القسم الأدبي

الرياضيات

العامة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسى الثانى

٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح　　أ / سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى　　أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

إعداد ومراجعة وتعديل

أ/ منال عزقول

مستشار الرياضيات

د/ محمد محيى الدين عبدالسلام أبورية　　أ / شريف عاطف البرهامي

أ/ إيمان سيد رمضان　　أ/ عصام علي أبو سالم

جميع الحقوق محفوظة لا يجور نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش. م. م

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٥/٢٠١٦

رقم الإيــداع ١٠٥٥٦ / ٢٠١٥

الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 013 - 4

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب مجالان هما: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: المتتابعات والمتسلسلات

١ - ١ المتتابعات والمتسلسلات ٤

١ - ٢ المتتابعة الحسابية ١٠

١ - ٣ المتسلسلات الحسابية ١٦

١ - ٤ المتتابعة الهندسية ٢٢

١ - ٥ المتسلسلات الهندسية ٢٩

تمارين عامة ٣٥

الوحدة الثانية: التباديل والتوافيق

٢ - ١ مبدأ العد ٣٨

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل ٤١

٢ - ٣ التوافيق ٤٦

تمارين عامة ٥٠

المحتويات

المحتويات

الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

٣ - ١ معدل التغير ٥٤

٣ - ٢ الاشـــتقاق ٥٩

٣ - ٤ قواعد الاشتقاق ٦٣

٣ - ٤ التكامل ٧٢

تمارين عامة ٧٨

المحتويات

الوحدة الأولى

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and series

مقدمة الوحدة

مما لا شك فيه أن الرياضيات تساعد على اكتشاف وتمثيل الأنماط التى قد تكون منتهية أو غير منتهية حيث يمكن تواجدها فى المواقف الحياتية المختلفة أو يمكن تركيبها وتكوينها، والكثير منها أنماط رقمية لما لها من استخدامات مختلفة فى الحياة اليومية؛ حيث توجد فى صور متتابعات ومتسلسلات، وقد تطورت هذه الأنماط فى الدراسات الحديثة من الجانب النظرى إلى الجانب التطبيقى فى مجال العلوم والهندسة والإحصاء، وقد أصبح الحاسب الآلى أول اختراع قابل للتطور ؛ حيث إنه قد تم التفاعل معه بشكل فريد وغير مسبوق، ويمكن الاستعانة به فى تحليل أعقد المسائل الرياضية والفيزيائية فى جميع فروع المعرفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم المتتابعات ويميز بينها وبين المتسلسلات.
- يتعرف المتتابعة الحسابية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.
- يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية، ويدخل عددًا محدودًا من الأوساط الحسابية بين عددين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.
- يتعرف المتتابعة الهندسية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.
- يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية.
- يدخل عددًا محدودًا من الأوساط الهندسية بين عددين.
- يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.
- يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.
- يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية.
- يستخدم الحاسبات فى إجراء عمليات متطلبة فى حل مشكلات رياضية وحياتية على المتتابعات والمتسلسلات.

المصطلحات الأساسية

Function	دالة	Summation ($\sum$)	رمز التجميع (Σ)	Geometric mean	وسط هندسى
Term	حد	Arithmetic sequence	متتابعة حسابية	Geometric series	متسلسلة هندسية
Finite sequence	متتابعة منتهية	Common differnce	أساس المتتابعة الحسابية		متسلسلة هندسية غير منتهية
Infinite sequence	متتابعة غير منتهية	Arithmetic mean	وسط حسابى	Infinite geometric series	
Increasing Seqence	متتابعة تزايدية	Arithmetic series	متسلسلة حسابية	Infinity	مالانهاية
Decreasing Seqence	متتابعة تناقصية	Geometric sequence	متتابعة هندسية		
Series	متسلسلة	Common ratio	أساس المتتابعة الهندسية		

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): المتتابعات والمتسلسلات.

الدرس (١ - ٢): المتتابعات الحسابية.

الدرس (١ - ٣): المتسلسلات الحاسبية.

الدرس (١ - ٤): المتتابعات الهندسية.

الدرس (١ - ٥): المتسلسلات الهندسية.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مخطط تنظيمى للوحدة

١ - ١ المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and Series

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة
- المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية
- الحد النونى للمتتابعة
- المتسلسلات ورمز المجموع

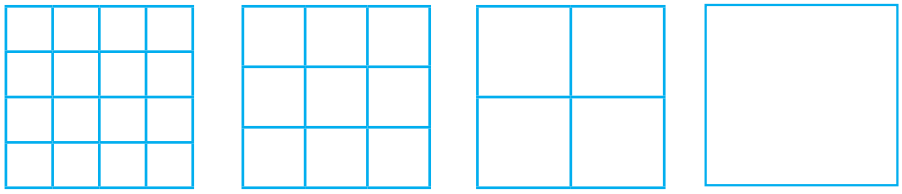
المصطلحات الأساسية

متتابعة	*Sequence*
متتابعة منتهية	*Finite Sequence*
متتابعة غير منتهية	*infinite Sequence*
مجموعة	*Set*
حد	*Term*
متسلسلة	*Series*
رمز المجموع	*Summation notation*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

النمط السابق يوضح مربع يمكن تقسيمه إلى عدد من المربعات الصغرى:

(١) أوجد عدد المربعات الصغرى التى يحتويها الشكل الخامس (**ارسم الشكل الخامس**).

(٢) هل يمكنك إيجاد عدد المربعات الصغرى بالشكل الثامن.

(٣) هل تستطيع إيجاد العلاقة بين عدد المربعات الصغرى وبين ترتيب الشكل.

تعلم

المتتابعة *Sequence*

المتتابعة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صـ$^{+}$ أو مجموعة جزئية منها ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ع حيث يرمز للحد الأول بالرمز ع$_{١}$، الحد الثانى بالرمز ع$_{٢}$، الحد الثالث بالرمز ع$_{٣}$ وهكذا... والحد النونى بالرمز ع$_{ن}$ ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتى:

(ع$_{١}$، ع$_{٢}$، ع$_{٣}$،... ، ع$_{ن}$) أو يرمز لها بالرمز (ع$_{ن}$).

تذكر أن

الدالة هى علاقة بين مجموعتين سـ، صـ بحيث كل عنصر من عناصر سـ يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة ؛ لبيان العلاقة.

مثال

١ اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

أ متتابعة الأعداد الزوجية الموجبة التى تبدأ بالعدد (٢)

ب متتابعة الأعداد المحصورة بين ١٠ ، ٣٠ والتى يقبل كل منها القسمة على ٣.

لاحظ أن

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

(٢) الرمز (ع$_{ن}$) يعبر عن المتتابعة، بينما الرمز ع$_{ن}$ يعبر عن حدها النونى.

الحل

أ (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢)

ب (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٧)

حاول أن تحل

(١) اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

أ متتابعة الأعداد الفردية السالبة التى تبدأ بالعدد (- ١).

ب متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ ، ٨١ والتى يقبل كل منها القسمة على ٥.

الحد العام لمتتابعة: *General term of a sequence*

الحد العام لمتتابعة (ويسمى أحيانًا بالحد النونى) ويكتب $ع_ن$ حيث $ع_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن فى مجال المتتابعة، ويمكن استنتاجه أحيانًا من خلال حدود معطاة للمتتابعة.

مثال ذلك:

- الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... هو $ع_ن = ٢ن$
- الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... هو $ع_ن = ٢ن - ١$
- الحد العام للمتتابعة: $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ... هو $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٢}$

تفكير ناقد: هل توجد قاعدة لإيجاد الحد العام لجميع المتتابعات؟ فسر إجابتك .

مثال

(٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى: $ع_١ = -١$ ، $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$ حيث $ن \leq ١$

الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فى العلاقة $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$:

بوضع ن = ١ تكون $ع_٢ = ٢ ع_١$ أى أن: $ع_٢ = ٢ \times -١ = -٢$ (بالتعويض عن $ع_١ = -١$)

بوضع ن = ٢ تكون $ع_٣ = ٢ ع_٢$ أى أن: $ع_٣ = ٢ \times -٢ = -٤$ (بالتعويض عن $ع_٢ = -٢$)

بوضع ن = ٣ تكون $ع_٤ = ٢ ع_٣$ أى أن: $ع_٤ = ٢ \times -٤ = -٨$ (بالتعويض عن $ع_٣ = -٤$)

بوضع ن = ٤ تكون $ع_٥ = ٢ ع_٤$ أى أن: $ع_٥ = ٢ \times -٨ = -١٦$ (بالتعويض عن $ع_٤ = -٨$)

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هى: (- ١ ، - ٢ ، - ٤ ، - ٨ ، - ١٦)

حاول أن تحل

(٢) اكتب الستة حدود الأولى للمتتابعة $(ع_ن)$ المعرفة كالآتى: $ع_١ = ٣$ ، $ع_ن = ٢ ع_{ن-١}$ حيث $ن \leq ٢$

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية: *Finite seqence and infinite sequence*

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيًا (أى يمكن حصره أو عده) وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منتهٍ (عدد لا نهائى من العناصر لا يمكن حصره).

مثال

(٣) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

أ $ع_ن = ٢ن + ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).

ب $ع_ن = ن^٢$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

الحل

أ بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

∴ $ع_١ = ٢(١) + ١ = ٣$ ، $ع_٢ = ٢(٢) + ١ = ٥$

$ع_٣ = ٢(٣) + ١ = ٧$ ، $ع_٤ = ٢(٤) + ١ = ٩$

$ع_٥ = ٢(٥) + ١ = ١١$ ، ∴ المتتابعة هى: (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١) **متتابعة منتهية**

ب بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، .....

∴ $ع_١ = (١)^٢ = ١$ ، $ع_٢ = (٢)^٢ = ٤$

$ع_٣ = (٣)^٢ = ٩$ ، $ع_٤ = (٤)^٢ = ١٦$

$ع_٥ = (٥)^٢ = ٢٥$ ، ∴ المتتابعة هى: (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ....) **متتابعة غير منتهية.**

حاول أن تحل

(٣) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

أ $ع_ن = ١ - ٣ن$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).

ب $ع_ن = ن^٣$ (إلى عدد غير منتهٍ من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

المتسلسلات ورمز التجميع *Series and summation notation*

المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة.

فمثلا: (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) هى متتابعة بينما ٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ... هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة،

ويمكن استخدام رمز التجميع " Σ " ويقرأ (سيجما) لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

مثال

(٤) اكتب مفكوك كلًّا من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك.

أ $\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢$ ب $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر - ١)$

الحل

أ بوضع ر = ١ يكون $ع_١ = (١)^٢ = ١$ ، بوضع ر = ٢ يكون $ع_٢ = (٢)^٢ = ٤$

بوضع ر = ٣ يكون $ع_٣ = (٣)^٢ = ٩$ ، بوضع ر = ٤ يكون $ع_٤ = (٤)^٢ = ١٦$

أى أن المتسلسلة هى (١ + ٤ + ٩ + ١٦) ويكون $\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢ = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠$

ب بوضع ر = ٣ يكون ع١ = ٢ × ٣ − ١ = ٥ ، بوضع ر = ٤ يكون ع٢ = ٢ × ٤ − ١ = ٧

بوضع ر = ٥ يكون ع٣ = ٢ × ٥ − ١ = ٩ ، بوضع ر = ٦ يكون ع٤ = ٢ × ٦ − ١ = ١١

بوضع ر = ٧ يكون ع٥ = ٢ × ٧ − ١ = ١٣

أى أن المتسلسلة هى (٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣) ويكون $\sum_{ر=٣}^{٧}$ (٢ر − ١) = ٤٥

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة:

تتيح لنا الآلات الحاسبة إنجاز الكثير من العمليات الحسابية المعقدة بسرعة ودقة تامة بشرط التأكد من بيانات الإدخال، ومن بين هذه العمليات الهامة هو إيجاد مجموع متسلسلة، فعلى سبيل المثال يمكن التحقق من مجموع المتسلسلة فى السؤال السابق (ب) على النحو التالى:

(١) نضغط على مفتاح رمز التجميع $\sum$ حسب اللون المحدد لذلك

(٢) نكتب قاعدة المتباينة (٢ر − ١) كالآتى:

ابدأ ← 1 − (x)) ALPHA 2

(٣) نستخدم المفتاح (Replay) للتنقل كالآتى:

نكتب عدد حدود المتتابعة (٧) فى التنقل لأعلى، 7

نكتب رتبة الحد الذى نبدأ به وهو فى هذا المثال (٣) فى التنقل لأسفل 3

(٤) نضغط على مفتاح الإدخال = ليعطى على الشاشة الناتج ٤٥ وهو مطابق لناتج الجمع السابق.

حاول أن تحل

٤ اكتب مفكوك كلًّا من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

أ $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٣ر − ٢)

ب $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر + ١)^{٢}

جـ $\sum_{ر=٥}^{٩}$ ٣ × ٢$^{ر-١}$

تمـــاريـن ١ - ١

أكمل ما يأتى:

١ الحد الخامس للمتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ٢ن - ١$ هو .....

٢ الحد الرابع فى للمتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^٢ + ٣$ هو .....

٣ فى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_{ن+١} = ن\ ع_ن$ إذا كان $ع_١ = ١$ فإن $ع_٢$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٤ الحد الخامس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥ هو ..... :

أ ٥ ب ٢٥ ج ٢٠ د ١٠

٥ الحد العاشر من المتتابعة التى حدها النونى: $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in صـ^+$ هو:

أ $\frac{-٤}{٥}$ ب $\frac{-١}{٥}$ ج $\frac{١}{٥}$ د $\frac{٤}{٥}$

٦ قاعدة المتتابعة $((٢ \times ٣)، (٣ \times ٤)، (٤ \times ٥)، (٥ \times ٦)، ...)$ هى:

أ $(ن - ١)(ن + ١)$ ب $ن(ن + ١)$ ج $٢ن(ن + ١)$ د $(ن + ١)(ن + ٢)$

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧ بين أى المتتابعات الآتية منتهية أو غير منتهية:

أ $(١، ٤، ٧، ١١، ...)$

ب $(٣، ٥، ٧، ٩، ...، ٢١)$

ج المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^٢ - ١، ن \in صـ^+$

د المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = \frac{٢}{ن} + ٣، ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$

٨ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:

أ $ع_ن = ن + ن^٢$ ب $ع_ن = \frac{١}{٥ - ٢ن}$ ج $ع_ن = (\frac{١}{٣})^ن$ د $ع_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

٩ اكتب الحد التالى فيما يلي:

أ $٦٥، ٦٩، ٧٣، ٧٧، ٨١، ...$ ب $٣، -٦، ١٢، -٢٤، ٤٨، ...$

ج $\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}، \frac{١}{١٦}، \frac{١}{٣٢}، ...$ د $١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ...$

١٠ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢)$ ب $\sum_{ر=١}^{٨} ((-١)^ر + ٤ر)$

ج $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ر-١}$ د $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$

(١١) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

أ $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر + ٣)$

ب $\sum_{ر=٢}^{٦} (ر^{٢} - ٢)$

ج $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ \times (\frac{١}{٢})^{ر+١}$

د $\sum_{ر=٣}^{٦} (\frac{١}{ر} + ٢)$

١ - ٢ المتتابعة الحسابية

Arithmetic Sequence

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الحسابية.
- التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية.
- الحد النونى للمتتابعة الحسابية.
- تعيين المتتابعة الحسابية.
- تعريف الوسط الحسابى.
- إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

المصطلحات الأساسية

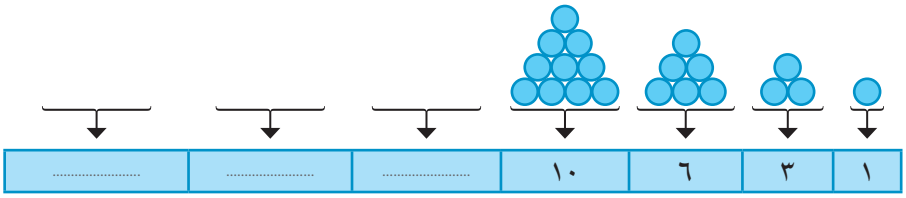
- نمط *Pattern*
- متتابعة حسابية *Arithmetic sequence*
- حد نونى *nth Term*
- أساس المتتابعة الحسابية *Common difference*
- رتبة الحد *Order of the term*
- وسط حسابى *arithmetic mean*

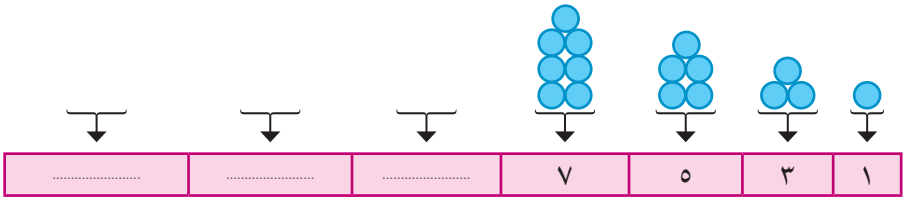
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية .
- برامج رسومية.

نشاط

ادرس كلًّا من النمطين التاليين، ثم أكمل كل منهما حتى الشكل السابع.





أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) ما أوجه الشبه والاختلاف بين النمطين الأول والثانى؟

(٢) اكتب المتتابعتين الممثلتين للنمطين السابقين.

(٣) ماذا تلاحظ على قيم المتتابعة فى النمط الثانى ؟ هل يمكنك استنتاج قاعدة للربط بين حدود هذه المتتابعة؟ اكتب هذه القاعدة.

من النشاط السابق نجد أن:

- التزايد فى قيم عناصر النمط الأول يتغير، ولكن التزايد فى قيم عناصر النمط الثانى هو تزايد بمقدار ثابت.
- المتتابعة الممثلة لعناصر النمط الثانى هى: (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حيث كل حد فيها يزيد عن الحد الذى يسبقه مباشرة بمقدار ثابت قيمته ٢، ولذلك سميت بالمتتابعة الحسابية.

تعريف ١

المتتابعة الحسابية *Arithmetic Sequence*

هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدرًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ى).

أى أن: ى = $ع_{ن+١} - ع_{ن}$ لكل ن ∈ $صـ^{+}$ ويمكن تكوينها بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ى).

مثال

(١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

(أ) (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩)

(ب) $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦})$

(جـ) $ع_ن = ٢ن + ٣$

الحل

(أ) ∵ $ع_٢ - ع_١ = ١٠ - ٧ = ٣$ ، $ع_٣ - ع_٢ = ١٣ - ١٠ = ٣$

وبالمثل $ع_٤ - ع_٣ = ع_٥ - ع_٤ = ٣$

∴ $ع_٢ - ع_١ = ع_٣ - ع_٢ = ع_٤ - ع_٣ = ع_٥ - ع_٤ = ٣$ ∴ المتتابعة حسابية أساسها = ٣

(ب) ∵ $ع_٢ - ع_١ = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٦}$ ، $ع_٣ - ع_٢ = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٢}$

∴ $ع_٢ - ع_١ \neq ع_٣ - ع_٢$ ∴ المتتابعة ليست حسابية.

(جـ) ∵ $ع_{ن+١} - ع_ن = (٢(ن + ١) + ٣) - (٢ن + ٣) = ٢ن + ٢ + ٣ - ٢ن - ٣ = ٢$

∴ المتتابعة حسابية أساسها ٢

حاول أن تحل

(١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

(أ) (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨)

(ب) (-١٤ ، -٨ ، -٢ ، ٤ ، ١٠)

(جـ) $ع_ن = ٢ن + ٣$

(د) $ع_ن = ١ - \frac{٣}{٢}ن$

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

المتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ تكون تزايدة إذا كان أساسها موجبًا (د > صفر) مثل: (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، .....)

والمتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ تكون تناقصية إذا كان أساسها سالبًا (د < صفر) مثل: (٤ ، -١ ، -٦ ، -١١ ، .....)

حاول أن تحل

(٢) فى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ٣ن - ٥$

(أ) أثبت أن $(ع_ن)$ متتابعة حسابية، وأوجد أساسها.

(ب) بين أن هذه المتتابعة تزايدية.

(جـ) أوجد حدها الخامس عشر.

(د) إذا كان $ع_ن = ٨٥$ ، فما قيمة ن؟

إيجاد الحد النونى للمتتابعة الحسابية: *Finding the n^{th} term of an arithmetic sequence*

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ التى حدها الأول أ وأساسها د كالآتى:

$ع_١ = أ$ ، $ع_٢ = أ + د$ ، $ع_٣ = أ + ٢د$

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو: $ع_ن = أ + (ن - ١)د$

مثال

(٢) في المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ..... ، ١٠٠)

أ أوجد الحد العاشر ب أوجد عدد حدود هذه المتتابعة

الحل

∵ المتتابعة حسابية ∴ أ = ١٣ ، ء = ١٦ − ١٣ = ٣

أ ∵ $ع_ن = أ + (ن - ١)ء$ ∴ $ع_{١٠} = ١٣ + (١٠ - ١) \times ٣$

$= ١٣ + ٩ \times ٣ = ١٣ + ٢٧ = ٤٠$

ب المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما $ع_ن = ١٠٠$

∵ $ع_ن = أ + (ن - ١)ء$ ∴ $١٠٠ = ١٣ + (ن - ١) \times ٣$ ∴ $١٠٠ = ١٣ + ٣ن - ٣$

أي أن: ٣ن = ١٠٠ − ١٠ = ٩٠ ∴ ن = ٣٠

حاول أن تحل

(٣) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، .... ، ٦٥) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

تعيين المتتابعة الحسابية: *Identfing the arithmetic Sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول والأساس.

مثال

(٣) أوجد المتتابعة الحسابية $(ع_ن)$ التي فيها $ع_٧ = ١٨$ ، $ع_{١٥} = ٣٤$

الحل

نعلم من معطيات المسألة أن: $ع_٧ = ١٨$ ، $ع_{١٥} = ٣٤$

∵ $ع_ن = أ + (ن - ١)ء$ ∴ $١٨ = أ + (٧ - ١)ء$ ومنها:

∴ أ + ٦ء = ١٨ (١)

بالمثل $٣٤ = أ + (١٥ - ١)ء$

، أ + ١٤ء = ٣٤ (٢)

وبحل المعادلتين (١)، (٢) ء = ٢

وبالتعويض في المعادلة الأولى

∴ أ + ٦ × ٢ = ١٨ ∴ أ = ١٨ − ١٢ = ٦

∴ المتتابعة الحسابية هي (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...)

لاحظ أن

للحصول على قيمة ء فإن

أ + ١٤ء = ٣٤

−أ − ٦ء = −١٨

وذلك بضرب طرفي المعادلة الأولى في (−١)

بجمع المعادلتين: ٨ء = ١٦

بقسمة طرفي المعادلة على ٨

ء = ٢

استخدام الآلة الحاسبة:

للتأكد من صحة حل المعادلتين: أ + ٦ء = ١٨ ، أ + ١٤ء = ٣٤

باستخدام الحاسبة العلمية نتبع الخطوات التالية:

إدخال البيانات

نضغط على مفتاح العمليات MODE ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها أو بالضغط على المفتاح EXE في بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية anX + bnY = cn وذلك بالضغط على المفتاح

ندخل معاملات (X) ، (Y) ، والحد المطلق (cn) بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية مباشرة على النحو التالي:

ابدأ ← 1 = 6 = 18 = 1 = 1 4 = 3 4 =

استدعاء النواتج:

- بالضغط على المفتاح = للمرة الأولى يعطى قيمة المتغير الأول، وليكن (X) ويكون الناتج X = 6
- بالضغط على المفتاح = مرة أخرى يعطى قيمة المتغير الثاني، وليكن (Y) ويكون الناتج Y = 2

للخروج من البرنامج: نضغط على المفاتيح: ابدأ ← MODE 1

٩ حاول أن تحل

٤) أوجد المتتابعة الحسابية (ع$_ن$) التي فيها ع$_٦$ = ١٧ ، ع$_٣$ + ع$_١٠$ = ٣٧

الأوساط الحسابية *Arithmetic means*

تعلم أن الوسط الحسابي (المتوسط) للعددين أ، ب هو $\frac{أ+ب}{٢}$

وباعتبار أن: (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥) متتابعة حسابية

- الوسط الحسابي للحدين الأول والثالث = $\frac{٩+١٧}{٢}$ = ١٣ **ماذا تلاحظ؟**
- الوسط الحسابي للحدين الثاني والرابع = $\frac{١٣+٢١}{٢}$ = ١٧ **ماذا تلاحظ؟**

تعريف ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن ب تعرف بالوسط الحسابي بين العددين أ، جـ حيث: ب − أ = جـ − ب أي أن: ٢ب = أ + جـ فتكون ب = $\frac{أ+جـ}{٢}$

لذلك فإن (أ ، $\frac{أ+جـ}{٢}$ ، جـ) متتابعة حسابية.

ويمكن إدخال عدة أوساط حسابية: س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ...، س$_ن$ بين العددين أ، ب بحيث تكون (أ ، س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ...، س$_ن$، ب) متتابعة حسابية.

تعبير شفهى: أكمل:

(١) إذا كونت (٣، ٧، ١١، ...، ٤٣ ، ٤٧) متتابعة حسابية فإن: ٧، ١١، ١٥، ...، ٤٣ تسمى .....

(٢) عدد الأوساط الحسابية = عدد حدود المتتابعة .....

(٣) عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد أوساط هذه المتتابعة .....

تذكر أن

الوسط الحسابى لعدة كميات يساوى مجموع هذه الأعداد مقسومًا على عددها.

مثال

أوجد الوسط الحسابى للأعداد: ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٨ ، ٩

الوسط الحسابى

$= \frac{٤ + ٦ + ٧ + ٨ + ٨ + ٩}{٦}$

$= ٧$

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين:

Insert an infinite number of arithmetic means between two number

مثال

(٤) أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

أولًا: نوجد عدد حدود المتتابعة

نوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة لذا فإن عدد حدود المتتابعة الحسابية

ن = ٢ + ٥ = ٧

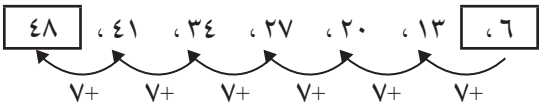
ثانيًا: نوجد قيمة ء: الحد النونى للمتتابعة الحسابية: $ع_ن = أ + (ن - ١)$ ء

بالتعويض عن: أ = ٦ ، $ع_ن$ = ٤٨ ، ن = ٧

٤٨ = ٦ + (٧ - ١) ء

أى أن: ٦ء = ٤٢ بقسمة الطرفين على ٦ ∴ ء = ٧

ثالثًا: نستخدم قيمة ء لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة



الأوساط المطلوبة هى: ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١

حاول أن تحل

(٥) أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٣ ، ٤٨

تمـــارين ١ - ٢

حدد أيا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها غير حسابية، ثم أوجد الأساس فى حال كونها حسابية:

(١) (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤)

(٢) (٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٤ ، ٣٨)

(٣) (س + ٢ص ، ٣س + ٣ص ، ٥س + ٤ص) حيث س ، ص كميتان موجبتان

اكتب الخمسة حدود الأولى للمتتابعة الحسابية فى كل من الحالات الآتية:

(٤) أ = ٢ ، ء = ٥

(٥) أ = ٧ ، ء = -٣

(٦) أ = -٤ ، ء = $\frac{١}{٤}$

أكمل ما يأتى:

(٧) الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو .....

(٨) الحد الحادى عشر من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٣ن - ٥ هو .....

(٩) الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ...) هو .....

(١٠) الحد النونى للمتتابعة الحسابية ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، ...) هو .....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...)

ب (-١١ ، -١٥ ، -١٩ ، -٢٣ ، ...)

ج ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ...)

د ($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ ، $\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$ ، ...)

(١٢) إذا كانت (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية حيث ع$_{ن}$ = ٣ ن + ٢ فإن الوسط الحسابى بين ع$_{٥}$ ، ع$_{١١}$ يساوى:

أ ٨ ب ١٦ ج ٢٢ د ٢٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٣) أوجد الحدين الثانى عشر والعشرون من المتتابعة الحسابية (٤ ، ٧ ، ١٠ ، ...)

(١٤) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، - ١٣٣)

(١٥) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة (٢ + ٥ن) ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من هذه المتتابعة .

(١٦) (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية فيها ع$_{١}$ = - ٥١ ، ع$_{٢٢}$ = - ١٥٦ ، أوجد أساس هذه المتتابعة.

(١٧) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع يساوى ١٨، وحدها السابع يساوى ٢٧

(١٨) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، ع$_{ن}$ = ٣٩ ، ع$_{٢ن}$ = ٧٩، ما قيمة ن ؟ أوجد المتتابعة.

(١٩) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر يساوى ثلاثة أمثال حدها الثانى

(٢٠) (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية فيها ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = ٩ ، ع$_{٥}$ = ٢٢. أوجد هذه المتتابعة

(٢١) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، والنسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

(٢٢) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، ومجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ ، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

(٢٣) إذا كانت ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمتى أ ، ب.

(٢٤) أدخل ١٦ وسطا حسابيا بين ٢٧ ، - ٢٤

١ - ٣ المتسلسلات الحسابية

Arithmetic Series

سوف تتعلم

- مفهوم متسلسلة حسابية
- إيجاد مجموع ن حدا من متتابعة حسابية بمعلومية حديها الأول والأخير .
- إيجاد مجموع ن حدا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة حسابية. *Arithmetic series*
- رمز التجميع

Summation notation (Σ)

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

مجموع المتسلسلة الحسابية: *The sum of arithmetic series*

كارل جاوس – عالم ألماني
١٧٧٧م – ١٨٥٥م

لقد أثار العالم الألماني كارل جاوس (Karl Gauss) دهشة معلمه، وهو فى سن السابعة من عمره عندما توصل إلى إيجاد ناتج جمع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ ذهنيًّا وبطريقة سريعة حيث لاحظ أن المجموع يساوى ناتج ٥٠ زوجًا من الأعداد التى ناتج كل منها ١٠١

أى يساوى: ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠

فهل يمكنك إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ٢٠ ذهنيًّا؟

تعريف

المتسلسلة الحسابية *Arithmetic series*

هى عملية جمع حدود المتتابعة الحسابية

فمثلا: مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١)

تكتب جـ$_{٥}$ = ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١

مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة حسابية

Sum of first n terms of an arithmetic series

أولًا: إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير

إذا كان لدينا متسلسلة حسابية حدها الأول أ ، أساسها ى، حدها الأخير ل وعدد حدودها ن فإن مجموع ن حدًا من هذه المتسلسلة يرمز له بالرمز جـ$_{ن}$ حيث:

جـ$_{ن}$ = أ + (أ + ى) + (أ + ٢ى) + ... + (ل - ى) + ل (١)

ويمكن التعبير عن هذا المجموع بصورة أخرى كالآتى:

جـ$_{ن}$ = ل + (ل - ى) + (ل - ٢ى) + ... + (أ + ى) + أ (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن:

٢جـ$_{ن}$ = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) إلى ن من المرات

أى أن ٢جـ$_{ن}$ = ن (أ + ل) **وبقسمة الطرفين على ٢**

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

مثال

١ استخدام رمز التجميع Σ : أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٤} (٤ر - ٣)$

الحل

حيث أن المقدار داخل رمز المجموع من الدرجة الأولى فهو يمثل متتابعة حسابية

$ن = ٢٤ - ٥ + ١ = ٢٠$ **نوجد عدد حدود المتتابعة**

$ع_ن = ٤ن - ٣$ **الحد النونى للمتتابعة**

$ع_٥ = ٤ \times ٥ - ٣ = ١٧$ ، $ع_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ - ٣ = ٩٣$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ **صيغة المجموع**

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (١٧ + ٩٣) = ١١٠٠$ **بالتعويض عن: أ = ١٧ ، ل = ٩٣ ، ن = ٢٠**

تذكر أن

$\sum_{ر=١}^{ن} ع_ر$

ن: الأخيرة — رمز التجميع Σ — $ع_ر$ — ر = ١: الأولى

$ع_ن$: قاعدة المتسلسلة

حاول أن تحل

١ أوجد:

أ $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$

ب $\sum_{م=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥م)$

مثال

٢ أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية $٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢$

الحل

$ل = أ + (ن - ١)ء$ **الحد النونى للمتتابعة**

$٦٢ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$ **بالتعويض عن أ = ٢، ء = ٣، ل = ٦٢**

أى أن: $٣ن - ٣ + ٢ = ٦٢$

$٣ن - ١ = ٦٢$ **فتكون ن = ٢١**

$حـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ **صيغة المجموع**

$جـ_{٢١} = \frac{٢١}{٢} (٢ + ٦٢) = ٦٧٢$ **بالتعويض عن أ = ٢، ن = ٢١، $ع_ن$ = ٦٢**

ثانيًا: إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

نعلم أن ل = أ + (ن - ١) ء ، جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

وبالتعويض من العلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن:

جـن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن - ١) ء]

أى أن: جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) ء]

مثال

(٣) فى المتسلسلة الحسابية ٥ + ٨ + ١١ + ... أوجد:

(أ) مجموع ٢٠ حدا الأولى منها.

(ب) مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

(جـ) مجموع حدود المتسلسلة بدءً من ع١٠ إلى ع٢٠.

الحل

أ = ٥ ، ء = ٨ - ٥ = ٣

(أ) جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) ء] — صيغة المجموع

جـ٢٠ = $\frac{٢٠}{٢}$ × [٢ × ٥ + (٢٠ - ١) × ٣] — بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٨ – ٥ = ٣

جـن = ١٠ (١٠ × ١٩ + ٣)

= ١٠ × ٦٧ = ٦٧٠ — بالتبسيط

(ب) عن = أ + (ن - ١) ء — الحد النونى للمتتابعة

ع٧ = أ + ٦ء

= ٥ + ٦ × ٣ = ٢٣ — بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٣ ، ن = ٧

جـ١٠ = $\frac{١٠}{٢}$ × [٢ ح٧ + (١٠ - ١) × ٣] — بالتعويض فى صيغة المجموع

جـ١٠ = ٥ × [٢ × ٢٣ + ٢٧]

= ٥ × ٧٣ = ٣٦٥ — بالتبسيط

(جـ) مجموع حدود المتسلسلة ابتداء من ع١٠ إلى ع٢٠.

عن = أ + (ن - ١) ء — الحد النونى للمتتابعة

ع١٠ = أ + ٩ء

= ٥ + ٩ × ٣ = ٣٢ — بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٣

ع٢٠ = أ + ١٩ ء = ٥ + ١٩ × ٣ = ٦٢

جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ١١ = $\frac{١١}{٢}$ (ع١٠ + ع٢٠) — صيغة المجموع (ن = ٢٠ – ١٠ + ١ = ١١)

= $\frac{١١}{٢}$ (٣٢ + ٦٢) = ٥١٧ — بالتعويض عن ع١٠ = ٣٢ ، ع٢٠ = ٦٢ ، ن = ١١

تكوين المتتابعة الحسابية *Constracting the arithmetic sequence*

مثال

(٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها: ع١ = ١١، عن = ٨٧، جـن = ٩٨٠

الحل

(أ) إيجاد قيمة ن

جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) — صيغة المجموع

٩٨٠ = $\frac{ن}{٢}$ (١١ + ٨٧) — بالتعويض عن ع١ = ١١، عن = ٨٧ ، جـن = ٩٨٠

٩٨ × $\frac{ن}{٢}$ = ٩٨٠ فيكون: ن = ٢٠ حدا — بالتبسيط ع٢٠ = ٨٧

(ب) إيجاد قيمة ء

عن = أ + (ن - ١) ء — الحد النونى

٨٧ = ١١ + ١٩ ء — بالتعويض عن ع١ = ١١، ن = ٢٠ ، عن = ٨٧

١٩ء = ٨٧ - ١١ = ٧٦ — بالتبسيط وبالقسمة على ١٩

∴ ء = ٤

(جـ) تكوين المتتابعة: ع٢ = ١١ + ٤ = ١٥ ، ع٣ = ١٥ + ٤ = ١٩

المتتابعة الحسابية هى (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ..... ، ٨٧)

حاول أن تحل

(٢) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها

(أ) ع١ = ٢٣ ، عن = ٨٦ ، جـن = ٥٤٥

(ب) ع١ = ١٧ ، عن = - ٩٥ ، جـن = - ٥٨٥

تمـــاريـن ١ - ٣

أكمل مايأتى:

(١) مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التى تبدأ بالعدد ١ وتنتهى بالعدد ٢٠ تساوى .....

(٢) مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى .....

(٣) مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى .....

(٤) مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى .....

(٥) مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٨ هو .....

(٦) $\sum_{ك=١}^{٥} (٢ك + ١)$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ١)$ يساوى:

أ ٢٥ ب ٣٠ جـ ٣٥ د ٢٤

(٨) صيغة المتسلسلة: ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن - ١ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ر - ١)$ ب $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر - ١)$ جـ $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر + ١)$ د $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ر + ١)$

(٩) صيغة المتسلسلة: ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ر + ٢)$ ب $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ر + ٣)$ جـ $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ر + ١)$ د $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ٤)$

أجب عن الأسئلة الآتية

(١٠) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ...)

(١١) أوجد مجموع الخمسة عشر حدًّا الأولى لمتتابعة حسابية حدها الأول ٤ وحدها الخامس عشر ٢٦.

(١٢) أوجد مجموع الأعداد الزوجية من ٢ إلى ٤٠.

(١٣) أوجد مجموع العشرين حدا الأولى للمتسلسلة الحسابية (٦ + ٤ + ٢ + ...).

(١٤) أوجد مجموع ٣٠ حدا الأولى من المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن$ = (٢ن + ٣).

(١٥) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

١٦ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها مساويًا ٤٥٦.

١٧ كم حدًّا يلزم أخذها من المتتابعة (-١٦ ، -١٤ ، -١٢ ، ...) ابتداء من الحد الأول؛ لكي يكون مجموعها صفرًا.

١٨ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤، ٢١ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليتلاشى المجموع.

١٩ ادخار: يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغًا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. أوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يومًا.

١ - ٤ المتتابعة الهندسية

Geometric sequence

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الهندسية
- الحد النونى للمتتابعة الهندسية.
- تعيين المتتابعة الهندسية .
- الأوساط الهندسية
- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين

المصطلحات الأساسية

- متتابعة هندسية
  Geometric Sequence
- حد نونى *nth Term*
- متتابعة تزايدية
  Increasing Sequence
- متتابعة تناقصية
  Decreasing Seqence
- متتابعة متناوبة الإشارة
  Alternating signal Sequence
- وسط هندسى *Geometrical Mean*

الأدوات المستخدمة

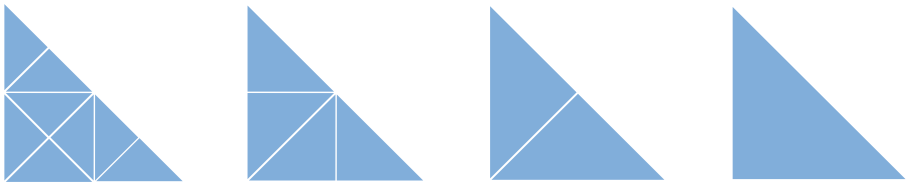
- آلة حاسبة علمية
  Scientific calculator
- برامج رسومية

نشاط

(١) ارسم على قطعة من الورق المقوى مثلثا متساوى الساقين وقائم الزاوية.

