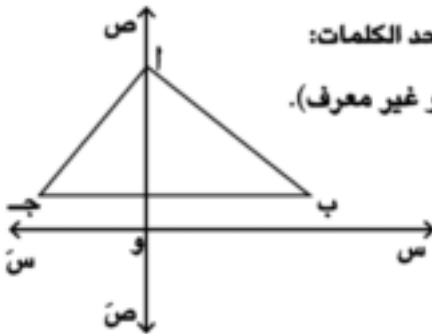
- أ إذا كان $A(3, 1)$ ، $B(1, 2)$ فإن ميل AB يساوي
 ب إذا كان $(-1, 5)$ يحقق العلاقة $3س + ك = ٧$ فإن $ك =$
 ج أي مستقيم يوازي محور السينات ميله =
 د أي مستقيم يوازي محور الصادات ميله
 هـ إذا كانت A ، B ، جـ على استقامة واحدة فإن ميل AB = ميل

٢ مع عصام ١٠ ورقات مالية فئة ٥ جنيهاً، وأوراق مالية فئة ٢٠ جنيهاً، اشترى عصام من المركز التجاري بما قيمته ٦٥ جنيهاً ، حدد الإمكانيات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام الأوراق المالية التي معه، وأوجد العلاقة بين عدد كل منها ومثلها بيانياً.

٣ إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنيه، و ثمن الكرسي ٥٠ جنيهاً ، فإذا باع المتجر في أحد الأسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنيه، فما هي التوقعات الممثلة لعدد الطاولات التي باعها ، وعدد الكراسي. مثل هذه العلاقة بيانياً؟

٤ في الشكل المقابل المثلث AB جـ أكمل باستخدام أحد الكلمات:

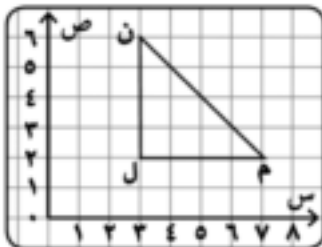
(موجب أو سالب أو صفر أو غير معرف).



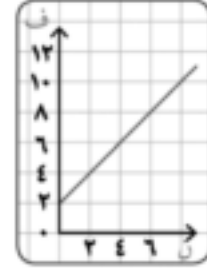
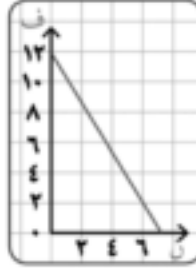
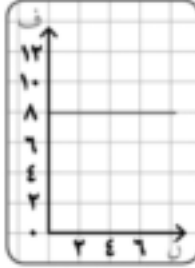
- أ ميل AB
 ب ميل BC
 ج ميل AO
 د ميل AC

٥ في الشكل المقابل:

ل م ن مثلث قائم الزاوية في ل ، $\angle م = ٤٥^\circ$ فإذا كان
 ل $(٢, ٣)$ ، م $(٢, ٧)$ أوجد إحداثي ن واحسب ميل م ن .



٦ كل من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم. حدد موضع الجسم عند بدأ الحركة، وعند ن = ٦ ثوان ، وأوجد ميل المستقيم في كل حالة (ماذا يمثل الميل؟).



تكنولوجيا

١ افتح برنامج EXCEL لرسم محوري س، ص دون الأرقام المبينة بالشكل (١) في العمود الأول A، العمود B

٢ بالماوس قُلِّل العمودين ثم من قائمة insert اختر Chart شكل (٢)

٣ ثم xy scatter شكل (٣) ثم next ثم finish يظهر محوري س، ص اضغط بالماوس من قائمة الرسم أسفل صفحة EXCEL وحدد قيم النقط كما بالشكل (٤)

٤ ثم اضغط بالماوس على علامة **أ** ارسم مستقيم يمر بكل من النقطتين (١، ٢) و (٢، ٠) يصبح الميل يساوي $(٢ - ٠) / (١ - ٢) = ٢$ يساوي $-\frac{1}{2}$ النقط الآتية **ب** ارسم مستقيم يمر بكل من النقطتين (٢، ٢) و (٢، ٠) يصبح الميل يساوي $(٢ - ٠) / (٢ - ٢)$ يساوي صفر أي الميل يوازي محور السينات النقط الأصفر **ج** ارسم مستقيم يمر بكل من النقطتين (١، ٢) و (٥، ٢) يصبح الميل يساوي $(٢ - ٢) / (٥ - ١) = ٠$ الميل غير معرف أي الميل يوازي محور الصادات النقط الأحمر

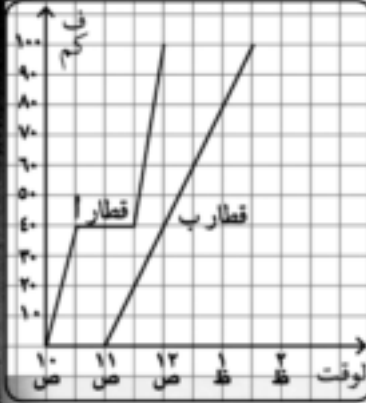
شكل (١)

شكل (٢)

شكل (٣)

شكل (٤)

نشاط



الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة ف، والزمن ن لحركة قطارين أ، ب بين محطتين، حيث ف (بالكيلو متر)، ن (بالساعة) استخدم الرسم لإيجاد قيمة:

- البعد بين المحطتين.
 - الزمن الذي استغرقه كل من القطارين.
 - السرعة المتوسطة لكل منهما.
 - ما دلالة القطعة المستقيمة في حركة القطار أ.
- السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الكلي الذي قطعت فيه المسافة}}$

اختبار الوحدة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين أمام كل عبارة:

أ أي الأزواج المرتبة التالية تحقق العلاقة $٢س + ص = ٥$

((٢،٢) أو (١،٣) أو (٣،١) أو (٣،-١))

ب أي العلاقات الآتية توضح العلاقة بين س، ص الموضحة بالجدول المقابل.

س	٣	٤	٥
ص	١٠	١٣	١٦

(ص = س + ٧ أو ص = س - ٧ أو ص = ٣س + ١ أو ص = س + ١)

ج إذا كان أ (٥،٣)، ب (١٠،٥) فإن ميل أ ب =

(- $\frac{1}{3}$ أو ٣- أو ٣ أو $\frac{1}{3}$)

د العلاقة $٣س + ٨ص = ٢٤$ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة.

((٨،٠) أو (٠،٨) أو (٣،٠) أو (٠،٣))

٢ إذا كانت أ = (١،٢)، ب = (٣،١٠)، ج = (٣،٢) أوجد ميل كل من أ ب، ب ج، ج أ.

ارسم المثلث أ ب ج على الشبكة التريعية، ثم حدد نوع المثلث أ ب ج بالنسبة لقياسات زواياه.

٣ ملأ عاطف خزان سيارته بالوقود، وسعته ٥٠ لتراً، وبعد أن قطع مسافة ١٠٠ كم، لاحظ أن مؤشر عداد

الوقود يشير إلى أن الخزان به $\frac{2}{3}$ سعته. ارسم الشكل البياني للعلاقة بين المسافة المقطوعة وكمية

الوقود بالخزان التي تتحركها السيارة ليكون الخزان فارغاً.

الوحدة الثالثة

جمع البيانات وتنظيمها
تمارين (٣ - ١)

١ فيمايلي الأجر الأسبوعي بالجنيهات لأربعين عاملاً في أحد المصانع

٥٧	٦٢	٨٩	٨٧	٦٤	٥٤	٩٤	٣٦	٧١	٤٧
٣٦	٦٩	٣٢	٥٦	٦٦	٧٠	٥٢	٤٤	٦١	٥١
٥٥	٦٠	٦٧	٩٦	٩٩	٦٥	٩٠	٧٧	٤٨	٧٩
٥٩	٤٨	٩٤	٤٩	٣٨	٧٨	٨٤	٨١	٧٥	٩٥

والمطلوب عمل جدول تكراري ذي مجموعات (خذ المجموعات الجزئية: ٣٠، -٤٠، -٥٠، ...، -٩٠)

٣٨	٢٢	٣٣	٤٠	٣٧	٣٠	٢٠	٤٠	٣٥	٢٥
٣٧	٢٩	٢٦	٣٢	٢٨	٣٩	٣٧	٢٨	٣٦	٣٥
٣١	٣٧	٣٥	٤٠	٣٨	٢٩	٣٦	٣٥	٣٤	٢٣

وما المجموع

المطلوب:

أ كون جدول تكراري ذي مجموعات لهذه الدرجات

ب أوجد عدد التلاميذ الممتازين إذا كانت أقل درجة ليكون التلميذ ممتازاً هي ٣٦ درجة

٣ تبين البيانات التالية عدد أيام الإجازات التي حصل عليها ٤٠ عامل خلال سنة كاملة

١٥	٣٠	٢٦	١٤	٢٨	١٣	٢٥	١٤	٢٧	١١
٢٤	١٦	٢١	١٦	١٥	٢٢	٢١	١٧	٢١	٢٩
٢٦	٢١	١٥	٢٠	٣٠	٢٤	٢٠	٢٠	١٥	٢٦
٢٩	٣٠	٢٠	٢٧	٢٢	٢٦	٢٢	٢٨	٣٠	١٥

المطلوب:

أ تكون الجدول التكراري لهذه البيانات

ب إيجاد عدد العمال الذين حصلوا على إجازات أكثر من ٢٠ يوماً في السنة.

**الجدول التكرارى المتجمع الصاعد
والجدول التكرارى المتجمع النازل
وتمثيلهما بيانيا
تمارين (٣ - ٢)**

١ البياناتُ التالية لدرجات ١٠٠ طالب فى امتحان تجريبى لمادة الرياضيات.

