جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

# الرياضيات التطبيقية

## الميكانيكا

٢٠٢٤-٢٠٢٥

كتاب الطالب

الصف الثالث الثانوي

## تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عبد الشافى فهمى عبادة — أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ — أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

## مراجعة وتعديل

أ/ ماجد محمد حسن — أ/ شريف عاطف البرهامي

أ/ عثمان مصطفى عثمان — د/ مدحت عطية شعراوي

أ.د/ جلال محروس معتمد — أ/ عمرو فاروق محمود

د/ محمد محي عبد السلام

## إشراف علمي

أ/ منال عزقول

مستشار الرياضيات

## إشراف تربوي

د/ أكرم حسن

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج



الطبعة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيداع ٨٧٠٧ / ٢٠١٦

الرقم الدولى 6 - 035 - 706 - 977 - 978

# المقدمة

## بسم الله الرحمن الرحيم

**يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:**

**يشهد عالم اليوم تطورًا علميًّا مستمرًا ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقًا من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.**

**ونحن نقدم هذا الكتاب « التفاضل والتكامل» للصف الثالث الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .**

### وفى ضوء ما سبق روعى فى كتاب « الميكانيكا » مايلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخططٌ تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضِّح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدِّم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.

**وأخيرًا .. نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خيرلأولادنا ، ولمصرنا العزيزة.**

**والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل**

# المحتويات

## اولا : الاستاتيكا


متطلبات الاستاتيكا ........ ٢

### متطالوحدة الأولى: العزوم

١ - ١ عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الابعاد ........ ١٠

### الوحدة الثانية: القوى المستوية

٢ - ١ محصلة القوى المتوازية المستوية ........ ٢٢

٢ - ٢ اتزان مجموعة من القوى المستوية ........ ٣٢

### الوحدة الثالثة: الازدواجات

٣ - ١ الازدواجات ........ ٤٢

٣ - ٢ الازدواج المحصل ........ ٥٠


## ثانيًا: الديناميكا


متطلبات الديناميكا ........ ٦٠

### الوحدة الأولى: الحركة فى خط مستقيم

١ - ١ تفاضل وتكامل الدوال المتجهة ........ ٧٢

### الوحدة الثانية: تطبيقات على قوانين نيوتن للحركة

٢ - ١ حركة الأجسام متغيرة الكتلة أو العجلة ........ ٨٨

٢ - ٢ حركة الأجسام المتصلة ........ ٩٥

٢ - ٣ الدفع ........ ١١٣

### الوحدة الثالثة: الشغل ، الطاقة ، القدرة

٣ - ١ الشغل ........ ١٢٤

٣ - ٢ الطاقة ........ ١٣٦

٣ - ٣ القدرة ........ ١٥٠

# متطلبات قبلية
# فى
# الإستاتيكا


## الصف الثالث الثانوي

لا يمتحن فيها الطالب

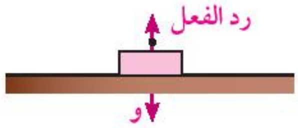
## ١ السطوح الملساء والسطوح الخشنة :

*Smooth Surfaces and Rough Surfaces*

يفسر العلماء منشأ قوى الاحتكاك بين الأجسام إلى وجود نتوءات وتجويفات مجهرية فى سطوح الأجسام مهما بلغت نعومتها وينتج عن تداخل هذه النتوءات والتجويفات لكل من السطحين المتلامسين ما يسمى بقوة الاحتكاك ، وبالتالى نجد مقاومة عند محاولة تحريك أحد السطحين على السطح الآخر ، ويعتبر معامل الاحتكاك مقياسا لدرجة خشونة الأسطح، فإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك ازدادت الخشونة والعكس صحيح ، و إذا ساوى معامل الاحتكاك الصفر انعدمت قوى الاحتكاك تماماً.

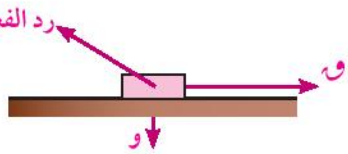
يتوقف رد الفعل على طبيعة الجسمين المتلامسين كما يتوقف على القوى المؤثرة الأخرى على الجسم، ففى حالة السطوح الملساء يكون رد الفعل عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.

أما إذا كان الجسمان خشنين فيكون لرد الفعل مركبة فى اتجاه سطح التماس تسمى بالاحتكاك السكونى ، كما يكون لرد الفعل مركبة عمودية على سطح التماس تسمى برد الفعل العمودى.




رد الفعل فى حالة السطوح الملساء

شكل (١)




رد الفعل فى حالة السطوح الخشنة

شكل (٢)

## ٢ خواص قوة الاحتكاك السكونى:

**(١)** تعمل قوة الاحتكاك السكونى (ع) على معاكسة الانزلاق فتكون فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الانزلاق فيه.

**(٢)** تكون قوة الاحتكاك السكونى (ع) مساوية فقط للقوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم ولايمكن ان تزيد عن هذه القوة وتظل مساوية لهذه القوة طالما الجسم متزنًا.

**(٣)** وتتزايد قوة الاحتكاك السكونى (ع) كلما تزايدت القوة المماسية التى تعمل على إحداث الحركة حتى تصل إلى حد لاتتعداه وعند ذلك يكون الجسم على وشك الانزلاق ويسمى الاحتكاك فى هذه الحالة بالاحتكاك السكونى النهائى ويرمز له بالرمز ($ع_س$).

**(٤)** النسبة بين الاحتكاك السكونى النهائى ورد الفعل العمودى ثابتة وتتوقف هذه النسبة على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما او كتلتهما وتسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكونى ويرمز لها بالرمز $م_س$.

أى أن $م_س = \frac{ع_س}{ر}$ حيث $ع_س$ الاحتكاك السكونى النهائى.

## ٣ قوة الاحتكاك الحركى

*Friction Kinetic*

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى ($ع_ك$) يكون اتجاهه عكس اتجاه حركته، وتعطى قيمتها بالعلاقة: $ع_ك = م_ك ر$ حيث:

حيث $م_ك$ هو معامل الاحتكاك الحركى Coefficient of Kinetic Friction ، $ر$ رد الفعل العمودى

أى أن: قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودية .

ومن ذلك يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركى على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى وقوة رد الفعل العمودى.

أى أن: $م_ك = \frac{ع_ك}{ر}$ حيث $ع_ك$ قوة الاحتكاك الحركى

## ٤ رد الفعل المحصل ($ر'$)

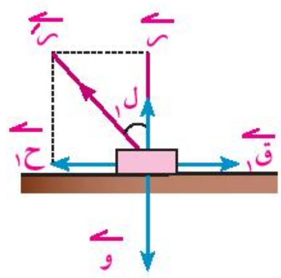
*Resultant Reaction*

في حالة السطوح الخشنة فإن رد الفعل المحصل يكون مائلاً على سطح التماس حيث أنه يعتبر محصلة رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك السكونى . ويسمى رد الفعل المحصل أو رد الفعل الكلي.

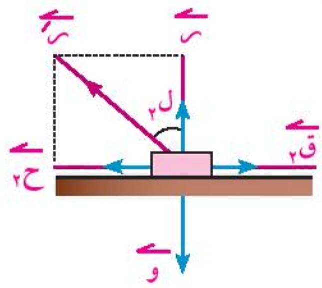
**تعريف:** رد الفعل المحصل ($\overleftarrow{ر'}$) هو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك السكونى $\overleftarrow{ع}$

## ٥ زاوية الاحتكاك *Angle of Friction*

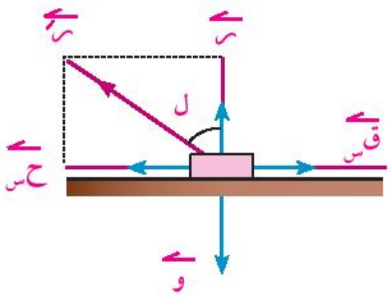
نلاحظ أن قياس الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل تتزايد كلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك (بفرض ثبوت مقدار قوة رد الفعل العمودي) وأن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى ل عندما يصبح الاحتكاك نهائياً . وتسمى الزاوية في هذه الحالة (زاوية الاحتكاك) والأشكال التالية توضح ذلك.



شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)

من شكل (٣) ، شكل (٤) نجد أن: متجه رد الفعل المحصل $\overleftarrow{\text{ر}'}$ هو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{\text{ر}}$ وقوة الاحتكاك $\overleftarrow{\text{ح}}$ أى أن: $\text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ح}^2}$

ومن شكل (٥) عندما يكون الاحتكاك نهائيًا:

$\therefore \text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ح}_\text{س}^2}$ $\qquad \because \text{ح}_\text{س} = \text{م}_\text{س}\,\text{ر}$

$\therefore \text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ر}^2\,\text{م}_\text{س}^2}$

$\therefore \text{ر}' = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}_\text{س}^2}$

## ٦ العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك :

فى حالة الاحتكاك النهائى من شكل (٨) :

نجد أن : $\text{ظا ل} = \dfrac{\text{ح}_\text{س}}{\text{ر}}$ ولكن $\dfrac{\text{ح}_\text{س}}{\text{ر}} = \text{م}_\text{س}$

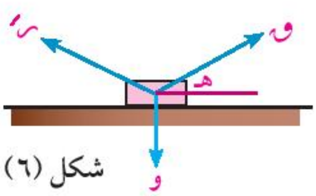
$\boxed{\text{أى أن : } \text{م}_\text{س} = \text{ظا ل}}$

أى أنه عندما يكون الاحتكاك نهائيا فإن معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الاحتكاك

تفكير ناقد: قارن بين قياسى زاويتي الاحتكاك السكونى والاحتكاك الحركى.

## ٧ اتزان جسم على مستوى أفقى خشن *Equilibrium of a body on a rough horizantal plane*

إذا وضع جسم وزنه و على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ق تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم فى وضع التوازن يكون متزنا تحت تأثير القوى :



شكل (٦)

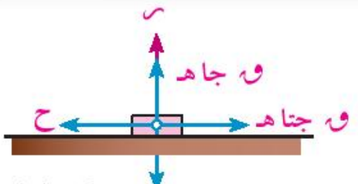
١) قوة الوزن $\overleftarrow{\text{و}}$ رأسيا لأسفل ومقدارها و

٢) قوة رد الفعل المحصل $\overleftarrow{\text{ر}'}$ ومقدارها ر\

٣) القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ومقدارها ق والشكل (٦) يوضح ذلك .

وبتحليل القوة ق إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه فإن مقدارهما يكون ق جتا هـ ، ق جا هـ .

وبتحليل ر إلى مركبتين متعامدين هما رد الفعل العمودى ر ومقداره ر ، وقوة الاحتكاك ح ومقدارها ح والشكل (٧) يوضح ذلك .



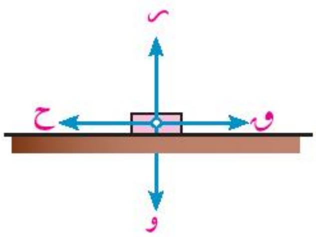
شكل (٧)

فتكون معادلتا اتزان الجسم هما : $\boxed{ح = ق \text{ جتا هـ}}$ ، $\boxed{ر + ق \text{ جا هـ} = و}$

## مثال
### القوة المؤثرة على جسم

(١) يدفع كريم صندوقا ممتلئا بالكتب إلى سيارته على طريق أفقى ، فإذا كان وزن الصندوق والكتب ١٢٤ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكونى بين الطريق والصندوق ٠,٤٥ فما مقدار القوة الأفقية التى يدفع بها كريم الصندوق حتى يكون على وشك الحركة.

**الحل**



شكل (٨)

بإعتبار أن و = ١٢٤ نيوتن ، $م_{س}$ = ٠,٤٥ .

من شروط اتزان جسم على مستوى أفقى فإن :

ر = و      أى أن : ر = ١٢٤      (١)

ق = $م_{س}$ ر      ومن (١) تكون : ق = ٠,٤٥ × ١٢٤ = ٥٥,٨ نيوتن

## حاول أن تحل

(١) وضعت كتله وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى افقى خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة

(أ) اذا كانت ق = ٨ نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والمستوى

(ب) اذا كان $م_{س}$ = ٠,٤ فأوجد ق

## مثال
### زاوية الاحتكاك

(٢) وضع جسم وزنه١٢ ث كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٤ ، ٤ ث كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين واقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم، فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك.

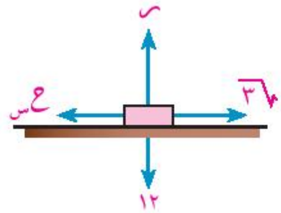
**الحل**

∵ **الجسم على وشك الحركة**

الجسم فى حالة اتزان نهائى

∴ ر = و

∴ ر = ١٢ ث كجم

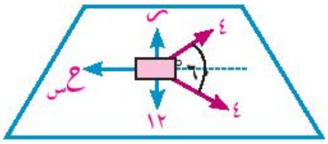



شكل (٩)

، محصلة القوتين ٤، ٤ ث كجم = قوة الاحتكاك النهائى

∵ $ق = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتا ى}}$

∴ $ق = \sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٤ \times ٤ \times \frac{١}{٢}} = ٤\sqrt{٣}$ ث كجم




شكل (١٠)

∵ $م_س$ ر = ق  ∴ ١٢ $م_س$ = ٤ $\sqrt{٣}$

∴ $م_س = \frac{٤\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$  ∵ $م_س$ = ظا ل  ∴ ظا ل = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$  ∴ ل = ٣٠°

## ٨ اتزان جسم على مستوى مائل خشن

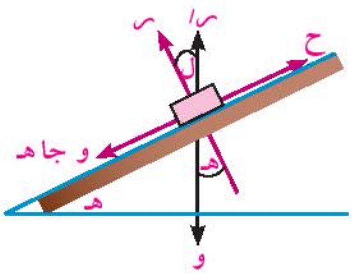
*Equilibrium of a body on an inclined horizantal plane*

نعتبر أن جسما متزنا على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ .

يتزن الجسم على المستوى تحت تأثير قوتين :

**(١)** قوة وزنه $\overleftarrow{و}$ وتعمل رأسياً لأسفل وليكن مقدارها (و)

**(٢)** قوة رد الفعل المحصل وليكن مقدارها ( ر َ)




شكل (١١)

**ومن شروط الاتزان نجد أن :**

**قوة رد الفعل المحصل تعمل رأسياً لأعلى .** ويكون : ر َ = و ............ (١)

يمكن الان تعيين قوتى الاحتكاك ورد الفعل العمودى باعتبارهما مركبتى قوة رد الفعل المحصل فى اتجاهين أحدهما يوازى المستوى والآخر عمودى عليه كما فى الشكل المقابل .

**قوة الاحتكاك .** ح = و جا هـ ............ (٢)

وتعمل هذه القوة عكس اتجاه الحركة المحتملة ، أى أنها توازى خط أكبر ميل وتكون موجهة لأعلى المستوى .

**قوة رد الفعل العمودى .** $ر = و$ جتا هـ ..................................(٣)

**العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك السكونى وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .**

إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

**البرهان :**

∵ الاحتكاك نهائى

∴ قوة رد الفعل المحصل تصنع مع العمودى على المستوى زاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك السكونى وليكن قياسها (ل) .

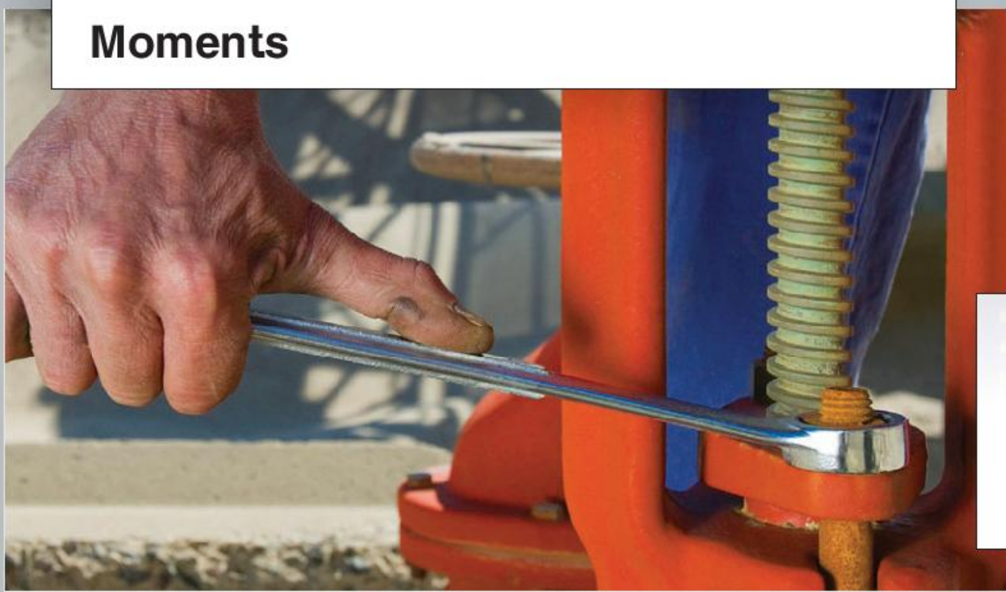
ومن الشكل السابق نجد أن : هـ = ل

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك كالآتى :

$\boxed{\text{ظا ل} = م_{س}}$ أو $\boxed{م_{س} = \text{ظا هـ}}$

# العزوم

# Moments



الوحدة

١

## مقدمة الوحدة

اعتمد الإنسان منذ القدم على فكرة الروافع لتمكنه من حمل ونقل الاشياء من مكان لآخر. والجهاز الحركى للإنسان يشبه إلى حد كبير الفكرة التى تقوم عليها الروافع. فالعظام هى الأجسام الصلبة المادية التى تؤثر عليها القوة العضلية المرتبطة بها لتدور حول نقطة ثابتة (مركز). وهذا يحتم علينا فهم التأثير الدورانى للقوة (عزم القوة). وفى هذه الوحدة سوف نلقى الضوء على مفهوم عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى .

## أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يوجد معيار واتجاه عزم قوة بالنسبة لنقطة.
- يوجد عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة واقعه فى مستويها.
- يتعرف النظرية العامة للعزوم «إذا كانت لمجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم متماسك محصلة فإن المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة».
- يحل تطبيقات متنوعة على العزوم.

## المصطلحات الأساسية

| | |
|---|---|
| عزم | *Moment* |
| مركز العزم | *Moment centre* |
| محور العزم | *Moment axis* |
| ذراع العزم | *Moment arm* |
| دوران | *Rotation* |
| محصلة | *Resultant* |
| مركبة العزم | *Moment component* |
| عكس اتجاه دوران عقارب الساعة | *Anti clockwise* |
| فى اتجاه دوران عقارب الساعة | *Clockwise* |
| القياس الجبرى للعزم | *Algebraic measure of the moment* |
| معيار العزم | *Norm of the moment* |

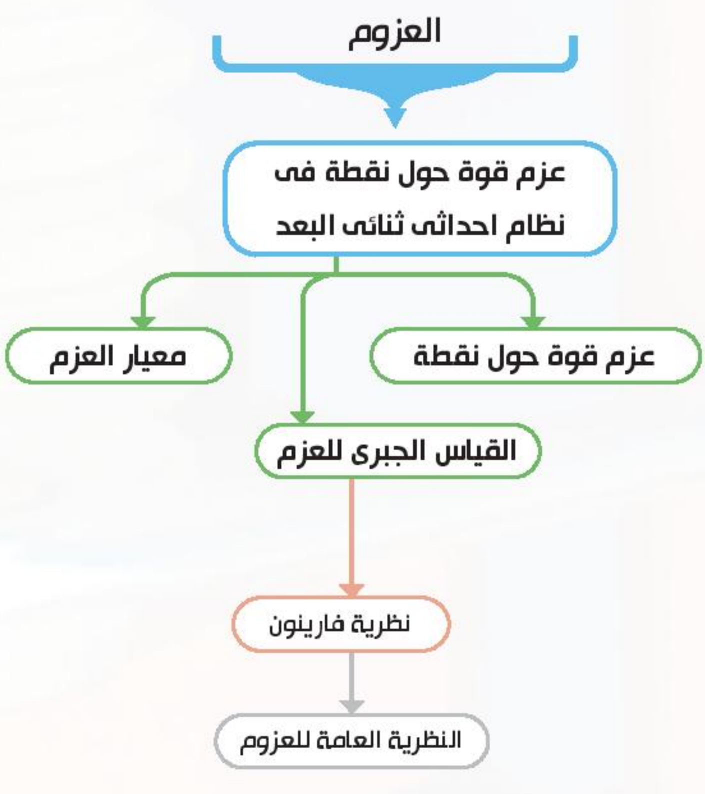
## دروس الوحدة

(١ - ١): عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الابعاد.

## الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مخطط تنظيمى للوحدة



# عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الأبعاد

**Moment of a force about a point in 2D-coordinate system**



**سوف تتعلم**

- عزم قوة بالنسبة لنقطة.
- عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة فى مستويها.

**المصطلحات الأساسية**

- عزم — *Moment*
- مركز العزم — *Moment centre*
- محور العزم — *Moment axis*
- ذراع العزم

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.

تعلمت سابقًا أن القوة قد تنتج من تأثير جسم طبيعى على جسم طبيعى آخر. وهذا التأثير ينتج عنه صور مختلفة (تأثير حركى - تأثير شكلى ...). فإذا تحرك الجسم من موضع إلى آخر فإن تأثير القوة هنا يكون تأثيرًا حركيًا انتقاليًا. وإذا تحرك الجسم حركة دورانية حول نقطة فإن تأثير القوة فى هذه الحالة يكون تأثيرًا حركيًا دورانيًا. وهنا نقول أن القوة قادرة على احداث دوران للجسم حول نقطة وهو ما يعرف بعزم القوة حول نقطة.

ويعتمد هذا التأثير الدورانى للقوة (العزم) على مقدار القوة وعلى بُعد خط عمل القوة عن هذه النقطة.

## فكر و ناقش


**(١)** **الشكل المقابل** يوضح طفلان على ارجوحه متزنة فى وضع أفقى.

أى الطفلين (**الأثقل** - **الأخف**) يكون أقرب إلى مركز الدوران.

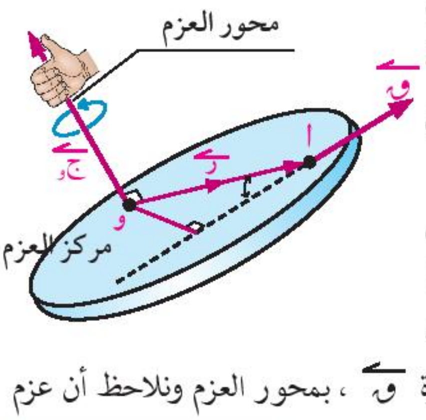
إذا أراد الطفل الأثقل أن يجعل الارجوحة تدور حيث يرتفع الطفل الأخف لاعلى. فما الذى يفعله؟


**(٢)** **الشكل المقابل** لید شخص يحاول أن يربط ماسورة. فإن انسب موضع للقوة ق لاحكام الربط هو .. (أ، ب، جـ)

## تعلم

### عزم قوة حول نقطة فى نظام احداثى متعامد ثنائى الابعاد

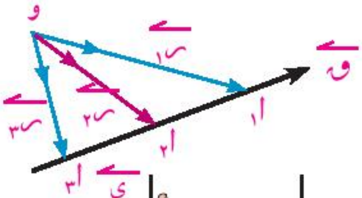
*Moment of a force about a point in 2D-coordinates system*



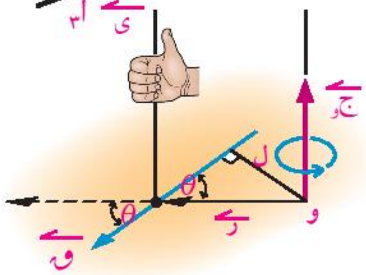

يعرف عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة و بأنه مقدره القوة على احداث دوران للجسم حول النقطة و. ويمكن حساب هذا التأثير الدورانى من العلاقة $\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

حيث $\overrightarrow{ر}$ متجه موضع نقطة ا على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة و. تسمى النقطة (و) مركز العزوم. ويسمى المستقيم المار بالنقطة (و) وعموديًا على المستوى الذى يحوى القوة $\overrightarrow{ق}$ ، بمحور العزم ونلاحظ أن عزم

القوة هو كمية متجهه. وطبقًا لقاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهى يكون اتجاه عزم القوة بالنسبة لنقطة و عموديًا على المستوى الذى يحوى القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ والنقطة و.




تفكير ناقد: هل يتوقف عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة و على موضع النقطة أ على خط عمل القوة؟




### (١) عزم قوة بالنسبة لنقطة

من تعريف الضرب الاتجاهى لمتجهين فإن

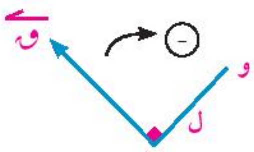
$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (\|\overleftarrow{\text{ر}}\| \; \|\overleftarrow{\text{ق}}\| \text{ جا } \theta) \; \overleftarrow{\text{ى}}$

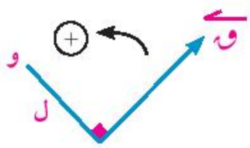
حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على مستوى $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$ بحيث يكون الدوران من $\overleftarrow{\text{ر}}$ إلى $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ $\theta$ هى قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$

وبفرض $\|\overleftarrow{\text{ق}}\| = \text{ق}$ ، $\|\overleftarrow{\text{ر}}\| \text{ جا } \theta = \text{ل}$

حيث ل طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ (ل يسمى ذراع العزم) فإن عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول نقطة و هو $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (\text{ق ل}) \; \overleftarrow{\text{ى}}$ (١)

### (٢) القياس الجبرى للعزم




وإذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل على الدوران حول و فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم موجبًا (متجه العزم فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$) وإذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل على الدوران حول و فى اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم سالبًا (متجه العزم فى اتجاه المتجه - $\overleftarrow{\text{ى}}$)


خط عمل القوة يمر بالنقطة و

$\therefore \text{ ج}_{\text{و}} = \text{صفر}$

### (٣) معيار العزم

ويكون معيار العزم هو $\|\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\| = \text{ق ل}$ (٢)

### (٤) عزم قوة حول نقطة تقع على خط عملها = $\overleftarrow{\text{صفر}}$

### (٥) وحدة قياس مقدار العزم

وحدة قياس مقدار العزم = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الطول

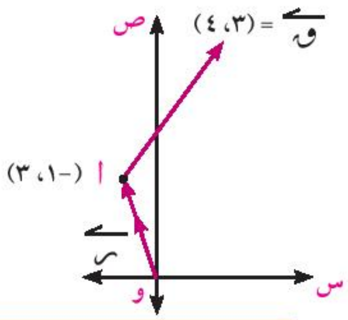
ومنها نيوتن.متر ، داين.سم ، ث كجم.متر ...

#### مثال

١ إذا كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٣\overleftarrow{\text{س}} + ٤\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (-١، ٣) من جسم أوجد:

أ) عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠)

ب) طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$




الحل

أ) $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{وأ}} = \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{و}}$

= (-١، ٣) - (٠، ٠) = (-١، ٣)

$\overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

$= (-١، ٣) \times (٣، ٤) = (-١ \times ٤ - ٣ \times ٣)\ \overleftarrow{\text{ع}}$

$= -١٣\ \overleftarrow{\text{ع}}$

**معيار العزم** = ١٣ وحدة عزم، القياس الجبرى لمتجه العزم = -١٣ وحدة عزم

تفسير الناتج: أى أن القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تحدث دورانًا للجسم حول نقطة و فى اتجاه دوران عقارب الساعة (اتجاه العزم فى اتجاه $-\overleftarrow{\text{ع}}$ )

ب) لايجاد طول العمود المرسوم من و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$

$\because \|\overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}}\| = \text{ق ل} \qquad \therefore \text{ل} = \frac{\|\overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}}\|}{\text{ق}} = \frac{١٣}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} = \frac{١٣}{٥}$ وحدة طول.

**حاول أن تحل**

١) إذا كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (٢، ٣) أوجد:

أ) عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١)

ب) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة.

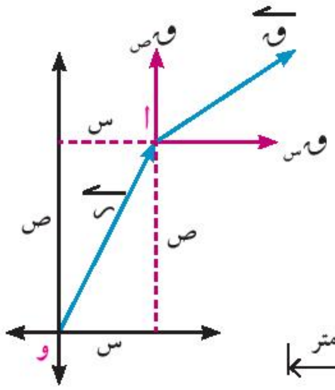
تفكير ناقد: إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة. فماذا يعنى ذلك؟

## تعلم

### مبدأ العزوم (نظرية فارينون) *Principle of moments (Varignons theorm)*

عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = \text{ق}_{\text{س}}\overleftarrow{\text{س}} + \text{ق}_{\text{ص}}\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\overleftarrow{\text{ر}} = (\text{س، ص})$ فإن




$\overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

$= (\text{س، ص}) \times (\text{ق}_{\text{س}}\text{، ق}_{\text{ص}})$

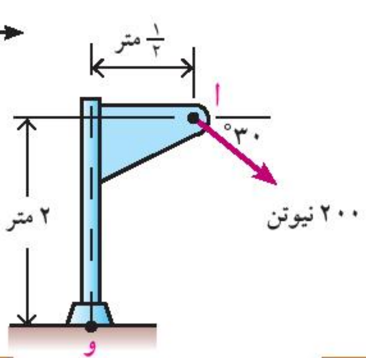
$= (\text{س ق}_{\text{ص}})\ \overleftarrow{\text{ع}} + (-\text{ص ق}_{\text{س}})\ \overleftarrow{\text{ع}}$

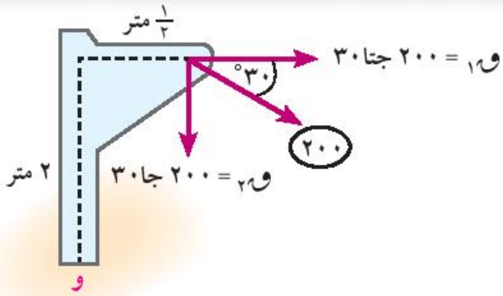
عزم $\text{ق}_{\text{ص}}$ حول و + عزم $\text{ق}_{\text{س}}$ حول و

**مثال**

٢) فى الشكل المقابل:

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطة و






**الحل الأول:**

نحلل القوة ٢٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$\text{ق}_1 = 200 \text{ جتا } 30 = 100\sqrt{3}$ نيوتن

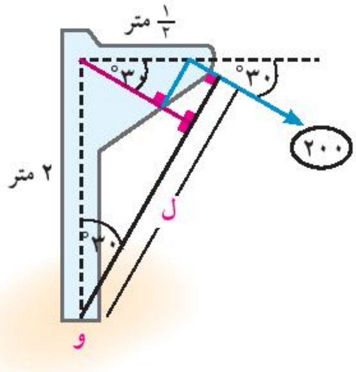
$\text{ق}_2 = 200 \text{ جا } 30 = 100$ نيوتن

وطبقًا لنظرية فارينون يكون

$\text{ج}_{\text{و}} = -\text{ق}_1 \times 2 - \text{ق}_2 \times \frac{1}{2}$

$= -100\sqrt{3} \times 2 - 100 \times \frac{1}{2}$

$= (-200\sqrt{3} - 50)$ نيوتن . متر




**الحل الثانى:**

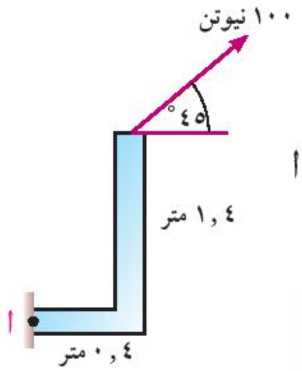
طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة = ل

حيث ل = ٢ حتا ٣٠ + $\frac{1}{2}$ جا ٣٠ = $(\sqrt{3} + \frac{1}{4})$ متر

∵ القوة تعمل على الدوران حول و فى اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ القياس الجبرى لعزم القوة يكون سالب

∴ $\text{ج}_{\text{و}} = -200 \times (\sqrt{3} + \frac{1}{4}) = (-200\sqrt{3} - 50)$ نيوتن . متر




**حاول أن تحل**

(٢) **فى الشكل المقابل:** احسب القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة أ

**نظرية**

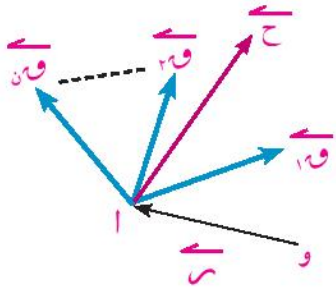
**مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها**

**البرهان**

بفرض $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ ، ....، $\overleftarrow{\text{ق}_{\text{ن}}}$ مجموعة محدودة ومتلاقية من القوى تؤثر فى نقطة أ

وبفرض أن النقطة المطلوب إيجاد العزوم عندها هى النقطة (و)

∴ $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{وأ}}$




**مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و**

$= \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}_2} + ... + \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}_{\text{ن}}}$

$= \overleftarrow{\text{ر}} \times (\overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} + ... + \overleftarrow{\text{ق}_{\text{ن}}})$

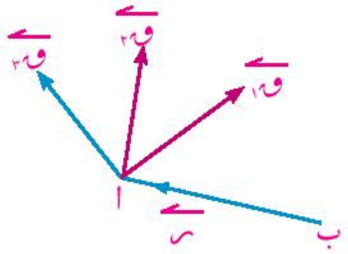
$= \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ح}}$

= عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها و

## مثال (عزوم القوى المستوية المتلاقية فى نقطة)

(٣) تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_١} = \overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = (١، ٣)$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٤\,\overleftarrow{س} + ٤\,\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (-٢، ١) أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب (٠، ٢) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب. ماذا تلاحظ؟

**الحل**




$$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (-٢، -١)$$

$$\overleftarrow{ج_١} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_١}$$

$$= (-٢، -١) \times (١، ٢)$$

$$= (-٤ + ١)\,\overleftarrow{ع} = -٣\,\overleftarrow{ع}$$

$$\overleftarrow{ج_٢} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_٢} = (-٢، -١) \times (١، ٣) = (-٦ + ١)\,\overleftarrow{ع} = -٥\,\overleftarrow{ع}$$

$$\overleftarrow{ج_٣} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_٣} = (-٢، -١) \times (٤، ٤) = (-٨ + ٤)\,\overleftarrow{ع} = -٤\,\overleftarrow{ع}$$

∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة ب

$$= \overleftarrow{ج_١} + \overleftarrow{ج_٢} + \overleftarrow{ج_٣}$$

$$= -٣\,\overleftarrow{ع} - ٥\,\overleftarrow{ع} - ٤\,\overleftarrow{ع} = -١٢\,\overleftarrow{ع}$$

**محصلة القوى:** $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = (١، ٢) + (١، ٣) + (٤، ٤) = (٦، ٩)$

∴ عزم المحصلة $= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}$

$$= (-٢، -١) \times (٦، ٩)$$

$$= (-١٨ + ٦)\,\overleftarrow{ع} = -١٢\,\overleftarrow{ع}$$

**نلاحظ أن** مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها.

## النظرية العامة للعزوم

**نظرية:** المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

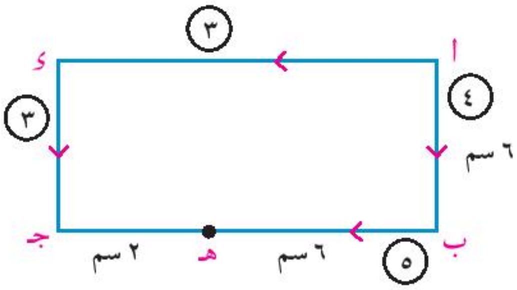
**حاول أن تحل**

(٣) تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_١} = ٣\,\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = -٢\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (-١، ٤). اوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب(١، ١) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب.

## مثال

٤ أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم اثرت قوى مقاديرها ٤، ٥، ٣، ٣ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ حيث هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب هـ = ٦سم. اثبت أن محصلة هذه القوى تمر بالنقطة هـ.

**الحل**



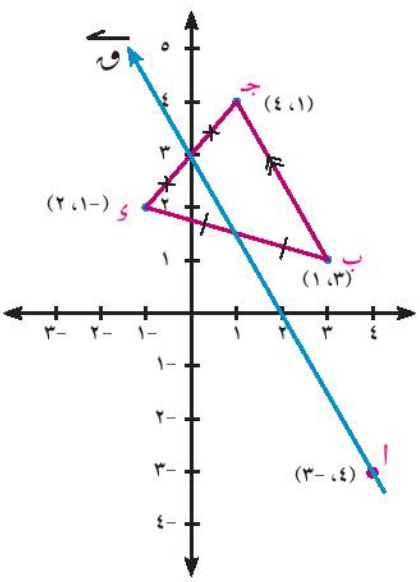

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى
بالنسبة لنقطة هـ = -٤ × ٦ + ٣ × ٢ + ٣ × ٦ = صفر
وطبقًا لنظرية العزوم فإن عزم المحصلة بالنسبة للنقطة هـ
يساوى = صفر
أى أن المحصلة تمر بالنقطة هـ

**حاول أن تحل**

٤ أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ٦سم، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب هـ = ١سم ، اثرت قوى مقاديرها ١، ٢، ٣، ٤، ق نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ على الترتيب. فإذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ أوجد قيمة ق

## مثال

٥ تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ = -٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (٤، -٣). أوجد عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لكل من النقط ب(٣، ١)، جـ (١، ٤)، ى (-١، ٢)




**الحل**

$\overleftarrow{م_1}$ = $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ب}$ = (١، -٤)

∴ $\overleftarrow{ج_ب}$ = $\overleftarrow{م_1}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (١، -٤) × (-٢، ٣) = (٣ - ٨) $\overleftarrow{ع}$ = -٥ $\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{م_2}$ = $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{جـ}$ = (٣، -٧)

∴ $\overleftarrow{ج_{جـ}}$ = $\overleftarrow{م_2}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (٣، -٧) × (-٢، ٣) = (٩ - ١٤) $\overleftarrow{ع}$ = -٥ $\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{م_3}$ = $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ى}$ = (٥، -٥)

∴ $\overleftarrow{ج_ى}$ = $\overleftarrow{م_3}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (٥، -٥) × (-٢، ٣) = (١٥ - ١٠) $\overleftarrow{ع}$ = ٥ $\overleftarrow{ع}$

من المثال السابق نستنتج أن:

**(١)** إذا كان عزم قوة حول نقطة ب = عزم هذه القوة حول نقطة جـ كان خط عمل القوة // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

**(٢)** إذا كان عزم قوة حول نقطة ب = - عزم هذه القوة حول نقطة ى كان خط عمل القوة ينصف $\overline{\text{ب ى}}$

**حاول أن تحل**

٥ تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ فى النقطة أ (-٣، ٢) فإذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول كل من النقطتين ب (٣، ١)، جـ (-١، ٤) يساوى ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ أوجد $\overleftarrow{ق}$ .

### تعميم الاستنتاج السابق

إذا أثرت عدة قوى مستوية على جسم وكانت أ، ب نقطتين في نفس المستوى.

**(١)** فإذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = مجموع عزوم القوى حول ب فإذا خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ .

**(٢)** إذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = - مجموعة عزوم القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{\text{أب}}$

**ملاحظة:** أما إذا كان مجموع عزوم القوى حول نقطة ما ولتكن جـ ينعدم فإما جـ تقع على خط عمل المحصلة أ، أن المحصلة هي المتجه الصفري

### مثال

(٦) تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢$\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٥$\overleftarrow{س}$ + ٢$\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = -٣$\overleftarrow{س}$ + ٢$\overleftarrow{ص}$ في النقطة أ(١، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب(٢، ١) ، جـ (٦، ٤)

**الحل**

∵ $\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$ + $\overleftarrow{ق_3}$ = ٤$\overleftarrow{س}$ + ٣$\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ر_1}$ = $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ب}$ = (-١، ٠)

$\overleftarrow{ر_2}$ = $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{جـ}$ = (-٥، -٣)

$\overleftarrow{ج_{ب}}$ = $\overleftarrow{ر_1}$ × $\overleftarrow{ح}$ = (-١، ٠) × (٤، ٣) = -٣ $\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_{جـ}}$ = $\overleftarrow{ر_2}$ × $\overleftarrow{ح}$ = (-٥، -٣) × (٤، ٣) = -٣ $\overleftarrow{ع}$

∵ $\overleftarrow{ج_{ب}}$ = $\overleftarrow{ج_{جـ}}$ ، $\overleftarrow{ح}$ ≠ $\overleftarrow{٠}$

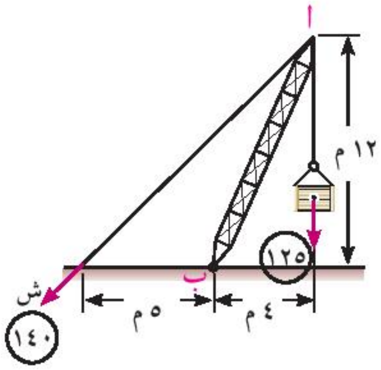
∴ خط عمل $\overleftarrow{ح}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

### حاول أن تحل

(٦) تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_1}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٣$\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ في النقطة أ (-٢، ٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب(-١، ٥)، جـ(١، ٢)

### حاول أن تحل

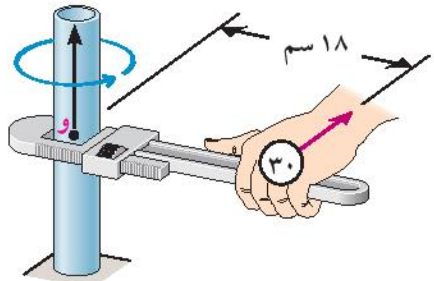
(٧) **في الشكل المقابل:** $\overline{\text{أب}}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد في الخيط يساوى ١٤٠ نيوتن، ووزن الصندوق ١٢٥ نيوتن. أوجد مجموع عزمى القوتين بالنسبة للنقطة ب



## تمـــارين ١ - ١

**أكمل ما يأتى**

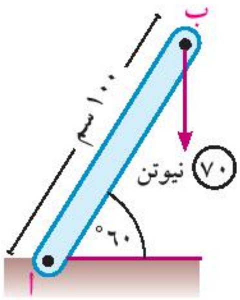
(١) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن نقطة أ مسافة ٨سم فإن معيار عزمها حول نقطة أ يساوى .................. نيوتن . سم




(٢) **فى الشكل المقابل:** معيار عزم القوة حول النقطة (و) يساوى ..................

(٣) قوة ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى نقطة متجه موضعها بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوى ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ متر فإن عزم القوة حول نقطة الأصل يساوى ......

(٤) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوى صفرًا فإن ذلك يعنى ..............

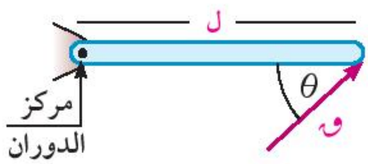



(٥) إذا كان عزم القوة حول نقطة ثابتًا فإن مقدار القوة يتناسب عكسيًا مع ..............

(٦) **الشكل المقابل:** قضيب مثبت بمفصل عند أ اثرت على الطرف ب قوة رأسية لاسفل مقدارها ٧٠ نيوتن. فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوى .................. نيوتن. متر

**اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:**

(٧) **الشكل المقابل** يمثل باب متصل بمفصل عند أ . اثرت عليه قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ أى من الأشكال الآتية تكون القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ لها أكبر عزم عند أ


(٨) قضيب طول ل يمكنه الدوران بسهوله حول نقطة عند أحد نهايتيه. اثرت على نهايته الاخرى قوة مقدارها ق وتميل على القضيب بزاوية قياسها $\theta$ إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}}$ يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم

(أ) ل جا $\theta$ (ب) ل جتا $\theta$ (ج) ل (د) ل ظا $\theta$

٩) إذا كان عزم قوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة أ يساوى عزمها حول النقطة ب فإن ..........

أ) $\overrightarrow{ق} \perp \overline{أب}$ ب) $\overrightarrow{ق}$ تنصف $\overline{أب}$

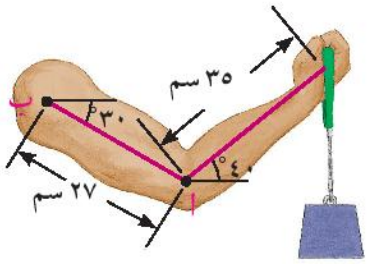
ج) $\overrightarrow{ق} \parallel \overline{أب}$ د) $\overleftrightarrow{أب}$ ، خط عمل $\overrightarrow{ق}$ متخالفان

**أجب عن الأسئلة الآتية**

١٠) تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق_1} = م\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ل\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ فى النقطتين $أ_1$ (١، ١)، $أ_2$ (-١، -٢) على الترتيب. عين قيمة كل من الثابتين م، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين حول نقطة الأصل وبالنسبة للنقطة ب (٢، ٣)

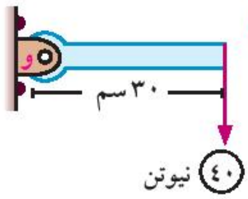
١١) القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٢\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٥\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -٣\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١، ١). برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ١) ، (٦، ٤)

١٢) **الشكل المقابل** يمثل شخص يحمل بيده ثقل. فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة أ يساوى ٨٠ نيوتن متر أوجد عزم الثقل حول نقطة ب

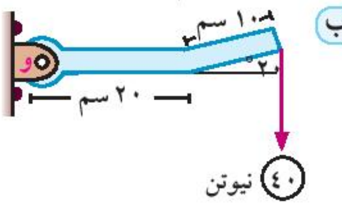



١٣) فى كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة و

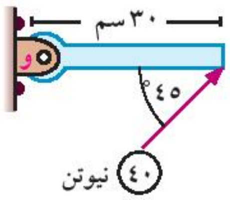
أ)



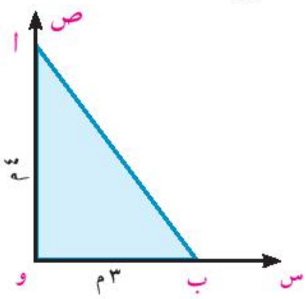

ب)




ج)




١٤) تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}$ فى المستوى س ص على المثلث أ و ب. فإذا كان القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و يساوى ٨٤ نيوتن.م ، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة أ يساوى -١٠٠ نيوتن.م ، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة ب يساوى صفر. عين $\overrightarrow{ق}$

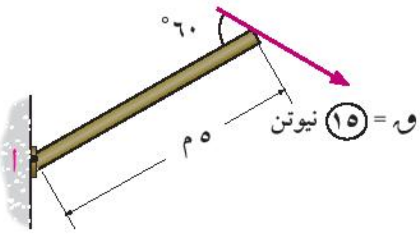


(١٥) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم. اثرت قوى مقاديرها ٣، ٥، ٨، ٥$\sqrt{2}$ ث. كجم فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ على الترتيب. أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى:

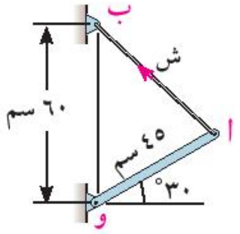
(أ) بالنسبة للنقطة أ

(ب) بالنسبة للنقطة ب

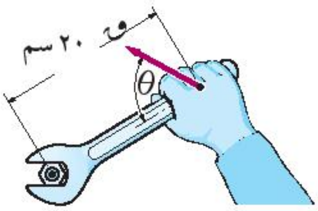
(جـ) بالنسبة لمركز المربع




(١٦) **الشكل المقابل** يمثل تأثير قوة ١٥ نيوتن على ذراع مثبتة بمفصل عند أ . أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطةأ .




(١٧) **فى الشكل المقابل** الشد فى الخيط $\overline{\text{أ ب}}$ مقداره ١٥٠ نيوتن أوجد القياس الجبرى لعزم قوة الشد بالنسبة للنقطة و.

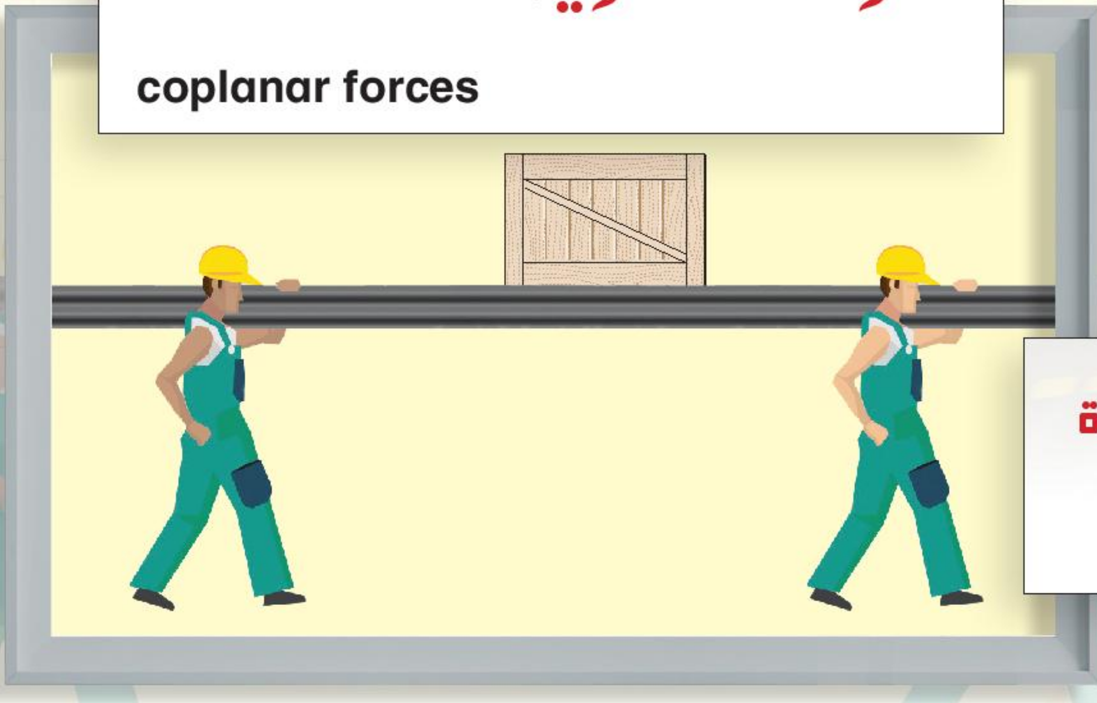



(١٨) إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار يساوى ٤٠٠ نيوتن.سم أوجد اقل قيمة للقوة و وقيمة $\theta$ التى تحقق دوران المسمار.

# القوى المستوية

## coplanar forces

الوحدة
٢



### مقدمة الوحدة

في دراستنا السابقة لمجموعة القوى المستوية المؤثرة علي نقطة مادية، كانت خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة مادية واحدة، وبالتالى فإن خط عمل محصلة هذه القوى يمر بنقطة واحدة هى نقطة التلاقى المشتركة لهذه المجموعة من القوى.

وفى هذه الوحدة سوف نتناول مجموعة القوى التى تؤثر علي جسم متماسك حيث أن خطوط عمل هذه القوى لاتتلاقى فى نقطة واحدة بالضرورة .

### أهداف الوحدة

**بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:**

- يتعرف القوى المتوازية المستوية
- يعين خط عمل محصلة قوتين متوازيتين عندما تكونان فى اتجاه واحد أو في اتجاهين مختلفين.
- يعين احدى قوتين متوازيتين إذا علمت القوة الآخرى والمحصلة .
- يوجد عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة.
- يوجد محصلة مجموعة من القوى المتوازية المستوية.
- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.
- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوة متوازية حول نقطة يساوى صفر إذا كانت محصلتهما تمر بهذه النقطة.
- يستنتج أن مجموع عزوم مجموعة من القوى المتوازية حول نقطة يساوى صفر إذا تلاشت محصلة هذة القوى.
- يحدد الشروط العامة لاتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية .
- اتزان مجموعة من القوى المتوازية.
- اتزان مجموعة من القوى الغير المتوازية والغير متلاقية في نقطة.
- يحل تطبيقات متنوعة على اتزان سُلم أو قضيب على أرض أفقية خشنة وحائط رأسى أملس أو وتد.

## المصطلحات الأساسية

| | |
|---|---|
| قوى متوازية | Parallel forces |
| محصلة | Resultant |
| مقدار | Magnitude |
| معيار | Norm |
| نقطة تأثير | Point of action |
| رد فعل | Reaction |
| وزن | Weight |
| متوازيان | Parallel |
| حامل (وتد) | Support |
| سقالة | Beam |
| شد | Tension |
| بكرة | pnlley |
| الاحتكاك | Friction |
| الاتزان العام | General Equilibrium |
| رد فعل عمودى | Vertical Reaction |
| مركبة جبرية | |
| مركبة أفقية | Horizontal Component |
| مركبة رأسية | Vertical Component |
| اتزان جسم جاسئ | Equilibrium of original body |
| مثلث قوى | triangle of force |

## دروس الوحدة

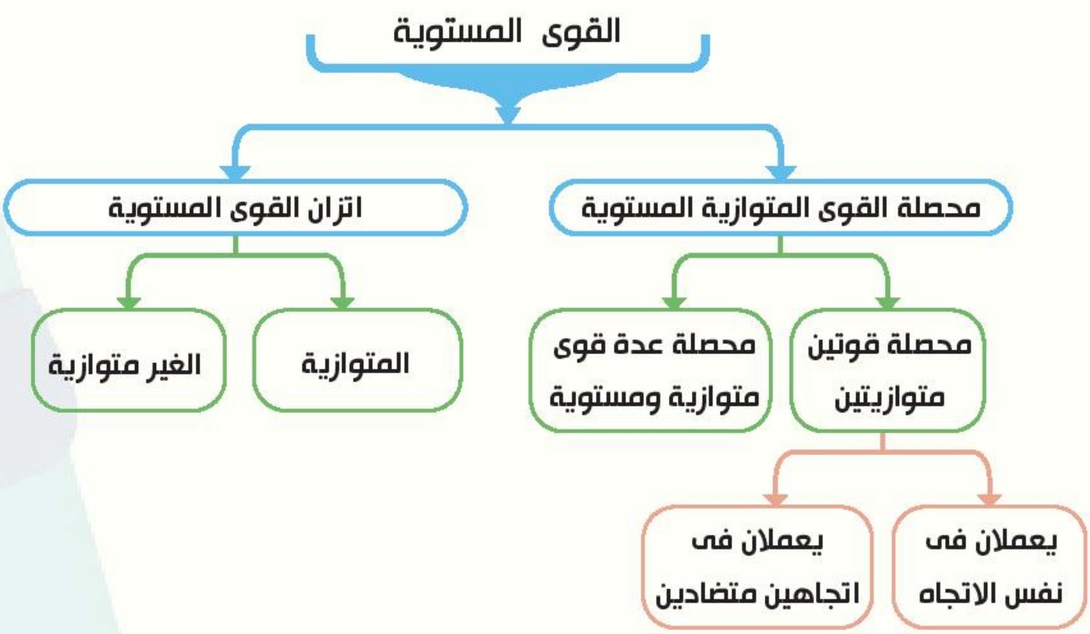
(٢-١): محصلة القوى المتوازية المستوية.

(٢-٢): اتزان مجموعة من القوى المستوية.

## الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

## مخطط تنظيمى للوحدة



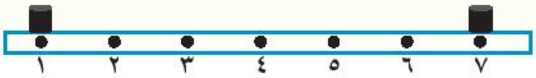
الوحدة الثانية

٢ - ١

# محصلة القوى المتوازية المستوية

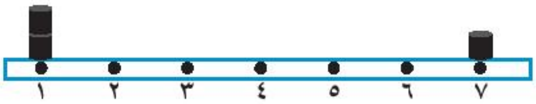
**Resultant of a parallel coplanar forces**

## عمل تعاونى


شكل (١)

شكل (١) يوضح مسطرة خشبية مدرجة من ١ إلى ٧ موضوع عليها حجران متماثلان عند طرفى المسطرة.

**(١)** عين موضع نقطة على المسطرة يمكن تعليق المسطرة منها. بحيث تتزن افقيًا.


شكل (٢)

**(٢)** إذا وضع ثقلان عند أحد الطرفين شكل (٢).

هل يتغير موضع نقطة التعليق؟

عين موضع نقطة التعليق الجديدة إذا تغير الموضع؟

## أولاً: محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه

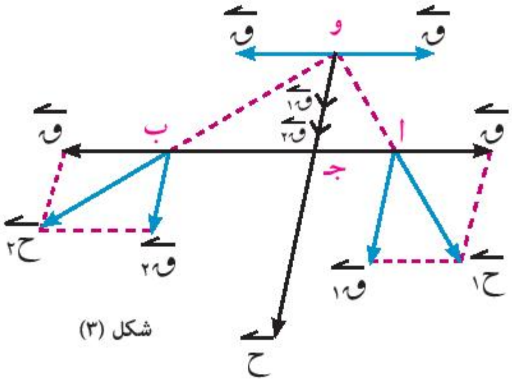
*Resultant of two parallel forces having the same direction*

تعلمت أن محصلة عدة قوى مستوية $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، ...، $\overrightarrow{ق_ن}$ متلاقية فى نقطة واحدة هو قوة $\overrightarrow{ح}$ حيث $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + ... + \overrightarrow{ق_ن}$ وتمر بنفس النقطة. وفى هذا الدرس سوف تتعلم إيجاد محصلة عدة قوى متوازية ومستوية .