(٢) قص المثلث إلى مثلثين قائمى الزاوية وكل منهما متساوى الساقين .

(٣) كرر نفس العمل كما فى الشكل التالى وأوجد عدد المثلثات الناتجة فى كل مرة .



(٤) أجب عن الأسئلة الآتية :

أ هل عدد المثلثات الصغرى الناتجة فى الشكل تكون متتابعة حسابية؟ فسر إجابتك.

ب هل توجد علاقة ما تربط أعداد المتتابعة الناتجة ؟ وما هذه العلاقة .

جـ هل بإمكانك إيجاد عدد المثلثات الناتجة من تكرار نفس النمط السابق فى الشكلين الخامس والسادس؟

نستنتج من النشاط السابق أن :

المتتابعة الناتجة من الأشكال السابقة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) وهى ليست متتابعة حسابية لأن $ع_{ر+١} - ع_{ر} \neq$ مقدارا ثابتًا، ولكننا نلاحظ أنه إذا قسم أى حد من الحدود على الحد السابق له مباشرة يعطى مقدارًا ثابتًا (هو العدد ٢) وتسمى هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية .

تعريف

- تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية

إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = مقدار ثابت لكل $ن \in ص^+$ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر).

مثال

(١) بين أيًا من المتتابعات $(ع_ن)$ الآتية هندسية، وأوجد أساس كل منها :

أ $ع_ن = ٢ \times ٣^ن$ ب $ع_ن = ٤ ن^٢$

جـ المتتابعة $(ع_ن)$ حيث : $ع_١ = ١٢$ ، $ع_ن = \frac{١}{٤} \times ع_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$)

الحل

أ ∵ $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} = \frac{٢ \times ٣^{ن+١}}{٢ \times ٣^{ن}} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ (مقدار ثابت)

∴ المتتابعة هندسية وأساسها ر = ٣

ب ∵ $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} = \frac{٤(ن+١)^{٢}}{٤ن^{٢}}$ (ليس مقدارا ثابتًا) ∴ المتتابعة ليست هندسية

جـ ∵ $(ع_{ن}) = (\frac{١}{٤} \times ع_{ن-١})$ (حيث ن > ١)

∴ $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-١}} = \frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت) ∴ المتتابعة هندسية وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

١ بين أيًّا من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها فى حال كونها هندسية :

أ $(ع_{ن}) = (٣، ٦، ١٢، ٢٤، ٤٨، ٩٦)$

ب $(ع_{ن}) = (\frac{١}{٢٤٣}، \frac{١}{٨١}، \frac{١}{٢٧}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٣})$

جـ $(ع_{ن}) = (٥ \times ٢^{ن})$

د $(ع_{ن}) = (٣(ن+١)^{٢})$

إيجاد الحد النونى للمتتابعة الهندسية: Finding the n^{th} term of a geometrical sequence

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الهندسية $(ع_{ن})$ التى حدها الأول أ وأساسها ر كالآتى:

$ع_{١} = أ$ ، $ع_{٢} = أر$ ، $ع_{٣} = أر^{٢}$ ، $ع_{٤} = أر^{٣}$

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو : $ع_{ن} = أر^{ن-١}$

مثال

٢ فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، .....) أوجد:

أولًا: الحد الخامس . **ثانيًا:** رتبة الحد الذى قيمته ٥١٢.

الحل

∵ أ = ٢ ، $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $ع_{ن} = أ \times (٢)^{ن-١}$

∴ $ع_{٥} = أر^{٤} = ٢ \times ٢^{٤} = ١٦ \times ٢ = ٣٢$ أى أن قيمة الحد الخامس ٣٢

∵ $ع_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$ ∴ $٢ \times ٢^{ن-١} = ٥١٢$ وبقسمة الطرفين على ٢

∴ $٢^{ن-١} = ٢^{٨}$ ∴ ن − ١ = ٨ ∴ ن = ٩

أى أن الحد الذى قيمته ٥١٢ هو الحد التاسع

حاول أن تحل

٢ أثبت أن المتتابعة $(ع_{ن})$ حيث $ع_{ن} = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع.

تعيين المتتابعة الهندسية: *Identifying the geometrical sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول والأساس.

مثال

(٣) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية ، فإذا كان $ع_٤ = ٤٠$ ، $ع_٧ = ٣٢٠$ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

$\because ع_٤ = أ ر^{٣}$ $\therefore أ ر^{٣} = ٤٠$ ..... (١)

$\because ع_٧ = أ ر^{٦}$ $\therefore أ ر^{٦} = ٣٢٠$ ..... (٢)

وبقسمة طرفى المعادلتين (١) ، (٢)

$\therefore \frac{أ ر^{٦}}{أ ر^{٣}} = \frac{٣٢٠}{٤٠}$ (حيث $أ ر \neq ٠$) $\therefore ر^{٣} = ٨$

ومنها $ر = ٢$

وبالتعويض فى المعادلة (١)

$\therefore أ (٢)^{٣} = ٤٠$ أى أن : $٨ أ = ٤٠$

وبقسمة الطرفين على ٨ فإن $أ = ٥$ $\therefore$ المتتابعة هى (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، .....)

تعبير شفهى:

ماذا تتوقع إذا كانت قوة الأساس ر عددًا زوجيًّا؟ فسر إجابتك .

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة هندسية:

لكتابة المتتابعة الهندسية التى فيها $أ = ٥$ ، $ر = ٢$ مثلًا نتبع الآتى:

نكتب قيمة أ (العدد ٥) ثم نضغط المفتاح [=] ثم نضغط على المفتاح [×] ثم نضع قيمة ر (العدد ٢) ثم نضغط المفتاح [=] فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على المفتاح [=] تعطى الحدود التالية وهكذا....

حاول أن تحل

(٣) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ع_٣ = ١٢$ ، $ع_٨ = ٣٨٤$. أوجد هذه المتتابعة

(٤) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الثانى يساوى ٦ ، حدها العاشر يساوى ١٥٣٦ . أوجد المتتابعة.

مثال

الربط بالتعليم

(٤) إذا كان معدل زيادة طلاب الصف الثانى الثانوى فى إحدى الإدارات التعليمية هو ٤ ٪ سنويًّا من السنة السابقة لها مباشرة، فإذا كان عدد الطلاب حاليًا ٢٤٠٠ طالب، فكم سيكون عددهم بعد ٦ سنوات؟

الحل

∵ عدد الطلاب حاليًا = ٢٤٠٠

∴ عدد الطلاب فى السنة الثانية = ٢٤٠٠ + ٢٤٠٠ × ٤ ٪

= ٢٤٠٠ (١ + ٠,٠٤)

= ٢٤٠٠ (١,٠٤)

عدد الطلاب فى السنة الثالثة = ٢٤٠٠ (١,٠٤) + ٢٤٠٠(١,٠٤) × ٠,٠٤

= ٢٤٠٠ (١,٠٤) (١ + ٠,٠٤) = ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} وهكذا ...

أى أن أعداد الطلاب تُكون متتابعة هندسية (٢٤٠٠ ، ٢٤٠٠(١,٠٤) ، ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} ، ...)

أ = ٢٤٠٠ ، ر = ١,٠٤ ، ن = ٦

وبالتعويض فى قانون الحد النونى للمتتابعة الهندسية ع$_{ن}$ = أ × ر$^{ن-١}$

ع$_{ن}$ = (٢٤٠٠) × (١,٠٤)^{٥} = ٢٩١٩,٩٦٦٩٦٦

أى أن عدد الطلاب بعد ٦ سنوات يساوى تقريبا ٢٩٢٠ طالبًا .

تذكر ١ ن

٤ ٪ = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤

أضف إلى معلوماتك

يعرف الوسط الهندسى فى الإحصاء لمجموعة من القيم الحقيقية الموجبة ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$ ، ..... ، ع$_{ن}$ بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم أى أن :

الوسط الهندسى (GM) = $\sqrt[ن]{ع_{١} ع_{٢} ع_{٣} .... ع_{ن}}$

الأوساط الهندسية : Geometric Means

الأوساط الهندسية كما فى الأوساط الحسابية هى الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين فى متتابعة هندسية و يستخدم أساس المتتابعة الهندسية؛ لإيجاد هذه الأوساط.

تعريف ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين أ ، جـ حيث : $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ أى أنه ب^{٢} = أ جـ

فتكون ب = $\pm \sqrt{أ جـ}$

إيجاد الأوساط الهندسية :

مثال

(٥) أدخل ٥ أوساط هندسية بين ٤ ، ٢٩١٦

الحل

أولًا : نوجد عدد حدود المتتابعة

يوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة الهندسية؛ لذا فإن عدد حدود المتتابعة

ن = ٢ + ٥ = ٧

ثانيًا : نوجد قيمة ر

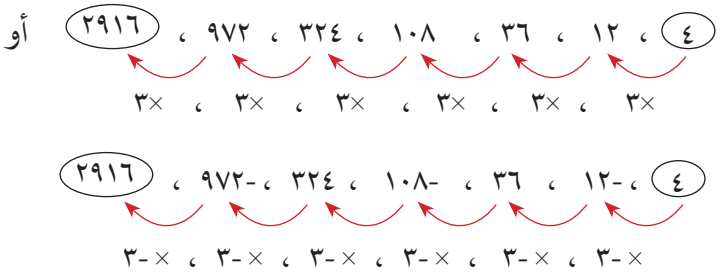
الحد النونى للمتتابعة الحسابية : ع$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$

بالتعويض عن : أ = ٤ ، ع$_{ن}$ = ٢٩١٦ ، ن = ٧

٢٩١٦ = ٤ × ر$^{٧-١}$ أى أن : ٤ × ر^{٦} = ٢٩١٦

بقسمة الطرفين على ٤ : ر^{٦} = ٧٢٩ أى أن : ر^{٦} = (٣ ±)^{٦} ومنها ر = ٣ ±

ثالثًا : نستخدم قيمة ر لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة:



الأوساط المطلوبة هى: ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢ أو - ١٢ ، ٣٦ ، - ١٠٨ ، ٣٢٤ ، - ٩٧٢

تفكير ناقد :

ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين حقيقيين موجبين متساويين؟

مثال

(١) إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين، وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠، ومجموع الوسطين الثانى، والثالث يساوى ٦٠ فما هما العددان.

الحل

∵ عدد الأوساط = ٤ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦

∴ وبفرض أن العدد الأول = أ فيكون الوسطين الأول والرابع هما $ع_٢$ ، $ع_٥$

∴ $ع_٢ + ع_٥ = ٩٠$ ∴ $أ ر + أ ر^٤ = ٩٠$

∴ $أ ر (١ + ر^٣) = ٩٠$ (١)

∵ الوسطين الثانى والثالث هما $ع_٣$، $ع_٤$

∴ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٦٠$ ∴ $أ ر^٢ (١ + ر) = ٦٠$ (٢)

بقسمة (١) ، (٢) $\frac{أ ر (١ + ر)(أ - ر + ر^٢)}{أ ر^٢ (١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ ر^٢ - ٢ ر + ٢ = ٣ ر$ ∴ $٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$ ∴ $(ر - ٢)(٢ ر - ١) = ٠$

∴ $ر = ٢$ أ، $ر = \frac{١}{٢}$

بالتعويض عن $ر = ٢$ ∴ أ = ٥

وبالتعويض عن $ر = \frac{١}{٢}$ ∴ أ = ١٦٠ العددان هما ١٦٠ ، ٥

تمـارين ا – ٤

حدد المتتابعات الهندسية فيما يلى، ثم أوجد أساسها فى حال كونها هندسية:

(١) (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، .....)

(٢) (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....)

(٣) ($\frac{١}{١٢٨}$ ، $\frac{١}{٦٤}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ...)

(٤) (- ١ ، ٣ ، - ٩ ، ٢٧ ، .....)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية إذا علم أن :

(٥) أ = ٢ ، ر = ٤

(٦) أ = -٤ ، ر = ٢

(٧) أ = ١ ، ر = $\frac{-١}{٢}$

(٨) أ = -١٢٨ ، ر = $\frac{-١}{٢}$

أكمل ما يأتى

(٩) الحد السابع من المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....) يساوى .....

(١٠) الحد السادس من المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، .....) هو .....

(١١) الحد الخامس من المتتابعة (ع$_ن$) حيث ع$_ن$ = ٢ × (٣)$^{ن-١}$ يساوى .....

(١٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، - ٦ ، ١٢ ، .....) هو .....

(١٣) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو .....

(١٤) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص تساوى .....

(١٥) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٦) الحد الخامس فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، .....) هو :

أ) $\frac{٢٧}{٨}$ ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ جـ) $\frac{٩}{٤}$ د) $\frac{٨١}{٣٢}$

(١٧) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة :

أ) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، .....)

ب) (-٢ ، ٤ ، ١٠ ، ١٦ ، .....)

جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

د) (١٠٠ ، ٥٠ ، ٢٥ ، $\frac{٢٥}{٢}$ ، .....)

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٨) إذا كانت (ع$_ن$) متتابعة حيث ع$_ن$ = ٥ × ٢^ن . أثبت أنها متتابعة هندسية، ثم اكتب حدودها الثلاثة الأولى.

(١٩) فى المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $-\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، -١ ، .....) أوجـد :

أ) حدها العاشر

ب) رتبة الحد الذى قيمته = - ١٠٢٤ .

(٢٠) بين أن المتتابعة (ع$_ن$) هندسية حيث ع$_ن$ = $\frac{٣}{٨}$ (٢)^ن ثم أوجد حدها الثامن ، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨.

(٢١) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤ . أوجد هذه المتتابعة.

٢٢ متتابعة هندسية حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨ . أوجد هذه المتتابعة.

٢٣ أوجد المتتابعة الهندسية (ع$_{ن}$) التى فيها ع$_{٣}$ = ١٢ ، ع$_{٨}$ = ٣٨٤.

٢٤ أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثالث = ١٨ ، حدها السادس = ٤٨٦

٢٥ أوجد المتتابعة الهندسية (ع$_{ن}$) التى فيها ع$_{٢}$ = ١٠ ، ع$_{٦}$ = ١٦٠ .

٢٦ أوجد الوسط الهندسى بين ١٦ ، ٤٩

١ - ٥ المتسلسلات الهندسية

Geometric Series

سبق أن تعلمت أن المتسلسلة هى مجموع حدود متتابعة، وتعلمت كيفية إيجاد مجموعة المتسلسلة الحسابية ، والآن هل يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية التالية:
٩٥ + ٢٨٥ + ٨٥٥ + ... ١٨٦٩٨٨٥ لاحظ أنه من الصعوبة إيجاد مثل هذا المجموع بالطريقة التقليدية ، لذلك هناك حاجة إلى صيغة قانون لإيجاده بصورة سهلة وسريعة، وهذا ما سوف نتعرف عليه الآن.

مجموع المتسلسلة الهندسية : The sum of geometric series

المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية وضع بينها إشارة الجمع (+) ويرمز لمجموع حدًّا منها بالرمز جـ.

مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية

Sum of first n terms of an geometric sequence

أولًا : إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-١}$ متسلسلة هندسية حدها الأول أ ، أساسها ر فإنه يمكن إيجاد المجموع جـ$_{ن}$ لهذه المتسلسلة كما يلى :

جـ$_{ن}$ = أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-٢}$ + أر$^{ن-١}$ .... (١)

وبضرب الطرفين فى ر فإن :

رجـ$_{ن}$ = أر + أر^{٢} + أر^{٣} + ...+ أر$^{ن-١}$ + أر^{ن} .... (٢)

وبطرح المعادلتين يكون :

جـ$_{ن}$ - رجـ$_{ن}$ = أ - أر^{ن} أى أن :

جـ$_{ن}$ (١- ر) = أ(١- ر^{ن})

وبقسمة الطرفين على (١- ر) بشرط أن ١- ر ≠ ٠

$$جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} ، ر ≠ ١$$

مثال

(١) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التى فيها : أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

سوف تتعلم

- مجموع المتسلسلة الهندسية .
- استخدام رمز التجميع.
- المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى عدد نسبى.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة هندسية *Geometric Series*
- متسلسلة هندسية غير منتهية *Infinite Geometric Series*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*

الحل

مجموع المتتابعة الهندسية : جـن = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

جـ٨ = $\frac{٣(١ - ٢^{٨})}{٢ - ١}$ وبالتبسيط جـ٨ = ٣ × ٢٥٥ = ٧٦٥

ثانياً : إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن : جـن = $\frac{أ - أ ر^{ن}}{١ - ر}$ ..... (١)

وأن : ل = أ $ر^{ن-١}$ وبضرب الطرفين فى ر فتكون ل ر = أ $ر^{ن}$ ..... (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) فإن : جـن = $\frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية: ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

الحل

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية : جـن = $\frac{أ - ل ر}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ١ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

جـ = $\frac{١ - ٦٥٦١ \times ٣}{٣ - ١}$ وبالتبسيط جـ = $\frac{١٩٦٨٢}{٢}$ = ٩٨٤١

استخدام رمز التجميع

مثال

(٣) أوجد : $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣(٢)^{ر-١}$

الحل:

حيث أن المقدار داخل رمز المجموع على الصورة الأسية فهو يمثل متتابعة هندسية

$ع_{٥} = أ = ٣(٢)^{٥-١} = ٤٨$ ، ر = ٢ ، ن = ١٢ – ٥ + ١ = ٨

مجموع المتسلسلة الهندسية : جـن = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن : أ = ٤٨ ، ر = ٢ ، ن = ٨

جـ٨ = $\frac{٤٨(١ - ٢^{٨})}{٢ - ١}$ وبالتبسيط جـ٨ = ٤٨ × ٢٥٥ = ١٢٢٤٠

مثال **تكوين المتتابعة الهندسية:** *Forming the geometric sequence*

(٤) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤.

الحل

∵ أ = ٢٤٣ ، ل = ١ ، جـن = ٣٦٤ ، جـن = $\frac{أ - ل ر}{١ - ر}$

$\therefore \frac{ر - ٢٤٣}{ر - ١} = ٣٦٤$ $\therefore ر - ٢٤٣ = ٣٦٤ (ر - ١)$

$\therefore ٣٦٤ - ٣٦٤ ر = ر - ٢٤٣$ $\therefore ٣٦٤ ر - ر = ٣٦٤ - ٢٤٣$

$\therefore ٣٦٣ ر = ١٢١$ وبقسمة الطرفين على ٣٦٣ $\therefore ر = \frac{١}{٣}$

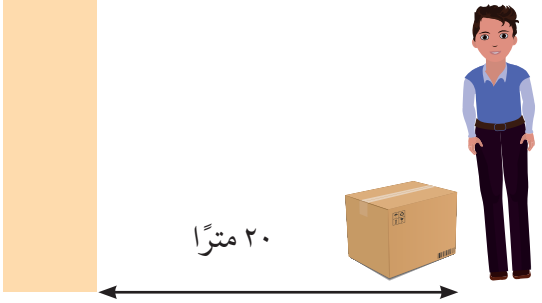
المتتابعة الهندسية هى (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، .....)

حاول أن تحل

(١) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ٢٤٣ وحدها الأخير ١، مجموع حدودها ٣٦٤ .