المجموعات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

والمطلوب:

- تكوين كل من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والنازل على نفس ورقة الرسم البيانى.
- من الرسم أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة، والحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر.
- النسبة المئوية لنجاح الطلاب، علما بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة.
- ما النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على أكثر من ٤٥ درجة؟

٢ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب: رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر اليومى لمجموعة من العمال .

المجموعات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	المجموع
التكرار	١٠	١٤	٢٤	٣٠	١٢	١٠	١٠٠

والمطلوب: رسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع

٤ الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملا بأحد المصانع.

المجموعات	-۲۰	-۲۵	-۳۰	-۳۵	-۴۰	-۴۵	-۵۰	المجموع
التكرار	۵	۸	۹	۱۳		۵	۳	۵۰

والمطلوب:

- أ أكمل الجدول.
- ب ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل لهذا التوزيع.
- ج من الرسم أوجد:
- أولاً: عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ۳۲ سنة
- ثانياً: عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ۴۳ سنة
- هـ فيمالي التوزيع التكراري الذي يبين درجات ۱۰۰۰ طالب في إحدى المواد.

النسبة المئوية	-۲۰	-۳۰	-۴۰	-۵۰	-۶۰	-۷۰	-۸۰	-۹۰	المجموع
عدد الطلبة	۳۰	۷۰	۱۶۰	۲۶۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۹۰	۱۰۰۰

والمطلوب:

- أ رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع.
- ب عدد التلاميذ الحاصلين على أقل من ۷۵ درجة.
- ج عدد التلاميذ الحاصلين على أكثر من ۸۵ درجة.

الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تمارين (٣ - ٣)

١ الجدول التكراري الآتي يبين التوزيع التكراري لعدد أيام الإجازات بأحد المصانع لعدد ٥٠ عاملاً .

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦
التكرار	٤	٥	٨	ك-٢	٧	٥	١

أوجد: أولاً: قيمة ك ثانياً: الوسط الحسابي لهذا التوزيع

٢ الجدول الآتي يبين توزيع ١٢٠ طالباً حسب أطوالهم بالسنتيمترات .

الطول بالسنتيمتر	-١٤٠	-١٤٤	-١٤٨	-١٥٢	-١٥٦	-١٦٠	المجموع
التكرار	١٢	٢٠	٣٨	٢٢	١٧	١١	١٢٠

أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع

٣ فيما يلي توزيع الأجور لبعض العاملين في أحد المصانع.

مجموعات الأجور	-٣٠٠	-٤٠٠	-٥٠٠	-٦٠٠	-٧٠٠	المجموع
عدد العمال	٨	١٢	١٨	٧	٥	٥٠

ارسم منحني التكرار المتجمع النازل لهذا التوزيع ثم أوجد الأجر الوسيط

❖ في الجدول التكراري التالي ذى المجموعات المتساوية في المدى.

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	س -	-٦٠	المجموع
التكرار	١٢	١٥	٢٥	٢٧	ك + ٤	٤	١٠٠

أولاً: أوجد قيمة كل من س ، ك

ثانياً: ارسم في شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ثم احسب الوسيط.

❖ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلو جرام بأحدى المدارس

الوزن بالكيلو جرام	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	-٥٥	المجموع
عدد التلاميذ	ك + ٤	٣ ك	٤ ك	٣ ك + ١	٣ ك - ١	ك + ١	٥٠

أولاً: أوجد قيمة ك

ثانياً: ارسم المدرج التكراري وأوجد الوزن المنوالى

❖ الجدول التكراري الآتي يبين التوزيع التكراري لأطوال ٢٠٠ تلميذ في إحدى المدارس

الطول بالسنتيمتر	-١١٠	-١١٥	-١٢٠	-١٢٥	-١٣٠	-١٣٥	-١٤٠	المجموع
عدد التلاميذ	١٠	١٢	٢٨	٣٥	٦٠	٤٠	١٥	٢٠٠

ارسم المدرج التكراري لهذا لتوزيع وأوجد الطول المنوالى

تمارين عامة على الإحصاء

١ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٥٠ طالبًا في أحد الاختبارات:

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

٢ أوجد أولاً: الوسط الحسابي لدرجة الطالب. ثانياً: الوسيط

٣ من الجدول التكراري التالي ذي المجموعات المتساوية في المدى أوجد:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

أولاً: أوجد قيمة كل من س، ك

ثانياً: ارسم في شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل، ثم احسب الوسيط.

٤ أوجد المنوال للتوزيع التكراري التالي لدرجات ٤٠ طالبًا في أحد الاختبارات:

مجموعات الدرجات	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	المجموع
التكرار	٣	٤	١٢	٨	٧	٦	٤٠

٥ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري ذي المجموعات متساوية المدى للأجور الأسبوعية لعدد

١٠٠ عامل بأحد المصانع.

مجموعة الأجر بالجنيه	-٧٠	-٨٠	-٩٠	-١٠٠	-١٢٠	-١٣٠	مجموع
عدد العمال	١٠	١٣	ك - ٤	٢٠	١٦	١٤	١١

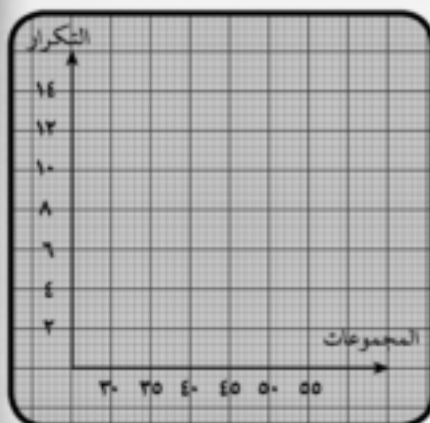
أوجد أولاً: قيمة كل من س، ك

ثانياً: الأجر المنوال بالجنيه

نشاط

الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلو جرام بإحدى المدارس.

الوزن بالكيلو جرام	- ٣٠	- ٣٥	- ٤٠	- ٤٥	- ٥٠	- ٥٥	المجموع
عدد التلاميذ	٧	٣ ك	٤ ك	١٠	٨	٤	٥٠



أولاً: أوجد قيمة ك.

ثانياً: احسب الوسط الحسابي.

ثالثاً: ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

رابعاً: ارسم المدرج التكراري وأوجد الوزن المنوال.

خامساً: أوجد الوسيط.

اختبار الوحدة

أكمل بإجابات صحيحة:

- أ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٨ والحد الأعلى لنفس المجموعة ١٤ فإن مركزها =
- ب إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩ فإن حدّها الأعلى =
- ج نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل تعين على محور المجموعات.
- د إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع تكراري هو ٣٩,٤ ومجموع تكراراته ١٠٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة في مركزها =

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لأوزان ٢٠ طفلاً بالكيلو جرام

المجموعات	- ٥	- ١٥	- ٢٥	- ٣٥	- ٤٥	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

أوجد الوزن الوسيط بالكيلو جرام باستخدام المنحنيين التكرارين المتجمع الصاعد والنازل لهذا التوزيع.

فيمايلي التوزيع التكراري للحافز الأسبوعي لعدد ١٠٠ عامل في أحد المصانع.

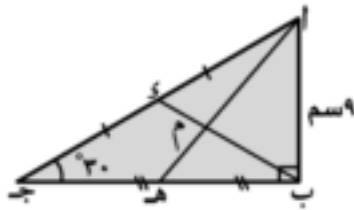
الحوافز بالجنيه	- ٢٠	- ٣٠	- ٤٠	- ٥٠	- ٦٠	- ٧٠
عدد العمال	١٠	ك	٢٢	٢٦	٢٠	٨

- أ احسب قيمة ك.
- ب أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.
- ج القيمة المنوالية للحافز الأسبوعي باستخدام المدرج التكراري.

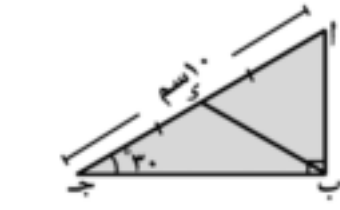
الوحدة الرابعة

متوسطات المثلث تمارين (٤ - ١)

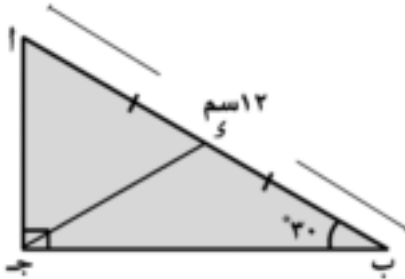
أكمل



أ ج د = س م ، ب ي = س م
م ي = س م ، ب ي = م ي
م ي = س م



ب ي = س م ، أ ب = س م
محيط $\triangle$ أ ب ي = س م



أ ج د = س م ، أ ي = س م
ب ج د = س م ، ج د = س م



ك و = س م ، ك ه = س م ، و ه = س م
محيط $\triangle$ ك ه و = س م

٥ في الشكل المقابل:

أ ب ج د مثلث ، س منتصف أ ب ،
ص منتصف ب ج د ،

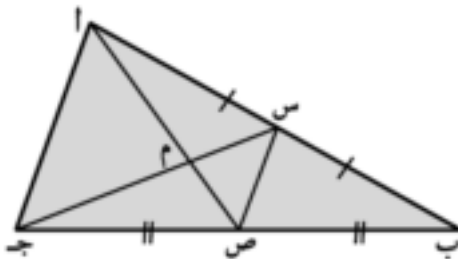
س ص = س م ، س ج د = س م ، س م = (م)