نبدأ بإيجاد محصلة قوتين متوازيتين ومستويتين ولهما نفس الاتجاه.

بفرض $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ قوتان متوازيتان ويعملان فى نفس الاتجاه ويؤثران فى جسم متماسك فى نقطتين أ، ب فتكون محصلة القوتين هى $\overrightarrow{ح}$ حيث:

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$ .



شكل (٣)

ولتحديد موضع نقطة تأثير المحصلة نفرض قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه تؤثران عند أ، ب وهذا لن يغير من تأثير القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ .

يمكن إيجاد محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق}$ . عند أ والتى تمثل قطر متوازى الاضلاع ولتكن $\overrightarrow{ح_1}$ كذلك $\overrightarrow{ح_2}$ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ عند ب.

وبفرض أن خطى عمل المحصلتين $\overrightarrow{ح_1}$، $\overrightarrow{ح_2}$ يتقاطعان عند نقطة و.

### سوف تتعلم

- محصلة قوتين متوازيتين وفى نفس الاتجاه.
- محصلة قوتين متوازيتين وفى اتجاهين متضادين.
- محصلة عدة قوى متوازية ومستوية.

### المصطلحات الأساسية

- قوى متوازية *Parallel*
- محصلة *Resultant*
- مقدار *Magnitude*
- معيار *Norm*
- نقطة تأثير *Point of action*

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

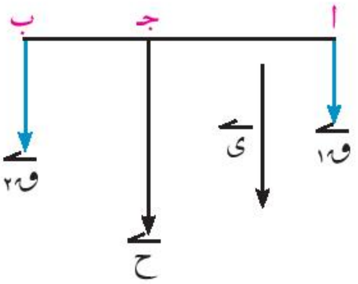
فيمكن استبدال القوة $\overleftarrow{\text{ح}_1}$ بمركبتيها الاصليين $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ كذلك يمكن استبدال القوة $\overleftarrow{\text{ح}_2}$ بمركبتيها الاصليين $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ . القوى المؤثرة عند نقطة (و) هى: $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ وتعملان فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ (الموازى لخط عمل القوتين الاصليتين) والقوتان $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ وتعملان فى اتجاهين متضادين حيث يمكن حذفهما دون حدوث أى تغير فى تأثير القوتين $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ عند نقطة و). القوتان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ المؤثرتان عند نقطة (و) تعملان فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ يكون لهما نفس تأثير القوتين $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ المؤثرتان عند ا ، ب وبالتالى فإن محصلتهما هى $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} \text{ وتؤثر أيضًا فى اتجاه } \overleftarrow{\text{وجـ}}}$

وحيث أن القوى $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ متوازية فإن

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}_1} = \frac{\text{اجـ}}{\text{وجـ}} \quad (1) \qquad , \qquad \frac{\text{ق}}{\text{ق}_2} = \frac{\text{بجـ}}{\text{وجـ}} \quad (2)$$

بقسمة (٢) على (١) فإن: $\frac{\text{ق}}{\text{ق}_2} \times \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{وجـ}} \times \frac{\text{وجـ}}{\text{اجـ}}$ أى أن $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\text{بجـ}}{\text{اجـ}}$

ومن ذلك فإن: $\boxed{\text{ق}_1 \times \text{اجـ} = \text{ق}_2 \times \text{بجـ}}$



شكل (٤)

فى شكل (٤) يأخذ متجه وحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ فى اتجاه القوتين فإن :

$\overleftarrow{\text{ق}_1} = \text{ق}_1 \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2} = \text{ق}_2 \overleftarrow{\text{ى}}$

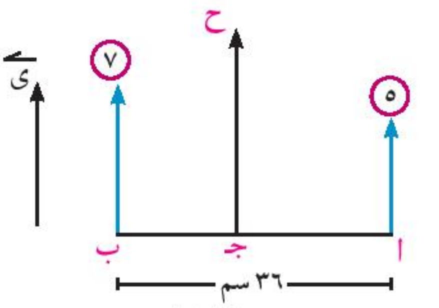
$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = (\text{ق}_1 + \text{ق}_2)\overleftarrow{\text{ى}}$ مما يعنى أن المحصلة تكون فى اتجاه القوتين

ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين أى أن:

> محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الإتجاه هى قوة تعمل فى إتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية لمعياريهما.

**مثال** تعيين محصلة قوتين متوازيتين تعملان فى نفس الاتجاه

① قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن تؤثران فى نقطتين ا ، ب حيث اب = ٣٦سم أوجد محصلة القوتين



شكل (٥)

**الحل**

نفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$\therefore \overleftarrow{\text{ق}_1} = ٥ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2} = ٧ \overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار واتجاه المحصلة :

$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} = ٥\overleftarrow{\text{ى}} + ٧\overleftarrow{\text{ى}} = ١٢\overleftarrow{\text{ى}}$

**تعيين نقطة تأثير المحصلة**

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة جـ $\in \overline{\text{اب}}$ $\therefore \frac{\text{اجـ}}{\text{جـب}} = \frac{٧}{٥}$ أى أن $\frac{\text{اجـ}}{٣٦ - \text{اجـ}} = \frac{٧}{٥}$

$\therefore$ ٥ اجـ = ٢٥٢ - ٧ اجـ أى أن اجـ = ٢١سم

أى أن مقدار المحصلة يساوى ١٢ نيوتن ويعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين وتؤثر فى نقطة تبعد عن ا بمقدار ٢١سم

**حاول أن تحل**

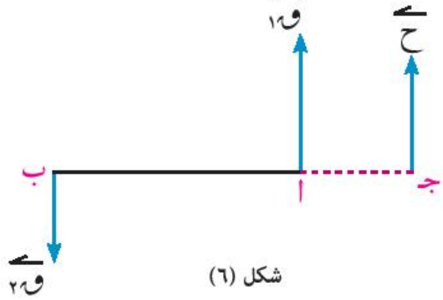
(١) قوتان متوازيتان يعملان فى نفس الاتجاه مقدارهما ٤، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ، ب حيث أ ب = ٢٥سم. أوجد محصلة القوتين

تفكير ناقد: إذا كانت القوتان متساويتان فأين تقع نقطة تأثير المحصلة.

## تعلم

### محصلة قوتين متوازيتين ومتضادين فى الاتجاه

*Resultant of two parallel forces having opposite directions*



شكل (٦)

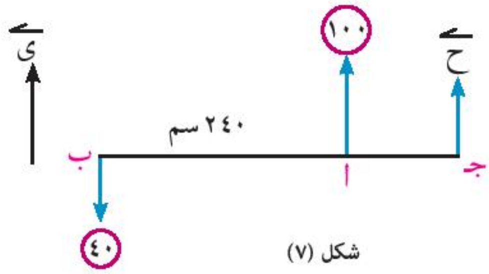
بالمثل فى شكل (٦) إذا كان $\overleftarrow{\text{و}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}_{٢}}$ قوتان متوازيتان وغير متساويتان وتعملان فى اتجاهين متضادين وتؤثران فى نقطتين أ ، ب من جسم متماسك وكانت محصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$ فإن: $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{و}_{١}} + \overleftarrow{\text{و}_{٢}}$ وتؤثر فى نقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة عكسية بمعيار القوتين .

**إذا كان** $\text{و}_{١} > \text{و}_{٢}$ **فإن** $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{و}_{٢}}{\text{و}_{١}}$ **أى أن:** $\boxed{\text{و}_{١} \times \text{أ جـ} = \text{و}_{٢} \times \text{ب جـ}}$

**أى أن :** محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الإتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة تعمل فى إتجاه القوة الأكبر معيارًا ويساوى معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارًا بنسبة عكسية لمعياريهما.

**مثال** **تعيين محصلة قوتين متوازيتين يعملان فى اتجاهين مختلفين**

(٢) قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدارهما ٤٠ ، ١٠٠ نيوتن والمسافة بين خطى عمليهما ٢٤٠سم. أوجد محصلتهما.



شكل (٧)

**الحل**

نفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

$\therefore \overleftarrow{\text{و}_{١}} = ١٠٠ \, \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}_{٢}} = -٤٠ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار واتجاه المحصلة

$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{و}_{١}} + \overleftarrow{\text{و}_{٢}} = ١٠٠ \, \overleftarrow{\text{ى}} - ٤٠ \, \overleftarrow{\text{ى}} = ٦٠ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

تعيين نقطة تأثر المحصلة نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة جـ $\in$ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ حيث $\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٤٠}{١٠٠}$

$\therefore \frac{\text{جـ أ}}{٢٤٠ + \text{أ جـ}} = \frac{٢}{٥}$ $\therefore$ ٥ أ جـ = ٤٨٠ + ٢ أ جـ $\therefore$ أ جـ = ١٦٠سم

**أى أن** مقدار المحصلة يساوى ٦٠ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة ١٠٠ نيوتن وتعمل فى نقطة $\in$ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ وتقع خارج $\overline{\text{أ ب}}$ وتبعد عن أ مسافة ١٦٠سم

**حاول أن تحل**

(٢) أوجد محصلة قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدارهما ٧، ١٢ نيوتن تؤثران فى أ، ب حيث أ ب = ٢٠سم

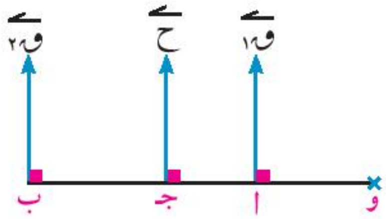
تفكير ناقد: ماذا تقول عن محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين ومتضادين فى الاتجاه؟

**نظرية** «مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة»

**البرهان** (لا يمتحن فيه الطالب)

نبدأ باثبات هذه النظرية فى حالة خاصة عندما تكون المجموعة مكونة من قوتين فقط.

**(١) إذا كانت القوتان متحدتى الاتجاه**



شكل (٨)

نعتبر نقطة مثل (و) واقعة فى مستوى القوتين ونقيم منها عمودًا مشتركًا على خطى عمل القوتين $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ فيقطعهما فى النقطتين أ، ب على الترتيب ويقطع خط عمل المحصلة فى نقطة جـ

فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لنقطة و

$= -\text{ق}_1 \times \text{وأ} - \text{ق}_2 \times \text{وب} = -\text{ق}_1 (\text{وجـ} - \text{أجـ}) - \text{ق}_2 (\text{وجـ} + \text{جـب})$

$= -\text{ق}_1 \times \text{وجـ} + \text{ق}_1 \times \text{أجـ} - \text{ق}_2 \times \text{وجـ} - \text{ق}_2 \times \text{جـب}$ (١)

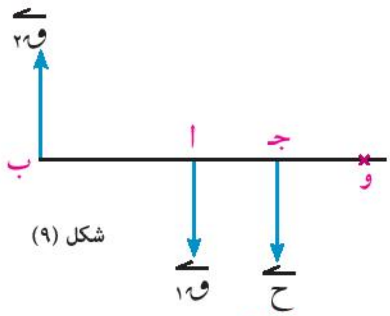
ولكن: $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}}$ أى أن $\text{ق}_1 \times \text{أجـ} = \text{ق}_2 \times \text{بجـ}$

بالتعويض فى (١) $\therefore \text{ج}_{\text{و}} = -\text{ق}_1 \times \text{وجـ} - \text{ق}_2 \times \text{وجـ}$

$= -(\text{ق}_1 + \text{ق}_2) \times \text{وجـ}$

$= -\text{ح} \times \text{وجـ}$ = عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و

**(٢) إذا كانت القوتان متضادتين فى الاتجاه**



شكل (٩)

بفرض $\text{ق}_1 > \text{ق}_2$ فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لنقطة و

$= \text{ق}_1 \times \text{وأ} - \text{ق}_2 \times \text{وب}$

$= \text{ق}_1 (\text{وجـ} + \text{جـأ}) - \text{ق}_2 (\text{وجـ} + \text{جـب})$

$= \text{ق}_1 \times \text{وجـ} + \text{ق}_1 \times \text{جـأ} - \text{ق}_2 \times \text{وجـ} - \text{ق}_2 \times \text{جـب}$ (٢)

ولكن $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\text{جـب}}{\text{جـأ}}$ أى أن $\text{ق}_1 \times \text{جـأ} = \text{ق}_2 \times \text{جـب}$ وبالتعويض فى (٢)

$\therefore \text{ج}_{\text{و}} = \text{ق}_1 \times \text{وجـ} - \text{ق}_2 \times \text{وجـ}$

$= (\text{ق}_1 - \text{ق}_2) \times \text{وجـ}$

$= \text{ح} \times \text{وجـ}$ = عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و

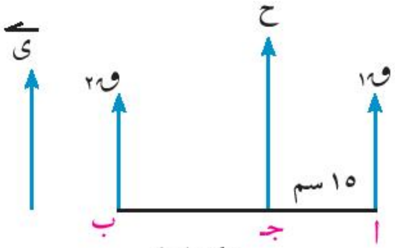
**(٣) أما إذا كانت المجموعة تتكون من أى عدد محدود من القوى (أكثر من قوتين) والتى لاتنعدم محصلتها** فيمكن إثبات النظرية بتحصيل أى قوتين من قوى المجموعة على التوالى حتى يتم تحصيل كافة قوى المجموعة إلى قوتين وتطبيق النظرية عليها.

## مثال تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى والمحصلة

(٣) قوتان متوازيتان مقدارهما ٢٠ ، $\text{و}$ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب ومقدار محصلتهما ٣٥ نيوتن والبعد بين خطى عمل القوة المعلومة والمحصلة يساوى ١٥سم. أوجد $\vec{\text{و}}$ فى كل من الحالتين:

(أ) القوة المعلومة والمحصلة فى نفس الاتجاه. (ب) القوة المعلومة والمحصلة فى عكس الاتجاه.

**الحل**



شكل (١٠)

(أ) نفرض $\vec{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$\therefore \vec{\text{ح}} = 35\,\vec{\text{ى}}$ ، $\vec{\text{و}}_1 = 20\,\vec{\text{ى}}$

$\because \vec{\text{ح}} = \vec{\text{و}}_1 + \vec{\text{و}}_2$ أى أن $35\,\vec{\text{ى}} = 20\,\vec{\text{ى}} + \vec{\text{و}}_2$

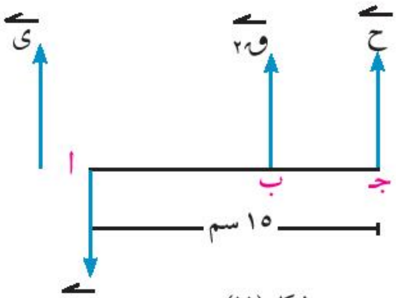
$\therefore \vec{\text{و}}_2 = 15\,\vec{\text{ى}}$

أى أن القوة $\vec{\text{و}}_2$ مقدارها ١٥ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة المعلومة والمحصلة

$\because$ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ يساوى عزم المحصلة بالنسبة لنقطة جـ = صفر

$\therefore 20 \times 15 - 15 \times \text{ب جـ} = \text{صفر}$

$\therefore$ ب جـ = ٢٠ سم أى أن القوة $\text{و}_2$ تؤثر فى نقطة ب على بعد ٣٥ سم من أ



شكل (١١)

(ب) نفرض $\vec{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$\therefore \vec{\text{ح}} = 35\,\vec{\text{ى}}$ ، $\vec{\text{و}}_1 = -20\,\vec{\text{ى}}$

$\because \vec{\text{ح}} = \vec{\text{و}}_1 + \vec{\text{و}}_2$ أى أن $35\,\vec{\text{ى}} = -20\,\vec{\text{ى}} + \vec{\text{و}}_2$

$\therefore \vec{\text{و}}_2 = 55\,\vec{\text{ى}}$

أى أن القوة $\vec{\text{و}}_2$ مقدارها ٥٥ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة المحصلة

$\because$ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ يساوى عزم المحصلة بالنسبة لنقطة جـ = صفر

$\therefore 20 \times 15 - 55 \times \text{ب جـ} = \text{صفر}$ أى أن ب جـ = $\frac{60}{11}$ سم

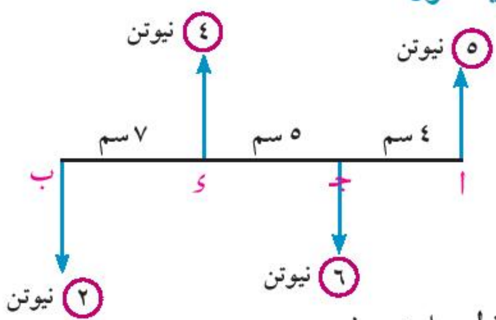
أى أن القوة $\text{و}_2$ تؤثر فى نقطة ب على بعد $\frac{105}{11}$ سم من أ

**حاول أن تحل**

(٣) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بعد ٥١سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان

**أولًا:** فى اتجاه واحد **ثانيًا:** فى اتجاهين متضادين

## مثال عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة




٤ الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على $\overline{\text{ا ب}}$ أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة إلى

أ نقطة ا    ب نقطة جـ

**الحل**

أ القوة ٥ نيوتن تؤثر فى نقطة ا فيكون عزمها بالنسبة لنقطة ا مساوى صفر

وبمراعاه اتجاه دوران القوى بالنسبة لنقطة ا (مع أو عكس اتجاه دوران عقارب الساعة)

فإن القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة ا

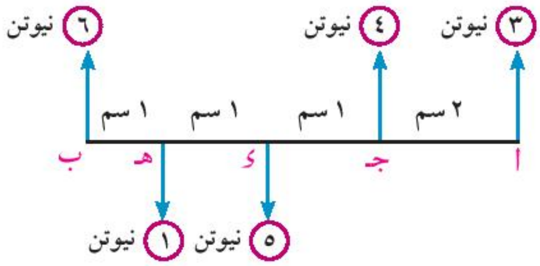
= ٦ × ٤ - ٤ × ٩ + ٢ × ١٦ = ٢٠ نيوتن . سم

ب القوة ٦ نيوتن تؤثر فى نقطة جـ فيكون عزمها بالنسبة لنقطة جـ مساوى الصفر.

ويكون القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ

= ٥ × ٤ - ٤ × ٥ + ٢ × ١٢ = ٢٤ نيوتن.سم

**حاول أن تحل**




٤ الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على $\overline{\text{ا ب}}$

أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة

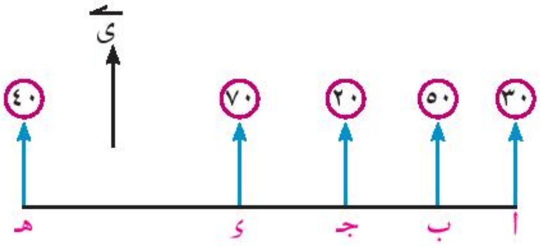
أ نقطة ا    ب نقطة منتصف $\overline{\text{ا ب}}$

## مثال محصلة مجموعة من القوى المتوازية والمستوية

٥ ا ، ب ، جـ ، ى ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث:

ا ب : ب جـ : جـ ى : ى هـ = ٢ : ٣ : ٤ : ٧ اثرت خمس قوى متوازية وفى نفس الاتجاه مقاديرها ٣٠، ٥٠، ٢٠، ٧٠، ٤٠ نيوتن فى النقط ا ، ب ، جـ ، ى ، هـ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى

**الحل**




شكل (١٢)

بفرض ا ب = ٢س ، ب جـ = ٣س

جـ ى = ٤س ، ى هـ = ٧ س

وبفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوى

∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} + \overrightarrow{ق_٤} + \overrightarrow{ق_٥}$

= ٣٠ $\overrightarrow{ى}$ + ٥٠ $\overrightarrow{ى}$ + ٢٠ $\overrightarrow{ى}$ + ٧٠ $\overrightarrow{ى}$ + ٤٠ $\overrightarrow{ى}$ = ٢١٠ $\overrightarrow{ى}$ نيوتن

**أى أن** مقدار المحصلة ٢١٠ نيوتن فى نفس اتجاه القوى

ولإيجاد نقطة تأثير المحصلة، نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة و $\in$ $\overline{\text{أهـ}}$

∵ مجموع عزوم القوى حول أ يساوى عزم المحصلة حول أ

∴ -٥٠ × ٢س - ٢٠ × ٥س - ٧٠ × ٩س - ٤٠ × ١٦س = -٢١٠ × أو ∴ أو = $\frac{\text{١٤٧٠س}}{\text{٢١٠}}$ = ٧س سم

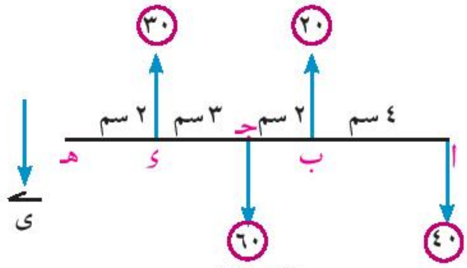
$\frac{\text{أو}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{٧س}}{\text{١٦س}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٦}}$ أى أن المحصلة تؤثر فى نقطة (و) التى تقسم $\overline{\text{أهـ}}$ من الداخل بنسبة ٧ : ١٦ من جهة أ

## حاول أن تحل

(٥) إذا كانت جـ ، ء ، هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$ بحيث أ جـ : جـ ء : ء هـ : هـ ب = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية وفى نفس الاتجاه ومتساوية فى المقدار فى النقط أ، جـ، ء، هـ ، ب برهن أن المحصلة تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٥

## مثال محصلة عدة قوى متوازية

(٦) فى الشكل المقابل (شكل ١٣) أ ، ب، جـ ، ء، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم واحدا أثرت القوتان ٢٠، ٣٠ نيوتن رأسيًا لأعلى عند النقطتين ب ، ء واثرت القوتان ٤٠، ٦٠ نويتن رأسيًا لأسفل عند النقطتين أ ، جـ . أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثيرة المحصلة.



شكل (١٣)

### الحل

بفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة لأسفل كما فى شكل (١٣)

∴ $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} + \overleftarrow{\text{ق}_3} + \overleftarrow{\text{ق}_4}$

= -٣٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ٦٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ - ٢٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ٤٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ = ٥٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة على $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ تبعد س سم من أ

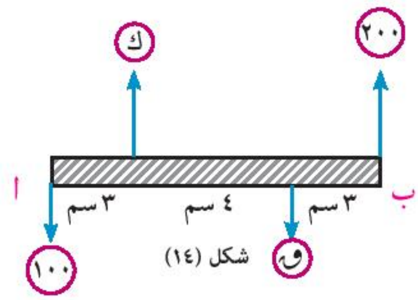
∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ ∴ س = ٠,٢

-٣٠ × ٩ + ٦٠ × ٦ - ٢٠ × ٤ = ٥٠ × س

أى أن المحصلة تؤثر فى نقطة على $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ وعلى بعد ٠,٢ سم من أ

## حاول أن تحل

(٦) الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف $\overline{\text{أب}}$ . أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت مقدار المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتعمل لأعلى وتؤثر فى نقطة على القضيب تبعد ٤ متر من أ. أوجد ق ، ك

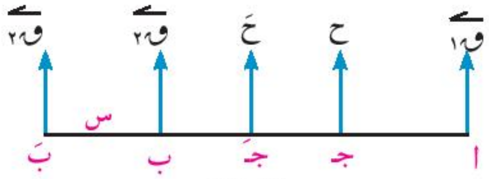


شكل (١٤)

## مثال البرهنة النظرية

(٧) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ قوتان متوازيتان ويعملان فى نفس الاتجاه تؤثران فى نقطتين أ، ب ومحصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$ إذا تحركت القوة $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ موازية لنفسها فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مسافة س سم اثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مسافة مقدارها $\left(\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}\right)$ س

**الحل**



شكل (١٥)

**فى الحالة الأولى:**

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة جـ

∵ عزم المحصلة عند أ = مجموع عزوم القوى عند أ

∴ ح × أجـ = $ق_٢$ × أ ب　　　(١)

**فى الحالة الثانية:**

إذا تحركت القوة $\overleftarrow{ق_٢}$ موازية لنفسها فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ مسافة س سم.

نفرض المحصلة تؤثر فى جـَ

∵ عزم المحصلة عند أ = مجموع عزوم القوى عند أ

∴ ح × أ جـَ = $ق_٢$ × أ بَ　　(٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ ح (أ جـَ - أ جـ) = $ق_٢$ (أ بَ - أ ب)

∴ ح × جـ جـَ = $ق_٢$ × س

∴ جـ جـَ = $\frac{ق_٢}{ح}$ × س = $\left(\frac{ق_٢}{ق_١ + ق_٢}\right)$ س

**حاول أن تحل**

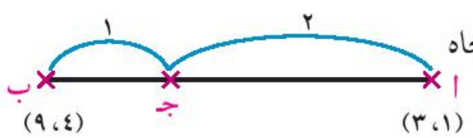
(٧) قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما ق، ٢ق تؤثران فى نقطتين أ، ب إذا تحركت القوة ٢ $\overleftarrow{ق}$ موازية نفسها فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ مسافه س سم اثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى نفس الاتجاه مسافه قدرها $\frac{٢}{٣}$ س

**مثال**

(٨) تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ - ٦ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ(١، ٣) ، ب (٤، ٩) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{أ ب}$ .

**الحل**

$\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ - ٩ $\overleftarrow{ص}$




نلاحظ أن $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢ $\overleftarrow{ق_١}$ أى أن القوتين متوازيتان وفى نفس الاتجاه

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة جـ ∈ $\overline{أ ب}$ حيث $\frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{٢}{١}$

ومن قانون نقطة التقسيم جـ = $\left(\frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} ، \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}\right)$

∴ جـ = $\left(\frac{٢ × ٤ + ١ × ١}{٢ + ١} ، \frac{٢ × ٩ + ١ × ٣}{٢ + ١}\right)$ = (٣، ٧)

**حاول أن تحل**

(٨) تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$، $\overleftarrow{ق_٢}$ = - ٩ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ(-١، ٠) ، ب (١، ٢) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{أ ب}$ .

## تمـــاريـن ٢ - ١

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :**

(١) قوتان متوازيتان ومتضادين فى الاتجاه مقدارهما ٧، ١٢ نيوتن فإن مقدار محصلتهما يساوى:

(أ) ١٩ نيوتن　(ب) ١٢ نيوتن　(جـ) ٧ نيوتن　(د) ٥ نيوتن

(٢) قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ٧، ١٠ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ، ب حيث أ ب = ٥١سم.
فإذا كانت محصلتهما تؤثر فى نقطة جـ فإن أ جـ =

(أ) ٣٠ سم　(ب) ٢٧ سم　(جـ) ٢١ سم　(د) ١٢ سم

(٣) قوتان متوازيتان ومتحدتا فى الاتجاه مقدارهما ٥، ٧ نيوتن فإن مقدار محصلتهما تساوى

(أ) ١٢　(ب) ٦　(جـ) ٢　(د) ١

**اجب عن الأسئلة الآتية:**

فى التمارين ٤ - ٦ قوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متوازيتان وتؤثران فى النقطتين أ ، ب فإذا كانت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

(٤) أوجد مقدار واتجاه المحصلة وطول $\overline{أجـ}$ فى كل مما يأتى (القوتان فى نفس الاتجاه)

(أ) ق١ = ٩ نيوتن ، ق٢ = ١٧ نيوتن ، أ ب = ١٣سم

(ب) ق١ = ٢٣ نيوتن ، ق٢ = ١٥ نيوتن ، أ ب = ٥٧سم

(جـ) ق١ = ١٦ نيوتن ، ق٢ = ١٠ نيوتن ، ب جـ = ٣٠سم

(٥) إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى نفس الاتجاه اجب عما يأتى:

(أ) ق١ = ٨ نيوتن ، ح = ١٣ نيوتن ، أ جـ = ١٠ سم أوجد ق٢ ، أ ب

(ب) ق٢ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٢٤سم ، أ ب = ٥٦ سم أوجد ق١ ، ح

(جـ) ق١ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٩ سم ، جـ ب = ٨ سم أوجد ق٢ ، ح

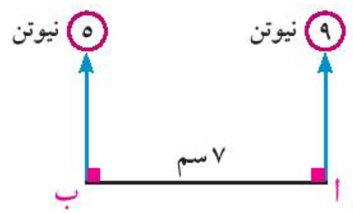
(٦) إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متضادان فى الاتجاه اجب عما يأتى:

(أ) ق١ = ١٥ نيوتن ، ح = ٢٠ نيوتن ، أ جـ = ٧٠سم أوجد ق٢ ، أ ب

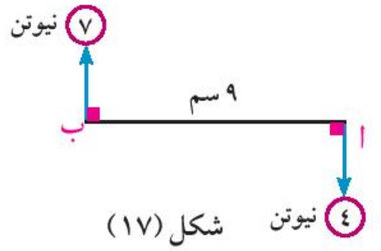
(ب) ق٢ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٢٤ سم ، جـ ∉ $\overline{أب}$ ، أ ب = ٥٦ سم أوجد ق١ ، ح

(جـ) ق١ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٩ سم ، جـ ∉ $\overline{أب}$ ، جـ ب = ٨ سم أوجد ق٢ ، ح

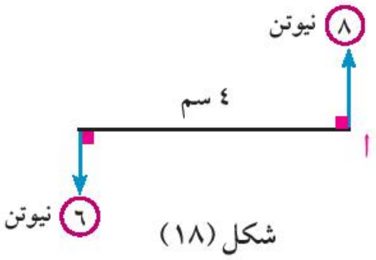
(٧) فى كل مما يأتى أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبُعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ




شكل (١٦)




شكل (١٧)




شكل (١٨)

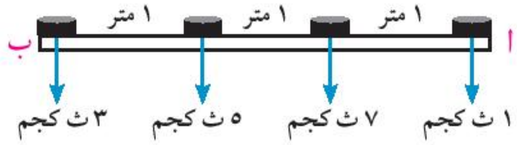
(٨) قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدارهما ٤، ٩ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أ ب = ١٥سم. أوجد محصلتهما.

(٩) إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان ٧ ى ، ٥ ى نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد $\frac{1}{2}$ ٢ متر عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين

(١٠) قوتان متوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{أب}$ والكبرى تؤثر فى الطرف ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن و يبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم، فما طول القضيب؟

(١١) أ، ب، جـ، ى، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أ ب = ٤سم، ب جـ = ٦سم، جـ ى = ٨سم ، ى هـ = ١٠سم. اثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث كجم فى النقط أ ، جـ ، ى ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{أهـ}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه، والقوتان الاخريان فى الاتجاه المضاد. عين محصلة المجموعة

(١٢) فى شكل (٢١) وضعت أربعة اثقال مقدارها ١ ، ٧، ٥ ، ٣ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل. عين نقطة يمكن ان يعلق القضيب بحيث يظل القضيب افقيًا.




شكل (٢١)

(١٣) قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقاديرها ٥، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ، ب حيث أ ب = ٣٩ سم. إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق فى نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات. أوجد ق

(١٤) أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تقع على مستقيم افقى حيث أ ب = ١ متر ، أ جـ = ٣متر ب ∈ $\overline{أجـ}$. اثرت القوى التى مقاديرها ٢، $\frac{1}{2}$ نيوتن رأسيًا لاسفل فى النقطتين أ، جـ على الترتيب كما اثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن فى نقطة ب رأسيًا لأعلى. أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ

الوحدة الثانية

٢ - ٢

# اتزان مجموعة من القوى المستوية

## Equilibrium of a system of coplanar forces

**سوف تتعلم**

- اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية.

**المصطلحات الأساسية**

| | |
|---|---|
| رد فعل | Reaction |
| وزن | Weight |
| متوازيان | Parallel |
| حامل (وتد) | Support |
| سقالة | Beam |
| شد | Tension |
| بكرة | Pulley |
| دوران | Rotate |

**الأدوات المستخدمة**

- آله حاسبة علمية.
- معمل ميكانيكا

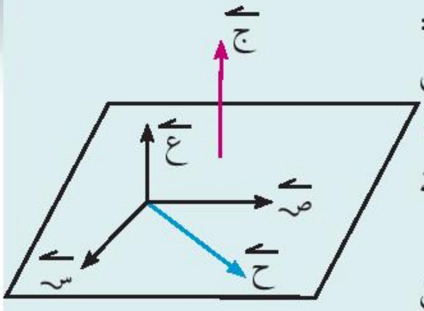
**قاعدة**

يكون الجسم المتماسك الواقع تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فى حالة اتزان استاتيكى إذا تحقق الشرطان التاليان:

(١) أن ينعدم متجه محصلة القوى للمجموعة ( $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\cdot}$ ) (لا توجد حركة انتقالية)

(٢) أن ينعدم عزوم القوى بالنسبة لنقطة ( $\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\cdot}$ ) (لا توجد حركة دورانية)

وهذه الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية



شكل (١٩)

الشكل (١٩) : يبين مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة ( $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ ) بحيث تقع $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى مستوى القوى، وبالتالى يكون $\overleftarrow{\text{ع}}$ عموديًّا على هذا المستوى. وبذلك يمكن تحليل متجه المحصلة $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$، بينما متجه العزم $\overleftarrow{\text{ج}}$ يوازى متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ع}}$

لذلك فإن : $\overleftarrow{\text{ح}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}} = \text{ج}\,\overleftarrow{\text{ع}}$

حيث : س = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$ ،

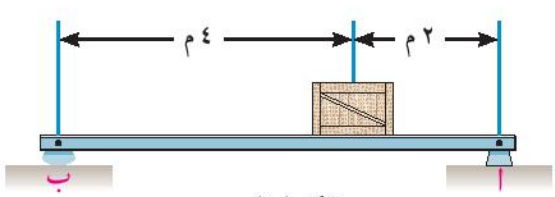
ص = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

ج = مجموع القياسات الجبرية لعزوم قوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ع}}$ .

ولذلك فإن الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة هذه القوى هو :

س = صفر ، ص = صفر وأيضًا ج = صفر

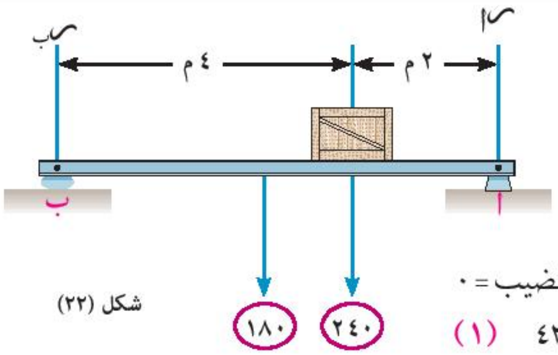
**مثال** اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية



شكل (٢٠)

(١) الشكل المقابل يوضح لوح خشبى كتلته ٣٠ كجم لكل متر من طوله يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أ ، ب و يحمل صندوق كتلته ٢٤٠ كجم. أوجد الضغط الواقع على كل حامل.

**الحل**



شكل (٢٢)

حيث أن اللوح منتظم فإن وزنه يؤثر فى نقطة منتصفه

كتلة اللوح = ٣٠ × ٦ = ١٨٠ كجم

∴ وزن اللوح = ١٨٠ ث كجم

رد الفعل عند كل حامل يساوى الضغط عليه

مجموع القياسات الجبرية للقوى فى الاتجاه العمودى على القضيب = ٠

∴ ر أ + ر ب = ٢٤٠ + ١٨٠     ر أ + ر ب = ٤٢٠   (١)

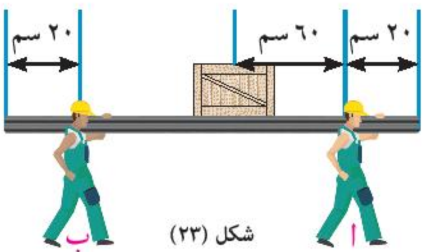
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة ب = صفر

- ١٨٠ × ٣ - ٢٤٠ × ٤ + ر أ × ٦ = صفر أى أن ر أ = ٢٥٠ ث كجم

∴ بالتعويض فى (١) تكون ر ب = ١٧٠ ث كجم

تفكير ناقد: ماذا يحدث لرد الفعل عند كل من أ ، ب كلما اقترب الصندوق من نقطة أ

**حاول أن تحل**



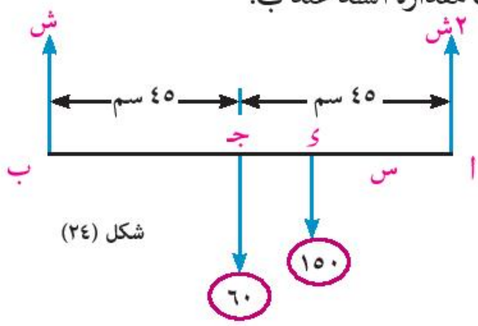
شكل (٢٣)

(١) رجلان أ ، ب يحملان لوح من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٦ث كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقا وزنه ٢٤ ث كجم كما هو موضحًا فى شكل (٢٣) أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عين على أى نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين.

**مثال**   **اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية**

(٢) $\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن معلق فى وضع أفقى بخيطين رأسيين من طرفيه أ ، ب اين يعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند أ ضعف مقداره الشد عند ب.

**الحل**



شكل (٢٤)

نفرض أن الثقل ١٥٠ نيوتن معلق من نقطة تبعد عن أ مسافة س سم وأن الشد عند ب = ش ، الشد عند أ = ٢ ش

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفر

∴ ٢ ش + ش - ١٥٠ - ٦٠ = صفر ومنها ش = ٧٠ نيوتن

∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ يساوى صفر ∴ ١٥٠ × س + ٦٠ × ٤٥ - ش × ٩٠ = صفر

وبالتعويض عن ش = ٧٠     ∴ ١٥٠ س = ٣٦٠٠     س = ٢٤ سم

**حاول أن تحل**

(٢) $\overline{\text{أب}}$ لوح خشبى منتظم كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب . بين على أى بُعد يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكى يتساوى ردى الفعل على الحاملين.

## مثال

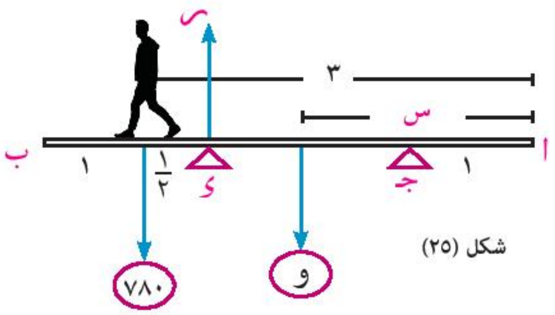
③ $\overline{اب}$ لوح خشبى غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند جـ ، ى بحيث أ جـ = ١ متر ، ب ى = $\frac{١}{٢}$ ١ متر. فإذا كانت أقصى مسافة يستطيع أن يتحركها رجل وزنه ٧٨٠ نيوتن على اللوح من أ إلى ب دون أن يختل توازن اللوح هى٣ متر وأقصى مسافة يستطيع أن يتحركها نفس الرجل من ب إلى أ هى $\frac{١}{٢}$ ٣ متر . عين وزن اللوح ونقطة تأثيره.

**الحل**

نفرض وزن اللوح يساوى( و) نيوتن و يؤثر فى نقطة تبعد عن الطرف أ مسافة س متر.

**الحالة الأولى:**

عندما يقطع الرجل اقصى مسافة ٣ متر من أ إلى ب يصبح اللوح على وشك الدوران حول ى. أى أن رد فعل الحامل عند جـ ينعدم.



شكل (٢٥)

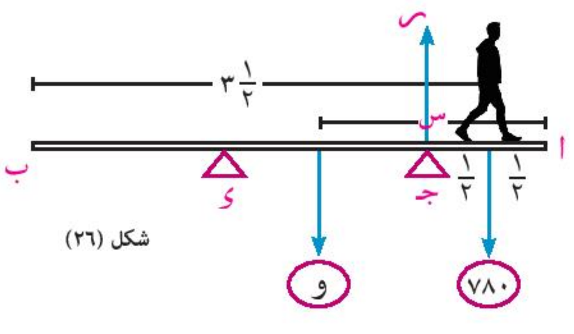
∵ مجموع عزوم القوى حول ى = صفر

٧٨٠ × $\frac{١}{٢}$ - و ($\frac{١}{٢}$٢ - س) = صفر

∴ و ( $\frac{١}{٢}$ ٢ - س) = ٣٩٠ (١)

**الحالة الثانية:**

عندما يقطع الرجل أقصى مسافة$\frac{١}{٢}$ ٣ متر من ب إلى أ يصبح اللوح على وشك الدوران حول جـ . أى أن رد فعل الحامل عند ى = صفر



شكل (٢٦)

∵ مجموع عزوم القوى حول جـ = صفر

∴ و (س-١) - ٧٨٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ و (س-١) = ٣٩٠ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ س - ١ = $\frac{١}{٢}$ ٢ - س ومنها س = ١,٧٥ متر

وبالتعويض فى (٢) نجد أن و = ٥٢٠ نيوتن

أى أن وزن اللوح يساوى ٥٢٠ نيوتن و يؤثر فى نقطة تبعد عن الطرف أ مسافة ١,٧٥ متر.

**حاول أن تحل**

③ يرتكز قضيب $\overline{اب}$ طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، احدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة جـ تبعد ٣٠سم عن ب و يحمل ثقلا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥سم عن ب عين قيمة الضغط على كل حامل . وأوجد ايضًا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وماهى قيمة الضغط على جـ عندئذ.

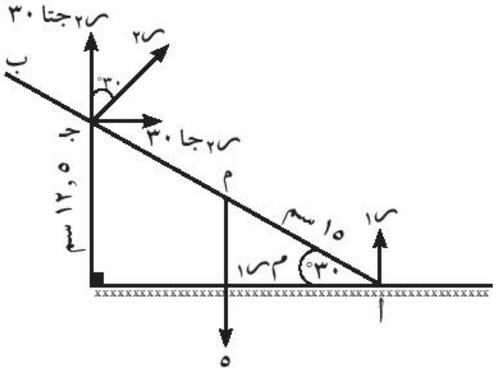
## مثال

### اتزان ساق على مستوى أفقى خشن ووتد أملس

٤ $\overline{أب}$ ساق منتظمة وزنها ٥ ث كجم وطولها ٣٠ سم، ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة، وترتكز عند إحدى نقطها جـ على وتد أملس، يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢,٥ سم، فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° وتقع فى مستوى رأسى. أوجد:

أولًا: مقدار قوة رد فعل الوتد.

ثانيًا: معامل الاحتكاك بين الطرف أ والأرض.




**الحل**

نلاحظ أن أ جـ = ٢٥ سم

الساق متزنه تحت تأثير القوى:

وزن الساق ٥ ث كجم ويعمل رأسيًّا لأسفل.

رد فعل الطرف أ على الأرض مركبتاه المتعامدتان $ر_١$ ، م $ر_١$ .

رد فعل الوتد على القضيب $ر_٢$ ، ويكون عموديًّا على القضيب عند نقطة التماس جـ.

وبتطبيق شروط الاتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، $جـ_أ$ = ٠

$\therefore$ $جـ_أ$ = ٠

$\therefore$ ٥ × ١٥ جتا ٣٠° − $ر_٢$ × ٢٥ = ٠ $\qquad$ $\therefore ر_٢ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ .......... (١)

ومن معادلتى الاتزان: س = ٠ ، ص = ٠

$\therefore$ $ر_٢$ جا ٣٠° − م $ر_١$ = ٠ $\qquad$ $\therefore$ $ر_٢$ = ٢ م $ر_١$ $\qquad$ وبالتعويض من (١)

$\therefore$ ٢ م $ر_١ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ م $ر_١ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ .................... (٢)

، $ر_١$ + $ر_٢$ جتا ٣٠° = ٥ $\qquad$ $\therefore ر_١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ر_٢ = ٥$ $\qquad$ وبالتعويض من (١)

$\therefore ر_١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = ٥$ $\qquad$ $\therefore ر_١ = ٥ - \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ث كجم.

وبالتعويض عن قيمة $ر_١$ فى المعادلة (٢) لإيجاد قيمة م.

$\therefore$ م × $\frac{١١}{٤} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ $\qquad$ $\therefore$ م $= \frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$

**حاول أن تحل**

٤ أب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠ سم، يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن، ويرتكز عند إحدى نقطه جـ على وتد أملس، يعلو ٢٥ سم عن المستوى الأفقى، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠°. أوجد رد فعل الوتد، وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى، علمًا بأن الساق تقع فى مستوى رأسى.

## مثال اتزان سلم على مستويين متعامدين أحدهما خشن

٥ سلم منتظم وزنه ٢٠ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس، أتزن السلم فى مستو رأسى، وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠°، فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض يساوى $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ . اثبت أن أقصى مسافة تستطيع فتاة وزنها ٦٠ ث كجم أن تصعدها على السلم تساوى نصف طول السلم.

### الحل

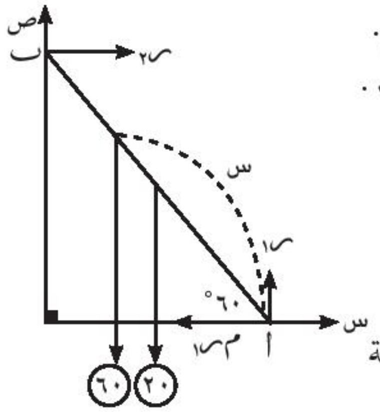
السلم متزن تحت تأثير القوى :

وزن السلم ٢٠ ث كجم، ويعمل رأسيًّا لأسفل عن منتصفه.

وزن الفتاة ٦٠ ث كجم ويعمل رأسيًّا لأسفل على بعد س من قاعدة السلم.

رد فعل الأرض الخشنة على الطرف أ ومركبتيه الرأسية $ر_١$ والأفقية م $ر_١$ .

رد فعل الحائط الأملس $ر_٢$ ويكون عموديًّا على الحائط .




شكل (٢٧)

وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

س = ٠ ، ص = ٠ ، $ج_أ$ = ٠

وبفرض أن طول السلم = ل ،

وأن أقصى مسافة تصعدها الفتاة = س فيكون القضيب على وشك الحركة

$\therefore$ $ر_١$ = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠ ثقل كجم ،

$ر_٢ = \frac{١}{٢\sqrt{٣}} ر_١$

$\therefore$ $ر_٢ = \frac{١}{٢\sqrt{٣}} \times ٨٠ = \frac{٤٠}{\sqrt{٣}}$ ث كجم (١)

$\therefore$ $ج_أ$ = ٠

$\therefore$ ٢٠ × $\frac{ل}{٢}$ جتا ٦٠° + ٦٠ × س جتا ٦٠° − $ر_٢$ × ل جا ٦٠° = ٠ ...... (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ ٥ ل + ٣٠ س − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل × $\frac{٤٠}{\sqrt{٣}}$ = ٠

$\therefore$ ٣٠ س − ١٥ ل = ٠ $\therefore$ س = $\frac{١٥}{٣٠}$ ل = $\frac{١}{٢}$ ل

$\therefore$ المسافة القصوى التى تصعدها الفتاة تساوى نصف طول السلم .

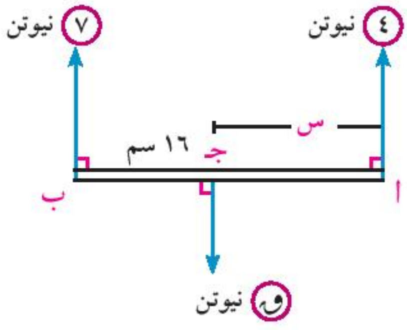
### حاول أن تحل

٥ أ ب سلم منتظم وزنه ٣٠ ث كجم، وطوله ٤ أمتار، يرتكز بطرفه أ على مستو أفقى أملس، وبطرفه الآخر ب على حائط رأسى أملس ، اتزن السلم فى مستو رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى، تقع رأسيًّا أسفل ب تمامًا، فإذا صعد رجل ونه ٨٠ ث كجم على هذا السلم، فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل . و إذا كان الحبل لا يتحمل شداً يزيد مقداره على ٦٧ ث كجم، فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل .

## تمـــارين ٢ - ٢

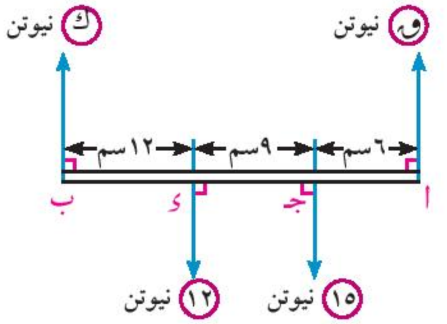
**فى كل من الأشكال الآتية . قضيب خفيف متزن أفقيًا أوجد معيار كل من القوى ق، ك ، البعد س**

(١)



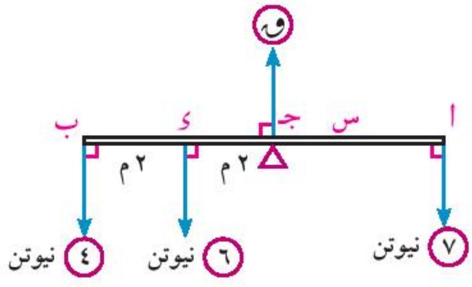

شكل (٢٨)

(٢)



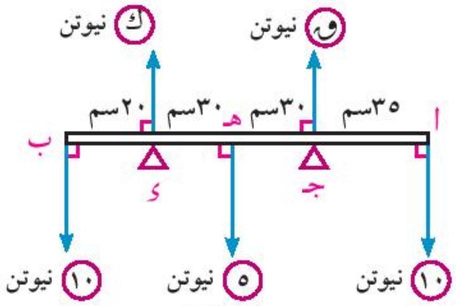

شكل (٢٩)

(٣)




شكل (٣٠)

(٤)




شكل (٣١)

**أجب عمايأتى :**

(٥) قضيب منتظم طوله ٢ متر وكتلته ٧٥ كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه. علق ثقل مقداره ١٥ ث كجم من نقطة على القضيب على بعد ٥٠ سم من احد طرفيه. أوجد رد الفعل عند كل حامل.

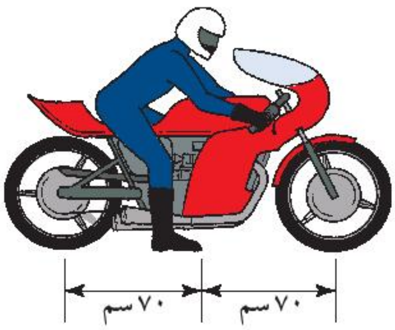
(٦) قضيب منتظم طوله ٣ متر وكتلته ٤ كجم ويحمل جسمين كتلتاهما ٥ كجم، ١,٥ كجم عند طرفيه. أوجد موضع نقطة تعليق على القضيب لكى يتزن القضيب فى وضع أفقى.

(٧) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠سم، إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن وعلق من أ ثقل قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠سم من أ ، و إذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠سم من أ. أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن أ .

٨ فى شكل (٣٨) يوضح دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بمنتصف المسافة بين العجلتين وكانت كتلة راكب الدراجة ٨٤ كجم ووزنه يؤثر فى الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف العجلة الأمامية أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين فى كل من الحالات الآتية :

أ الدراجة بدون الراكب

ب الدراجة مع وجود الراكب.




شكل (٣٢)

٩ يرتكز قضيب $\overline{اب}$ طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠سم من ا حفظ القضيب أفقيًا فى حالة إتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد :

أ مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.

ب مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من ا ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم.

١٠ قضيب متنظم ا ب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ث.جم ويؤثر عند منتصفه معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين أحدهما مربوط فى نقطة ا والآخر مربوط فى نقطة جـ حيث اجـ = س سم، علق ثقل قدره ١٢ ث.جم فى نقطة ء حيث ا ء = ٢٥ سم. فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث . جم، فأوجد القيم التى تقع بينها س، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد فى كل من الخيطين.

١١ ترتكز مسطرة خفيفة $\overline{اب}$ مقيسة بالسنتيمتر أفقيًا على حاملين عند النقطتين جـ ، ء بحيث جـ $\in$ $\overline{اء}$ ، ٢ ا جـ = ٢ ب ء = جـ ء . علق ثقل مقداره (و) نيوتن من النقطة (م) على المسطرة فوجد أنها تكون على وشك الانقلاب إذا علق من الطرف (ا) ثقل مقداره ١٠ نيوتن أو إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ٦ نيوتن . أوجد مقدار (و) وأثبت أن: $\frac{ام}{م ب} = \frac{٩}{٧}$ .

١٢ يحمل رجلان ا، ب جسما كتلته ٩٠ كجم معلق من قضيب معدنى متين وخفيف، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠سم من ا، فما مقدار ما يتحمله كل رجل من هذا الثقل؟ وإذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم، فعين أكبر مسافة من ا يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب.

١٣ سلم منتظم وزنه ٦٤ ث كجم، يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس، وحفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°، بواسطة حبل مثبت فى قاعدة السلم وفى نقطة من المستوى تقع رأسيًّا أسفل قمة السلم . وقف رجل وزنه يساوى وزن السلم على موضع من السلم يبعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم من ناحية القاعدة . عيِّن قوة الشد فى الحبل وردى فعل الحائط والمستوى.

(١٤) يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه أ على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى رأسيًّا أسفل ب . يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم. أوجد:

أولًا : قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم.

ثانيًا : أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علمًا بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم.

(١٥) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ نيوتن بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس، بحيث يكون السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط، ويميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥°. أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف أ للسلم؛ لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط علمًا بأن معامل لاحتكاك بين القضيب والأرض ٠,٧٥

(١٦) سلم منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس، وبطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى؛ بحيث يصنع السلم مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$ أوجد معامل الاحتكاك بين السلم والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق.

# الازدواجات

# Couples

## الوحدة ٣

### مقدمة الوحدة

تناولنا فى الوحدات السابقة تحصيل قوتين متوازيتين متضادتين فى الاتجاه وذلك بإبدالهما إلى قوتين تتلاقيان فى نقطة، ولاحظنا أن ذلك يكون ممكنًا ما دامت القوتان غير متساويتين، أما إذا كانت القوتان المتوازيتان متساويتين فى المقدار، فإنه لا يمكن الاستعاضة عنهما بقوتين غير متوازيتين، بل نحصل دائمًا على قوتين متوازيتين متساويتين فى المقدار ومختلفتين فى الاتجاه، وبذلك لا يمكن تحصيل مثل هاتين القوتين فى قوة واحدة.

من ذلك نرى أن المجموعة المركبة من قوتين متوازيتين متساويتين فى المقدار ومتضادتين فى الاتجاه تكون مسمى جديدًا فى علم الإستاتيكا يعرف بالازدواج، وتتناول هذه الوحدة مفهوم بالازدواج وتعريفه وحساب عزمه، ثم اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين، وعزم الأزدواج المحصل، وتنتهى الوحدة بدراسة مجموع أى عدد محدود من الازدواجات.

### أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الازدواج.
- يوجد عزم الازدواج.
- يستنتج أن عزم الازدواج هو متجه ثابت.
- يتعرف على تكافؤ ازدواجين واتزان ازدواجين.
- يتعرف مفهوم اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين.
- يوجد محصلة عدة ازدواجات.
- يثبت أن مجموعة من القوى تكافئ ازدواج ( المحصلة = صفر، العزوم حول أى نقطة $\neq$ صفر) أو ( مجموع عزوم القوى حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة = مقدارًا ثابتًا $\neq$ صفر)
- يثبت أن مجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا باستخدام التعريف.
- يتعرف النظرية التى تنص على أن ( مجموعة القوى المؤثرة فى أضلاع مضلع فى اتجاه دورى واحد تكافئ ازدواجًا ..)
- يحل تطبيقات متنوعة على الازدواجات.