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية Infinite geometric series

فكر و ناقش



أراد زياد نقل صندوق فى اتجاه حائط يبعد عنه مسافة ٢٠ متر على عدة مراحل بحيث تبلغ المسافة التى ينقل اليها الصندوق تساوى نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة فهل يستطيع زياد أن يصل إلى الحائط؟

يمكنك الإجابة على ذلك من خلال دراستك المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

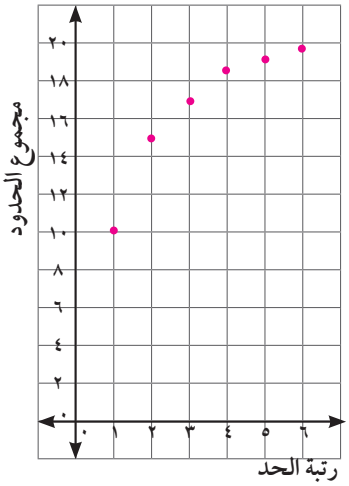
تعريف ٢

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لانهائى من الحدود ، و إذا كان مجموعها عددًا حقيقيًّا فإنها تكون متقاربة؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقى، أما إن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة.

فى بند فكر وناقش مجموع المسافات التى يقطعها زياد تعطى بالمتسلسلة:

١٠ + ٥ + ٢,٥ + ١,٢٥ + ... وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من ٢٠ مترًا، وهو المجموع الفعلي لها، وبالتالى يمكن اعتبار أن زياد يصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية، والشكل الموضح يبين التمثيل البيانى للمجموع حـ$_ن$ لذلك فإن المتسلسلة التقاربية يقترب المجموع من عدد حقيقى حيث $|ر| < ١$

وتكون غير تقاربية إذا لم يقترب المجموع من عدد حقيقى حيث $|ر| \geq ١$



مثال

المتسلسلات التقاربية وغير التقاربية

(٥) أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها ؟ فسر إجابتك.

(أ) ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...

(ب) ٢٤ + ٣٦ + ٥٤ + ...

الحل

(أ) نوجد أساس المتسلسلة الهندسية $ر = \frac{٤٥}{٧٥} = \frac{٣}{٥}$ فالمتسلسلة يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها
لأن : $-١ < \frac{٣}{٥} < ١$

(ب) نوجد أساس المتسلسلة الهندسية $ر = \frac{٣٦}{٢٤} = \frac{٣}{٢}$ فالمتسلسلة لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها
لأن : $\frac{٣}{٢} > ١$

مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

The sum of the infinite geometric series

علمنا أن مجموع ن حدا من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$
وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن $ر^ن$ يقترب من الصفر عندما تكون $-١ < ر < ١$

ويصبح المجموع : $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

مثال

(٦) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد :

(أ) $\frac{٨١}{٨} + \frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} + ...$ (ب) $\frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٦} + \frac{٢٥}{٢٤} + ...$

الحل

(أ) نوجد أساس المتتابعة الهندسية : $ر = \frac{٢٧}{٤} \div \frac{٨١}{٨} = \frac{٢٧}{٤} \times \frac{٨}{٨١} = \frac{٢}{٣}$

$\because -١ < \frac{٢}{٣} < ١$ $\therefore$ يوجد للمتسلسلة مجموع

$\because أ = \frac{٨١}{٨}$ ، $ر = \frac{٢}{٣}$ وبالتعويض فى صيغة المجموع $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

$\therefore جـ_\infty = \frac{\frac{٨١}{٨}}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٨١}{٨}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٤٣}{٨}$

(ب) نوجد أساس المتتابعة الهندسية : $ر = \frac{٥}{٦} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٦} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٤}$

$\because \frac{٥}{٤} > ١$ $\therefore$ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع

حاول أن تحل

(٢) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد :

(أ) $١٢ - ٢٤ + ٤٨ - ٩٦ + ...$ (ب) $\frac{٧}{٥} + \frac{٢١}{١٠} + \frac{٦٣}{٢٠} + ...$

مثال

استخدام رمز التجميع

Use the summation notation

(٧) أوجد $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤٢(\frac{٦}{٧})^{ر-١}$

الحل

مجموع المتتابعة الهندسية : $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

بالتعويض عن : $أ = ٤٢$ ، $ر = \frac{٦}{٧}$: $جـ_\infty = \frac{٤٢}{١ - \frac{٦}{٧}} = ٢٩٤$

تمـارين ١ – ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ١ ، ر = ٢ يساوى :

أ) ٣٢ ب) ٣١ ج) ٣٠ د) ٢٩

(٢) مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة (٤ ، ٢ ، ١ ، .....) هو :

أ) ٨ ب) ١٢ ج) ١٦ د) ٢٠

(٣) إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٤}$ هو ٤ فإن حدها الأول يساوى :

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

(٤) إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى :

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{٧}{٨}$ د) $\frac{٣}{٤}$

(٥) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى :

أ) ٠,٥ ب) ٠,٣٣٣ ج) ٠,٢٥ د) ٠,٦٦٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

أ) (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ..... إلى ٦ حدود)

ب) (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، ..... إلى ٦ حدود)

ج) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ..... ، ٧٦٨)

(٧) أى من المتتابعات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن :

أ) (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...) ب) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...)

ج) ($\frac{١}{٣٢}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ ...) د) ($٢ \times ٥^{-١-ن}$)

(٨) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

أ) (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، .....) ب) ($\frac{٨١}{١٦}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{٤}$ .....)

ج) (٢ ، $\sqrt{٢}$ ، ١ ، .....) د) ($\frac{٢٧}{٤}$ ، $\frac{٢٧}{١٦}$ ، $\frac{٢٧}{٦٤}$ .....)

هـ) ($ع_{ن} = ٣^{٣-ن}$) و) ($ع_{ن} = (\frac{٢}{٣})^{ن-١}$)

(٩) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤

(١٠) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣

(١١) أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية (ع$_{ن}$) = (٣$^{ن-١}$) ابتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر.

(١٢) فى المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ....) أوجد أقل عدد من الحدود التى يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود أكبر من ١٠٠٠

(١٣) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع عدد غير منته من حدودها يساوى ٤٨ ،حدها الثانى يساوى ١٢.

(١٤) كم حدا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١.

(١٥) أثبت أن المتتابعة (ع$_{ن}$) = (١٠ × ٢$^{ن-٢}$) هى متتابعة هندسية وأوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ٢٥٥٥ .

(١٦) (ع$_{ن}$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها ع$_{٢}$ = ٦ ، ع$_{٣}$ - ع$_{١}$ = ٩ . أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حداً الأولى منها .

(١٧) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها = ٤٥ ، حدها السادس يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٩٠ . أوجد هذه المتتابعة .

(١٨) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منتهية = ١٨ ،الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$. فما مجموعها؟

(١٩) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، مجموع عدد لانهائى من حدودها = ٢٥

(٢٠) متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة .

(٢١) متتابعة هندسية غير منتهية ، وأى حد فيها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، إذا كان حدها الرابع = ٣ . أوجد هذه المتتابعة.

(٢٢) **الربط بالدخل :** بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٠,٦ ٪ من مرتب السنة السابقة . احسب مرتبه فى السنة السابعة، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى .

(٢٣) **الربط بالدخل :** بدأ موظف براتب سنوى ٣٦٠٠ جنيه ويتزايد هذا المرتب كل سنة بمعدل $\frac{١}{٢٠}$ عما كان عليه فى السنة السابقة ، فكم يصبح مرتبه بعد ١١ سنة ، وما مجموع المبالغ التى يتقاضاها خلال هذه المدة ؟

(٢٤) **الربط بالادخار:** استطاع كريم أن يوفر ١٥٠ جنيهًا فى السنة عندما كان عمره ٦ سنوات ، وكان فى كل سنة تالية يوفر ضعف ما يوفره فى السنة السابقة فإذا كان عمر كريم الآن ١٠ سنوات، وأراد شراء حاسب آلى بمبلغ ٥٠٠٠ جنيه، فهل مجموع ما وفره كريم خلال هذه المدة يكفى لشراء الحاسب ؟ فسر إجابتك .

تمـــارين عامة على الوحدة الأولى

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) تكتب المتسلسلة الحسابية: ٣ + ٧ + ١١ ..... + ٣٥ باستخدام رمز المجموع كالآتى:

أ $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٤ر - ١) ب $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٢ر - ١) جـ $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٣ر - ٤) د $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٣ر - ٤)

(٢) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨}$ (٢ر + ١) يساوى:

أ ٦٤ ب ٧٢ جـ ٧٦ د ٨٠

(٣) متتابعة هندسية مجموع ن حدًّا الأولى منها يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = ٣ (٣^{ن} - ١) فإن الحد الثالث منها يساوى:

أ ٢٤ ب ٣٦ جـ ٤٨ د ٥٤

(٤) بين أيًّا من المتتابعات (ع$_{ن}$) تزايدية وأيها تناقصية، وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى:

أ (ع$_{ن}$) = (٣ - ٢ن) ب (ع$_{ن}$) = (٢) ($\frac{٣}{٢}$)$^{ن-١}$ جـ ((-١)^{ن} (ن + ١))

(٥) حدد أيًّا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها هندسية ثم أوجد الأساس لكل منها.

أ (٢١ ، ١٤ ، ٧ ، ...) ب (-٧ ، -١٢ ، -١٧ ، ...) جـ (-٣ ، ١٢ ، -٤٨ ، ...)

د ($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...) هـ ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، ...) و ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ...)

(٦) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) أوجد:

أ قيمة حدها الثامن. ب رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢

(٧) (ع$_{ن}$) متتابعة حسابية فيها ع$_{٦}$ = ١٦ ، ع$_{٢٠}$ = - ٢٦. أوجد هذه المتتابعة.

(٨) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة.

(٩) إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة.

(١٠) متتابعة هندسية حدها الأول = ٧، حدها الخامس = ١١٢. أوجد هذه المتتابعة.

(١١) إذا كانت ٤، ب، جـ فى تتابع حسابى، وكانت ٢، ب + ٣ ، ٥ جـ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة كل من ب، جـ

(١٢) إذا كانت $\frac{١}{٢}$ ا ، ب ، جـ كميات موجبة فى تتابع هندسى فأثبت أن ٤ب < ا + ٢جـ

(١٣) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٨١ , حدها السادس يساوى $\frac{١}{٣}$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الثالث.

الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق
Permutations, combinations

مقدمة الوحدة

العد من المهارات الأساسية فى الرياضيات ، فكثيرًا ما تواجهنا مسائل نحتاج فى حلها إلى إجراء عمليات عد بطرق مختلفة ، ومن خلال هذه الوحدة سوف نتعرف على إستراتيجيات مختلفة للعد، ومنها مبدأ العد الأساسى، ومن أهم تطبيقاته:

التباديل التى تستخدم فى معرفة عدد الطرق التى يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة.

التوافيق: وهى الاختيار دون مراعاة الترتيب.

ولقد كان للعلماء العظام عمر الخيام وإسحاق نيوتن، وبسكال الدور الأكبر فى هذا المجال الذى مازال ساريًا حتى اليوم.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق والعلاقة بينها.
- يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*
- مبدأ العد المشروط *Conditional Principle of Counting*
- عملية *Operation*
- شجرة بيانية *Tree Diagram*
- مضروب *Factorial*
- تباديل *Permutations*
- توافيق *Combinations*
- عناصر *Elements*
- ترتيب *Order*
- لجنة *Committee*
- مجموعة جزئية *Subset*

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية *Scientific Calculator*
- برامج رسومية للحاسوب *Graphical Computer Programs*

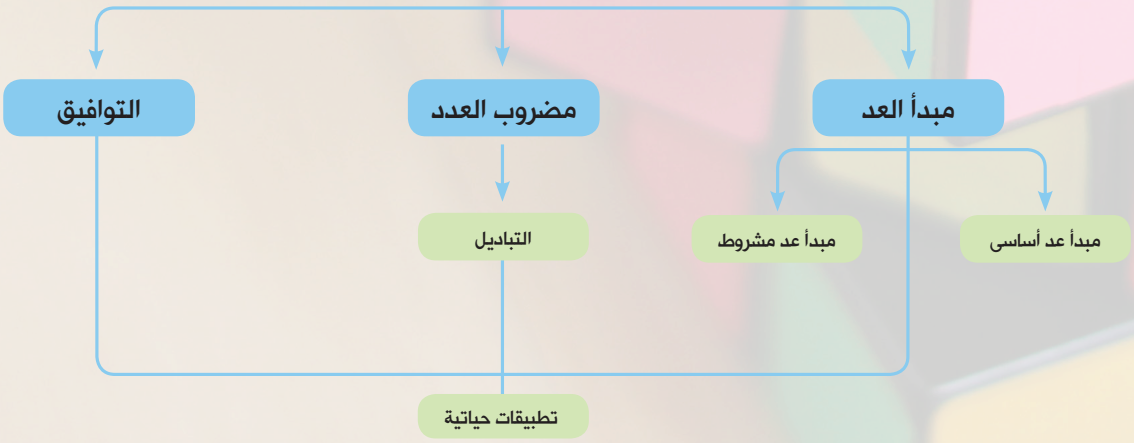
دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): مبدأ العد .

الدرس (٢ - ٢): مضروب العدد - التباديل.

الدرس (٢ - ٣): التوافيق.

مخطط تنظيمى للوحدة



٢ - ١ مبدأ العد

Fundamental Principle of Counting

سوف تتعلم

- مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- مبدأ العد الأساسى.
- مبدأ العد المشروط.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى
  Fundamental Counting Principle
- عملية Operation
- شجرة بيانية Tree Diagram

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
  Scientific Calculator
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

فكر و ناقش

إذا طلب منك ارتداء قميص و بنطلون من بين ٢ قميص و٣ بنطلون.
فكم عدد طرق الاختيار؟

مثال

(١) كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (أشرف - محمد - حسن) وطالبة من بين طالبتين (سمر - منى).

الحل

فى هذا المثال نجد من السهل معرفة عدد طرق الاختيار فمثلًا يمكننا اختيار أشرف ، سمر أو أشرف ، منى أو محمد ، منى أو حسن ، سمر... إلخ وسوف نعبر عن ذلك بالمخطط البيانى التالى، و يسمى بمخطط الشجرة البيانية.

الطلاب	الطالبات	الاختيار
أشرف	سمر	أشرف ، سمر
	منى	أشرف ، منى
محمد	سمر	محمد ، سمر
	منى	محمد ، منى
حسن	سمر	حسن ، سمر
	منى	حسن ، منى

عدد طرق اختيار طالب من ثلاثة طلاب = ٣ طرق
عدد طرق اختيار طالبة من طالبتان = ٢ طريقة
∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

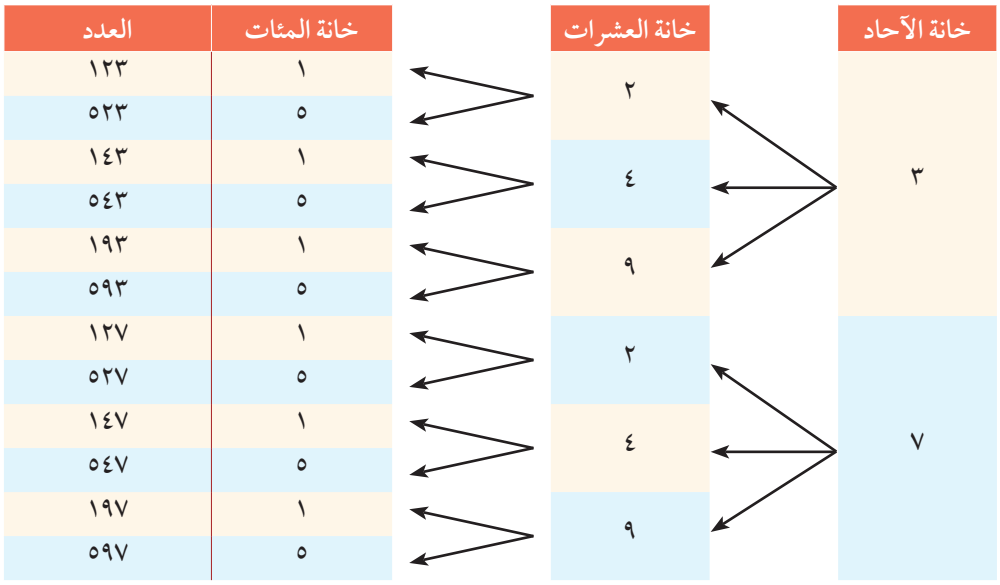
حاول أن تحل

(١) فى بند فكر وناقش كم عدد طرق الاختيار الممكنة؟

مثال

(٢) كم عدد مكون من ثلاثة أرقام، بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢، ٤، ٩} ورقم المئات من العناصر {١، ٥}؟

الحل



خانة الآحاد	خانة العشرات	خانة المئات	العدد
٣	٢	١	١٢٣
		٥	٥٢٣
	٤	١	١٤٣
		٥	٥٤٣
	٩	١	١٩٣
		٥	٥٩٣
٧	٢	١	١٢٧
		٥	٥٢٧
	٤	١	١٤٧
		٥	٥٤٧
	٩	١	١٩٧
		٥	٥٩٧

من الشجرة البيانية نجد أن:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد × عدد طرق اختيار رقم العشرات × عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة

الأمثلة السابقة توضح التعريف الآتى:

تعلم

مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*

تعريف: إذا كان عدد طرق إجراء عمل مايساوى $م_1$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_2$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_3$ طريقة وهكذا.... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times ... \times م_ن$

مثال

(٣) كم عدد الاختيارات التى يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروبًا واحدًا من المشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو).

الحل

عدد طرق اختيار الوجبة = ٣ طرق ، عدد طرق اختيار المشروب = ٣ طرق

عدد طرق الاختيار = ٣ × ٣ = ٩ طرق.

حاول أن تحل

(٢) مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطات ، ٣ أنواع من المشروبات. كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميًّا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلاطات والمشروبات؟

مثال

(مبدأ عد مشروط) *Conditional Principle of Counting*

(٤) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

الحل

نبدأ بخانة المئات المشروطة (لايمكن استخدام الصفر جهة اليسار)

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٣

∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٤

حاول أن تحل

(٣) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧}، بحيث يكون رقم العشرات زوجيًّا.

تمـارين ٢ - ١

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى:

أ) ١ ب) ٤ + ٤ ج) ٤ × ٤ د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام { ٥، ٣، ٠، ٢} يساوى:

أ) ٣ × ٢ ب) ٤ × ٢ ج) ٣ × ٣ د) ٤ × ٣

(٣) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣، ٦، ٨} تساوى:

أ) ٨ × ٦ × ٣ ب) ٤ × ٣ × ٣ ج) ٤ × ٣ × ٢ د) ٢ × ٣ × ١

أجب عن ما يأتي:

(٤) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر { ٢، ٣، ٥}

(٥) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر { ٢، ٣، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد ٦؟

(٦) تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها؟ بفرض أنه لايوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص.

(٧) كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٢، ٥، ٨، ٩} بحيث تكون أصغر من ٩٠٠؟

(٨) إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى احدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار ، أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.