حيث: ج د م = ٨ سم ، ص م = ٣ سم

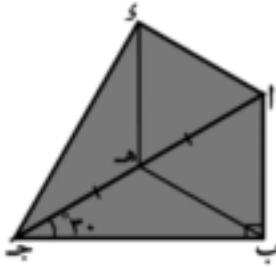
أوجد:

(١) محيط $\triangle$ م س ص

(٢) محيط $\triangle$ م أ ج



- ٦ ا ب ج مثلث ، ي منتصف ب ح ، م $\exists$ ا ي بحيث ا م = م ي ،
 رسم ج م فقطع ا ب في هـ .
 فإذا كان ه ج = ١٢ سم
 أوجد طول ه م



- ٧ في الشكل المقابل:
 ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،
 وه (د ا ج ب) = ٣٠°
 ا ب = ٥ سم ، ه منتصف ا ج
 إذا كان ي ه = ٥ سم
 فاثبت أن وه (د ا ج ب) = ٩٠°

المثلث المتساوي الساقين

تمارين (٤ - ٢)

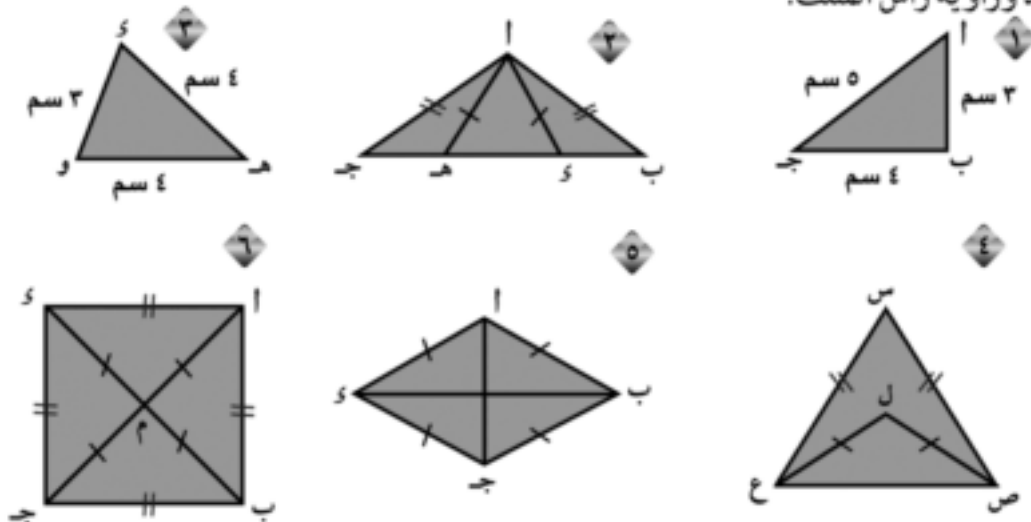
لاحظ أن:

- ١ زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين حادة.
 - ٢ زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.
- لذلك قد يكون المثلث المتساوي الساقين منفرج الزاوية أو قائم الزاوية أو حاد الزوايا كما يوضح

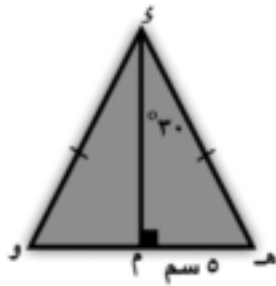
التصنيف التالي:



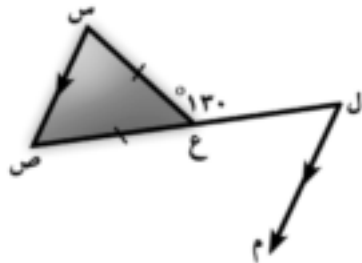
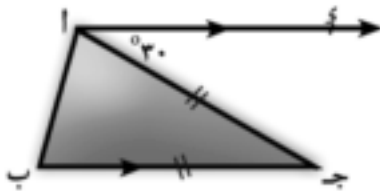
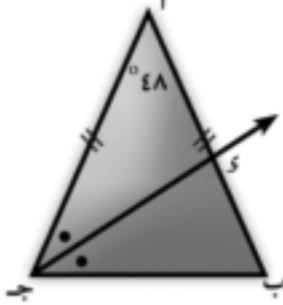
* في كل من الأشكال التالية اذكر المثلثات المتساوية الساقين وحدد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتي القاعدة وزاوية رأس المثلث.



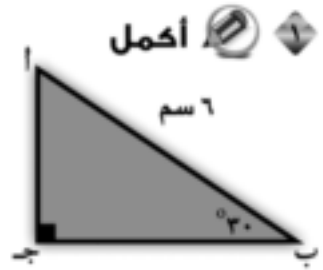
نظريات المثلث المتساوي الساقين تمارين (٣ - ٤)



ده = سم، وه =
هو = سم، وه =
م =
س =
ه =
و =



س ع = سم



ا ج =

في الشكل المقابل:

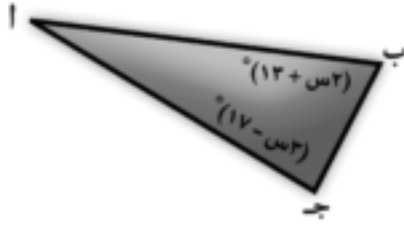
ا ب = ا ج، وه =
ج د ينصف ا ب ج ا ويقطع ا ب في د
اوجد وه (ا ب)، وه (ا ج د)

في الشكل المقابل:

ا ب ج مثلث فيه ا ج = ب ج،
ا د // ب ج، وه =
اوجد قياسات زاويا ا ب ج

في الشكل المقابل:

ع ل ص، س ع = ص ع،
وه =، ل م // س ص
اوجد وه (ا ل ص)



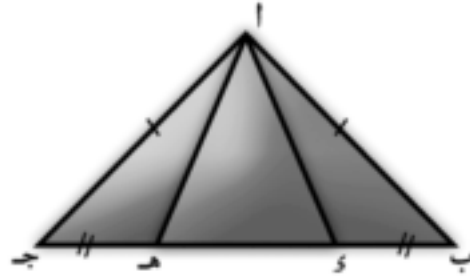
❖ في الشكل المقابل

$$اب = اج، و \angle ب = (13 + 3)^\circ$$

$$و \angle ج = (17 - 3)^\circ$$

✎ أوجد قياسات زوايا $\triangle اب ج$

❖ في الشكل المقابل



اب ج مثلث متساوي الساقين فيه $اب = اج$ ،

و $\exists ب ج$ بحيث $ب و = ه ج$

✎ اثبت أن أولاً: $\triangle ا و ه$ متساوي الساقين

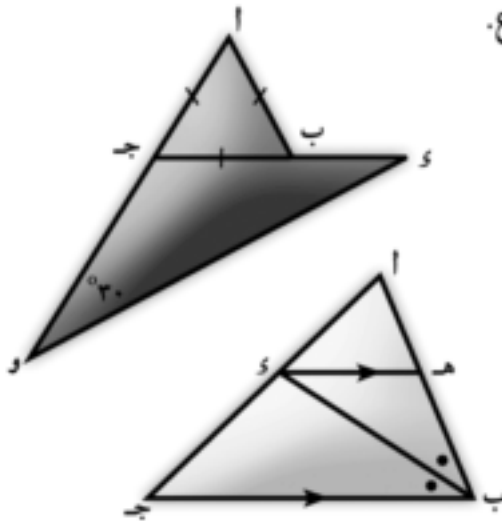
ثانياً: $\triangle ا و ه \equiv \triangle ا ه و$

❖ في الشكل المقابل: اب ج مثلث متساوي الأضلاع.

و $\exists اج$ ، $\exists د ج ب$ ،

$$و \angle و ج د = 30^\circ$$

✎ اثبت أن $\triangle و ج د$ و متساوي الساقين.



❖ في الشكل المقابل

ب و ينصف $\triangle اب ج$ ، ويقطع $اج$ في و،

و $ه و \parallel ب ج$ حيث $ه \exists اب$.

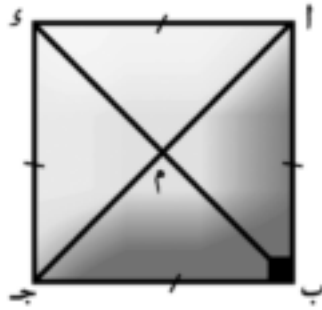
✎ اثبت أن $\triangle ه ب و$ متساوي الساقين.

❖ اب ج مثلث فيه $و \exists اب$ ، $ه و ب ج$ بحيث كان $ب و = ب ه$ ، فإذا كان $و ه \parallel اج$

✎ اثبت أن $اب = ب ج$

❖ اب ج مثلث فيه $اب = اج$ ، ب و ينصف $\triangle اب ج$ ، ج و ينصف $\triangle اج ب$

✎ اثبت أن $\triangle و ب ج$ متساوي الساقين.



١٧ أ ب ج د مربع تقاطع قطراه أ ج ، ب د في النقطة م

أكمل وناقش

- ١ في $\triangle أ ب ج$ ، و $(\angle أ ب ج) = \dots^\circ$
 $\therefore أ ب = ب ج$
 $\therefore$ و $(\angle ب أ ج) = \dots^\circ$ و $(\angle ب ج أ) = \dots^\circ$
- ب $\therefore$ و $(\angle ب أ د) = 90^\circ$ و $(\angle د أ ج) = \dots^\circ$
 $\therefore$ و $(\angle ب ج د) = 90^\circ$ و $(\angle أ ج د) = \dots^\circ$
- ج هل القطر أ ج ينصف $\angle د$ ؟
- د هل القطر ب د ينصف كل من $\angle ب$ ، $\angle د$ ؟
- هـ هل $\triangle م أ د$ متساوي الساقين؟ لماذا؟
- و اذكر مثلثات متساوية الساقين رأس كل منها النقطة م. ص
- ز هل م منتصف أ ج ، ب د
- ح هل $أ ج \equiv ب د$
- ط استنتج من البنود السابقة خواص المربع.

نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين تمارين (٤ - ٤)

١ اكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

- أ مُنْصَفُ زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون
- ب عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع تساوي
- ج أي نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من
- د إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوي الساقين 100° فإن قياس إحدى الزاويتين الأخريين = $.....^\circ$

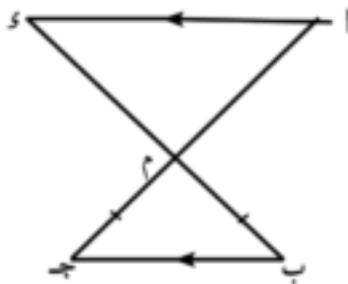
٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات بين القوسين :

- أ عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين = ... (٣ ، ٢ ، ١ ، ٠)
- ب المثلث الذي أطوال أضلاعه ٢ سم، (س + ٣) سم، ٥ سم يكون متساوي الساقين عندما س = سم (٤ ، ٣ ، ٢ ، ١)
- ج نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها من جهة القاعدة بنسبة (٣:٢ ، ٣:١ ، ١:٢ ، ٢:١)



٣ في الشكل المقابل:

أ ب = ب ج ، ب هـ منصف $\angle$ ج ب و
اثبت أن ب هـ // أ ج



ي الشكل المقابل:

أ ج $\cap$ ب و = {م}

أ و // ب ج ، م ب = م ج

اثبت أن (١) $\triangle$ أ م و متساوي الساقين

(٢) محور تماثل $\triangle$ أ م و هو نفسه محور تماثل $\triangle$ ب م ج

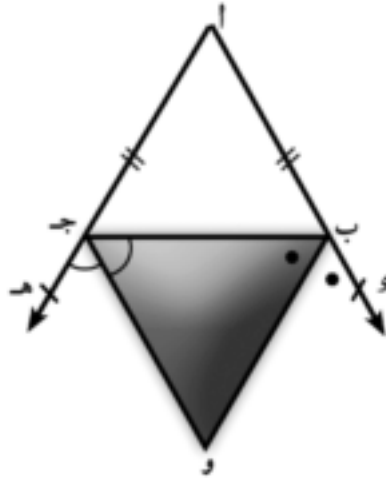
تمارين عامة على متوسطات المثلث والمثلث المتساوي الساقين

١ في الشكل المقابل



أب = أج، ب ج = ١٠ سم،
و ($\angle$ ب ا د) = ٣٠°، ا د $\perp$ ب ج
أولاً: أوجد طول كل من ب د، ا د .
ثانياً: ما عدد محاور تماثل المثلث أب ج؟
ثالثاً: ما مساحة $\triangle$ أب ج؟

٢ في الشكل المقابل

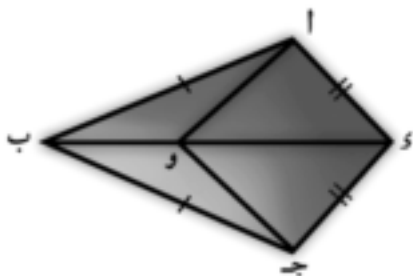


أب = أج، د ج = ١٠ سم،
ب د و ينصف $\triangle$ ب ج،
ج د و ينصف $\triangle$ ب ج هـ

اثبت أن

أولاً: $\triangle$ أب ج متساوي الساقين
ثانياً: أ و محور تماثل ب ج

٣ في الشكل المقابل

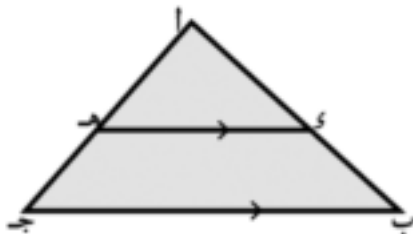


أب = أج، ا د = ج د

اثبت أن

ب د ينصف $\triangle$ ا د ج
و د ينصف $\triangle$ ا ب ج

٤ في الشكل المقابل



د هـ // ب ج، ا د = ا هـ
برهن أن: أب = أج .



٥ في الشكل المقابل:

$$اب = اج = اى = جى$$

$$وقه (\triangle اباج) = ٤٠^\circ$$

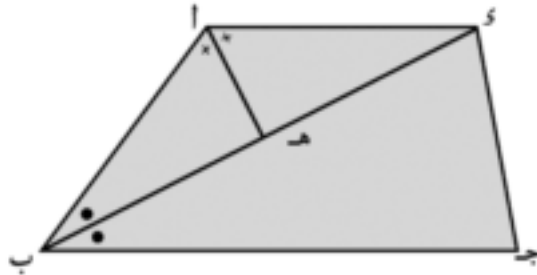
أوجد: وقه (\triangle ب جى)



٦ في الشكل المقابل:

اب جـ مثلث فيه وقه (\triangle ب) = وقه (\triangle جـ)

أوجد محيط المثلث



٧ في الشكل المقابل:

اب جـ شكل رباعي فيه $\overline{اى} \parallel \overline{ب جـ}$,

$\overline{بى}$ ينصف $\triangle اب جـ$

$\overline{اه}$ ينصف $\triangle ب اى$

اثبت أن: أولاً: $اب = اى$ ثانياً: $\overline{اه} \perp \overline{بى}$

ثالثاً: $ب هـ = هـ دى$

نشاط

١ باستخدام المسطرة والفرجار ارسم $\triangle اب جـ$ الحادة

وفى الجهة الأخرى من $\overline{ب ا}$ ارسم $\overline{اه} \parallel \overline{ب جـ}$.

٢ فى الشكل المقابل اب جـ مستطيل،

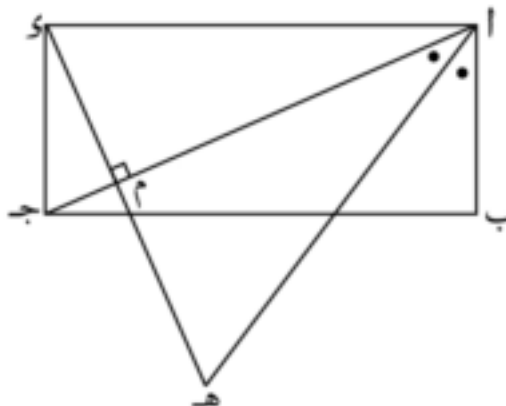
$\overline{اجـ}$ قطر فيه، $\overline{اه}$ ينصف $\triangle ب ا جـ$ ،

$$\overline{هـ د} \perp \overline{اجـ}$$

حيث $\overline{اه} \cap \overline{هـ د} = (هـ)$

$\overline{اجـ} \cap \overline{هـ د} = (م)$

بـزهن أن $اى = هـ د$.

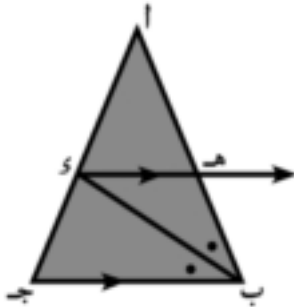


الهندسة اختبار الوحدة

١. أكمل لتجعل العبارات صحيحة:

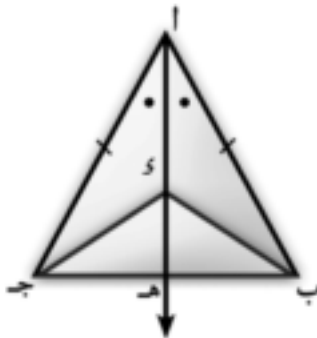
- أ زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين
 ب المتوسط المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين يكون
 ج $\triangle$ ا ب ج فيه ا ب = ا ج ، و $(\angle ا) = 70^\circ$ فإن و $(\angle ج) = \dots\dots\dots$
 د عدد محاور المثلث المتساوي الأضلاع =
 ه قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع =
 و المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى

٢. في الشكل المقابل:



ا ب ج مثلث فيه ب د ينصف $\triangle$ ا ب ج ويقطع
 ا ج في د ، و رسم د ه // ج ب
 د ه $\cap$ ا ب = ه

برهن أن ب ه = ه د



٣. في الشكل المقابل ا ب ج مثلث فيه ا ب = ا ج ،

ا ه ينصف $\triangle$ ا ب ج ، ا ه $\cap$ ب ج = د ه
 د ه $\parallel$ ا ه .