## المصطلحات الأساسية

| | | | |
|---|---|---|---|
| ازدواج | *Couple* | جسم متماسك (جاسئ) | *Rigid body* |
| خط عمل | *Line of action* | تكافؤ | *Equivalent* |
| اتزان | *Equilibrium* | | |

## دروس الوحدة

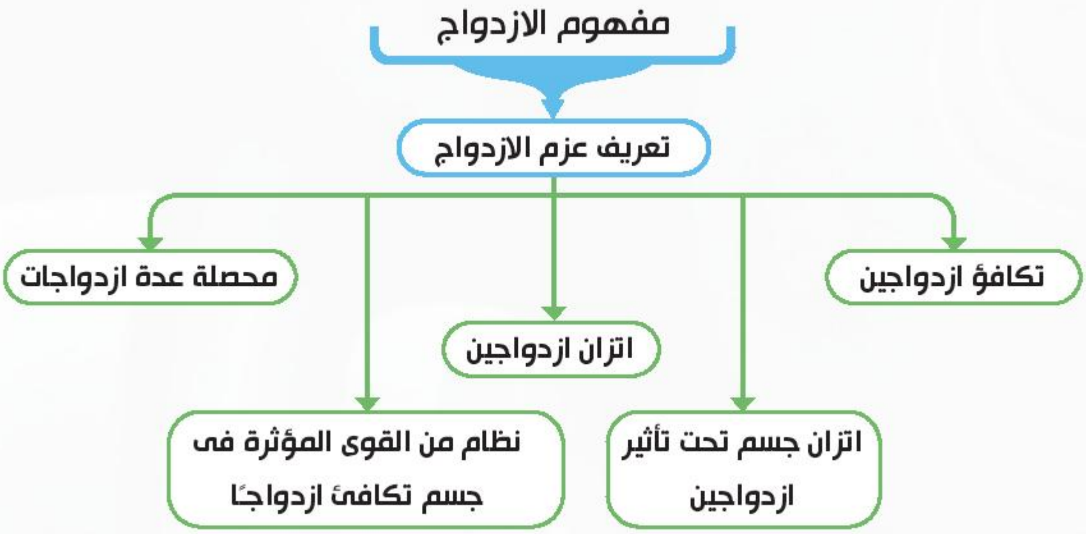
(٣-١): الازدواجات

(٣-٢): الازدواج المحصل

## الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية.

## مخطط تنظيمى للوحدة



# الوحدة الثالثة

## ٣ - ١

# الازدواجات

## COUPLES

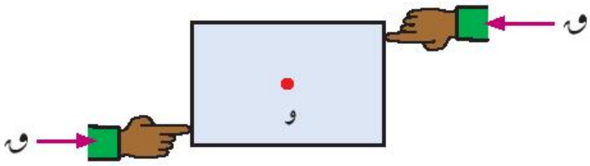
**سوف تتعلم**
- الازدواج - عزم الازدواج
- تكافؤ ازدواجين
- اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر.

**المصطلحات الأساسية**
- ازدواج *Couple*
- خط عمل *Line of action*
- اتزان *Equilibrium*
- جسم متماسك *Rigid body*
- تكافؤ *Equivalence*

**الأدوات المستخدمة**
- آلة حاسبة علمية
- معمل ميكانيا

**مقدمة:** قد يظن البعض أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوى صفرًا فإن هذا الجسم يظل ساكنًا، ولكن إذا نظرت إلى الشكل المقابل تجد قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه (محصلتهما تساوى صفر)

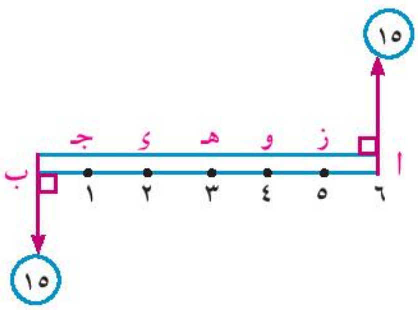
ترى أن هذا الجسم سوف يتحرك حركة دورانية حول (و) وتعتمد سرعة الدوران على عدة اشياء يمكن أن يكتشفها الطالب من العمل التعاونى الآتى:




### عمل تعاونى

**الشكل المقابل** يمثل مسطرة مدرجة يؤثر على طرفيها قوتان متوازيتان متضادتان فى الاتجاه، مقدار كل منها ١٥ نيوتن. استعن بزملائك فى إيجاد مجموع عزوم القوتين حول كل من النقط أ. ب، جـ، ى، هـ، و، ز

وضَع النتائج فى الجدول الآتى:




| النقط | أ | ب | جـ | ى | هـ | و | ز |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مجموع عزمى القوتين | | | | | | | |

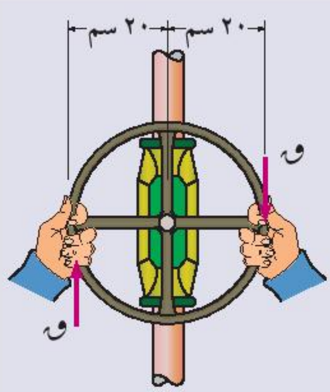
ماذا تلاحظ من نتائج الجدول؟

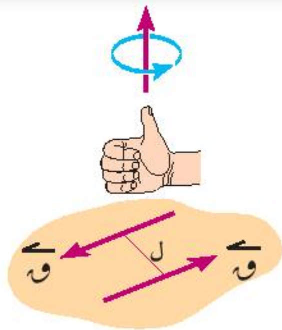
### تعلم

**الازدواج** *couple*

**تعريف**

**الازدواج: هو نظام من القوى، يتكون من قوتين متساويتين فى المعيار ومتضادين فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.**






## عزم الازدواج

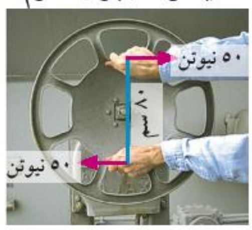
يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزوم قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ، ومعياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد بينهما، و يرمز له بالرمز ج = $\| \overrightarrow{ج} \|$

∴ $\| \overrightarrow{ج} \|$ = ق × ل حيث ق = $\| \overrightarrow{ق} \|$ ، ل يسمى ذراع الازدواج

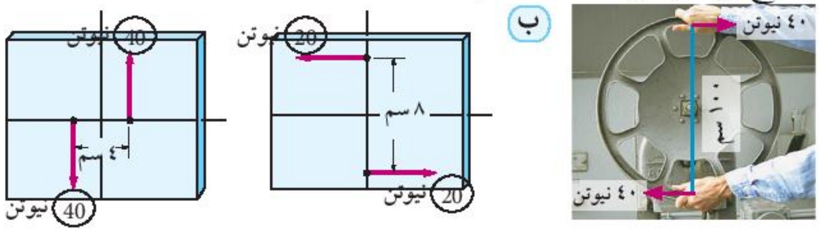
### مثال

(١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى كل من الأشكال الآتية:

أ




ب



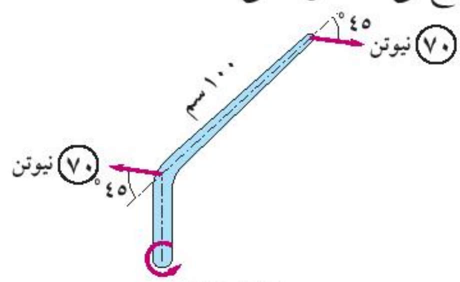

**الحل**

أ القياس الجبرى لكلا العزمين فى شكل ( أ ) يساوى - ٤٠٠٠ نيوتن. سم

ب القياس الجبرى لكلا العزمين فى شكل (ب) يساوى ١٦٠ نيوتن. سم لاحظ زيادة البعد بين القوتين ونقصان معيار القوتين وثبوت معيار العزم.

**حاول أن تحل**

(١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل الآتى:

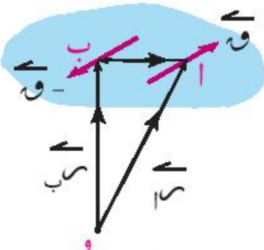



شكل (١)

**نظرية** عزم الازدواج هو قيمة ثابتة، لا تعتمد على النقطة التى ننسب إليها عزمى قوتيه.

**البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)**

نفرض أن القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، - $\overrightarrow{ق}$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب، ونفرض أن نقطة و نقطة عامة فى الفراغ.




نوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة و

$\overrightarrow{ج}$ = $\overrightarrow{و أ}$ × $\overrightarrow{ق}$ + $\overrightarrow{و ب}$ × - $\overrightarrow{ق}$

= ( $\overrightarrow{و أ}$ - $\overrightarrow{و ب}$ ) × $\overrightarrow{ق}$

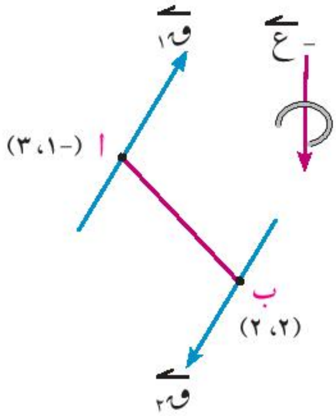
∵ $\overrightarrow{و أ}$ - $\overrightarrow{و ب}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ ∴ $\overrightarrow{ج}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ × $\overrightarrow{ق}$

والصورة الأخيرة للعزم توضح أن عزم الازدواج لا يعتمد على موضع نقطة و التى تنسب العزوم إليها.

## مثال

٢ إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_1} = ٢\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = أ\,\overleftarrow{س} - ٥\,\overleftarrow{ص}$ تكونان ازدواجًا وتؤثران فى النقطتين أ (-١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٢) على الترتيب. أوجد قيمة كل من أ ، ب، ثم أوجد عزم الازدواج.

### الحل




∵ القوتان تكونان ازدواجًا ∴ $\overleftarrow{ق_1} = -\overleftarrow{ق_2}$.

∴ أ = -٢ ، ب = ٥

عزم الازدواج = عزم $\overleftarrow{ق_1}$ حول ب

$= \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق_1}$ حيث $\overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$

$= (-٣ ، ١) \times (٢ ، ٥)$

$= (-١٥ - ٢)\,\overleftarrow{ع} = -١٧\,\overleftarrow{ع}$

### حاول أن تحل

١ إذا كان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتى ازدواج بحيث $\overleftarrow{ق_1} = -٣\,\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١)، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثر فى النقطة ب (-١ ، ٢) أوجد $\overleftarrow{ق_2}$ ثم أوجد عزم الازدواج وكذلك طول العمود المرسوم من أ على خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$

**اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر**

**تعريف**

**يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.**

إذا كان $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ عزمى الازدواجين، فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير الازدواجين هو $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{و}$

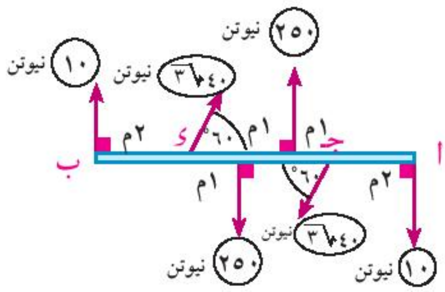
**وعمومًا** إذا أثر على الجسم عدة ازدواجات مستوية عزومها هى $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ ، ... ، $\overleftarrow{ج_ن}$ فإن شرط توازن الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} + ... + \overleftarrow{ج_ن} = \overleftarrow{و}$

**نتيجة**

**يتزن الجسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات.**

## مثال

٣ أ ب قضيب خفيف تؤثر فيه القوى الموضحة بالشكل.
أثبت أن القضيب متزن.




### الحل

القوتان ١٠، ١٠ تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه $ج_1 = -١٠ \times ٧ = -٧٠$ نيوتن. متر

القوتان ٤٠$\sqrt{٣}$ ، ٤٠$\sqrt{٣}$ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_٢ = -٤٠\sqrt{٣} \times ٣$ جا ٦٠ = -١٨٠ نيوتن. متر

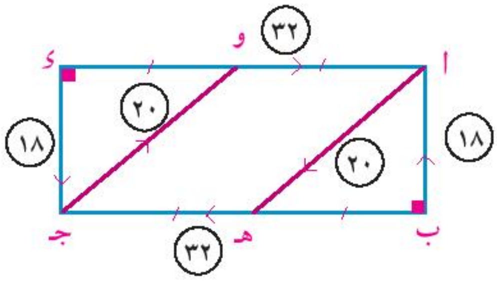
القوتان ٢٥٠، ٢٥٠ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_٣ = ٢٥٠ \times ١ = ٢٥٠$ نيوتن. متر

$\because ج_١ + ج_٢ + ج_٣ = -٧٠ - ١٨٠ + ٢٥٠ =$ صفر $\therefore$ القضيب متزن.

**حاول أن تحل**

(٢) **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ ء مستطيل هـ، ومنتصفات $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ ء}$ على الترتيب أ ب = ٦سم، ب جـ = ١٦سم. فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها واتجاهاتها كما بالشكل. أثبت أن المجموعة متزنة.




## مثال

(٤) أ ب قضيب مهمل الوزن معلق أفقيًا من مسمار فى منتصفه، أثرت فيه قوتان مقدار كل منهما ٧,٥ نيوتن فى طرفيه إحدهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل كما شُد بخيط يميل على القضيب بزاوية قياسها ٦٠° من نقطة عليه مثل جـ أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة التى إذا أثرت على القضيب مع القوى السابقة حفظته فى حالة توازن وهو أفقى، علمًا بأن مقدار الشد فى الخيط يساوى ١٠ نيوتن وأن طول القضيب ٣٠سم.

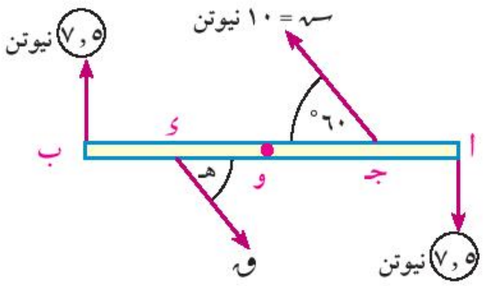
**الحل**

القوتان ٧,٥ ، ٧,٥ نيوتن عند أ ، ب تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه $ج_١ = -٧,٥ \times ٣٠ = -٢٢٥$ نيوتن. سم

لكى يتزن القضيب يجب أن تكون قوة الشد فى الخيط والقوة الأخرى ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٢٢٥ نيوتن. سم

$\therefore$ القوة الأخرى $ق = ش = ١٠$ نيوتن ، هـ = ٦٠° ويكون

١٠ × جـ ء جا ٦٠ = ٢٢٥




$\therefore$ جـ ء = $١٥\sqrt{٣}$ سم أى أن نقطة ء تبعد عن نقطة جـ مسافة $١٥\sqrt{٣}$ سم على القضيب.

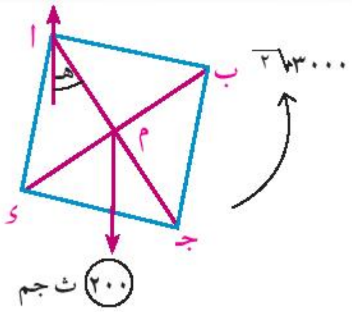
**حاول أن تحل**

(٣) أب جـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، $ق_١$ ، ٣ ، ٩ ، $ق_٢$ ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ على الترتيب أوجد قيمة كل من $ق_١$ ، $ق_٢$ لكى تتزن المجموعة.

## مثال

(٥) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٦٠ سم ووزنها ٢٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة تلاقى القطرين، عُلقت الصفيحة فى مسمار من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا وأثر فيه ازدواج فى مستواها معيار عزمه $٣٠٠٠\sqrt{٢}$ ث جم. سم أوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل $\overline{أ جـ}$ على الرأسى.

**الحل**




فى وضع التوازن تكون الصفيحة تحت تأثير قوتين هما وزن الصفيحة ورد فعل المسمار عند أ بالإضافة إلى الازدواج الخارجى.
نفرض أن الازدواج الخارجى يعمل فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة (كما فى الشكل) وحيث إن الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله. فعلى ذلك رد الفعل عند نقطة أ والوزن يُكَوِّنان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$ج_2 = -200 \times \text{أم جا هـ}$ حيث $\text{أم} = 30\sqrt{2}$

$ج_1 + ج_2 = \text{صفر}$ $3000\sqrt{2} - 200 \times 30\sqrt{2}\ \text{جا هـ} = \text{صفر}$

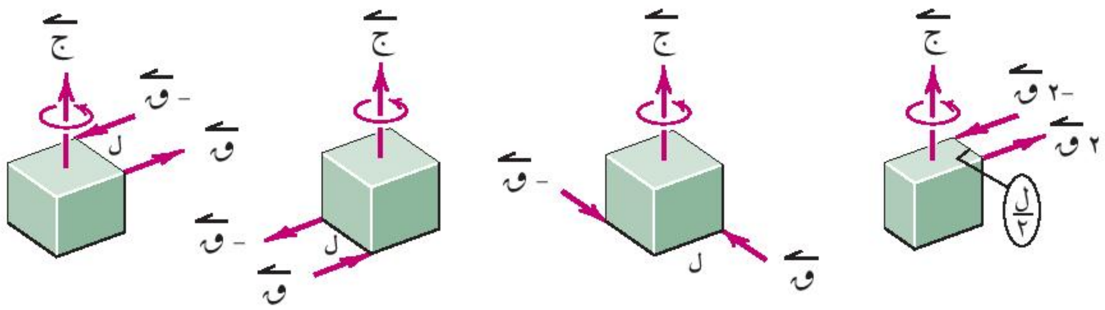
ومنها $\text{جا هـ} = \frac{1}{2}$ $\text{هـ} = 30^\circ$ أو $150^\circ$

**حاول أن تحل**

(٤) قضيب طوله ٤٠سم ووزنه ٢,٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه، يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه. أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٤ ث كجم. سم واتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه. عَيِّن مقدار واتجاه رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان.

## تكافؤ ازدواجين *Equivalent couples*

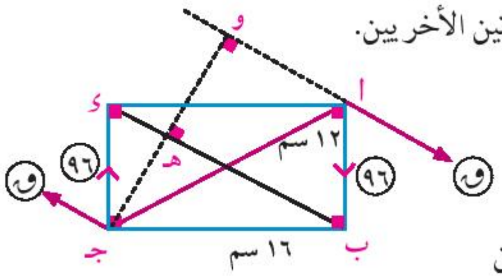
**تعريف** يقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.




**مثال**

(٦) أب جـ ء مستطيل، فيه أب = ١٢ سم، ب جـ = ١٦سم أثرت قوتان مقدار كل منهما ٩٦ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـء}$ أوجد مقدار كل من القوتين المتساويتين والمؤثرتين فى أ، جـ فى اتجاه يوازى $\overleftrightarrow{بء}$ بحيث يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المُكَوْن من القوتين الأخريين.

**الحل**




القوتان ٩٦، ٩٦ نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$ج_1 = -96 \times 16 = -1536$ نيوتن. سم

لكى يتكافأ الأزدوجان فإن القوتين عند أ، جـ يعملان على الدوران

فى اتجاه عقارب الساعة (كما بالشكل).

∴ ج٢ = - ق × جـ و

∴ ج٢ = - ق × ١٩,٢

∵ الازدواجين متكافئان ∴ ج١ = ج٢

∴ - ق × ١٩,٢ = - ١٥٣٦

∴ ق = ٨٠ نيوتن

من نظرية إقليدس

جـ هـ = $\frac{\text{جـ ب} \times \text{جـ ء}}{\text{ب ء}}$

جـ هـ = $\frac{١٦ \times ١٢}{٢٠}$ = ٩,٦سم

جـ و = ٢ جـ هـ

جـ و = ١٩,٢سم

حاول أن تحل

٥ أ ب قضيب خفيف، طوله ٥٠سم، تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن فى أ، ب فى اتجاهين متضادين. أثرت قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين فى نقطتين جـ، ء من القضيب، حيث جـ ء = ٣٠ سم بحيث يكوِّنان ازدواجًا يكافئ الازدواج المكون من القوتين الأوليين. أوجد قياس زاوية ميل القوتين الأخريين على القضيب.

## تمــاريـن ٣ - ١

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١ الازدواج هو:

أ قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار متحدتا الاتجاه.

ب قوتان متعامدتان ومتساويتان فى المقدار.

جـ قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار وعلى خط عمل واحد.

د قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار و متضادتان فى الاتجاه وليستا على خط عمل واحد.

٢ أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم:

أ ازاحة الازدواج إلى موضع جديد فى مستواه. ب ازاحة الازدواج إلى مستوى آخر يوازى مستواه

جـ دوران الازدواج فى نفس مستواه. د كل ما سبق.

٣ القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة وتحدثان دورانًا لعجلة القيادة تكونان:

أ احتكاكًا. ب ازدواجًا.

جـ قوة عمودية على عجلة القيادة. د محصلة غير صفرية.

٤ لإحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان:

أ متساويتين فى المقدار. ب متضادتين فى الاتجاه.

جـ ليسا على خط عمل واحد. د كل ماسبق.

٥ إذا كان ج١، ج٢ هما القياسان الجبريان لعزمى ازدواجين، وكان ج١ + ج٢ = صفر فإن:

أ الازدواجين متكافئان
ب الازدواجين غير متزنين
ج الازدواجين متزنان
د الازدواجين يكافئان قوة

٦ حاصل ضرب معيار إحدى قوتى الازدواج فى ذراع الازدواج يسمى:

أ محصلة الازدواج.
ب عزم الازدواج.
ج عزم إحدى قوتى الازدواج.
د لا شيء مما سبق.

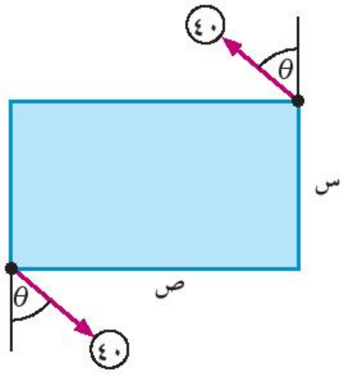
٧ إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ب $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ تكونان ازدواجًا فإن ( أ، ب) =

أ (٣، -٤)
ب (٣، ٥)
ج (-٣، ٥)
د (-٣، -٥)

٨ إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن.م ومعيار إحدى قوتيه ٧٠ نيوتن، فإن طول ذراع الازدواج يساوى:

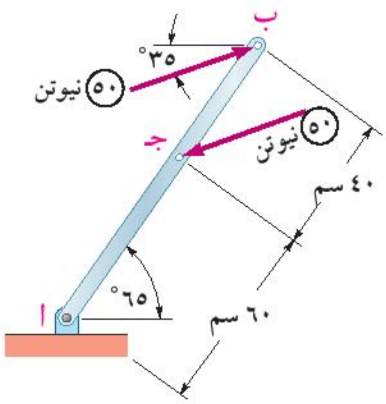
أ ٥٠ مترًا
ب ٥ أمتار
ج ٥ سم.
د ٢٤٥٠٠سم.

**اجب عن الاسئلة الآتية :**




٩ **الشكل المقابل** يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن، تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة الشكل أبعادها س، ص سم. أوجد عزم ازدواج القوتين فى كل من الحالات الآتية:

أ س = ٣سم ، ص = ٤ سم ، $\theta$ = صفر°
ب س = ص = ٦سم ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$
ج س = ٠ ، ص = ٥سم ، $\theta$ = ٣٠°
د س = ٦سم ، ص = ٠ ، $\theta$ = ٦٠°
هـ س = ٥سم ، ص = ١٢ سم ، ظا $\theta = \frac{٥}{١٢}$



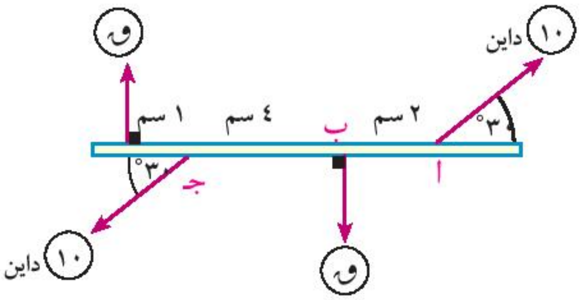

١٠ **الشكل المقابل** يوضح قوتين معيار كل منها ٥٠ نيوتن، تؤثران على رافعة أ ب أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج بطريقتين:

أ باستخدام البعد العمودى بين القوتين.
ب بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة أ

(١١) أثرت القوتان ($٣ \overrightarrow{س} - ٥ \overrightarrow{ص}$) ، ($-٣ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص}$) نيوتن فى النقطتين ا، ب على الترتيب، متجها موضعهما ($٦ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$) ، ($٤ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$) متر برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

(١٢) أثرت القوتان ($ا \overrightarrow{س} + ب \overrightarrow{ص}$) ، ($٥ \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص}$) نيوتن فى النقطتين جـ ، ء على الترتيب حيث جـ(-٢، ١)، ء( ٣، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجًا. أوجد قيمة كل من ا، ب، ثم أوجد عزم الازدواج، وأوجد أيضًا البعد العمودى بين خطى عمل القوتين.

(١٣) **الشكل المقابل** يمثل قضيبًا متزنًا تحت تأثير أربع قوى، أوجد قيمة ق.




(١٤) ا ب جـ ء مستطيل فيه ا ب = ٨سم، ب جـ = ٦سم، س، ص، ع، ل منتصفات الأضلاع $\overline{اب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ء ا}$ على الترتيب، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{ا س}$ ، $\overleftarrow{جـ ع}$ ، $\overleftarrow{ص س}$ ، $\overleftarrow{ل ع}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ ، $\overleftarrow{ا ل}$ على الترتيب إذا اتزن المستطيل، أوجد قيمة ق.

(١٥) ا ب قضيب طوله ٦٠سم ووزنه ١٨ نيوتن، يؤثر عند منتصفه، يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة جـ التي تبعد ١٥ سم عن ا، فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشُد الطرف ا أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا لوزن القضيب. أوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علمًا بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°.

(١٦) ا ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه ا ب = ١٨ سم، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن، ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين، عُلقت الصفيحة فى مسمار رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسيًّا. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن. سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة. فأوجد زاوية ميل $\overline{ءب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(١٧) ا ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠، ٦٠ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{ب ا}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى ا، جـ توازيان $\overleftarrow{ب ء}$ وتكوِّنان ازدواجًا يتكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين.

الوحدة الثالثة

٣ - ٢

# الازدواج المحصل

## Resultant couple

سوف تتعلم

- مجموع ازدواجات مستوية (الازدواج المحصل)
- شرط مجموعة من القوى المستوية تكافئ ازدواجًا.

المصطلحات الأساسية

- ازدواج محصل Resultant couple
- يكافئ Equivalent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

### فكر و ناقش

١) إذا وقع جسم تحت تأثير ازدواج. ما التأثير الحادث على هذا الجسم نتيجة ذلك الازدواج؟

٢) هل يتحرك الجسم الواقع تحت تأثير ازدواج حركة خطية أم حركة دائرية؟

٣) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تساوى صفر. هل يمكن أن تمثل هذه القوى ازدواجًا؟

٤) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة تساوى صفر. هل يمكن أن تمثل هذه القوى ازدواجًا؟

### تعلم

#### نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجًا

يقال لعدة قوى مستوية $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، ... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ إنها تكافئ ازدواجًا إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا:

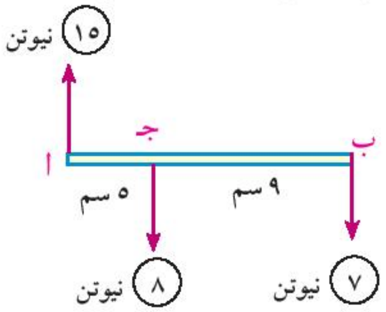
١) انعدام محصلة القوى (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه= صفر)

٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم

**ملحوظة:** تحقُّق أحد الشرطين فقط لا يكفى لإثبات أن المجموعة تكافئ ازدواجًا فالقوى المتلاقية فى نقطة إذا انعدمت محصلتها فإن المجموعة تكون متزنة ولا تكافئ ازدواجًا.

### مثال

١) أ ب قضيب خفيف أثرت عليه القوى الموضحة بالشكل أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه.




الحل

بفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة ١٥ نيوتن

$\therefore \overleftarrow{ح} = ١٥ \overleftarrow{ى} - ٨ \overleftarrow{ى} - ٧ \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{٠}$

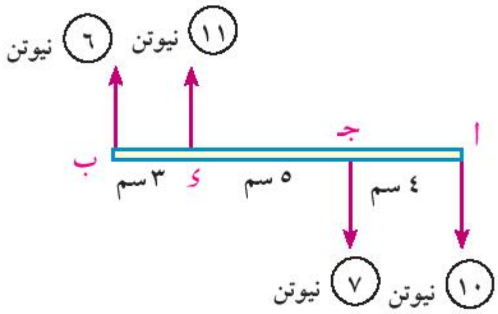
أى أن المحصلة تنعدم

$\therefore$ إما أن تكون المجموعة متزنة أو تكافئ ازدواجًا، لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة (ولتكن أ)

ج $_1$ = -٨ × ٥ - ٧ × ١٤ = -١٣٨

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا، القياس الجبرى لعزمه يساوى - ١٣٨ نيوتن.سم

تفكير ناقد: أوجد مجموع عزوم القوى حول كل من ب، جـ ماذا تلاحظ؟



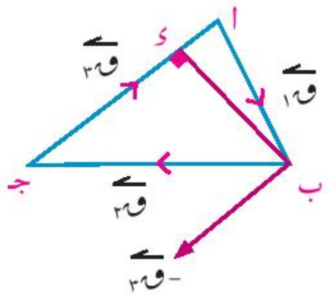

**حاول أن تحل**

(١) **فى الشكل المقابل** أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه.

**قاعدة**

**إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومَثَّلها تمثيلاً تامًّا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.**

**البرهان (غير مطلوب من الطالب)**




تمثل القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ القوى الثلاث تمثيلاً تامًّا، أى مقدارًا واتجاهًا وخط عمل وبفرض أن م تمثل مقدار القوة لوحدة الأطوال

أى $م = \frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{ق_3}{أ جـ}$

∵ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ أ} = \overrightarrow{و}$

$\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} = \overrightarrow{و}$

∴ $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = -\overrightarrow{ق_3}$

**أى أن** محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ هى قوة $(-\overrightarrow{ق_3})$ وتؤثر فى نقطة ب - لذلك فإن المجموعة تكافئ القوتين $\overrightarrow{ق_3}$ وتعمل عند جـ ، $(-\overrightarrow{ق_3})$ وتعمل عند ب، أى أنها تكافئ ازدواجًا.

لتعيين معيار عزم هذا الازدواج نرسم عمودًا من ب على $\overline{أ جـ}$ فيقطعه فى نقطة ى.

معيار عزم الازدواج $= \| \overrightarrow{ق_3} \| \times$ ب ى

ولكن $\| \overrightarrow{ق_3} \|$ = أ جـ × م

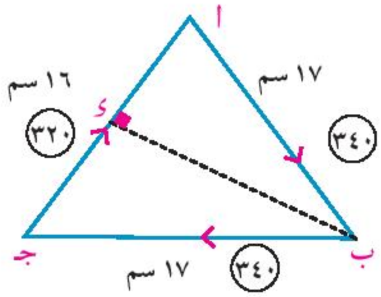
معيار عزم الازدواج = أ جـ × م × ب ى

= ( أ جـ × ب ى ) × م = م × ضعف مساحة سطح المثلث أ ب جـ

## مثال

(٢) أ ب جـ مثلث، فيه أ ب = ب جـ = ١٧ سم ، أ جـ = ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٣٤٠ ، ٣٤٠ ، ٣٢٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

### الحل




حيث إن $\frac{٣٤٠}{١٧} = \frac{٣٤٠}{١٧} = \frac{٣٢٠}{١٦} = ٢٠$

∴ مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال يساوى ٢٠ نيوتن وحيث إن القوى مأخوذة فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواج

معيار عزم الازدواج = ضعف مساحة △أ ب جـ × مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

لإيجاد مساحة △ نرسم $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ فينصفه

∴ ب ء = $\sqrt{١٧^٢ - ٨^٢}$ = ١٥ سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٥ × ٢٠ = ٤٨٠٠ نيوتن. سم

### حاول أن تحل

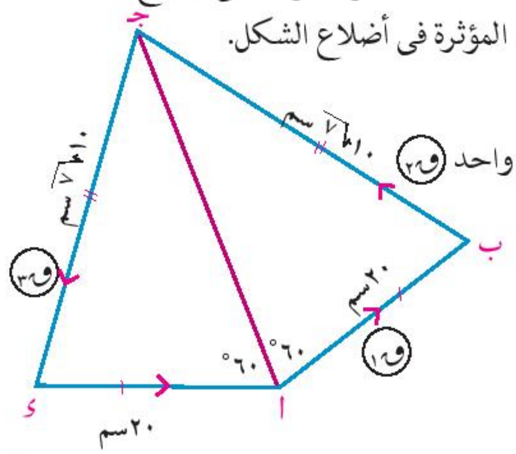
(٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٣٠ سم، ب جـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٦، ٨، ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

**تعميم:** إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

## مثال

(٣) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = أء = ٢٠سم، ب جـ = جـ ء = ١٠ $\sqrt{٧}$ سم ، ق(∠ أ) = ١٢٠° أثرت قوى ممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ فإذا كانت المجموعة تؤول إلى ازدواج معيار عزمه ١٨٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن. سم فى الاتجاه أ ب جـ ء أوجد مقدار القوى المؤثرة فى أضلاع الشكل.

### الحل




∵ القوى تؤثر فى أضلاع المضلع ومأخوذة فى ترتيب دورى واحد

∴ معيار الازدواج = ضعف مساحة الشكل × م

ضعف مساحة الشكل × م = ١٨٠ $\sqrt{٣}$ (١)

من هندسة الشكل △ أ ب جـ ≡ △ أ ء جـ

من قانون جيب التمام فى△ أ ب جـ

(ب جـ)$^{٢}$ = (أ ب)$^{٢}$ + (أ جـ)$^{٢}$ - ٢ أ ب × أ جـ × جتا (ب $\hat{أ}$ جـ)

∴ (١٠ $\sqrt{٧}$)$^{٢}$ = ٢٠$^{٢}$ + (أ جـ)$^{٢}$ - ٢ × ٢٠ × أ جـ × جتا ٦٠

∴ ٧٠٠ = ٤٠٠ + (أ جـ)$^{٢}$ - ٢٠ أ جـ

∴ (أ جـ)$^{٢}$ - ٢٠ أ جـ - ٣٠٠ = صفر

∴ (أ جـ + ١٠) (أ جـ - ٣٠) = ٠ ومنها أ جـ = ٣٠

مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٢ × مساحة △ أ ب جـ

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ جـ × جا ٦٠

= ٢٠ × ٣٠ × جا ٦٠ = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$

**بالتعويض فى (١)**

∴ ٢ × ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ × م = ١٨٠ $\sqrt{٣}$ ومنها م = $\frac{٣}{١٠}$

∵ $\frac{ق_{١}}{أ ب}$ = $\frac{ق_{٢}}{ب جـ}$ = $\frac{ق_{٣}}{جـ ء}$ = $\frac{ق_{٤}}{ء أ}$ = م

∴ $\frac{ق_{١}}{٢٠}$ = $\frac{ق_{٢}}{١٠\sqrt{٧}}$ = $\frac{ق_{٣}}{١٠\sqrt{٧}}$ = $\frac{ق_{٤}}{٢٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ومنها ق$_{١}$ = ٦ نيوتن ، ق$_{٢}$ = ٣ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، ق$_{٣}$ = ٣ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، ق$_{٤}$ = ٦ نيوتن

**حاول أن تحل**

(٣) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٩سم ، أ ء = ٣ سم أثرت القوى $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٣}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٤}}$ ، ممثلة تمثيلاً تامًّا بالقطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ على الترتيب، فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن. سم فى الاتجاه أ ب جـ ء فأوجد مقدار كل من $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٣}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٤}}$

**قاعدة**

**إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدارًا ثابتًا لايساوى الصفر، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.**

**البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)**

أى مجموعة من القوى اما أن تؤول إلى قوة واحدة $\overleftarrow{ق}$ أو تؤول إلى ازدواج أو تكون متزنة.

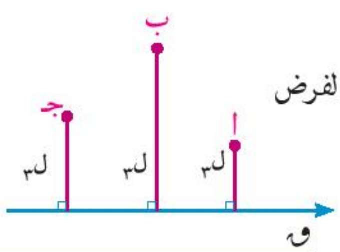
واضح أن القوى غير متزنة لأن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة ما لاينعدم ، نفرض أن المجموعة تكافئ قوة واحدة مقدارها ق وان النقط الثلاث هى أ ، ب ، جـ وان ابعادها عن خط عمل القوة هى ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ ، ل$_{٣}$ على الترتيب ∴ ق × ل$_{١}$ = ق × ل$_{٢}$ = ق × ل$_{٣}$ = المقدار الثابت

وبالقسمة على ق حيث ق ≠ صفر ∴ ل$_{١}$ = ل$_{٢}$ = ل$_{٣}$

أى أن النقط أ ، ب، جـ تقع على مستقيم واحد يوازى خط عمل ق وهذا يتنافى مع الفرض

∴ مجموعة القوى لاتكافئ قوة

∴ المجموعة تكافئ ازدواجا القياس الجبرى لعزمه يساوى المقدار الثابت

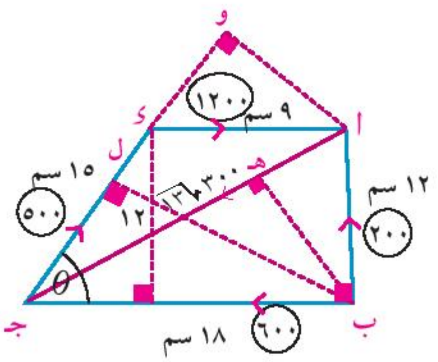


## مثال

(٤) أ ب جـ ى شبه منحرف فيه أى // ب جـ ، ق(∠ب) = ٩٠°، أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٨ سم ، أ ى = ٩سم، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ ث كجم فى ب أ ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ ، أ جـ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

**الحل**

نحسب مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولتكن أ، ب، جـ




$جـ_أ$ = -٦٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × أ و

حيث أ و = ٩ جا $\theta$ = ٩ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ٧,٢

∴ $جـ_أ$ = -٦٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × ٧,٢ = -١٠٨٠٠ ث كجم.سم

$جـ_ب$ = -١٢٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × ب ل + ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ × ب هـ

حيث ب ل = ١٨ جا $\theta$ = ١٨ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ١٤,٤

، ب هـ = $\frac{١٢ \times ١٨}{٦\sqrt{١٣}}$ = $\frac{٣٦}{\sqrt{١٣}}$

∴ $جـ_ب$ = -١٢٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × ١٤,٤ + ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ × $\frac{٣٦}{\sqrt{١٣}}$

= -١٠٨٠٠ ث كجم.سم

∴ $جـ_{جـ}$ = ٢٠٠ × ١٨ - ١٢٠٠ × ١٢

= -١٠٨٠٠ ث كجم.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة، معيار عزمه ١٠٨٠٠ ث كجم.سم

**حاول أن تحل**

(٤) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٠سم، هـ ∈ جـ ب ، و ∈ جـ ى ، بحيث كان جـ هـ = جـ و = ٣٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ١٠، ٢٠، ٣٠، ٢٠ $\sqrt{٢}$ ث كجم فى أ ب ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ ، هـ و على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

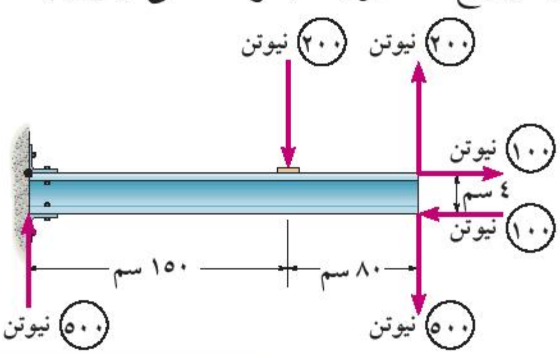
## الازدواج المحصل *Resultant couple*

يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه الازدواج الذى عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين

$\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{جـ_١} + \overrightarrow{جـ_٢}$ ويسمى مجموع ازدواجين مستويين بالازدواج المحصل ( المجموعة تكافئ ازدواجًا)

## مثال

(٥) فى الشكل المقابل أوجد القياس الجبرى للازدواج المحصل



**الحل**

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

ج$_1$ = ٢٠٠ × ٠,٨ = ١٦٠ نيوتن. متر

القوتان ٥٠٠ ، ٥٠٠ تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

ج$_2$ = -٥٠٠ × ٢,٣ = -١١٥٠ نيوتن.متر

القوتان ١٠٠ ، ١٠٠ تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

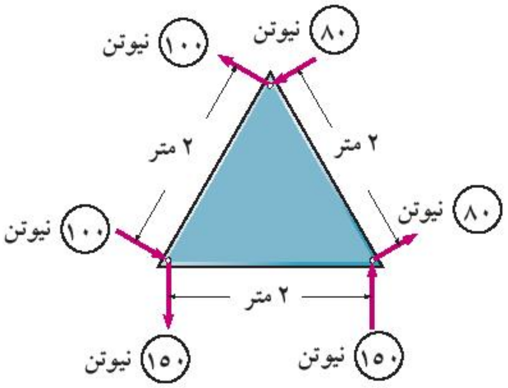
ج$_3$ = -١٠٠ × ٠,٠٤ = -٤ نيوتن.متر

الازدواج المحصل = ج$_1$ + ج$_2$ + ج$_3$

= ١٦٠ + (-١١٥٠) + (-٤) = -٩٩٤ نيوتن.متر

**حاول أن تحل**

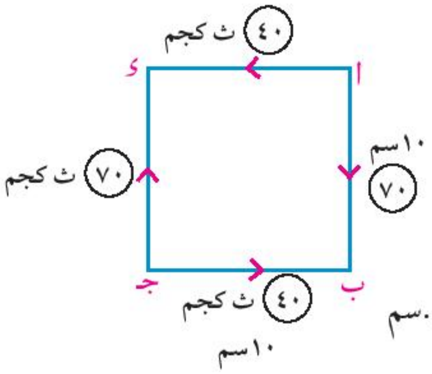
(٥) **الشكل المقابل** يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى كما بالشكل أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.




## مثال

(٦) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم، أثرت قوتان مقدار كل منهما ٤٠ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{اء}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـب}}$ وقوتان مقدار كل منهما ٧٠ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـء}}$ ، أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

**الحل**




القوتان ٤٠، ٤٠ تُكَوِّنان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

ج$_1$ = ٤٠ × ١٠ = ٤٠٠ ث كجم. سم

القوتان ٧٠ ، ٧٠ تُكَوِّنان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

ج$_2$ = -٧٠ × ١٠ = -٧٠٠ ث كجم.سم

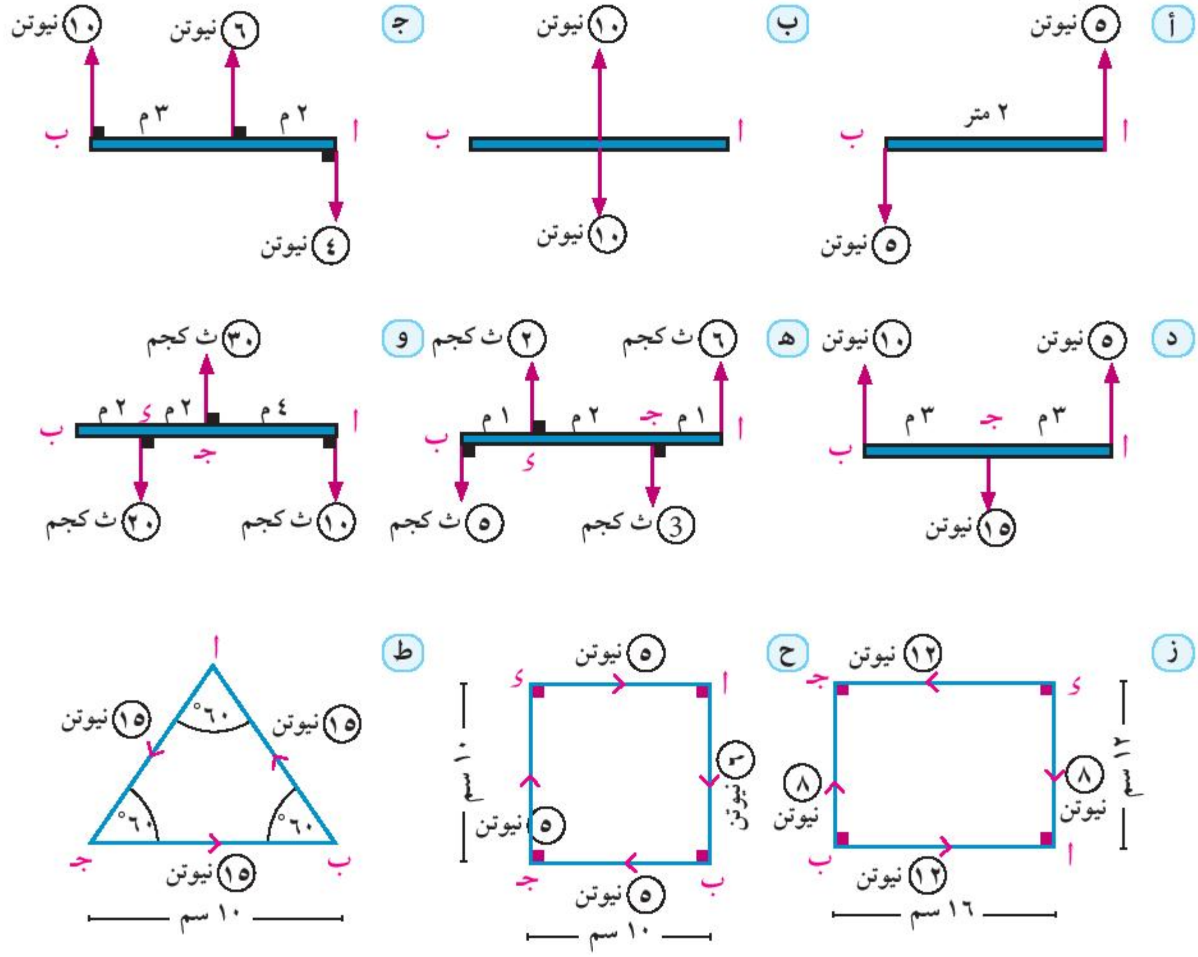
الازدواج المحصل = ج$_1$ + ج$_2$ = ٤٠٠ + (-٧٠٠) = -٣٠٠ ث كجم.سم

**حاول أن تحل**

(٦) أ ب جـ ء مستطيل، فيه أ ب = ٦٠ سم ، ب جـ = ١٦٠ سم ، س ، ص منتصفات $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{اء}}$ على الترتيب، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ق ، ق نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـء}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـب}}$ ، $\overleftarrow{\text{اء}}$ ، $\overleftarrow{\text{سا}}$ ، $\overleftarrow{\text{صجـ}}$ ، على الترتيب، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن. سم. أوجد قيمة: ق.

## تمارين ٣ - ٢

**(١)** بين أى نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه:

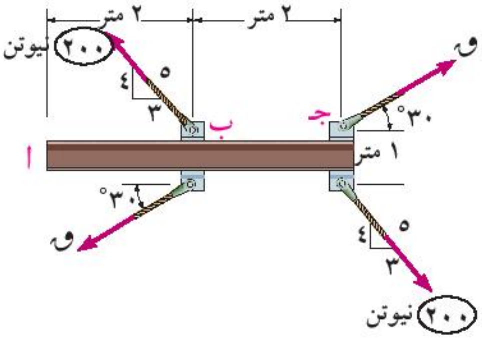



**(٢)** اب جـ ى مربع طول ضلعه ٣ أمتار تؤثر القوى التى مقاديرها ٥، ٢، ٥، ٢ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ ، على الترتيب. بين أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمها.

**(٣)** اب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم أثرت قوى مقدار كل منها ٧ ث. كجم فى كل من $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

**(٤)** اب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٣٠سم، ب جـ = ٤٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥، ٣٠، ١٥، ٣٠ ث.جم فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ ، على الترتيب، أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه، ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ ، جـ عموديتين على $\overline{\text{أ جـ}}$ ، بحيث تتزن المجموعة.

**(٥)** اب جـ ى معين طول ضلعه ١٠ سم، ق(∠ب أ جـ) = ١٢٠° أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران فى ب، ى عموديتين على $\overline{\text{ب ى}}$ بحيث تتزن المجموعة.




(٦) **الشكل المقابل** يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٢٠٠ - ٢٠٠ √٣ نيوتن. متر أوجد ق.

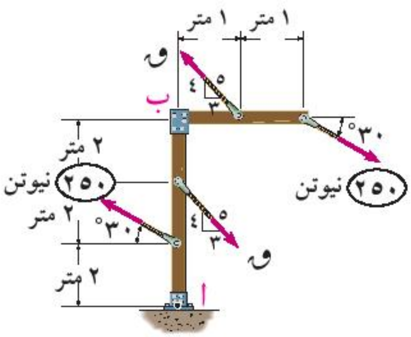
(٧) أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه أ ء // ب جـ ، أ ء = ٩سم أ ب = ء جـ = ١٥سم ، ب جـ = ٣٣ سم أثرت القوى ٤٥، ٩٩ ، ٤٥، ٢٧ فى الاتجاهات أ ب ،ب جـ ، جـ ء ، ء أ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

(٨) أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم، أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ٥٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٣٠ نيوتن فى أ ب ،جـ ب ، جـ ء ، ء هـ، و هـ، و أ على الترتيب. عين عزم الازدواج المحصل.

(٩) أ ب جـ ء هـ خماسى منتظم طول ضلعه ١٥سم. أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ث كجم فى أ ب ،ب جـ ، جـ ء ، ء هـ ، هـ أ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

(١٠) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ب جـ = ٦سم، ق(∠أ ب جـ) = ١٢٠° أثرت قوى مقاديرها ١٨، ١٨، ١٨ √٣ فى أ ب ،ب جـ ، جـ أ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

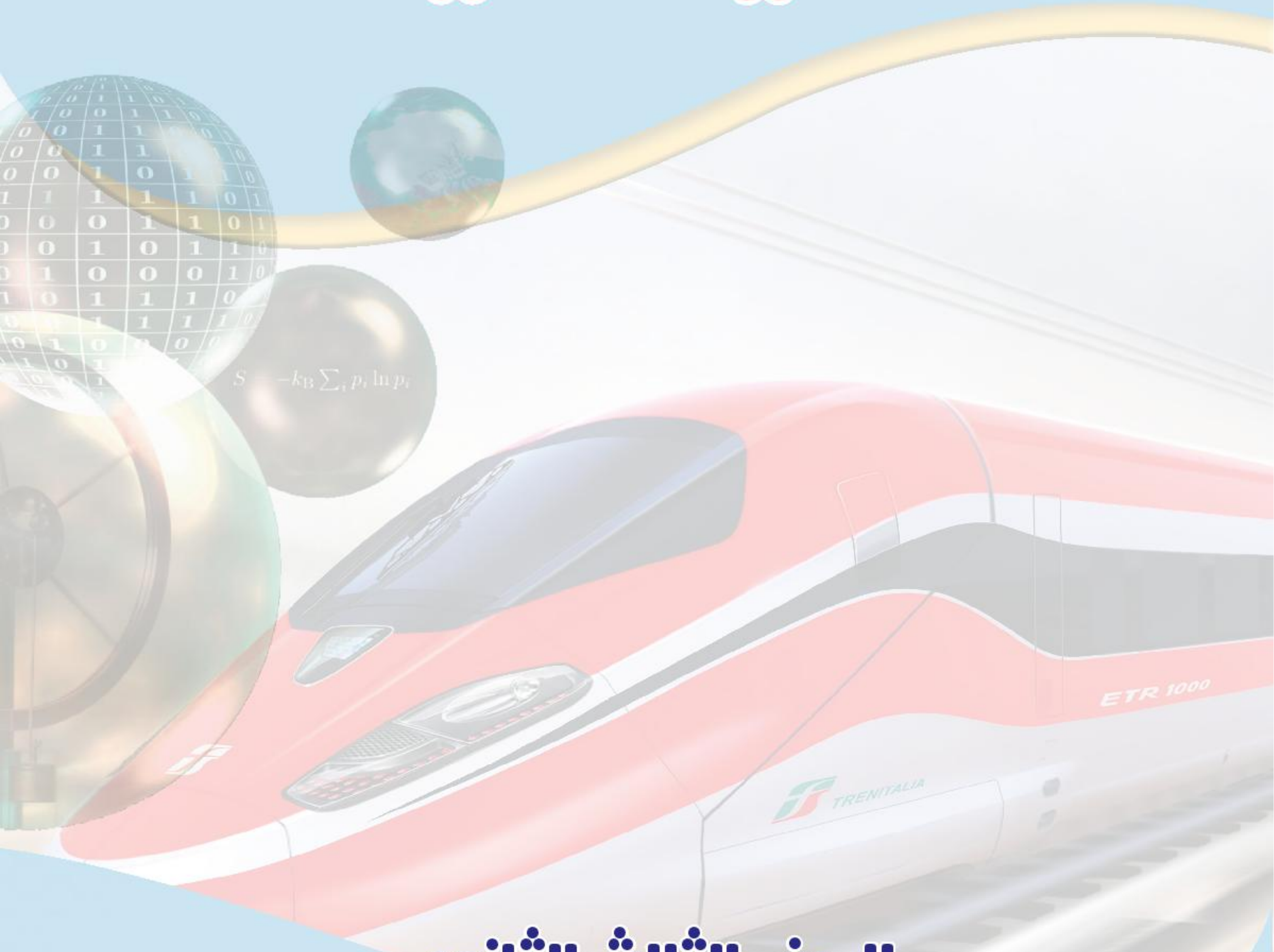
(١١) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٦٠سم أثرت قوى مقاديرها ١٠، ٢٠، ٨٠، ٥٠ نيوتن فى أ ب ،ب جـ ، جـ ء ، ء أ على الترتيب واثرت قوتان مقدارهما ٥٠ √٢ ، ٢٠ √٢ نيوتن فى أ جـ ، ء ب على الترتيب برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم




(١٢) **فى الشكل المقابل** أوجد ق التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٥٠ - ٥٠٠ √٣

## متطلبات قبلية
## فى

# الديناميكا




## الصف الثالث الثانوي

**لا يمتحن فيها الطالب**

## ١ كمية الحركة
*Momentum*

كمية حركة جسم متحرك هى كمية متجهة لها نفس اتجاه سرعة هذا الجسم ومقدارها عند لحظة ما يُقدر بحاصل ضرب كتلة هذا الجسم فى سرعته عند هذه اللحظة ويُرمز لمتجه كمية الحركة بالرمز $\overrightarrow{\text{مـ}}$.

$$\overrightarrow{\text{مـ}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ع}}$$

وفى حالة الحركة الخطية يكون كل من $\overrightarrow{\text{مـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ موازيًا للخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة، ويمكن التعبير عن كل من $\overrightarrow{\text{مـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ بدلالة القياس الجبرى لكل منهما:

$$\text{مـ} = \text{ك ع}$$

حيث مـ ، ع هما القياسان الجبريان لمتجهى كمية الحركة والسرعة على الترتيب.

## ٢ وحدات قياس كمية الحركة
*Units of Momentum*

وحدة معيار كمية الحركة = وحدة كتلة × وحدة سرعة

وفى النظام الدولى للوحدات يُقاس معيار كمية الحركة بوحدة كجم. م/ث

**أى أن:** مـ (كجم. م / ث) = ك (كجم) × ع (م/ث).

**لاحظ أن:** عند ثبوت كتلة الجسم يتناسب مـ مع ع وتكون العلاقة بينهما خطية؛ لذلك تسمى كمية الحركة فى هذه الحالة بكمية الحركة الخطية.

### مثال
**تعريف كمية الحركة**

① احسب كمية حركة دراجة كتلتها ٣٥ كجم تتحرك بسرعة ثابتة قدرها ١٢ م/ث فى اتجاه الشرق.

شكل (١)

**الحل**

∵ مـ = ك ع

∴ مـ = ٣٥ × ١٢ = ٤٢٠ كجم . م/ث

كمية حركة الدراجة = ٤٢٠ كجم . م/ث فى اتجاه الشرق.

**حاول أن تحل**

(١) احسب كمية حركة قطار كتلته ٤٠ طنًّا يتحرك فى اتجاه الشمال بسرعة ثابتة قدرها ٧٢ كم/س.

(٢) احسب كمية حركة سيارة كتلتها ٨٠٠ كجم تتحرك فى اتجاه الجنوب الغربى بسرعة ثابتة قدرها ١٢٦ كم/س.

## مثال

**استخدام المتجهات**

(٢) سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت $\overleftarrow{\text{س}} = (\text{٣ن}^{\text{٢}} - \text{٤ن} + \text{١})\ \overleftarrow{\text{ى}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة اتجاه حركة السيارة، إذا كانت س مقيسة بوحدة المتر فأوجد مقدار كمية حركة السيارة عند بدء الحركة ثم بعد ٣ث من بدء الحركة.