٢ - ٢ مضروب العدد - التباديل

Factorial of a Number - Permutations

سوف تتعلم

- مضروب العدد
- التباديل

المصطلحات الأساسية

- مضروب العدد
  Factorial of a Number
- التباديل
  Permutatuins
- التباديل الجزئية
  Sub−Permutatuins

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

فكر و ناقش

استعن بما درسته فى الدرس السابق للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) كم تكون عدد طرق جلوس أربعة طلاب علي ثلاثة مقاعد فى صف؟

٢) كم عدد طرق وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام سباحة استعدادًا للقفز؟

تعلم

تعريف ١

المضروب: مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة $\lfloor ن$ ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث:

$\lfloor ن = ن (ن - ١) (ن - ٢) ... ٣ \times ٢ \times ١$

لاحظ أن:

- عندما ن = ٠ فإن $\lfloor ٠ = ١$ ، عندما ن = ١ فإن $\lfloor ١ = ١$
- $\lfloor ٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤ \lfloor ٣$ ،
  $\lfloor ٦ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٦ \lfloor ٥$

وبوجه عام فإن: $\lfloor ن = ن \lfloor ن - ١$ حيث ن $\in$ صـ$^+$

مثال

١ **أ** أوجد $\frac{\lfloor ١٠}{\lfloor ٨}$ **ب** إذا كان $\lfloor ن = ١٢٠$ فما قيمة ن

الحل

أ $\frac{\lfloor ١٠}{\lfloor ٨} = \frac{\lfloor ٨ \times ٩ \times ١٠}{\lfloor ٨} = ١٠ \times ٩ = ٩٠$

ب $\lfloor ن = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ $\lfloor ن = \lfloor ٥$ لذلك فإن ن = ٥

حاول أن تحل

١ أوجد: **أ** $\frac{\lfloor ١٥}{\lfloor ١٢}$ **ب** $\frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٥} + \frac{\lfloor ٩}{\lfloor ٧}$

مثال

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة:- $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ٢} = ٣٠$

الحل

$\because \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-٢}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\text{ل}_{\text{ن}-٢}}{\text{ل}_{\text{ن}-٢}} = ٣٠$ $\therefore$ ن (ن - ١) = ٦ × ٥ $\therefore$ ن = ٦

حاول أن تحل

(٢) إذا كان: $\frac{١}{\text{ل}_{\text{ن}}} + \frac{٢}{\text{ل}_{\text{ن}+١}} = \frac{٥٦}{\text{ل}_{\text{ن}+٢}}$ فأوجد قيمة ن

تفكير ناقد: إذا كان: $\text{ل}_{\text{أ}} = \text{ل}_{\text{ن}}$ فما قيمة أ؟

التباديل *Permutations*

مثال تمهيدى: من مجموعة الأرقام {٢، ٣، ٥} كم عدد الأعداد التى يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة منها؟

الأعداد هى: ٣٥٢ ، ٥٢٣ ، ٢٥٣ ، ٣٢٥ ، ٥٣٢ يسمى كل عدد من هذه الأعداد تبديله للأرقام.

وعددها = ٣ × ٢ × ١ **وتكتب** $\text{ل}_{٣}^{٣}$ **وتقرأ** (٣ لام ٣).

والجدول التالى يوضح ذلك:

الآحاد	العشرات	المئات
١	٢	٣

لذلك فإن التبديله لعدد من الأشياء هى وضعها فى ترتيب معين.

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}}$ حيث:

$\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+١)$ حيث ر $\leqslant$ ن ، ر $\in$ ط ، ن $\in$ صـ$^{+}$

$\text{ل}_{٠}^{\text{ن}} = ١$

فمثلا:

$\text{ل}_{٣}^{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ = \frac{١ \times ٢ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣} \times ٤ \times ٥ \times ٦ = \frac{\text{ل}_{٦}}{\text{ل}_{٦-٣}}$

$\text{ل}_{٣}^{٦} = \frac{\text{ل}_{٦}}{\text{ل}_{٦-٣}}$

$\text{ل}_{٥}^{٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \frac{١ \times ٢}{١ \times ٢} = \frac{\text{ل}_{٧}}{\text{ل}_{٧-٥}}$

نستنتج مما سبق أن:

$\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-\text{ر}}}$ حيث ر $\in$ ط ، ن $\in$ صـ$^{+}$ ، ر $\leqslant$ ن

استخدام الحاسبة

يرمز للتباديل بالحاسبة العلمية بالرمز $^{n}P_{r}$ ونستخدم فيها المفاتيح Shift

لحساب قيمة $\text{ل}_{٣}^{٥}$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح

5 Shift 2 =

الجواب = ٢٠

مثال

(٣) أوجد قيمة كل من:

(أ) $\text{ل}_{٤}^{٧}$ (ب) $\text{ل}_{٤}^{٤}$ (ج) $\text{ل}_{٣}^{٤}$

الحل

أ $ل_{٤}^{٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$ ب $ل_{٤}^{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

ج $ل_{٣}^{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ ماذا تلاحظ من العبارتين ب ، جـ؟

حاول أن تحل

(٣) احسب قيمة كل من: أ $ل_{٣}^{٥} + ل_{٣}^{٦}$ ب $\frac{ل_{٥}^{٥}}{ل_{٤}^{٥}}$

مثال

(٤) أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد.

الحل

لدينا ٧ مقاعد يراد اختيار خمسة منها فى كل مرة

∴ عدد الطرق $= ل_{٥}^{٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٢٥٢٠$

استخدام الآلة الحاسبة: 7 SHIFT × $(^{n}p_{r})$ 5 =

حاول أن تحل

(٤) كم يبلغ عدد الكلمات التى يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية.

مثال

(٥) إذا كان $ل_{ر}^{٧} = ٨٤٠$ فأوجد قيمة $\lfloor ر - ٤$

الحل

نبدأ بقسمة العدد ٨٤٠ على ٧ ثم بقسمة ناتج القسمة على ٦ ثم نقسم ناتج القسمة على ٥ وهكذا حتى نصل إلى العدد ١

٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٤	٤
١	

∴ العدد $٨٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ل_{٤}^{٧}$

∴ $ل_{ر}^{٧} = ل_{٤}^{٧}$ ∴ ر = ٤ ∴ $\lfloor ر - ٤ = \lfloor ٠ = ١$

حاول أن تحل

(٥) إذا كان $ل_{ر-١}^{٩} = ٥٠٤$ فأوجد قيمة $\lfloor ر + ١$

تفكير ناقد: ١) أوجد قيمة كلاً من: $ل_{٧}^{٧}$ ، $\lfloor ٧$ **ماذا تلاحظ؟**

تمـــاريـن ٢ – ٢

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات من (١) إلى (٥) :

(١) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة

أ ٢ ب ٢٣ ج ٦٦ د ١٣٢

(٢) إذا كان ٥ل ر = ٦٠ فإن ر تساوى

أ ٤ ب ٣ ج ٢ د ٥

(٣) إذا كانت ن ل ٣ = ١٢٠ فإن قيمة ن:

أ ٦ ب ٥ ج ٤ د ٣

(٤) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى

أ ٤ ب ٩ ج ١٠ د ٢٤

(٥) عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوى

أ ٤٨ ب ٣٠ ج ١٢ د ٤

أجب عن ما يأتي:

(٦) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - كبدة) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثِّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية).

(٧) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

(٨) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

(٩) كم عددًا زوجيًّا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤؟

(١٠) بكم طريقةٍ يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و٤ سيدات؟

(١١) يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاث أحجام (صغير ، متوسط ، كبير) وخمس نكهات (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاته).
كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحدة من الآيس كريم؟

(١٢) من مجموعة الحروف {أ ، ب، جـ ، د، هـ ، و} أوجد

أ عدد طرق اختيار حرف واحد

ب عدد طرق اختيار حرفين مختلفين

(١٣) أوجد قيمة كلٍّ من:

أ) $\frac{|٧}{|٥} \div$

ب) $٣\frac{|٢}{|٣} -$

ج) $ل_{٣}^{٥} \times |٢$

د) $ل_{٢}^{٣} \times ل_{٢}^{٢}$

هـ) $ل_{١}^{٨} + ل_{٢}^{٨}$

و) $ل_{٧}^{٧} + ل_{٠}^{٧}$

(١٤) أوجد قيمة ن التى تحقق كل من:

أ) $\frac{|ن}{|٢} = ٢٤$

ب) $\frac{|ن + ١}{|ن - ١} = ٤٢$

ج) $ل_{٣}^{١٠} = ٢٧٣٠$

د) $ل_{٠}^{ن} + ل_{١}^{ن} + ل_{٢}^{ن} = ٥٠$

(١٥) أوجد قيمة ن إذا كان:

أ) $ل_{ن}^{٧} = ٢١٠$

ب) $\frac{|٢ن}{|ن - ١} = ١٢$ ن

(١٦) إذا كان $ل_{٤}^{ن} = ١٤ \times ن^{٢-} ل_{٣}^{ن}$ فأوجد قيمة ن.

(١٧) أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص.

(١٨) من بين ثمانية طلاب، بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الأخر) للأشتراك فى فرق كرة القدم وكرة السلة وكرة الطائرة على الترتيب.

(١٩) أثبت أن: $\frac{|ن + ٢}{|ن} = ل_{٣}^{ن+٢}$

٢ - ٣ التوافيق

Combinations

سوف تتعلم

- مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- مثلث باسكال.

المصطلحات الأساسية

توافيق	*Combinations*
عناصر	Elements
ترتيب	Order
لجنة	Committee
مجموعة جزئية	Subset

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية – حاسب آلى

أضف إلى معلوماتك

يمكن أن تكتب التوافيق على الصورة $ق_ر^{ن} = \binom{ن}{ر}$

تمهيد

يراد اختيار ناديين من بين مجموعة مكونة من أربعة أندية { أ ، ب جـ ، د} فى إحدى مباريات كرة القدم ، فإن كل التبديلات الممكنة هى:

(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، ى) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ)، (ب ، ى)، (جـ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، ى) ، (ى ، أ) ، (ى ، ب) ، (ى ، جـ).

نلاحظ من البيان السابق أن الاختيار (أ ، ب) يختلف عن الاختيار (ب، أ) وهكذا...

فإذا أردنا الاختيار مما سبق دون مراعاة للترتيب فإن جميع الاختيارات الممكنة هى:

{ أ ، ب} ، { أ ، جـ} ، { أ ، ى} ، {ب ، جـ} ، {ب ، ى} ، { جـ ، ى}.

ويسمى كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقة"

التوافيق *Combinations*

تعريف عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر فى نفس الوقت هو $ق_ر^{ن}$ حيث ، ر ≤ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ صـ$^{+}$

فى التمهيد السابق نجد أن:

يرمز لعدد توافيق ٤ عناصر مأخوذة منها ٢ فى كل مرة بالرمز $ق_٢^٤$ وتقرأ (٤ قاف ٢)

أو بالرمز $\binom{٤}{٢}$ وتقرأ (٤ فوق ٢)

ونلاحظ فى هذا التمهيد أن عدد طرق الاختيار = ٦ طرق .

أى أن: $ق_٢^٤ = \frac{ل_٢^٤}{\lfloor ٢} = \frac{٣ \times ٤}{١ \times ٢} = ٦$

أى : $ق_ر^{ن} = \frac{ل_ر^{ن}}{\lfloor ر}$

مثال

(١) أوجد ناتج كل من

(أ) $ق_٥^٧$ (ب) $ق_٢^٧$ (ماذا تلاحظ)

الحل

(أ) $ق_٥^٧ = \frac{ل_٥^٧}{\lfloor ٥} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٢١$

(ب) $ق_٢^٧ = \frac{٦ \times ٧}{١ \times ٢} = ٢١$

نلاحظ أن: $^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ (لاحظ أن: ٥ + ٢ = ٧)

نتائج هامة: $^{ن}ق_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ن-ر}$ $\qquad$ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة $^{١٢}ق_{٩}$: $^{١٧}ق_{١٤}$ بدون استخدام الحاسبة.

نشاط استخدم الحاسبة

يمكن استخدام المفاتيح SHIFT ÷ من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق $({}^{n}C_{r})$

(١) باستخدام الحاسبة أوجد قيمة $^{٥}ق_{٤} + {}^{٧}ق_{٢}$

الحل

بالضغط على المفاتيح بالتتابع = 2 SHIFT ÷ 7 + 4 SHIFT ÷ 5 ⟵ ابدأ

الناتج = ٢٦

مثال

(٢) إذا كان: $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}$

الحل

∵ $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}$

اما: ر = ٢ ر - ٤٧ أى أن: ر = ٤٧

وهى اكبر من قيمة ن ، لذلك هى ترفض

أو: ر + ٢ ر - ٤٧ = ٢٨ $\qquad$ ∴ ٣ ر = ٧٥ $\qquad$ ∴ ر = ٢٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٥}$ فأوجد قيمة ر.

مثال

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص.

الحل

حيث إن الاختيار لايعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقًا.

عدد الاختيارات = $^{٩}ق_{٤} = \frac{^{٩}ل_{٤}}{\lfloor ٤} = ١٢٦$

حاول أن تحل

(٣) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج، بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين . أوجد عدد مباريات المسابقة.

مثال

مبدأ العد

(٤) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و ٥ سيدات.

الحل

عدد طرق اختيار رجلين من ٧ رجال = $^{٧}ق_{٢}$ = ٢١

عدد طرق اختيار سيدة من ٥ سيدات = $^{٥}ق_{١}$ = ٥

وطبقا لمبدأ العد فإن عدد طرق تكوين اللجنة = ٢١×٥ = ١٠٥ طريقة

تفكير ناقد: بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال و ٣ سيدات من بين ٦رجال و ٥ سيدات؟

حاول أن تحل

(٤) فصل دراسى به ١٠ طلاب، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

نشاط

مثلث باسكال

بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢):

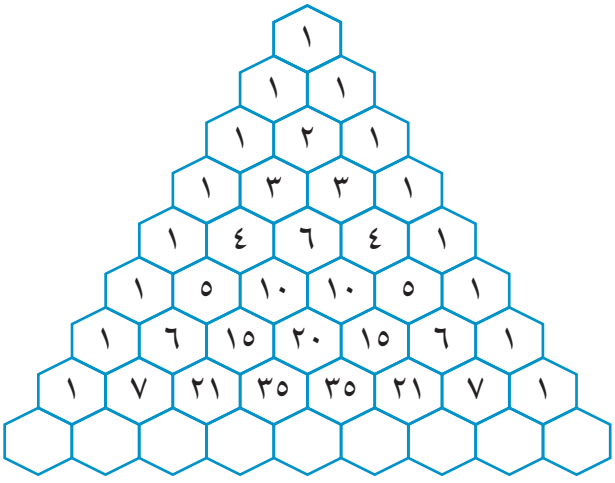
هو فيلسوف فرنسى ورياضى وفيزيائى، قدم نظرية الاحتمالات وصمم تنظيمًا ثلاثيًّا من الأرقام سمى مثلث باسكال فى حساب الاحتمالات، واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدى عمليات الجمع والضرب.

تأمل مثلث الأعداد المقابل، ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١- ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا المثلث؟

٢- هل توجد علاقة بين عدد عناصر كل صف والصف الذى يليه مباشرة؟

٣- هل يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبي ضلعى المثلث؟



بعد إجراء النشاط يمكن ملاحظة مايلى:

- **الصف الأول:** يمثل ($ل_{هـ}$ =١) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١

وبالتالى فإن: $^{١}ق_{٠}$ =١ ، $^{١}ق_{١}$ = ١

- **الصف الثانى:** يمثل ($ل_{هـ}$ =٢) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أو ر =١ أو ر = ٢ فى كل مرة.

فيكون: $^{١}ق_{٠}$ = ١، $^{٢}ق_{١}$ = ٢ ، $^{٢}ق_{٢}$ =١ وهكذا

كما نلاحظ أن:

- كل صف يبدأ بالواحد لأن $ن ق_{ن} = ١$ ، وينتهى بالواحد لأن $ن ق_{ر} = ١$
- كل عدد فى أى صف باستثناء الصف الأول يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه فى الصف الذى يعلوه مباشرة.
- **ففى الصف الثالث نجد:** ١ ، ١ + ٢ ، ٢ + ١ ، ١
- **وفى الصف الرابع نجد:** ١ ، ١ + ٣ ، ٣ + ٣ ، ٣ + ١ ، ١ وهكذا.
- يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت $ن$ زوجية)
- وتماثل حول العددين الذين يتوسطان الصف (إذا كانت $ن$ فردية)
- وهذا مايطابق العلاقة السابقة $ن ق_{ر} = ن ق_{ن-ر}$

تطبيق على النشاط:

أثبت أن: $(ق_{٠} + ق_{١} + ق_{٢} + ق_{٣} + ق_{٤} + ق_{٥})^{٠} = ٢^{٠}$

تمـــاريـن ٢ – ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات

(١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى.....

أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٣٥

(٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى.....

أ) ٣٠ ب) ١٥ ج) ٢٤ د) ١٠

(٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء يساوى.....

أ) ١٥ ب) ٨ ج) ٦٠ د) ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٤) احسب قيمة $ق_{٣}^{٦}$ ، $ق_{١}^{٩}$ ، $ق_{١١}^{١٢}$ ، $ق_{٠}^{١٠٠}$

(٥) إذا كان $ن ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة $ن ق_{ن-٩}$

(٦) إذا كان $ن ق_{٤}^{ن+١} = \frac{٥}{٢}\ ن ق_{٣}$ فأوجد قيمة $ن$.

(٧) إذا كان $ن ق_{٣} = \frac{١}{٣}\ ن ق_{٣}$ ، ٣٠ فأوجد قيمة $ن$.

(٨) بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية؟

(٩) يوجد فى أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

(١٠) اكتب بدلالة التباديل كل من:

أ) $ق_{٣}^{٨}$ ب) $ق_{٣}^{١٩}$ ج) $ق_{٠}^{٥}$ د) $ق_{ص-س}^{س}$

(١١) اكتب مستخدمًا الصورة $ن ق_{ر}$ كل مماياتى:

أ) $\frac{ل_{٣}^{٨}}{|٢}$ ب) $\frac{ل_{٣}^{٩}}{|٣}$ ج) $\frac{ل_{٤}^{١٠}}{|٤}$ د) $\frac{ل_{٠}^{٨}}{|٠}$

تمـارين عامة على الوحدة الثانية

أكمل مايأتى:

(١) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام ١، ٢، ٣، ٤ يساوى .....

(٢) إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٣ أرقام ليس بينها الصفر، فإن عدد الطرق يساوى .....

(٣) إذا كان $\frac{\text{ن}!}{\text{ر}!} = \frac{١}{٦}$ فإن ن = ...

اختر الإجابة الصحيحة:

(٤) أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات {أ، ب، جـ} وأراد أن يختار لونها من بين الألوان:{أبيض، أحمر ، فضى ، أسود} بكم طريقة يمكن أختيار السيارة .

أ) ٧ ب) ١٢ جـ) ١٤ د) ٢٤

(٥) كم عدد يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١، ٣، ٦، ٧

أ) ٩ ب) ١٢ جـ) ٢٤ د) ٦٤

(٦) إذا كانت سـ = {س:س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥} وكانت صـ = {(أ، ب): أ، ب ∈ سـ ، أ ≠ ب} كم عدد عناصر صـ

أ) ٧ ب) ١٠ جـ) ٢٠ د) ٢٥

(٧) $ق_{٤}^{١٢} + ق_{٣}^{١٢}$ يساوى

أ) ٧١٥ ب) ٧١٠ جـ) ٧١٦ د) ٧٢٠

(٨) إذا كان $ل_{ر}^{ن} = ٣٣٦$ ، $ق_{ر}^{ن} = ٥٦$ فإن ن ، ر هما

أ) (٣، ٢) ب) (٨، ٣) جـ) (٧، ٤) د) (٧، ٣)

(٩) إذا كان $ق_{١٤}^{ن} = ق_{١٠}^{ن}$ فإن $ق_{ن}^{٢٥}$ يساوى

أ) ٢٤ ب) ٢٥ جـ) ١ د) ٤٩

(١٠) احسب قيمة كل من:

أ) $ق_{٥}^{٥}$ ب) $\frac{\text{ل}٦}{}$ جـ) $ل_{١}^{٢٣}$

د) $ق_{٤٩}^{٥٠}$ هـ) $\frac{\text{ل}١٣}{\text{ل}١٤}$ و) $ل_{٤}^{٤}$

(١١) إذا كان ^{٢} ب$^{-١}$ق$_{٣}$ = ٨٤ فما قيمة $\frac{|ب - ٥}{}$

(١٢) إذا كان ^{٨} ل$_{ر+١٠}$ = ٣٣٦ فما قيمة ^{ر}ق$_{٤}$

(١٣) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية.