برهن أن

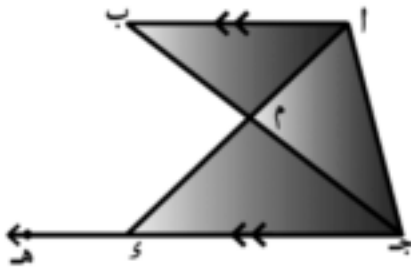
- أ ب ه = $\frac{1}{4}$ ب ج ب د = $\frac{1}{4}$ ب ج

الوحدة الخامسة

التباين
تمارين (٥ - ١)

١ في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث فيه $أ ج < أ ب$ ، $س \in \overline{أ ب}$
 $ص \in \overline{أ ج}$ بحيث $و (أ س ص) = و (أ ص س)$
 اثبت أن: $ص ج < س ب$

٢ في الشكل المقابل: $\overline{أ ب} // \overline{ج د}$ ،

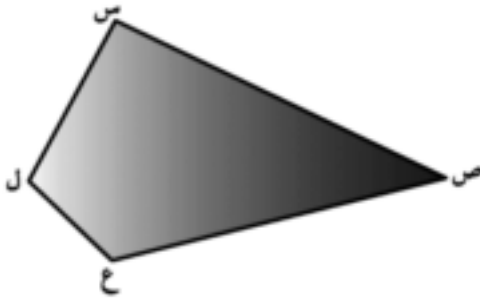
أ د $\cap$ ج ب = $م$ ، $هـ \in \overline{ج د}$ ، $هـ \notin \overline{ج د}$
 اثبت أن: أ و (أ ج د) < و (أ د ج) و (أ هـ د) < و (أ د هـ) و (أ ب ج)
 ب و (أ هـ د) < و (أ د هـ) و (أ ب ج)

٣ م نقطة داخل المثلث أ ب ج،

اثبت أن: و (أ م ب) < و (أ ج ب) و (أ ب ج)

المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث تمارين (٥ - ٢)

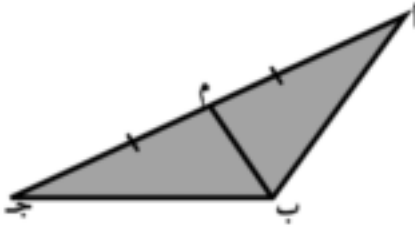
١. $\triangle$ أ ب ج فيه أ ب = ٢ سم، ب ج = ٥ سم، أ ج = ٦ سم رتب قياسات زوايا المثلث تصاعدياً.



٢. في الشكل المقابل:

س ص < س ل، ص ع < ع ل

برهن أن: $\angle$ س ل ع < $\angle$ ق و ($\angle$ س ص ع)



٣. في الشكل المقابل:

ب م متوسط في $\triangle$ أ ب ج، ب م > أ م

برهن أن: $\angle$ أ ب ج منفرجة.



٤. في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث فيه أ ب < أ ج، س ص // ب ج

برهن أن: $\angle$ ق و ($\angle$ أ ص س) < $\angle$ ق و ($\angle$ أ س ص)



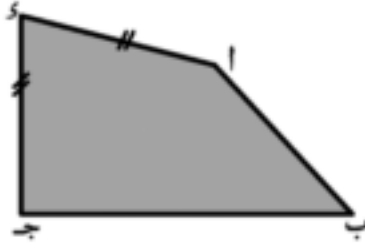
٥. في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث، ب م ينصف $\angle$ أ ب ج،

ج م ينصف $\angle$ أ ج ب.

فإذا كان: أ ب < أ ج، برهن أن:

$\angle$ م ج ب < $\angle$ م ب ج

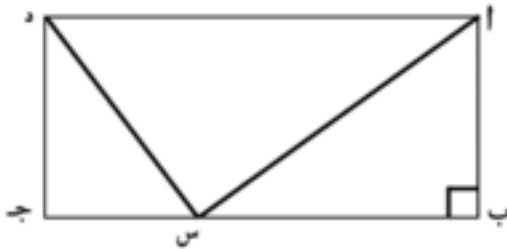


في الشكل المقابل:

أ ب ج د شكل رباعي فيه $ا د = س ج$ ، ب ج $< ا ب$

برهن أن:

و ($ا > ج$) و ($ا > ج$)

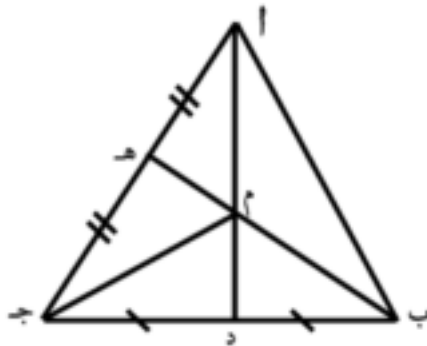


في الشكل المقابل:

أ ب ج د مستطيل، س $\in$ ب ج حيث

اس $<$ س د اثبت أن:

و ($ا س > ب$) و ($ا س > ج$)



في الشكل المقابل:

Δ أ ب ج، $\overline{ا د}$ ، $\overline{ب ه}$ متوسطان فيه

تقاطعا في م، إذا كان م د $<$ م ه فبرهن أن:

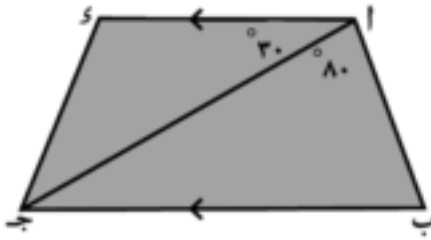
و ($\Delta م أ ب >$) و ($\Delta م ب ا$)

أ ب ج د شكل رباعي فيه $\overline{ا ب}$ أكبر الأضلاع طولا، ج د أصغر الأضلاع طولا برهن أن:

و ($\Delta ب ج د <$) و ($\Delta ب ا د$)

المقارنه بين أطوال الأضلاع في المثلث تمارين (٥ - ٣)

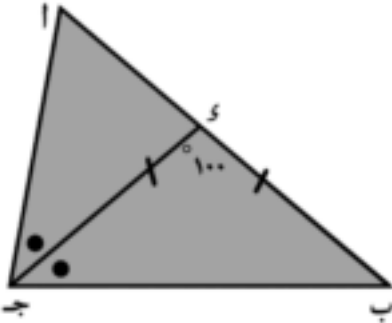
١. $\triangle$ ا ب ج فيه $\angle$ ا = 40° ، و $\angle$ ب = 70° ، رتب أطوال أضلاع المثلث تنازلياً.



٢. في الشكل المقابل:
ا ب ج // ا د ج، و $\angle$ ا ج د = 80°
و $\angle$ د ا ج = 20° برهن أن: ب ج < ا ب



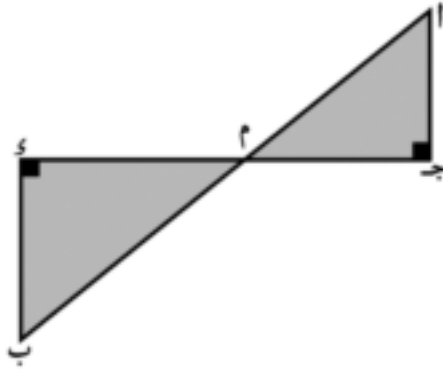
٣. في الشكل المقابل:
ا ب ج مثلث و $\exists$ ب ج د حيث ب د = ا د
برهن أن: ب ج < ا ج



٤. في الشكل المقابل:
ا ب ج مثلث، ج د ينصف ا ب و يقطع ا ب في د
و $\angle$ ا ب د = 100° ، ب د = د ج
برهن أن: ا ج < ب د.



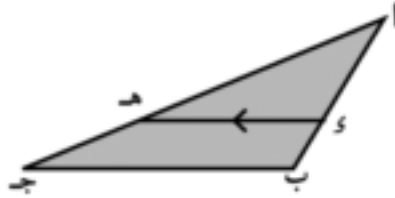
٥. في الشكل المقابل:
ا ب ج مثلث، د ج ب، ه د ا ج
و $\angle$ ا ب د = 110° ، و $\angle$ ب ج د = 120°
برهن أن: ا ب < ب ج.



في الشكل المقابل:

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$, $\overline{BD} \perp \overline{CD}$

برهن أن: $\overline{AB} < \overline{CD}$



في الشكل المقابل:

$\triangle ABC$ مثلث منفرج الزاوية في B

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

برهن أن: $\overline{AD} < \overline{AE}$

$\triangle ABC$ مثلث، $\overline{AD}$ ينصف $\angle A$ ، $\overline{CD} \cap \overline{AB} = \{S\}$

برهن أن: $\overline{AB} < \overline{BC}$

$\triangle ABC$ فيه $\angle A = (2 + s)^\circ$ ، $\angle B = (6s - 10)^\circ$ ، $\angle C = (20 + s)^\circ$ ، رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً.



في الشكل المقابل:

$\triangle ABC$ مثلث، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AD} = \overline{AE}$

برهن أن: $\overline{AB} < \overline{AC}$

$\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية في B، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ بحيث $\overline{AD} = \overline{BE}$ أثبت أن:

$\angle CDE < \angle CED$ و $\angle CDE < \angle CED$

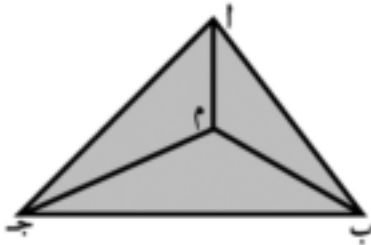
متباينة المثلث تمارين (٥ - ٤)

١ إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين ٥ سم، ١٢ سم فما هو طول الضلع الثالث؟
اذكر السبب.

٢ بين أي مجموعات الأطوال الآتية تصلح لأن تستخدم في رسم مثلث:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| أ ٥ سم، ٧ سم، ٨ سم | ب ٤ سم، ٩ سم، ٣ سم |
| ج ١٠ سم، ٦ سم، ٤ سم | د ١٥ سم، ١٧ سم، ٣٠ سم. |

٣ برهن أن طول أي ضلع في المثلث أصغر من نصف محيط المثلث.



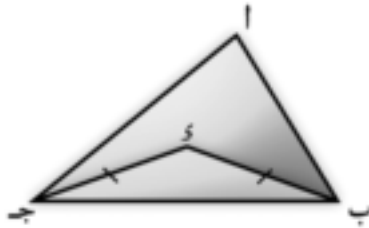
٤ في الشكل المقابل:
أ ب جـ مثلث ، م نقطة داخله برهن أن:
 $m + b + c < \frac{1}{2}$ محيط المثلث أ ب جـ

٥ برهن أن مجموع طولي قطري أي شكل رباعي محدب أصغر من محيط الشكل.