شكل (٢)

**الحل**

$\because \overleftarrow{\text{س}} = (\text{٣ن}^{\text{٢}} - \text{٤ن} + \text{١})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ع}} = \dfrac{\text{ء}\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ء}\overleftarrow{\text{ن}}} = (\text{٦ن} - \text{٤})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

**(١)** عند بدء الحركة ن = ٠ ، $\overleftarrow{\text{ع}} = -\text{٤}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$\because \overleftarrow{\text{م}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}$ $\qquad \therefore \overleftarrow{\text{م}} = \text{٢٠٠٠}\ (-\text{٤}\ \overleftarrow{\text{ى}}) = -\text{٨٠٠٠}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار كمية الحركة = ٨٠٠٠ كجم.م/ث

**(٢)** عندما ن = ٣ث ، **فإن** $\overleftarrow{\text{ع}} = (\text{٦} \times \text{٣} - \text{٤})\ \overleftarrow{\text{ى}} = \text{١٤}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$\because \overleftarrow{\text{م}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}$ $\qquad \therefore \overleftarrow{\text{م}} = \text{٢٠٠٠}\ (\text{١٤}\ \overleftarrow{\text{ى}}) = \text{٢٨٠٠٠}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار كمية الحركة = ٢٨٠٠٠ كجم.م/ث.

**حاول أن تحل**

(٣) سيارة كتلتها ١٢٠٠ كجم تتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت ف = $\text{ن}^{\text{٣}} - \text{١٢ ن}^{\text{٢}}$ حيث ف مقيسة بالمتر، أوجد كمية حركة السيارة بعد ٤ ث من بدء الحركة.

## ٣ التغير فى كمية الحركة *The Change of Momentum*

إذا كان متجها سرعة جسم متحرك عند لحظتين زمنيتين متتاليتين $ن_١$ ، $ن_٢$ على الترتيب هما $\overleftarrow{ع_١}$ ، $\overleftarrow{ع_٢}$ فإن التغير فى كمية حركة الجسم يتحدد بالعلاقة:

$$\Delta \overleftarrow{م} = ك \cdot \Delta \overleftarrow{ع}$$

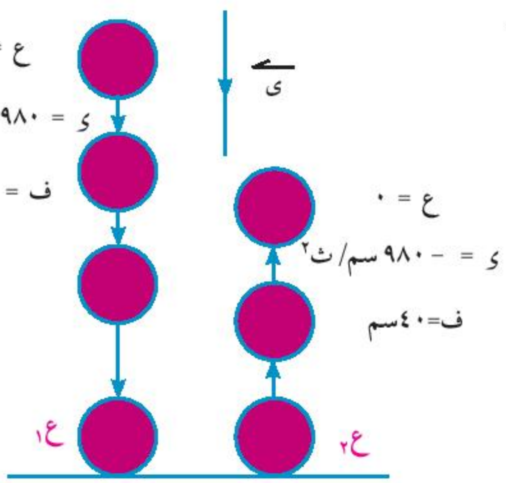
حيث ك كتلة الجسم المتحرك، $\Delta \overleftarrow{ع}$ التغير الحادث فى قيمة سرعته

$\therefore$ التغير فى كمية حركة الجسم $\Delta \overleftarrow{م} = ك \, (\overleftarrow{ع_٢} - \overleftarrow{ع_١})$

### مثال
**التغير فى كمية الحركة**

٣ سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠٠جم من ارتفاع ٩٠سم على سطح أفقى فارتدت إلى ارتفاع ٤٠سم. احسب بوحدة كجم.م/ث مقدار التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم.

**الحل**




شكل (٣)

نعتبر $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة رأسيًّا لأسفل.

دراسة حركة الكرة فى مرحلة السقوط.

$\therefore ع^٢ = ع_٠^٢ + ٢ \, ى \, ف$

$\therefore ع_١^٢ = ٠ + ٢ \times ٩٨٠ \times ٩٠$

$ع_١ = ٤٢٠$ سم / ث

$\therefore \overleftarrow{ع_١} = ٤٢٠ \, \overleftarrow{ى}$

**دراسة حركة الكرة فى مرحلة الارتداد.**

$\therefore ع^٢ = ع_٠^٢ + ٢ \, ى \, ف$

$\therefore ٠ = ع_٢^٢ - ٢ \times ٩٨٠ \times ٤٠$

$ع_٢ = ٢٨٠$ سم / ث

$\therefore \overleftarrow{ع_٢} = -٢٨٠ \, \overleftarrow{ى}$

**التغير فى كمية الحركة** $\Delta \overleftarrow{م} = ك \, (\overleftarrow{ع_٢} - \overleftarrow{ع_١})$

$= \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} (-٢,٨ - ٤,٢) \, \overleftarrow{ى} = -١,٤ \, \overleftarrow{ى}$

$\therefore$ **مقدار التغير فى كمية الحركة** $= ١,٤$ كجم.م/ث

## ٤ القانون الأول لنيوتن *Newton's First Law*

وصف نيوتن من خلال هذا القانون ما الذى يحدث لجسم عندما تنعدم محصلة القوى المؤثرة عليه.

**كل جسيم يحتفظ بحالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من حالته.**

نلاحظ من القانون الأول لنيوتن الآتى :

**(١)** الجسم الساكن يظل ساكنًا ما لم تؤثر عليه قوة تحركه، والجسم المتحرك حركة منتظمة يظل متحركًا بها ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حركته.

**(٢)** يقصد بتعبير "القوة" فى صياغة القانون محصلة جميع القوى المؤثرة على الجسم، ويقاس معيار القوة بوحدة النيوتن فى النظام الدولى للوحدات.

**(٣)** يضع القانون حالتى السكون والحركة المنتظمة فى خط مستقيم فى وضع متكافئ، وتمثل كلتاهما" الحالة الطبيعية" للجسم، عندما تكون محصلة القوى المؤثر عليه مساوية للصفر.

**(٤)** يبين القانون أن الجسم الساكن أو المتحرك حركة منتظمة فى خط مستقيم (أى عندما يكون فى حالته الطبيعية) لا يمكنه تغيير حالته هذه تلقائيًا ، بل لابد أن تؤثر عليه قوة فتخرجه من هذه الحالة . ولهذا السبب سمى القانون الأول لنيوتن" قانون القصور الذاتى ".

## ٥ القصور الذاتى *Inertia*

من القانون الأول لنيوتن يمكن استنتاج أن الأجسام لها ميل طبيعى للمحافظة على حالتها من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم وتعرف هذه الممانعة أو المقاومة للتغيير بالقصور الذاتى.

**مبدأ القصور الذاتى:**

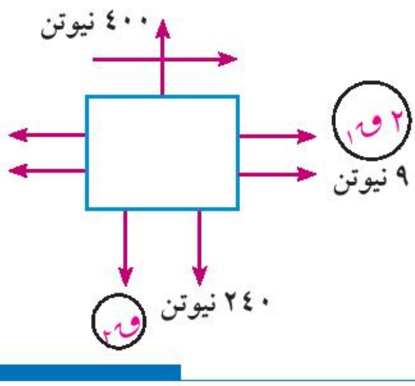
كل جسم قاصر أو عاجز بذاته عن تغيير حالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم.

## ٦ القوة *Force*

يتضمن القانون الأول لنيوتن تعريفًا للقوة بأنها المؤثر الذى يغير أو يعمل على تغيير حالة الجسم من سكون أو حركة منتظمة فى خط مستقيم.

**مثال** (الجسم فى حالة حركة)

**٤** يوضح الشكل المقابل جسمًا يتحرك أفقيًا فى الاتجاه الموضح بسرعة ثابتة قدرها ٨م/ث ، أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$.




شكل (٤)

الحل

∵ الجسم فى حالة حركة منتظمة

∴ القوى الأفقية متزنة

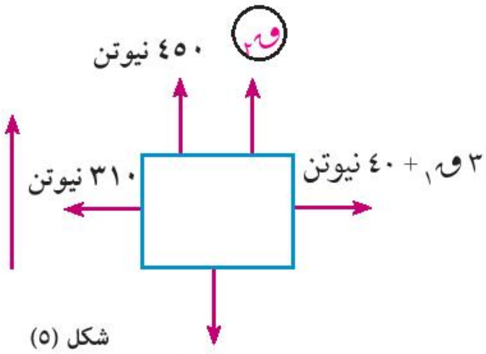
∴ $٢ق_١ + ٩٠ = ٣٠٠ + ١٢٠$

∴ $ق_١ = ١٦٥$ نيوتن

∵ القوى الرأسية متزنة

∴ $٢٤٠ + ق_٢ = ٤٠٠$

∴ $ق_٢ = ١٦٠$ نيوتن



شكل (٥)

حاول أن تحل

④ يوضح الشكل المقابل جسمًا متحركًا رأسيًا لأعلى بسرعة ثابتة تؤثر عليه مجموعة من القوى . أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$.

مثال

⑤ قطار كتلته ٢٠٠ طن، يتحرك تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته. فإذا كانت هذه المقاومة ٩,٦ ث.كجم لكل طن من كتلة القطار عندما كانت سرعة القطار ٧٢ كم / ساعة. فأوجد أقصى سرعة للقطار إذا كانت القاطرة تجره بقوة ثابتة مقدارها ٤,٣٢ ث طن.

**معطيات**

$م_١ = ٩,٦ \times ٢٠٠$

$= ١٩٢٠$ ث كجم

$ع_١ = ٧٢$ كم / س


شكل (٦)

الحل

نفرض أن المقاومة = $م_١$ عندما تكون سرعة القطار $ع_١$.

المقاومة = $م_٢$ عندما تكون سرعة القطار $ع_٢$.

∵ المقاومة تتناسب مع مربع السرعة

$\therefore \frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2}$

يبلغ القطار أقصى سرعة له عندما تكون المقاومة مساوية تمامًا لقوة جَرِّ القطار

فإذا كانت $ع_2$ أقصى سرعة للقطار فإن $م_2 = ٤,٣٢$ ث طن

$\therefore م_2 = ٤٣٢٠$ ث كجم

$\therefore \frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2}$ $\qquad \frac{١٩٢٠}{٤٣٢٠} = \frac{٧٢ \times ٧٢}{ع_2^2}$

$\therefore ع_2 = ١٠٨$ كم/ساعة.

## ٧ القانون الثانى لنيوتن Newton's Second Law

**معدل التغير فى كمية الحركة يتناسب مع القوة المحدثة له، ويحدث فى اتجاه القوة**

$\frac{د}{د ن}(ك \vec{ع}) \propto \vec{ق}$ أى أن $\frac{د}{د ن}(ك \vec{ع}) = أ \vec{ق}$ (حيث أ ثابت التناسب)

وعند ثبوت كتلة الجسم أثناء الحركة فإن :

$ك \frac{د \vec{ع}}{د ن} = أ \vec{ق}$

وتكون $ك \vec{جـ} = أ \vec{ق}$

و إذا عرفنا وحدة القوى بأنها القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته وحدة الكتل لأكسبته وحدة العجلات، وبالتعويض فى المعادلة السابقة نجد أن:

$١ = أ \times ١$ $\qquad \therefore أ = ١$

**ونأخذ المعادلة السابقة الصورة** $ك \vec{جـ} = \vec{ق}$

وتسمى هذه المعادلة **بمعادلة الحركة لجسم ثابت الكتلة**، وتعتبر المعادلة الأساسية لعلم الديناميكا. إذ يمكن تطبيقها على جميع الأجسام المتحركة ثابتة الكتلة.

من معادلة الحركة السابقة نجد أن كل من $\vec{ق}$ ، $\vec{جـ}$ لهما نفس الاتجاه، فإذا قيست $\vec{جـ}$ فى اتجاه معين لزم قياس $\vec{ق}$ فى الاتجاه نفسه ؛ لذلك من الأنسب كتابة معادلة الحركة فى الصورة :

$$\boxed{ك \vec{جـ} = \vec{ق}}$$

لتحديد اتجاه العجلة اولاً.

و إذا كانت جـ ، ق تعبر عن القياس الجبرى لكل من $\vec{جـ}$ ، $\vec{ق}$ على الترتيب،

فإن معادلة الحركة لجسم ثابت الكتلة تأخذ الصورة:

$$\boxed{\text{ك جـ} = \text{ق}}$$

حيث ك كتلة الجسم المتحرك، جـ عجلة الحركة، ق تعبر عن القياس الجبرى لمحصلة مجموعة القوى المؤثرة على الجسم، أى أن:

$$\boxed{\text{ك جـ} = \text{مجـ ق}}$$

## ٨ وحدات القوة والكتلة *Units of Force and Units of Mass*

عند استنتاج معادلة الحركة لجسم متحرك اخترنا وحدات محددة لكل من القوة والكتلة والعجلة، حتى يكون ثابت التناسب مساويًا للواحد الصحيح، وتصبح معادلة الحركة على الصورة ك جـ = ق، لذلك عند استخدام معادلة الحركة، فإننا نستخدم الوحدات المطلقة للقوة مثل النيوتن، الداين

| |
|---|
| ك × جـ = ق |
| ١ كجم × ١ م/ ث$^{٢}$ = ١ نيوتن |
| ١ جم × ١ سم/ ث$^{٢}$ = ١ داين |

**تذكر أن**

١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن

١ ث جم = ٩٨٠ داين

## ٩ الوزن والكتلة *The Weight and the Mass*

وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم، فإذا كان لدينا جسم كتلته ١ كجم، فإن وزنه طبقًا لمعادلة الحركة يساوى ١ ث كجم

∵ ك جـ = ق

∴ ١ × ٩,٨ = ق

ق = ٩,٨ نيوتن = ١ ث كجم

### مثال

(٦) أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن على جسم ساكن كتلته ٨ كجم، فحركته فى اتجاهها بعجلة منتظمة، احسب المسافة المقطوعة بعد ١٢ ث وسرعته عندئذ.

**الحل**

ق = ١٠ نيوتن ، ع. = ٠

ك = ٨ كجم

ن = ١٢ ث

**معادلة حركة الجسم**

ك جـ = ق

$\therefore$ ٨ جـ = ١٠

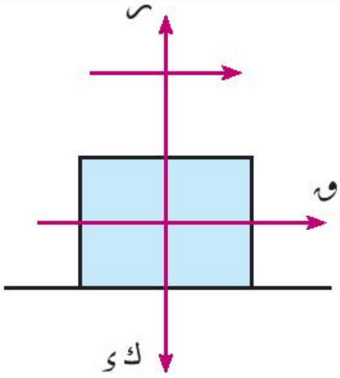
جـ = $\frac{٥}{٤}$ م/ث

$\because$ ع = ع. + جـ ن

$\therefore$ ع = ٠ + $\frac{٥}{٤}$ × ١٢ = ١٥ م/ث

$\because$ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ $ن^٢$

$\therefore$ ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٥}{٤}$ × ١٤٤ = ٩٠ متر



شكل (٧)

### مثال

(٧) سقط جسم كتلته ٣ كجم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٥سم، أوجد مقاومة الرمل للجسم بثقل الكيلو جرام بفرض ثبوتها علمًا بأن الجسم تحرك بعجلة منتظمة داخل الرمل

**الحل**

**مرحلة السقوط الحر**

$ع^٢$ = $ع.^٢$ + ٢ ى ف

$ع^٢$ = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠

ع = ١٤ م/ث

**مرحلة الغوص فى الرمل**

$ع^٢$ = $ع.^٢$ + ٢جـ ف

٠ = $(١٤)^٢$ + ٢جـ × ٠,٠٥

جـ = -١٩٦٠ م/$ث^٢$

**معادلة الحركة**

ك جـ = ك ى - م

٣ × -١٩٦٠ = ٣ × ٩,٨ - م

$\therefore$ م = ٣×٩,٨ + ٣ × ١٩٦٠

م = ٥٩٠٩,٤ نيوتن

م = ٦٠٣ ث كجم

## ١٠ القانون الثالث لنيوتن: Newtns Third Law

لكل فعل رد فعل مساوٍ له فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه.

### مثال

٨ جسم كتلته ١٢ كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، أثرت عليه قوة مقدارها ٨٨,٨ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى، أوجد سرعة هذا الجسم بعد ١٤ ثانية من بدء الحركة، إذا أوقفت القوة المؤثرة على الجسم عند هذه اللحظة، أوجد المسافة التى يتحركها الجسم على المستوى بعد ذلك حتى يسكن

الحل

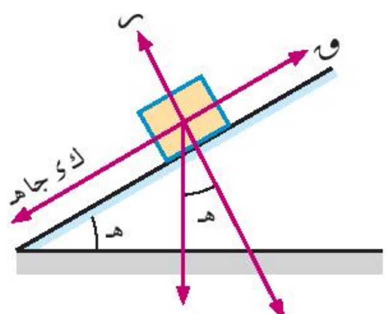
∵ ق = ٨٨,٨ نيوتن

∵ ك ء جا هـ = ١٢ × ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$

= ٥٨,٨ نيوتن

ق > ك ء جا هـ

∴ الجسم يتحرك لأعلى المستوى بعجلة منتظمة جـ



شكل (٨)

معادلة الحركة:

ك جـ = ق - ك ء جا هـ

١٢ جـ = ٨٨,٨ - ٥٨,٨

جـ = ٢,٥ م/ث$^{٢}$

∵ ع = ع. + جـ ن = ٠ + ٢,٥ × ١٤ = ٣٥ م/ث

بعد إيقاف تأثير القوة يتحرك الجسم فى نفس اتجاهه السابق بتقصير منتظم جـ َ

معادلة الحركة:

ك جـَ = - ك ء جا هـ

جـَ = - ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$ = - ٤,٩ م/ث$^{٢}$

يقطع الجسم مسافة ف حتى يصل لسكون لحظى حيث

ع$^{٢}$ = ع.$^{٢}$ + ٢ جـَ ف

٠ = (٣٥)$^{٢}$ - ٢ × ٤,٩ ف

ف = ١٢٥ متر

### مثال

٩ مستوى مائل خشن طوله ٢٥٠ سم، وارتفاعه ١٥٠ سم، وُضع عليه جسم فى حالة سكون فانزلق الجسم إلى أسفل المستوى، وكانت عجلة الحركة تساوى ١٩٦ سم/ث$^{٢}$، أوجد معامل الاحتكاك الحركى، ثم أوجد سرعة الجسم بعد أن يقطع ٢٠٠ سم على المستوى.

**الحل**

$\text{ر} = \text{ك ء جتا هـ} = \frac{٤}{٥}\text{ ك ء}$

$\because$ الجسم يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة

$\text{ك جـ} = \text{ك ء جا هـ} - \text{م}_{\text{ك}}\text{ ر}$

$١٩٦\text{ ك} = \frac{٣}{٥}\text{ ك ء} - \text{م}_{\text{ك}} \times \frac{٤}{٥}\text{ ك ء}$

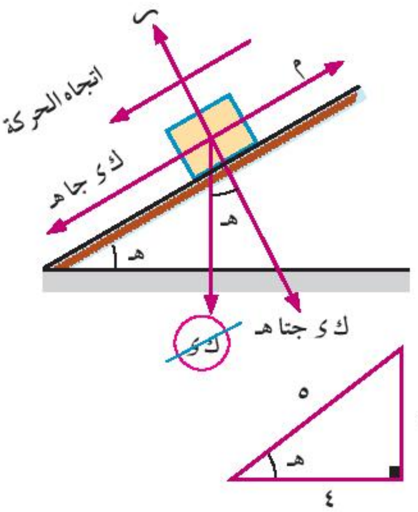
$١٩٦ = \frac{٣}{٥} \times ٩٨٠ - \text{م}_{\text{ك}} \times \frac{٤}{٥} \times ٩٨٠$

$\therefore \text{م}_{\text{ك}} = \frac{١}{٢}$

$\because \text{ع}^٢ = \text{ع}^٢ + ٢\text{ جـ ف}$

$\text{ع}^٢ = ٠ + ٢ \times ١٩٦ \times ٢٠٠$

$\therefore \text{ع} = ٢٨٠\text{ سم/ث}$




شكل (٩)

## مثال

(١٠) جسم كتلته ١٢ كجم، موضوع على مستوى أفقي خشن، معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ بينما معامل الاحتكاك الحركى يساوي $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ احسب القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة، ثم أوجد القوة التى تجعله يتحرك بعجلة قدرها $\frac{٤٩\sqrt{٣}}{٢٠}$ م/ث$^٢$ إذا كانت القوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°.

**الحل**

**أولًا:** القوة تجعل الجسم على وشك الحركة

$\text{ر} + \text{ق جا } ٣٠ = \text{و}$

$\text{ر} = (١٢ - \frac{١}{٢}\text{ق})\text{ ث كجم}$

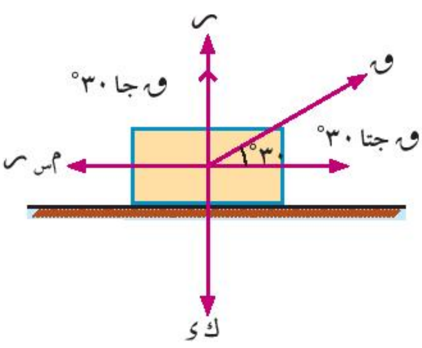
$\because \text{ق جتا } ٣٠ = \text{م}_{\text{س}}\text{ ر}$

$\therefore \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ ق} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}(١٢ - \frac{١}{٢}\text{ق})$

$٣\text{ ق} = ٢٤ - \text{ق}$

$٤\text{ ق} = ٢٤$

$\text{ق} = ٦\text{ ث كجم}$




شكل (١٠)

**ثانيًا:** القوة تحرك الجسم بعجلة قدرها $\frac{٤٩\sqrt{٣}}{٢٠}$ م/ث$^٢$

$\because \text{ر} = \text{ك ء} - \text{ق جا } ٣٠$ أى أن $\text{ر} = (١٢ \times ٩{,}٨ - \frac{١}{٢}\text{ ق})$ نيوتن

$\because \text{ك جـ} = \text{ق جتا } ٣٠ - \text{م}_{\text{ك}}\text{ ر}$

$١٢ \times \frac{٤٩\sqrt{٣}}{٢٠} = \text{ق} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}(١٢ \times ٩{,}٨ - \frac{١}{٢}\text{ ق})$

$١٢ \times \frac{٤٩\cancel{\sqrt{٣}}}{٢٠} = \frac{٥\cancel{\sqrt{٣}}}{٨}\text{ ق} - ٣\sqrt{٣} \times ٩{,}٨$

$\text{ق} = ٩٤{,}٠٨$ نيوتن

ثانيا
الديناميكا

# الحركة فى خط مستقيم

## Rectilinear Motion

الوحدة
١

### مقدمة الوحدة

فى هذه الوحدة سوف ندرس الحركة الخطية لجسيم متحرك وتحليل هذه الحركة ودراسة الموضع والإزاحة ومتجه السرعة وعجلة الحركة للجسيم، ويتم تحديدها عند أى لحظة خلال حركة الجسيم على الخط المستقيم سواء كانت الحركة منتظمة أو غير منتظمة مستخدمين فى ذلك طرق التكامل والتفاضل لاستنتاج عناصر الدراسة وسيتم تحليل الحركة الخطية بيانيًّا من خلال منحنيات الحركة، واستخدام ذلك فى حل المسائل المختلفة، ولن تقتصر الدراسة على الجسيم المتحرك فقط ولكن سيؤخذ فى الاعتبار الأجسام الأخرى المختلفة كالسيارات والقطارات والطائرات وغير ذلك.

### مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يستخدم ($\text{ع} = \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$) للتعبير عن السرعة إذا كانت الإزاحة دالة فى الزمن
- يستخدم ($\text{جـ} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$) للتعبير عن العجلة إذا كانت السرعة دالة فى الزمن
- يعبر عن العجلة ($\text{جـ} = \text{ع} \frac{\text{ءع}}{\text{ءف}}$) كدالة فى الإزاحة إذا كانت السرعة دالة فى الإزاحة
- إذا كانت كل من ف . ع. جـ دوالًا فى الزمن فإن:
  - $\text{ع} = \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} \Leftrightarrow \int \text{ع ءن} = \int \text{ءف} \quad \therefore \text{ف} = \int \text{ع ءن}$
  - $\text{جـ} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \Leftrightarrow \int \text{جـ ءن} = \int \text{ءع} \quad \therefore \text{ع} = \int \text{جـ ءن}$
- إذا كانت جـ دالة فى الإزاحة فإن:
  - $\text{جـ} = \text{ع} \frac{\text{ءع}}{\text{ءف}} \Leftrightarrow \int \text{جـ ءف} = \int \text{ع ءع}$

## المصطلحات الأساسية

- متجه الموضع *Position Vector*
- متجه السرعة اللحظية *Instantaneous Veiocty Vector*
- متجه العجلة اللحظية *Instantaneous Acceleration Vector*
- القياس الجبري لمتجه السرعة اللحظية *Algebraic Measure of Instantaneous Veiocity Vector*
- القياس الجبري لمتجه العجلة اللحظية *Algebraic Measure of Instantaneous Acceleration Vector*
- متجه السرعة المتوسطة *Average Velocity*
- القياس الجبري لمتجه السرعة المتوسطة *Algebraic Measure of Average Velocity Vector*
- متوسط مقدار السرعة *Average Speed*
- متجه العجلة المتوسطة *Average Acceleration Vector*
- القياس الجبري لمتجه العجلة المتوسطة *Algebraic Measure of Average Acceleration Vector*

## دروس الوحدة

(١ - ١): تفاضل وتكامل الدوال المتجهة.

## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مخطط تنظيمى للوحدة

الوحدة الأولى

١ - ١

# تفاضل وتكامل الدوال المتجهة

**Differentiation of Vector Functions**

## تعلم

### ١- التكامل المحدد:

$\int_{أ}^{ب} د'(س) \cdot ءس = د(ب) - د(أ)$

فمثلًا: $\int_{١}^{٤} (س^{٢} + ٢س - ١)\, ءس$

$= [\frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} - س]_{١}^{٤} = [\frac{٦٤}{٣} + ١٦ - ٤] - [\frac{١}{٣} + ١ - ١] = ٣٣$

وسوف يدرس التكامل المحدد فى كتاب التفاضل.

- إذا كانت ف دالة فى الزمن(ن) فإن:
- $ع = \frac{ءف}{ءن}$ ، $ف = \int ع\, ءن$
- إذا كانت ع دالة فى الزمن (ن) فإن:
  $جـ = \frac{ءع}{ءن}$
- إذا كانت ع دالة فى الازاحة (ف) فإن
  $جـ = ع \frac{ءع}{ءف}$

### ١- الحركة فى خط مستقيم: *Rectilinear Motion*

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم فيقال إنه يتحرك حركة خطية.

### متجه الموضع : *Position Vector*

متجه موضع الجسيم كمية متجهه و يمكن التعبير عنها كدالة فى الزمن و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ر}$ (ن) و يقاس معياره بوحدة طول.


إذا تحرك جسيم على المستقيم ل وكانت النقطة و ∈ ل، $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة يوازى المستقيم ل فإن متجه موضع الجسيم عند النقطة أ بالنسبة للنقطة و هو $\overleftarrow{وأ} = ٤\ \overleftarrow{ى}$ .

### متجه الإزاحة : *Displacement Vector*

يعرف متجه إزاحة جسيم بأنه التغير فى متجه موضعه و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ف}$ .

و على وجه العموم $\boxed{\overleftarrow{ف}(ن) = \overleftarrow{ر}(ن) - \overleftarrow{ر}(٠)}$

- المسافة المقطوعة كمية قياسية (تتحدد بمعلومية مقدارها فقط)، بينما الإزاحة كمية متجهه (تتحدد بمعلومية المقدار و الإتجاه)

**المصطلحات الأساسية**

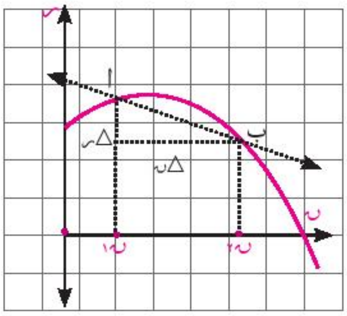
- الحركة فى خط مستقيم *Rectilinear Motion*
- موضع الجسيم *Position of the Porticle*
- الإزاحة *Displacement*
- المسافة *Distance*
- مقدار السرعة *Speed*
- متجه السرعة *Velocity*
- متجه السرعة المتوسطة *Average Velocity*
- متجه السرعة اللحظية *Instantaneous Velocity*
- العجلة المتوسطة *Average Acceleration*
- العجلة *Accelertion*

**الأدوات المستخدمة**

- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

- معيار متجه الإزاحة $\leq$ المسافة المقطوعة.
- تستخدم الرموز ر ، ف للتعبير عن القياس الجبرى لمتجهات الموضع $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{ف}$ على الترتيب.

## متجه السرعة المتوسطة : *Average Velocity Vector*




إذا كانت $\overleftarrow{ف} = \Delta \overleftarrow{ر}$ هي إزاحة الجسيم خلال فترة زمنية $\Delta$ ن فإن متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{ع}_{م} = \frac{\overleftarrow{ف}}{\Delta ن}$ فمن منحنى الموضع الزمن : إذا كانت $\Delta ن = ن_2 - ن_1$ فإن القياس الجبرى للسرعة المتوسطة $ع_{م}$ يساوي ميل القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ لمنحنى الموضع-الزمن.

## متجه السرعة اللحظية : *Instantaneous velocity vector*

ويعرف متجه السرعة اللحظية $\overleftarrow{ع}$ عند أي لحظة زمنية ن بالعلاقة:

$$\overleftarrow{ع} = \underset{\Delta ن \to 0}{\text{نها}} \frac{\Delta \overleftarrow{س}}{\Delta ن} = \underset{\Delta ن \to 0}{\text{نها}} \frac{\overleftarrow{ر}(ن + \Delta ن) - \overleftarrow{ر}(ن)}{\Delta ن}$$

ومن تعريف المشتقة يتضح أن : $\overleftarrow{ع} = \frac{د}{د ن}(\overleftarrow{ر})$ (ميل المماس لمنحنى الموضع – الزمن)

وبالتالي : $\int_{ر_0}^{ر} د \overleftarrow{ر} = \int_{0}^{ن} \overleftarrow{ع}\, د ن$ $\quad \overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ر}_0 = \int_{0}^{ن} \overleftarrow{ع}\, د ن$ $\quad \overleftarrow{ف} = \int_{0}^{ن} \overleftarrow{ع}\, د ن$

- المسافة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[ن_1 ، ن_2] = \int_{ن_1}^{ن_2} |ع|\, د ن$

- أي أن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[ن_1 ، ن_2]$ تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين محور الزمن ومنحنى السرعة الزمن في هذه الفترة.

## متوسط مقدار السرعة : *Average Speed*

متوسط مقدار سرعة الجسم خلال فترة زمنية ن يساوي خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن المستغرق

$$\text{متوسطة مقدار السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

## مثال

١) قذف حجر رأسيًا لأعلى، وكان ارتفاعه ف بعد ن ثانية من قذفه يعطى بالعلاقة ف = ٤٩ ن - ٤,٩ ن$^{٢}$ حيث ف بالمتر.

أ) أوجد أقصى ارتفاع يبلغه الجسم المقذوف.

ب) أوجد القياس الجبرى لمتجه السرعة عندما يكون الحجر على ارتفاع ٧٨,٤ مترًا، ثم أوجد معيار سرعته عندئذ.

جـ) ارسم كلًّا من منحنى الموضع - الزمن ومنحنى السرعة -الزمن واستخدمه فى تحليل الحركة.

### الحل

فى النظام الإحداثى للحركة فى خط مستقيم نعتبر ف تقيس الارتفاع (الموضع) عن نقطة القذف، ع تكون موجبة فى حالة الحركة لأعلى.

∵ ف (ن) = ٤٩ ن - ٤,٩ ن$^{٢}$

∵ ع (ن) = $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$

∴ ع (ن) = ٤٩ - ٩,٨ ن

أ) يبلغ الحجر أقصى ارتفاع له عندما ع = ٠

∴ ٤٩ - ٩,٨ ن = ٠

∴ ن = ٥ ث

∴ أقصى ارتفاع ف (٥) = ٤٩ × ٥ - ٤,٩ × ٥$^{٢}$ = ١٢٢,٥ متر

ب) يكون الحجر على ارتفاع ٧٨,٤ متر عندما ف = ٧٨,٤ متر

∴ ٤٩ ن - ٤,٩ ن$^{٢}$ = ٧٨,٤

∴ ٤,٩ ن$^{٢}$ - ٤٩ ن + ٧٨,٤ = ٠

**بقسمة طرفى المعادلة على ٤,٩ نجد أن:** ن$^{٢}$ - ١٠ ن + ١٦ = ٠

∴ (ن - ٢) (ن - ٨) = ٠

∴ ن = ٢ ث أو ن = ٨ ث

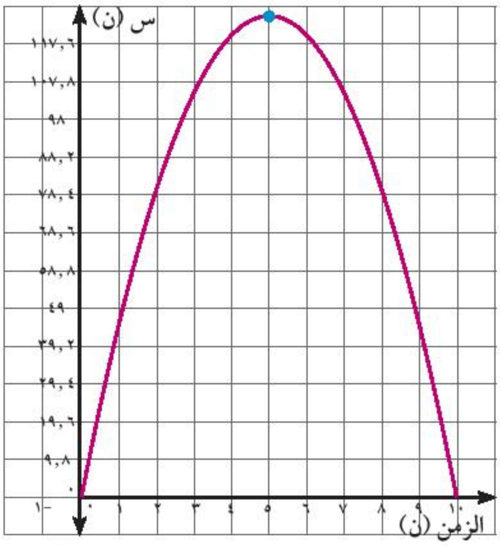
∴ ع (٢) = ٤٩ - ٩,٨ × ٢ = ٢٩,٤ م/ث

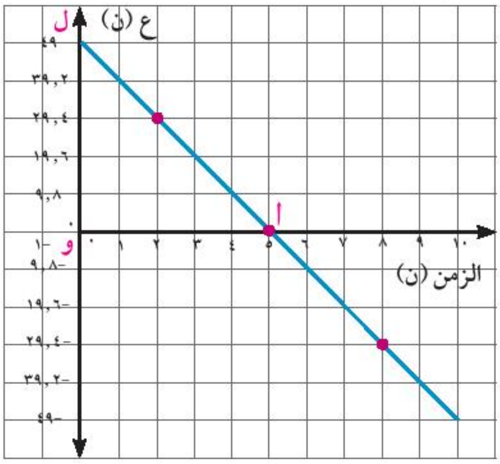
∴ ع (٨) = ٤٩ - ٩,٨ × ٨ = -٢٩,٤ م/ث

**أى أن:** الحجر يكون على ارتفاع ٧٨,٤ متر مرة صاعدًا بعد ٢ ث ومرة هابطًا بعد ٨ ث

القياس الجبرى لمتجه السرعة إما ٢٩,٤ أو - ٢٩,٤

∴ مقدار سرعة الحجر فى الحالتين = |± ٢٩,٤| = ٢٩,٤ م / ث




ج) من منحنى الموضع - الزمن نجد أن:

- الحجر يبلغ أقصى ارتفاع له ١٢٢,٥ متر عندما ن = ٥ ث (نقطة رأس المنحنى).
- يعود الحجر لنقطة القذف مرة أخرى عندما ن = ١٠ ث النقطة ب (١٠ ، ٠)
- مرحلة الصعود استغرقت ٥ ثوان، ومرحلة الهبوط استغرقت ٥ ثوان أخرى.
- الحجر كان على ارتفاع ٧٨,٤ متر عندما ن = ٢ ث ، ن = ٨ ث

من منحنى السرعة - الزمن نجد أن:

١- السرعة الابتدائية للحجر كانت ٤٩ م / ث وأخذت سرعته فى التناقص خلال الفترة الزمنية ]٠ ، ٥[ حتى سكن لحظيًّا عندما ن = ٥ وعندها وصل لأقصى ارتفاع له ثم أخذت سرعته فى التزايد فى الاتجاه المضاد فى الفترة الزمنية ]٥ ، ١٠[ حتى عاد مرة أخرى لنقطة القذف عندما ن = ١٠ ث بنفس سرعة القذف ٤٩ م / ث.

٢- يمكن حساب أقصى ارتفاع للحجر من خلال منحنى السرعة - الزمن بإحدى طريقتين:

- أقصى ارتفاع = مساحة △ و أ ل = $\frac{١}{٢}$ و أ × و ل = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤٩ = ١٢٢,٥ متر

بحساب التكامل

أقصى ارتفاع = $\int_{٠}^{٥}$ ع ء ن = $\int_{٠}^{٥}$ (٤٩ - ٩,٨ ن) ء ن = [ ٤٩ن - ٤,٩ ن$^{٢}$ ]$_{٠}^{٥}$ = ١٢٢,٥متر .

تفكير ناقد: كيف تحسب من المنحنى السابق السرعة - الزمن فى مثال (١) المسافة المقطوعة خلال رحلة الحجر حتى عودته إلى نقطة القذف، وكذلك إزاحته خلال هذا الزمن؟

حاول أن تحل:

١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان موضعه $\overleftarrow{ر}$ عند أى لحظة زمنية ن يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ر}$ (ن) = (ن$^{٢}$ - ٤ن + ٣) $\overleftarrow{ى}$ حيث ر مقاسه بالمتر ، ن بالثانية، $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسيم.

أ) أوجد إزاحة الجسيم خلال الثوانى الثلاث الأولى

ب) أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما ن ∈ [ ٠، ٢]



(جـ) أوجد متجه سرعة الجسيم عندما ن = ٤

(د) من خلال منحنى السرعة - الزمن، منحنى الموضع - الزمن قم بتحليل حركة الجسيم، وبين متى يغير الجسيم اتجاه حركته.

## متجه العجلة المتوسطة : *Average Acceleration*

إذا كانت $\Delta \overrightarrow{ع}$ تعبر عن التغير في متجه السرعة خلال الفترة الزمنية $\Delta$ ن فإن متجه العجلة المتوسطة $\overrightarrow{ج_م}$ يعطى بالعلاقة

$$\overrightarrow{ج_م} = \frac{\Delta \overrightarrow{ع}}{\Delta ن} \quad \text{أى أن} \quad \overrightarrow{ج_م} = \frac{\overrightarrow{ع}(ن + \Delta ن) - \overrightarrow{ع}(ن)}{\Delta ن}$$

## متجه العجلة اللحظية :

> **تذكر أن**
>
> الرموز جـ ، ع ، س تستخدم لتدل على القياسات الجبرية لكل من العجلة ، متجه السرعة والموضع على الترتيب.

يعرف متجه العجلة اللحظية $\overrightarrow{ج}$ عند أى لحظة زمنية ن بالعلاقة:

$$\overrightarrow{ج} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{ع}}{\Delta ن} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\overrightarrow{ع}(ن + \Delta ن) - \overrightarrow{ع}(ن)}{\Delta ن}$$

ومن تعريف المشتقة $\overrightarrow{ج} = \frac{د}{د ن}(\overrightarrow{ع})$

أى أن متجه العجلة هو معدل تغير متجه السرعة بالنسبة للزمن (ميل المماس لمنحنى السرعة - الزمن)

وبالتالى $\int_{ع_0}^{ع} د \overrightarrow{ع} = \int_{0}^{ن} \overrightarrow{ج}\, د ن$ $\qquad$ $\overrightarrow{ع} - \overrightarrow{ع_0} = \int_{0}^{ن} \overrightarrow{ج}\, د ن$

## الحركة المتسارعة والحركة التقصيرية:

إذا تحرك جسم حركة متغيرة فيقال أن الحركة:

متسارعة : إذا كانت $\boxed{ع\, جـ > 0}$ وهذا يعنى أن مقدار السرعة (معيار متجه السرعة) يزداد.

تقصيرية : إذا كانت $\boxed{ع\, جـ < 0}$ وهذا يعني أن مقدار السرعة (معيار متجه السرعة ) ينقص .

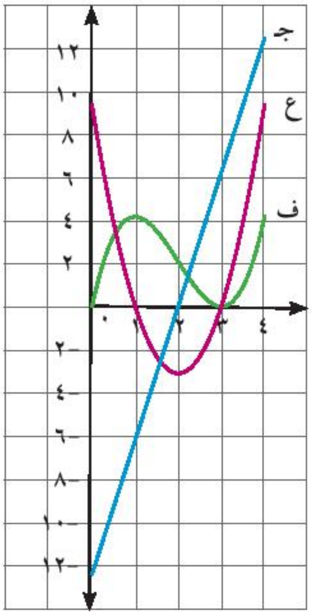
### مثال

(٢) إذا كان القياس الجبرى لإزاحة جسيم يتحرك فى خط مستقيم يعطى بالعلاقة ف = $ن^3 - 6ن^2 + 9ن$ حيث ف مقاسه بالمتر ، ن بالثانية

(أ) أوجد عجلة الجسيم عند انعدام السرعة

(ب) أوجد معيار سرعة الجسيم عندما تنعدم العجلة

(جـ) أوجد المسافة المقطوعة بواسطة الجسيم خلال الفترة من ن = ٠ إلى ن = ٢




**الحل**

$\because$ ف $=$ ن$^{٣}$ - ٦ن$^{٢}$ + ٩ن   $\therefore$ ع $= \frac{دف}{دن} =$ ٣ن$^{٢}$ - ١٢ن + ٩

$\therefore$ جـ $= \frac{دع}{دن} =$ ٦ن - ١٢

(أ) تنعدم سرعة الجسيم **عندما** ٣ن$^{٢}$ - ١٢ن + ٩ = ٠

$\therefore$ ن$^{٢}$ - ٤ن + ٣ = ٠

(ن - ١) (ن - ٣) = ٠   عندما ن = ١ أو ن = ٣

**جـ (١)** = ٦ (١) - ١٢ = -٦ م/ث$^{٢}$

**جـ (٣)** = ٦ (٣) - ١٢ = ٦ م/ث$^{٢}$

(ب) تنعدم عجلة الجسيم **عندما** ٦ن - ١٢ = ٠   $\therefore$ ن = ٢

معيار السرعة = |ع(٢)| = |٣ × ٤ - ١٢ × ٢ + ٩| = ٣ م/ث

(جـ) من دراسة منحنى السرعة - الزمن لحركة الجسيم أو بدراسة إشارة ع (ن) نجد أن الجسيم يتحرك فى الاتجاه الموجب فى الفترة ٠ $\leqslant$ ن $<$ ١ ثم يغير اتجاه حركته ويتحرك فى الاتجاه المضاد فى الفترة ١ $<$ ن $<$ ٣.

$\therefore$ المسافة المقطوعة من ن = ٠ إلى ن = ٢ خلال الثانيتين الأولى والثانية

$= \int_{٠}^{٢} |ع|\, دن = \int_{٠}^{٢} |٣ن^{٢} - ١٢ن + ٩|\, دن$

$= \int_{٠}^{١} (٣ن^{٢} - ١٢ن + ٩)\, دن + \int_{١}^{٢} (-٣ن^{٢} + ١٢ن - ٩)\, دن$

$= [ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٩ن]_{٠}^{١} + [-ن^{٣} + ٦ن^{٢} - ٩ن]_{١}^{٢} = ٤ + ٢ = ٦$ أمتار

## مثال

(١) بدأ جسيم حركته فى خط مستقيم من نقطة الأصل بسرعة ابتدائية قدرها ٨م/ث وكانت عجلة الحركة بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة (٣ ن - ٢) أوجد كلًّا من سرعة الجسيم و إزاحته بعد ٢ث من بدء الحركة.

**الحل**

$\because$ جـ = ٣ن - ٢   $\therefore$ ع $= \int (٣ن - ٢)\, دن$   $\therefore$ ع $= \frac{٣}{٢}$ن$^{٢}$ - ٢ن + ث

$\because$ ع$_{٠}$ = ٨م/ث   $\therefore$ ع = ٨م/ث عندما ن = ٠   $\therefore$ ث = ٨

$\therefore$ ع $= \frac{٣}{٢}$ن$^{٢}$ - ٢ن + ٨   $\therefore$ ع (٢) $= \frac{٣}{٢} \times ٤ - ٢ \times ٢ + ٨ = ١٠$ م/ث

$\because$ ع $= \frac{٣}{٢}$ن$^{٢}$ - ٢ن + ٨   $\therefore$ ف $= \int (\frac{٣}{٢}ن^{٢} - ٢ن + ٨)\, دن$

$\therefore$ ف $= \frac{١}{٢}$ن$^{٣}$ - ن$^{٢}$ + ٨ن + ث$'$

$\because$ س = ٠ عندما ن = ٠ $\quad\therefore$ ث = ٠ $\quad\therefore$ س $= \frac{١}{٢}$ن$^{٣}$ - ن$^{٢}$ + ٨ ن

ف(٢) = س (٢) - س (٠) = $\frac{١}{٢}$ (٢)$^{٣}$ - (٢)$^{٢}$ + ٨(٢) = ١٦ متر

**حل آخر:**

$\because$ جـ = ٣ ن - ٢ $\quad\therefore \frac{دع}{دن}$ = ٣ ن - ٢

$\therefore \int_{٨}^{ع}$ دع = $\int_{٠}^{ن}$ (٣ ن - ٢) د ن $\quad\therefore$ ع - ٨ = $\frac{٣}{٢}$ن$^{٢}$ - ٢ ن

$\therefore$ ع = $\frac{٣}{٢}$ن$^{٢}$ - ٢ ن + ٨ $\quad\therefore$ ع(٢) = $\frac{٣}{٢}$ × ٤ - ٢ × ٢ + ٨ = ١٠ م/ث

$\because$ ف = $\int_{٠}^{ن}$ ع د ن $\quad\therefore$ ف(٢) = $\int_{٠}^{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$ن$^{٢}$ - ٢ ن + ٨) د ن

$\therefore$ ف(٢) = [$\frac{١}{٢}$ن$^{٣}$ - ن$^{٢}$ + ٨ ن]$_{٠}^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢)$^{٣}$ - (٢)$^{٢}$ + ٨ (٢) = ١٦ متر

**حاول أن تحل**

(٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم مبتدأ من السكون وعلى بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت جـ = ٦ن - ٤ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث$^{٢}$ فأوجد العلاقة بين السرعة والزمن، كذلك العلاقة بين الإزاحة والزمن.

## مثال

(٢) بدأت سيارة حركتها من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط ويعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن ن بالعلاقة ع = ٣ن$^{٢}$ - ٦ ن حيث ع مقاسة بوحدة م/ث، ن مقاسة بالثانية. أوجد كلًّا من متجه السرعة المتوسطة ومتوسط مقدار السرعة خلال الفترة الزمنية ٠ < ن < ٣,٥

**الحل**

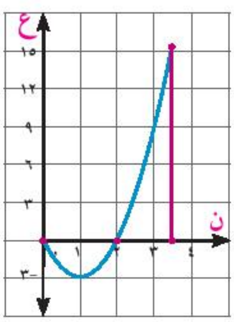
$\because$ ع = ٣ ن$^{٢}$ - ٦ن $\quad\therefore$ ع = ٣ ن (ن - ٢)


**نجد أن** السيارة تغير اتجاه حركتها بعد ٢ ث و يوضح ذلك بحث إشارة ع (ن) أو منحنى السرعة - الزمن

$\therefore$ ف = $\int_{٠}^{٣,٥}$ ع د ن = $\int_{٠}^{٣,٥}$ (٣ ن$^{٢}$ - ٦ ن) د ن

= [ن$^{٣}$ - ٣ ن$^{٢}$]$_{٠}^{٣,٥}$ = (٣,٥)$^{٣}$ - ٣ (٣,٥)$^{٢}$ = $\frac{٤٩}{٨}$

$\therefore$ متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{ع}_{م}$ = $\dfrac{\frac{٤٩}{٨}\,\overleftarrow{ى}}{٣,٥ - ٠}$ = ١,٧٥ $\overleftarrow{ى}$




حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة ، ويكون القياس الجبرى لمتجه السرعة المتوسطة يساوى ١,٧٥م/ث

المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية ن ∈ [ ٠ ، ٣,٥]

$$= \int_{٠}^{٣,٥} |\text{ع}|\, \text{ءن} = \int_{٠}^{٣,٥} (\text{٣ن}^{٢} - \text{٦ن})\, \text{ءن}$$

$$= \int_{٠}^{٢} (-\text{٣ن}^{٢} + \text{٦ن})\, \text{ءن} + \int_{٢}^{٣,٥} (\text{٣ن}^{٢} - \text{٦ن})\, \text{ءن}$$

$$= [-\text{ن}^{٣} + \text{٣ن}^{٢}]_{٠}^{٢} + [\text{ن}^{٣} - \text{٣ن}^{٢}]_{٢}^{٣,٥} = ٤ + \frac{٨١}{٨} = \frac{١١٣}{٨} \text{ متر}$$

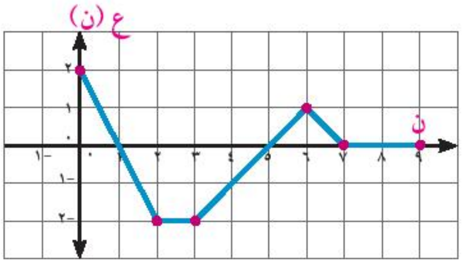
$$\therefore \text{ متوسط مقدار السرعة } = \frac{\frac{١١٣}{٨}}{٣,٥ - ٠} = \frac{١١٣}{٢٨} \simeq ٤,٠٤ \text{ م/ث}$$

**حاول أن تحل**

٣ بدأت سيارة حركتها من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على هذا الخط، ويعطى القياس الجبرى لمتجه السرعة ع بعد زمن ن بالعلاقة $\text{ع} = \text{٤ن} - \text{٣ن}^{٢}$ حيث ع مقاسة بوحدة م/ث، ن مقاسة بالثانية أوجد خلال الفترة الزمنية ن حيث ن $\in$ [٠ ، ٤] كلًّا من متوسط مقدار السرعة ومتجه السرعة المتوسطة. متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى؟ وأوجد مقدار العجلة عندئذ.

**تفكير ناقد:**

الشكل المرفق يبين سرعة جسيم ع = د(ن) يتحرك فى خط مستقيم.




أ متى يتحرك الجسيم للأمام ومتى يتحرك للخلف؟ ومتى تسارع حركته ومتى تتباطأ؟

ب متى تكون عجلة الحركة موجبة ؟ ومتى تكون سالبة؟ ومتى تنعدم؟

جـ متى تصل سرعة الجسيم إلى قيمتها العظمى؟

د متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية واحدة؟

## استنتاج العجلة عندما تكون السرعة دالة فى الموضع:

إذا كانت ع = د (ر) ، ر = د(ن)

فباستخدام قاعدة السلسلة يمكن استنتاج أن: $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءر}} \cdot \frac{\text{ءر}}{\text{ءن}}$

أى أن: $\text{جـ} = \text{ع} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءر}}$ وبالتالي $\int \text{جـ}\, \text{ءر} = \int \text{ع}\, \text{ءع}$

وباستخدام التكامل المحدد مع حدود تكامل مناسبة نجد أن:

$$\int_{\text{ع}_٠}^{\text{ع}} \text{ع}\, \text{ءع} = \int_{\text{ر}_٠}^{\text{ر}} \text{جـ}\, \text{ءر}$$

وعند ثبوت العجلة جـ يكون: $\frac{١}{٢}(\text{ع}^{٢} - \text{ع}_٠^{٢}) = \text{جـ} \int_{\text{ر}_٠}^{\text{ر}} \text{ءر} \quad \leftarrow \quad \frac{١}{٢}(\text{ع}^{٢} - \text{ع}_٠^{٢}) = \text{جـ}(\text{ر} - \text{ر}_٠)$

$$\frac{١}{٢}(\text{ع}^{٢} - \text{ع}_٠^{٢}) = \text{جـ ف} \quad \leftarrow \quad \text{ع}^{٢} = \text{ع}_٠^{٢} + \text{٢جـ ف}$$

## مثال

③ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته $\overleftarrow{ع}$ يعطى بالعلاقة $ع = \frac{١}{٢٠}(٤٠٠ - س^٢)$ حيث $س$ تعبر عن القياس الجبرى للموضع $\overleftarrow{س}$، أوجد القياس الجبرى لعجلة الحركة $\overleftarrow{جـ}$ عندما $س = ١٥$

**الحل**

$\because ع = \frac{١}{٢٠}(٤٠٠ - س^٢)$ $\qquad \therefore \frac{ءع}{ءس} = \frac{-١}{١٠} س$

$\because جـ = ع \frac{ءع}{ءس}$ $\qquad جـ = \frac{-١}{٢٠٠} س (٤٠٠ - س^٢)$

عندما $س = ١٥$ وحدة طول.

$\therefore جـ = \frac{-١}{٢٠٠} \times ١٥ (٤٠٠ - ٢٢٥)$ $\qquad جـ = - \frac{١٠٥}{٨}$ وحدة عجلة

**حاول أن تحل**

④ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين $ع$ ، $س$ تعطى فى الصورة $ع = \frac{٥}{٤ + س}$ حيث $ع$ مقاسة بوحدة م / ث، $س$ مقاسة بوحدة متر. أوجد عجلة الحركة عندما $س = ٢$ متر.

## مثال

④ جسيم يتحرك فى خط مستقيم يبدأ حركته من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان القياس الجبرى لعجلته جـ يعطى بدلالة القياس الجبرى لموضعه $س$ بالعلاقة $جـ = ٢ س + ٥$ علمًا بأن سرعة الجسيم الابتدائية ٢م/ث **فأوجد:**

(أ) $ع^٢$ بدلالة $س$

(ب) أوجد مقدار سرعة الجسيم عندما $س = ١$

(جـ) أوجد $س$ عندما $ع = ٤$ م/ث

**الحل**

(أ) $\because جـ = ٢ س + ٥$ $\qquad \because \int جـ \, ءس = \int ع \, ءع$

$\therefore \int_{٠}^{س} (٢س + ٥) \, ءس = \int_{٢}^{ع} ع \, ءع$ $\qquad \therefore [س^٢ + ٥س]_{٠}^{س} = \frac{١}{٢} [ع^٢]_{٢}^{ع}$

$\therefore س^٢ + ٥ س = \frac{١}{٢}(ع^٢ - ٤)$ $\qquad \therefore ع^٢ = ٢ س^٢ + ١٠ س + ٤$

(ب) عندما $س = ١$ **نجد أن:**

$ع^٢ = ١٦$ $\qquad \therefore$ السرعة $= |ع| = ٤$ م/ث

(جـ) عندما $ع = ٤$ م/ث **نجد أن:**

$١٦ = ٢ س^٢ + ١٠ س + ٤$ $\qquad \therefore س^٢ + ٥ س - ٦ = ٠$

$(س + ٦)(س - ١) = ٠$ $\qquad س = -٦$ متر أو $س = ٥$ متر

### حاول أن تحل

٥ سيارة تتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث من موضع يبعد ٤ أمتار فى الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت حـ = س -٤ فأوجد:

أ $\text{ع}^{٢}$ بدلالة س      ب أوجد سرعة السيارة عندما جـ = ٠

### مثال

٥ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية قدرها ٨م / ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت $\text{جـ} = ٤٠\,\text{هـ}^{-\text{س}}$ ، أوجد:

أ $\text{ع}^{٢}$ بدلالة س      ب أوجد س عندما ع = ١٠ م/ث

جـ عين أقصى سرعة للجسيم.

### الحل

أ $\because \text{جـ} = ٤٠\,\text{هـ}^{-\text{س}}$      $\because \int \text{جـ}\, \text{ءس} = \int \text{ع}\, \text{ءع}$

$\therefore ٤٠ \int_{٠}^{\text{س}} \text{هـ}^{-\text{س}}\, \text{ءس} = \int_{٨}^{\text{ع}} \text{ع}\, \text{ءع}$

$\therefore -٤٠ \left[\text{هـ}^{-\text{س}}\right]_{٠}^{\text{س}} = \frac{١}{٢}\left[\text{ع}^{٢}\right]_{٨}^{\text{ع}}$      $\therefore -٨٠ (\text{هـ}^{-\text{س}} - ١) = \text{ع}^{٢} - ٦٤$

$\therefore \text{ع}^{٢} = ١٤٤ - ٨٠\,\text{هـ}^{-\text{س}}$

ب عندما ع = ١٠ م/ث **نجد أن:**      $٨٠\,\text{هـ}^{-\text{س}} = ٤٤$

$\therefore \text{هـ}^{\text{س}} = \frac{٢٠}{١١}$      $\therefore \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٢٠}{١١}$ متر

جـ $\because \text{ع}^{٢} = ١٤٤ - \frac{٨٠}{\text{هـ}^{\text{س}}}$      $\because \text{هـ}^{\text{س}} > ٠$ لجميع قيم س

$\therefore \frac{٨٠}{\text{هـ}^{\text{س}}} \longrightarrow ٠$ **عندما** $\text{س} \longrightarrow \infty$      $\therefore$ أقصى سرعة = ١٢ م/ث

### حاول أن تحل

٦ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت $\text{جـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، أوجد $\text{ع}^{٢}$ بدلالة س ثم أوجد ع عندما س = ٤ متر ، س عندما ع = ٢٠ م/ث.