(١٤) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد(ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب

(١٥) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجل وسيدتين من بين ٧ رجال و ٥ سيدات؟

(١٦) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار . أوجد عدد طرق الأختيار؟

(١٧) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ) $\frac{|ب + ٣}{|ب + ١} = ٤٢$

ب) $١٢ \times \frac{|ب}{|ب + ٢} = \frac{|ب}{|ب + ٢}$

جـ) $\frac{|ب - ٤}{} = ١٢٠$

د) $\frac{|ب - ٥}{} = ١$

هـ) ^{ب}ق$_{٣} = ٨٤$

و) ^{١٢}ق$_{ر} = ^{١٢}$ق$_{ر+٣}$

الوحدة الثالثة
التفاضل والتكامل
Calculus

مقدمة الوحدة

مما لاشك فيه أن علم التفاضل والتكامل من العلوم الحديثة التى تستخدم فى فروع معرفية عديدة، وفى سياقات علمية متنوعة مثل الهندسة والفيزياء والطب والاقتصاد والجغرافيا فيهتم علم التفاضل بدراسة التغيرات والفروق (الكميات المتغيرة) من خلال حسابات تتضمن متوسطات ومعدلات التغير فتلاحظ مقارنة التغير بمعدل ينسب إليه كمعدل التغير فى درجات الحرارة - السعر - السرعة - الإنتاج ... كذلك دراسة سلوك الدوال مثل دوال التكاليف والربح فى الاقتصاد؛ لتعظيم الربح أو دراسة أثر تناول عقار معين فى خفض مدة العلاج أو دراسة مخططات حزام الزلازل عند التخطيط لإنشاءات عمرانية وحساب معدلات الإجهاد وغيرها، أما حساب التكامل فهو يبحث فى إيجاد الكمية بمعلومية معدل تغيرها، ويستخدم لحساب المساحة تحت المنحنى، ومقدار الشغل الناتج عن تأثير قوة متغيرة، ويتضمن التفاضل والتكامل حساب عمليات مع كميات متناهية فى الصغر خلافًا لعلم الجبر.

وأخيرًا فإن سعينا لفهم دقائق هذه المادة سيساعد فى حل الكثير من المشكلات المتداخلة مع كثير من العلوم الدقيقة، التى بها تبنى النهضة العلمية والحضارية التى نرجوها لبلدنا.

مخرجات تعلم الوحدة:

بعد دراسة هذه الوحدة. وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من

الطالب أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق (التفاضل).
  - مشتقة الدالة الثابتة.
  - مشتقة الدالة د: د(س) = س^{ن}
  - مشتقة الدالة د : د(س) = س
  - مستقة الدالة د: د(س) = أ س^{ن}
  - مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما
  - مشتقة حاصل ضرب دالتين.
  - مشتقة خارج قسمة دالتين.
  - مشتقة دالة الدالة - قاعدة السلسلة.
- مشتقة الدالة ص = (د(س))^{ن}
- يستخدم المشتقات فى تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس لمنحنى عند نقطة عليه.
- يتعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.
- يتعرف قواعد التكامل الآتية:
  - $\int س^{ن} \, ى س = \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} + ث ، ن \neq -١$
  - $\int أ د(س) \, ى س = أ \int د(س) \, ى س$، حيث أ ثابت
  - $\int [د(س) \pm ر(س)] \, ى س = \int د(س) \, ى س \pm \int ر(س) \, ى س$
  - $\int (أس + ب)^{ن} \, ى س = \frac{١}{أ(ن+١)} (أس + ب)^{ن+١} + ث ، ن \neq -١$

المصطلحات الأساسية

التغير	*Variation*	المشتقة الأولى	*First Derivative*
متوسط التغير	*Average Rate of Change*	حاصل الضرب	*Product*
معدل التغير	*Rate of Change*	خارج القسمة	*Quotient*
الاشتقاق	*Differentiation*	مشتقة عكسية	*Antiderivative*
دالة قابلة للاشتقاق	*Differintiable Function*	تكامل	*Integration*

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسب آلى – برامج رسومية.

دروس الوحدة

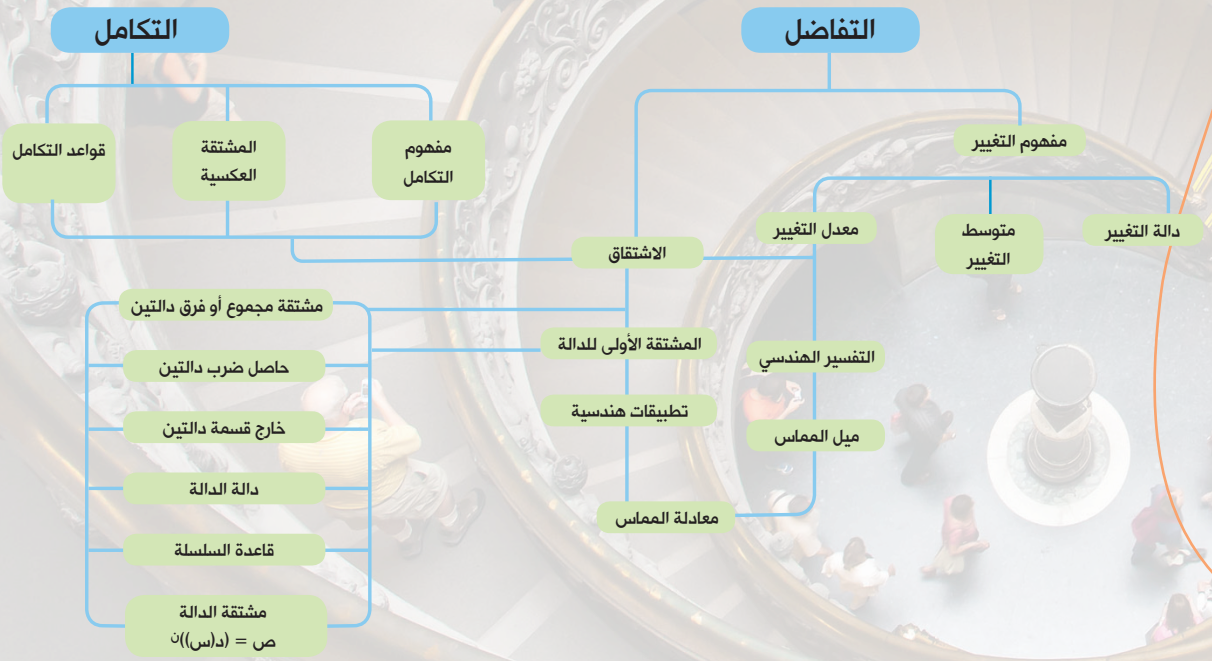
الدرس (٣ – ١): معدل التغير.

الدرس (٣ – ٢): الاشتقاق.

الدرس (٣ – ٣):
قواعد الاشتقاق.

الدرس (٣ – ٤):
التكامل

مخطط تنظيمى للوحدة



٣ - ١ معدل التغير

Rate of Change

سوف تتعلم

- مفهوم دالة التغير.
- مفهوم متوسط التغير.
- مفهوم معدل التغير.

المصطلحات الأساسية

- دالة التغير
  Function of Variation
- متوسط التغير
  Average of Change
- معدل التغير
  Rate of Change

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

لماذا تترك مسافات بين قضبان السكك الحديدية أو فواصل الكبارى المعدنية؟

إذا ارتفعت درجة حرارة من ٣٠° إلى ٤٢° فى فترة ما أو انخفضت من ٤٨° إلى ٢٢° فى فترة أخرى - احسب التغير فى درجات الحرارة لكل فترة ... ماذا تلاحظ؟

إذا كان طول أحد القضبان ل مترًا وتغيرت درجة حرارته س من $س_1$ إلى $س_2$ نقول إن تغيرًا حدث فى درجة الحرارة و يكون :

التغير فى س = قيمة س عند نهاية التغير - قيمة س عند بداية التغير

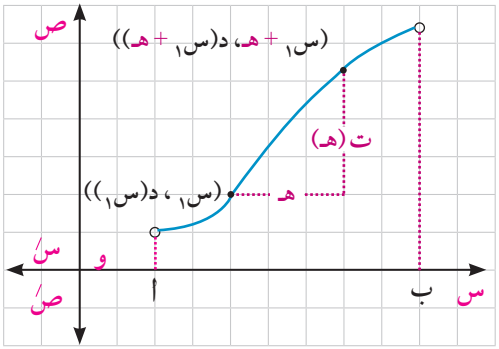
هل يتغير طول هذا القضيب تبعًا لتغير درجة حرارته؟

تعلم دالة التغير *Function of Variation*

إذا كانت د: [أ، ب] ⟵ ع حيث ص = د(س) فإن أى تغير فى قيمة س من $س_1$ إلى $س_2$ فى مجال د يقابله تغير فى قيمة ص من د($س_1$) إلى د ($س_2$) وعليه فإن :

مقدار التغير فى س = Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_2 - س_1$ ،

مقدار التغير فى ص = Δ ص = د($س_2$) - د($س_1$)



وباعتبار ($س_1$ ، د($س_1$)) نقطة على منحنى الدالة د، فإن لكل تغير فى إحداثيها السينى من $س_1$ إلى $س_2 = س_1 + هـ$ بحيث $س_1 + هـ \in$ [أ ، ب] ، هـ $\neq$ ٠ يحدث تغير مناظر فى إحداثيها الصادى يتعين بالعلاقة :

ت(هـ) = د($س_1$ + هـ) - د($س_1$)

وتسمى الدالة ت بدالة التغير فى د عند س = $س_1$

ملاحظة:

كلا الرمزين Δ س أو هـ يمثلان التغير فى س

مثال

(١) إذا كانت د(س) = ٣س^{٢} + س - ٢

وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ت، ثم احسب مقدار التغير فى د عندما

(أ) هـ = ٠,٣ (ب) هـ = - ٠,١

الحل

∵ د (س) = ٣ س^{٢} + س - ٢ ، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ

∴ س$_{١}$ = ٢ ، د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ - ٢ = ١٢ ، ويكون :

د (٢ + هـ) = ٣ (٢ + هـ)^{٢} + (٢ + هـ) - ٢ = ١٢ + ١٢هـ + ٣هـ^{٢} + ٢ + هـ - ٢

= ٣ هـ^{٢} + ١٣هـ + ١٢

ت (هـ) = د(٢ + هـ) - د(٢)

= (٣هـ^{٢} + ١٣ هـ + ١٢) - ١٢ = ٣هـ^{٢} + ١٣ هـ

(أ) عندما هـ = ٠,٣

ت(٠,٣) = ٣(٠,٣)^{٢} + ١٣ × ٠,٣

= ٤,١٧

(ب) عندما هـ = - ٠,١

ت(- ٠,١) = ٣ (- ٠,١)^{٢} + ١٣ (- ٠,١)

= - ١,٢٧

حاول أن تحل

(١) إذا كانت د(س) = س^{٢} - س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب:

(أ) ت(٠,٢) (ب) ت(- ٠,٣)

تعلم دالة متوسط التغير *Function of Average of Change*

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة م تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = س$_{١}$

حيث :

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ} \quad \text{أو} \quad \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

مثال

(٢) إذا كانت د:]-∞،٠] ⟵ ع حيث د(س) = س^{٢} + ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم إحسب م (٠,٣)

(ب) متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٣ إلى ٤

الحل

(أ) د(س$_{١}$) = د(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٥ ، د (س$_{١}$ + هـ) = د (٢ + هـ)

∴ د(٢ + هـ) = (٢ + هـ)^{٢} + ١ = هـ^{٢} + ٤ هـ + ٥

∵ م (هـ) = $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

∴ م (هـ) = $\frac{هـ^{٢} + ٤ هـ + ٥ - ٥}{هـ}$ = هـ + ٤ ويكون م (٠,٣) = ٤,٣

ب عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ فإن س$_{١}$ = ٣ ، س$_{٢}$ = ٤

ويكون د(٣) = ٩ + ١ = ١٠ ، د(٤) = ١٦ + ١ = ١٧

متوسط التغير = $\frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{١٧ - ١٠}{٤ - ٣}$ = ٧

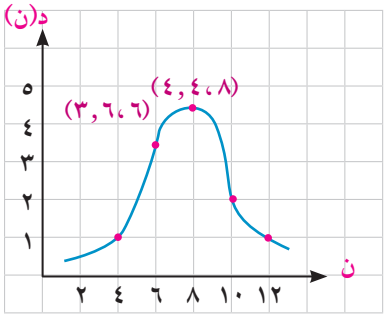
حاول أن تحل

٢ إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٣س - ١ فأوجد :

أ دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م (٠,٢)

ب متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

مثال



٣ يوضح الشكل المقابل المنحنى ر = د(ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات، ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم ، متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

أ ن = ٤ إلى ن = ٨ ب ن = ٨ إلى ن = ١٠

الحل

أ من الرسم : د(٨) = ٤,٤ ، د(٤) = ١

متوسط التغير فى د = $\frac{د(٨) - د(٤)}{٨ - ٤}$ = $\frac{٤,٤ - ١}{٤}$ = ٠,٨٥ مليون جنيه / شهر

أي أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة .

ب من الرسم : د(١٠) = ٢ ، د(٨) = ٤,٤

متوسط التغير فى د = $\frac{د(١٠) - د(٨)}{١٠ - ٨}$ = $\frac{٢ - ٤,٤}{٢}$ = - ١,٢ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة.

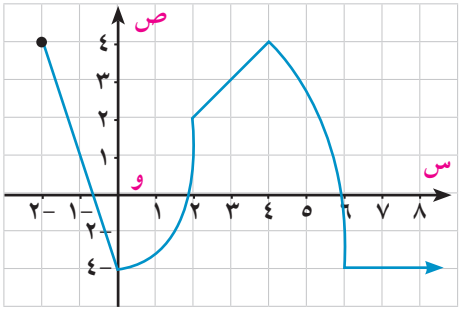
حاول أن تحل

٣ مستخدمًا الشكل الموضح فى مثال (٣) أوجد متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

أ ن = ٤ إلى ن = ٦ ب ن = ٦ إلى ن = ١٠ جـ ن = ٤ إلى ن = ١٢

تفكير ناقد:

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س). حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك.



تعلم

دالة معدل التغير *Function of Rate of Change*

إذا كانت د:] أ ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) ، س$_{١}$ ، س$_{١}$ + هـ ∈] أ ، ب[فإن:

دالة معدل التغير فى د عند س$_{١}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

٤ أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = س$_{١}$ ثم أوجد هذا المعدل عند قيمة س المعطاة

د(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، س = ٢

الحل

∵ د(س) = ٣س^{٢} + ٢ ∴ عندما س = س$_{١}$ فإن د(س$_{١}$) = ٣س$_{١}^{٢}$ + ٢،

د(س$_{١}$ + هـ)^{٢} = ٣ (س$_{١}$ + هـ)^{٢} + ٢ = ٣س$_{١}^{٢}$ + ٦ س$_{١}$ هـ + ٣هـ^{٢} + ٢

دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٦ س_{١} هـ + ٣هـ^{٢}}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٦س$_{١}$ + ٣هـ) = ٦س$_{١}$

عند س = ٢ ∴ س$_{١}$ = ٢ ويكون معدل التغير فى د = ٦ × ٢ = ١٢

تمـــارين (٣-١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى .....

أ) ٠,٣٢ ب) ٠,٤٨ جـ) ٣,٦ د) ٧,٢

(٢) إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د(٢) = ٦ فإن د(٤) تساوى .....

أ) -٤ ب) ٧ جـ) ٨ د) ١٦

(٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم يساوى .....

أ) ١٢٥ ب) ٣٤٣ جـ) ٢١٨ د) ١٠٩

(٤) متوسط تغير الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ + ٣س + ٥ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى.....

أ) ١ ب) ٣ جـ) ٧ د) ٩

أجب عن مايأتى:

(٥) إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ + ٢ س - ١ أوجد التغير فى د عندما

أ) تتغير س من ٢ إلى ٢,١ ب) س = - ٢ ، هـ = ١

(٦) أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = $س_{١}$ ثم استنتج معدل تغير د عند قيمة $س_{١}$ المبينة :

د(س) = ٢$س^{٣}$ ، $س_{١}$ = ٢

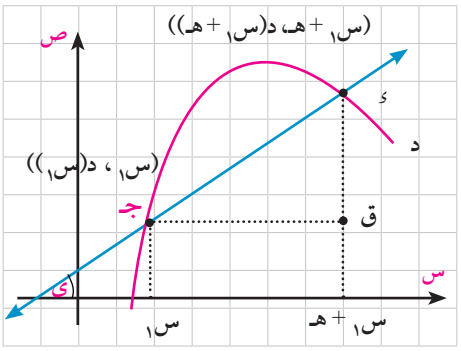
(٧) الربط بالمساحات: صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع، احسب معدل التغيير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨سم.

الاشتقاق

Differentiation Real Functions

فكر و ناقش

١ يوضح شكل (١) منحنى د: [أ ، ب] ⟵ ع حيث ص = د(س) ، $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ قاطعا له فى النقطتين حـ (س١ ، د(س١)) ، ئ (س١ + هـ ، د(س١ + هـ)).
أوجد ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$.

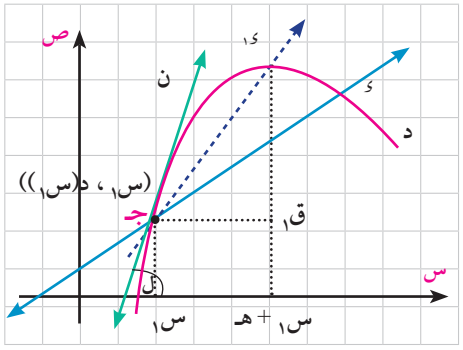


شكل (١)

٢ باعتبار س تتغير من س١ إلى س١ + هـ قارن بين دالة متوسط التغير فى د ، وميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$.
هل العلاقة التالية صحيحة ؟

ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ = ظا ى = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = م (هـ)

٣ إذا كانت النقطة جـ (س١، د(س١)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د ، وتحركت النقطة ئ على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ ليأخذ $\overleftrightarrow{جـ ئ}$ الوضع $\overleftrightarrow{جـ ن}$ ويصبح مماسًا للمنحنى عند جـ .
أى أن هـ ⟵ صفر
أوجد ميل المماس لمنحنى د عند جـ



شكل (٢)

لاحظ أن :

ميل المماس عند جـ = ظا ل = نهـا $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ إن وجدت
هـ ⟵ ٠

أي أن :

ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند النقطة (س١، د(س١))
يساوى معدل التغير فى د عند س = س١

سوف تتعلم

- المشتقة الأولى للدالة
- التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس)

المصطلحات الأساسية

- المشتقة الأولى *First Derivative*
- ميل Slope
- مماس Tangent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مثال

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٥ عند النقطة أ(٢، ٧) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٥ = ٧ ∴ النقطة أ (٢، ٧) تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند (س = ٢) = معدل التغير فى د عند (س = ٢)

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} - ٥ - ٧}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{١٢ هـ + ٣ هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} (١٢ + ٣ هـ) = ١٢$$

ويكون ظا ل = ١٢ ∴ ل = ظا$^{-١}$(١٢) ≃ ٨٥°١٤

حاول أن تحل

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٤ عند النقطة أ (١، - ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة .

تعلم

الدالة المشتقة

The Derivative Function

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا فى المتغير س يطلق عليها " الدالة المشتقة" أو : المشتقة الأولى للدالة" أو " المعامل التفاضلى الأول"

تعريف

إذا كانت د :] أ ، ب [⟵ ع ، س ∋] أ ، ب [فإن الدالة المشتقة دَ :

$$د'(س) = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

رموز الدالة المشتقة :

إذا كانت ص = د(س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

ص َ أو دَ وتقرأ " مشتقة ص" أو " مشتقة د"

$\frac{ى ص}{ى س}$ وتقرأ " دال ص دال س " أو " مشتقة ص بالنسبة إلى س"

لاحظ أن ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_{١}$، د(س$_{١}$)) هو دَ(س$_{١}$)

مثال

(٢) أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د(س) = س^{٢} - س + ١ مستخدمًا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧)

الحل

∵ د(س) = س^{٢} - س + ١

∴ د(س + هـ) = (س + هـ)^{٢} - (س + هـ) + ١ = س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} - س - هـ + ١ ،

د(س + هـ) - د(س) = (٢س + هـ - ١) هـ

∵ د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ ∴ د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢س + هـ - ١) هـ}{هـ}$

د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٢س + هـ - ١) د`(س) = ٢س - ١

∵ د(- ٢) = (- ٢)^{٢} - (- ٢) + ١ = ٧ ∴ النقطة (- ٢، ٧) تقع على منحنى د

ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧) = د`(- ٢) = ٢(- ٢) - ١ = - ٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = ٣ س^{٢} + ٤س + ٧ فاوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (- ١ ، ٦)

تعلم

قابلية الدالة للاشتقاق

Differintiability of a Function

يقال أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمي إلى مجال الدالة) إذا وفقط إذا كانت د`(أ) لها وجود حيث

د`(أ) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

مثال

(٣) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ثم أوجد د`(٥)

الحل

∵ د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ د(س + هـ) = $\sqrt{س + هـ - ١}$

د(س + هـ) - د(س) = $\sqrt{س + هـ - ١}$ - $\sqrt{س - ١}$

د`(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{\sqrt{س + هـ - ١} - \sqrt{س - ١}}{هـ}$ وبالضرب فى مرافق البسط

$$د'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ - ١) - (س - ١)}{هـ \sqrt{(س + هـ - ١ + ١)} \sqrt{(س - ١)}} \quad ، س > ١$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ \sqrt{(س + هـ - ١ + ١)} \sqrt{(س - ١)}} = \frac{١}{٢\sqrt{(س - ١)}} \quad ، س > ١$$

لاحظ أن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١ لعدم وجود النهاية

$$د'(٥) = \frac{١}{٢\sqrt{(٥ - ١)}} = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$$

حاول أن تحل

(٣) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س + ٥}$

تمـارين (٣-٢)

(١) أوجد الدالة المشتقة للدالة د فى كل مماياتى :

أ) د(س) = ٥س + ٢

ب) د(س) = ٣س^{٢}

جـ) د(س) = س^{٣} - ١

د) د(س) = س^{٢} + ٢ س.

(٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة د فى كل مماياتى وعين قيم س التى تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق:

أ) د(س) = $\frac{١}{س}$

ب) د(س) = $\frac{١}{س + ٣}$

جـ) د(س) = $\frac{٣}{٢س - ٥}$

د) $\sqrt{س - ٤}$

(٣) أوجد مشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{٣} + ٤ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (-١، ٣) الواقعة عليه.

(٤) أوجد مشتقة الدالة د حيث د(س) = أ س + ب عند أى نقطة (س، ص) حيث أ ، ب عددان حقيقيان.

(٥) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٨ عند النقطة أ (٢، ٤) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

قواعد الاشتقاق

Real Functions

٣-٣

سوف تتعلم

- مشتقة الدالة الثابتة
- مشتقة د(س) = س ن
- مشتقة د(س) = س
- مشتقة د(س) = أ س ن
- مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما
- مشتقة حاصل ضرب دالتين
- مشتقة خارج قسمة دالتين
- مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- مشتقة ص = (د(س))ن.

المصطلحات الأساسية

المصطلحات الأساسية

المشتقة الأولى	*First Derivative*
حاصل ضرب	Product
خارج قسمة	Quotient
قاعدة السلسلة	Chain Rule

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

استكشف

١ - أوجد باستخدام تعريف المشتقة الأولى للدالة مشتقة كل من :

د(س) = س^{٣} ، د(س) = س^{٥}

٢ - هل يمكنك اكتشاف مشتقة د(س) = س^{٧} دون استخدام التعريف؟

٣ - هل يمكنك استنتاج قاعدة لمشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{ن} ؟

تعلم

مشتقة الدالة

Derivative of a Function

١ - مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث: جـ ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = ٠$

لاحظ أن :

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

∵ $\frac{د ص}{د س} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

∴ $\frac{د ص}{د س} = د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$ = صفرًا (هـ ≠ ٠)

٢ - مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}

إذا كانت ص = س^{ن} حيث: ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = ن س^{ن-١}$

إذا كانت ص = س فإن: $\frac{د ص}{د س} = ١$

إذا كانت ص = أ س^{ن} حيث: أ ، ن ∈ ع فإن: $\frac{د ص}{د س} = أ ن س^{ن-١}$

مثال

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل ممايأتى:

أ ص = - ٣ ب ص = س^{٤} جـ ص = ٥س

د ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ هـ ص = $\sqrt[٣]{س^{٧}}$

الحل

أ ∵ ص = - ٣ ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٠$ ب ∵ ص = س^{٤} ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٤ س^{٣}$

جـ ∵ ص = ٥ س ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥

د ∵ ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ = ٣ س$^{-٢}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - ٦ س$^{-٣}$

هـ ∵ ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt[٣]{س}}$ حيث س ≠ ٠

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مماياتى:

أ ص = س^{٧} ب ص = س^{١٠} جـ ص = س$^{\frac{٣}{٢}}$ د ص = س$^{-٤}$

هـ ص = س$^{-\frac{٥}{٣}}$ و ص = $\frac{١}{س^{٥}}$ ز ص = $\sqrt[٨]{س^{٩}}$ ح ص = $\sqrt[٣]{س^{٧}}$

ط ص = ٣ س^{٦} ى ص = - ٢ س$^{-٥}$ ك ص = πس$^{-٤}$ ل ص = - ٤ $\sqrt[٣]{س}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ، فإن ع ± ق تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون $\frac{د}{د س}$ (ع ± ق) = $\frac{د ع}{د س}$ ± $\frac{د ق}{د س}$ وبصفة عامة ، فإن :

إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ،.....، د$_{ن}$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$\frac{د}{د س}$ (د$_{١}$ ± د$_{٢}$ ± د$_{٣}$ ± ... ± د$_{ن}$)(س) = د$_{١}$′(س) ± د$_{٢}$′(س) ± د$_{٣}$′(س) ± ... ± د$_{ن}$′(س)

مثال

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مماياتى:

أ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$ ب ص = $\frac{\sqrt[٨]{س} - ٢ س}{\sqrt[٨]{س}}$

الحل

أ ∵ ص = ٢ س^{٦} + س$^{-٩}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ١٢ س^{٥} - ٩ س$^{-١٠}$

ب ∵ ص = $\frac{\sqrt[٨]{س} - ٢ س}{\sqrt[٨]{س}}$

= $\sqrt[٨]{س}$ - ٢ = س$^{\frac{١}{٨}}$ - ٢

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٨}$ س$^{-\frac{٧}{٨}}$ - ٠ = - س$^{-\frac{٧}{٨}}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ ص = ٣س^{٢} + ٥ ب ص = ٢ س^{٣} - ٤ س + ٧ جـ ص = ٣ س$^{-٤}$ + ٦ س$^{\frac{٢}{٣}}$

د ص = ٧ س^{٤} - $\frac{١}{س^{٤}}$ هـ ص = ٣ س^{٨} - ٢ س$^{-٥}$ + ٨ و ص = $\frac{٥}{س}$ + س$\sqrt[٨]{س}$ + ٤

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت ع ، و دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن الدالة (ع . و) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون: $\frac{د}{د س}$ (ع . و) = ع $\frac{د و}{د س}$ + و . $\frac{د ع}{د س}$

مثال

(٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = - ١

الحل

∵ ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣) ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = (س^{٢} + ١) × ٣س^{٢} + (س^{٣} + ٣) × ٢ س

= ٣س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س^{٤} + ٦س

= ٥س^{٤} + ٣س^{٢} + ٦س

عند س = - ١ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ (- ١)^{٤} + ٣(- ١)^{٢} + ٦ (- ١) = ٢

حاول أن تحل

(٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان :

أ) ص = (٢س +٣) (٣ س -١) ب) ص = (٢ س + ٥) ^{٢}

جـ) ص = $\sqrt{٨}$ س ($\sqrt{٨}$ س + ٤) د) ص = ($\sqrt{٨}$ س -١) ($\sqrt{٨}$ س +١)

هـ) ص = (٤س^{٢} - ١) (٧ س^{٣} + س) ثم أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كانت ع ، و دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت و (س) ≠ ٠

فإن الدالة($\frac{ع}{و}$) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{د}{د س}$ ($\frac{ع}{و}$) = $\frac{و \frac{د ع}{د س} - ع \frac{د و}{د س}}{ق^{٢}}$

أى ($\frac{ع}{و}$)َ = $\frac{و ع َ - ع و َ}{و^{٢}}$

مثال

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$

الحل

∵ ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{(س^{٣} + ١) \times ٢س - (س^{٢} - ١) \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ س^{٤} + ٢س - ٣ س^{٤} + ٣ س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

= $\frac{- س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ) ص = $\frac{٢ س - ١}{س + ١}$ ب) ص = $\frac{٢ س + ٥}{١ - ٤ س}$ جـ) ص = $\frac{٢س^{٢} - ١}{س + ٥}$

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) (Chain rule)

نظرية

إذا كانت ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، وكانت ع = ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص = د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وتكون : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

لاحظ أن ص دالة الدالة س

تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

مثال

(٥) إذا كانت ص = $(س^{٢} - ٣س + ١)^{٥}$ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

الحل

بفرض ع = $س^{٢} - ٣ س + ١$ ∴ ص = $ع^{٥}$

ص قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع (كثيرة حدود فى ع) ويكون $\frac{د ص}{د ع} = ٥ ع^{٤}$

ع قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س (كثيرة حدود فى س) ويكون $\frac{د ع}{د س} = ٢ س - ٣$ ،

بتطبيق قاعدة السلسلة ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = ٥ ع^{٤} \times (٢س - ٣)$ ،

بالتعويض عن ع ∴ $\frac{د ص}{د س} = ٥ (س^{٢} - ٣ س + ١)^{٤} \times (٢ س - ٣)$

حاول أن تحل

(٥) إذا كانت ص =$(٢ س + ٣)^{٥}$ **فأوجد** $\frac{د ص}{د س}$

مشتقة الدالة $[د(س)]^{ن}$

إذا كانت ع = $[د(س)]^{ن}$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى ،

فإن: $\frac{د ع}{د س} = ن [د(س)]^{ن - ١} \times د'(س)$

مثال

٦ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان

أ $ص = (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠}$ ب $ص = (\frac{س - ١}{س + ١})^{٥}$

الحل

أ $ص = (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{١٠}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ١٠ (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩} \times \frac{د}{د س}(٦س^{٣} + ٣س + ١) = ١٠ (١٨ س^{٢} + ٣) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}$

$= ٣٠ (٦ س^{٢} + ١) (٦س^{٣} + ٣س + ١)^{٩}$

ب $ص = (\frac{س - ١}{س + ١})^{٥}$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = ٥ (\frac{س - ١}{س + ١})^{٤} \times \frac{١ \times (س - ١) - ١ \times (س + ١)}{(س + ١)^{٢}}$

$= ٥ (\frac{س - ١}{س + ١})^{٤} \times \frac{س + ١ - س + ١}{(س + ١)^{٢}}$

$= \frac{١٠}{(س + ١)^{٢}} \times (\frac{س - ١}{س + ١})^{٤} = \frac{١٠ (س - ١)^{٤}}{(س + ١)^{٦}}$

حاول أن تحل

٦ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت أ $ص = (٢س^{٣} - ٤س + ١)^{٩}$ ب $ص = (\frac{٥س^{٢}}{٣س^{٢} + ٢})^{٣}$

مثال

٧ إذا كان $د(س) = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س - ٤$ أوجد قيم س التي تجعل $د'(س) = ٢$

الحل

$د'(س) = \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} - ٢ \times ٢ س + ٥ \times ١$

$= س^{٢} - ٤ س + ٥$

عندما $د'(س) = ٢$ $\therefore س^{٢} - ٤س + ٥ = ٢$ ويكون $س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠$

$\because (س - ١) (س - ٣) = ٠$ $\therefore س = ١$ أو $س = ٣$

حاول أن تحل

٧ أوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٧$ فى كل ممايأتى:

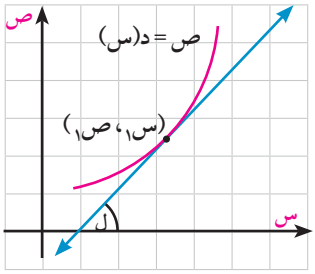
أ $د(س) = س^{٣} - ٥ س + ٢$ ب $د(س) = (س - ٥)^{٧}$

تفكير ناقد: أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت :

$ص = (س - ١) (س + ١) (س^{٢} + ١) (س^{٤} + ١) (س^{٨} + ١) (س^{١٦} + ١)$

تطبيقات هندسية على المشتقة

Geometric Applications on the Derivative



فى التفسير الهندسى للمشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د(س) وجدنا أن ميل المماس م عند النقطة (س١، ص١) يساوى المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة .

أى أن $م = \frac{ى ص}{ى س}$ عند النقطة (س١، ص١) و يمكن كتابته على الصورة

$$م = [\frac{ى ص}{ى س}]_{(س_١، ص_١)}$$

وإذا كان ل قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **فإن:**

$$م = ظا\ ل = [\frac{ى ص}{ى س}]_{(س_١، ص_١)}$$

لاحظ أن:

١ إذا كان م١، م٢ ميلى مستقيمين معلومين ل١، ل٢ فإن :

ل١ // ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ = م٢ (شرط التوازى)

، ل١ ⊥ ل٢ إذا وفقط إذا كان م١ م٢ = -١ (شرط التعامد)

٢ يسمى ميل المماس عند أى نقطة على منحنى بميل المنحنى عند هذه النقطة كما يسمى العمودى على المماس لمنحنى عند نقطة التماس بالعمودى للمنحنى عند هذه النقطة .

$$\therefore \text{ميل العمودى عند النقطة } (س_١، ص_١) = \frac{-١}{[\frac{ى ص}{ى س}]_{(س_١، ص_١)}}$$

مثال

٨ أوجد كل من ميل المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢س^{٣} - ٤س + ٥ عند النقطة (-٢، -٣) الواقعة عليه.

الحل

∵ ص = ٢س^{٣} - ٤ س + ٥

$$\therefore \text{ميل المماس عند أى نقطة} = \frac{ى ص}{ى س} = ٦س^{٢} - ٤$$

عند النقطة (-٢ ، -٣)

$$\text{ميل المماس} = [\frac{ى ص}{ى س}]_{(-٢، -٣)} = ٦(-٢)^{٢} - ٤ = ٢٠$$

$$\text{ميل العمودى} = \frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{٢٠}$$

حاول أن تحل

٨ أوجد ميل كل من المماس والعمودى للمنحنيات الآتية عند النقط المبينة:

أ ص = س - ٧ عندما س = -١

ب ص = (س^{٣} - ٢) (س + ١) عندما س = ١

مثال

(٩) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} - ٦س + ٥ والتى عندها :

(أ) ميل المماس = ٢

(ب) المماس يوازى محور السينات

(جـ) المماس عمودى على المستقيم ٤ ص + س -١ = صفر

الحل

∵ ص = س^{٢} - ٦س + ٥

∴ ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س -٦

(أ) ∵ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ = ٢ س - ٦ ∴ ٢س = ٨ أى أن س = ٤

ويكون ص = (٤)^{٢} - ٦ (٤) + ٥ = -٣

ميل المماس = ٢ عند النقطة (٤، -٣)

(ب) ∵ المماس // محور السينات ∴ ميل المماس = ميل محور السينات = صفر

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س - ٦ = ٠ ∴ س = ٣ ، ص = ٩ - ١٨ + ٥ = -٤

المماس يوازى محور السينات عند النقطة (٣، -٤)

(جـ) المماس عمودى على المستقيم ٤ ص +س -١= ٠ الذى ميله $\frac{-١}{٤}$

ميل المماس = -١ ÷ $\frac{-١}{٤}$ = ٤

٢ س - ٦ = ٤ ∴ س = ٥، ص = صفر

∴ المماس يكون عموديًا على المستقيم ٤ ص + س -١ = ٠ عند النقطة (٥، ٠)

تذكر أن

ميل المستقيم
أ س + ب ص + جـ = ٠
يساوى $\frac{-أ}{ب}$

حاول أن تحل

(٩) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = س^{٣} - ٣س^{٢} ويكون عندها المماس للمنحنى :

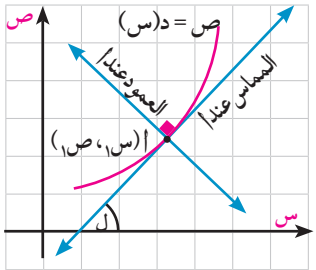
(أ) موازيًا محور السينات

(ب) عمودى على المستقيم س + ٩ ص + ٣ = ٠

تعلم

معادلة المماس لمنحنى *Equation of the Tangent to a Curve*

إذا كانت (س$_{١}$، ص$_{١}$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س)،
م ميل المماس عند هذه النقطة فإن:
معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هى



ص - ص$_{١}$ = م(س - س$_{١}$)

ملاحظة: معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هى :

ص - ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س - س$_{١}$)

مثال

(١٠) أوجد معادلتا المماس والعمودى لمنحنى ص = ٢س^{٢} - ٥س +١ عند النقطة الواقعة عليه و إحداثيها السينى = ٢

الحل

∵ النقطة تقع على المنحنى ∴ فهى تحقق معادلته

عند س = ٢ فإن ص = ٢ (٢)^{٢} - ٥(٢) + ١ = -١ ∴ النقطة هى (٢، -١)

∵ $\frac{د ص}{د س}$ = ٤س - ٥ ∴ ($\frac{د ص}{د س}$)$_{س=٢}$ = ٤ × ٢ - ٥ = ٣

أى أن عند النقطة (٢، -١) ميل المماس = ٣ و يكون ميل العمودى = $\frac{-١}{٣}$

∴ معادلة المماس هى ، معادلة العمودى هى

ص - (-١) = ٣(س-٢) ص - (-١) = $\frac{-١}{٣}$ (س -٢)

ص + ١ = ٣س - ٦ ٣ ص + ٣ = - س + ٢

ص - ٣ س + ٧ = ٠ ٣ ص + س + ١ = صفر

حاول أن تحل

(١٠) أوجد معادلتا المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها:

أ ص = س^{٣} +س^{٢} -١ ، س = -٢ ب ص = (٣س -٥)^{٧} ، س =٢

تمـــاريـن (٣-٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) معدل تغير س^{٣} + ٤ بالنسبة إلى س عندما س = ٢ يساوى

أ ٤ ب ٨ جـ $\frac{١}{٤}$ د ١٢

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = ٣س - س^{٣} عند س = صفر يساوى

أ ٣ ب صفر جـ - ٣ د ٦

(٣) المماس للمنحنى ص = س^{٢} - ٨س + ٢ يوازى محور السينات عند س = ...