تمارين عامة على التباين



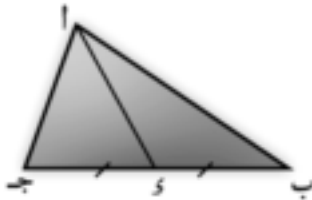
١ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع، هـ نقطة داخله
 و ($\triangle$ هـ ج ب) < و ($\triangle$ هـ ب ج) .
 أولاً: برهن أن: و ($\triangle$ أ ب هـ) < و ($\triangle$ أ ج هـ) .
 ثانياً: و ($\triangle$ أ) < و ($\triangle$ أ ب هـ) < و ($\triangle$ أ ج هـ) .



٢ في الشكل المقابل:

ب = ج = س .
 و ($\triangle$ أ ب ج) < و ($\triangle$ أ ج ب)
 برهن أن: و ($\triangle$ أ ب س) < و ($\triangle$ أ ج س)

٣ أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٦ سم، أ ج = ٧ سم، ب ج = ٨ سم
 رتب قياس زواياه ترتيباً تصاعدياً



٤ في الشكل المقابل:

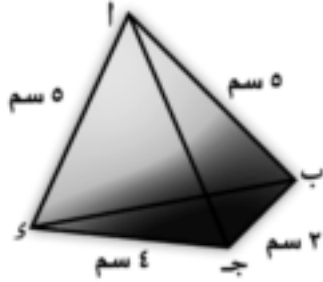
أ ب < أ ج ، ب = ج = س
 برهن أن و ($\triangle$ أ ب س) > و ($\triangle$ أ ج س) .



٥ في الشكل المقابل:

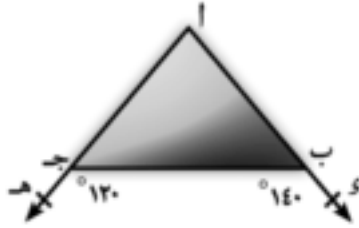
س ع < س ص
 $\overline{س ل} \perp \overline{ع ص}$
 برهن أن و ($\triangle$ ل س ع) < و ($\triangle$ ل س ص)

٦٦ في الشكل المقابل:



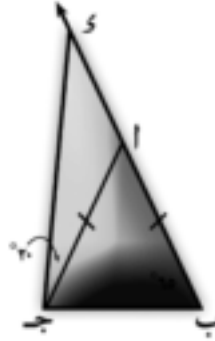
أ ب ج د شكل رباعي فيه $AB = AC = 5$ سم،
 $BC = 2$ سم، $CS = 4$ سم.
 برهن أن $\angle ABC < \angle ACB$ و $\angle BCS < \angle ACS$

٦٧ في الشكل المقابل:



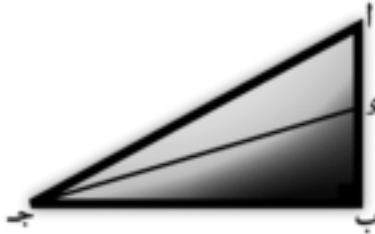
و $\angle ABC = 140^\circ$
 و $\angle ACB = 120^\circ$
 برهن أن $AB < AC$

٦٨ في الشكل المقابل:



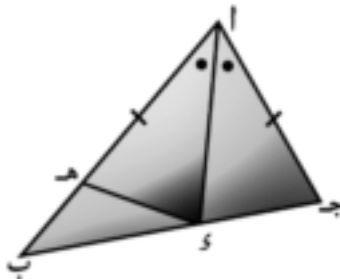
$AB = AC$
 و $\angle BDC = 65^\circ$
 و $\angle ADC = 20^\circ$
 برهن أن $AB < AC$

٦٩ في الشكل المقابل:



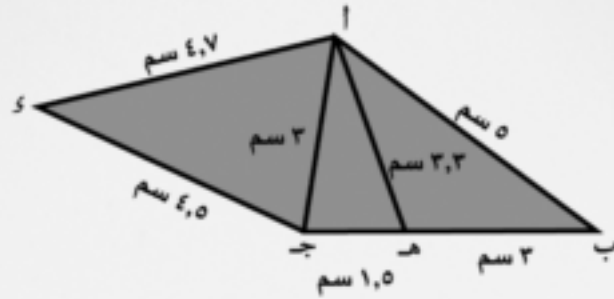
و $\angle BDC = 90^\circ$
 برهن أن $AB < AC$

٧٠ في الشكل المقابل:



أ ب ج د شكل رباعي فيه $AB = AC = 5$ سم،
 $BC = 2$ سم، $CS = 4$ سم.
 برهن أن $\angle ABC < \angle ACB$ و $\angle BCS < \angle ACS$

نشاط



١ من الشكل المقابل أكمل باستخدام ($>$ أو $<$)

أ. $\angle$ (أ ج) و $\angle$ (أ ج د)

ب. $\angle$ (أ هـ ج) و $\angle$ (أ هـ ج أ)

ج. $\angle$ (أ ب هـ) و $\angle$ (أ هـ أ ب)

د. $\angle$ (أ ج د أ) و $\angle$ (أ ج أ ج)

هـ. $\angle$ (أ هـ ب) و $\angle$ (أ هـ أ ج)

٢ في المثلث أ ب ج، أ ب = ٦ سم، ب ج = ٩ سم
فإن أ ج $\geq$ ،]

٣ في المثلث أ ب ج: و $\angle$ (أ) = 90° ، و $\angle$ (ب) = $(65 - 17)^\circ$

و $\angle$ (ج) = $(7 - 1)^\circ$

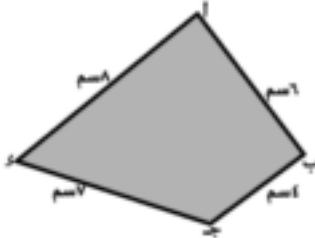
رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً

اختبار الوحدة

١١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

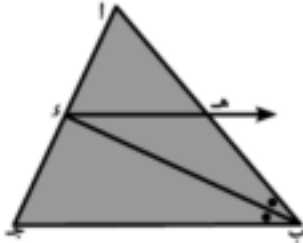
- أ أصغر زوايا المثلث في القياس يقابلها
- ب في $\triangle$ أ ب ج: إذا كان $\angle$ أ = 70° ، و $\angle$ ب = 30° فإن أكبر أضلاع المثلث طولاً هو
- ج إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين ٣ سم، ٧ سم فإن طول الضلع الثالث =
- د $\triangle$ أ ب ج فيه: و $\angle$ أ = 100° فإن أكبر أضلاعه طولاً هو
- هـ $\triangle$ أ ب ج فيه أ ب = ٣ سم، ب ج = ٥ سم، فإن أ ج $\geq$ ،]
- و أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية هو

١٢ في الشكل المقابل:



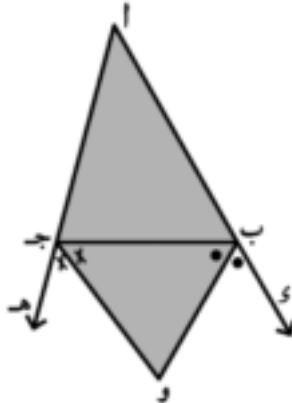
- أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = ٦ سم، ب ج = ٤ سم،
- ج د = ٧ سم، د أ = ١ سم
- برهن أن:
- و $\angle$ ب ج د $<$ و $\angle$ ب أ د

١٣ في الشكل المقابل:



- أ ب ج د مثلث، ب د ينصف $\angle$ ب، ب د $\cap$ أ ج = {د}،
- د هـ // ج ب ويقطع أ ب في هـ
- برهن أن: أ ب $<$ أ د

١٤ في الشكل المقابل:



- أ $\triangle$ أ ب ج فيه أ ب $<$ أ ج، د $\in$ أ ب، هـ $\in$ أ ج
- ب د ينصف $\angle$ ب، د ب ج، ج د ينصف $\angle$ ب ج د
- ب د $\cap$ ج د = {و}
- برهن أن:
- أ و $\angle$ ب ج د $<$ و $\angle$ ب ج و
- ب ج و $<$ ب و

نماذج امتحانات الجبر والإحصاء

النموذج الأول

[١] أكمل ما يأتي :

- (١) مجموعة حل المعادلة $(3 + \sqrt{s})(\sqrt{s} + 1) = 0$ هي (س $\exists$ ج)
 (٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها هو ١٥ فإن
 فإن س =

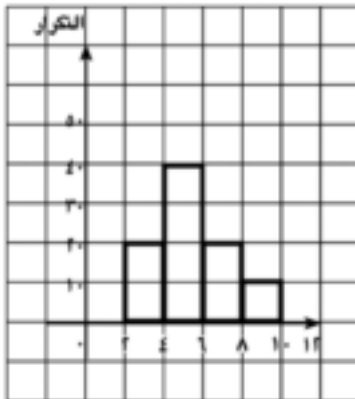
$$(٣) \{ -1, 2, 2, - \} \cup \{ 0, 2, - \} = \dots\dots\dots$$

(٤) المكعب الذي حجمه ٨ سم^٣ يكون مجموع أطوال أحرافه = سم

(٥) المعكوس الضربي للعدد $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} = \dots\dots\dots$ في أبسط صورة

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كان نصف قطر كرة = ٦ سم فإن حجمها يساوي :
 (أ) $\frac{4}{3}\pi 6^3$ سم^٣ (ب) $\frac{4}{3}\pi 36$ سم^٣ (ج) $\frac{4}{3}\pi 72$ سم^٣ (د) $\frac{4}{3}\pi 288$ سم^٣
 (٢) إذا كانت النقطتان (١، ٢) تحقق العلاقة س + ص = ٥ فإن ٢ =
 (أ) ١ (ب) -٤ (ج) -٤ (د) ٥
 (٣) $\sqrt[3]{(2\sqrt[3]{2})^2} = \dots\dots\dots$ (أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ٤٠
 (٤) الوسيط لمجموعة من القيم ٣٤، ٢٣، ٢٥، ٤٠، ٢٢، ٤ هو :
 (أ) ٢ (ب) ٢٢ (ج) ٢٣ (د) ٢٤
 (٥) إذا كان الوسط الحسابي للقيم ٢٧، ٨، ١٦، ٢٤، ٦، ك هو ١٤ فإن ك تساوي :
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٢٧ (د) ٨٤



(٦) في الشكل المقابل : قيمة المتوال =

$$(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 10$$

[٣] (أ) أوجد قيمة : $\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

$$(ب) إذا كان س = $\frac{3}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}}$ ، ص = $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}$$$

اثبت أن س، ص عدداً مترافقان

[٤] (أ) ارسم بيانياً العلاقة الخطية ص = ٢ - س

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{1}{6} + س > 1 + س > \frac{س + 4}{2}$ في ح ومثلها على خط الأعداد .