## تمـارين ١ - ١

**فى جميع المسائل اعتبر أن الجسيم يتحرك فى خط مستقيم ، ر ، ع ، جـ هى القياسات الجبرية لكل من الموضع ، متجه السرعة، العجلة على الترتيب:**

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت ع = ٣هـ$^{ن+٢}$ فإن سرعته الابتدائية تساوى ..........

أ) ٣ ب) هـ جـ) ٣هـ$^{٢}$ د) هـ$^{٢}$

٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم، ومعادلة حركته ر =طا ن فإن عجلة الحركة حـ تساوى ..........

أ) قا$^{٢}$ن ب) ٢ قان جـ) ٢ع ر د) ع ر

٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم وكانت معادلة حركته ر = ٢ + لو$_{هـ}$ (ن + ١) فإن ..........

أ) سرعته وعجلة الحركة تتناقصان دائمًا. ب) سرعته وعجلة الحركة تتزايدان دائمًا.

جـ) السرعة تتناقص وعجلة الحركة تزداد. د) السرعة تتزايد وعجلة الحركة تتناقص.

٤) إذا كان ع = ٣ن$^{٢}$ - ٢ن ، وكانت ر = ١ عندما ن = ٠ فإن:

أ) ر = ٦ن - ٢ ب) ر = ٣ن$^{٢}$ - ٢ن + ١ جـ) ر = ن$^{٣}$ - ن$^{٢}$ + ١ د) ر = ن$^{٢}$ - ن - ١

٥) إذا كان ع = ١ + جا ن، وكانت ر = -٢ عندما ن = ٠ فإن:

أ) ر = ن + جتا ن ب) ر = ن - جتا ن جـ) ر = ن -جتا ن + ٢ د) ر = ن - جتا ن -٢

٦) إذا كان ع = ٣ن - ٢ ، فإن ف خلال الفترة [٠ ، ٢]

أ) ١ وحدة طول ب) ٢ وحدة طول جـ) ٣ وحدة طول د) ٤ وحدة طول

٧) إذا كان ع = ٣ ن$^{٢}$ - ٢ن ، فإن المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٢]

أ) $\frac{٤}{٢٧}$ وحدة طول ب) ٤ وحدة طول جـ) $\frac{١١٢}{٢٧}$ وحدة طول د) $\frac{١١٦}{٢٧}$ وحدة طول

٨) إذا كانت ع = ن$^{٣}$ - ٣ ن$^{٢}$ + ٢ن ، فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٣]

أ) $\frac{١}{٤}$ وحدة طول ب) $\frac{١}{٢}$ وحدة طول جـ) $\frac{٩}{٤}$ وحدة طول د) $\frac{١١}{٤}$ وحدة طول

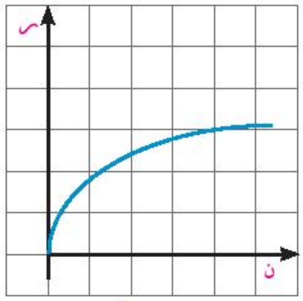
٩) إذا كانت حـ = ٣ ، ع. = -١ فإن ف خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٢].

أ) $\frac{١}{٦}$ وحدة طول ب) ٤ وحدة طول جـ) $\frac{٢٥}{٦}$ وحدة طول د) $\frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

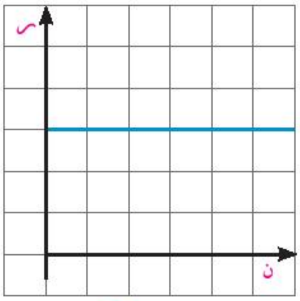
١٠) إذا كانت حـ = ٣ ، ع. = -١ فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٢].

أ) $\frac{١}{٦}$ وحدة طول ب) ٤ وحدة طول جـ) $\frac{٢٥}{٦}$ وحدة طول د) $\frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

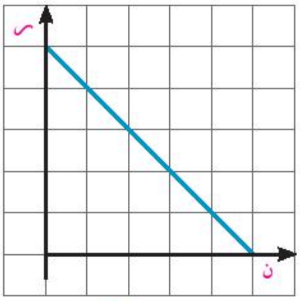
(١١) تخير الرسم البياني المناسب أمام كل جملة من الجمل الآتية :



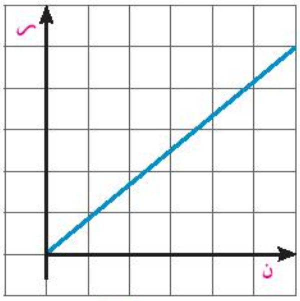
شكل (أ)



شكل (ب)



شكل (ج)



شكل (د)

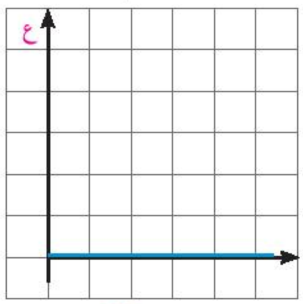
(١) الجسيم متوقف

(٢) الجسيم يتحرك للامام بسرعة ثابتة

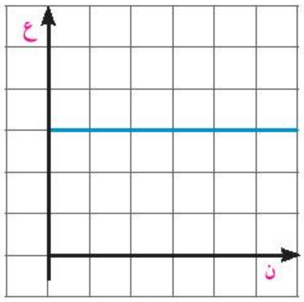
(٣) الجسيم يرجع للخلف

(٤) سرعة الجسيم تتناقص

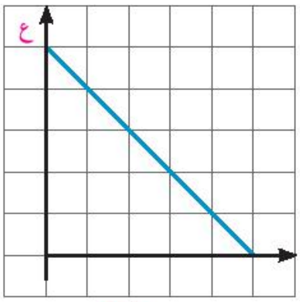
(١٢) تخير الرسم البياني المناسب أمام كل جملة من الجمل الآتية:



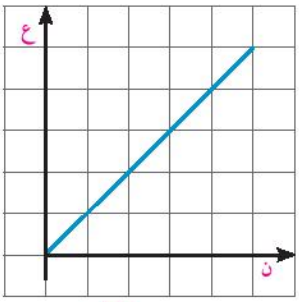
شكل (أ)



شكل (ب)



شكل (ج)



شكل (د)

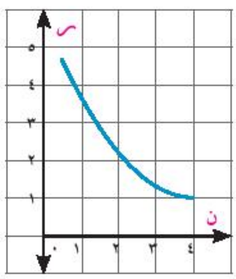
(١) حركة الجسيم تقصيرية

(٢) الجسيم يتحرك بسرعة ثابتة

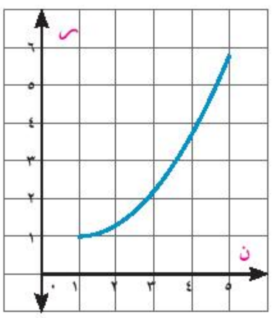
(٣) الجسيم متوقف

(٤) حركة الجسيم متسارعة

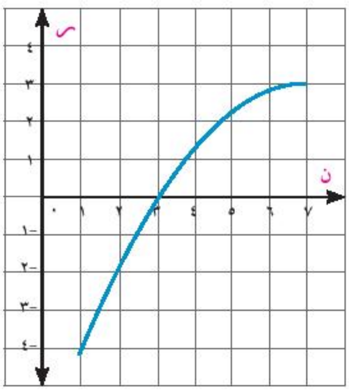
(١٣) فى كل من المنحنيات المرسومة **(منحنى الموضع - الزمن)** حدد إشارة القياس الجبرى لمتجه السرعة، ثم عين ما إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع أو يتباطأ (يتحرك ببطء).



شكل (١)

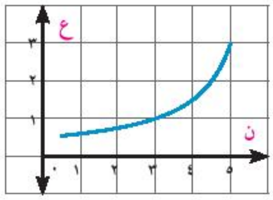


شكل (٢)

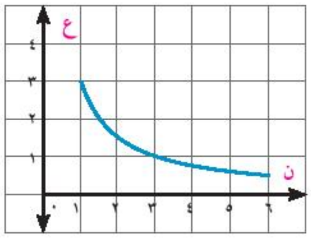


شكل (٣)

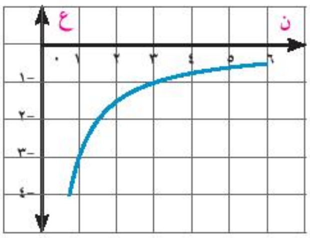
**١٤** فى كل من المنحنيات المرسومة **(منحنى السرعة - الزمن)** حدد إشارة العجلة، وبين إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع أو يتحرك بتباطؤ.




شكل (١)

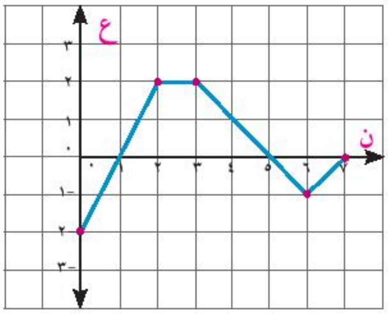



شكل (٢)




شكل (٣)

**١٥** من منحنى السرعة - الزمن المقابل فإن مقدار الازاحة ..........



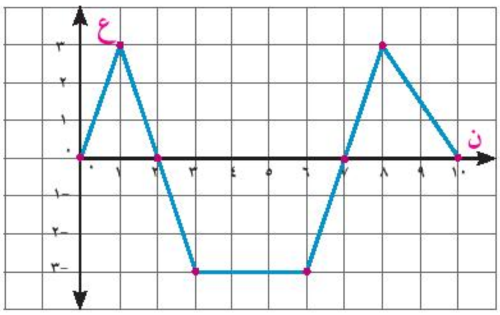

أ ٣ وحدة طول

ب ٥ وحدة طول

ج ٧ وحدة طول

د ٨ وحدة طول

**١٦** من منحنى السرعة - الزمن المقابل ،فإن المسافة المقطوعة = ..........




أ ٤,٥ وحدة طول

ب ١٠,٥ وحدة طول

ج ١٣,٥ وحدة طول

د ١٩,٥ وحدة طول

**١٧** إذا كانت ع = ٣ ر فأوجد جـ بدلالة ر ثم أوجد جـ عندما ر = ٢

**١٨** يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه السرعة ع فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة ع = ر + $\frac{١}{ر}$، أوجد عجلة الحركة عندما ر = ٢ حيث ر مقاسة بالمتر، ع مقاسة بوحدة م/ث.

**١٩** جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لسرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع ر بالصورة ع = $\frac{١}{ر^{٢}}$، أوجد حـ بدلالة ر، ثم أوجد حـ عندما ر = $\frac{١}{٢}$

(٢٠) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى للسرعة ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س بالصورة $ع^{٢} = ١٦ - ٩$ جتا س، أوجد أقصى سرعة للجسيم وعجلة الحركة عندئذ.

(٢١) قذف جسيم رأسيًّا لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٥,٦ م/ث من نقطة على أرتفاع ٢٤,٥ متر من سطح الأرض أوجد كل من ع ، س بدلالة ن ثم أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.

(٢٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٢ م / ث من نقطة ثابتة بحيث كانت حـ = ٢ ن - ٦

حيث حـ مقاسة بوحدة م / $ث^{٢}$ أوجد بدلالة ن كل من ع ، س ثم أوجد س عندما ع = ١٨ م/ث

(٢٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على المستقيم مبتدأ من السكون بحيث كانت حـ = ٨ - $٢ن^{٢}$ حيث جـ مقاسة بوحدة م/$ث^{٢}$ أوجد أقصى سرعة للجسيم والمسافة المقطوعة حتى يصل لأقصى سرعة.

(٢٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على المستقيم مبتدأ من السكون بحيث كانت حـ = $\frac{٣}{٨}$ $س^{٢}$ حيث جـ مقاسة بوحدة م/$ث^{٢}$ ، س بالمتر. أوجد سرعة الجسيم عندما يكون س = ٢ متر، ثم أوجد موضعه عندما تكون ع = ٤ م / ث

(٢٥) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٣ م/ث من نقطة ثابتة بحيث حـ = ٦ س + ٤ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ $ث^{٢}$ ، س بالمتر أوجد $ع^{٢}$ بدلالة س ، أوجد سرعة الجسيم عندما س = ٢ ثم أوجد س عندما $ع^{٢} = ٨٧$

# تطبيقات على قوانين نيوتن للحركة

# Newton's Laws of Motion

## الوحدة ٢

### مقدمة الوحدة

يعود الفضل فى اكتشاف قانون الجذب العام إلى العالم الإنجليزى إسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) الذى يعد أحد رموز الثورة العلمية فى مجال علم الميكانيكا الحديث ، ثم جاء العالم الألمانى يوهان كبلر ( ١٥٧١ - ١٦٣٠) ومن قبله فوضع بعض القواعد الرياضية التى تحكم حركة الكواكب حول الشمس ، بناء على ارصاد العلماء المسلمين التى ترجمت واجريت خلال القرون السابقة وقد أسس العالم الإيطالى جاليليو جاليلى (١٥٦٤م - ١٦٤٢م) علم الحركة، حيث أجرى الكثير من التجارب على الأجسام الساقطة أو المقذوفة، كذلك الأجسام المتحركة أفقيًا، وقد اكتشف من خلال تجاربه الكثير من الخصائص المهمة لحركتها، ويرجع له الفضل فى اكتشاف أن الأجسام التى تتحرك على سطوح أفقية بدون مقاومة تستمر فى حركتها بسرعة منتظمة ، ويُعتقد أن جاليليو كان قد توصل من خلال تجاربه إلى القانون الأول والثانى من قوانين الحركة لنيوتن. ولقد جمع إسحق نيوتن مجمل أبحاثه فى كتابه اسماه "برنسبيا" أى المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية، ويعد هذا الكتاب من أهم الكتب العلمية التى ظهرت فى العصر الحديث، وفيه صاغ نيوتن قوانينه الثلاثة. ولقد أوضح قانون الجذب العام لنيوتن مفهوم أن القوة يمكن أن تحدث تأثيرًا عن بُعد ، فالأجسام تجذب بعضها البعض ، حتى وإن لم تكن متلامسة، فعلى سبيل المثال تجذب الأرض الأجسام بقوة تسمى " قوة الوزن" .

أما بشأن الكتلة فنلاحظ أن تعريفها الاستاتيكى لا يسمح بتعيين كتل الأجسام ، ولكن فقط بمقارنة الكتل فيما بينها عن طريق مقاومة أوزانها، كما يمكن إعطاء تعريف ديناميكى للكتلة عن طريق دراسة حركة الاجسام وتتناول هذه الوحدة دراسة الكتلة المتغيرة، وقوانين نيوتن للحركة، مع تطبيقات على هذه القوانين تتناول الحركة على المستوى الأملس والخشن، ودراسة حركة البكرات البسيطة والمصاعد.

### مخرجات التعلم

**بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:**

- يتعرف العلاقة بين القوة والعجلة:

إذا كانت القوة ق دالة فى الزمن ن أى أن ق = د(ن) فإن :

$\text{ق} = \frac{\text{ى}}{\text{ى ن}}(\text{م}) = \frac{\text{ى}}{\text{ى ن}}(\text{ك ع})$، وإذا كانت الكتلة ثابتة:

$\text{ق} = \text{ك}\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}}$ أى أن $\int \text{ق ى ن} = \text{ك}\int \text{ى ع}$

إذا كانت القوة ق دالة فى الإزاحة ف أى ق = د(ف) فإن :

$\text{ق} = \text{ك ع}\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ف}}$ أى أن $\int \text{ق ى ف} = \text{ك}\int \text{ع ى ع}$

- يطبق قوانين نيوتن للحركة فى مواقف حياتية مثل:
- جسم موضوع داخل مصعد متحرك بعجلة منتظمة (حركة الأجسام المتصلة بخيوط أو سلاسل).
- حركة البكرات البسيطة.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيًا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء.
- يتعرف مفهوم الدفع
- يستنتج العلاقة بين الدفع والتغير فى كمية الحركة.

## المصطلحات الأساسية

- كمية الحركة Momentum
- معادلة الحركة Equqtion of Motion
- الوزن Weight
- القانون الثالث لنيوتن Newtons Third Law
- الضغط Pressure
- رد الفعل Reaction
- حركة المصاعد Lift motion
- ميزان الزنبرك Spring scale
- ميزان الضغط Pressure scale
- ميزان معتاد balance
- بكرة ملساء Pulley
- الدفع Impulse
- القوى الدفعية Impulsive Forces

## دروس الوحدة

**(٢ - ١):** حركة أجسام متغيرة الكتل أو العجلة.

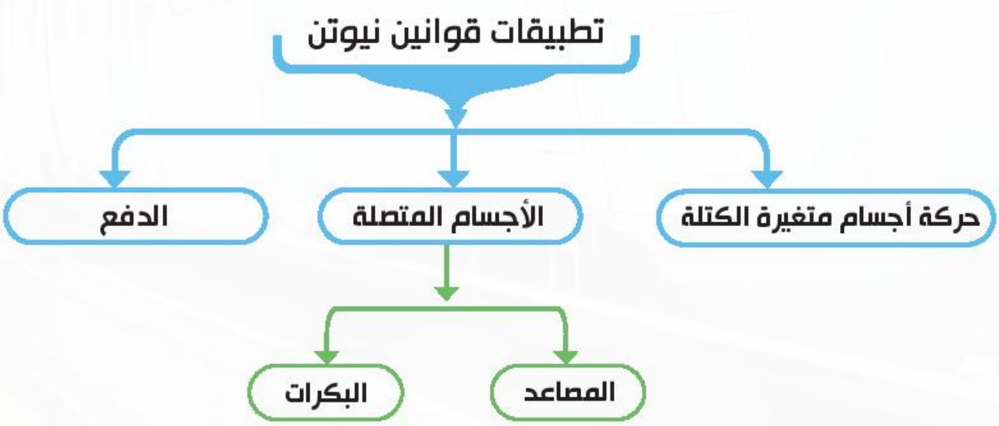
**(٢ - ٢):** حركة الأجسام المتصلة

**(٢ - ٣):** الدفع

## الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

## مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثانية

٢ - ١

# تطبيقات على قوانين نيوتن

## وحركة الأجسام ذات الكتلة المتغيرة

**Applications on Newton's Laws**

**سوف تتعلم**

- القانون الثانى لنتوتن.
- وحدات القوة.
- الوزن والكتلة.

**المصطلحات الأساسية**

- القانون الثانى لنتوتن. newton's second law
- معادلة الحركة Equqtion of motion
- القوة Force
- الكتلة Mass
- الوزن Weight

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.

### فكر و ناقش

نعلم من القانون الأول لنيوتن أن محصلة القوى المؤثرة على جسم متحرك بسرعة منتظمة تنعدم، أما إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على الجسم لا تساوى صفرًا، فإن الجسم سيتحرك بعجلة .

- هل توجد علاقة بين مقدار القوة المحصلة المؤثرة على الجسم ومقدار عجلة الحركة؟
- هل يمكنك استنتاج هذه العلاقة؟

### تعلم

**١ - نعلم من القانون الثاني لنيوتن ان :**

**معدل التغير فى كمية الحركة يتناسب مع القوة المحدثة له، ويحدث فى اتجاه القوة**

أي أنه إذا كانت كتلة الجسم ك متغيرة فإن معادلة حركة الجسم تأخذ الصورة

$$\vec{\text{ق}} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}(\text{ك}\ \vec{\text{ع}})$$

$$\therefore\ \sum \text{ق} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}(\text{ك ع})$$

**حيث كل من ك ، ع دوال قابلة للاشتقاق فى ن**

### معادلة الحركة باستخدام التفاضل والتكامل

*Use the Calculus to Determine the Equation of Motion*

**معادلة حركة جسم ثابت الكتلة ك تُعطى بالصورة**

$$\text{ق} = \text{ك جـ}$$

فإذا كانت $\text{جـ} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ فإن $\text{ق} = \text{ك} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$$\therefore \int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_2} \text{ق د ن} = \text{ك} \int_{\text{ع}_1}^{\text{ع}_2} \text{د ع}$$

أما إذا كانت $\text{جـ} = \text{ع} \frac{\text{د ع}}{\text{د ف}}$ فإن $\text{ق} = \text{ك ع} \frac{\text{د ع}}{\text{د ف}}$

$$\therefore \int_{\text{ف}_1}^{\text{ف}_2} \text{ق د ف} = \text{ك} \int_{\text{ع}_1}^{\text{ع}_2} \text{ع د ع}$$

## وحدات القوة والكتلة
*Units of Force and Units of Mass*

عند استنتاج معادلة الحركة لجسم متحرك اخترنا وحدات محددة لكل من القوة والكتلة والعجلة، حتى يكون ثابت التناسب مساويًا للواحد الصحيح، وتصبح معادلة الحركة على الصورة ك جـ = ق، لذلك عند استخدام معادلة الحركة، فإننا نستخدم الوحدات المطلقة للقوة مثل النيوتن، الداين

| |
|---|
| ك × جـ = ق |
| ١ كجم × ١ م/ث$^{٢}$ = ١ نيوتن |
| ١جم × ١سم/ث$^{٢}$ = ١ داين |

**تذكر أن**

١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن
١ ث جم = ٩٨٠ داين

## الوزن والكتلة
*Weight and Mass*

وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم، فإذا كان لدينا جسم كتلته ١ كجم، فإن وزنه طبقًا لمعادلة الحركة يساوي ١ ث كجم

∵ ك جـ = ق ∴ ١ × ٩,٨ = ق ق = ٩,٨ نيوتن = ١ ث كجم

### مثال

(١) يتحرك جسم كتلته الوحدة تحت تأثير القوى الثلاث $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = \text{أ}\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ ، حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ ثلاث متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى في الفراغ.

$\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = \overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}} - \text{هـ}\overrightarrow{\text{ع}}$ ، فإذا كان متجه الإزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ يعطى بالعلاقة

$\overrightarrow{\text{ف}} = \text{ن}\overrightarrow{\text{س}} + (\frac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + \text{ن})\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، هـ

**الحل**

$\because \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2 + \overrightarrow{\text{ق}}_3 = (\text{أ} + ٢)\overrightarrow{\text{س}} + (\text{ب} + ٣)\overrightarrow{\text{ص}} + (٣ - \text{هـ})\overrightarrow{\text{ع}}$

$\because \overrightarrow{\text{ف}} = \text{ن}\overrightarrow{\text{س}} + (\frac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + \text{ن})\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$

$\overrightarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ء}\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{ء ن}} = \overrightarrow{\text{س}} + (\text{ن} + ١)\overrightarrow{\text{ص}}$ $\qquad \overrightarrow{\text{جـ}} = \frac{\text{ء}\overrightarrow{\text{ع}}}{\text{ء ن}} = \overrightarrow{\text{ص}}$

$\because \text{ك}\overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{ق}} \qquad \therefore \overrightarrow{\text{ص}} = (\text{أ} + ٢)\overrightarrow{\text{س}} + (\text{ب} + ٣)\overrightarrow{\text{ص}} + (٣ - \text{هـ})\overrightarrow{\text{ع}}$

أ + ٢ = ٠ ، ب + ٣ = ١ ، ٣ − هـ = ٠

أ = −٢ ، ب = −٢ ، هـ = ٣

**حاول أن تحل**

① يتحرك جسم كتلته ٣ كجم بتأثير ثلاث قوى مستوية هى $\overrightarrow{ق}_١ = أ\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٣ = ٣\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان فى مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = (ن^٢ + ١)\overrightarrow{س} + (٢ن^٢ + ٣)\overrightarrow{ص}$ ، عيِّن قيمة كل من أ ، ب.

## مثال

② يتحرك جسم فى خط مستقيم تحت تأثير ثلاث قوى $\overrightarrow{ق}_١ = ٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = -\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} - ١٥\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق}_٣$ بحيث كان متجه إزاحته $\overrightarrow{ف}$ يُعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = ٢ن\overrightarrow{س} - ن\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ فأوجد معيار $\overrightarrow{ق}_٣$.

**الحل**

$\because \overrightarrow{ف} = ٢ن\overrightarrow{س} - ن\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ $\quad \therefore \overrightarrow{ع} = \frac{د\overrightarrow{ف}}{دن} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{جـ} = \frac{د\overrightarrow{ع}}{دن} = \overrightarrow{0}$

∴ الجسم يتحرك بسرعة ثابتة

$\therefore \overrightarrow{ق}_١ + \overrightarrow{ق}_٢ + \overrightarrow{ق}_٣ = \overrightarrow{0}$ $\quad \therefore \overrightarrow{ق}_٣ = -\overrightarrow{ق}_١ - \overrightarrow{ق}_٢$

$\overrightarrow{ق}_٣ = (-٤ ، ٠ ، -٣) + (١ ، -٤ ، ١٥)$ $\quad \overrightarrow{ق}_٣ = -٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} + ١٢\overrightarrow{ع}$

$ق_٣ = \|\overrightarrow{ق}_٣\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = ١٣$ وحدة قوة.

**حاول أن تحل**

② جسم يتحرك بسرعة منتظمة تحت تأثير مجموعة القوى $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ ، $\overrightarrow{ق}_٣$ حيث $\overrightarrow{ق}_١ = أ\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = -٣\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٣ = ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} + جـ\overrightarrow{ع}$ ، أوجد كلًّا من أ ، ب ، حـ.

## مثال

③ أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم ساكن كتلته ١ كجم، يتحرك فى خط مستقيم مبتدئًا من نقطة أصل "و" على الخط المستقيم، وكانت $ق = ٥ر + ٦$ حيث ر بعد الجسم عن "و" مقيسة بالمتر، ق بالنيوتن.

**أوجد:**

**أولًا** سرعة الجسم ع عندما ر = ٤ متر

**ثانيًا** إزاحة الجسم عندما تكون ع = ٩م/ث

**الحل**

$\because ق = ٥ر + ٦$


شكل (٢٥)

$\therefore ك\,جـ = ٥س + ٦$

$\because جـ = ع \frac{ءع}{ءس}$ ، $ك = ١$ كجم

**أولًا:**

$\therefore ع \frac{ءع}{ءس} = ٥س + ٦$

$\therefore \int_{0}^{ع} ع\, ءع = \int_{0}^{٤} (٥س + ٦)\, ءس$

$\therefore [\frac{١}{٢} ع^{٢}]_{0}^{ع} = [\frac{٥}{٢} س^{٢} + ٦س]_{0}^{٤}$

$\therefore \frac{١}{٢} ع^{٢} = (\frac{٥}{٢} \times ١٦ + ٦ \times ٤) - ٠$

$ع^{٢} = ١٢٨$

$\therefore ع = \pm ٨ \sqrt{٢}$ م/ث

**ثانيًا:**

$\because ع \frac{ءع}{ءس} = ٥س + ٦$

$\therefore \int_{0}^{٩} ع\, ءع = \int_{0}^{س} (٥س + ٦)\, ءس$

$\therefore [\frac{١}{٢} ع^{٢}]_{0}^{٩} = [\frac{٥}{٢} س^{٢} + ٦س]_{0}^{س}$

$\therefore \frac{٨١}{٢} = \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٦س - ٠$

$\therefore ٥س^{٢} + ١٢س - ٨١ = ٠$

$(٥س + ٢٧)(س - ٣) = ٠$

$\therefore س = ٣$ أو $س = -\frac{٢٧}{٥}$

### حاول أن تحل

(٣) أثرت قوة $ق$ على جسم كتلته ٣ كجم، يتحرك فى خط مستقيم مبتدئًا بسرعة قدرها ٢م/ث، وكانت $ق = \frac{٣}{٢ع + ١}$ حيث ع سرعة الجسم بعد زمن قدره ن، متى تكون سرعة الجسم ٦ م/ث.

## مثال

(٤) قوة تؤثر على جسم كتلته ٢٥٠ جم، يتحرك فى خط مستقيم مبتدئًا من السكون من نقطة أصل "و" على الخط المستقيم، وكانت $\overleftarrow{ق} = (٥ن - ٢)\, \overleftarrow{س} + ٤ن\, \overleftarrow{ص}$

إذا كانت $ق$ مقيسة بوحدة النيوتن، ن بالثانية، أوجد كلًّا من السرعة $\overleftarrow{ع}$ ، الإزاحة $\overleftarrow{ف}$ بدلالة الزمن ن

### الحل

$\because \overleftarrow{ق} = (٥ن - ٢)\, \overleftarrow{س} + ٤ن\, \overleftarrow{ص}$

$\because \overleftarrow{ق} = ك\, \overleftarrow{جـ}$ حيث $ك = \frac{١}{٤}$ كجم

$\therefore \frac{١}{٤} \overleftarrow{جـ} = (٥ن - ٢)\, \overleftarrow{س} + ٤ن\, \overleftarrow{ص}$

$\therefore \overleftarrow{جـ} = (٢٠ن - ٨)\, \overleftarrow{س} + ١٦ن\, \overleftarrow{ص}$

$\because \overleftarrow{جـ} = \frac{ء\overleftarrow{ع}}{ءن}$

$\therefore \frac{ء\overleftarrow{ع}}{ءن} = (٢٠ن - ٨)\, \overleftarrow{س} + ١٦ن\, \overleftarrow{ص}$

$\therefore \int_{0}^{ع} ء\overleftarrow{ع} = \int_{0}^{ن} [(٢٠ن - ٨)\overleftarrow{س} + ١٦ن\overleftarrow{ص}]\, ءن$

$\therefore \overleftarrow{ع} = (١٠ن^{٢} - ٨ن)\, \overleftarrow{س} + ٨ن^{٢}\, \overleftarrow{ص}$

$\because \overrightarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ء}\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{ء ن}}$ $\therefore \frac{\text{ء}\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{ء ن}} = (١٠\text{ن}^٢ - ٨\text{ن})\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\text{ن}^٢\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore \int \text{ء}\overrightarrow{\text{ف}} = \int [(١٠\text{ن}^٢ - ٨\text{ن})\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\text{ن}^٢\,\overrightarrow{\text{ص}}]\,\text{ء ن}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ف}} = (\frac{١٠}{٣}\text{ن}^٣ - ٤\text{ن}^٢)\,\overrightarrow{\text{س}} + \frac{٨}{٣}\text{ن}^٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$

### حاول أن تحل

٤) قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثر على جسم ساكن كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم مبتدئًا حركته من نقطة ثابتة "و" على خط مستقيم، وكانت $\overrightarrow{\text{ق}} = (٤\text{ن} - ١)\,\overrightarrow{\text{س}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث ن الزمن مقيسًا بالثانية، ق مقيسًا بالنيوتن ، أوجد عندما ن = ٢ ثانية، سرعة الجسم ، وبعده عن و.

### مثال

٥) يتحرك جسم متغير الكتلة، كتلته $\text{ك} = ٢\text{ن} + ١$ فى خط مستقيم، وكان متجه إزاحته يُعطى بالعلاقة:
$\overrightarrow{\text{ف}} = (\frac{١}{٢}\text{ن}^٢ + \text{ن})\,\overrightarrow{\text{س}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم .
أوجد كمية حركة هذا الجسم واستنتج مقدار القوة المؤثرة عليه.

#### الحل

$\text{ك} = ٢\text{ن} + ١$

متجه السرعة $\overrightarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ء}\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء}}{\text{ء ن}}(\frac{١}{٢}\text{ن}^٢ + \text{ن})\,\overrightarrow{\text{س}} = (\text{ن} + ١)\,\overrightarrow{\text{س}}$

متجه كمية الحركة $\overrightarrow{\text{م}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= (٢\text{ن} + ١)(\text{ن} + ١)\,\overrightarrow{\text{س}} = (٢\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ١)\,\overrightarrow{\text{س}}$

من القانون الثانى لنيوتن نجد أن:

$\overrightarrow{\text{ق}} = \frac{\text{ء}}{\text{ء ن}}(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ع}}) = \frac{\text{ء}\overrightarrow{\text{م}}}{\text{ء ن}}$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ء ن}}(٢\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ١)\,\overrightarrow{\text{س}} = (٤\text{ن} + ٣)\,\overrightarrow{\text{س}}$

**أى أن القوة المؤثرة على الجسم تكون فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{س}}$ ويساوى مقدارها (٤ ن + ٣)**

### حاول أن تحل

٥) كرة معدنية كتلتها ١٠٠ جم تحركت بسرعة منتظمة ١٠م/ث وسط غبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت يساوى ٠,٦ جم فى الثانية . أوجد كتلة الكرة والقوة بالداين المؤثرة عليها عند أى لحظة.

## مثال

### استخدام التكامل

(٦) جسم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت عجلة حركته حـ تُعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة حـ = ٢ن - ٦ حيث حـ مقاسة بوحدة م/ث$^{٢}$، الزمن ن بالثانية، احسب التغير فى كمية حركة الجسم فى الفترة الزمنية ٣ $\geq$ ن $\geq$ ٥ إذا كانت كتلة الجسم ٨ كجم.

**الحل**

$\because \Delta \text{مـ} = \text{ك} \int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_2} \text{جـ}\ \text{ءن}$

$\therefore \Delta \text{مـ} = ٨ \int_{٣}^{٥} (٢\text{ن} - ٦)\ \text{ءن} = ٨ \left[\text{ن}^{٢} - ٦\text{ن}\right]_{٣}^{٥}$

$= ٨ \left[(٢٥ - ٣٠) - (٩ - ١٨)\right] = ٣٢$ كجم.م/ث

$\therefore \Delta \overrightarrow{\text{مـ}} = ٣٢ \overrightarrow{\text{ى}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم.

**حاول أن تحل**

(٦) سيارة كتلتها ١,٥ طن، تتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت حـ (ن) تعطى بالعلاقة حـ = ١٢ن - ن$^{٢}$ حيث جـ مقيسة بوحدة م/ث$^{٢}$، الزمن ن مقيس بالثانية أوجد:

(أ) التغير فى كمية حركة السيارة خلال الثوانى الست الأولى.

(ب) التغير فى كمية حركة السيارة خلال الفترة الزمنية [٢ ، ١٤]

## تمـــاريـن ٢ - ١

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فى كل مما يأتي:**

(١) جسم كتلته الوحدة يتحرك تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٥ \overrightarrow{\text{ى}}$ فإذا كان متجه سرعته $\overrightarrow{\text{ع}} = (\text{أن}^{٢} + \text{ب ن}) \overrightarrow{\text{ى}}$ ، فإن أ + ب =

(أ) ٠ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (ج) $\frac{٧}{٢}$ (د) ٥

(٢) إذا تحرك جسم كتلته (٢ن + ٣) كجم فى خط مستقيم، وكان متجه إزاحته كدالة فى الزمن يُعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}} = (-\frac{٣}{٢}\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}) \overrightarrow{\text{ى}}$ ، ف مقاسه بالمتر ، ن بالثانية فإن مقدار القوة المؤثرة عليه بالنيوتن هى :

(أ) ٢ ن + ٣ (ب) ١٢ ن + ٣ (ج) ١٢ ن + ١٣ (د) ٦ن + ١٣

(٣) اذا تحرك جسم كتلته الوحدة فى خط مستقيم بحيث كانت عجلة حركة الجسم تعطى بالعلاقة جـ = ٤ن + ٢ حيث مقاسة بوحدة م/ث$^{٢}$، ن بالثانية فان التغير فى كمية حركة الجسم فى الفترة الزمنية [٢، ٦] يساوى .................. كجم م/ث

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ٨٤

(٤) يتحرك جسم كتلته ٣ كجم بتأثير ثلاث قوى مستوية $\overrightarrow{\text{ق}}_{1}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ب $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{2}$ = ا $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{3}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجهًا وحدة متعامدين فى مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يُعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (ن$^{2}$ + ١) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (٢ن$^{2}$ + ٣) $\overrightarrow{\text{ص}}$ عين الثابتين ا، ب.

(٥) جسم كتلته ك = (٢ن + ٥) كجم ومتجه موضعه $\overrightarrow{\text{ر}}$ = ($\frac{1}{2}$ ن$^{2}$ + ن - ٥) $\overrightarrow{\text{ى}}$ حيث متجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ وحدة ثابت ، ر مقاسة بالمتر ، ن الزمن بالثانية . أوجد :

**أولًا:** متجهى السرعة والعجلة للجسم عند أى لحظة زمنية ن.

**ثانيًا :** مقدار القوة المؤثرة على الجسم عند ن = ١٠ ثانية

(٦) كرة معدنية كتلتها ١٥٠ جم تحركت بسرعة منتظمة ١٢م/ث وسط غبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت ٠,٥ جم فى الثانية . أوجد كتلة الكرة والقوة بالداين المؤثرة عليها عند أى لحظة زمنية ن.

(٧) كرة معدنية كتلتها ١٠جم تتحرك فى خط مستقيم داخل وسط محمل بالغبار الذى يلتصق بسطحها بمعدل جرام واحد كل ثانية، فإذا كانت إزاحة هذه الكرة فى نهاية فترة زمنية ن هى $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (ن$^{2}$ + ٣ن) $\overrightarrow{\text{س}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ متجه وحدة فى اتجاه حركتها فأوجد القوة المؤثرة على الكرة عند أى لحظة ن واحسب معيارها عند ن = ٣ ثوانى إذا علم أن معيار الإزاحة يقاس بالسنتيمتر.

(٨) يتحرك جسم متغير الكتلة فى خط مستقيم وكانت كتلته عند أى لحظة زمنية ن تساوى ك = (٤ن + ١) جرام وكان متجه إزاحته يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (ن$^{2}$ + ٢ن) $\overrightarrow{\text{س}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ متجه وحدة ثابت موازٍ للخط المستقيم ، ن الزمن بالثانية، ف المسافة بالسنتيمتر أوجد :

١ - متجه كمية الحركة لهذا الجسم ، ٢ - معيار القوة المؤثرة على الجسم عندما ن = ٤.

(٩) أثرت قوة ق = ٣ن + ١ على جسم ، ساكن كتلته ٤ كجم مبتدئًا حركته من نقطة أصل "و" على خط مستقيم.

(أ) أوجد ع عندما ن = ٢ ثانية.

(ب) أوجد ف عندما ن = ٢ ثانية. ، علمًا بأن ق بوحدة النيوتن.

(١٠) جسم يتحرك فى خط مستقيم بعجلة منتظمة جـ = -٣م/ث$^{2}$ وبسرعة ابتدائية ٥م/ث. إذا كانت كتلة الجسم ١٨ كجم فأوجد مقدار التغير فى كمية الحركة فى الفترات الزمنية الآتية:

(أ) [٠ ، ٣] (ب) [١ ، ٢]

(١١) جسم كتلته ٤٨ جم، يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت جـ = (٣ن - ١٢) م/ث$^{2}$ . احسب التغير فى كمية حركة الجسم خلال الفترة الزمنية الآتية:

(أ) [١ ، ٣] (ب) [٣ ، ٥]

الوحدة الثانية

٢ - ٢

# حركة الأجسام المتصلة

## حركة المصاعد - البكرات البسيطة

**Lift Motion**

### سوف تتعلم

- الضغط ورد الفعل.
- حركة المصاعد.
- البكرات البسيطة.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيًّا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء.

### المصطلحات الأساسية

- القانون الثالث لنيوتن *Newtons Third Law*
- الضغط *Pressure*
- رد الفعل *Reaction*
- حركة المصاعد *Liltmotion*
- ميزان الزنبرك *Spring Scale*
- ميزان الضغط *Pressare Scale*
- ميزان معتاد *Balance*

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- ميزان معتاد
- ميزان زنبركى
- ميزان ضغط

### عمل تعاونى

قم مع زميل لك بإحضار ميزان ضغط وضعه فى أرضية مصعد، ثم قف على الميزان والمصعد ساكن، ودع زميلك يسجل قراءة الميزان لدى وقوفك على ميزان الضغط، واجعل المصعد يتحرك لأعلى وزميلك يسجل أى تغير يحدث فى قراءة الميزان، ثم أوقف المصعد وسجل القراءة مرة أخرى، ثم اجعل المصعد يهبط لأسفل وزميلك يسجل قراءة الميزان عند حدوث أى تغير فى القراءة، ثم كرر التجربة بالتبادل مع زميلك.

سجل قراءة الميزان حال وقوف كل منكما على الميزان فى كل مرحلة من مراحل سكون المصعد أو الحركة لأعلى أو الحركة لأسفل.

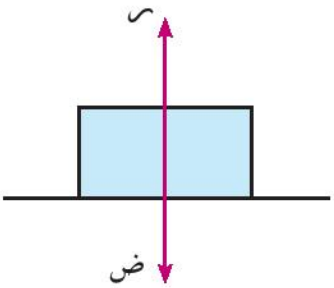
**بماذا تفسر اختلاف قراءة الميزان فى كل الحالات؟**

### تعلم

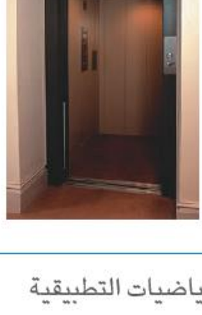
**نعلم من القانون الثالث لنيوتن أن:** *Newton's Third Law*

لكل فعل رد فعل مساوٍ له فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه.

**الضغط ورد الفعل:** *pressure and reaction*




عندما نضع جسمًا كتلته ك على مستوى أفقى ساكن، فإن الجسم يؤثر على المستوى بقوة ضغط تساوى فى هذه الحالة وزن الجسم، وتنشأ عن ذلك قوة رد فعل للمستوى تؤثر على الجسم وهى تساوى تمامًا ضغط الجسم على المستوى والقوتان متضادتان فى الاتجاه، ولكنهما متساويتان فى المقدار تمامًا ، ويتغير ضغط الجسم على المستوى كلما تحرك المستوى صعودًا أو هبوطًا، ويعرف الضغط فى هذه الحالة بالوزن الظاهري.

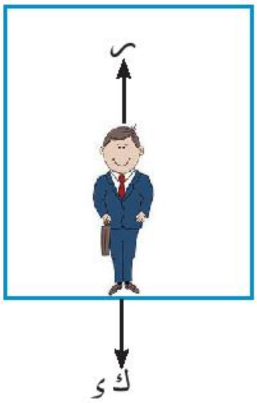


**أولاً : حركة المصاعد:** *Lift Motion*

وتعتبر حركة المصاعد من أشهر تطبيقات الفعل ورد الفعل ، عندما يقف شخص كتلته ك داخل مصعد كتلته ك/ فإن هناك مجموعة من القوى المؤثرة على كل منهما.



## القوى المؤثرة على الشخص داخل المصعد *Forces Acting on the Person Inside the Lift*




**يؤثر على الشخص داخل المصعد قوتان.**

**١ -** وزن الشخص = ك ى (ويؤثر رأسيًا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

**٢ -** رد فعل المصعد على الشخص = ر

(ويؤثر رأسيًا لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد).

**معادلة حركة الشخص:** *Equation of the Motion of a Person*

عندما يكون المصعد ساكنًا أو متحركًا حركة منتظمة (سرعة ثابتة لأعلى أو لأسفل)

فإن ك ى = ر

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة الشخص ك جـ = ر - ك ى

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة الشخص ك جـ = ك ى - ر

**تفكير ناقد :** ماذا تتوقع أن يكون رد فعل المصعد على الرجل إذا سقط المصعد بعجلة مساوية لعجلة الجاذبية؟

## القوى المؤثرة على المصعد فقط والشخص بداخله (شكل ١) *Forces Acting on a Lift*

شكل (١)

**يؤثر على المصعد ثلاث قوى عندما يكون الشخص بداخله:**

**١ -** وزن المصعد فقط = كَ ى (ويؤثر رأسيًا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

**٢ -** ضغط الشخص على أرضية المصعد = ض

(ويؤثر رأسيًا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

**٣ -** الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد = ش

(ويؤثر رأسيًا لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد)

**معادلة حركة المصعد** *equation of the motion of the lift*

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد

كَ جـ = ش - ض - كَ ى

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد

كَ جـ = كَ ى + ض - ش

## القوى المؤثرة على المصعد والرجل معًا (شكل ٢)

*Forces Acting on a both Person and Lift*

شكل (٢)

**يؤثر على المصعد والرجل معًا قوتان:**

**١ -** وزن المجموعة (الرجل والمصعد) = (ك + كَ) ى

(ويؤثر رأسيًا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

**٢ -** الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد = ش

(ويؤثر رأسيًا لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد)

ملحوظة:

**ضغط الرجل على أرضية المصعد يساوي ويضاد رد فعل المصعد على الرجل**

**معادلة حركة المجموعة:** *Equation of the Motion of both Person and Lift*

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد (ك + ك′) جـ = ش - (ك + ك′)ء

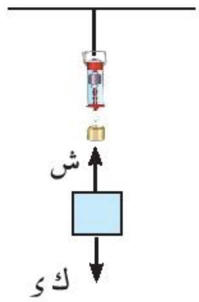
عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد (ك + ك′) جـ = (ك + ك′) ء - ش

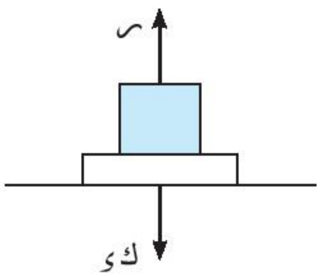
**ميزان الزنبرك** *Spring Scale*

عندما يعلق جسم كتلته ك في سلك ميزان زنبرك مثبت في سقف مصعد،
فإن قراءة الميزان تعبر عن الشد الحادث في سلك الميزان.

**ميزان الضغط** *Pressure (health) Scale*

عندما يوضع جسم كتلته ك على ميزان ضغط مثبت في أرضية مصعد،
فإن قراءة الميزان تعبر عن ضغط الجسم على الميزان.




١ - إذا كانت قراءة الميزان > الوزن الحقيقي ش > ك ء ، ر > ك ء

فإن المصعد يكون صاعدًا لأعلى بعجلة موجبة أو هابطًا لأسفل بعجلة سالبة.

٢ - إذا كانت قراءة الميزان < الوزن الحقيقي ش< ك ء ، ر < ك ء

فإن المصعد يكون هابطًا لأسفل بعجلة موجبة أو صاعدًا لأعلى بعجلة سالبة.

٣ - إذا كانت قراءة الميزان = الوزن الحقيقي ش = ك ء ، ر = ك ء

فإن المصعد يكون ساكنًا أو متحركًا بسرعة منتظمة.

قراءة ميزان الضغط أو ميزان الزنبرك تسمى **الوزن الظاهري**.

لاحظ أن

**إذا تحرك مصعد لأعلى بعجلة منتظمة وتحرك لأسفل بالعجلة نفسها،**
**فإن قراءة الميزان حال الصعود + قراءة الميزان حال الهبوط = ضعف الوزن الحقيقي.**

### الميزان المعتاد ذى الكفتين Balance

**الميزان المعتاد ذى الكفتين** هو الوحيد الذى يقيس الوزن الحقيقى فى كل الظروف والأجواء

## مثال

(١) رجل كتلته ٨٠ كجم يقف داخل مصعد، احسب بثقل الكيلوجرام ضغط الرجل على أرضية المصعد فى كل من الحالات الآتية:

١ - صاعدًا بعجلة منتظمة قدرها ٤٩ سم/ ث².

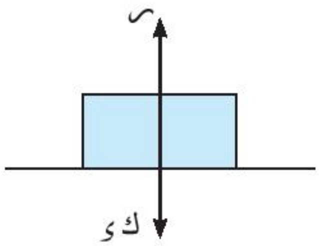
٢ - متحركًا بسرعة منتظمة قدرها ٨٠ سم/ ث.

٣ - هابطًا بعجلة منتظمة قدرها ٩٨ سم/ ث².

### الحل

ضغط الرجل على أرض المصعد يساوى فى المقدار رد فعل المصعد على الرجل في الحالات التالية:

١ - المصعد يتحرك لأعلى بعجلة قدرها ٠,٤٩ م/ ث².




∴ ك جـ = ر - ك د

٨٠ × ٠,٤٩ = ر - ٨٠ × ٩,٨

∴ ر = ٨٠× ٠,٤٩ + ٨٠ × ٩,٨

ر = ٨٢٣,٢ نيوتن          ر = ٨٤ ث كجم

٢ - المصعد يتحرك بسرعة منتظمة.

∴جـ = ٠

∴ر = ك د          ر = ٨٠ ث كجم

٣ - المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتطمة قدرها ٠,٩٨ م/ث².

ك جـ = ك د - ر

٨٠ × ٠,٩٨ = ٨٠ × ٩,٨ - ر

ر = ٨٠ × ٩,٨ - ٨٠ × ٠,٩٨          ر = ٧٠٥,٦ نيوتن.          ر= ٧٢ كجم

### حاول أن تحل

(١) شخص كتلته ٦٠ كجم يقف داخل مصعد، احسب بثقل الكيلوجرام ضغط الرجل على أرضية المصعد فى كل من الحالات الآتية:

١ - إذا كان المصعد ساكنًا.

٢- المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة ٤٩ سم/ث².

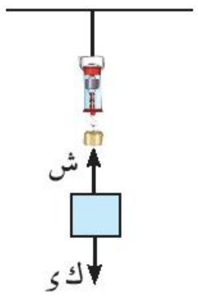
٣- المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ٤٩ سم/ث².

## مثال

(٢) عُلق جسم بواسطة خيط فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد يتحرك رأسيًّا، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط أثناء الصعود بعجلة منتظمة ٢,٤٥ م/ث$^{٢}$ يساوى ٥٠ ث كجم.

**أوجد كتلة الجسم، وإذا هبط المصعد بالعجلة نفسها فما مقدار الشد فى الخيط؟**

الحل




**أولًا**: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة ٢,٤٥ م/ث$^{٢}$

معادلة الحركة: ك جـ = ش - ك ى

ك × ٢,٤٥ = ٥٠ × ٩,٨ - ك × ٩,٨

ك (٢,٤٥ + ٩,٨) = ٥٠ × ٩,٨ ك = ٤٠ كيلو جرام

**ثانيًا**: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة ٢,٤٥ م/ث$^{٢}$.

معادلة الحركة: ك جـ = ك ى - ش

٤٠ × ٢,٤٥ = ٤٠ × ٩,٨ - ش

ش = ٤٠ (٩,٨ - ٢,٤٥) ش = ٢٩٤ نيوتن ش = ٣٠ ث كجم

## حاول أن تحل

(٢) جسم وزنه الحقيقى ٢٤٠ ث جم مُعلق فى سلك ميزان زنبركى مُثبت فى سقف مصعد، ووزنه الظاهرى ٢٧٦ ث جم كما يعينه الميزان الزنبركى، بين أن عجلة الحركة للمصعد لها قيمتان، فأوجدهما وعين اتجاه الحركة.

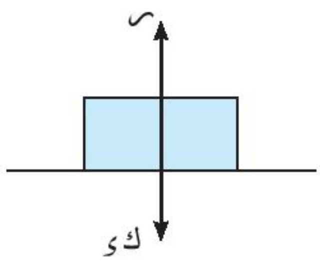
## مثال

(٣) مصعد يتحرك رأسيًّا لأعلى بعجلة منتظمة ١٤٠ سم/ث$^{٢}$.

يقف رجل بداخل المصعد، وكان ضغطه على أرضية المصعد يساوى ٧٢ ث كجم.

**احسب كتلة هذا الرجل، ثم أوجد مقدار ضغطِه على أرضية المصعد حال هبوطه بنفس العجلة.**

الحل




**أولًا**: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة جـ = ١,٤ م/ث$^{٢}$.

**معادلة الحركة**: ك جـ = ر - ك ى

ك × ١,٤ = ٧٢ × ٩,٨ - ك × ٩,٨

ك = ٦٣ كجم

**ثانيًا**: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة جـ = ١,٤ م/ث$^{٢}$.

**معادلة الحركة**: ك جـ = ك ى - ر

٦٣ × ١,٤ = ٦٣ × ٩,٨ - ر

ر = ٦٣ (٩,٨ - ١,٤) ر = ٥٢٩,٢ نيوتن

ر = ٥٤ ث كجم

**حاول أن تحل**

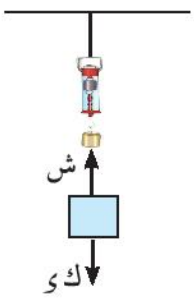
(٣) رجل كتلته ٧٠ كجم يقف على أرضية مصعد كهربى كتلته ٤٢٠ كجم فإذا تحرك المصعد رأسيًا لأعلى بعجلة منتظمة ٧٠ سم/ث٢.

**أوجد بثقل الكجم مقدار كل من الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد وضغط الرجل على أرضية المصعد.**

## مثال

(٤) جسم معلق فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، لوحظ عند تحرك المصعد إلى أعلى بعجلة جـ م/ ث٢، أن قراءة الميزان ٨ ث كجم وعندما تحرك المصعد إلى أسفل بعجلة ٢ جـ م/ث٢ كانت قراءة الميزان ٥ ث كجم.
**احسب جـ ، وإذا كان الحبل الصلب الذى يحمل المصعد لا يتحمل شدًّا أكثر من ٢ , ١ ث طن، فأوجد أقصى حمولة يمكن أن يحملها المصعد وهو صاعد بالعجلة جـ علمًا بأن كتلة المصعد وهو فارغ تساوى ٦٠٠ كجم.**

**الحل**




**أولًا:** المصعد يتحرك لأعلى بعجلة جـ

**معادلة الحركة:** ك جـ = ش - ك ى

ك جـ = ٨ × ٩,٨ - ك × ٩,٨

ك جـ = (٨ - ك) × ٩,٨ (١)

**ثانيًا:** المصعد يتحرك لأسفل بعجلة ٢ جـ

**معادلة الحركة** ك جـ = ك ى - ش

٢ ك جـ = ك × ٩,٨ - ٥ × ٩,٨

٢ ك جـ = (ك - ٥) × ٩,٨ (٢)

**من (١) ، (٢) نجد أن**

$$\frac{\text{٢ ك جـ}}{\text{ك جـ}} = \frac{\text{(ك - ٥)} \times \text{٩,٨}}{\text{(٨ - ك)} \times \text{٩,٨}}$$

$$\frac{\text{٢}}{\text{١}} = \frac{\text{ك - ٥}}{\text{٨ - ك}}$$

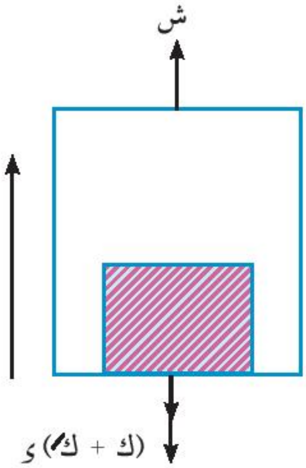
ك - ٥ = ١٦ - ٢ك ٣ ك = ٢١

∴ ك = ٧ كجم

**من (١) نجد أن**

٧ جـ = ٩,٨ جـ = ١,٤ م/ث٢.

**ثالثًا:**




نفترض أن أقصى حمولة يمكن أن توضع فى المصعد كتلتها ك
عندئذ يكون الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد يساوى ١٢٠٠ث كجم
**معادلة الحركة:** (ك + ك′) جـ = ش - (ك + ك′) ى

∴ (ك + ٦٠٠) × ١،٤ = ١٢٠٠ × ٩،٨ - (ك + ٦٠٠) × ٩،٨

∴ (ك + ٦٠٠) × ١١،٢ = ١٢٠٠ × ٩،٨

ك + ٦٠٠ = ١٠٥٠ ك = ٤٥٠ كجم

**حاول أن تحل**

④ عُلق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، فسجل القراءة ١٧ ث كجم، عندما كان المصعد صاعدًا بعجلة منتظمة ١,٥ جـ م/ ث$^٢$، وسجل القراءة ١٦ ث.كجم عندما كان المصعد هابطًا بعجلة سالبة قدرها جـ م/ث$^٢$، أوجد كتلة الجسم ومقدار جـ .

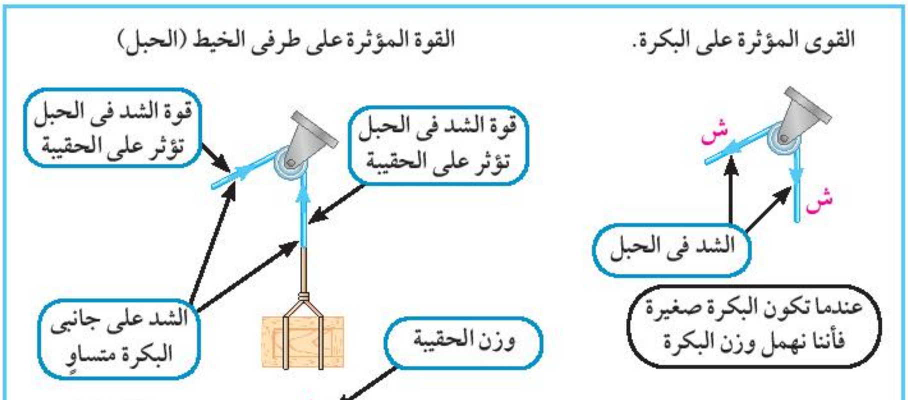
## ثانيًا : حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيًا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء

*Motion of System of two Bodies Connected by a String Passing Over a Smooth Pully*

تستخدم البكرات فى أغراض عدة منها: تقليل القوة اللازمة لرفع جسم وتسهيل الحركة وتغيير اتجاه القوة، ومنها ما هو ثابت، ومنها ما هو متحرك، وفى هذا الدرس سنتناول نظام بكرات مكون من بكرة واحدة ثابتة.