أ -٨ ب ٢ جـ ٤ د صفر

(٤) المستقيم س + ص = ٥ يمس المنحنى ص = ٣س^{٢} + ٥س +١ عند س = ...

أ ١ ب ٥ جـ ٣ د -١

أكمل كلاً مماياتى:

(٥) $\frac{د}{د س}$ (٢س) = ... (٦) $\frac{د}{د س}$ (٣س^{٢} + ١) = ...

(٧) $\frac{د}{د س}$ (س^{٤} - ٢س^{٢}+١) ..... (٨) $\frac{د}{د س}$ (س + $\sqrt{س}$) .....

(٩) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{س^{٣}}$) = ...

(١٠) $\frac{د}{د س}$ (π ٥) = ...

(١١) $\frac{د}{د س}$ ($س^{\frac{١}{٢}}$) = ...

(١٢) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$) = ...

(١٣) $\frac{د}{د س}$ (٥$س^{٢}$ + ٣ س + ٢) = ...

(١٤) $\frac{د}{د س}$ ($\sqrt[٨]{٢}$ $س^{٧}$ - $\frac{س^{٥}}{٥}$ + π) = ...

(١٥) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من :

أ ص = ٣$س^{٥}$

ب ص = $\frac{٣}{٤}$ $س^{-٨}$

جـ ص = $\frac{٣}{٢س^{٢}}$

د ص = ٤ $\sqrt[٨]{س}$

أوجد المشتقة الأولى بالنسبة إلى س لكل ممايأتى.

(١٦) ص = $س^{٣}$ + ٣$س^{٢}$ - ٥

(١٧) ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٤}$ - $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ + ٧ س - ٩

(١٨) ص = ٢$س^{٦}$ + ٣ $\sqrt[٨]{س}$

(١٩) ص = (س^{٢} + ٣) (س^{٣} - ٣س + ١)

(٢٠) ص = $\frac{٥س - ٢}{٥ س + ١}$

(٢١) أوجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقط المبينة فى كل ممايأتى:

أ ص = ($س^{٢}$ - ٢)^{٧} عند س= ٠

ب ص = ($س^{٢}$ - س + ١)$^{-٤}$ عند س =١

(٢٢) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان:

أ ص = (س +٣)^{٧}

ب ص = (٢$س^{٢}$ - ٣)^{٤}

جـ ص = ($س^{٣}$ + س - ١)^{٥}

هـ ص = $\sqrt[٢]{(٢س^{٣} - ٤س + ٧)^{٢}}$

و ص = $ع^{٢}$ ، ع = ٣$س^{٢}$ + ٢

(٢٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^{٣}$ - ٦$س^{٢}$ - ١٥س + ٢٠ والتي يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات.

(٢٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^{٣}$ - ٩$س^{٢}$ - ١٦س + ١ والتى يكون ميل المنحنى عندها يساوى ٥

(٢٥) أوجد معادلتا المماس والعمودى للمنحنى ص = ٣$س^{٢}$ - ٧س + ٢ عند النقط (٢، ٠) الواقعة عليه.

(٢٦) أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها والمبين احداثيها السينى أمام كل منها:

أ ص = (س + ٣)^{٣} ، س = -١

ب ص = $\frac{٣}{س - ٢}$ ، س = ٤

جـ ص = $\sqrt[٨]{س + ٧}$ ، س = ٢

د ص = (س - ٥) (س + ٥) ، س = -٣

٣-٤ التكامل

Integration

استكشف

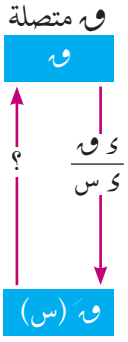
من دراستك للاشتقاق تعلم أن:

مشتقة الدالة ق حيث ق(س) = س^{٣} + ث ، ث عدد حقيقي ثابت

هى ق$'$(س) = ٣س^{٢}. أى أن ق$'$(س) = $\frac{ك}{ك س}$ ق(س)

فى هذه الحالة تسمى الدالة ق بالدالة الأصلية للدالة قَ

سوف نتناول فى هذا الدرس عملية عكسية لعملية الاشتقاق بمعنى أن إذا عُلِمَت المشتقة قَ **فكيف نحصل على الدالة الأصلية؟**



لإيجاد دالة أصلية مشتقتها بالنسبة إلى س هى ٥س^{٤}

نفرض د(س) = ٥س^{٤}

ولنبدأ بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

ن س$^{ن-١}$ = ٥س^{٤} ∴ ن - ١ = ٤ ، ن = ٥

فيكون ت(س) = س^{٥} أو س^{٥} + ٣ أو س^{٥} - ٢

تسمى الدالة ت دالة المشتقة العكسية أو الدالة الاصلية للدالة د

هل تستطيع اكتشاف المشتقة العكسية ت للدالة د إذا كانت:

أ) د(س) = ٢ س ب) د(س) = ٧س^{٦}

تعلم

المشتقة العكسية

Antiderivative

إذا كانت ص = س^{٢}

فإن المشتقة الأولى هى $\frac{ك ص}{ك س}$ = ٢ س

أما استنتاج الدالة ص من الدالة المشتقة $\frac{ك ص}{ك س}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية.

فمثلا س^{٢} هى مشتقة عكسية للدالة ٢س لاحظ أن ٢س لها العديد من المشتقات العكسية منها س^{٢} + ١ ، س^{٢} + ٢ ، س^{٢} - ٣ ، ..... جميعها مشتقتها ٢ س ولا تختلف إلا فى الثابت ث .

∴ $\frac{ك}{ك س}$ (س^{٢} + ث) = ٢ س حيث (ث) مقدار ثابت .

سوف تتعلم

- المشتقة العكسية للدالة
- التكامل الغير محدد
- تكامل بعض الدول الجبرية

المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسية *Antiderivative*
- تكامل Integraation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

تعريف يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت`(س) = د(س) لكل س فى مجال د.

مثال

(١) أثبت أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س^{٣}.

الحل

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون ت` (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤س^{٣} = ٢ س^{٣}

∴ ت` (س) = د(س) أى أن الدالة(ت) مشتقة عكسية للدالة د

حاول أن تحل

(١) بين أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{٥}

تفكير ناقد :

ما العلاقة بين ت$_{١}$، ت$_{٢}$ إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة د؟

التكامل غير المحدد *Indefinite Integral*

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س) ى س

[ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف إذا كان ت`(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ى س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل).

لاحظ أن :

$\frac{ى}{ى س}$ (س^{٣} + ث) = ٣س^{٢} ∴ $\int$ ٣ س^{٢} ى س = س^{٣} + ث

$\frac{ى}{ى س}$ (٢س^{٧}) = ١٤س^{٦} ∴ $\int$ ١٤ س^{٦} ى س = ٢س^{٧} + ث

ولتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

(٢) تحقق من صحة كل مايأتى:

أ $\int$ س^{٧} ى س = $\frac{١}{٨}$ س^{٨} + ث

ب $\int$ (٧س^{٦} + $\frac{٤}{س^{٣}}$) ى س = س^{٧} - $\frac{٢}{س^{٢}}$ + ث

الحل

أ ∵ $\frac{د}{د س}\left(\frac{١}{٨} س^{٨} + ث\right) = س^{٧}$ ∴ $\int س^{٧} د س = \frac{١}{٨} س^{٨} + ث$

ب ∵ $\frac{د}{د س}\left(س^{٧} - \frac{٢}{س^{٣}} + ث\right) = \frac{د}{د س}\left(س^{٧} - ٢ س^{-٢} + ث\right)$

$= ٧ س^{٦} - ٢ (-٢) س^{-٣} = ٧ س^{٦} + \frac{٤}{س^{٣}}$

∴ $\int \left(٧ س^{٦} + \frac{٤}{س^{٣}}\right) د س = س^{٧} - \frac{٢}{س^{٢}} + ث$

حاول أن تحل

(٢) تحقق من صحة كل ممايأتى:

أ $\int س^{-٤} د س = \frac{-١}{٣} س^{-٣} + ث$ ب $\int س \sqrt{١ + س^{٢}}\ د س = \frac{١}{٣}(١ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

مثال

(٣) باستخدام التعريف المباشر للتكامل أوجد المشتقة العكسية للدالة د حيث :

أ د(س) = ٥س^٤ ب د(س) = ١٨ س^٥ جـ د(س) = -٣ س^-٤

الحل

أ ت (س) = $\int$ ٥س^٤ د س = س^٥ + ث

ب ت (س) = $\int$ ١٨ س^٥ د س = $\int$ ٣(٦ س^٥) د س = ٣ س^٦ + ث

جـ ت (س) = $\int$ -٣ س^-٤ د س = س^-٣ + ث

حاول أن تحل

(٣) باستخدام تعريف التكامل أوجد المشتقة العكسية لكل من : ٢٠س^٤، -٥س^-٤

يتطلب إيجاد المشتقات العكسية للدوال باستخدام التعريف السابق كثيرًا من الوقت والجهد؛ لذلك تستخدم بعض الصور القياسية البسيطة للتكامل (قواعد التكامل) والتى تيسر عملية إيجاد المشتقات العكسية .

قاعدة (١) :

$\int س^{ن} د س = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + ث$ حيث ث ثابت ، ن ≠ -١

مثال

أوجد:

(٤) أ $\int س^{٥} د س$ ب $\int س^{-٣} د س$ جـ $\int س^{\frac{٢}{٥}} د س$ د $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٥}}} د س$

الحل

أ $\int س^{٥} \, د س = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ث = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

ب $\int س^{-٣} \, د س = \frac{س^{-٣+١}}{-٢} + ث = -\frac{١}{٢} س^{-٢} + ث$

جـ $\int س^{\frac{٢}{٥}} \, د س = \frac{١}{\frac{٧}{٥}} س^{\frac{٢}{٥}+١} + ث$

$= \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + ث$

د $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٣}}} \, د س = \int س^{-\frac{٣}{٥}} \, د س$

$= \frac{١}{\frac{٢}{٥}} س^{-\frac{٣}{٥}+١} + ث = \frac{٥}{٢} س^{\frac{٢}{٥}} + ث$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ $\int س^{٨} \, د س$ ب $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, د س$ جـ $\int س^{\frac{٧}{٩}} \, د س$ د $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} \, د س$

قاعدة (٢) :

إذا كان $د(س) = ا \, د(س)$ حيث ا عدد حقيقي **ثابت**

مثال

٥ أ $\int ٣س^{٣} \, د س = ٣ \int س^{٣} \, د س = ٣ \times \frac{١}{٤} س^{٤} + ث = \frac{٣}{٤} س^{٤} + ث$

ب $\int ٨س^{-٥} \, د س = ٨ \int س^{-٥} \, د س = ٨ \times \frac{١}{-٤} س^{-٤} + ث = -٢ س^{-٤} + ث$

نتيجة

إذا كان $د س = ا \, د س$

لذلك فإن:

$\int ٥ \, د س = ٥ س + ث$ ، $\int -٩ \, د ن = -٩ ن + ث$

$\int د س = س + ث$ ، $\int \sqrt{٧} \, د ع = \sqrt{٧} ع + ث$

حاول أن تحل

٥ أوجد كلاً من :

أ $\int ٣س^{٤} \, د س$ ب $\int -٢ ع \, د ع$ جـ $\int -س \, د س$ د $\int -\frac{د س}{٥}$

قاعدة (٣) :

$$\int [د(س) \pm ر(س)] \, و س = \int د(س) \, و س \pm \int ر(س) \, و س$$

مثال

٦ أوجد: أ $\int (٤ س + ٣س^{٢}) \, و س$ ب $\int \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س + ٢} \, و س$

الحل

أ $\int (٤س + ٣س^{٢}) \, و س$

$= \int ٤س \, و س + \int ٣س^{٢} \, و س$

$= ٤ \int س \, و س + ٣ \int س^{٢} \, و س$

$= ٤ \times \frac{١}{٢} س^{٢} + ٣ \times \frac{١}{٣} س^{٣} + ث$

$= ٢ س^{٢} + س^{٣} + ث$

ب $\int \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س + ٢} \, و س$

$= \int \frac{(س - ٤)(س + ٢)}{س + ٢} \, و س$

$= \int (س - ٤) \, و س$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤ س + ث$

حاول أن تحل

٦ أوجد:

أ $\int (٣س^{٢} + ٢س - ١) \, و س$ ب $\int (\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ٣) \, و س$

جـ $\int ٢ س (س + ٣) \, و س$ د $\int \frac{٤س^{٢} - ٩}{٢س - ٣} \, و س$

قاعدة (٤) :

$$\int (أس + ب)^{ن} \, و س = \frac{١}{أ(ن + ١)} (أس + ب)^{ن+١} + ث \, ، \, ن \neq -١$$

تفكير ناقد:

١ - هل يمكنك التحقق من صحة العلاقة السابقة عن طريق تعريف المشتقة العكسية؟ وضح ذلك.

مثال

٧ أوجد:

أ $\int (٣ - ٢س)^{٥} \, و س$ ب $\int (٢س - ٧)^{-٣} \, و س$

جـ $\int \frac{٧}{\sqrt[٣]{٤ - ٣س}} \, و س \, ، \, س < \frac{٤}{٣}$

الحل

أ $\int (٣س - ٢)^{٥} \, د س = \frac{١}{(١ + ٥)٣} (٣س - ٢)^{١+٥} + ث = \frac{١}{١٨} (٣س - ٢)^{٦} + ث$

ب $\int (٢س - ٧)^{-٣} \, د س = \frac{١}{(١ + ٣-)٢} (٢س - ٧)^{-٣+١} + ث = -\frac{١}{٤} (٢س - ٧)^{-٢} + ث$

جـ $\int \frac{٧}{\sqrt[٣]{٤ - ٣س}} \, د س = ٧ \int (٣س - ٤)^{-\frac{١}{٣}} \, د س = \frac{٧}{(١ + \frac{١}{٣}-)٣} (٣س - ٤)^{-\frac{١}{٣}+١} + ث$

$= \frac{٧}{(١ + \frac{١}{٣}-)٣} (٣س - ٤)^{\frac{٢}{٣}} = \frac{١٤}{٣} \sqrt[٣]{٣س - ٤} + ث$

حاول أن تحل

٧ أوجد: أ $\int ٩(٤ - ٣س)^{٢} \, د س$ ب $\int \frac{١٥}{(٣س - ٥)^{٦}} \, د س$

تمـــاريـن (٣-٤)

أوجد:

١ $\int س^{٢} \, د س$ ٢ $\int س^{٧} \, د س$ ٣ $\int ٨س \, د س$

٤ $\int -٤ س^{٣} \, د س$ ٥ $\int ٩س^{٨} \, د س$ ٦ $\int ١٢ س^{-٤} \, د س$

٧ $\int ٥ \, د س$ ٨ $\int (٥ \sqrt[٣]{س}) \, د س$ ٩ $\int -٣ س^{٧} \, د س$

١٠ $\int -\frac{٨}{٥} س^{-٣} \, د س$ ١١ $\int \frac{٧}{٣} ن^{٦} \, د ن$ ١٢ $\int \frac{١٢}{٥} ف^{٥} \, د ف$

١٣ $\int (س + ١) \, د س$ ١٤ $\int (٥ - ٢ن) \, د ن$ ١٥ $\int (ن^{٣} - ٦ن^{٤}) \, د ن$

١٦ $\int (س^{٣} + س^{٢} + س) \, د س$ ١٧ $\int ٢(٣س^{٢} + ٧) \, د س$ ١٨ $\int س(س + ٣) \, د س$

١٩ $\int ٧س^{٢} (س^{٤} - ١) \, د س$ ٢٠ $\int (س - ١)(س + ١) \, د س$

٢١ $\int (س - ٢) (٢ - س) \, د س$ ٢٢ $\int (٢ س + ٣)(س - ١) \, د س$ ٢٣ $\int س^{٢} (٢س + \frac{١}{س}) \, د س$

٢٤ $\int \frac{٣س^{٢} - ٤س}{س} \, د س$ ٢٥ $\int \frac{س^{٧} + ٥س^{٦} - س^{٣}}{س^{٣}} \, د س$ ٢٦ $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} \, د س$

٢٧ $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, د س$ ٢٨ $\int (س + ٤)^{٣} \, د س$ ٢٩ $\int ٧(٢س - ٧)^{٦} \, د س$

٣٠ $\int (٨ - ٣ن)^{٤} \, د ن$ ٣١ $\int ٦(س - ٣)^{-٤} \, د س$ ٣٢ $\int (٢س - ٣)^{\frac{٧}{٣}} \, د س$

٣٣ $\int ١٥ \sqrt[٥]{(٣س - ٢)^{٣}} \, د س$

تمـــاريـن عامة على الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت د(س) = $\sqrt[٣]{٨س^{٢}+٩}$ فإن د′(-٤) =

أ $\frac{-٤}{٥}$ ب ٥ جـ $\frac{١}{١٠}$ د $\frac{١}{١٠}$

٢ $\int$ (س^{٢} - ٣) ؏ س =

أ ٢س ب س^{٣} - ٣س جـ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س + ث د ٢س - ٣ + ث

٣ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س - ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى

أ ١ ب $\frac{١}{١٢}$ جـ ٥ د ١٠

٤ $\frac{؏}{؏ س}$ (٢ - ٣س)$^{-٢}$

أ ١٢ س$^{-٢}$ - ٢٧ س$^{-٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ (٢ - ٣س)$^{-١}$ جـ ٦ (٢ - ٣س)$^{-٣}$ د - ٢ (٢ - ٣س)$^{-٣}$

٥ $\int \frac{؏}{؏ س}$ [د(س)] ؏س = ...

أ د(س) ب د(س) + ث جـ $\frac{؏}{؏ س}$ (د(س)) د $\int$ د(س) ؏س

٦ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية:

د(س) = { س^{٢} - ١ عندما س < ٢ ، ٤س عندما س > ٢ } عند س = ٢

٧ أوجد $\frac{؏ص}{؏ س}$ لكل مما يأتى:

أ ص = س^{٥} - ٢ $\sqrt[٣]{س^{٣}}$ ب ص = (٤س^{٢} + ١) (١ - ٤س^{٢})^{٢}

جـ ص = $\sqrt[٣]{(٢س+١)^{٥}}$ د ص = (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢)^{٥}

٨ إذا كان ص = (ع - ١)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٣ أوجد $\frac{؏ص}{؏ س}$

٩ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = (س - ٣)^{٢} - ١ والتي عندها المماس يوازي المستقيم ٢س + ص - ٣ = ٠

أوجد معادلة المماس لمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

١٠ ص = $\sqrt[٣]{س}$ + $\frac{٤}{\sqrt[٣]{س}}$ عند النقطة (٤، ٤)

(١١) ص = (س^{٢} + س) (س^{٣} + ٥) عند النقطة (-٢، -٦)

أوجد معادلة العمودى على المماس لمنحنى الدالة الآتية:

(١٢) ص = $\left(\frac{س + ٢}{س - ٢}\right)$ عند النقطة (٣، ٥)

(١٣) **أوجد التكاملات الآتية:**

أ $\int$ (س^{٣} + $\sqrt{٨ س}$) د س

ب $\int$ (س^{٢} + ١)^{٢} د س

جـ $\int$ س^{٢} (س^{٢} - ٣) د س

د $\int$ ٣(٣ س +١)^{٣} د س

هـ $\int$ (س^{٢} - ٣س - ١) د س

و $\int$ (٤ - ٣س)^{٧} د س