- [٥] (أ) اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $2\sqrt{4}$ سم وارتفاعها ٩ سم . اوجد حجمها بدلالة π . وإذا كان حجمها يساوى حجم كرة فاوجد طول نصف قطر الكرة
- (ب) اوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعة	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

النموذج الثاني

[١] اكمل ما يأتي:

- (١) المعكوس الجمعي للعدد $3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$ هو
- (٢) $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}) = \dots\dots\dots$
- (٣) مرافق العدد $\frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ هو
- (٤) إذا كان حجم كرة $= \frac{9}{4}\pi$ سم^٣ فإن طول قطرها =
- (٥) $\{3, 4\} - \{3, 5\} = \dots\dots\dots$

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كان حجم مكعب $= 27$ سم^٣ فإن مساحة أحد أوجهه يساوى :
- (أ) ٣ سم^٢ (ب) ٩ سم^٢ (ج) ٣٦ سم^٢ (د) ٥٤ سم^٢
- (٢) إذا كان المتوالى لمجموعة من القيم ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٣ ، ٢ ، ٤ فإن $S =$
- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨
- (٣) إذا كان الوسط الحسابي للقيم ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ ، ١ - ك ، ١٨ فإن ك =
- (أ) ١ (ب) ٧ (ج) ٢٩ (د) ٩٠
- (٤) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨ فإن مركزها هو :
- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨
- (٥) اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها يساوى ٣ ، ارتفاعها يساوى طول قطرها ، يكون حجمها =
- (أ) π م^٣ (ب) π م^٢ (ج) 2π م^٢ (د) 2π م^٣
- (٦) مجموعة حل المعادلة $S(1 - S) = 0$ ، صفر ، $S \in$ ح هي
- (أ) [صفر] (ب) [١] (ج) [١-] (د) [١ ، ١- ، ٠]

[٢] (٢) اختصر لأبسط صورة : $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+5\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5\sqrt{3}}$

(٣) اثبت ان : $54\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 128\sqrt{2} = \text{صفر}$

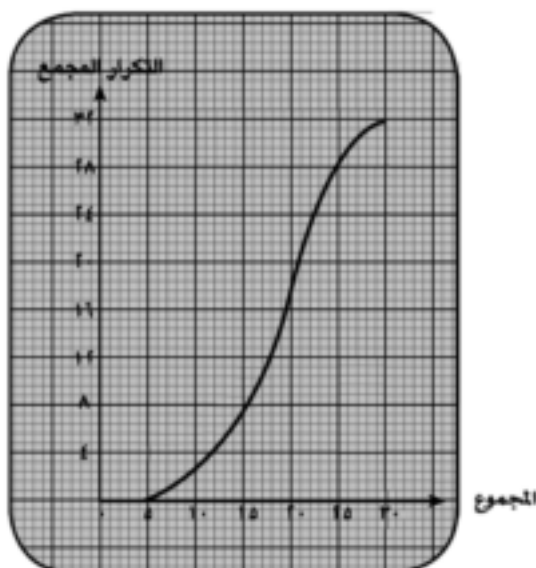
[٤] (٢) اوجد مجموعة حل المتباينة : $-2 < 3+5 < 10$ في ح مع تمثيل فترة الحل على خط الأعداد .

(٣) إذا كانت $3\sqrt{2}+2\sqrt{3} = 5$ فأوجد قيمة : $5-2\sqrt{3}+1$

[٥] (أ) الشكل المقابل يمثل درجات ٣٢ طالبا في أحد الاختبارات

أكمل:

الدرجة الوسيطة =



(٣) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكرار .

المجموعة	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

نموذج الفصل الأول للطلاب المدمجين

السؤال الأول:

أكمل العبارات التالية لتصبح صحيحة

- (١) مرافق العدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ هو.....
 (٢) $\sqrt{18} + \sqrt{54} - \sqrt{3} = \dots\dots\dots$
 (٣) المتوال لمجموعة القيم ٣، ٥، ٣، ٤، ٣، هو.....
 (٤) الوسيط لمجموعة من القيم ٢، ٣، ٥، ٧، ٩ هو.....
 (٥) مجموعة حل المعادلة $x^2 + 9 = 0$ صفر في ح هي.....

السؤال الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة

- (١) الوسط الحسابي لمجموعة القيم ٩، ٦، ٥، ١٤، ١ يساوي.....
 (أ) ٧ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٩
 (٢) أبسط صورة للمقدار $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ هو.....
 (أ) $\sqrt{3}$ (ب) ١ (ج) $\sqrt{2}$ (د) $2\sqrt{3}$
 (٣) المعكوس الجمعي للعدد $-\sqrt{5}$ هو.....
 (أ) $\sqrt{5}$ (ب) ٥ (ج) $\sqrt{2}$ (د) ٥-
 (٤) $\{5, 3\} - \{5, 3\} = \dots\dots\dots$
 (أ) $\{5, 3\}$ (ب) $\{5, 3\}$ (ج) $\emptyset$ (د) $\{5, 3\}$
 (٥) مكعب حجمه ٦٤ سم^٣ فإن طول حرفه.....سم
 (أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ٦٤

السؤال الثالث:

اكتب أمام العبارة في العمود الثاني رقم الجملة المناسبة لها من العمود الأول

- (١) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 25 = 0$ في ح هو....
 () (٢، ٠)
 (٢) $\dots\dots\dots = [2, 0] \cap [2, 3-]$
 () ٧
 (٣) إذا كان ترتيب الوسيط هو الرابع فإن عدد القيم هو.....
 () $\{5, -5\}$
 (٤) $\sqrt{3}$ هو عدد.....
 () $\leftarrow \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ 3 & 7 \end{array} \rightarrow$
 (٥) مجموعة حل المتباينة $3 \geq x \geq 7$ هي.....
 () غير نسبي

(على خط الأعداد)

السؤال الرابع:

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة

- () (١) الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = مجموع القيم ÷ عددها
 () (٢) إذا كان $\sqrt{7} - \sqrt{13} = \sqrt{7} + \sqrt{13}$ ، فإن $\sqrt{7} + \sqrt{13} = \sqrt{7} + \sqrt{13}$ متوافقان
 () (٣) العدد غير النسبي $\sqrt{7}$ يقع بين ٢ ، ٣
 () (٤) $\sqrt{3} \sqrt{7} = \sqrt{21} \sqrt{2} - \sqrt{5} \sqrt{7}$
 () (٥) أبسط صورة للمقدار $\frac{1}{\sqrt{5}}$ هو $\frac{\sqrt{5}}{5}$

السؤال الخامس:

أولاً:

إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨ فإن مركزها = $\frac{\dots + \dots}{2} = \dots$

ثانياً الجدول الآتي لإيجاد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

المجموعات	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	م × ك
-٥	١٠	٧	$70 = 7 \times 10$
-١٥	٢٠	١٠	$\dots = 10 \times 20$
-٢٥			$\dots = 12 \times \dots$
-٣٥			$\dots = 13 \times \dots$
-٤٥			$\dots = 8 \times \dots$
المجموع		٥٠	

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (ك} \times \text{م)}}{\text{مجموع (ك)}} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

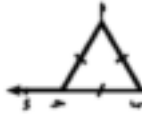
نماذج امتحانات الهندسة

النموذج الأول

[١] أكمل ما يأتي :

- (١) أكبر اضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو
- (٢) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث ٢ سم ، ٧ سم فإن : > طول الضلع الثالث >
- (٣) إذا اختلفا قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس
- (٤) إذا كان متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن
- (٥) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوي الساقين = 60° كان المثلث

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



- (١) $\Delta a, b, c$ متساوي الأضلاع $\cup$ ($\hat{a} = \hat{b}$) =
- (٢) 60° (ب) 45° (د)
- (٣) 135° (د) 120° (ج)
- (٤) في المثلث a, b, c القائم الزاوية في b ، إذا كان $a = 20$ سم فإن طول المتوسط المرسوم من b =
- (٥) 10 سم (د) 8 سم (ب) 6 سم (ج) 5 سم (س)
- (٦) $70^\circ = (\hat{c})$ ، $70^\circ = (\hat{a})$ ، فإن c سم
- (٧) $(\hat{a}) < (\hat{b}) > (\hat{c}) =$ (د) (س) ضعف
- (٨) الأطوال التي تصلح أن تكون أضلاع مثلث هي :
- (٩) $5, 3, 0$ (د) $5, 3, 3$ (ب) $6, 3, 3$ (ج) $7, 3, 3$ (س)
- (١٠) المثلث الذي فيه قياسا زاويتين 42° ، 69° يكون :
- (١١) متساوي الساقين (د) متساوي الأضلاع (ب) مختلف الأضلاع (ج) قائم الزاوية (س)



(س) ١٢

(ج) ٩

(ب) ٦

(د) ٣

(١٢) في الشكل المقابل : إذا كان

$$(\hat{a}) = (\hat{b}) \cup (\hat{c}) =$$

فإن $a =$ سم

[٣] (١) أكمل: ΔABC فيه $AB < AC$ فإن:

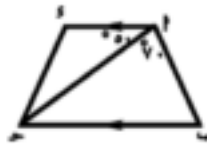
(أ) $\angle C > \angle B$ (ب) $\angle C < \angle B$

(ج) في الشكل المقابل:



(أ) $\angle C > \angle B$ ، $AB = AC$ ، ΔABC متساوي الأضلاع أوجد $\angle C$.