وعندما تكون البكرة صغيرة وملساء يكون الشد على جانبى البكرة متساوٍ.

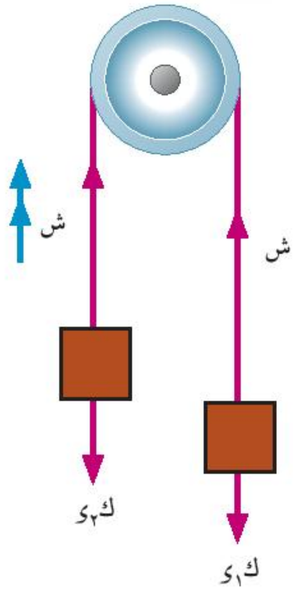
والشكل الآتى يوضح القوى المؤثرة عند رفع حقيبة (جسم) باستخدام البكرة.




شكل (٧٤)

إذا رُبط جسمان كتلتاهما $ك_١$، $ك_٢$ فى طرفى خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويتدليان رأسيًا، وكانت $ك_١ > ك_٢$ فإن المجموعة تبدأ الحركة من السكون بعجلة منتظمة قدرها جـ.

**معادلات الحركة**




$ك_1 \, جـ = ك_1 \, ى - ش$

$ك_2 \, جـ = ش - ك_2 \, ى$

بجمع المعادلتين بحذف الشد، ومن ثم يمكن حساب عجلة الحركة

$(ك_1 + ك_2) \, جـ = (ك_1 - ك_2) \, ى$

وبالتالى من أى من المعادلتين نوجد الشد فى الخيط ش

**عند قطع الخيط :**

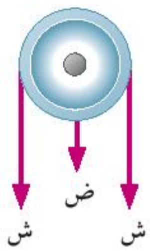
إذا قطع الخيط الواصل بين الجسمين بعد زمن ن، فإن كلًّا من الجسمين يتحرك فى اتجاهه السابق نفسه قبل قطع الخيط مباشرة.

١) الكتلة $ك_1$ تتحرك لأسفل بسرعة ابتدائية ع (هى نفس السرعة لحظة قطع الخيط) وتحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية.

٢) الكتلة $ك_2$ تتحرك لأعلى بسرعة ابتدائية ع (هى نفس السرعة لحظة قطع الخيط) إلى أن تصل لسكون لحظي، وذلك تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية، ثم تسقط سقوطًا حرًّا.

**لاحظ أن**

إذا بدأت المجموعة الحركة والكتلتين فى مستوى أفقى واحد، وكانت المسافة المقطوعة بعد زمن قدره ن، تساوى ف وحدة طول، فإن المسافة الرأسية بين الكتلتين عند نفس الزمن تساوى ٢ ف وحدة طول.



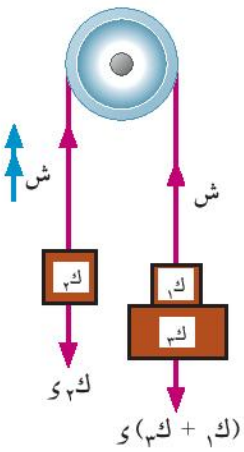
شكل (٧٦)

**الضغط على البكرة:** *Pressure on a Pulley*

عند تعليق الكتلتين من طرفى الخيط المار على البكرة يصبح الخيط مشدودًا ونتيجة للشد الحادث فى الخيط تتولد قوة ضغط على محور البكرة تساوى محصلة قوتى الشد فى الخيط.

$ض = ٢ش$

### حالات مشابهة (١)




فى الحالة المرسومة

إذا كان $(ك_1 + ك_3) > ك_2$ ، وكانت $ك_1 < ك_2$ فإن معادلات الحركة

$(ك_1 + ك_3) \, جـ = (ك_1 + ك_3) \, ى - ش$

$ك_2 \, جـ = ش - ك_2 \, ى$

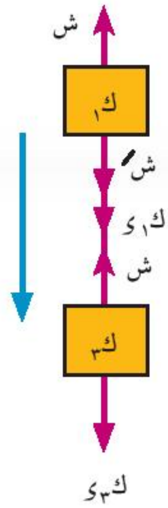
**عند انفصال الكتلة الإضافية**

وإذا انفصلت الكتلة $ك_3$ بعد زمن قدره ن ثانية، فإن المجموعة تتحرك فى نفس اتجاهها السابق ، ولكن بعجلة تقصيرية إلى أن تسكن لحظيًّا، ثم تغير اتجاه حركتها، ولإيجاد عجلة الحركة التقصيرية بعد انفصال الكتلة $ك_3$ نوجد معادلات الحركة

$ك_1 \, جـ' = ك_1 \, ى - ش'$

$ك_2 \, جـ' = ش' - ك_2 \, ى$

والمجموعة بعد انفصال ك$_٢$ الكتلة تتحرك بسرعة ابتدائية هى السرعة التى اكتسبتها لحظة الانفصال، وتصل إلى سكون لحظي، ثم تغير اتجاه حركتها، وترتد لتكون الكتلة ك$_٢$ هى القائدة

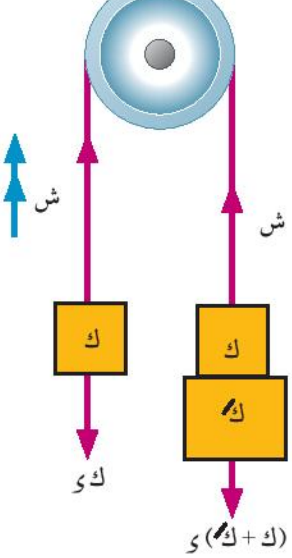



**الشد فى الخيط بين الكتلتين:** *Tension of a String*

فى الشكل السابق إذا كانت الكتلتان ك$_١$ ، ك$_٢$ مربوطتين بخيط آخر، فتكون الشدود كما هى موضحة فى شكل (٧٨) ومعادلات الحركة هي:

ك$_١$ جـ′ = ك$_١$ ء + ش′ - ش

ك$_٢$ جـ′ = ك$_٢$ ء - ش′




### حالات مشابهة (٢)

إذا كانت ك$_١$ = ك$_٢$ = ك شكل (٧٩)

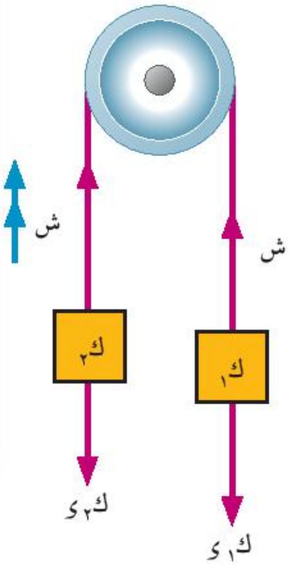
أى أن الكتلتين متساويتان، وفى هذه الحالة لن تتحرك المجموعة، أما إذا أضيفت كتلة مقدارها ك′ إلى إحدى الكتلتين، فإن المجموعة تتحرك فى اتجاه الكتلتين (ك + ك′) ومعادلات الحركة

(ك + ك′) جـ = (ك + ك′) ء - ش

ك جـ = ش - ك ء

### عند انفصال الكتلة الإضافية:

وإذا فُصلت الكتلة الإضافية ك′ بعد زمن قدره ن ثانية، فإن المجموعة تتحرك فى نفس اتجاهها السابق بسرعة منتظمة، هى السرعة التى اكتسبتها خلال ن ثانية (السرعة لحظة انفصال الكتلة ك′)




### حالات مشابهة (٣) في الشكل المقابل

إذا عُلقت الكتلتان ك$_١$ ، ك$_٢$ فى طرفى الخيط وكنا لا نعلم أيًّا من الكتلتين أكبر من الأخرى، واكسبنا الكتلة ك$_١$ سرعة قدرها ع لأسفل وتحركت المجموعة فإننا أمام ثلاث حالات

١) إذا عادت المجموعة إلى موضعها الأصلى بعد زمن قدره ن، نستنتج من ذلك أن ك$_١$ < ك$_٢$ ، وأن المجموعة تحركت بعجلة تقصيرية إلى أن سكنت لحظيًّا، ثم غيرت اتجاه حركتها، ويمكن استنتاج عجلة الحركة من البيانات المعطاة حيث السرعة الابتدائية هى السرعة التى اكتسبتها الكتلة ك$_١$، السرعة النهائية = صفر، الزمن = $\frac{ن}{٢}$

٢) أما إذا تحركت المجموعة حركة منتظمة بسرعة ثابتة هى السرعة التى اكتسبتها الكتلة ك$_١$ نستنتج من ذلك أن الكتلتين متساويتان ك$_١$ = ك$_٢$ ، وأن الحركة تتبع القانون الأول لنيوتن

٣) وإذا تحركت المجموعة بعجلة منتظمة تزايدية ، نستنتج من ذلك أن ك$_١$ > ك$_٢$ ، ويمكن دراسة الحركة بإيجاد معادلات الحركة

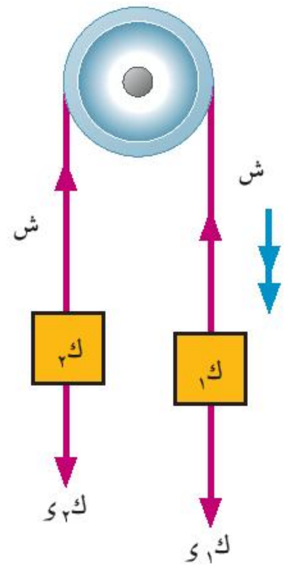
ك$_١$ جـ = ك$_١$ ء - ش

ك$_٢$ جـ = ش - ك$_٢$ ء

## مثال

(١) عُلق جسمان كتلتاهما $ك_١$، $ك_٢$، حيث $ك_١ > ك_٢$ فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء، وكانا على ارتفاع واحد من سطح الأرض عند بدء الحركة، وبعد ثانية واحدة كانت المسافة الرأسية بينهما ٢٠ سم، أوجد $ك_١ : ك_٢$

**الحل**




عند بدء الحركة كانا الجسمان فى مستوى أفقى واحد وبعد ثانية كانت المسافة الرأسية بينهما ٢٠ سم.

$∴$ ف = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠ سم

$∵$ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ $ن^٢$

١٠ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × جـ × ١

جـ = ٢٠ سم/$ث^٢$

**معادلات الحركة**

$ك_١$ جـ = $ك_١$ ء - ش

$ك_٢$ جـ = ش - $ك_٢$ ء

**بالجمع نجد أن**

($ك_١$ + $ك_٢$) جـ = ($ك_١$ - $ك_٢$) ء

٢٠ ($ك_١$ + $ك_٢$) = ٩٨٠ ($ك_١$ - $ك_٢$)

$ك_١$ + $ك_٢$ = ٤٩ ($ك_١$ - $ك_٢$)

$ك_١$ + $ك_٢$ = ٤٩ $ك_١$ - ٤٩ $ك_٢$

٥٠ $ك_٢$ = ٤٨ $ك_١$

$\frac{ك_١}{ك_٢}$ = $\frac{٢٥}{٢٤}$

$ك_١$ : $ك_٢$ = ٢٥ : ٢٤

**حاول أن تحل**

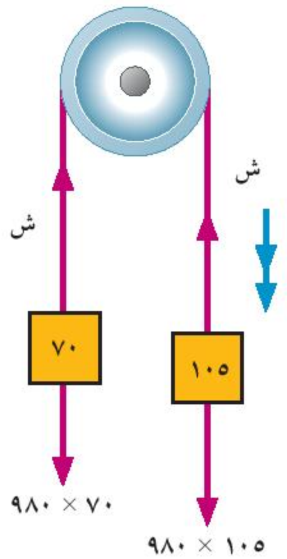
(٥) عُلق جسمان كتلتاهما ٢١ جم، ٢٨ جم من طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء، فإذا تحركت المجموعة من السكون، فأوجد عجلة المجموعة ومقدار الشد فى الخيط وسرعة المجموعة بعد ثانيتين من بدء الحركة.

## مثال

(٢) جسمان كتلتاهما ١٠٥ جم، ٧٠ جم مربوطان فى طرفى خيط خفيف ثابت الطول، يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويتدليان رأسيًا، فإذا بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كانت الكتلتان فى مستوى أفقى واحد، فأوجد مقدار عجلة حركة المجموعة، و إذا اصطدم الجسم الأول بالأرض بعد أن قطع مسافة ٥٠ سم، فأوجد الزمن الكلى الذى يستغرقه الجسم الثانى من بدء الحركة حتى يسكن لحظيًا.

الحل

**معادلات الحركة:**




١٠٥ جـ = ١٠٥ × ٩٨٠ - ش

٧٠ جـ = ش - ٧٠ × ٩٨٠

بجمع المعادلتين نجد أن

١٧٥ جـ = ٣٥ × ٩٨٠

جـ = ١٩٦ سم/ث$^{٢}$

عند لحظة اصطدام الجسم ١٠٥ جم بالأرض يكون استغرق زمنا ن$_{١}$

ع$^{٢}$ = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف

ع$^{٢}$ = ٠ + ٢ × ١٩٦ × ٥٠

ع = ١٤٠ سم/ث

ع = ع$_{.}$ + جـ ن

١٤٠ = ٠ + ١٩٦ ن

ن = $\frac{٥}{٧}$ ثانية

عند اصطدام الجسم ١٠٥ جم بالأرض، فإن الجسم ٧٠ جم، يتحرك رأسيًا لأعلى بعجلة الجاذبية مبتدئًا بالسرعة ع$_{.}$ = ١٤٠سم/ ث. فيسكن لحظيًا بعد زمن ن$_{٢}$

$\because$ ع = ع$_{.}$ + ء ن

$\therefore$ ٠ = ١٤٠ - ٩٨٠ ن

ن = $\frac{١}{٧}$ ثانية

$\therefore$ الجسم ٧٠ جم يستغرق من بدء الحركة زمنًا قدره ن حتى يصل إلى سكون لحظي

حيث ن= ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ = $\frac{٥}{٧}$ + $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٦}{٧}$ ثانية

**حاول أن تحل**

(٦) خيط خفيف يمر على بكرة مثبتة ملساء، ويتدلى من أحد طرفيه جسم كتلته ٩٠ جم، ومن الطرف الآخر جسم كتلته ٧٠ جم، وبدأت المجموعة حركتها من السكون عندما كانت الكتلة ٩٠ جم على ارتفاع ٢٤٥ سم من سطح الأرض:

(أ) أوجد الزمن الذى يمضى حتى تصل الكتلة ٩٠ إلى سطح الأرض.

(ب) أوجد الزمن الذى يمضى بعد ذلك حتى يصبح الخيط مشدودًا مرة أخرى.

## مثال

(٣) جسمان كتلتاهما ٥ كجم، ٣ كجم مربوطان فى طرفى خيط خفيف، يمر على بكرة ملساء، بدأت المجموعة حركتها من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد على ارتفاع ٢٤٥ سم من سطح الأرض، وبعد ثانية واحدة من بدء الحركة قُطع الخيط، أوجد عجلة الحركة وسرعة كل من الجسمين عند وصوله للأرض.

الحل

**معادلات الحركة:**

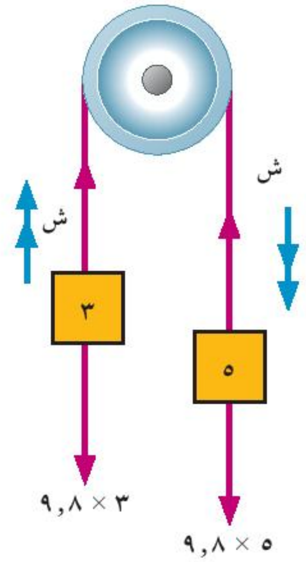
٥ جـ = ٥ × ٩,٨ - ش (١)

٣ جـ = ش - ٣ × ٩,٨ (٢)

بالجمع نجد أن

٨ جـ = ٢ × ٩,٨

∴ جـ = ٢,٤٥ م/ث$^{٢}$




**عند لحظة قطع الخيط**

ع = ع. + جـ ن

= ٠ + ٢,٤٥ × ١ = ٢,٤٥ م/ث

ف = ع.ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن$^{٢}$

= ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٢,٤٥ × ١ = ١,٢٢٥ متر

**بعد قطع الخيط**

الجسم ٥ كجم يتحرك رأسيًّا لأسفل

ع. = ٢,٤٥ م/ث ، ء = ٩,٨ م/ث$^{٢}$ ، ف = ٢,٤٥ - ١,٢٢٥ = ١,٢٢٥ متر

∵ ع$^{٢}$ = ع.$^{٢}$ + ٢ ء ف

∴ ع$^{٢}$ = (٢,٤٥)$^{٢}$ + ٢ × ٩,٨ × ١,٢٢٥

∴ ع = $\frac{٤٩\sqrt{٥}}{٢٠}$ م/ث

الجسم ٣ كجم يتحرك رأسيًّا لأعلى حرا من نقطة على بعد ف من سطح الأرض ليصل إلى سكون لحظى ثم يعود مارًا بنقطة بدء الحركة الحرة ثم إلى سطح الأرض.

ع. = ٢,٤٥ م/ث ، ء = -٩,٨ م/ث$^{٢}$ ، ف = - (٢,٤٥ + ١,٢٢٥) = - ٣,٦٧٥

∵ ع$^{٢}$ = ع.$^{٢}$ + ٢ ء ف

= (٢,٤٥)$^{٢}$ + ٢ × -٩,٨ × -٣,٦٧٥

ع = $\frac{٤٩\sqrt{١٣}}{٢٠}$ م/ث

**حاول أن تحل**

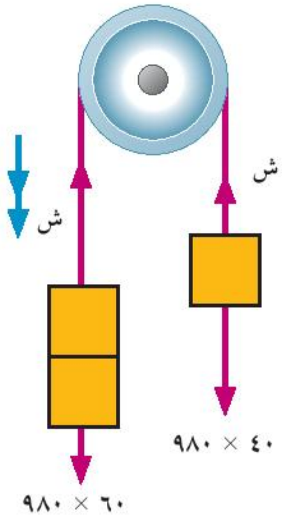
(٧) يمر خيط خفيف ثابت الطول على بكرة صغيرة ملساء مثبتة، و يحمل من طرفيه كتلتين ٢٠، ١٢ جم تتدليان رأسيًّا، أوجد عجلة حركة المجموعة والشد فى الخيط، و إذا كانت المجموعة قد بدأت حركتها من السكون، وقُطع الخيط بعد مرور ثانيتين من لحظة بدء الحركة، عين أقصى ارتفاع تصل إليه الكتلة ١٢ جم عن موضعها الأصلى عند بدء الحركة.

**مثال**

(٤) خيط خفيف يمر على بكرة رأسية ملساء، علق فى أحد طرفيه، جسم كتلته ٤٠ جم، وفى الطرف الآخر

جسمان كتلة كل منهما ٣٠ جم، تُركت المجموعة لتتحرك من سكون، وبعد ثانية واحدة من بدء الحركة، انفصلت إحدى الكتلتين الصغيرتين عن المجموعة، أوجد المسافة التى تصعدها الكتلة ٤٠ جم من بدء الحركة حتى تصل لسكون لحظي.

**الحل**




**معادلات الحركة:**

$\text{٦٠ جـ} = \text{٦٠} \times \text{٩٨٠} - \text{ش}$

$\text{٤٠ جـ} = \text{ش} - \text{٤٠} \times \text{٩٨٠}$

بجمع المعادلات نجد أن

$\text{١٠٠ جـ} = \text{٢٠} \times \text{٩٨٠}$

$\text{جـ} = \text{١٩٦ سم/ث}^{\text{٢}}$

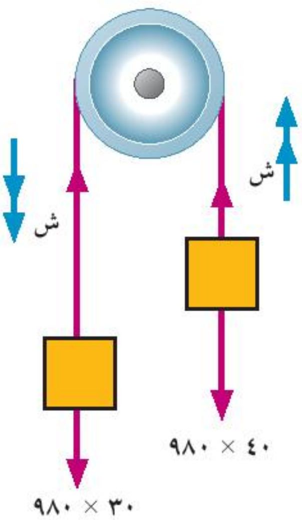
**لحظة انفصال الكتلة الصغرى**

$\text{ع} = \text{ع}_{\text{.}} + \text{جـ ن}$

$= \text{٠} + \text{١٩٦} \times \text{١} = \text{١٩٦ سم/ث}$

$\text{ف}_{\text{١}} = \text{ع}_{\text{.}}\text{ن} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{جـ ن}^{\text{٢}}$

$= \text{٠} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{١٩٦} \times \text{١} = \text{٩٨ سم}$




**بعد انفصال الكتلة الصغرى معادلات الحركة**

$\text{٤٠ جـ}' = \text{ش}' - \text{٤٠} \times \text{٩٨٠}$

$\text{٣٠ جـ}' = \text{٣٠} \times \text{٩٨٠} - \text{ش}'$

بجمع المعادلات نجد أن

$\text{٧٠جـ} = -\text{١٠} \times \text{٩٨٠}$

$\text{جـ} = -\text{١٤٠ سم/ث٢}$

أى أن المجموعة تتحرك فى نفس اتجاهها السابق قبل انفصال الكتلة الصغرى، ولكن بعجلة تقصيرية إلى أن تصل لسكون لحظى بعد أن تقطع مسافة $\text{ف}_{\text{٢}}$، ثم تغير اتجاه حركتها.

$\because \text{ع}^{\text{٢}} = \text{ع}_{\text{.}}^{\text{٢}} + \text{٢ جـ ف}$

$\text{٠} = (\text{١٩٦})^{\text{٢}} - \text{٢} \times \text{١٤٠ ف}_{\text{٢}} \qquad \therefore \text{ف}_{\text{٢}} = \text{١٣٧,٢ سم}$

$\therefore$ الكتلة ٤٠ جم تصعد مسافة ف قبل أن تسكن لحظيًّا؛ حيث $\text{ف} = \text{ف}_{\text{١}} + \text{ف}_{\text{٢}} = \text{٢٣٥,٢سم}$

**٩ حاول أن تحل**

٨ خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء، و يحمل فى أحد طرفيه ثقلين ٢٣٥، ٢٠ جم متصلين بخيط بحيث كان الثقل ٢٠ أسفل الثقل ٢٣٠، وفى الطرف الآخر ثقل قدره ٢٣٥ جم، احسب العجلة المشتركة إذا تحركت المجموعة من سكون. و إذا قطع الخيط الذى يحمل الثقل ٢٠ جم بعد أن قطعت المجموعة مسافة ٤٥ سم، وكان الثقل ٢٣٥ جم الهابط على مسافة ٩٠سم من سطح الأرض عندئذ، فاحسب الزمن الذى يأخذه هذا الثقل حتى يصل إلى سطح الأرض.

## تمـــاريـن ٢ - ٢

**أكمل كلًّا مما يأتي:**

(١) جسم كتلته ٧٠ كجم موضوع على ميزان ضغط على أرضية مصعد متحرك بعجلة منتظمة ١,٤ م/ث$^{٢}$ لأسفل، فإن قراءة الميزان .................. ث كجم.

(٢) عُلق جسم فى خطاف ميزان زنبركى معلق فى سقف مصعد فسجل القراءة ٣٩٠ ث جم عندما كان صاعدًا لأعلى:

إذا كانت عجلة الحركة - ٧٠ سم/ث$^{٢}$، فإن كتلة الجسم .................. جم.

إذا كانت كتلة الجسم ٣٥٠ جم، فإن عجلة الحركة .................. سم/ث$^{٢}$.

(٣) شخص يقف على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، فسجل الميزان القراءة ٧٥ ث كجم، عندما كان متحركًا لأعلى بعجلة جـ م/ث$^{٢}$، وسجل القراءة ٦٩ ث كجم عندما كان متحركًا لأسفل بالعجلة نفسها، فإن وزن الشخص الحقيقي.................. ث كجم.

(٤) يقف طفل على ميزان ضغط داخل مصعد متحرك لأسفل بعجلة ١,٤ م/ث$^{٢}$.

إذا كانت قراءة الميزان ٣٠ ث كجم، فإن وزن الطفل = .................. ث كجم

إذا كان وزن الطفل ٤٩ ث كجم، فإن قراءة الميزان .................. ث كجم

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

(٥) يقف شخص كتلته ٨٠ كجم على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، أوجد قراءة الميزان فى كل من الحالات الآتية:

(أ) المصعد يتحرك بسرعة منتظمة.

(ب) المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة سالبة مقدارها ٤٤,١ سم/ث$^{٢}$.

(جـ) المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ٢٩,٤ سم/ث$^{٢}$.

(٦) جسم كتلته ك، معلق فى سلك ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، أوجد ك فى كل من الحالات الآتية:

(أ) المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة ٩٨ سم/ث$^{٢}$، قراءة الميزان ٤٤ ث جم

(ب) المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ١٤٠ سم/ث$^{٢}$، قراءة الميزان ٢١٠ ث جم.

(جـ) المصعد ساكن وقراءة الميزان ١٠٠ ث جم.

(٧) مصعد كهربائى يتحرك رأسيًّا لأعلى حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها جـ م/ث$^{٢}$، مثبت فى سقفه ميزان زنبركى يحمل جسمًا كتلته ٣٥ كجم، فإذا كان الوزن الظاهرى الذى يبينه الميزان قدره ٣٠ ث كجم، فأوجد قيمة جـ .

(٨) وُضع جسم على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، فسجل القراءة ١٤ ث كجم، عندما كان المصعد ساكنًا. أوجد بثقل الكجم قراءة الميزان عندما يتحرك رأسيًّا لأعلى بعجلة منتظمة ٧٠ سم/ث$^{٢}$.

(٩) جسم كتلته ٩٤,٥ كجم وضع فى صندوق كتلته ٥٢,٥ كجم، ثم رفع رأسيًّا إلى أعلى بواسطة حبل متحرك بعجلة قدرها ١,٤ م/ث$^{٢}$، أوجد مقدار ضغط الجسم على قاعدة الصندوق، ومقدار الشد فى الحبل الذى يحمل الصندوق، و إذا قُطع الحبل، فأوجد ضغط الجسم على قاعدة الصندوق عندئذ

(١٠) مصعد كهربى وزنه ٣٥٠ ث كجم يهبط رأسيًا إلى أسفل بعجلة منتظمة سالبة مقدارها ٤٩سم/ث$^{٢}$ وبه رجل وزنه ٧٠ ث كجم. أوجد مقدار كل من ضغط الرجل على أرضية المصعد والشد فى الحبل الذى يحمل المصعد بثقل الكجم.

(١١) علق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد فسجل الميزان القراءة ٧ ث كجم عندما كان المصعد ساكنًا ثم سجل القراءة ٨ ث كجم عندما تحرك المصعد رأسيًا بعجلة منتظمة. أوجد مقدار واتجاه العجلة التى يتحرك بها المصعد.

(١٢) عُلق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد فسجل القراءة ١٦ ث جم، عندما كان المصعد صاعدًا بعجلة منتظمة جـ سم/ث$^{٢}$، وسجل القراءة ١١ ث جم عندما كان المصعد هابطًا بعجلة منتظمة ١,٥ جـ سم /ث$^{٢}$. أوجد كتلة الجسم والعجلة جـ، واحسب أيضًا قراءة الميزان عندما يكون المصعد هابطًا بعجلة منتظمة سالبة قدره $\frac{١}{٢}$ جـ سم/ث$^{٢}$.

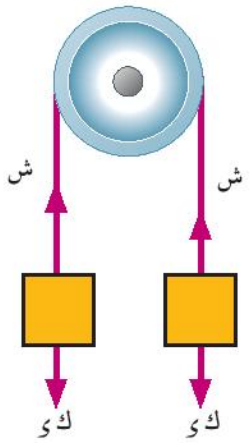
**أكمل كلًّا مما يأتي:**

(١٣) جسمان كتلة كل منهما ٣ كجم، مربوطان فى طرفى خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء، إذا اكسبت المجموعة سرعة قدرها ٢ م/ث فإن :

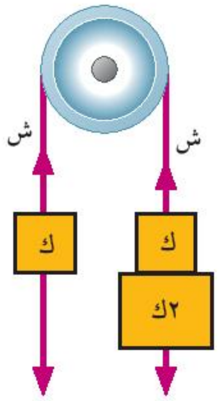
(أ) عجلة الحركة جـ = ..........

(ب) الشد فى الخيط ش = .......... ث كجم

(جـ) المسافة التى قطعتها إحدى الكتلتين خلال ثانية واحدة من بدء الحركة .......... مترًا.



(١٤) **فى الشكل المقابل** : إذا تحركت المجموعة من السكون فإن:



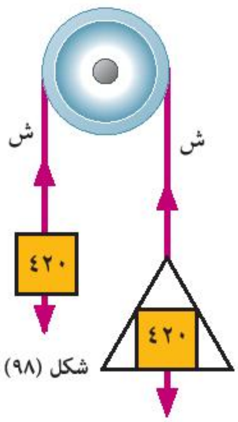

(أ) عجلة المجموعة = ............ م/ث٢

(ب) سرعة المجموعة بعد ٢ ث = ............ م/ث

(جـ) إذا انفصلت الكتلة ٢ ك عن المجموعة بعد ٢ ثانية فإن المجموعة تتحرك بعد ذلك بعجلة = ............

(د) المسافة التى قطعتها الكتلة ك فى ٥ ثوانٍ من بداية الحركة = ............

(١٥) كتلتان مقدار كل منهما ٤٢٠ جم إحداهما موضوعة فى كفة ميزان كتلتها ١٤٠ جم. وتحركت المجموعة من السكون فان:



شكل (٩٨)

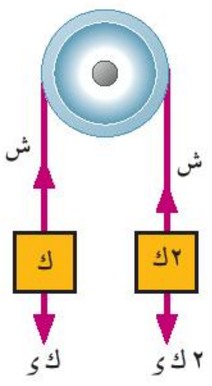
(أ) عجلة الحركة = ............ سم/ث٢

(ب) الشد فى الخيط = ............ ث جم

(جـ) الضغط على محور البكرة = ............ ث جم

(د) الضغط على كفة الميزان = ............ ث جم

(١٦) فى الشكل المقابل : جسمان كتلتاهما ك، ٢ ك مربوطان فى طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء وتحركت المجموعة من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد.




(أ) عجلة الحركة = ............ م/ث٢

(ب) الضغط على البكرة = ............ ث كجم

(جـ) سرعة المجموعة بعد $\frac{٣}{٢}$ ثانية من بدء الحركة = ............ م/ث

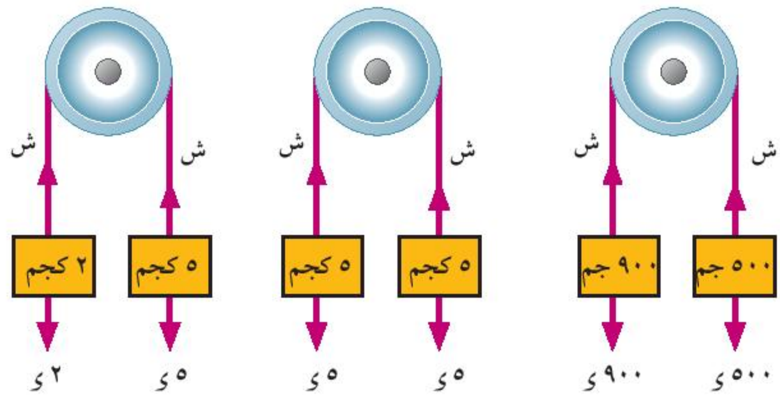
(د) المسافة الرأسية بين الجسمين بعد $\frac{٣}{٢}$ ثانية من بدء الحركة = ............ متر.

(هـ) إذا قُطع الخيط بعد $\frac{٣}{٢}$ ثانية من بدء الحركة فإن الكتلة ك تصل للسكون اللحظى بعد زمن قدره ............ ثانية

(و) إذا كانت المسافة بين الجسمين بعد زمن ن ثانية بعد قطع الخيط أصبحت ١٢,٢٥ مترًا فإن ن = ............ ثانية

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

(١٧) فى كل من الأشكال الآتية أوجد :




(أ) عجلة الحركة.

(ب) الشد فى الخيط.

(جـ) الضغط على البكرة.

(١٨) رُبط جسمان كتلتاهما ٥ كجم، ٣ كجم فى نهايتى خيط يمر فوق بكرة صغيرة ملساء، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزءا الخيط رأسيان إذا تركت المجموعة لتتحرك فأوجد مقدار عجلتها والضغط على البكرة، عين كذلك سرعة الجسم الذى كتلته ٥ كجم عندما يكون قد هبط مسافة قدرها ٤٠ سم.

(١٩) عُلق جسمان كتلتاهما $ك_١$، $ك_٢$ حيث $ك_١ > ك_٢$ فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء ، إذا كانت المجموعة تتحرك بعجلة ١٩٦ سم/ث٢ فأوجد $ك_١ : ك_٢$

(٢٠) رُبطت كتلتان ٣ ك ، ك جرام فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزءا الخيط رأسيان ، فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون عندما كانت المسافة الرأسية بين الكتلتين ١٦٠ سم والكتلة ك أسفل الكتلة ٣ ك. أوجد الزمن الذى تصبح فيه الكتلتان فى مستوى أفقى واحد.

(٢١) عُلقت كفتا ميزان كتلة كل منهما ٢١٠ جم فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء ويتدليان رأسيًّا، وضع فى إحدى الكفتين جسم كتلته ٧٠٠ جم وفى الكفة الأخرى جسم كتلته ٨٤٠ جم. أوجد عجلة الحركة للمجموعة والضغط على كل من الكفتين .

٢٢ رُبطت كتلتان ٥ ك ، ٢ ك كجم فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء وحفظت المجموعة فى حالة اتزان، وجزءا الخيط رأسيان ، فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون. فأوجد عجلة حركة المجموعة، و إذا كان الضغط على محور البكرة يساوى ١١٢ نيوتن، فأوجد قيمة ك.

٢٣ جسمان كتلتاهما ٤٢٠ جم، ٥٦٠ جم مربوطان فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء، بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد، وبعد مرور ثانية واحدة قُطع الخيط الواصل بينهما، فاحسب المسافة بين الكتلتين بعد مرور ثانية أخرى من قطع الخيط.

الوحدة الثانية

٢ - ٣

# الدفع

Impulse

تمهيد: ماذا تلاحظ عند:

- قذف كرة فى اتجاه حائط رأسى.
- تصادم السيارات على الطرق السريعة.
- تصادم عجلات الطائرات بأرض المطار أثناء الهبوط.

فى مثل هذه الحالات تكون دراسة حركة الأجسام عملية شاقة للغاية نتيجة تشابك العوامل المؤثرة عليها ولصغر الفترات الزمنية المتناهية . وسوف ندرس فى هذا الدرس بعض المعلومات الخاصة بذلك لربط حالة الجسم قبل وبعد حدوث التغير فى متجه سرعته من خلال هذا النشاط.

## نشاط

**الأدوات:** مسطرة خشبية طويلة يزيد طولها عن متر، مجموعة من الكرات المختلفة مثل كرة جولف، كرة تنس ، كرة بليباردو، كرة من الصلصال، ...

**العمل:** قم بإسقاط هذه الكرات تباعًا من ارتفاع ثابت وليكن ٢ متر على أرضية غرفة من الرخام أو السيراميك وسجل الارتفاع الذى ترتد إليه كل كرة.

| نوع الكرة | الارتفاع | أقصى ارتداد |
|---|---|---|
| كرة زجاجية | ٢ متر | .................... |
| كرة بليباردو | ٢ متر | .................... |
| كرة تنس | ٢ متر | .................... |
| كرة خشبية | ٢ متر | .................... |
| كرة جولف | ٢ متر | .................... |
| كرة بولينج | ٢ متر | .................... |
| كرة طاولة | ٢ متر | .................... |
| كرة صلصال | ٢ متر | .................... |

**الملاحظة والاستنتاج:** هل لاحظت أختلافًا فى الارتفاعات التى ترتد إليها الكرات المختلفة؟

هل يمكنك ترتيب الكرات حسب مسافة الارتداد لكل منها ترتيبًا تنازليًا؟

يرجع اختلاف مسافة الارتداد إلى عدة عوامل منها التغير فى كمية حركتها نتيجة تصادم الكرة بالأرض.

**ابحث فى شبكة المعلومات الدولية عن كل من الدفع وكمية الحركة.**

## أولًا: الدفع

إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ ثابتة المقدار على جسم خلال فترة زمنية ن فإن دفع هذه القوة، ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{د}$ يعرف بأنه حاصل ضرب متجه القوة فى زمن تأثيرها أى أن:

$$\overleftarrow{د} = \overleftarrow{ق}\ ن$$

### سوف تتعلم

- يتعرف مفهوم الدفع
- يستنتج العلاقة بين الدفع والتغير فى كمية الحركة

### المصطلحات الأساسية

- الدفع Impulse
- كمية الحركة Momentum
- القوى الدفعية Impulsive Forces

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

يتضح من هذا التعريف أن الدفع $\overleftarrow{\text{د}}$ كمية متجهة لها نفس اتجاه متجه القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$
و يمكن كتابة العلاقة بين القياس الجبرى للدفع د والقياس الجبرى للقوة ق كالآتى:

$$\text{د} = \text{ق ن}$$

## وحدات قياس مقدار الدفع:

من تعريف الدفع نجد أن:

وحدة قياس مقدار الدفع = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الزمن

ففى النظام الدولى للوحدات يقاس مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ث و يمكن أيضًا أن يقاس بحاصل ضرب أى وحدة قوة فى أى وحدة زمن.

كما يمكن التعبير عن وحدات قياس مقدار الدفع بطريقة اخري بملاحظة أن:

كجم.م/ث ، جم.سم/ث ، ...

لذلك نجد أن: إذا كانت الكتلة بالكيلو جرام و السرعة متر/ثانية فإن وحدة مقدار الدفع تكون كجم.م/ث وهى نفس الوحدة نيوتن.ث

وعندما تكون الكتلة بالجرام والسرعة سم/ث فإن وحدة مقدار الدفع تكون جم.سم/ث وهى نفس الوحدة داين.ث

### مثال على تعريف الدفع

(١) أثرت قوة مقدارها ٢٥ ث كجم على جسم لفترة زمنية قدرها $\frac{١}{١٠}$ ثانية ، أوجد دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث

**الحل**

الدفع = ق • ن

$= ٢٥ \times ٩,٨ \times \frac{١}{١٠} = ٢٤,٥$ نيوتن . ث

### حاول أن تحل

(١) أثرت قوة مقدارها $١٠^{١٢}$ داين على جسم لفترة زمنية $١٠^{-٥}$ ثانية، أوجد دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث

### مثال إيجاد مقدار الدفع

(٢) أثرت القوى $\overleftarrow{\text{ق}}_١ = ٤\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٢ = \overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٣ = ٤\,\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ على جسم لفترة زمنية قدرها ٥ ثوان ، أوجد مقدار دفع القوى على الجسم إذا كان مقدار القوة يقاس بوحدة نيوتن.

**الحل**

$\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ق}}_١ + \overleftarrow{\text{ق}}_٢ + \overleftarrow{\text{ق}}_٣$

$= (٤\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}) + (\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ع}}) + (٤\,\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}})$

$= ٥\,\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ع}}$ ،

$\because \overleftarrow{\text{د}} = \overleftarrow{\text{ق}} \times \text{ن}$

$= ٥(٥\,\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ع}})$

مقدار الدفع $= \sqrt{(٢٥)^٢ + (٥)^٢ + (١٠)^٢} = ٥\sqrt{٣٠}$ نيوتن . ث

**حاول أن تحل**

(١) أثرت القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{س}$ على جسم لمدة ثانية واحدة، أوجد مقدار دفع القوة على الجسم إذا كان معيار القوة يقاس بوحدة نيوتن.

## ثانيًا: الدفع وكمية الحركة

**تذكر أن**

$\because$ ع = ع. + جـ ن

$\therefore$ ع − ع. = جـ ن

حيث أن دفع قوة ثابتة المقدار ق على جسم لفترة زمنية ن يساوى ق ن ومن القانون الثانى لنيوتن نجد أن :

الدفع = ك جـ • ن

$\therefore$ الدفع = ك ( ع - ع. )

حيث ع.، ع هما القياسان الجبريان لمتجهى السرعة الابتدائية والسرعة بعد زمن ن على الترتيب أى أن الدفع يساوى التغير فى كمية الحركة.

أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الدفع يعطى بالتكامل الآتى :

$$\text{الدفع} = \int_{.}^{ن} ق \, ءن$$

$$\therefore \int_{.}^{ن} ق \, ءن = \int_{.}^{ن} ك\, جـ \, ءن$$

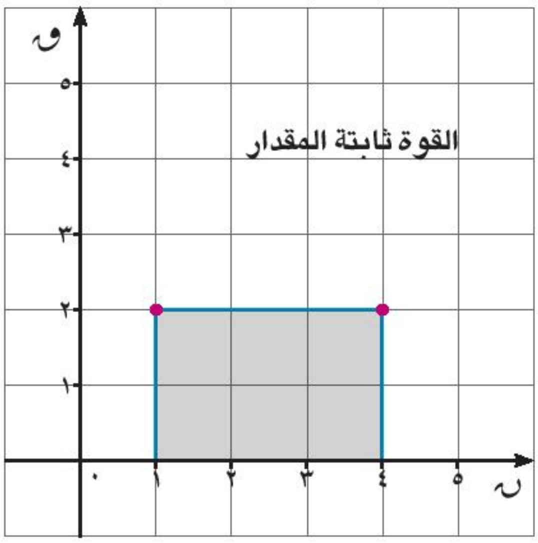
$$\int_{.}^{ن} ق \, ءن = ك \int_{.}^{ن} \left(\frac{ءع}{ءن}\right) ءن$$

$$= ك \int_{ع.}^{ع} ءع$$

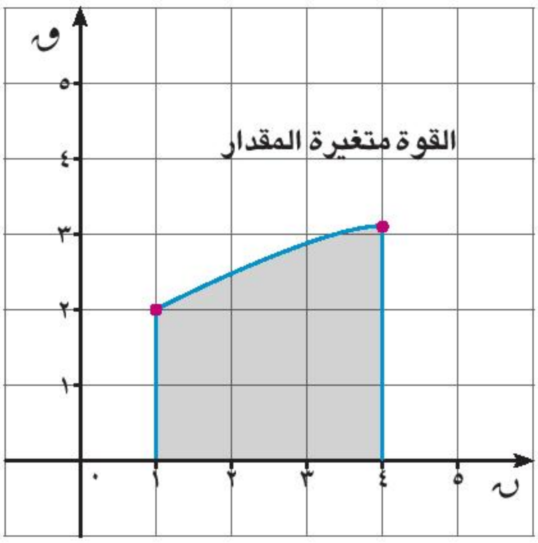
$$\int_{.}^{ن} ق \, ءن = ك \left[ ع \right]_{ع.}^{ع}$$

$$\int_{.}^{ن} ق \, ءن = ك \left( ع - ع. \right)$$

على وجه العموم الدفع يساوى التغير فى كمية الحركة



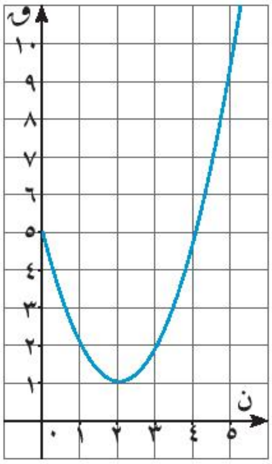

$$\text{الدفع} = \int_{ن_١}^{ن_٢} ق \, ءن$$




$$\text{الدفع} = \int_{ن_١}^{ن_٢} ق \, ءن$$



## مثال




٣ الشكل المقابل يمثل منحنى القوة - الزمن حيث ق = ١ + ( ن - ٢)$^{٢}$ أوجد :

أ دفع القوة ق خلال الثوانى الثلاث الأولى .

ب دفع القوة ق فى الثانية الخامسة.

### الحل

حيث مقدار القوة ق بالنيوتن ، الزمن ن بالثانية

ق = ١ + (ن - ٢)$^{٢}$

ق = ن$^{٢}$ - ٤ن + ٥

أ الدفع خلال الثوانى الثلاث الأولى = $\int_{٠}^{٣}$ ق د ن

= $\int_{٠}^{٣}$ (ن$^{٢}$ - ٤ن + ٥) د ن

= $[\frac{١}{٣}$ ن$^{٣}$ - ٢ن$^{٢}$ + ٥ن$]_{٠}^{٣}$

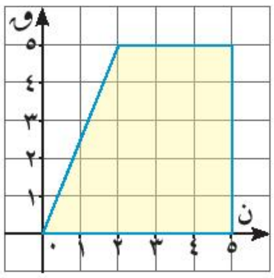
= ٦ نيوتن . ث

ب الدفع خلال الثانية الخامسة = $\int_{٤}^{٥}$ ق د ن

= $\int_{٤}^{٥}$ (ن$^{٢}$ - ٤ ن + ٥) د ن

= $[\frac{١}{٣}$ ن$^{٣}$ - ٢ن$^{٢}$ + ٥ ن$]_{٤}^{٥}$

= $\frac{٢٢}{٣}$ نيوتن . ث




### حاول أن تحل

١ الشكل المقابل يمثل منحنى القوة - الزمن أوجد مستخدمًا التكامل .

أ دفع القوة ق خلال الثانية الأولى

ب دفع القوة ق خلال الثوانى الخمسة الأولى حيث مقدار القوة ق بالنيوتن ، الزمن ن بالثانية .

## القوى الدفعية *Impulsive Force*

القوى الدفعية هى قوة كبيرة جدا تؤثر لفترة زمنية صغيرة للغاية وتحدث تغيرًا هائلًا فى كمية حركة الجسم دون أن تحدث تغيرًا يذكر فى موضعه والحركة الناتجة عند تأثير هذه القوى تسمى حركة دفعية كمثال على ذلك كرة البيسبول عندما تُضرب فإن زمن التلامس بين المضرب والكرة صغيرًا للغاية مع أن متوسط القوة المؤثرة على الكرة كبير جدًا ويكون الدفع كبيرًا بما يكفى ليغير كمية حركة الكرة دون تغير يذكر فى موضع الكرة عند تأثير قوة دفعية على جسم يكون ك ع$_{١}$ + ق . ن = ك ع$_{٢}$ حيث ن فترة زمنية صغيرة للغاية.

## مثال الدفع و كمية الحركة

(٤) جسم ساكن كتلته ٤ كجم موضوع على مستوى أفقى أملس ، أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٥ نيوتن لمدة ٨ ثانية. أوجد مقدار الدفع على الجسم ومقدار سرعة الجسم بعد ٨ ثانية.

**الحل**

$\because$ الدفع = ق . ن

$\therefore$ الدفع = ٥ × ٨ = ٤٠ نيوتن . ث

$\because$ الدفع = التغير فى كمية الحركة

٤٠ = ك (ع - ع$_{.}$)

٤٠ = ٤ (ع - ٠)

ع = ١٠ م/ث

**حاول أن تحل**

(١) أثرت قوة ثابتة مقدارها ق على جسم كتلته ك لمدة $\frac{١}{٤٩}$ ثانية، فغيرت سرعته من ٣م/ث إلى ٥٤ كم/س فى اتجاه القوة، وكان دفع القوة يساوى ٤,٨ نيوتن. ث فأوجد كتلة الجسم ومقدار القوة بثقل الكجم.

## مثال التعبير عن الدفع و كمية الحركة باستخدام المتجهات

(٥) أثرت قوة $\overleftarrow{ق} = ٢\,\overleftarrow{س} + ٧\,\overleftarrow{ص}$ على جسم كتلته ٥ كجم لمدة ١٠ ثانية عندما كان متجه سرعته $\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص}$ ، أوجد سرعته بعد تأثير القوة إذا كان مقدار القوة بوحدة نيوتن، السرعة بوحدة م/ث.

**الحل**

$\because$ الدفع = التغير فى كمية الحركة

$\therefore$ $\overleftarrow{ق} \cdot ن = ك\,(\overleftarrow{ع} - \overleftarrow{ع}_{.})$

$\therefore$ $١٠\,(٢\,\overleftarrow{س} + ٧\,\overleftarrow{ص}) = ٥\,(\overleftarrow{ع} - \overleftarrow{ع}_{.})$ $\qquad$ $\therefore$ $\overleftarrow{ع} - \overleftarrow{ع}_{.} = ٢\,(٢\,\overleftarrow{س} + ٧\,\overleftarrow{ص})$

$\therefore$ $\overleftarrow{ع} = ٢\,(٢\,\overleftarrow{س} + ٧\,\overleftarrow{ص}) + (\overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص})$

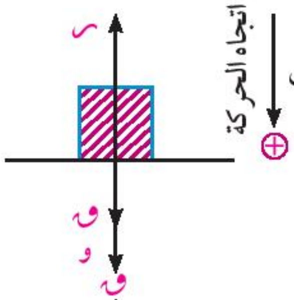
$\therefore$ $\overleftarrow{ع} = ٤\,\overleftarrow{س} + ١٤\,\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص}$ $\qquad$ $\therefore$ $\overleftarrow{ع} = ٥\,\overleftarrow{س} + ١٢\,\overleftarrow{ص}$

$\therefore$ $\|\overleftarrow{ع}\| = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = ١٣$ م / ث

**حاول أن تحل**

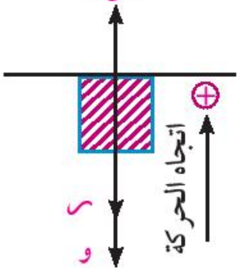
(٢) جسم كتلته ٣ كجم يتحرك بسرعة $\overleftarrow{ع} = ٥\,\overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص}$ ، أثرت عليه قوة ثابتة لمدة زمنية ن وكان دفع القوة على الجسم يساوى $٦\,\overleftarrow{س} + ٩\,\overleftarrow{ص}$ ، أوجد سرعة الجسم بعد تأثير القوة إذا كانت السرعة بوحدة م/ث، مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ث.

**لاحظ أن**



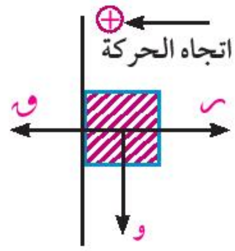

- عند سقوط جسم وزنه «و» رأسيًا على سطح الأرض فإنه عند لحظة التلامس **يكون:**

ضغط الجسم على الأرض = رد فعل الأرض على الجسم = ق + و




- عند قذف جسم وزنه « و » رأسيًا وأصطدامه بسقف حجرة **فإن:**

ضغط الجسم على السقف = رد فعل السقف على الجسم = ق - و




- عند قذف جسم وزنه « و » أفقيًا وأصطدامه بحائط رأسى **فإن:**

ضغط الجسم على الحائط = رد فعل الحائط على الجسم = ق

حيث ق هو مقدار القوة الدفعية فى كل من الحالات السابقة

## مثال — الحركة الرأسية

(٦) سقطت كرة من المطاط كتلتها $\frac{١}{٤}$ كجم من ارتفاع ١٠ متر عن سطح الأرض فارتدت بعد اصطدامها بالأرض إلى ارتفاع ٢,٥ متر ، أوجد الدفع الناتج عن تصادم الكرة على الأرض وعين رد فعل الأرض على الكرة إذا كان زمن تلامس الكرة مع الأرض $\frac{١}{١٠}$ ثانية.

**الحل**

دراسة مرحلة السقوط

∵ $ع^٢ = ع_٠^٢ + ٢ د ف$

∴ $ع_١^٢ = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠$

∴ $ع_١ = ١٤$ م/ث

وهى سرعة الكرة قبل ملامستها للأرض مباشرة.

دراسة مرحلة الارتداد

∵ $ع^٢ = ع_٠^٢ + ٢ د ف$

∴ $٠ = ع_٢^٢ - ٢ × ٩,٨ × ٢,٥$

∴ $ع_٢ = ٧$ م / ث

∴ سرعة الارتداد = ٧م / ث رأسيا إلى أعلى

الدفع = التغير فى كمية الحركة = ك $(ع_٢ - ع_١)$

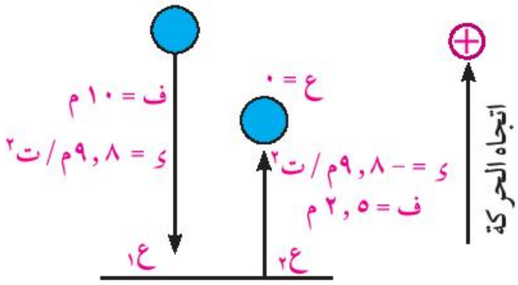
$= \frac{١}{٤} [٧ - (-١٤)] = ٥,٢٥$ كجم . م/ث

∵ الدفع = ق . ن ∴ $٥,٢٥ = ق × \frac{١}{١٠}$

∴ ق = ٥٢,٥ نيوتن

ردفعل الأرض على الكرة = القوة الدفعية + وزن الكرة

$= ٥٢,٥ + \frac{١}{٤} × ٩,٨ = ٥٤,٩٥$ نيوتن



**حاول أن تحل**

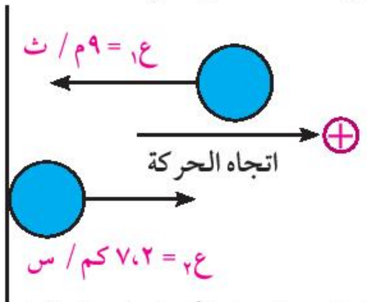
(١) جسم كتلته ٣٠٠ جم قذف رأسيًا لأعلى بسرعة ٨٤٠ سم/ث من نقطة تقع أسفل سقف حجرة بمقدار ١١٠ سم فاصطدم بالسقف وارتد إلى أرض الحجرة بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من الارتداد. أوجد دفع السقف للجسم علمًا بأن ارتفاع السقف ٢٧٢,٥ سم ، وإذا كان زمن تلامس التلامس $\frac{١}{١٠}$ ثانية فأوجد القوة الدفعية.

**تفكير ناقد:**

كرة من الصلصال كتلتها ١كجم سقطت من ارتفاع ٤٠سم على ميزان ضغط وكان زمن الصدمة $\frac{١}{٧}$ ثانية فأوجد قراءة الميزان علمًا بأن الكرة لم ترتد بعد الصدمة.

## مثال الحركة الأفقية

(٧) كرة كتلتها ١٠٠ جم تتحرك أفقيًا بسرعة ٩م / ث. أصطدمت بحائط رأسي وارتدت بسرعة قدرها ٧,٢ كم/ س فإذا كان زمن تلامس الكرة مع الحائط $\frac{١}{١٠}$ من الثانية فأوجد دفع الحائط للكرة ثم أوجد ضغط الكرة على الحائط.




**الحل**

باعتبار أن اتجاه الأرتداد هو الإتجاه الموجب للحركة

∴ $ع_1 = -٩$ م/ث ، $ع_2 = ٧,٢ \times \frac{٥}{١٨} = ٢$ م/ث

∵ $د = ك (ع_2 - ع_1)$

∴ $د = \frac{١٠٠}{١٠٠٠} [٢ - (-٩)] = ٠,١١$ كجم.م/ث

∵ $د = ق \times ن$ ∴ $٠,١١ = ق \times \frac{١}{١٠}$

∴ ق = ١,١ نيوتن = ضغط الكرة على الحائط

**حاول أن تحل**

(٢) كرة تنس كتلتها ٤٠جم تتحرك أفقيًا بسرعة ٥٠ سم / ث أصطدمت بالمضرب فارتدت فى الاتجاه المضاد بسرعة ١١٠سم/ث . أوجد مقدار دفع المضرب على الكرة. وإذا كان زمن تماس الكرة مع المضرب $\frac{١}{٤٩}$ من الثانية فما مقدار قوة دفع المضرب على الكرة؟

## تمـــاريـن ٢ – ٣

**أولا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) إذا أثرت قوة مقدارها ١٦ ث كجم على جسم لمدة ربع ثانية فإن مقدار دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن.ث تساوى.