(ب) في الشكل المقابل:

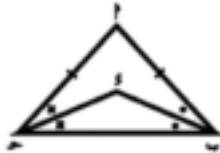


(أ) $\angle C > \angle B$ ، $AB \parallel AC$ ، $\angle C = 70^\circ$

(ب) $\angle C > \angle B$ ، أثبت أن $AB < AC$

[٤] (١) برهن أن: زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

(ب) في الشكل المقابل:



(أ) $AB = AC$ ، $\overline{AD}$ ينصف $\angle A$ ، $\overline{AD}$ ينصف $\angle C$

أثبت أن: ΔABC متساوي الساقين

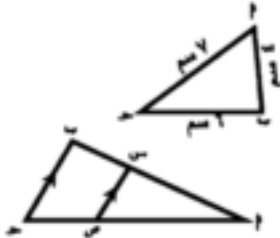
[٥] (١) في الشكل المقابل:

رتب زوايا ΔABC ترتيباً تنازلياً .

(ب) في الشكل المقابل:

$AB < AC$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

أثبت أن: $\angle A < \angle C$



النموذج الثاني

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المثلث الذي له ثلاثة محاور تماثل هو مثلث :

(أ) مختلف الأضلاع (ب) متساوي الساقين (ج) قائم الزاوية (د) متساوي الأضلاع

(٢) مجموع طولي أي ضلعين في مثلث طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (ج) يساوي (د) ضعف

(٣) مثلث متساوي الساقين طولاً ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ٣ (د) ١٢

(٤) إذا كان $\triangle ABC$ فيه $\angle C = 130^\circ$ فإن أكبر أضلاعه طولا هو :

(أ) $\overline{AB}$ (ب) $\overline{BC}$ (ج) $\overline{AC}$ (د) متوسطه

(٥) $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $\angle C = 100^\circ$ ، فإن $\angle A =$ =

(أ) 100° (ب) 80° (ج) 60° (د) 40°

(٦) في الشكل المقابل SM = =

(أ) 100° (ب) 140° (ج) 180° (د) 280°



[٢] أكمل ما يأتي :

(١) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية تساوي 45° كان المثلث

(٢) طول أي ضلع في مثلث مجموع طولي الضلعين الآخرين.

(٣) إذا كان $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ فإن $\triangle ABC$ =

(٤) في $\triangle ABC$ إذا كان $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$ فإن $\angle C$ =

(٥) محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم من منتصفها.

[٣] (٦) في المثلث ABC فيه $\angle A = 70^\circ$ ، $\angle B = 50^\circ$ ، $\angle C = 60^\circ$ سم .

رتب تصاعديا قياسات زواياه .

(ب) في الشكل المقابل :

$\triangle ABC$ قائم الزاوية في C ، $\angle A = 30^\circ$ ،

S منتصف $\overline{AB}$ ، H منتصف $\overline{BC}$ ،

$\angle C = 90^\circ$ سم .

أوجد طول كل من $\overline{SH}$ ، $\overline{CH}$ ، $\overline{AH}$

[٤] (٦) في الشكل المقابل :

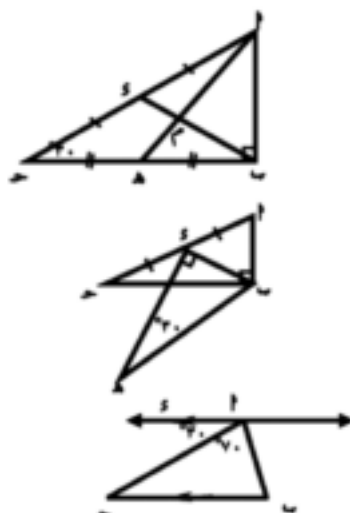
$\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle C = 60^\circ$ ،

S منتصف $\overline{AB}$ ، أثبت أن : $\overline{CS} = \overline{AS}$

(ب) في الشكل المقابل :

$\angle A = 70^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$ ، $\angle C = 70^\circ$ ،

$\angle A = 30^\circ$ ، أثبت أن : $\angle C < \angle B$



[٥] (٦) إذا اختلفا قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها

(ب) في الشكل المقابل :

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{AC}$ ينصف $\angle A$ ،

برهن أن : $\angle C < \angle B$



نموذج الفصل الأول للطلاب المدمجين

السؤال الأول:

أكمل العبارات التالية:

- (١) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة : من جهة القاعدة
- (٢) في المثلث القائم الزاوية طول المتوسط الخارج من رأس القائمة =
- (٣) زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين.....
- (٤) $\triangle$ أب ج فيه $\angle ب = ٧٠^\circ$ ، و $\angle ج = ٥٠^\circ$ فإن أ ج أب
- (٥) متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس يكون على القاعدة

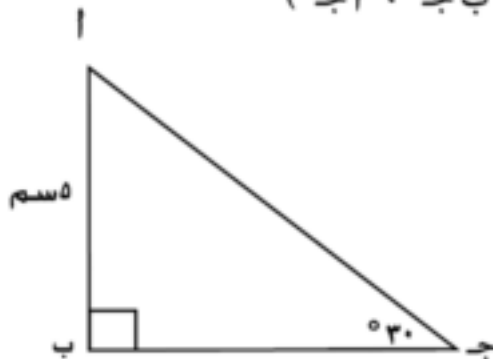
السؤال الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

- (١) إذا كان $\triangle$ أب ج متساوي الأضلاع فإن $\angle ب =$
(٩٠° ، ٧٠° ، ٦٠° ، ٣٠°)
- (٢) طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم = الوتر
(٢ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$)
- (٣) إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوي الساقين ٨٠° فإن قياس إحدى زاويتي قاعدته =
(٥٠° ، ٣٠° ، ٤٠° ، ٦٠°)
- (٤) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين
(١، ٢، ٣، صفر)
- (٥) $\triangle$ أب ج فيه $\angle ا = ٥٠^\circ$ ، و $\angle ب = ٦٠^\circ$ فإن أكبر الأضلاع طولاً
($\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ج}$ ، $\overline{أ ج}$)

السؤال الثالث:

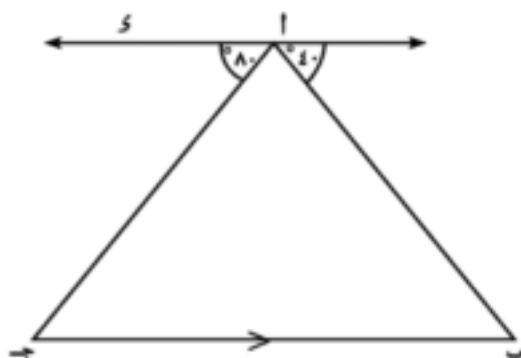
في الشكل المقابل أكمل ما يلي:



- أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، و $\angle ج = ٣٠^\circ$
 أ ب = ٥ سم أوجد طول أ ج
 $\therefore$ و $\angle ب =$ ، و $\angle ج =$
 $\therefore$ أ ب = $\frac{1}{4} \times$
 $\therefore$ أ ج = سم

السؤال الرابع:

أ - $\triangle$ أ ب ج فيه $\angle$ أ = 40° ، و $\angle$ ب = 75° و $\angle$ ج = 65°
رتب أطوال أضلاع المثلث تنازلياً



ب - هي الشكل المقابل

أو // ب ج

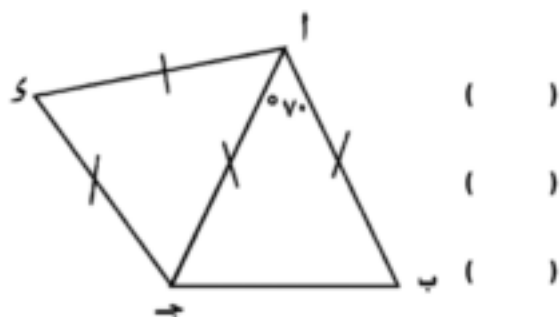
أكمل:

١) و $\angle$ ب =
٢) الضلع هو أطول أضلاع $\triangle$ أ ب ج

السؤال الخامس: من الشكل المقابل

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة

أ ب = أ ج = ج د = أ د = ١٠ سم و $\angle$ ب أ ج = 70°



١) و $\angle$ ب = 55° ()

٢) و $\angle$ د = 70° ()

٣) و $\angle$ ب ج د = 120° ()

٤) أ ب + أ د = ٢٠ سم ()

٥) أ ب + ب ج = ب ج + ج د ()

انتهت الأسئلة

المواصفات الفنية:

رقم الكتاب	مقاس الكتاب	طبع اللون	طبع الغلاف	ورق اللون	ورق الغلاف	عدد الصفحات بالغلاف
٢٢٨/١٠/٢/١١/٢/٢٠	$(27 \times 37) \frac{1}{8}$ سم	ألون ألون	ألون	٧٠ جم أبيض	١٨٠ جم كوشبة	١٧٦ صفحة

<http://elearning.moe.gov.eg>