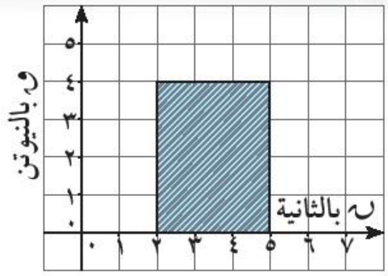
(أ) ٤  (ب) ٣٩,٢  (ج) ٤٩  (د) ٦٤

(٢) إن كان مقدار دفع قوة ق على جسم لمدة $١٠^{-٤}$ ثانية يساوى ١٠ نيوتن .ث فإن مقدار ق يساوى:

(أ) $١٠^{٣}$ داين  (ب) $١٠^{٥}$ داين  (ج) $١٠^{٣}$ نيوتن  (د) $١٠^{٥}$ نيوتن

(٣) إذا أثرت القوتان $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ مقدرتان بوحدة النيوتن على جسم لفترة زمنية قدرها ٢ ثانية فإن مقدار دفع القوى بوحدة نيوتن . ثانية يساوى:

(أ) $٥\sqrt{٢}$  (ب) $١٠\sqrt{٢}$  (ج) $٥٠\sqrt{٢}$  (د) $١٠٠\sqrt{٢}$



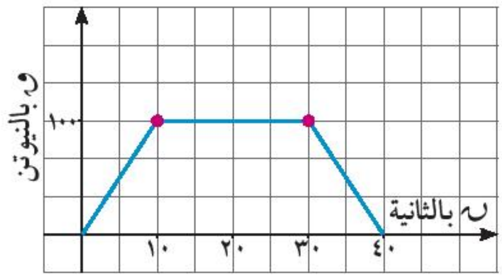

٤ إذا أثرت قوة ثابتة المقدار على جسم لفترة زمنية كما هو معطى في الشكل فإن مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ثانية تساوى.

أ ٨ ب ١٢

ج ٢٠ د ٥٠

٥ إذا أثرت قوة مقدارها ٩٠ نيوتن على جسم كتلته ١٠كجم لمدة ٥ ثوان ، فإن مقدار التغير فى سرعة الجسم فى اتجاه القوة نفسه يساوى.

أ ٤٥م/ث ب ٥٠م/ث ج ٩٠م/ث د ١٢٠ م/ث




٦ جسم كتلته ٢٠ كجم موضوع على مستوى أفقى أملس فإذا تحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة اتجاهها ثابت و يتغير مقدارها مع الزمن كما هو موضح بالشكل فإن مقدار الدفع لهذه القوة بعد ٤٠ ثانية بوحدة نيوتن. ثانية يساوى:

أ ١٠٠٠ ب ٢٠٠٠

ج ٣٠٠٠ د ٤٠٠٠

**ثانيا : اجب عن الأسئلة الآتية :**

٧ أطلقت رصاصة كتلتها ٢٠جم من بندقية أفقيا، فإذا إستمر مسارها داخل البندقية لمدة ٠,٥ ثانية وكان مقدار قوة دفع البندقية عليها ٢٠ نيوتن أوجد سرعة خروج الرصاصة من فوهة البندقية.

٨ مدفع سريع الطلقات يطلق الرصاصات رأسيا لأعلى ،كتلة الواحدة منها ٥٠٠جم فإذا كان متوسط قوة دفع الغاز فى إسطوانة المدفع على الرصاصة هو ٢٥٠ نيوتن وتؤثر على الرصاصة لمدة ٠,٢ ثانية حتى لحظة خروج الرصاصة من فوهة المدفع احسب سرعة خروج الرصاصة من فوهة المدفع.

٩ سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠جم من إرتفاع ٦,٤ متر من سطح الأرض فارتدت رأسيًا إلى أعلى فإذا كان متوسط القوة التى تبذلها الأرض على الكرة ١٨٢ × ١٠$^{٤}$ داين وأن زمن تلامس الكرة بالأرض ٠,٠٢ من الثانية فأوجد.

أ مقدار دفع الأرض للكرة

ب أقصى إرتفاع وصلت إليه الكرة بعد إرتدادها

١٠ تتحرك كرة ملساء كتلتها ٢٠٠ جرام فى خط مستقيم على أرض أفقية ملساء بسرعة ١٠م/ث فإذا إصطدمت الكرة بحائط رأسى أملس وارتدت بسرعة ٤م/ث أوجد:

أ مقدار دفع الحائط على الكرة

ب مقدار قوة دفع الحائط للكرة إذا كان زمن تلامس الكرة على الحائط ٠,٠٥ من الثانية.

(١١) عربة سكة حديد كتلتها ١٠ طن تسير بسرعة ١٨ كم/س صدمت حاجز الأصطدام وارتدت بسرعة ٩ كم/ س أوجد مقدار دفع الحاجز للعربة.

(١٢) عربة ساكنة كتلتها ١طن دفعت فى اتجاه حركتها بقوة ٢٠٠ ث كجم لمدة ٥ ثوان ثم تركت العربة وشأنها فعادت إلى حالة السكون مرة أخرى بعد ١٥ ثانية أوجد مقدار المقاومة بفرض ثبوتها فى الحالتين وكذلك أقصى سرعة وصلتها العربة مستخدما العلاقة بين الدفع وكمية الحركة.

(١٣) قذفت كرة كتلتها ١ كجم رأسيا لأعلى وباتجاه سقف يرتفع عن نقطة القذف مسافة ٣٦٠ سم بسرعة مقدارها ١٤ م / ث فإذا إصطدمت الكرة بالسقف وارتدت بسرعة ١٠ م/ث أوجد مقدار قوة دفع السقف على الكرة إذا كان زمن تلامس الكرة مع السقف٠,٠٢ من الثانية.

(١٤) مدفع سريع الطلقات يطلق أفقيًا ٦٠٠ رصاصة فى الدقيقة . كتلة كل واحدة منها ٣٩,٢ جرام بسرعة ١٢٦٠ كم/س إحسب قوة رد الفعل المؤثر على المدفع بثقل الكيلو جرام.

(١٥) كرة كتلتها ١٥٠٠ جرام سقطت من إرتفاع ٢,٥ متر على سطح سائل لزج فغاصت فيه بسرعة منتظمة وقطعت مسافة ٧٠ سم فى ٠,٢ من الثانية احسب مقدار دفع السائل على الكرة.

(١٦) أثرت القوى $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ = ا $\overleftarrow{\text{س}}$ - $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣}$ = ا $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسم لمدة $\frac{١}{٢}$ ثانية وكان دفع هذه القوى على الجسم يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{\text{د}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ أوجد قيمة ا ، ب.

(١٧) جسم كتلته ٢٠جم سقط من ارتفاع ٤٠ سم عن سطح بركة من الماء فغاص فى الماء وقطع مسافة ٢١٠ سم خلال ثانية واحدة بعجلة ١,٢م / ث$^{٢}$ أوجد مقدار دفع الماء على الجسم نتيجة لتصادمه بسطح الماء.

# الشغل ، الطاقة ، القدرة

## Work , Energy & Power

الوحدة

٣

## مقدمة الوحدة

فى دراستنا للوحدات السابقة وجدنا أنه عندما تؤثر محصلة عدة قوى على جسم فإنه يتحرك بشكل أو بآخر، وإذا تساءلنا الآن ما الفائدة من حركة وتحريك الأجسام؟ تأتى الإجابة فى شقين؛ أولهما أن الإنسان بفضوله الدائم يسعى لتفسير الظواهر الطبيعية وأسبابها وما ينتج عنها. وثانيها أن الإنسان يريد الأستفادة مما أنعم الله عليه وسخره لنا، فهو يريد سيارة تنقله من مكان لآخر ومصابيح كهربائية لإنارة المدن والقرى وغير ذلك، وبالطبع فإن كل ذلك لن يتحقق ما لم نعرف كيف نتحكم بالأشياء ونستفيد من حركاتها سواءً أكانت أجهزة كهربائية والكترونية أو وسائل مواصلات مختلفة أو أجسام كونية تسبب دوران الأرض وتعاقب الليل والنهار.

لذلك سوف ندرس فى هذه الوحدة حركة الأجسام فنتعرف على الشغل وكيف نستفيد من تحريك الأجسام ثم نتعرف على طاقة الحركة وطاقة الوضع ثم نربط بين هذه الكميات القياسية (غير المتجهة) وحدات قياسها المختلفة والعلاقة بينها ونتعرف بعد ذلك على القوى التى تحافظ على الطاقة وتلك التى لا تحافظ عليها وصولًا لمبدأ الشغل والطاقة ثم نتعرف على أبسط الآلات التى استخدمها الأنسان ونقارن بينها بحساب القدرة الناتجة عن كل واحدة ومردوداتها المختلفة فى الحياة اليومية.

## أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف الشغل المبذول بواسطة قوة ووحدات قياس الشغل.
- يتعرف مفهوم القدرة ووحدات قياسها.
- يتعرف طاقة حركة الجسيم ووحدات قياسها.
- يتعرف مبدأ الشغل والطاقة.
- يتعرف طاقة الوضع ووحدات قياسها وتطبيقاتها.

## المصطلحات الأساسية

- الشغل Work
- قوة ثابتة Constant Force
- كمية قياسية Scalar Quantaty
- متجه إزاحة Displacement Vector
- متجه موضع Position Vector
- جول Joule
- قوة متغيرة Variable Force
- إرج Erg
- طاقة الحركة Kinetic Energy
- طاقة لوضع potential Energy
- التغير في طاقة الوضع Change in Potential Energy
- مبدأ الشغل والطاقة principle of Work – Energy
- ثبات الطاقة
- القدرة Power
- قوة الحصان Horse Power

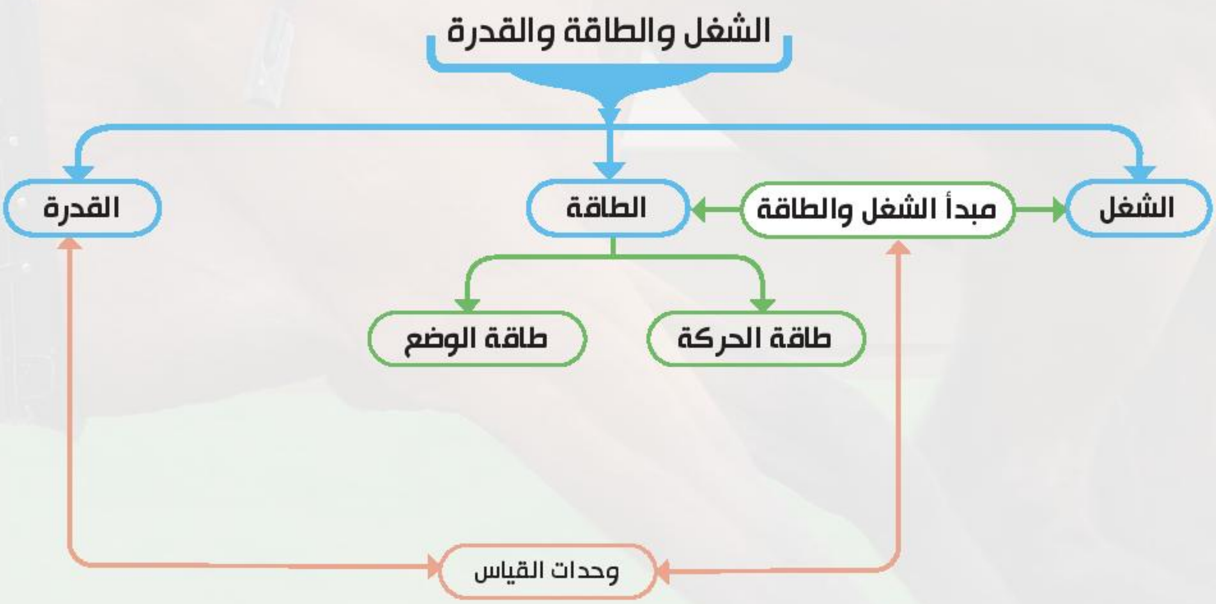
## دروس الوحدة

(٤-١): الشغل
(٤-٢): الطاقة
(٤-٣): القدرة

## الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

## مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثالثة

٣ - ١

# الشغل

Work

## سوف تتعلم

- الشغل المبذول من قوة ثابتة.
- بعض الحالات المختلفة لمتجهى القوة والإزاحة.
- وحدات قياس الشغل.
- الشغل المبذول من قوة متغيرة.

## المصطلحات الأساسية

- الشغل *Work*
- قوى ثابتة *Constant force*
- كمية قياسية *Scalar quantaty*
- متجه إزاحة *Displacement vector*
- متجه موضع *Position vector*
- جول *Joule*
- إرج *Erg*

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

## مقدمة:

إن مفهوم الشغل من الأمور الهامة فى علم الكيناتيكا (Kinetic) لأنه يعتمد على مفاهيم القوة التى وضعها نيوتن فى القوانين الثلاثة، ويجدر بالذكر أن الشغل والطاقة كميات قياسية وبالتالى فإن التعامل معها سيكون أسهل من استخدام قوانين نيوتن للحركة خصوصًا، عندما يكون متجه القوة متغيرًا وبالتالى فإن متجه العجلة سيكون متغيرًا كذلك.

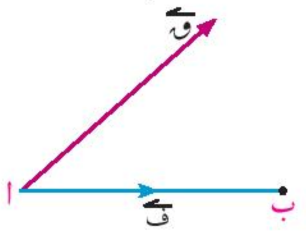
وفى هذا الدرس سوف نوضح مفهوم الشغل وهو حلقة الوصل بين القوة والطاقة.

والشغل قد يكون ناتجا من قوة ثابتة Constant force أو من قوة متغيرة Varying force .

وسوف ندرس كلًا من النوعين فى هذا الدرس.

## أولًا: الشغل المبذول من قوة ثابتة: *Work done by a Constant Force*

باعتبار أن جسما يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة $\overrightarrow{\text{ق}}$ وأنه أنتقل من الموضع أ إلى الموضع ب وكان متجه إزاحته $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ف}}$ كما فى شكل (١)




شكل (١)

**تعريف**

يعرف الشغل المبذول بواسطة القوة الثابتة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فى تحريك جسم من موضع إبتدائى إلى موضع نهائى ويرمز له بالرمز (ش) على أنه يساوى حاصل الضرب القياسى لمتجه القوة فى متجه الإزاحة بين الموضعين

$$\text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$$

يتضح إذاً أن الشغل هو كمية قياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر تبعا لاتجاه كل من المتجهين $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}$

### مثال

(١) تحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٦ \overrightarrow{\text{س}} + ٨ \overrightarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (٣ ، -٤) إلى النقطة ب (٧ ، ٢) إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة.

**الحل**

متجه الأزاحة $\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٧ \overrightarrow{\text{س}} + ٢ \overrightarrow{\text{ص}}) - (٣ \overrightarrow{\text{س}} - ٤ \overrightarrow{\text{ص}})$

$$\overrightarrow{\text{ف}} = ٤ \overrightarrow{\text{س}} + ٦ \overrightarrow{\text{ص}}$$

نطبق تعريف الشغل مع ملاحظة أن القوة المعطاة ثابتة

ش = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

ش = ($٦ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص}$) $\cdot$ ($٤ \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$) = $٦ \times ٤ + ٨ \times ٦$ = ٧٢ وحدة قياس شغل

**حاول أن تحل**

(١) تحرك جسم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق} = ٥ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ من النقطة أ (٥، ٢) إلى النقطة ب (٣، ١)
إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة

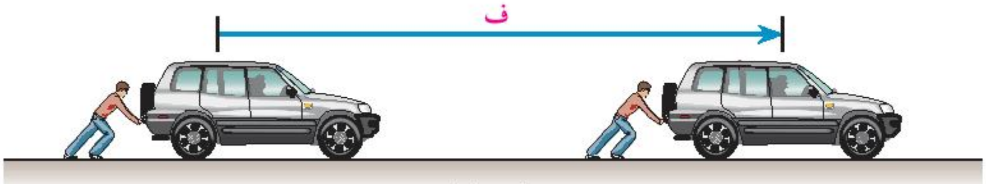
**بعض الحالات المختلفة لمتجهى القوة والإزاحة**

وحيث أنه يمكن إعادة كتابة معادلة تعريف الشغل ش = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$ بصورة أخرى وهى ش = $\| \overrightarrow{ق} \| \, \| \overrightarrow{ف} \|$ جتا هـ حيث هـ قياس أصغر زاوية بين متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ومتجه الإزاحة $\overrightarrow{ف}$ باعتبارهما خارجين من نقطة واحدة.

(أ) إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها موازٍ لإتجاه الأزاحة أى أن ق ($\hat{هـ}$) = صفر عندئذ يصبح الشغل
ش = $\| \overrightarrow{ق} \| \, \| \overrightarrow{ف} \|$ جتا صفر = $\| \overrightarrow{ق} \| \, \| \overrightarrow{ف} \|$

ويكتب: ش = ق × ف

وشكل (٢) يوضح ذلك

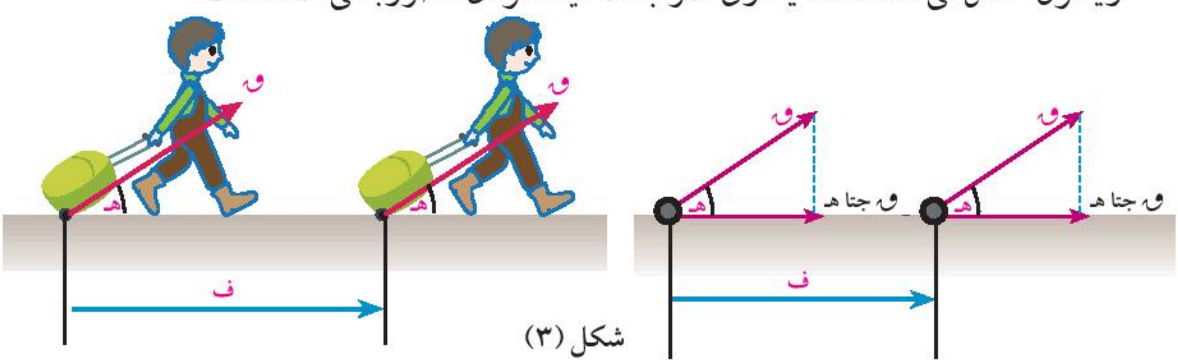



شكل (٢)

(ب) إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها يميل على اتجاه الأزاحة بزاوية قياسها أقل من ٩٠ عندئذ يصبح الشغل

ش = $\| \overrightarrow{ق} \| \, \| \overrightarrow{ف} \|$ جتا هـ

ويكون الشغل فى هذه الحالة يساوى المركبة الأفقية للقوة ق مضروبًا فى المسافة ف.



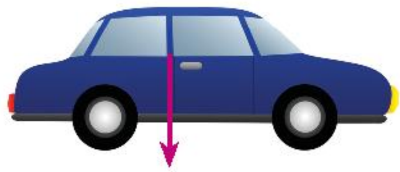

شكل (٣)



ج) إذا كانت القوة ثابتة و إتجاهها عمودى على إتجاه الأزاحة أى أن ق (هـ) = ٩٠° عندئذ يصبح الشغل

ش = || $\overleftarrow{\text{ق}}$ || || $\overleftarrow{\text{ف}}$ || جتا ٩٠ = صفر

وشكل (٤) يوضح ذلك.




فالسيارة المتحركة افقياً وزنها لا يقوم بأى شغل في مسار الحركة

د) اذا كانت القوة ثابتة و إتجاهها يميل على إتجاه الأزاحة بزاوية قياسها أكبر من ٩٠° عندئذ يصبح الشغل

ش = || $\overleftarrow{\text{ق}}$ || || $\overleftarrow{\text{ف}}$ || جتا هـ

و يكون الشغل سالبا و يسمى شغلاً مقاومًا ومثال ذلك الشغل الذى تبذله قوة المقاومة أو قوة الأحتكاك.

## مثال

(٢) تحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (١، ٠) إلى النقطة ب (٣، ٣) حيث ينسب التحليل إلى مجموعة محاور ديكارتية متعامدة $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$. عين الشغل المبذول

### الحل

يبين شكل (٥) موضع كل من النقطتين أ ، ب بالنسبة للمحاور.

لحساب متجه الإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ :

$\overleftarrow{\text{ف}}$ = $\overleftarrow{\text{وب}}$ - $\overleftarrow{\text{وأ}}$ **(قاعدة طرح المتجهات)**

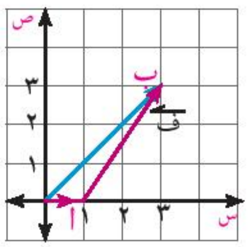
∴ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٣ - ١) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (٣ - ٠) $\overleftarrow{\text{ص}}$

= ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$

∵ ش = $\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\overleftarrow{\text{ف}}$ **(تعريف الشغل)**

= (٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ -٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$)•(٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$)

= ٥ × ٢ + (-٣) × (٣) = ١ وحدة قياس شغل.




شكل (٥)

### حاول أن تحل

(٢) يتحرك جسيم تحت تأثير القوتين $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (٢، ١) إلى النقطة ب (٣، ٠) حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسية. احسب الشغل المبذول.

### تفكير ناقد:

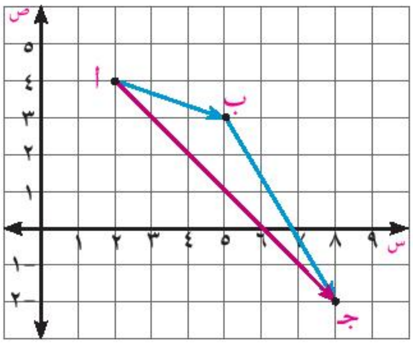
أثبت أنه إذا حدث للجسم إزاحتان متتاليتان تحت تأثير قوة ما، فإن الشغل المبذول خلال الإزاحة المحصلة يساوى مجموع الشغلين خلال كل من الإزاحتين.

## مثال

(٣) أثرت القوة $\overleftarrow{و}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ على جسم فحركته من النقطة أ (٢، ٤) على خط مستقيم إلى النقطة ب (٥، ٣) ثم إلى النقطة جـ (٨، -٢) إحسب الشغل بواسطة هذه القوة خلال كل من الأزاحتين ثم حقق أن مجموع الشغلين يساوى الشغل المبذول خلال الأزاحة المحصلة.

**الحل**

**أولًا:** متجه الأزاحة الأولى $\overleftarrow{أب}$ = $\overleftarrow{ب}$ - $\overleftarrow{أ}$ = (٥، ٣) - (٢، ٤) = (٣، -١)




**الشغل المبذول خلال الأزاحة الأولى**

ش$_١$ = $\overleftarrow{و}$ • $\overleftarrow{ف}_١$ = (٣ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ ) • (٣ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ )

ش$_١$ = ٩ - ٥ = ٤ وحدة قياس شغل

متجه الأزاحة الثانية $\overleftarrow{ب جـ}$ = $\overleftarrow{جـ}$ - $\overleftarrow{ب}$ = (٨، -٢) - (٥، ٣) = (٣، -٥)

**الشغل المبذول خلال الأزاحة الثانية**

ش$_٢$ = $\overleftarrow{و}$ • $\overleftarrow{ف}_٢$ = (٣ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ )•(٣ $\overleftarrow{س}$ - ٥ $\overleftarrow{ص}$ )

ش$_٢$ = ٩- ٢٥ = -١٦ وحدة قياس شغل

**الشغل المحصل = مجموع الشغلين**

ش = ش$_١$ + ش$_٢$ = ٤ - ١٦ = -١٢ وحدة قياس شغل

**ثانيا:** الأزاحة المحصلة $\overleftarrow{أجـ}$ = $\overleftarrow{جـ}$ - $\overleftarrow{أ}$ = (٨ ، -٢) - (٢ ، ٤) = ( ٦ ، -٦)

∴ **الشغل خلال الأزاحة المحصلة**

ش = $\overleftarrow{و}$ • $\overleftarrow{ف}$ = (٣ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ ) • (٦ $\overleftarrow{س}$ ، -٦ $\overleftarrow{ص}$ )

ش = ١٨ - ٣٠ = -١٢ وحدة قياس الشغل

**حاول أن تحل**

(٣) أثرت القوة $\overleftarrow{و}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ - ٧ $\overleftarrow{ص}$ على جسم فحركته من النقطة أ (٥، -١) على خط مستقيم إلى النقطة ب (-١، ٣) ثم إلى النقطة جـ (٤، ٦) إحسب الشغل بواسطة هذه القوة خلال كل من الأزاحتين ثم حقق أن مجموع الشغلين يساوى الشغل المبذول خلال الأزاحة المحصلة.

تعبير شفهى: إذا تحرك جسيم على خط مستقيم من موضع ما ثم عاد إلى نفس هذا الموضع تحت تأثير نفس القوة فما مقدار الشغل المبذول خلال هذا المسار؟

## مثال

٤ أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}}$ على جسيم فكان متجه موضع الجسيم عند لحظة زمنية ن تتعين من العلاقة: $\overrightarrow{\text{ر}}(\text{ن}) = (\text{ن} + ٥)\ \overrightarrow{\text{س}} + (\text{ن}^{٢} + ٤)\ \overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسيين، احسب الشغل المبذول من القوة من ن = ١ إلى ن = ٥

**الحل**

الإزاحة الحادثة من ن = ١ إلى ن = ٥ هي

$\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{ر}}_{٥} - \overrightarrow{\text{ر}}_{١}$

$\therefore\ \overrightarrow{\text{ف}} = (٥\ \overrightarrow{\text{س}} + ٢٥\ \overrightarrow{\text{ص}}) - (\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}) = ٤\ \overrightarrow{\text{س}} + ٢٤\ \overrightarrow{\text{ص}}$

$\because\ \text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$ (من تعريف الشغل)

$\therefore\ \text{ش} = (٢ ، ٣) \cdot (٤ ، ٢٤) = ٨ + ٧٢ = ٨٠$ وحدة شغل.

**لاحظ أن**


لا يتوقف الشغل على المسار الذى يسلكه الجسم من الموضع أ إلى الموضع ب بل يتوقف على الإزاحة $\overrightarrow{\text{أب}}$

**حاول أن تحل**

٤ إذا كان متجه موضع جسيم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة: $\overrightarrow{\text{ر}}(\text{ن}) = (\text{ن} + ٤)\ \overrightarrow{\text{س}} + (\text{ن}^{٢} + ٣)\ \overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسية. أثرت على الجسم قوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\ \overrightarrow{\text{س}} + ٢\ \overrightarrow{\text{ص}}$

أحسب الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ من ن = ١ إلى ن = ٣

### وحدات قياس الشغل:

من تعريف الشغل نستنتج ان:

**وحدة قياس الشغل = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الإزاحة**

### ومن وحدات قياس الشغل:

- **الجول:** يعرف الجول بأن مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها نيوتن واحد في تحريك جسم ما مسافة متر واحد .

فإذا أخذنا $\|\overrightarrow{\text{ق}}\|$ = ١ نيوتن ، $\|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ = ١ متر فإن:

**الجول = ١ نيوتن × ١ متر    أى    الجول = نيوتن . متر**

**الجول هو الوحدة الدولية لقياس الشغل**

- **الإرج:** يعرف الإرج على أنه مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها داين واحد فى تحريك جسم ما مسافة سنتيمتر واحد.

فإذا أخذنا $\|\overrightarrow{\text{ق}}\|$ = ١ داين ، $\|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ = ١ سم فإن:

**الإرج = ١ داين × ١ سم    أى    الإرج = داين . سم**

**ث كجم.متر:** هو مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها ١ ث كجم فى تحريك جسم ما مسافة متر واحد.

فإذا أخذنا $\|\overleftarrow{\text{ق}}\|$ = ١ ث كجم ، $\|\overleftarrow{\text{ف}}\|$ = ١ متر فإن ث كجم. متر = ١ ث كجم × ١ متر

ويمكن التحويل بين وحدات الشغل على النحو الآتى:

| | |
|---|---|
| ١ ث كجم. متر = ١ ث كجم × ١ متر | ١ جول = ١ نيوتن × ١ متر |
| = ٩,٨ نيوتن . متر | = $١٠^{٥}$ داين × ١٠٠سم |
| **ث كجم.متر = ٩,٨ جول** | = $١٠^{٧}$ داين × سم |
| | **جول = $١٠^{٧}$ إرج** |

## مثال

٥ يتحرك جسيم على خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوى فى المقدار ١٠٠ نيوتن. أحسب الشغل الذى تبذله هذه القوة خلال أزاحة معيارها ٣٠٠ متر.

**الحل**

بما أن القوة هى مقاومة. إذن فهى تعمل عكس اتجاه متجه الإزاحة، وإذا كان $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه الإزاحة، فإنه يمكن التعبير عن كل من الإزاحة والقوة بالقياسات الجبرية.

$\overleftarrow{\text{ف}}$ = ف $\overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ =- ق $\overleftarrow{\text{ى}}$

**فى حالتنا:**

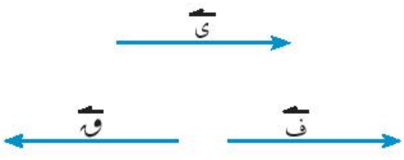
ف = + ٣٠٠ متر ، ق = ١٠٠ نيوتن

**من شكل (٦)** ش =- ق ف

= (-١٠٠) × (٣٠٠)

= -٣ × $١٠^{٤}$ نيوتن . متر

= -٣ × $١٠^{٤}$ جول




(شكل ٦)

## مثال

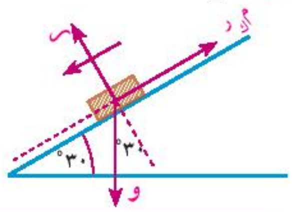
**شغل الوزن ورد الفعل العمودى والأحتكاك**

٦ ينزلق جسم كتلته ١٠ كجم مسافة ٦ متر على مستو خشن معامل الأحتكاك الحركى بينهما ٠,٢ ويميل هذا المستوى على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد بوحدة ث كجم.متر الشغل الذى تبذله كلًا من:

**أولًا:** قوة وزن الجسم **ثانيا:** رد الفعل العمودى على المستوى **ثالثًا:** قوة الأحتكاك

**الحل**

**أولًا: الشغل المبذول من قوة الوزن**




وزن الجسم (و) = ك ى

∴ و = ١٠ × ٩,٨ = ٩٨ نيوتن

∵ الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ف}$ تساوى ٦٠°

**ومن تعريف الشغل:**

ش = و × ف جتا ٦٠°

∴ ش = ٩٨ × ٦ × $\frac{1}{2}$ = ٢٩٤ جول = ٣٠ ث كجم. متر

**حل آخر:**

يمكن إيجاد مركبة الوزن التى تعمل فى نفس اتجاه الإزاحة ويكون الشغل المبذول ش = ك ى جا هـ × ف

∴ ش = ١٠ × ٩,٨ × $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٢٩٤ جول = ٣٠ ث كجم. متر

**ثانيًا:**

∵ قوة رد الفعل العمودى على المستوى (ر) تكون دائمًا عمودية على المستوى الذى يتحرك عليه الجسم لذا تكون الزاوية بين ر ، ف مساوية ٩٠°.

∴ الشغل المبذول من ر = ٠ .

**ثالثًا: الشغل المبذول من قوة الأحتكاك:**

نعلم أن قوة الأحتكاك الحركى $م_ك$ ر (حيث $م_ك$ معامل الأحتكاك الحركى)

∴ $م_ك$ ر = ٠,٢ × ١٠ × ٩,٨ × جتا ٣٠° = ٤٩ $\sqrt{3}$ نيوتن

∵ الشغل المبذول من قوة الاحتكاك = −$م_ك$ ر × ف

∴ ش = −٤٩ $\sqrt{3}$ × ٦ = −٢٩٤ $\sqrt{3}$ جول = −٣٠ $\sqrt{3}$ ث كجم.متر

**حاول أن تحل**

(٥) سيارة كتلتها ٦ طن تصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{98}$ ضد مقاومات تعادل ١٠ ث كجم لكل طن من الكتلة فاكتسبت سرعة ٥٤ كم / س خلال ٣٠ ثانية ، فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون فأحسب بالجول مقدار الشغل المبذول من:

**أولًا:** قوة محرك السيارة **ثانيًا:** قوة المقاومة

**ثالثًا:** وزن السيارة

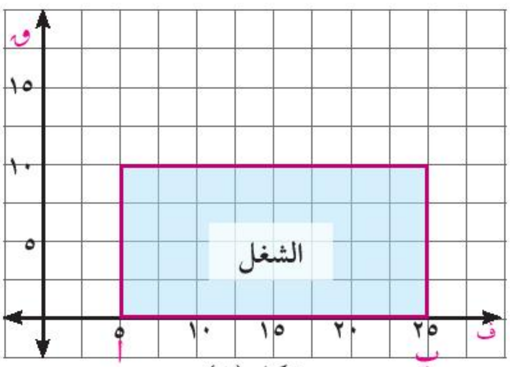
## ثانيًا: الشغل المبذول من قوة متغيرة *Work Done by a Varying Force*

سبق أن استخدمنا مفهوم الشغل فى التعامل مع الحركة - عندما تكون القوة منتظمة ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى:

**مثال توضيحى:**

باعتبار أن قوة ثابتة مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر على جسم ليتحرك من أ إلى ب كما هو موضح فى شكل (٨)

وبالتالى تكون الازاحة من أ إلى ب = ٢٠ متر ولتمثيل ذلك بيانيًا نرسم محور القوة ومحور الإزاحة كما هو مبين فى الشكل وبالتالى تكون القوة ممثلة على مستقيم أفقى يوازى محور الإزاحة ف.

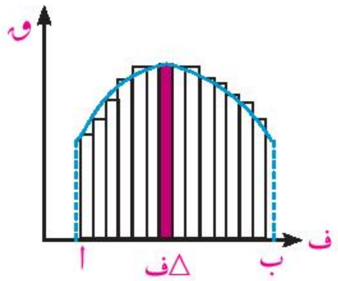


شكل (٨)

الشغل = ق ف = ١٠ (٢٥-٥) = ٢٠٠ جول

وهو عبارة عن المساحة أسفل المنحنى وتمثل بمساحة المستطيل الذى عرضه ١٠ نيوتن وطوله ٢٠ متر.

أما حالة أن تكون القوة متغيرة خلال الإزاحة كما هو موضح فى شكل (٩) فتكون المساحة تحت المنحنى تتحدد من العلاقة:



شكل (٩)

$$ش = \int_{ا}^{ب} ق \, ء ف$$

وفى هذه الحالة نأخذ إزاحة صغيرة قدرها △ف حتى تكون القوة المؤثرة لهذه الإزاحة منتظمة ويكون الشغل المبذول عندها يعطى بالعلاقة:

$$\triangle ش = ق_{ف} \triangle ف$$

و إذا قسمنا منحى القوة إلى إجزاء صغيرة وحسبنا الشغل المبذول خلال كل جزء وأوجدنا مجموعهم ، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة:

$$ش = \sum_{ا}^{ب} ق_{ف} \triangle ف$$

وعندما تكون الإزاحة △س أصغر ما يمكن (أى تؤول إلى الصفر) لكى نحصل على قيم أدق فى المعادلة السابقة فإن المعادلة السابقة تتحول إلى :

$$ش = \int_{ا}^{ب} ق_{ف} \, ء ف$$

وهذه هى الصورة العامة للشغل (لاحظ أن: $ق_{ف} = ق \text{ جتا} \theta$ (تمثل مركبة القوة فى اتجاه الإزاحة)

$$ش = \int_{ا}^{ب} ق_{ف} \, ء ف$$

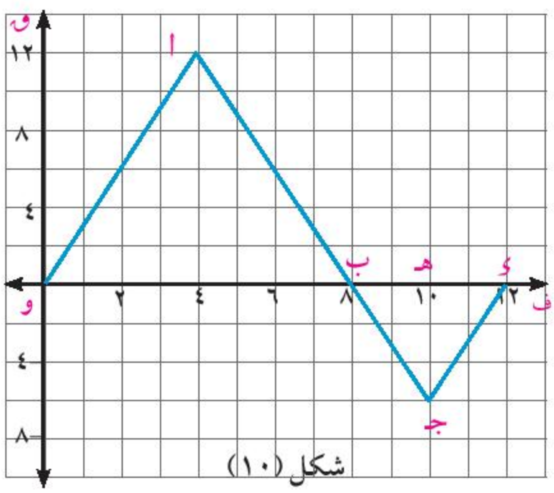
## مثال

٧ شكل (١٠) يوضح تأثير قوة متغيرة على جسم احسب الشغل المبذول بالإرج بواسطة هذه القوة فى الحالات الآتية حيث مقدار القوة بالداين، ف بالسنتيمتر:

**أولًا:** عندما يتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ٨

**ثانيًا:** عندما يتحرك الجسم من ف = ٨ إلى ف = ١٢

**ثالثًا:** عندما يتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ١٢



شكل (١٠)

**الحل**

**أولًا:** ش$_{١}$ = $\int_{٠}^{٨}$ ق ء ف = المساحة تحت المنحنى من ف = ٠ إلى ف = ٨

= مساحة سطح $\triangle$ و ا ب = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٢ = ٤٨ ارج

**ثانيًا:** ش$_{٢}$ = $\int_{٨}^{١٢}$ ق ء ف = - المساحة تحت المنحى من ف = ٨ إلى ف = ١٢

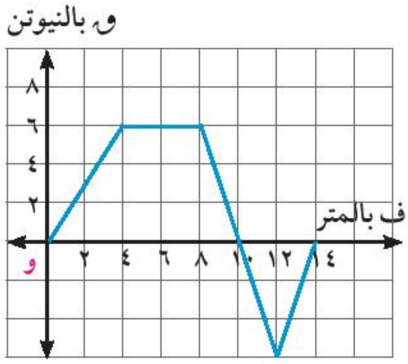
= -مساحة سطح$\triangle$ ب جـ ء = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٦ = - ١٢ ارج

**ثالثًا:** ش$_{٣}$ = $\int_{٠}^{١٢}$ ق ء ف = المساحة تحت المنحنى = $\int_{٠}^{٨}$ ق ء ف + $\int_{٨}^{١٢}$ ق ء ف

= مساحة سطح$\triangle$و ا ب - مساحة سطح$\triangle$ب جـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٢ - $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٦ = ٣٦ ارج

**حاول أن تحل**



شكل (١١)

(٦) الشكل المقابل يوضح تأثير قوة متغيرة على جسم احسب الشغل الكلى المبذول بواسطة هذه القوة فى الحالات الآتية:

**أولًا:** من ف = ٠ إلى ف = ١٠

**ثانيًا:** من ف = ٨ إلى ف = ١٤

## مثال

(٨) أثرت قوة متغيرة ق (مقيسة بالنيوتن) على جسم حيث ق = ٣ف$^{٢}$ - ٤، ف القياس الجبرى للإزاحة ومقيسة بالمتر أوجد الشغل المبذول من هذه القوة فى الفترة من ف = ٢ متر إلى ف = ٥ متر

**الحل**

$\because$ ق = ٣ف$^{٢}$ - ٤ ، ش = $\int_{ا}^{ب}$ ق ء ف

$\therefore$ ش = $\int_{٢}^{٥}$ (٣ف$^{٢}$ - ٤) ء ف = [ف$^{٣}$ - ٤ف]$_{٢}^{٥}$

$\therefore$ ش = [(١٢٥ - ٢٠) - (٨ - ٨)] = ١٠٥ جول

**حاول أن تحل**

(٧) أثرت قوة متغيرة ق (مقاسة بالداين) على جسيم حيث ق تعطى بالعلاقة:

ق = ٤ف$^{٣}$ - ٢ف +١ ، ف القياس الجبرى للإزاحة ومقيسة بالسنتيمتر أوجد الشغل المبذول من هذه القوة فى الفترة من ف = ٠ إلى ف = ٤

## تمارين ٣ - ١

**أولًا: إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

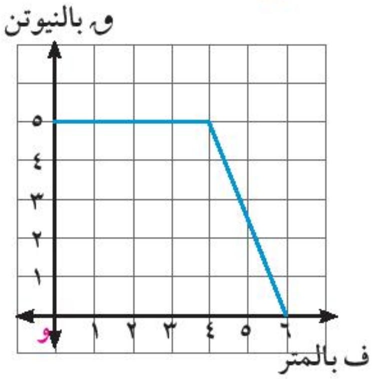
(١) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم من نقطة الأصل إلى النقطة أ (٣ ، ٢) تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة = .......... وحدة شغل .

(أ) -٤ (ب) -١ (ج) صفر (د) ١

(٢) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم من النقطة أ (-٣، ٢) إلى النقطة ب (٥، -٣) تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة = .......... وحدة شغل

(أ) صفر (ب) -٤٠ (ج) ٤٠ (د) ٨٠

(٣) الشكل المقابل يوضح تأثير قوة (ق) على جسم يتحرك مسافة (ف) فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة ليتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ٦ متر يساوى .......... جول




(أ) صفر (ب) ٤٠
(ج) ٨٠ (د) ٢٥

(٤) الشغل المبذول فى رفع كتلة مقدارها ٢٠٠ جرام موضوعة على سطح الأرض مسافة ١٠ أمتار عن سطح الأرض يساوى ..........جول

(أ) صفر (ب) ٩,٨ (ج) ١٩,٦ (د) ٢٩,٤

(٥) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوى فى المقدار ٤٠٠ نيوتن فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال إزاحة $\overrightarrow{ف}$ حيث || $\overrightarrow{ف}$ ||= ٣٥٠ متر يساوى ...... جول

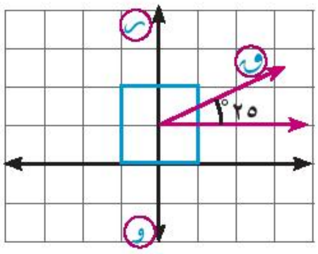
(أ) -١٤ × $١٠^{٤}$ (ب) -٧ × $١٠^{٤}$ (ج) ٧ × $١٠^{٤}$ (د) ١٤ × $١٠^{٤}$

**ثانيا: أكمل:**

(٦) رجل يتسوق فى متجر (سوبر ماركت) يدفع عربة تسوق بقوة مقدارها ٣٥ نيوتن تميل هذه القوة على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° لتتحرك العربة مسافة ٥٠ متر فإن الشغل المبذول بواسطة الرجل = .......... جول

(٧) الشغل المبذول فى تحريك كتلة مقدارها ٦٠٠ جرام مسافة ٤ أمتار بعجلة مقدارها ٢٠ سم / $ث^{٢}$ يساوى ..........إرج

٨ الشكل المقابل يوضح قوة مقدارها ١٦ نيوتن تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° تؤثر على جسم كتلته ٢,٥ كجم ليتحرك على نضد أفقى أملس مسافة ٢٢٠ سم فإن:




أ) الشغل المبذول بواسطة القوة = .................. جول

ب) الشغل المبذول بواسطة رد فعل النضد = ..................

جـ) الشغل المبذول بواسطة وزن الجسم = ..................

د) الشغل الكلى بواسطة القوى المؤثرة على الجسم = ..................جول

**ثالثا: أجب عن الأسئلة الآتية:**

٩ تحرك جسيم فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (-١ ، ٢) إلى النقطة ب (٣ ، ٤) حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسيان إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة.

١٠ أثرت القوى $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٣}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ - $\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسم فانتقل من النقطة أ (٢ ، ٣) إلى النقطة ب (٤ ، ٤) أحسب الشغل المبذول من محصلة هذه القوى خلال الأزاحة $\overleftarrow{\text{أب}}$

١١ يتحرك جسم كتلته ١ كجم ومتجه إزاحته $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٣ن$^{٢}$) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (٣ن$^{٢}$ + ن) $\overleftarrow{\text{ص}}$ ما هى القوة المحركة احسب الشغل المبذول من القوة المحركة خلال ٥ ثوان من بدء الحركة علما بأن ف مقيسة بالمتر ، ق بالنيوتن ، ن بالثانية.

١٢ متجه موضع جسيم كتلته ٣ كجم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ن$^{٢}$ + ٢) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (٤ن$^{٢}$ +٣) $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان فى المستوى أثبت أن الجسيم يتحرك تحت تأثير قوة ثابتة ثم إحسب الشغل المبذول من هذه القوة من ن = ١ إلى ن = ٥

١٣ عربة ترام ساكنة شدت بحبل يصنع مع شريط الترام زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت قوة الشد ٥٠٠ث. كجم وتحركت العربة بعجلة ٥سم/ث$^{٢}$ لمدة ٣٠ ثانية احسب الشغل الذى بذلته قوة الشد.

١٤ عامل بناء كتلته ٧٠ كجم يحمل على كتفه كمية من الطوب صاعدًا أعلى سلم إرتفاع قمته عن سطح الأرض ١٢ متر فإذا بذل شغلا قدره ١١٧٦٠ جول حتى بلوغه قمة السلم أوجد كتلة الطوب.

١٥ أثرت قوة على جسم ساكن كتلته ٥٠ كجم فاكسبته عجلة منتظمة ٠,٧ م/ث$^{٢}$ فحركته مسافة ف فى اتجاهها فإذا كان الشغل المبذول بواسطة هذه القوة يساوى ٣٥٠ث . كجم . متر أوجد المسافة التى تحركها الجسم.

١٦ قذف حجر كتلته ٤ كجم رأسيا لأعلى من على سطح الأرض فإذا كان الشغل المبذول ليصل إلى أقصى إرتفاع ١١٧٦ جول أوجد أقصى إرتفاع وصل إليه الحجر.

١٧ أحسب بالجول مقدار الشغل اللازم بذله لرفع ٥ متر مكعب من الماء لأرتفاع ١٠ أمتار.

(١٨) سيدة تدفع أمامها عربة بها طفل من حالة سكون علي طريق أفقى بقوة قدرها ٢ ث كجم وتميل على الأفقى لأسفل بزاوية قياسها ٦٠° ضد مقاومات قدرها ٠,٩٥ ث كجم، فإذا كانت كتلة العربة والطفل ١٨ كجم فأوجد بثقل كجم.متر مقدار الشغل المبذول خلال دقيقة واحدة من :

(أ) وزن العربة والطفل

(ب) قوة السيدة

(جـ) مقاومة الطريق.

(١٩) قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ بسرعة ثابتة فإذا كان الشغل المبذول من آلات القطار يساوى ١٥ × ١٠$^{٥}$ث.كجم متر حتى وصل إلى أعلى المنحدر والشغل المبذول ضد المقاومات ٥ × ١٠$^{٥}$ث.كجم متر أوجد:

**أولا:** طول المنحدر

**ثانيا:** المقاومة لكل طن من كتلة القطار

(٢٠) سيارة كتلتها ٤ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ضد مقاومات تعادل ٥ث.كجم لكل طن من كتلة القطار فاكتسبت سرعة ٥٤كم/س خلال $\frac{١}{٢}$ دقيقة فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون احسب بالجول الشغل المبذول من:

**أولا:** قوة محرك السيارة — **ثانيا:** قوة المقاومة

**ثالثا:** من وزن السيارة — **رابعا:** ضد وزن السيارة

(٢١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير القوة ق(نيوتن) حيث ق = ٠,٤ ف ، ف مقاسة بالمتر . أحسب الشغل المبذول من القوة ق عندما يتحرك الجسيم من :

(أ) ف = ٠ حتى ف = ١٠

(ب) ف = ١ حتى ف = ٥

(٢٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير القوة ق(نيوتن) حيث ق = جا ٢ ف حيث ف مقاسة بالمتر، أحسب الشغل المبذول من القوة ق عندما يتحرك الجسيم من :

(أ) ف = ٠ حتى ف = $\frac{\pi}{٢}$

(ب) ف = $\frac{-\pi}{٤}$ حتى ف = $\frac{\pi}{٤}$

(جـ) ف = $\frac{\pi}{٤}$ حتى ف = $\frac{٣\pi}{٤}$



# الطاقة
## Energy

### سوف تتعلم
- طاقة الحركة
- وحدات قياس طاقة الحركة
- مبدأ الشغل والطاقة

### المصطلحات الأساسية
- طاقة الحركة Kinetic Energy
- طاقة الوضع Potential Energy
- طاقة الشغل والطاقة Principle of Work and Energy

### الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية

## أولاً: طاقة الحركة *Kinetic energy*

طاقة حركة جسم هى الطاقة التى يكتسبها الجسم بفضل سرعته وتقدر عند لحظة ما بنصف حاصل ضرب كتلة هذا الجسم فى مربع سرعته عند هذه اللحظة ويرمز لها بالرمز ط.

فإذا كانت ك كتلة الجسيم، $\overleftarrow{ع}$ متجه سرعته، ع القياس الجبرى لهذا المتجه فإن:

$$\boxed{ط = \frac{١}{٢} ك \|\overleftarrow{ع}\|^{٢} = \frac{١}{٢} ك ع^{٢}} \qquad (١)$$

وبما أن $\|\overleftarrow{ع}\|^{٢} = \overleftarrow{ع} \odot \overleftarrow{ع}$ ، فإنه يمكن التعبير عن طاقة الحركة كالآتى:

$$\boxed{ط = \frac{١}{٢} ك (\overleftarrow{ع} \cdot \overleftarrow{ع})} \qquad (٢)$$

يتضح من التعريف أن طاقة حركة الجسيم هى كمية قياسية غير سالبة، وتنعدم فقط عندما ينعدم متجه السرعة. كما يبين التعريف أن طاقة حركة الجسيم قد تتغير من لحظة زمنية لأخرى أثناء حركته تبعًا لمقدار سرعته.

وحدات قياس طاقة الحركة:

**حيث أن الشغل هو صورة من صور الطاقة فإن :**

**وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس الشغل**

**فمثلًا ، إذا قيست الكتلة بالكيلوجرام والسرعة بالمتر/ ثانية فإن:**

وحدة قياس طاقة الحركة = كجم × $\frac{متر}{ث}$ × $\frac{متر}{ث}$ = كجم$\frac{متر}{ث^{٢}}$ × متر = نيوتن. متر

**وإذا قيست الكتلة بالجرام والسرعة بالسنتيمتر / ثانية فإن:**

وحدة قياس طاقة الحركة = جم × $\frac{سم}{ث}$ × $\frac{سم}{ث}$ = جم × $\frac{سم}{ث^{٢}}$ × سم = داين × سم = إرج

### مثال

(١) يتحرك جسم كتلته ١٠٠جم بسرعة $\overleftarrow{ع} = ٥ \overleftarrow{س} + ١٢ \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث، احسب طاقة حركة هذا الجسم **أولا:** بالأرج **ثانيا:** بالجول

**الحل**

نوجد معيار السرعة $\overleftarrow{ع} = ٥ \overleftarrow{س} + ١٢ \overleftarrow{ص}$

$\| \overleftarrow{ع} \| = \sqrt{٥^٢ + ١٢^٢} = ١٣$سم/ث $\quad\quad \therefore \| \overleftarrow{ع} \|^٢ = ١٦٩$

**أولا**: **طاقة حركة الجسم** $= \frac{١}{٢}$ ك $\| \overleftarrow{ع} \|^٢ = \frac{١}{٢} \times ١٠٠ \times ١٦٩ = ٨٤٥٠$ إرج

**ثانيا**: **طاقة الحركة** $= \frac{٨٤٥٠}{١٠^٧} = ٨,٤٥ \times ١٠^{-٤}$ جول

**حاول أن تحل**

(١) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة $\overleftarrow{ع} = ٦٠ \overleftarrow{س} - ٨٠ \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث احسب طاقة حركة هذا الجسم

**أولا**: بالأرج $\quad\quad$ **ثانيا**: بالجول.

## مثال

(٢) قذف جسم كتلته ١ كجم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤٩م/ث، أوجد

(أ) طاقة حركة الجسم بعد ٦ ثانية من قذفه

(ب) طاقة حركة الجسم عندما يصبح على ارتفاع ١٠٢,٩ متر من نقطة القذف

**الحل**

(أ) $\because$ ع = ع. + د ن $\quad\quad \therefore$ ع = ٤٩ - ٩,٨ × ٦ = -٩,٨م/ث

$\therefore$ الجسم يكون هابطًا بسرعة مقدارها ٩,٨ م/ث$^٢$ $\quad\quad$ ط $= \frac{١}{٢}$ ك ع$^٢ = \frac{١}{٢} \times ١ \times (٩,٨)^٢ = ٤٨,٠٢$ جول

(ب) $\because$ ع$^٢$ = ع.$^٢$ + ٢ د ف $\quad\quad \therefore$ ع$^٢$ = (٤٩)$^٢$ - ٢ × ٩,٨ × ١٠٢,٩

$\therefore$ ع$^٢$ = ٣٨٤,١٦ $\quad\quad$ ط $= \frac{١}{٢}$ك ع$^٢ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٣٨٤,١٦ = ١٩٢,٠٨$ جول

**حاول أن تحل**

(٢) سقط جسم كتلته ٥٠٠جم رأسيًا إلى أسفل من أرتفاع ٧٨,٤ متر عن سطح الأرض، أوجد :

(أ) طاقة حركة الجسم بعد ٢ ثانية من سقوطه

(ب) طاقة حركة الجسم لحظة ملامسته لسطح الأرض.

## مبدأ الشغل والطاقة:

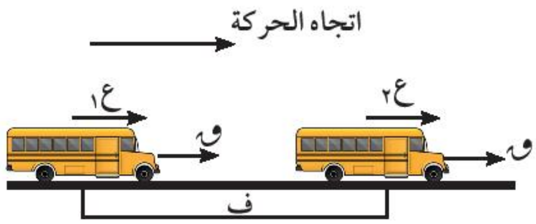
*Principle of Work and Energy*

إذا كانت ق ثابتة :

باعتبار أن جسمًا كتلته (ك) يتحرك مسافة (ف) تحت تأثير محصلة القوى (ق) بحيث تتغير سرعته من $(\text{ع}_1)$ إلى $(\text{ع}_2)$

فيكون: الشغل المبذول بواسطة محصلة هذه:

$\text{ش} = \text{ق} \times \text{ف}$




شكل (١)

$\because$ $\text{ع}^2 = \text{ع}_0^2 + 2\,\text{جـ}\,\text{ف}$ وباعتبار أن $\text{ع}_1$ ، $\text{ع}_2$ هما السرعتان الأبتدائية والنهائية على الترتيب

$\therefore$ $\text{ع}_2^2 - \text{ع}_1^2 = 2\,\text{جـ}\,\text{ف}$ بضرب طرفى العلاقة فى $\frac{1}{2}$ ك

$$\frac{1}{2}\,\text{ك}\,(\text{ع}_2^2 - \text{ع}_1^2) = \text{ك}\,\text{جـ}\,\text{ف}$$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\,\text{ك}\,(\text{ع}_2^2 - \text{ع}_1^2) = \text{ق}\,.\,\text{ف}$ حيث ق قوة ثابتة المقدار

$\therefore$ التغير فى طاقة الحركة يساوى الشغل المبذول

إذا كانت ق قوة متغيرة ،

$\because$ $\text{ط} = \frac{1}{2}\,\text{ك}\,\text{ع}^2$

$\therefore$ $\frac{\text{د}}{\text{د ن}}(\text{ط}) = \text{ك}\,\text{ع}\,\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ $\qquad$ $\frac{\text{د}}{\text{د ن}}(\text{ط}) = \text{ك}\,\text{جـ}\,\text{ع}$

$\frac{\text{د}}{\text{د ن}}(\text{ط}) = \text{ق}\,\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$

$\therefore$ $\int_{\text{ط}_0}^{\text{ط}} \text{د}\,(\text{ط}) = \int_{\text{ف}_0}^{\text{ف}} \text{ق}\,\text{د ف}$ $\qquad$ أى أن $\text{ط} - \text{ط}_0 = \text{ش}$

$\therefore$ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

**تعبر العلاقة الأخيرة عن مبدأ الشغل والطاقة والذى ينص على الآتى:**

«التغير فى طاقة حركة الجسيم عند انتقاله من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى يساوى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة عليه خلال الإزاحة بين هذين الموضعين».

ويلاحظ أنه عند استخدام العلاقات السابقة يجب أن تكون وحدات قياس طاقة الحركة هى نفسها وحدات قياس الشغل.

تفكير ناقد:

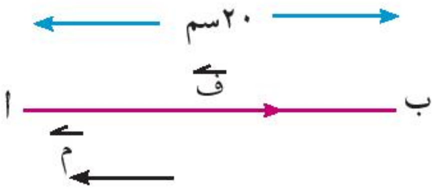
**أثبت أنه** إذا بدأ جسيم حركته من موضع ما ثم عاد إلى نفس الموضع، فإن طاقة حركته النهائية تساوى طاقة حركته الابتدائية ، ثم استنتج من ذلك أنه فى حركة المقذوف الرأسى تحت تأثير الجاذبية الأرضية الثابتة تكون سرعة المقذوف أثناء مرحلة الصعود عند نقطة ما تساوى سرعته أثناء مرحلة الهبوط عند النقطة نفسها.

مثال

٣ اطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠جم بسرعة ٤٠٠متر/ث على حاجز سميك فاستقرت فيه على عمق ٢٠سم، أوجد

مقدار قوة مقاومة مادة الحاجز لحركة الرصاصة باعتبار هذه القوة ثابتة.

**الحل**



شكل (٦)

ليكن أ موضع دخول الرصاصة إلى داخل الحاجز ، ب الموضع الذى أستقرت فيه، م قوة المقاومة مقدَّرة بوحدة الداين لدينا أ ب = ٢٠ سم، بما أن قوة المقاومة تعمل فى عكس اتجاه الازاحة.

فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة يكون سالبًا و يحسب كالآتى:

$$\text{ش} = -\text{أ ب} \times \text{م} = -٢٠\text{م}$$

**طاقة حركة الرصاصة عند الدخول إلى الحاجز :**

$$\text{ط} = \frac{١}{٢} \times ٢٠٠ \times (٤٠٠ \times ١٠٠)^{٢} = ١,٦ \times ١٠^{١١} \text{ إرج}$$

**(لاحظ تحويل السرعة إلى وحدة سم/ ث).**

**طاقة حركة الرصاصة عند الموضع ب :** $\text{ط}_{\text{ب}}$ = صفر لأن الرصاصة ساكنة فى هذا الموضع.

**التغير فى طاقة حركة الرصاصة :** $\text{ط}_{\text{ب}} - \text{ط}_{\text{أ}} = -١,٦ \times ١٠^{١١}$ ارج

$$\because \text{ط}_{\text{ب}} - \text{ط}_{\text{أ}} = \text{ش}$$

$$\therefore -١,٦ \times ١٠^{١١} = -٢٠\text{م}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{-١,٦ \times ١٠^{١١}}{-٢٠} = ٨ \times ١٠^{٩} \text{ داين}$$

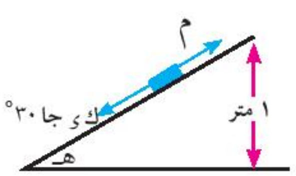
**حاول أن تحل**

(٣) أطلقت رصاصة على هدف سمكه ٩سم وخرجت من جانبه الأخر بنصف سرعتها التى دخلت بها. فما هو أقل سمك لازم لهدف من نفس المادة حتى لا تخرج منه نفس الرصاصة لو أطلقت عليه بسرعتها السابقة نفسها.

**مثال**

(٤) وضع جسم كتلته ٣٠٠جم عند قمة مستوى مائل ارتفاعه ١متر. أحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى للحركة يساوى ١,٥٩جول.

**الحل**



شكل (٨)

ليكن ف طول المستوى مقيسًا بالمتر ، هـ قياس زاوية ميله على الأفقي، تؤثر على الجسم قوتان توازيان اتجاه الحركة؛ مركبة الوزن، وتعمل فى خط أكبر ميل لأسفل ومقدارها ك ى جا هـ وقوة مقاومة المستوى لحركة الجسم عليه وتعمل فى خط أكبر ميل لأعلى وليكن مقدارها م.

**الشغل المبذول أثناء حركة الجسم من قمة المستوى حتى قاعدته:**

$$\text{ش} = (\text{ك ى جا هـ} - \text{م}) \times \text{ف}$$

$$= (٠,٣ \times ٩,٨ \times \frac{١}{\text{ف}} - \text{م}) \times \text{ف} = ٠,٣ \times ٩,٨ - \text{م ف}$$

ولكن م ف = ١,٥٩ جول هو الشغل المبذول ضد المقاومة.

$\therefore$ ش = ٠,٣ × ٩,٨ - ١,٥٩ = ١,٣٥ جول

$\therefore$ ط - ط$_{٠}$ = ش

$\therefore$ $\frac{١}{٢}$ × ٠,٣ ع$^{٢}$ - صفر = ١,٣٥

$\therefore$ ع$^{٢}$ = ٩ $\therefore$ ع = ٣ متر/ث

**حاول أن تحل**

(٤) وضع جسم كتلته ٢٠٠ جرام عند قمة مستوى مائل إرتفاعه ٣ أمتار. إحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى للحركة ٤,٤٨ جول.

## مثال

(٥) جسم كتلته ١ كجم يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ١٢م/ث، أثرت عليه قوة مقاومة فى اتجاه مضاد لاتجاه حركته مقدارها ٦س$^{٢}$ (نيوتن) حيث س المسافة التى يقطعها الجسم تحت تأثير المقاومة (بالمتر).

(أ) أوجد الشغل الذى تبذله المقاومة عندما س = ٤ (ب) أوجد سرعة الجسم وطاقة حركته عندما س = ٢

**الحل**

(أ) ش = $\int_{٠}^{٤}$ م د س

= $\int_{٠}^{٤}$ -٦س$^{٢}$ د س = $[-٢س^{٣}]_{٠}^{٤}$

= -١٢٨ جول

(ب) $\because$ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

$\frac{١}{٢}$ ك (ع$^{٢}$ - ع$_{٠}^{٢}$) = $\int_{٠}^{٢}$ م د س

$\frac{١}{٢}$×١ (ع$^{٢}$ - ١٤٤) = $\int_{٠}^{٢}$ -٦س$^{٢}$ د س

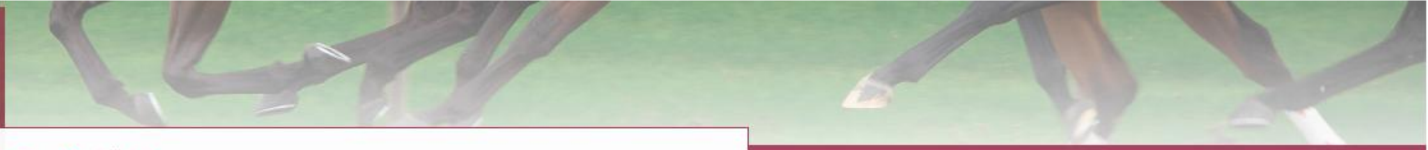
$\frac{١}{٢}$ (ع$^{٢}$ - ١٤٤) = $[-٢س^{٣}]_{٠}^{٢}$

$\frac{١}{٢}$ (ع$^{٢}$ - ١٤٤) = -١٦

ع$^{٢}$ = ١١٢

ع = ٤$\sqrt{٧}$ م/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع$^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١١٢ = ٥٦ جول





## ثانيًا: طاقة الوضع *potential energy*

عندما يتحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة توازى هذا الخط فإن طاقة وضع الجسيم $\text{ط}_و$ عند لحظة ما هى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة لجسيم لو أنها حركته من موضعه إلى موضع أخر ثابت على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ كما فى الشكل المجاور.

إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ توازى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ وكانت (و) هى الموضع الثابت ، أ ، ب وضعين مختلفين للجسم على هذا الخط فإن :

طاقة الوضع عند $\text{ص}_{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أو}}$ ، طاقة الوضع عند $\text{ص}_{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{بو}}$ ، وباستخدام الرمز ضْ للتعبير عن طاقة الوضع نجد أن :

- طاقة الوضع عند (و) = ٠ لأن طاقة الوضع عند و = $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{0}$ = صفر
- باعتبار أن أ ، ب هما الموضعان الابتدائى والنهائى للجسم المتحرك ، $\text{ص}_{\text{أ}}$، $\text{ص}_{\text{ب}}$ هما طاقتى الوضع عند أ ، ب على الترتيب فإن :

$$\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{أ}} = (\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{بو}}) - (\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أو}})$$
$$= \overrightarrow{\text{ق}} \cdot (\overrightarrow{\text{بو}} - \overrightarrow{\text{أو}}) = (\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{بأ}})$$
$$= - \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}} \qquad (١)$$

ولكن : $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}} = \text{ش}$ (٢) من (١) (٢)

$$\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{أ}} = -\text{ش}$$

**أى أن:** التغير في طاقة وضع الجسم عند إنتقاله من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى يساوى سالب الشغل المبذول بواسطة القوة خلال الحركة.

## بقاء الطاقة *Conservation of Energy*

إذا أنتقل جسم من موضع أ إلى موضع آخر ب دون أن يلاقى أى مقاومة فإن مجموع طاقتى الحركة والوضع عند أ يساوى مجموع طاقتى الحركة والوضع عند ب .

من مبدأ الشغل والطاقة نجد أن $\text{ط}_{\text{ب}} - \text{ط}_{\text{أ}} = \text{ش}$

ومن العلاقة السابقة التى تربط الشغل بطاقة الوضع نجد أن:

$$\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{أ}} = -\text{ش}$$
$$\therefore \text{ط}_{\text{ب}} - \text{ط}_{\text{أ}} = -[\text{ص}_{\text{ب}} - \text{ص}_{\text{أ}}]$$
$$\therefore \text{ط}_{\text{ب}} + \text{ص}_{\text{ب}} = \text{ط}_{\text{أ}} + \text{ص}_{\text{أ}}$$

**مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتًا أثناء الحركة**

**وحدات قياس طاقة الوضع:** من تعريف طاقة الوضع نجد أن وحدات قياسها هى نفسها وحدات قياس الشغل وطاقة الحركة

### مثال

(١) أثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى بالعلاقة : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ن$^{٢}$ + ٢) $\overleftarrow{\text{س}}$ + ( ٢ن$^{٢}$ +١)$\overleftarrow{\text{ص}}$ احسب التغير فى طاقة الوضع للجسم حيث معيار ق مقيس بالنيوتن، معيار ر بالمتر ، ن بالثانية.

**الحل**

∵ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = $\overleftarrow{\text{ر}}$ - $\overleftarrow{\text{ر}}_{.}$ = (٣ن$^{٢}$ + ٢)$\overleftarrow{\text{س}}$ + (٢ن$^{٢}$ +١) $\overleftarrow{\text{ص}}$ - (٢$\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ )

= ٣ن$^{٢}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ن$^{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ = $\overleftarrow{\text{أب}}$

∴ التغير في طاقة الوضع = $\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = - ($\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ )

= - (٦، ٢) • (٣ن$^{٢}$ ، ٢ن$^{٢}$)

= - (١٨ ن$^{٢}$ + ٤ن$^{٢}$) = - ٢٢ن$^{٢}$

= -٢٢ × ٤ = - ٨٨ جول

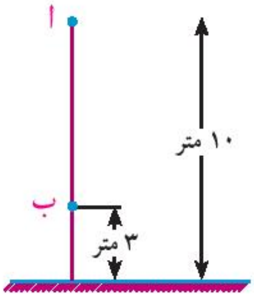
**حاول أن تحل**

(٥) أثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٤$\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية ، وكان متجه الموضع للجسيم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ن$^{٢}$+٣)$\overleftarrow{\text{س}}$ + ( ٤ن+١)$\overleftarrow{\text{ص}}$ . احسب التغير فى طاقة الوضع للجسيم حيث معيار ق مقيس بالنيوتن ، معيار ر بالمتر ، ن بالثانية.

### مثال

(٢) جسم كتلته ٣٠٠ جم موضوع على ارتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض، أوجد طاقة وضع الجسم، و إذا سقط الجسم رأسيًا فأوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عند أى لحظة أثناء سقوطه. ثم أوجد طاقة حركته عندما يكون علي ارتفاع ٣ متر عن سطح الأرض.

**الحل**




**طاقة وضع الجسم عند أ:**

طاقة وضع الجسم عند أ = ك ى × ل

= ٠,٣ × ٩,٨ × ١٠ = ٢٩,٤ جول

∵ الجسم ساكن عند أ ∴ طاقة حركته = صفر

∴ ط$_{١}$ + ض$_{١}$ = ٢٩,٤ جول

∵ مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتًا أثناء الحركة

∴ مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عن أى لحظة أثناء سقوطه = ٢٩,٤ جول

**طاقة الحركة وطاقة الوضع عند ب:**

∴ طاقة وضع الجسم = ك ى × ل

= ٠,٣ × ٩,٨ × ٣ = ٨,٨٢ جول

∵ ط~ب~ + ض~ب~ = ط~ا~ + ض~ا~

∴ ط~ب~ + ٨,٨٢ = ٢٩,٤ ∴ ط~ب~ = ٢٩,٤ - ٨,٨٢ = ٢٠,٥٨ جول

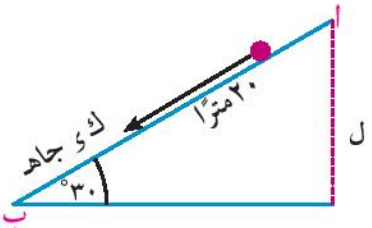
**حاول أن تحل**

(٦) سقط جسيم كتلته ١٠٠ جم من ارتفاع ٤ متر عن سطح الأرض. أوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عند أى لحظة أثناء سقوطه، ثم أوجد طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع مترٍ واحدٍ من سطح الأرض.

## مثال

(٣) جسم كتلته ٣ كجم موضوع عند أ أعلى نقطة من مستوى مائل أملس طوله ٢٠ متر ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. احسب طاقة وضع الجسم، و إذا هبط الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى. أحسب سرعة الجسم لحظة وصوله إلى أسفل نقطة فى المستوى.

**الحل**




**طاقة الحركة الجسم عند ب:**

ض~ا~ = ك ى × ل

= ٣ × ٩,٨ (٢٠ جا ٣٠°)

= ٢٩٤ جول

ط~ا~ + ض~ا~ = ٠ + ٢٩٤ = ٢٩٤ جول (لأن الجسم ساكن عند أ)

**طاقة الحركة وطاقة الوضع عند ب:**

ط~ب~ + ض~ب~ = ٢٩٤ جول

$\frac{1}{2}$ ك ع^٢^ + ٠ = ٢٩٤ ∴ $\frac{1}{2}$ × ٣ × ع^٢^ = ٢٩٤

∴ ع^٢^ = $\frac{٢٩٤ \times ٢}{٣}$ = ١٩٦ ∴ ع = ١٤ متر/ث

**حاول أن تحل**

(٧) أ، ب نقطتان علي خط أكبر ميل فى مستوى مائل خشن بحيث ب أسفل أ، بدأ جسم كتلته ٥٠٠ جم الحركة من السكون من نقطة أ، فإذا كانت المسافة الرأسية تساوى مترًا واحدًا وسرعة الجسم عندما يصل إلى ب تساوى ٤م/ث. أوجد بالجول:

**أولاً:** طاقة الوضع المفقودة **ثانيًا:** الشغل المبذول من المقاومات

## مثال

(٤) بندول بسيط يتكون من قضيب خفيف طوله ٨٠سم و يحمل فى طرفه جسمًا كتلته ٤ جم يتدلى رأسيًا و يتذبذب فى زاوية قياسها ١٢٠° . أوجد :

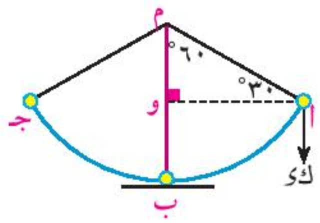
**أولاً:** زيادة طاقة الوضع في نهاية المسار عنها في منتصف المسار

**ثانيًا:** سرعة الجسم عند منتصف المسار.

**الحل**

**من هندسة الشكل:**

الكتلة تتحرك فى قوس دائرى مركزه النقطة م ونصف قطره = ٨٠ سم.




∵ ق( ∠ أ م جـ) = ١٢٠°

∴ ق( ∠ أ م ى) = ٦٠°

∵ المثلث أ و م ثلاثينى ستينى

∴ م و = ٤٠ سم ، ب و = ٤٠ سم

**زيادة طاقة الوضع عند أ عنها عن ب:**

$ص_أ - ص_ب$ = كى $ل_١$ - كى $ل_٢$ = كى ($ل_١$ - $ل_٢$) = كى × ب و

= ٤ × ٩٨٠ × ٤٠ = ١٥٦٨٠٠ إرج

**لإيجاد سرعة الجسم عند منتصف المسار:**

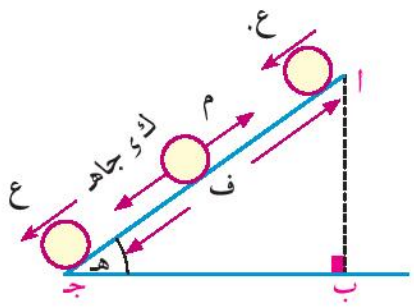
من مبدأ ثبات الطاقة $ط_ب + ص_ب = ط_أ + ص_أ$

∴ $\frac{1}{2}$ × ٤ × $ع^٢$ + ٠ = ٠ + ١٥٦٨٠٠

∴ $ع^٢$ = ٧٨٤٠٠ ∴ ع = ٢٨٠ سم/ث

## الحركة على مستوى مائل خشن

*Motion on Rouph Inclined Plane*




إذا هبط جسم على مستوى مائل خشن تحت تأثير وزنه فقط من الموضع ا إلى الموضع جـ

فإن التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل المبذول ضد المقاومات.

**الإثبات:**

نفرض أن المسافة التي تحركها الجسم على المستوى (ف)

فتكون المسافة الرأسية ا ب التي هبطها الجسم ا ب = ف جا هـ

التغير في طاقة الحركة من ا إلى ب =

الشغل المبذول بواسطة ( ك ء جا هـ - م)

$\frac{1}{2}$ ك (ع$^2$ - ع.$^2$) = ( ك ء جا هـ - م ) × ف

$\frac{1}{2}$ك (ع$^2$ - ع.$^2$) = ك ء جا هـ × ف - م × ف

$\frac{1}{2}$ك (ع$^2$ - ع.$^2$) = ك ء × ا ب - م × ف

ك ء × ا ب = $\frac{1}{2}$ ك (ع$^2$ - ع.$^2$) + م × ف

التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل المبذول ضد المقاومات.

**لاحظ أن:** يمكن تعميم القاعدة السابقة سواء كانت الحركة رأسية أو على مستوى مائل كالآتي:

إذا سقط أو قذف جسم رأسيًا في وسط به مقاومة أو هبط على مستوى مائل خشن فإن:

**التغير فى طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل ضد المقاومات.**

### مثال

### الحركة على مستوى خشن


٥ في الشكل المقابل مكعب من الخشب عند ا كتلته ٢ كيلو جرام، ينزلق على سطح (كما هو مبين بالشكل) حيث $\overset{\frown}{اب}$ ، $\overset{\frown}{جـ ء}$ سطحان أملسان. السطح الأفقي ب جـ خشن، طوله ٣٠ متر، معامل الاحتكاك الحركى بين المكعب والسطح الأفقى $\frac{1}{5}$ فإذا بدأ مكعب الخشب الحركة من سكون وهو على ارتفاع ٤ متر، على أي مسافة على $\overline{ب جـ}$ يسكن مكعب الخشب؟

**الحل**

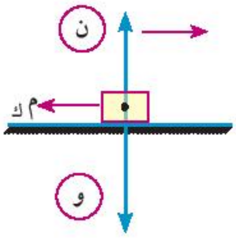
المكعب ينزلق على القوس $\overset{\frown}{اب}$

وتبعًا لمبدأ ثبات الطاقة طا + ضا = طب + ضب

صفر + ٢ × ٩,٨ × ٤ = طب + صفر

∴ طب = ٧٨,٤ جول.

وحيث إن المكعب يتحرك على المستوى $\overline{\text{ب جـ}}$ خشن.




التغير في طاقة وضع الجسم = التغير في طاقة الحركة + الشغل ضد المقاومات

صفر = (٠ - ٧٨,٤) + $م_ك$ ر × ف

$\frac{١}{٥}$ × ٩,٨ × ٢ × ف = ٧٨,٤ ∴ ف = ٢٠ متر

**حاول أن تحل**

(٨) تهبط عربة من السكون أسفل منحدر، طوله ١٨٠ متر، ارتفاعه ١٠ متر، فإذا علم أن $\frac{٣}{٤}$ طاقة الوضع فقدت نظير التغلب على المقاومات ضد الحركة، وأن هذه المقاومات ظلت ثابتة طوال حركة العربة، فأوجد سرعة العربة بعد قطعها مسافة ١٨٠ متر السابقة.

## تمارين ٣ - ٢

**أولًا: أكمل :**

(١) طاقة حركة قذيفة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم وتتحرك بسرعة ٣٠٠ متر/ث يساوى ............ جول.

(٢) طاقة حركة جسم كتلته ٤٠ جرام يتحرك بسرعة ٢٠متر/ث يساوى ............ جول

(٣) سيارة كتلتها ١,٥ طن وطاقة حركتها ١٦٨٧٥٠ جول فإن سرعة السيارة ............ م/ث

(٤) جسم كتلته ٢٠٠ جرام يتحرك بسرعة $\overleftarrow{\text{ع}}$ = ٣٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث فإن طاقة حركة هذا الجسم = ............ إرج

(٥) جسم يتحرك بسرعة $\overleftarrow{\text{ع}}$ = ٥٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٠٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ع}}$ مقيس بوحدة سم/ث ، $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى إتجاهى $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ وكانت طاقة حركة هذا الجسم تساوى ٣,٩ جول فإن كتلة الجسم = ............ جرام.

(٦) إذا ترك جسم كتلته ٣٠ جرام ليسقط من إرتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض فإن طاقة حركة هذا الجسم = ............ جول عندما يكون وشك الإرتطام بالأرض.

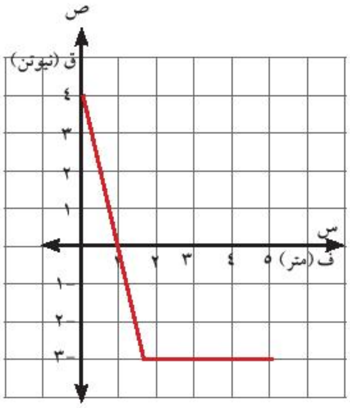
**ثانيًا:**

(٧) قوة مقدارها ١٢ نيوتن ثابتة الأتجاه تقوم ببذل شغل على جسم تحرك فإذا كانت إزاحته تعطى بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث ف بالمتر إحسب قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}$ إذا كان التغير فى طاقة الحركة للجسم.

**أولا:** يساوى ٣٠ جول

**ثانيا:** يساوى -٣٠ جول

**٨** **الشكل المقابل** يوضح تأثير مركبة قوة فى الأتجاه الموجب لمحور السينات على جسم كتلته ٢ كجم فإذا كانت سرعة الجسم عند س = ٠ يساوى ٤ م/ث




**أولا:** أوجد التغير فى طاقة حركة بين س = ٠ ، س = ٥ متر.

**ثانيا:** احسب مقدار طاقة حركة الجسم عند س = ٣

**ثالثا:** عند أى قيمة لـ س يكون مقدار طاقة الحركة ٨ جول

**٩** ترك جسم كتلته ٢٠٠ جرام ليتحرك من سكون من قمة مستوى أملس طوله ٢٥ متر و يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ أوجد طاقة حركة هذا الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى.

**١٠** قذف جسيم كتلته ٥ كجم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ، ولأعلى بسرعة ٤ متر/ث. إحسب التغير الذى يطرأ على طاقة حركة هذا الجسيم بعد إنقضاء ثانية واحدة على لحظة قذفه ثم عندما يعود إلى موضع القذف.

**١١** مستوى مائل خشن طوله ٢٠ متر و إرتفاعه ٥ أمتار أوجد أصغر سرعة يقذف بها جسم من أسفل نقطة فى المستوى المائل وفى اتجاه خط أكبر للمستوى لكى يصل بالكاد إلى أعلى نقطة فى المستوى علما بأن الجسم يلاقى مقاومات تساوى $\frac{١}{٤}$ وزنه.

**١٢** أطلقت قذيفة مدفع بسرعة $\overrightarrow{ع} = ١٠٥\ \overrightarrow{س} + ٣٦٠\ \overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة م/ث، فإذا كانت طاقة الحركة للقذيفة تساوى $١,١٢٥ \times ١٠^{٦}$ جول فأوجد كتلة القذيفة بالكيلو جرام.

**١٣** يتحرك جسم كتلته ٢ كجم تحت تأثير القوى $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} + ٢\ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٢\ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٣\ \overrightarrow{س} + ٥\ \overrightarrow{ص}$ مقدرة كل منها بالنيوتن حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين فإذا كان متجه الأزاحة كدالة فى الزمن يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = أ\ ن^{٢}\ \overrightarrow{س} - ب\ (ن^{٢} - ن)\ \overrightarrow{ص}$ ومعيار الأزاحة بالمتر أوجد:

**اولًا:** قيمة كل من الثابتين أ ، ب

**ثانيًا:** الشغل المبذول من هذه القوة بعد ٢ ثانية من بدء الحركة

**ثالثًا:** طاقة الحركة فى نهاية زمن قدره ٢ ثانية

**١٤** أطلقت رصاصة أفقيًا بسرعة ٥٤٠ كم/س على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٢٠ سم، فإذا أطلقت نفس الرصاصة بنفس السرعة على هدف ثابت من نفس نوع الخشب سمكه ١٥سم، فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الهدف بفرض ثبوت المقاومة.

(١٥) سقطت كرة كتلتها ١٠٠ جرام من إرتفاع ٣,٦ متر على أرض أفقية صلبة فاصطدمت بها وأرتدت رأسيا إلى أعلى فإذا بلغ النقص فى طاقة حركة الكرة نتيجة إصطدامها بالأرض ١,٩٦ جول. احسب المسافة التى إرتدتها الكرة عقب تصادمها بالأرض .

(١٦) سقط جسم مطاطى من السكون من قمة برج فبلغت كمية حركته قبل التصادم مباشرة ١٠٩٢جم . متر/ث ، طاقة حركته ١٠١٤ث جم. متر احسب كتلة هذا الجسم وارتفاع البرج و إذا إرتد الجسم بعد إصطدامه بالأرض مسافة ٤,٩ متر فأوجد مقدار دفع الأرض للجسم.

(١٧) سقط جسم كتلته ٠,٢ كجم من أرتفاع ٥ أمتار عن سطح الأرض .

(أ) طاقة وضع الجسم لحظة سقوطه = ..................

(ب) طاقة حركة الجسم لحظة سقوطه = ..................

(جـ) مجموع طاقتى الحركة والوضع لحظة وصوله لسطح الأرض = ..................

(١٨) جسم كتلته ٣٥٠ كجم على ارتفاع ٢٠ متر من سطح الأرض، فإن طاقة وضع الجسم = .................. جول.

(١٩) طائرة عمودية وزنها ٣٥٠٠ ث كجم تهبط رأسيًّا لأسفل من ارتفاع ٢٥٠ متر إلى ارتفاع ١٥٠ متر من سطح الأرض فإن مقدار الفقد في طاقة وضعها = .................. جول.

(٢٠) جسم وزنه ٢ ث كجم صعد مسافة ٢٠٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°، فإن الزيادة في طاقة وضعه = ..................جول

(٢١) وضع جسم عن قمة مستو مائل أملس أرتفاعه ٩٠سم فإن سرعته عندما يصل إلى قاعدة المستوى =.................. متر/ث

(٢٢) يتحرك جسم من الموضع أ (٢، ٣) إلى الموضع ب (٧، ٦) تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فإن التغير في طاقة وضع الجسم = .................. ارج؛ حيث ف بالسنتيمتر، $\overleftarrow{\text{ق}}$ مقاسة بالداين.

(٢٣) أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب في زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى كدالة في الزمن بالعلاقة = $\overleftarrow{\text{ر}}$ =(٢ ن$^{٢}$ +٣) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (٤ ن+١) $\overleftarrow{\text{ص}}$ فإن التغير في طاقة الوضع للجسم = .................. جول؛ حيث ق بالنيوتن، || $\overleftarrow{\text{ر}}$ || بالمتر ، ن بالثانية

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

(٢٤) جسم كتلته ٣٠٠ جرام موضوع على ارتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض، أوجد طاقة وضع الجسم، و إذا سقط الجسم رأسيًّا، فأوجد طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع ٣ متر من سطح الأرض.

(٢٥) قذف جسم كتلته ١٤٠ جرام رأسيًّا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٥ مترًا عن سطح الأرض، احسب التغير في طاقة حركة الجسم من لحظة قذفه حتى وصوله إلى سطح الأرض مقدرًا بالجول.

(٢٦) قذف جسم كتلته ٢ كجم من سطح الأرض رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٧٠ مترً/ثانية أوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع بعد ٥ ثوان ، و إذا كانت طاقة حركته بعد زمن ما هو ١٢٥,٤٤ جول فأوجد هذا الزمن وأوجد طاقة وضعه عندئذ.

(٢٧) جسم كتلته ١٠٠ جم سقط من ارتفاع ٥ أمتار على أرض رخوة فغاص فيها ٢٠ سم أوجد :

**أولًا:** مقدار ما فقد من طاقة الوضع بالجول قبل لحظة اصطدامه بالأرض مباشرة.

**ثانيًا:** متوسط مقاومة الأرض بثقل الكيلو جرام.

(٢٨) تحرك رجل كتلته ٧٢ كيلو جراما صاعدًا طريقًا يميل علي الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{6}$ فقطع ١٢٠ مترًا . أحسب التغير فى طاقة وضع الرجل

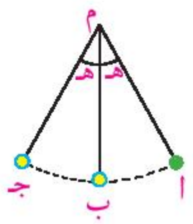
(٢٩) احسب السرعة التى يصل بها جسم كتلته ٣٠٠جم موضوع عند قمة مستوٍ مائل أرتفاعه ٢ متر إلى قاعدة المستوى إذا كان مقدار الشغل المبذول ضد المقاومة يساوى ٢,١٣ جول.

(٣٠) ا ، ب نقطتان على خط أكبر ميل لمستوى مائل خشن بحيث ب أسفل ا ، بدأ جسم كتلته ٥٠٠ جم الحركة من السكون من نقطةا ، فإذا كانت المسافة الرأسية تساوى مترًا واحدًا وسرعة الجسم عندما يصل إلى ب تساوى ٤م/ث. أوجد بالجول :

**اولًا:** طاقة الوضع المفقودة.

**ثانيًا:** الشغل المبذول من المقاومات .

(٣١) فى الشكل المجاور : بندول بسيط طول خيطه ١٣٠سم، يبدأ البندول الحركة من السكون من النقطة ا و يتحرك حرًا ليتذبذب فى زاوية قياسها ٢هـ حيث طا هـ =$\frac{5}{12}$ . أوجد سرعة الكرة عند منتصف المسار.




(٣٢) حلقة كتلتها $\frac{1}{2}$ كجم، تنزلق على عمود أسطواني رأسي خشن، فإذا كانت سرعتها ٦,٣ متر/ث بعد أن قطعت مسافة ٤,٨ متر من بدء حركتها باستخدام مبدأ الشغل والطاقة، احسب الشغل المبذول من المقاومة أثناء الحركة.



# القدرة

## Power

**سوف تتعلم**

- القدرة.

**المصطلحات الأساسية**

- القدرة Power
- الحصان Horse Power

**الأدوات المستخدمة**

- آله حاسبة علمية.

### فكر و ناقش

إذا بذلت آلة شغلًا قدره ٢٠٠ ثقل كجم.متر فى ٤ دقائق وبذلت آلة أخرى شغلًا قدره ١٠٠ ثقل كجم.متر فى دقيقة واحدة.

**فأى من الآلتين أقدر (آكفأ) من الأخرى؟**

قد يبدو لك أن الآلة الأولى هى الأقدر من الآلة الثانية لأنها بذلت شغلًا أكثر.
ولكن ما بذلته الآلة الأولى فى الدقيقة الواحدة = $\frac{٢٠٠}{٤}$ = ٥٠ ثقل كجم.متروما بذلته الآلة الثانية ١فى الدقيقة الواحدة = ١٠٠ ثقل كجم.متر من ذلك نستنتج أنه لقياس قدرة آلة لابد من معرفة ما تبذله هذه الآلة من شغل فى وحدة الزمن

> **تعريف** القدرة : هى المعدل الزمنى لبذل شغل

**ويصاغ هذا التعريف أيضًا كالآتى:**

**«القدرة هى الشغل المبذول فى وحدة الزمن»**

$$\text{القدرة} = \frac{د}{د ن}(\text{ش})$$

$$\because \text{ش} = \int \overrightarrow{\text{ق}} \cdot د\overrightarrow{\text{ف}}$$

$$\therefore \frac{د}{د ن}(\text{ش}) = \frac{د}{د ن}\int \overrightarrow{\text{ق}} \cdot د\overrightarrow{\text{ف}}$$

$$= \frac{د}{د ن}\int \left(\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \frac{د\overrightarrow{\text{ف}}}{د ن}\right) د ن$$

$$= \frac{د}{د ن}(\text{ش}) = \frac{د}{د ن}\int \left(\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}\right) د ن$$

$$\therefore \frac{د}{د ن}(\text{ش}) = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$$

$$= \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} = \text{ق ع جتا هـ}$$

وإذا كانت $\overrightarrow{\text{ع}}$ لها نفس اتجاه القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فإن القدرة = ق ع
من ذلك نجد أن القدرة كمية قياسية تتعين عند كل لحظة زمنية بمعلومية ق، ع وتحدد قيمتها بالمعدل الزمنى لبذل الشغل عند هذه اللحظة .

**لاحظ أن** القدرة تتعين لحظيًا (عند لحظة معينة) خلافًا للشغل الذى يحسب دائمًا بين لحظتين زمنيتين.

## القدرة المتوسطة: Average Power

إذا بذلت القوة شغلًا قدرة شـ خلال فترة زمنية $\triangle$ن = ن$_٢$ - ن$_١$ فإن:

$$\text{القدرة المتوسطة} = \frac{\text{شـ}}{\triangle \text{ن}} = \frac{\text{شـ}}{\text{ن}_٢ - \text{ن}_١}$$

**استخدام التكامل فى إيجاد الشغل**

$\because$ القدرة $= \frac{\text{ى}}{\text{ى ن}}$ (شـ) ، $\therefore$ شـ $= \int_{\text{ن}_١}^{\text{ن}_٢}$ (القدرة) ى ن

## القدرة المتغيرة وأقصى قدرة

عند ثبوت مقدار القوة ق فإن مقدار القدرة يتغير طرديًا مع مقدار سرعة الجسم ع و يكون ق ثابت التغير حيث

القدرة = ق ع        القدرة $\propto$ ع   عند ثبوت ق

وكلما تغير مقدار السرعة تغير مقدار القدرة ونحصل على أقصى قدرة عند ما تصبح السرعة أقصى مايمكن و يطلق على القدرة فى هذه الحالة قدرة الآلة (بوجه عام)

**وحدات قياس القدرة:**

بما أن القدرة تساوى المعدل الزمنى لبذل الشغل.

$\therefore$ وحدة قياس القدرة $= \frac{\text{وحدة قياس الشغل}}{\text{وحدة قياس الزمن}} =$ وحدة قياس القوة × وحدة قياس السرعة

**ومن وحدات قياس القدرة : الوات (نيوتن. م/ ث)، ث كجم .م/ ث - ارج / ث، الحصان**

- **النيوتن - متر/ ثانية (نيوتن . متر/ ث):** يعرف النيوتن - متر/ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره نيوتن - متر واحد فى كل ثانية.
  و يطلق أيضا على وحدة النيوتن - متر / ثانية (جول /ثانية) إسم «الوات»

- **ثقل كيلوجرام . متر/ ثانية (ث. كجم. متر/ ث):** يعرف ثقل كيلوجرام. متر/ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره كيلو جرام - متر واحد فى كل ثانية.

- **الإرج/ ثانية (إرج/ ث):** يعرف الإرج/ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمني ثابت مقداره إرجا واحدا فى كل ثانية.

- **الحصان:** يعرف الحصان على أنه قدرة الآلة التى تبذل شغلًا قدره ٧٥ ث كجم.م كل ثانية.

**فيمايلى قواعد التحويل بين مختلف وحدات القدرة.**

- ١ ث كجم. متر/ث = ٩,٨ نيوتن. متر/ث
- ١ نيوتن. متر/ث = ١ وات = $١٠^{٧}$ إرج/ث

كما أن هناك وحدات أخرى للقدرة مثل الكيلو وات والحصان.

- ١ كيلو وات = ١٠٠٠ وات = ١٠٠٠ نيوتن. متر/ث = $١٠^{١٠}$ إرج/ث
- ١ حصان = ٧٥ ث كجم. متر/ث

= ٧٥ × ٩,٨ نيوتن. متر/ث

= ٧٣٥ نيوتن. متر/ث ( وات)

= ٠,٧٣٥ كيلو وات

## مثال

(١) شخص كتلته ٥٠ كجم يصعد سلم برج إرتفاع البرج ٤٤١ متر فى زمن قدره ١٥ دقيقة إحسب القدرة المتوسطه له بوحدة الوات.

**الحل**

القوه (ق) = ك ى = ٥٠ × ٩,٨ = ٤٩٠ نيوتن

سرعة الرجل المتوسطة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٤٤١}{١٥ \times ٦٠} =$ ٠,٤٩ م/ث

القدرة المتوسطة = القوة × السرعة = ق × ع = ٤٩٠ × ٠,٤٩ = ٢٤٠,١ وات

### حاول أن تحل

(١) محرك طائرة يعطى قوة مقدارها ٣٢,٢ × $١٠^{٤}$ نيوتن عندما تكون سرعة الطائرة ٩٠٠ كم/س إحسب قدرة المحرك بالحصان

## مثال

(٢) سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ١٠٨ كم/س ضد مقاومات تعادل ١٥ ث.كجم لكل طن من الكتلة إحسب قدرة آلتها بالحصان.

**الحل**

الجسم يتحرك بسرعة منتظمة «تبعا للقانون الأول لنيوتن فتكون ق = م = ١٥ × ٢ = ٣٠ ثقل كيلوجرام

سرعة السيارة = ١٠٨ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٣٠ م/ث

∴ القدرة = ق × ع = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ ث كجم. م/ث

∴ القدرة = $\frac{٩٠٠}{٧٥}$ = ١٢ حصان

### حاول أن تحل

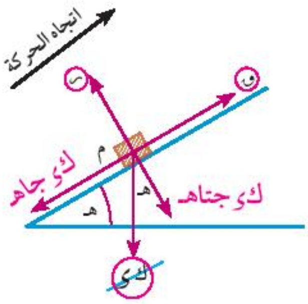
(٢) شاحنة كتلتها ٦ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم/س عندما تكون قدرة محركها ٣٠ حصان ، احسب مقاومة الطريق بثقل الكيلوجرام لكل طن من الكتلة.

## مثال

(٣) سيارة كتلتها ٩ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٢٥}$ بأقصى سرعة مقدارها ٤٥ كم/س ضد مقاومات تعادل ٢٠ ثقل كيلوجرام لكل طن من الكتلة ، إحسب قدرة محركها بالحصان

**الحل**

### الحركة لأعلى المستوى




معادلة الحركة  $ق = م + ك ى جا هـ$

$ق = ٢٠ \times ٩ \times ٩,٨ + ٩ \times ١٠^{٣} \times ٩,٨ \times \frac{١}{١٢٥}$ نيوتن

$ق = ٢٥٢$ ث. كجم

### أقصى سرعة تصعد بها السيارة على المنحدر

$ع = ٤٥ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٢٥}{٢}$ م/ث

$\therefore$ أقصى قدرة للسيارة $= ق \times ع = \dfrac{٢٥٢ \times \frac{٢٥}{٢}}{٧٥} = ٤٢$ حصان

**حاول أن تحل**

(٣) فى المثال السابق إذا هبطت السيارة بعد ذلك على نفس المستوى بعد تحميلها ببضائع كتلتها ٣ طن، أحسب أقصى سرعةللهبوط بالكم/س علما بأن المقاومة عن كل طن من الكتلة لم تتغير .

**لاحظ أن:** اذا كان معدل بذل الشغل منتظمًا (ثابتًا) فإن :

$$القدرة = \frac{الشغل}{الزمن} = \frac{القوة \times المسافة}{الزمن}$$

## مثال

(٤) عامل وظيفته تحميل صناديق على شاحنة كتلة الصندوق الواحد ٣٠ كجم فاذا كان إرتفاع الشاحنة ٠,٩ متر احسب عدد الصناديق التى يستطيع العامل تحميلها فى زمن قدره ١ دقيقة اذا كانت قدرته المتوسطة تساوى ٠,٦ حصان.

**الحل**

$$القدرة = \frac{الشغل الكلى}{الزمن} = \frac{عدد الصناديق \times الشغل اللازم لتحميل صندوق واحد}{الزمن}$$

$\therefore$ عدد الصناديق اللازم تحميلها فى زمن قدرة ١ دقيقة $= \dfrac{القدرة \times الزمن}{الشغل للصندوق الواحد}$

عدد الصناديق $= \dfrac{٧٣٥ \times ٠,٦}{٣٠ \times ٩,٨ \times ٠,٩} = \frac{٥}{٣}$ صندوق لكل ثانية

عدد الصناديق $= \frac{٥}{٣} \times ٦٠ = ١٠٠$ صندوق لكل دقيقة

**حاول أن تحل**

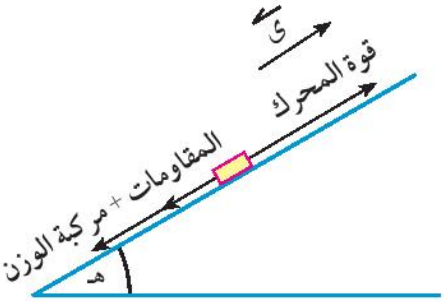
٤ فى المثال السابق احسب عدد الصناديق اذا كانت قدرة العامل ٣٥٢,٨ وات

## مثال

٥ قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ بسرعة منتظمة مقدارها ٢٧ كم/س ضد مقاومات للحركة موازية لاتجاه خط أكبر ميل للمستوى بمعدل ١٨ ثقل كجم لكل طن من الكتلة. فما قدرة القاطرة بالحصان⊠ و إذا هبط القطار على المنحدر بنفس السرعة فكم تكون قدرة القاطرة فى هذه الحالة بفرض ثبوث مقاومات الحركة فى الحالتين⊠

**الحل**

**أولًا: عندما يكون القطار صاعدًا المنحدر:**




نتخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ في اتجاه الحركة أى إلى أعلى المستوى

∴ مقاومات الحركة = ٢٠٠ × ١٨ = ٣٦٠٠ ثقل كجم

مركبة وزن القطار في اتجاه المستوى = ٢٠٠ × ١٠٠٠ × $\frac{١}{٢٠٠}$

= ١٠٠٠ ثقل كجم

∵ القطار يصعد بسرعة منتظمة

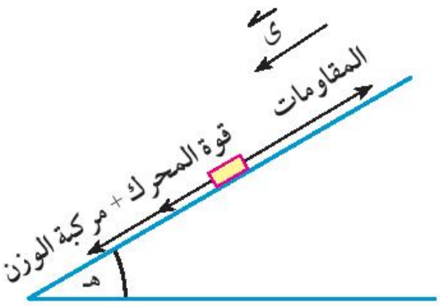
∴ قوة المحرك = المقاومات + مركبة الوزن = ٣٦٠٠ + ١٠٠٠ = ٤٦٠٠ ثقل كجم

∵ القدرة = $ق_١$ ع حيث $ق_١$ قوة المحرك ، ع السرعة

∴ القدرة = ٤٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ ثقل كجم . متر/ث

= ٤٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ × $\frac{١}{٧٥}$ = ٤٦٠ حصان

**ثانيًا: عندما يكون القطار هابطًا المنحدر:**




نتخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه الحركة أى إلى أسفل المستوى

∵ القطار يهبط بسرعة منتظمة

∴ قوة المحرك + مركبة الوزن= المقاومات

∴ قوة المحرك + ١٠٠٠ = ٣٦٠٠

∴ قوة المحرك = ٢٦٠٠ ثقل كجم

∵ القدرة = $ق_٢$ ع حيث $ق_٢$ قوة المحرك ، ع السرعة ( لأنها لم تتغير)

∴ القدرة = ٢٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ × $\frac{١}{٧٥}$ = ٢٦٠ حصان

**حاول أن تحل**

٥ قاطرة كتلتها ٢٨ طن تجر عربة كتلتها ٥٦ طن بعجلة ثابتة أسفل منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ولما بلغت قدرة محركها ٨٤ حصان أصبحت سرعتها ٢١ م/ث احسب عجلة الحركة اذا علمًا بأن المقاومة ١٠ ث كجم لكل طن من الكتلة

## مثال

⑥ يتحرك جسيم كتلته ١ كجم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق} = ٣\ \overrightarrow{س} + ٤\ \overrightarrow{ص}$ بحيث كانت إزاحته $\overrightarrow{ف}$ كدالة فى الزمن تعطى بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = ٣\ ن^٢\ \overrightarrow{س} + ٦\ ن\ \overrightarrow{ص}$ أوجد الشغل المبذول من القوة ثم أوجد القدرة عندما ن = ٢ ثانية إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف مقيسه بالمتر، ن بالثانية .

**الحل**

$\because$ ش = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$\therefore$ ش = (٣، ٤) • (٣ن$^٢$ ، ٦ن) = ٩ن$^٢$ + ٢٤ ن

$\because$ القدرة = $\frac{ء}{ء ن}$ (ش)     $\therefore$ القدرة = ١٨ ن + ٢٤

عندما ن = ٢ ثانية     القدرة = ٦٠ وات

**حاول أن تحل**

⑥ أثرت قوة ثابتة $\overrightarrow{ق}$ على جسيم بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = (٣ن^٢ + ن)\ \overrightarrow{س} - ٤\ ن\ \overrightarrow{ص}$ . أوجد $\overrightarrow{ق}$ إذا كانت قدرة القوة $\overrightarrow{ق}$ تساوى ٧٥ إرج/ث عندما ن = ٤ ثانية، وكانت قدرة القوة $\overrightarrow{ق}$ تساوى ١٦٥ إرج/ث عندما ن = ٩ ثانية علمًا بأن ف مقيسة بالسنتيمتر ، ق مقيسة بوحدة داين.

## مثال

⑦ إذا كانت قدرة آلة عند أى زمن ن مقاسًا بالثوانى يساوى (٩ن$^٢$ + ٤ن) فأوجد الشغل المبذول من الآلة خلال الثوانى الثلاث الأولى ثم أوجد الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة.

**الحل**

$\because$ القدرة = $\frac{ء ش}{ء ن}$

$\therefore$ ش = $\int_{ن_١}^{ن_٢}$ (القدرة) ء ن

الشغل المبذول خلال الثوانى الثلاث الأولى = $\int_{٠}^{٣}$ (٩ن$^٢$ + ٤ن) ء ن

= $[٣ن^٣ + ٢ن^٢]_{٠}^{٣}$

= ٩٩ وحدة شغل

الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة = $\int_{٣}^{٤}$ (٩ن$^٢$ + ٤ن) ء ن

= $[٣ن^٣ + ٢ن^٢]_{٣}^{٤}$

= ١٢٥ وحدة شغل

## مثال

(٨) أوجد الزمن الذى تستغرقه سيارة كتلتها ١٢٠٠ كجم لتصل سرعتها إلى ١٢٦ كم/س من السكون إذا كانت قدرة المحرك ثابتة وتساوى ١٢٥ حصان.

**الحل**

∵ شـ = $\int_{0}^{ن}$ (القدرة) ى ن ∴ شـ = $\int_{0}^{ن}$ (١٢٥ × ٧٣٥) ى ن

شـ = ١٢٥ × ٧٣٥ ن

∵ الشغل = التغير فى طاقة الحركة ∴ $\frac{1}{2}$ ك (ع$^2$ - ع$_0^2$) = ١٢٥ × ٧٣٥ ن

∴ $\frac{1}{2}$ × ١٢٠٠ ((١٢٦ × $\frac{5}{18}$)$^2$ - ٠) = ١٢٥ × ٧٣٥ ن

∴ ٧٣٥ × ١٠٠٠ = ١٢٥ × ٧٣٥ ن ∴ ن = ٨ ث

**حاول أن تحل**

(٧) إذا كانت قوة محرك سيارة تبذل شغلًا بمعدل يعطى خلال الفترة الزمنيةن∋ [٠ ، ٥]بالعلاقة ١٤٤ ن - ٢٦ ن$^2$، و إذا كانت كتلة السيارة ٩٨٠ كجم وسرعتها فى نهاية الثانية الثالثة ٩٠ كم/س فأوجد سرعتها فى نهاية الثانية الرابعة.

## تمارين ٣ - ٣

أكمل

(١) جسيم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ بحيث كانت إزاحته $\overrightarrow{ف}$ = ن $\overrightarrow{س}$ + (ن$^2$ + ن) $\overrightarrow{ص}$ فإن قدرة القوة $\overrightarrow{ق}$ عند اللحظة ن = ٣ ثانية تساوى .................. داين. سم/ث حيثق بالداين ،ف بالسنتيمتر.

(٢) قطار كتلته ٣٧٥طن وقدرة محركه ٦٢٥ حصان يتحرك على أرض أفقية بأقصى سرعة ك وقدرها ٩٠ كم/س فإن المقاومة التى يلاقيها عن كل طن من كتلة القطار = .................. ث كجم

(٣) تتحرك سيارة كتلتها ٤ طن وقدرة محركها ١٠ حصان فى خط مستقيم علي أرض أفقية فكانت أقصى سرعة لها ٧٥ كم/س فإن مقدار مقاومة الطريق لحركة السيارة = .................. ث كجم

(٤) قطار كتلته ١٠٨ طن يتحرك بسرعة منتظمة على طريق أفقى بسرعة ٣٠ كم/ساعة فإذا كانت المقاومات تعادل ١٠,٥ ثقل كجم لكل طن من كتلته فأوجد قدره القاطرة بالحصان عندئذ.

(٥) قطار قدرة آلته ٥٠٤ حصان وكتلته ٢١٦ طن يتحرك على طريق أفقى بأقصى سرعة له ضد مقاومات تعادل ٥ ثقل كجم لكل طن من الكتلة ، أوجد أقصى سرعة له بالكيلو متر/ساعة

(٦) يتحرك قطار أفقيًا تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته، فإذا كانت المقاومة تعادل ٨٠٠ ثقل كجم عندما كانت سرعته ٢٠ كم/ساعة وكانت قدرة القطار ٢٠٠ حصان عندما يتحرك بأقصى سرعة له. فأوجد هذه السرعة بالكم/ساعة

(٧) تتحرك سيارة كتلتها ١٥٠٠ كجم وقدرة محركها ١٢٠ حصان على طريق مستقيم أفقي بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س. ما هي أقصى سرعة يمكن لهذه السيارة أن تصعد بها طريقًا مستقيما منحدرًا يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ علمًا بأن المقاومة واحده على الطريقين؟

(٨) سيارة كتلتها ٣ طن تسير على طريق أفقي بسرعة منتظمة قدرها ٣٧,٥ كم/ساعة وعندما وصلت إلى قمة منحدر يميل على الأفقي بزاوية جيبها ٠٣, أوقف السائق المحرك وتحركت السيارة أسفل المنحدر بسرعتها السابقة نفسها فإذا كانت مقاومة المنحدر $\frac{٢}{٣}$ مقاومة الطريق الأفقي فأوجد:
**أولا:** مقاومة المنحدر بثقل الكيلو جرام. **ثانيا:** قدرة محرك السيارة على الطريق الأفقي.

(٩) تحركت سيارة كتلتها ٦ طن. بأقصى سرعة وقدرها ٢٧ كم/س صاعدة طريقًا منحدرًا يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ، عادت السيارة وهبطت على الطريق نفسه بأقصى سرعة لها وقدرها ١٣٥ كم/س. عين مقدار قوة مقاومة الطريق للحركة بفرض أنه لم يتغير طوال الوقت ثم أوجد قدرة محرك السيارة.

(١٠) طائرة قدرة محركها ١٣٥٠ حصانًا عندما تتحرك أفقيًا بسرعة ثابتة قدرها ٢٧٠ كم/س أوجد مقاومة الهواء لحركة الطائرة عندئذ. وإذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعتها، أوجد قدرة المحرك عندما تطير أفقيًا بسرعة ثابتة قدرها ١٨٠ كم/ساعة.

(١١) تجر قاطرة قدرة آلتها ٤٠٠ حصان قطارًا بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س على أرض أفقية .إحسب المقاومة لحركة القطار، إذا كانت كتلة القطار والقاطرة معًا ٢٠٠ طن، أوجد أقصى سرعة يصعد بها القطار طريقًا منحدرًا يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ على فرض أن مقاومة الطريق للحركة لم تتغير.

(١٢) راكب دراجة كتلته مع دراجته ٨٠ كجم، وأكبر قدره له $\frac{٤}{٥}$ حصان فإذا كانت أقصى سرعة له على طريق أفقي هي ١٨ كم/ساعة، فاحسب مقاومة الطريق بثقل كجم، واذا علم أنه صعد منحدرًا يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٣}{٤٠}$ بأقصى سرعة له فإحسب هذه السرعة بالكم/ساعة.

(١٣) عربة نقل كتلتها ٥ طن تتحرك على طريق أفقي بسرعة منتظمة قدرها ١٤٤ كم/س، عندما كانت قدرة آلتها ١٢٠ حصان .أوجد مقاومة الطريق لكل طن من الكتلة بثقل كجم، وإذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة، فأوجد قدرة المحرك بالحصان عندما تصعد العربة منحدرًا يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٣}{٢٠٠}$ بسرعة منتظمة قدرها ٩٦ كم/س

(١٤) هبطت شاحنة كتلتها ٢ طن على طريق منحدر يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ من موقع (أ) الى موقع (ب) بأقصى سرعة وقدرها ٩٠ كم/س. إحسب قدرة محرك السيارة إذا علمت أن مقاومة الطريق لحركتها تقدر بنسبة ١٣٪ من وزن السيارة، حملت السيارة عند وصولها إلى الموقع (ب) شحنة كتلتها $\frac{١}{٢}$ طن ثم تحركت صاعدة الطريق الى موقع (أ) بأقصى سرعة، أوجد هذه السرعة إذا ظلت المقاومة على نفس نسبتها من الوزن.

(١٥) قطار كتلته (ك) طن يتحرك على طريق أفقي بأقصى سرعة له وقدرها ٦٠ كم/س. فصلت منه العربة الأخيرة وكتلتها ١٥ طن، فزادت أقصى سرعة له بمقدار ٧,٥ كم/س. أوجد قدرة الآلة بالحصان. وكذلك كتلة القطار، علمًا بأن المقاومة تساوى ٩ ثقل كجم عن كل طن من الكتلة.

(١٦) جسيم يتحرك تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\ \overrightarrow{\text{س}} + ٤\ \overrightarrow{\text{ص}}$ وكان متجه إزاحته $\overrightarrow{\text{ف}}$ يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}} = \text{ن}\ \overrightarrow{\text{س}} + (\frac{١}{٢}\text{ن}^٢ + \text{ن})\ \overrightarrow{\text{ص}}$ ، أوجد إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف بالمتر، ن بالثانية.

أ) الشغل المبذول خلال الثوانى الثلاث الأولى

ب) متوسط القدرة خلال الثوانى الثلاث الأولى

جـ) قدرة القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند ن = ٣ ث

(١٧) يتحرك جسيم كتلته الوحدة تحت تأثير قوة $\overrightarrow{\text{ق}} = (٢\text{ن} - ١)\ \overrightarrow{\text{س}} + (٥\text{ن} + ٢)\ \overrightarrow{\text{ص}}$ بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}} = (٣\text{ن}^٢ + \text{ن})\ \overrightarrow{\text{س}} + ٤\ \text{ن}\ \overrightarrow{\text{ص}}$ ، أوجد إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف بالمتر، ن بالثانية.

أ) الشغل المبذول خلال الثوانى الثالثة والرابعة والخامسة

ب) القدرة المتوسطة خلال الثوانى الثالثة والرابعة والخامسة.

جـ) قدرة القوة عند ن = ٥ ث

(١٨) جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ وكان متجه موضع الجسم عند أى لحظة زمنية ن يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ر}}(\text{ن}) = \text{ن}^٣\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{ن}^٢\ \overrightarrow{\text{ص}}$ حيث ر مقيسة بالمتر، ق بالنيوتن، ن بالثانية . أوجد :

أ) القوة المؤثرة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بدلالة ن

ب) أوجد قدرة القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بدلالة الزمن ن.

جـ) أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ خلال الفترة الزمنية $٠ < \text{ن} < ٢$

(١٩) إذا كانت قدرة آلة (بالحصان) تساوى $(٦\text{ن} - \frac{١}{٢٠}\text{ن}^٢)$ حيث ن الزمن بالثوانى ، ن $\in$ [٠، ١٢٠] أوجد :

أ) قدرة الآلة عندما ن = ٩٠ ث.

ب) الشغل المبذول خلال الفترة الزمنية [٠، ٣٠].

جـ) أقصى قدرة للآلة .

(٢٠) جسم كتلته ٥ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بحيث كان متجه موضعه عند الزمن ن يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ر}}(\text{ن}) = \text{ن}\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{ن}^٢\ \overrightarrow{\text{ص}}$ إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، س بالمتر . فأوجد :

- مستخدمًا التكامل الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فى الفترة الزمنية [٠، ٢].

(٢١) جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بحيث كان متجه سرعته $\overrightarrow{\text{ع}}$ يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ع}} = (١ - \text{جا}\ ٢\ \text{ن})\overrightarrow{\text{س}} + (-١ + \text{جتا}\ ٢\ \text{ن})\ \overrightarrow{\text{ص}}$ إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن ، ع بوحدة م/ث فأوجد:

أ) القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بدلالة الزمن ن.

ب) طاقة الحركة ط عند الزمن ن.

جـ) أثبت أن معدل تغير ط يساوى القدرة الناتجة عن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ .