Mathématiques
Pures

Deuxième Secondaire

Livre de l'élève Premier Semestre

Section scientifique

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Essafty

M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Révision de traduction

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Khaled Sayed El shehabey

M. Akram Fawzy

SAKKARA PUBLISHING

Première édition 2015/2016

Numéro de Dépôt 10557 / 2015

Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 014 - 1

Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Égypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maître.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.
Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Épreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Épreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Unité 1

Fonctions réelles et re-présentation graphique

Unité 2

Puissance, Logrithmes et Applications

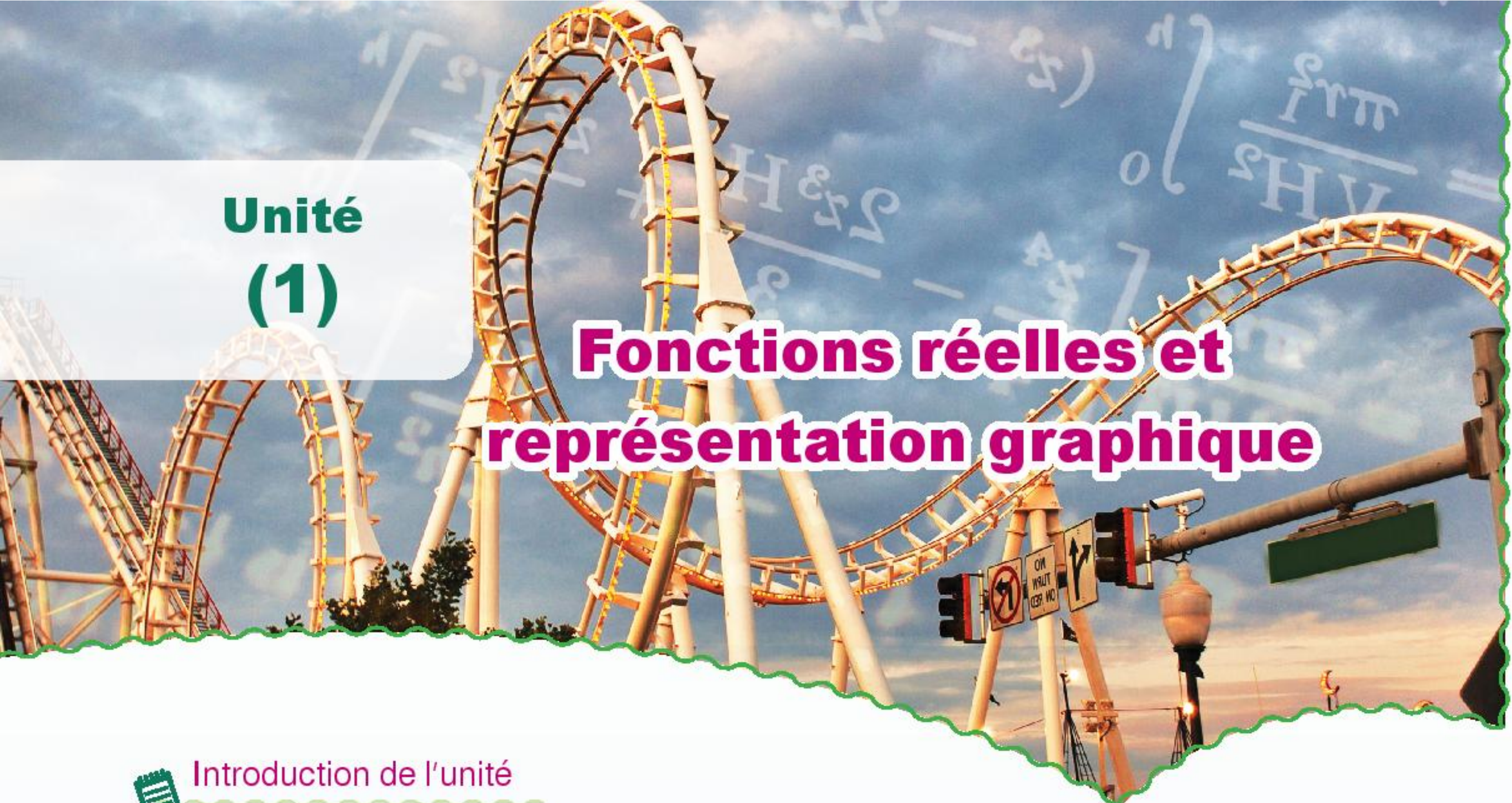
SOMMAIRE

Unité 3

Limites et continuité

Unité 4

Trigonométrie



Unité (1)

Fonctions réelles et représentation graphique

Introduction de l'unité

Le savant Suisse de mathématiques et physique, Leonhard Euler (1807-1873) fut l'un de plus important des savants de 18ième siècle ,il a généralisé un multitude des expressions mathématiques comme la nation de la fonctions. Il est le premier qui utilisé la notation $y = f(x)$ pour exprimer la fonction en considérant que la fonction est une relation entre les éléments de deux ensembles de sorte qu'on puisse calculer la valeur d'une variable dépendant y à partir d'un autre variable indépendant choisit librement ce qui est enduit à transformer la géométrie en relations arithmétiques ainsi que les rapports trigonométriques, connues par les pharaons et les babéliens et maitrisées par les arabes, en fonctions trigonométriques

Euler a introduit le constant $e \simeq 2.71828$ (nombre d'euler) comme une base du logarithme népérien, il a découvert la relation $e^{i\pi} + 1 = 0$ qui relie les cinq constants les plus importants en mathématiques.

Il a également relié les fonctions trigonométriques par les fonctions exponentielles et les nombres complexes

Dans cette unité, on va aborder des différentes formes des fonctions réelles : représentation graphique, transformation le su représentation, logiciels, utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie courante dans les différents domaines.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le concept de la fonction réelle.
- Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction réelle.
- Reconnaitre quelques propriétés des fonctions réelles.
- Identifier les fonctions injectives.
- Identifier les fonctions paires et les fonctions impaires et les distinguer.
- Déduire le sens de variation d'une fonction réelle (croissante, décroissante ou constante).
- Identifier les polynômes.
- Tracer les courbes représentatives des fonctions (carré – valeur absolue – cubique – rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$) et déduire les propriétés de chacune d'elles.
- Déduire l'effet des transformations : $f(x \pm a)$, $f(x) \pm a$ sur les fonctions précédemment citées.
- Déduire l'effet de $f(ax)$ et $af(x)$ sur les fonctions précédentes.
- Appliquer les transformations précédentes sur le tracé des courbes des fonctions réelles.
- Résoudre des équations de la forme : $|ax + b| = c$, $|ax + b| = |dx + c|$, $|ax + b| = cx + d$
- Résoudre des inéquations de la forme: $|ax + b| < c$, $|ax + b| > c$, $|ax + b| \leqslant c$, $|ax + b| \geqslant c$
- Utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie quotidienne dans les différents domaines.
- Relier les connaissances étudiées sur transformations précédentes aux fonctions trigonométriques sous forme d'activités.
- Utiliser le logiciel « Geogebra » pour représenter les fonctions graphiquement et voir l'effet des transformations sur ces fonctions.
- Utiliser une calculatrice programmable pour représenter les fonctions graphiquement et voir l'effet des transformations sur ces fonctions.

Expressions de base

- Fonction réelle
- Ensemble de définition
- Ensemble d'arrivée
- Ensemble image
- Une droite vertical
- Fonction définie par morceaux
- Composition de fonctions
- Fonction paire
- Fonction impaire
- Fonction injective
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante
- Fonction dé croissante
- Fonction constante
- Fonction polynôme
- Fonction valeur absolue
- Fonction du second degré
- Fonction rationnelle
- Asymptote
- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Homothétie
- Solution graphiqu

Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Fonctions réelles.

Leçon (1 - 2): Quelques propriétés des fonctions.

Leçon (1 - 3): Sens de variation des fonctions.

Leçon (1 - 4): Représentations graphiques des fonctions.

Leçon (1 - 5): Résolution des Equations et inéquations des la valeur absolue.

Aides pédagogiques

Calculatrice programmable – Ordinateur – Logiciels : Graph - Geogebra

Organigramme del'unité

Fonctions réelles

- Fonctions réelles
  - Ensemble de définition
  - Ensemble image
  - Opérations sur les fonctions
  - Composition de fonctions
- Propriétés des fonctions
  - Symétrie
  - Fonction injective
- Sens de variation d'une fonction
- Représentation graphiques des fonctions par les transformations géométriques
- Applications
  - Résolution des équations
  - Résolution des inéquations

Unité (1)

Fonctions réelles

1 - 1

Allez apprendre

- La notion de fonction réelle.
- Le test de la droite verticale.
- La fonction définie par morceaux.
- L'identification de l'ensemble de définition et l'ensemble image de la fonction.
- Les opérations sur les fonctions.

Vocabulaires de base

- *Fonction*
- *Ensemble de définition*
- *Ensemble d'arrivée*
- *Ensemble image*
- *Diagramme sagittale*
- *Diagramme cartésien*
- *Droite verticale*
- *Définition par morceaux.*

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

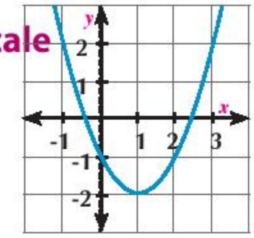
Rappeliez-vous que

Soit $f: X \longrightarrow Y$
Le graphe de la fonction $f =$
$\{(x; y): x \in X,$
$y \in Y, y = f(x)\}$

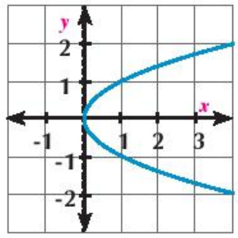
A apprendre

Test de la droite verticale

Si la droite verticale en tout élément de l'ensemble de définition passe par un seul point des points représentants la relation, alors cette relation est une fonction de $X \longrightarrow Y$



Une fonction



N'est pas de fonction

Exemple **Déterminer les relations qui représentent des fonctions**

(1) Dans chacune des figures suivantes, montrez si y représente une fonction en x ou non.

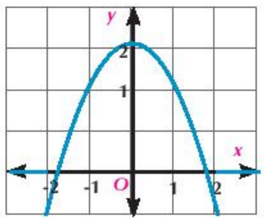


Fig (1)

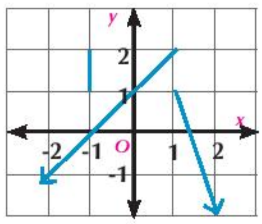


Fig (2)

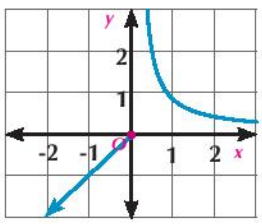


Fig (3)

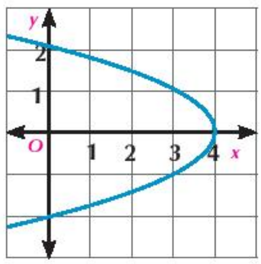


Fig (4)

Solution

La figure (1) représente une fonction.

La figure (2) ne représente pas de fonction car la droite verticale passant par le point de coordonneés (1 ; 0) coupe la courbe en deux points.

La figure (3) représente une fonction.

La figure (4) ne représente pas de fonction car il existe au moins une droite verticale qui coupe la courbe en plus qu'un point.

Essayez de résoudre

(1) Parmi les figures suivantes, laquelle représente une fonction de X ⟶ Y. Pourquoi?

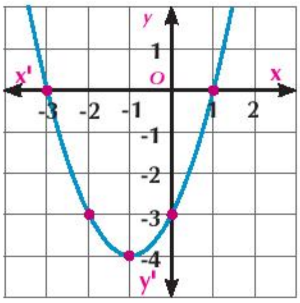


Figure (1)

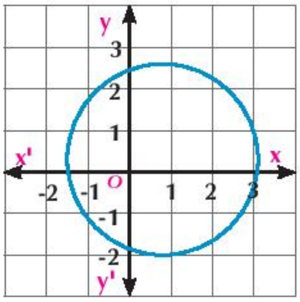


Figure (2)

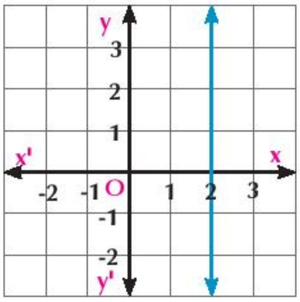


Figure (3)

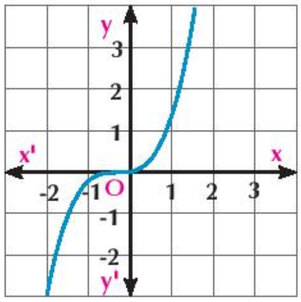


Figure (4)

Exemple Détermination de l'ensemble définition et l'ensemble image

(2) Soit f: $[1\ ;\ 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x + 1$

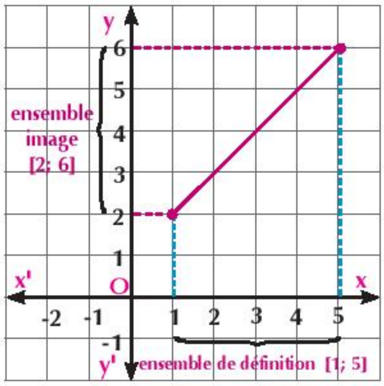
Tracez la courbe représentative de la fonction f, déduisez-en l'ensemble image de f.

Solution

La fonction f est une fonction affine, son ensemble de définition est $[1\ ;\ 5]$ Elle est représentée graphiquement par un segment de droite dont les extrémités sont les deux points de coordonnées $(1\ ;\ f(1))$, $(5\ ;\ f(5))$ ou les deux points de coordonnées $(1\ ;\ 2)$, $(5\ ;\ 6)$.

L'ensemble image de f = $[2\ ;\ 6]$

C'est l'ensemble des ordonnées des points appartenant à la courbe de la fonction.



Fonction définie par morceau:

A apprendre

La fonction définie par morceaux est une fonction réelle, pour quelques parties de son ensemble de définition sont attribués des règles de définitions différentes.

Représentation de la fonction définie par morceaux:

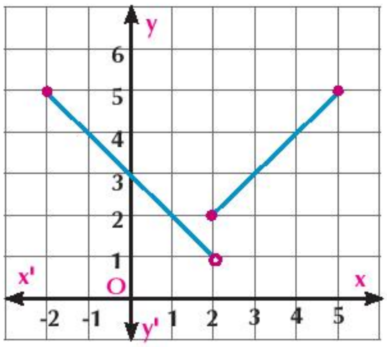
Exemple

(3) Soit $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 2 \\ x & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction, déduisez-en l'ensemble définition et l'ensemble image de la fonction.

Solution

La fonction est définie par morceaux sur deux intervalles, elle est attribuée par deux règles de définitions:



La première: $f_1(x) = 3 - x$ sur l'intervalle $-2 \leqslant x < 2$ ou sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2[$ C'est une fonction affine qui est représentée par un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(-2\ ;\ 5)$ et $(2\ ;\ 1)$ en posant un rond vide à l'extrémité de coordonnées $(2\ ;\ 1)$ car $2 \notin [-2\ ;\ 2[$ **(voir la figure ci-contre).**

La deuxième: $f_2(x) = x$ si $2 \leqslant x \leqslant 5$ ou sur l'intervalle $[2; 5]$
C'est une fonction affine qui est représentée par un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(2\ ;\ 2)$ et $(5\ ;\ 5)$

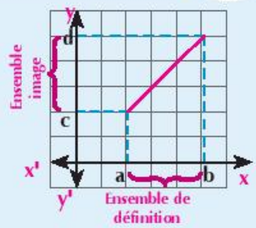
Donc l'ensemble définition de $f = [-2\ ;\ 2[\cup [2\ ;\ 5] = [-2\ ;\ 5]$

Du graphique, on déduit que:

L'ensemble définition de $f = [-2; 5]$

L'ensemble image de $f =]1; 5]$

Remarque



Dans le graphique représentant la fonction f. Le domaine de $f = [a\ ;\ b]$ L'ensemble image $= [c\ ;\ d]$

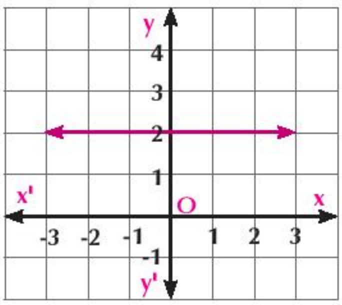
Essayez de résoudre

2) Soit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

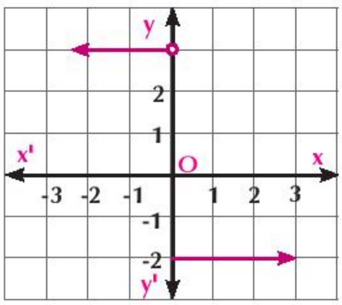
Tracer la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction.

3) Dans chacune des figures suivantes, déduisez l'ensemble définition et l'ensemble image de f.

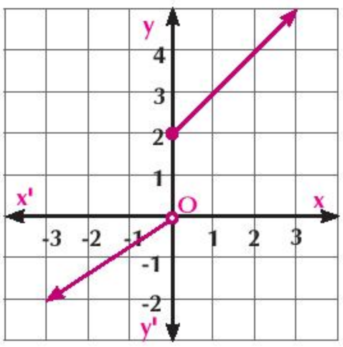
a



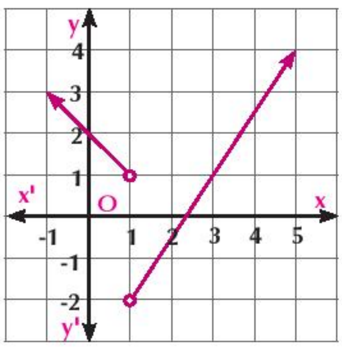
b



c



d



Détermination de l'ensemble définition d'une fonction réelle et les opérations

On peut déterminer l'ensemble définition d'une fonction réelle à partir de sa règle de définition ou de sa représentation graphique.

Exemple Détermination de l'ensemble définition d'une fonction

4 Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions réelles définies par les règles suivantes:

a $f_1(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ **b** $f_2(x) = \sqrt{x-3}$

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$

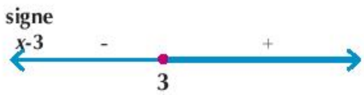
Remarque

L'ensemble de définition de la fonction polynôme est l'ensemble des nombres réels, s'il n'y pas d'indication contraire.

Solution

a La fonction f_1 n'est pas indéfinie lorsque le dénominateur = 0
pour cela $x^2 - 9 = 0$ alors $x = \pm 3$ l'ensemble définition de f_1 est donc $\mathbb{R} - \{-3\ ;\ 3\}$.

b La fonction f_2 est définie lorsque le radicand est positive ou nul, c.à.d. toutes les valeurs de x pour lesquelles $x - 3 \geqslant 0$.



$\because x - 3 \geqslant 0$ $\therefore x \geqslant 3$ $\therefore$ l'ensemble définition de $f_2 = [3\ ; +\infty[$.

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$, l'indice de la racine est nombre impaire l'ensemble définition de $f_3 = \mathbb{R}$

Remarquez que:

Soient $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ où $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, $g(x)$ est un polynôme

i) Si n est un nombre impair alors l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

ii) Si n est un nombre pair alors l'ensemble définition de f est les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$

Essayez de résoudre

4 Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions réelles définies par les règles suivantes:

a $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-3x+2}$ **b** $f_2(x) = \sqrt{x^2-16}$ **c** $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$

Pensé critique:

Trouvez la valeur de k , sachant que l'ensemble définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 6x + k}$ est $\mathbb{R} - \{3\}$

A apprendre

Opérations sur les fonctions

Soient f_1 et f_2 deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_1 et D_2 respectivement, alors:

1 $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, l' ensemble définition de $(f_1 \pm f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

2 $(f_1 . f_2)(x) = f_1(x).\ f_2(x)$, l' ensemble définition de $(f_1 . f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

3 $(\frac{f_1}{f_2})(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où $f_2(x) \neq 0$ l' ensemble définition de $(\frac{f_1}{f_2})$ est $(D_1 \cap D_2) - Z(f_2)$

Où $Z(f_2)$ est l'ensemble des zéros de f_2

On remarque que: dans tous les cas précédents, l'ensemble définition de la fonction obtenue est égale à l'intersection des ensemble de définition de f_1 et f_2 privé des valeurs qui rend $f_2(x) = 0$, c'est dans le cas de la division.

Exemple

5 Soient $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = \sqrt{4-x}$

i) Trouvez la règle et l'ensemble définition de chacune des fonctions suivantes:

a $(f + g)$ **b** $(g - h)$

c $(f.\ h)$ **d** $(\frac{h}{f})$

ii) Calculez la valeur numérique, si possible, pour chacune des fonctions suivantes:

a $(g - h)(1)$ **b** $(f.h)(5)$ **c** $(\frac{h}{f})(3)$

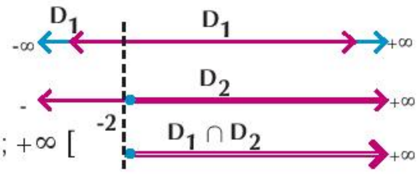
Solution

i) L'ensemble définition de $f = D_1 = \mathbb{R}$, l'ensemble définition de $g = D_2 = [-2\ ;+\infty[$, et l'ensemble définition de $h = D_3 =]-\infty\ ; 4]$

a $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= x^2 - 4x + \sqrt{x+2}$

L'ensemble définition de $(f + g)$ $\mathbb{R} \cap [-2\ ;+\infty[= [-2\ ;+\infty[$

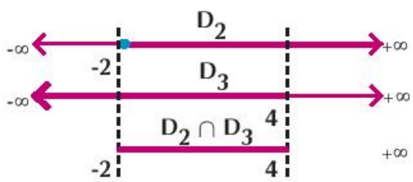


b $(g - h)(x) = g(x) - h(x)$

$= \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}$

L'ensemble définition de $(h - g)$ est

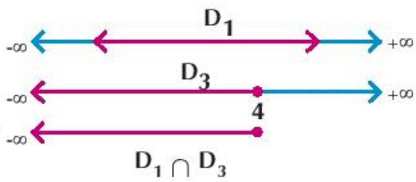
$[-2\ ;+\infty[\cap]-\infty; 4] = [-2\ ; 4]$

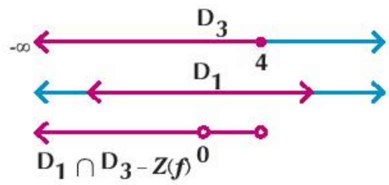


c $(f.\ h)(x) = f(x).h(x)$

$= (x^2 - 4x)\ \sqrt{4-x}$

L'ensemble définition de $(f.h) = \mathbb{R} \cap]-\infty\ ; 4] =]-\infty\ ; 4]$





d $(\frac{h}{f})(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-4x}$

L'ensemble des zéros de la fonction est $\{0 ; 4\}$

L'ensemble définition de $(\frac{h}{f}) =]-\infty ; 4] \cap R - \{0; 4\}$

$=]-\infty ; 4[- \{0\}$

ii) Les valeurs numériques:

a $\because (g-h)(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}$ pour tout $x \in [-2; 4]$,

$1 \in [-2; 4] \therefore (g-h)(1) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

b $\because (f \,.\, h)(x) = (x^2 - 4x)\sqrt{4-x}$ pour tout $x \in]-\infty ; 4]$

, $5 \notin]-\infty ; 4]$ $\therefore (f \,.\, h)(5)$ **est indéfinie**

c $\because (\frac{h}{f})(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-4x}$ pour tout $x \in]-\infty ; 4[- \{0\}$

$\therefore (\frac{h}{f})(3) = \frac{\sqrt{4-3}}{9-12} = -\frac{1}{3}$

Essayez de résoudre

5) Soient f et g deux fonctions réelles définies par :

$f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x-1}$. **Trouvez :**

a L'ensemble définition des fonctions: $(f+g)$, $(f \,.\, g)$, $(\frac{f}{g})$, $(\frac{g}{f})$

b Calculez la valeur numérique, si possible, pour chacune des fonctions suivantes:

$(f+g)(5)$, $(f.\ g)(2)$, $(\frac{f}{g})(3)$, $(\frac{g}{f})(-2)$

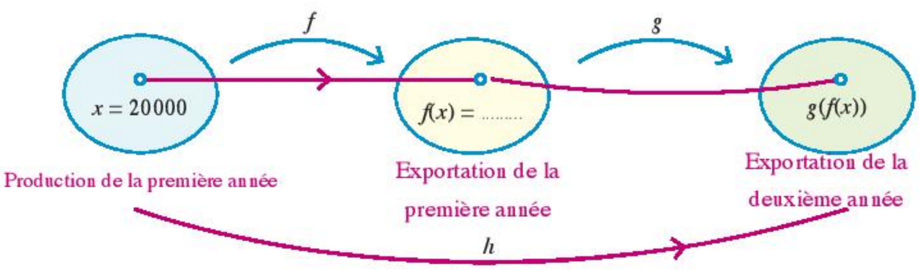
Travail coopératif

Composée des fonctions

Une usine exporte une partie de sa production suivant la relation $f(x) = \frac{1}{4}x$ où x représente le nombre des unités produites à la première année. Le nombre des unités produites à la deuxième année est donné par la relation $g(f) = f + 1500$ où x représente le nombre des unités exportées à la première année. Avec votre camarade, trouvez le nombre des unités exportées à la deuxième année si la production de la première année est:

a 20000 unités. **b** 80000 unités.

Suivez le schéma suivant pour vérifier votre réponse :



A apprendre

Si l'ensemble image de la fonction f est une parti de l'ensemble de définition de la fonction g, on peut déduire une nouvelle fonction h composée de deux fonctions notée $\boxed{h = g \circ f}$ qui se lit g rond f. ce que veut dire composé de f suivie de g

On a donc $h(x) = (g \circ f)(x)$

$= g(f(x))$

Du schéma précédent, on obtient:

a $h(20000) = g\,[f(20000)]$
$= g(5000)$
$= 5000 + 1500 = 6500$ unités.

b $h(80000) =$ ....

Remarque

$f(20000) = \frac{1}{4} \times 20000$
$= 5000$

Réfléchissez : La composée des fonctions, est-elle une opération commutative?

➢ Pour répondre à cette question, trouver $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$ pour $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 2x$

Essayez de résoudre

6 Soient $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 3x$

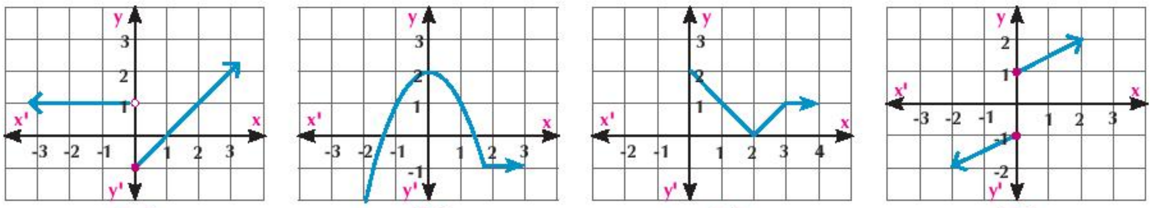
i) Trouvez $(f \circ g)(3)$

ii) Déterminez la valeur de x pour que $(f \circ g)(x) = 42$

Exercices (1 - 1)

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1 Parmi les diagrammes cartésiens suivants, la relation qui ne représente pas de fonction est:



(a) (b) (c) (d)

2 Dans toutes les relations suivantes, y est une fonction en x sauf la relation:

a $y = 3x + 1$

b $y = x^2 - 4$

c $x = y^2 - 2$

d $y = \sin x$

Répondez à ce qui suit:

3 Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x)= \begin{cases} x - 1 & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \\ -1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

Puis tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduirz l'ensemble image.

4 Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x > 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction.

5 Soit $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

6 Soit: $f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{si } x < 1 \\ -x^3 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

Trouvez :

a $f(2)$ b $f(1)$ c $f(10)$

7 **En lien avec la mécanique:** Si la vitesse d'une moto est $v(t)$ cm/s , où t est le temps, est donnée par la relation v définie par:

$$v(t) = \begin{cases} 8t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 80 & \text{si } 10 < t < 200 \\ -4t + 880 & \text{si } 200 \leqslant t \leqslant 220 \end{cases}$$

Trouvez :

a $v(10)$ b $v(150)$ c $v(210)$

8 **En lien avec la commerce:** Soit la fonction f où :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5000 \\ 2x + 2500 & \text{si } 5000 < x \leqslant 15000 \\ \frac{3}{2}x + 10000 & \text{si } 15000 < x \leqslant 60000 \end{cases}$$

Représentez la somme reçue par l'une des sociétés de la distribution d'un type des appareils où x est le nombre d'appareil. Trouvez :

a $f(5000)$ b $f(10000)$ c $f(50000)$

(9) Déterminez l'ensemble de définition de chacune des fonctions réelles suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 5x + 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 + 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

(d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x - 1}}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

(10) **Soient:** $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_1(x) = 3x - 1$,

$f_2 : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_2(x) = 2x + 4$

Trouvez , en indiquant l'ensemble définition de : $(f_1 + f_2)(x)$, $(f_1 - f_2)(x)$

(11) **L'ensemble définition de :** $f_1(x) = x + 2$ est l'ensemble définition de $f_1 = [-3 ; 4]$, $f_2(x) = x^2 + 2x$ est $f_2 = [-1 ; 3]$,

Trouvez : $(f_1 + f_2)(x)$, $(f_2 - f_1)(x)$, $(\frac{f_1}{f_2})(x)$, $(\frac{f_2}{f_1})(x)$ en indiquant l'ensemble de définition de chacune des fonctions ainsi obtenues.

(12) **Soient :** $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 5$ et $h(x) = x^3$
Trouvez:

(a) $(f \circ g)(2)$ (b) $(g \circ f)(-3)$ (c) $(g \circ h)(1)$ (d) $(h \circ f)(-2)$

(13) **Soient :** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x + 3$

Trouvez : $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$

(14) **Soient:** $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x - 2}$

trouvez: $(f \circ g)(x)$ sous la forme la plus simple en indiquant l'ensemble définition de la fonction ainsi obtenue puis trouvez $(f \circ g)(3)$

Quelques propriétés des fonctions

1 - 2

On peut caractériser facilement des propriétés géométriques de la courbe représentative d'une fonction f où $y = f(x)$. ces propriétés peuvent être utilisées pour l'étude des fonctions et leurs applications. Parmi ces propriétés la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et la symétrie par rapport à l'origine..

Allez apprendre

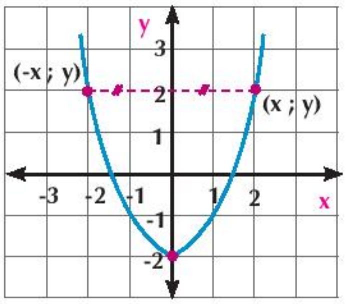
- La symétrie des courbes.
- Représentatives des fonctions.
- Les fonctions paires.
- Les fonctions impaires.
- Les fonctions injectives.

Préliminaire

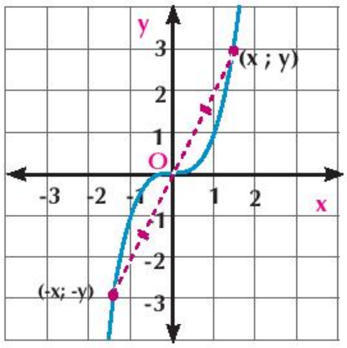
Vous avez déjà étudié la notion de la symétrie par rapport à une droite où on peut plier la figure le long de la droite pour obtenir deux demi-figures superposables. Vous avez également étudié la symétrie par rapport à un point.

Vocabulaires de base

- Fonction paire
- Fonction impaire
- Fonction injective
- Droite horizontale



Symétrie par rapport à l'axe des *y*
Fig (1)



Symétrie par rapport à l'origine
Fig (2)

Dans la figure (1)

Le point $(-x\ ;\ y)$ situé sur la courbe de la fonction est l'image du point $(x\ ;\ y)$ situé sur la même courbe par la symétrie par rapport à l'axe des y.

Aides pédagogiques

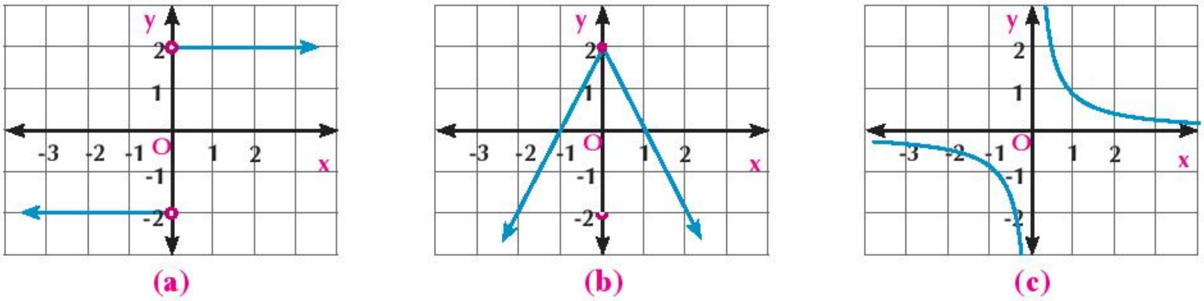
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Dans la figure (2):

La représentation graphique de la relation entre x et y montre une symétrie par rapport au point d'origine où le point $(-x\ ;\ -y)$ de la courbe est l'image du point $(x\ ;\ y)$ situé sur la même courbe.

Essayez de résoudre

1) Dans chacune des figures suivantes, montrez si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y ou par rapport à la origine.



Pensé critique:

Est-ce que toutes les courbes représentatives des fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine ? vérifier votre réponse.

Fonctions paires et fonctions impaires:

A apprendre

Fonction paire: On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est paire si $f(-x) = f(x)$, pour tout $x \in X$, $-x \in X$ et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire: On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in X$, $-x \in X$ x et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Remarque : Beaucoup des fonctions ne sont ni pares ni impaires.

Pour étudier la parité d'une fonction, on vérifie d'abord l'existence de x et $-x$ dans l'ensemble de définition de la fonction sinon on n'a pas besoin de chercher $f(-x)$.

Exemple

1) Étudiez la parité de chacune des fonctions suivantes .

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x+3}$ d) $f(x) = \cos x$

Solution

a) $f(x) = x^2$ ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

C.à.d: $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ La fonction f est paire.

b) $f(x) = x^3$ ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

C.à.d: $f(-x) = -f(x)$ $\therefore$ La fonction f est impaire

Remarque importante:

La fonction f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = ax^n$ où $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ est appelée fonction exponentielle.

Cette fonction est paire si n est un nombre paire et elle est impaire si n est un nombre impaire.

c) $f(x) = \sqrt{x+3}$, ensemble définition de $f = [-3 \,;\, +\infty[$

Remarquez que $4 \in [-3 \,;\, +\infty[$ tandis que $-4 \notin [-3 \,;\, +\infty[$

$\because$ Pour tout $x \in [-3 \,;\, +\infty[$ il n'a pas $-x \in [-3 \,;\, +\infty[$

La fonction f est ni paire ni impaire.

d) $f(x) = \cos x$, ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

C.à.d.: $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ f la fonction f est paire

Remarquer

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$

Essayez de résoudre

2) Etudiez la parité de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = x^2 + \cos x$ c) $f(x) = x^3 - \sin x$

d) $f(x) = x^2 \cos x$ e) $f(x) = x^3 \sin x$ f) $f(x) = x^3 \cos x$

g) $f(x) = x^3 + x^2$ h) $f(x) = \sin x + \cos x$ i) $f(x) = \sin x \cos x$

Que déduisez-vous?

Remarques importantes:

Si f_1 et f_2 sont des fonctions paires et g_1 et g_1 sont des fonctions impaires, alors:

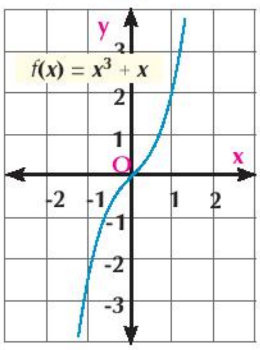
1) $f_1 + f_2$ est une fonction paire
2) $g_1 + g_2$ est une fonction impaire.
3) $f_1 \times f_2$ est une fonction paire
4) $g_1 \times g_2$ est une fonction paire.
5) $f_1 \times g_2$ est une fonction impaire
6) $f_1 + g_2$ est une fonction qui n'est ni paires ni impaire.

En utilisant les propriétés précédentes, vérifiez votre réponse obtenues en Essayez de résoudre (2).

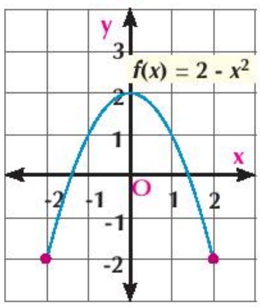
Exemple

2) Chacune des figures suivantes est une représentation de la fonction f. Déterminez graphiquement si la fonction est paire ou impaire ou ni paire ni impaire puis vérifiez la réponse algébriquement.

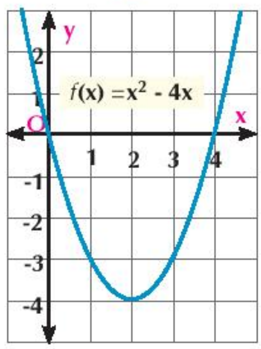
a



b



c



Solution

a) $f(x) = x^3 + x$. de la représentation graphique, on remarque que:

L'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$ et la courbe de la fonction est symétrique par rapport au point d'origine donc la fonction est impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$\because$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $\therefore f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

En simplifiant: $\quad$ $f(-x) = -x^3 - x$

Prendre (– 1) facteur commun $\quad$ $f(-x) = -(x^3 + x)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc la fonction est impaire.

b $f(x) = 2 - x^2$, de la représentation graphique, on remarque que

L'ensemble définition de $f = [-2 ; 2]$, et la courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la fonction est paire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$\because$ Pour tout $x \in [-2 ; 2]$, $-x \in [-2 ; 2]$ $\quad\quad$ $\therefore f(-x) = 2 - (-x)^2$

En simplifiant $\quad$ $f(-x) = 2 - x^2$

$f(-x) = f(x)$ $\quad\quad$ **Donc** la fonction est paire

c $f(x) = x^2 - 4x$, de la représentation graphique, on remarque que:

L'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, et la courbe de la fonction n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni symétrique par rapport au point d'origine. Donc la fonction n'est ni paire ni impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$\because$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $\therefore f(-x) = (-x)^2 - 4(-x)$

En simplifiant $\quad$ $f(-x) = x^2 + 4x \quad \neq f(x)$ $\quad\quad$ $\therefore$ f n'est pas paire

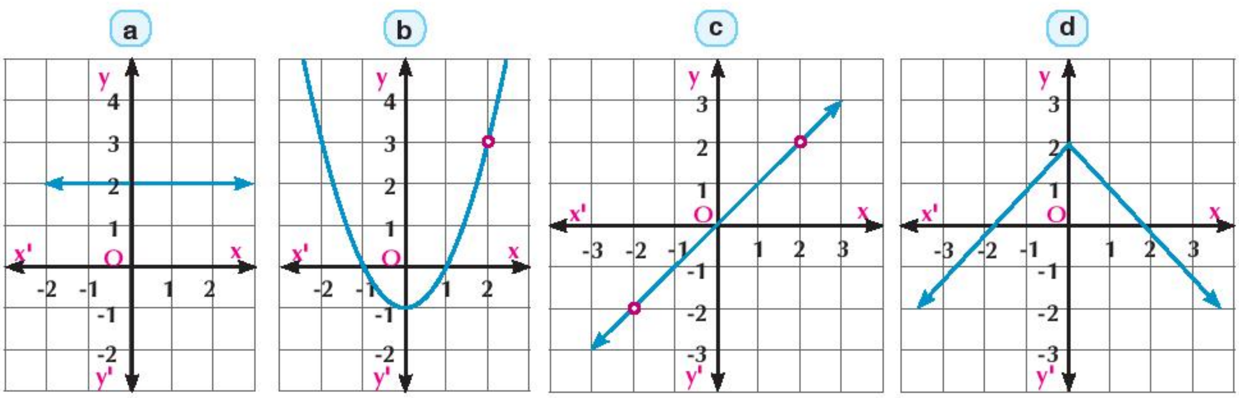
Mais $\quad$ $-f(x) = -x^2 + 4x$

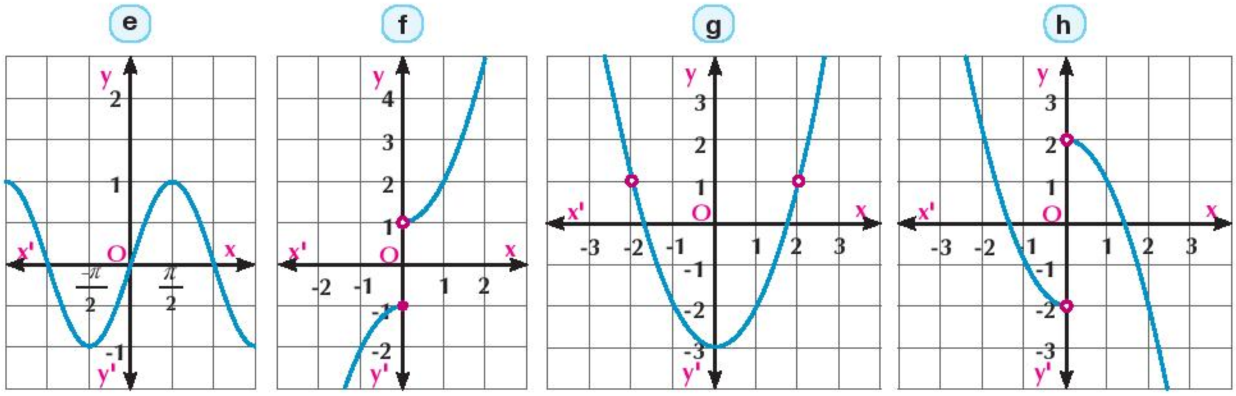
Donc $\quad$ $f(-x) \neq -f(x)$ $\quad\quad$ $\therefore$ f n'est pas impaire

Donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

Essayez de résoudre

3 Dans chacune des figure suivantes, déterminez si la fonction est paire ou impaire ou n'est ni paire ni impaire.





Essayez de résoudre

(4) Représentez graphiquement la fonction $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x > -2 \\ -x - 2 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$

Du graphique: montrez la parité de la fonction f puis vérifiez le résultat algébriquement.

Fonction injective:

Définition 1

La fonction $f: X \longrightarrow Y$ est une **fonction injective** si :

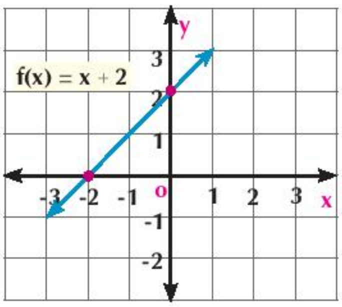
Pour tout $a \in x$, $b \in x$, $f(a) = f(b)$ alors $a = b$

Autrement dit, si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$

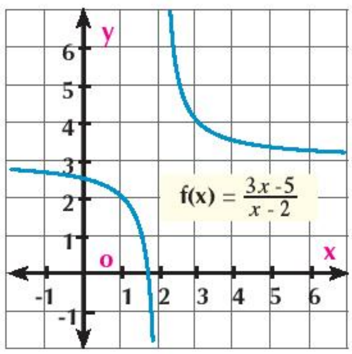
Exemple

(3) Les figures suivantes sont des représentations d'une fonction $f: X \longrightarrow Y$, démontrez que la fonction f est injective.

a



b



Solution

(a) $f(x) = x + 2$, ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) = a + 2$ et $f(b) = b + 2$

En posant $f(a) = f(b)$ $\therefore a + 2 = b + 2$

d'où 2 on a $\therefore a = b$ **Donc la fonction f est injective**

b $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$, ensemble définition de $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Pour tout $a \in \mathbb{R} - \{2\}$, $b \in \mathbb{R} - \{2\}$ et $f(a) = \dfrac{3a - 5}{a - 2}$, $f(b) = \dfrac{3b - 5}{b - 2}$

En posant $f(a) = f(b)$ $\therefore \dfrac{3a - 5}{a - 2} = \dfrac{3b - 5}{b - 2}$

$3ab - 6a - 5b + 10 = 3ab - 6b - 5a + 10$

D'où $\therefore a = b$ **Donc la fonction est f est injective.**

A apprendre

Test de la droite horizontale

La fonction f: X $\longrightarrow$ Y est une injection si la droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) en tous les points représentant l'ensemble image de f coupe la courbe de la fonction en un point unique.

Essayez de résoudre

5) Au paragraphe Essayez de résoudre (3) page (19), démontrez que les courbes représentent des fonctions injectives.

6) Démontrer que f: X $\longrightarrow$ Y est une bijection:

a $f(x) = 2x - 3$ **b** $f(x) = \dfrac{3x - 5}{4x + 3}$

Exemple

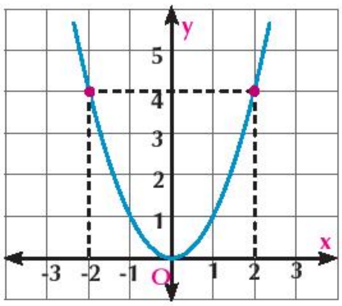
4) Démontrez que la fonction f: X $\longrightarrow$ Y telle que $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution

$f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$ $\therefore$ **$f(-2) = f(2) = 4$**

$\because$ **$-2 \neq 2$** $\therefore$ f La fonction n'est pas injective

On remarque que la droite horizontale en $y = 4$ coupe la courbe de la fonction en deux valeurs différentes de la variable x qui sont -2 et 2.



Essayez de résoudre

7) Démontrez que les fonctions f: X $\longrightarrow$ Y suivantes sont injectives

a $f(x) = x^2 - 1$ **b** $g(x) = x^2 - 5x + 6$

Pensé critique : Soit f une fonction paire, peut-elle être une fonction injective ? Expliquez.

Exercices 1 - 2

1 Indiquez si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x , par rapport à l'axe des y ou par rapport au point d'origine. Expliquez la réponse.

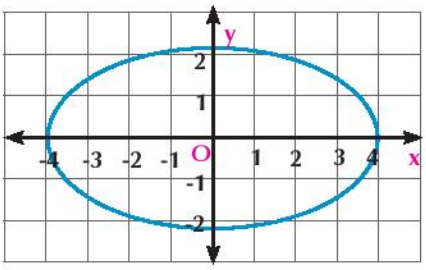


Figure (1)

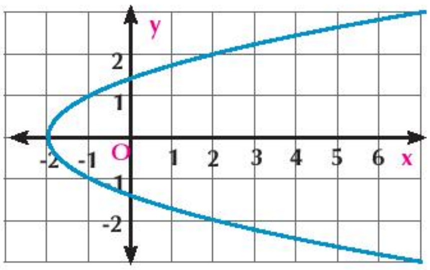


Figure (2)

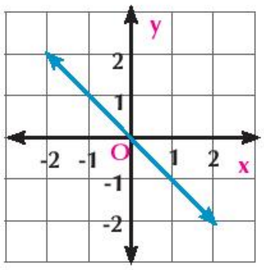


Figure (3)

2 Trouvez l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes en déterminant sa parité.

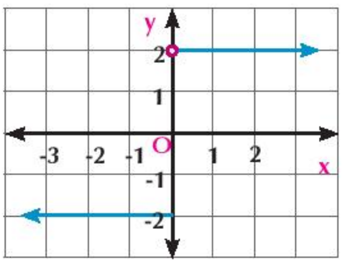


Figure (1)

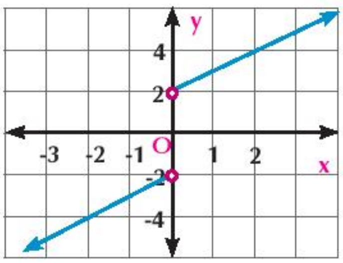


Figure (2)

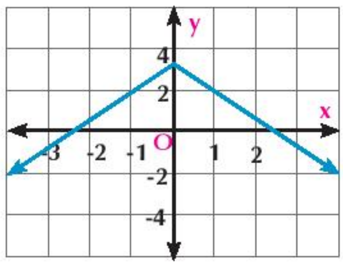


Figure (3)

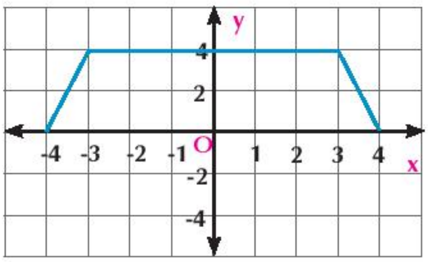


Figure (4)

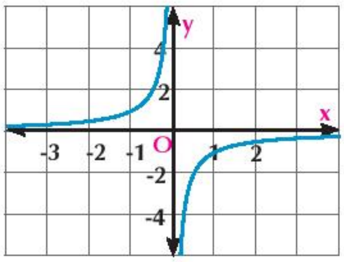


Figure (5)

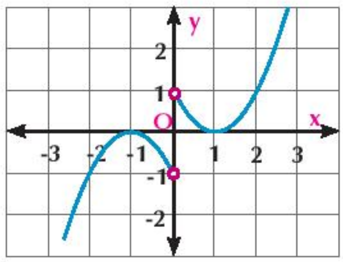


Figure (6)

3 Etudiez la parité des fonctions suivantes :

a $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

b $f(x) = 3x - 4x^3$

c $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

d $f(x) = x^2 - 3x$

e $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 3}$

f $f(x) = x \cos x$

g $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$

h $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

i $f(x) = (x^2 + 1)^3$

4 Soient f_1 , f_2 et f_3 des fonctions réelles définies par $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = 5x^2$, Parmi les fonctions suivantes, indiquez celle qui sont paires, celle qui sont impaires et celle qui ne sont ni paires ni impaires

a $f_1 + f_2$ **b** $f_1 + f_3$ **c** $f_1 \times f_2$ **d** $f_3 \times f_2$

5 Soient f et g des fonctions réelles définies par $f(x) = (3 - x)^2$ et $g(x) = (3 + x)^2$
Parmi les fonctions suivantes, indiquez celle qui sont paires, celle qui sont impaires et celle qui ne sont ni paires ni impaires.

a $f + g$ **b** $f - g$ **c** $f \cdot g$ **d** $\frac{d}{h}$

6 Observer les figures puis répondre aux questions suivantes:

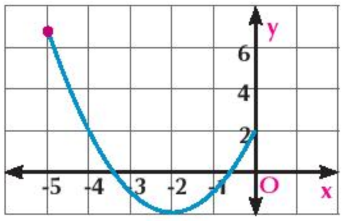


Figure (1)

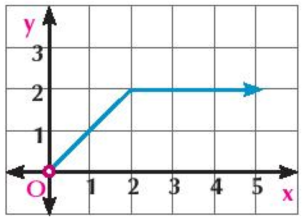


Figure (2)

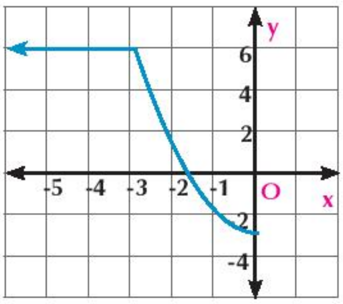


Figure (3)

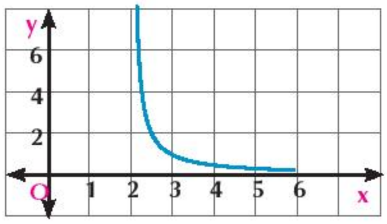


Figure (4)

i) Complétez la représentation graphique de la figure (1) pour obtenir une fonction paire sur son ensemble de définition.

ii) Complétez la représentation graphique de la figure (2) pour obtenir une fonction impaire sur son ensemble de définition.

iii) Trouvez l'ensemble image dans chaque cas , ensuite indiquez celle qui est injective.

7 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez si la fonction est injective ou non en justifiant la réponse.

a $f(x) = 3x + 1$ **b** $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$ **c** $f(x) = x^3 + 1$

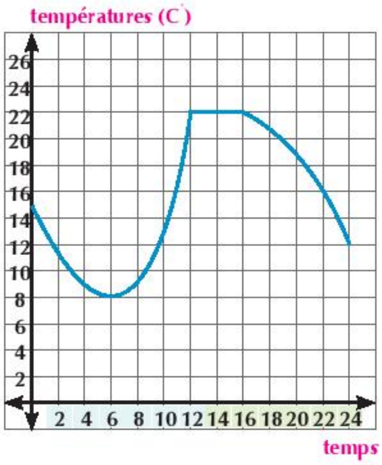
d $f(x) = 2x^2 - x - 3$ **e** $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

Sens de variation des fonctions

1 - 3

Réflichissez et discutez

Le graphique ci - contre indique les températures enregistrées au Caire pendant un jour observez la variation de température par rapport au temps, puis déterminez:



a Les intervalles de décroissance de degrés de température.

b Les intervalles de croissance de degrés de température

c Les intervalles où la variation de degrés de température est constante.

Les propretés de la courbe aident à étudier la variation de la fonction pour déterminer les intervalles de croissance, de décroissance et les intervalles où la fonction est constante. Autrement dit c'est l'étude de la monotonie de la fonction ou son sens de variation.

Allez apprendre

- Sens de variation des fonctions.
- Utilisation du logiciel (Geogebra) pour tracer les courbes représentatives des fonctions

Vocabulaires de base

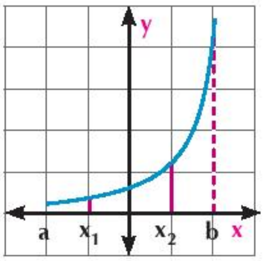
- Sens de variation
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Fonction constante

A apprendre

Fonction croissante:

On dit que la fonction f est croissante sur un intervalle]a , b[si pour tout $x_1 \in$]a ; b [, $x_2 \in$]a ; b [

si: $x_2 > x_1$ alors: $f(x_2) > f(x_1)$

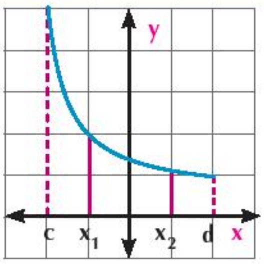


Fonction décroissante:

On dit que la fonction f décroissante sur un intervalle $]c , d[$

si pour tout $x_1 \in]c ; d[$, $x_2 \in]c ; d[$ si: $x_2 > x_1$

alors: $f(x_2) < f(x_1)$

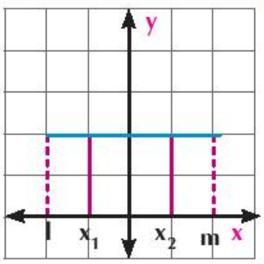


Fonction constante:

On dit que la fonction f est constante sur un intervalle $]\ell ; m[$

si pour tout $x_1 \in]\ell ; m[$, $x_2 \in]\ell ; m[$ si: $x_2 > x_1$

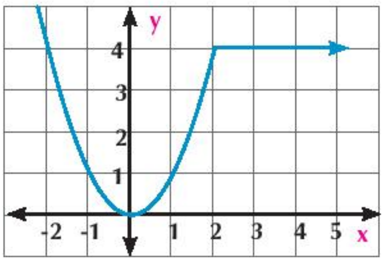
alors: $f(x_2) = f(x_1)$



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Exemple

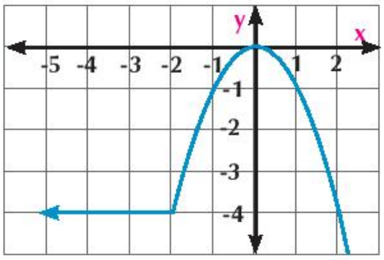


(1) Etudiez le sens de variation de la fonction représentée dans la figure ci-contre.

Solution

- La fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$
- La fonction est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$
- La fonction est contante sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty\ [$

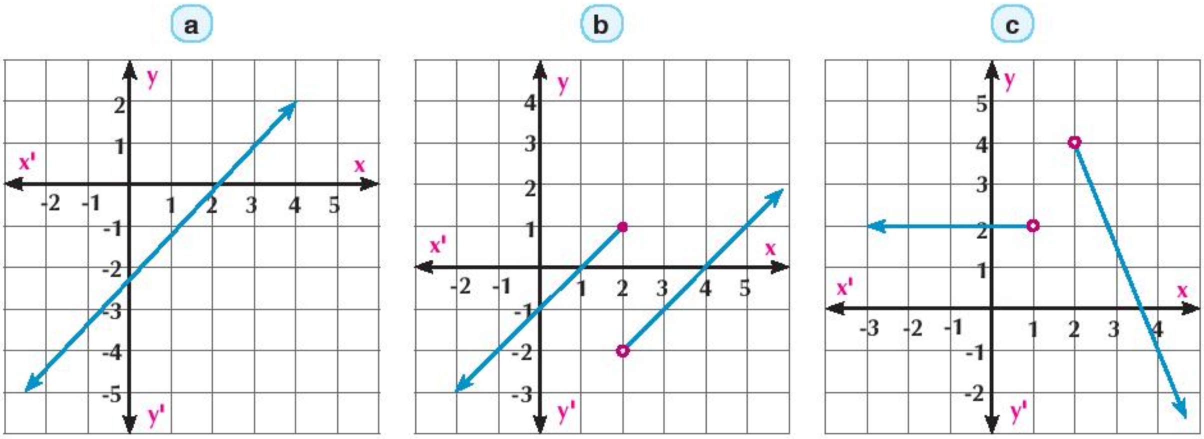
Essayez de résoudre



(1) Dans la figure ci-contre:
Etudiez les intervalles où la fonction est croissante, les intervalles où la fonction est décroissante et les intervalles où la fonction est constante.

Exemple

(2) Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions $f\colon X \longrightarrow Y$, si $y = f(x)$ Du graphique, déduisez l'ensemble image et étudiez le sens de variation de chaque fonction.



Solution

(a) L'ensemble définition de $f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$, L'ensemble image de $f =]-\infty\ ;\ +\infty[$ la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$

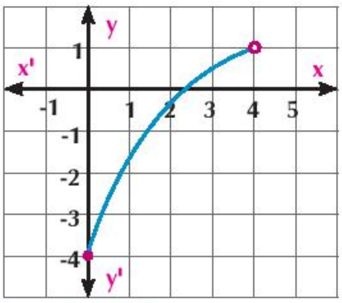
(b) L'ensemble définition de $f =]-\infty\ ;\ 2] \cup]2\ ;\ +\infty\ [=]-\infty\ ;\ +\infty[$
la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$, la fonction est croissante sur $]\ 2\ ;\ +\infty[$

(c) L'ensemble définition de $f =]\ -\infty\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$, L'ensemble image de $f =]-\ \infty\ ;\ 4[$
la fonction est constante sur $]-\infty\ ;\ 1[$, la fonction est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$

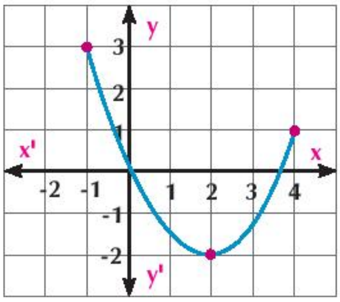
Essayez de résoudre

(2) Dans chacune des figures suivantes, déduisez l'ensemble définition, l'ensemble image et étudiez le sens de variation de chaque fonction:

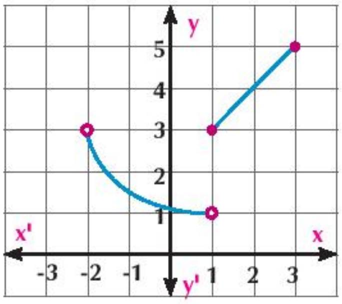
(a)



(b)



(c)



Pensé critique: La quelle parmi les figures précédentes représente une fonction injective? Pourquoi?

Utilisation des logiciels pour étudier quelques propriétés des fonctions

Les logiciels qui servent à tracer les courbes des fonctions sont multiples. *GeoGebra* est l'un de plus utile pour la tablette et l'ordinateur.

Activité **Utilisation du logiciel Geogebra pour construire des transformations des courbes des fonctions**

En Utilisation du *GeoGebra* représente graphiquement la fonction f et: $f(x) = x^3 - 3x + 2$, Du graphique:

(a) Trouver l'ensemble définition et celui d'image de la fonction.

(b) Déterminer le sens de variation de la fonction puis étudier la parité de la fonction.

Pour représenter la fonction graphiquement, suivez les étapes suivantes:

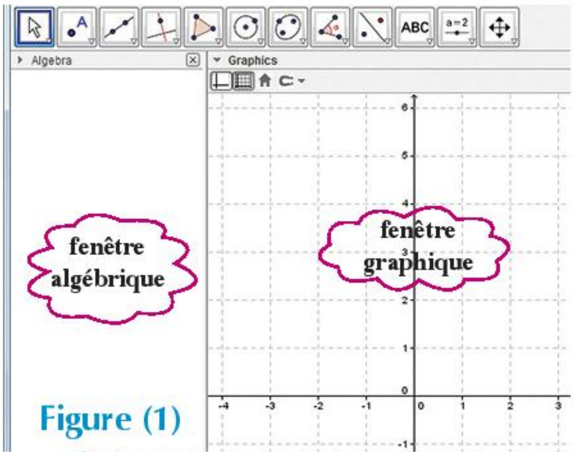


Figure (1)

1- Ouvrez la fenêtre algèbre et celle graphique du logiciel *GeoGebra* puis.

Appuyer sur ▾ *Graphics* et choisissez ▦ pour retrouver la fenêtre indiquée dans la **figure (1).**

2- Dans la fenêtre algébrique, écrivez la règle de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en utilisant la touche (Insérer) comme il est indiqué ultérieurement:

[χ] [^] [3] [-] [3] [χ] [+] [2]

Puis appuyer sur le bouton ↵ La courbe apparaitra dans la partie graphique de l'écran, et la règle apparaitre dans la partie algébrique **Figure (2)**

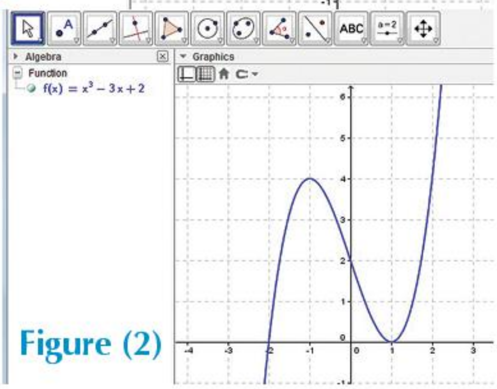


Figure (2)

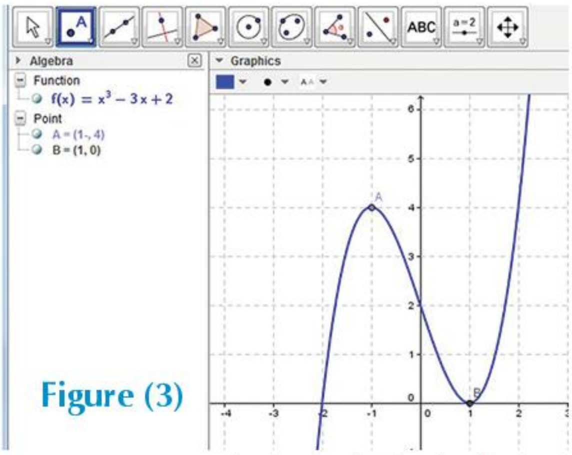
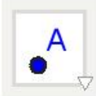
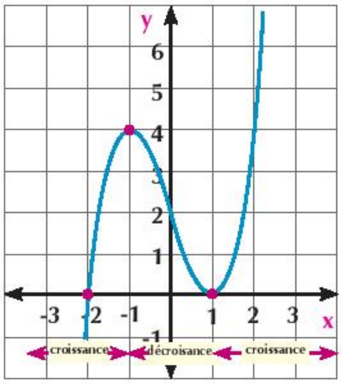


Figure (3)

3- Pour déterminer un point de la courbe choisissez  de la barre outils puis choisissez un nouveau point de la fenêtre. Déplacez le curseur jusqu' à ce que vous arriviez au point souhaité sur la courbe et cliquez sur insérer pour faire apparaitre le point sur la courbe, les coordonnées du point apparaissent dans la fenêtre algébrique comme dans la figure (3).

Da la représentation graphique, on trouve que:



a L'ensemble définition de la fonction f =]-∞ ; +∞[, l'ensemble image de la fonction f =]- ∞ ; +∞[

b La fonction est croissante sur]- ∞ ; -1[, décroissante sur]-1 ; 1[, croissante sur]1 ; +∞[. La fonction n'est ni paire ni impaire.

Remarque:

Le point de coordonnées (0 ; 2) est un point de symétrie de la courbe la fonction n'est pas une injection.

Entraînement sur l'activité

En Utilisation le logiciel *Geogebra* représente graphiquement la fonction f: $f(x) = 3x - x^3$ Du graphique déterminer le se de variation de la fonction puis étudiez la parité de la fonction.

Exercices 1 - 3

1 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction:

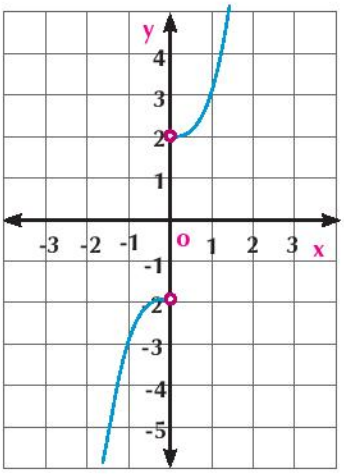


Figure (1)

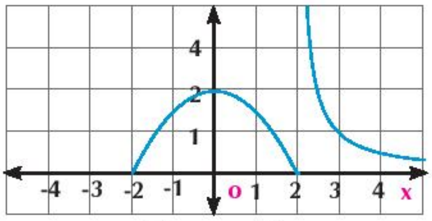


Figure (2)

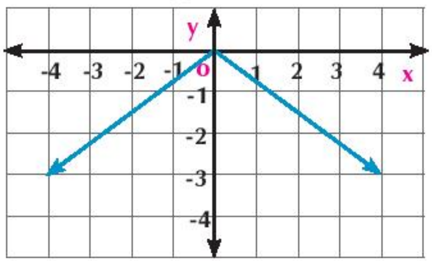


Figure (3)

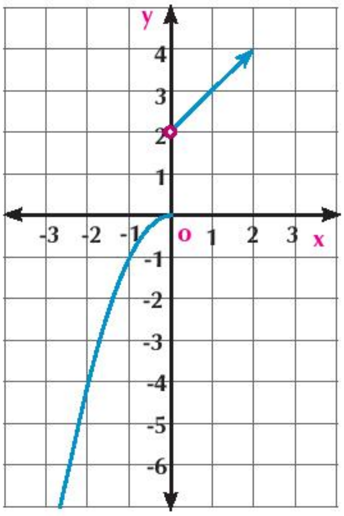
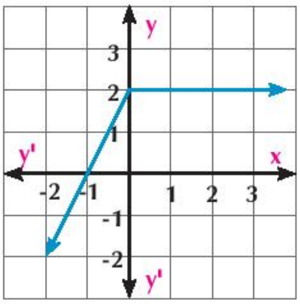


Figure (4)

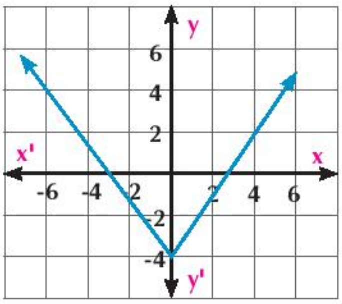
2 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions.

Du graphique, déduisez l'ensemble image et étudiz le sens de variation de chaque fonction.

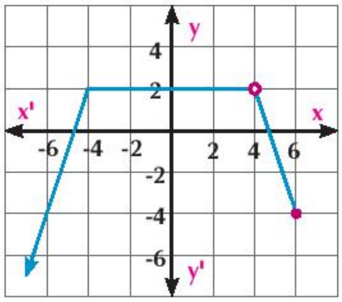
a



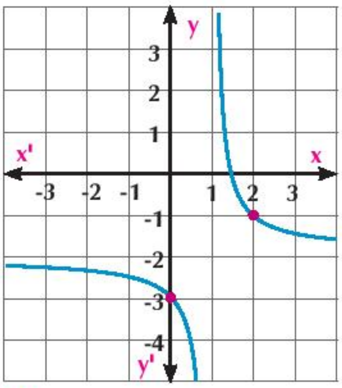
b



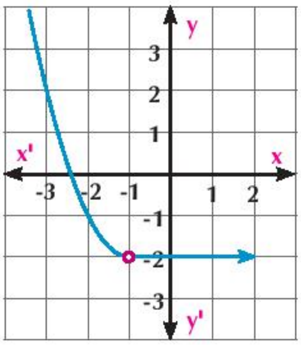
c



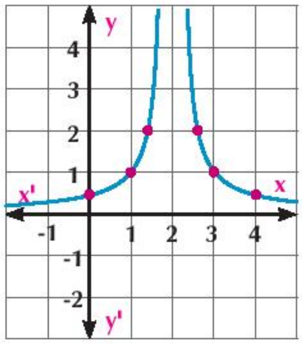
d



e



f



3 Soit $f: [-2\ ,\ 6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

a Représentez graphiquement la fonction f. Du graphique: déduisez l'ensemble définition de la fonction et étudier son sens de variation..

b La fonction-est elle injective ? Vérifiez votre réponse.

4 **Pensé créative**

Si la fonction est toujours croissante ou décroissante sur son l'ensemble définition, alors la fonction est injective? Vérifiez votre réponse.

Unité (1)

1 - 4 Représentations graphiques des fonctions

Allez apprendre

- Fonctions polynômes (affine, carrée, cubique)
- Fonction valeur absolue (module)
- Fonction rationnelle
- Utiliser les transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions
  $y = f(x) + a$
  $y = f(x + a)$
  $y = f(x + a) + b$
  $y = - f(x)$
  $y = a\, f(x)$
  $y = a\, f(x + b) + c$
- Les transformations géométriques de quelques fonctions trigonométriques.

Vocabulaires de base

- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Verticale
- Horizontale
- Asymptote

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Fonction polynôme:

Vous avez déjà étudié les fonctions polynômes dont l'expression algébrique est sous la forme:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots + a_n x^n$$

où: $a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , \dots\dots , a_n \in \mathbb{R} , a_n \neq 0 , n \in \mathbb{N}$
L'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sont l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (sauf indication contraire). Ces fonctions sont appelées fonctions de degré n. Le degré d'une fonction polynôme non nulle est la plus grande puissance prise par la variable indépendante x. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques fonctions polynômes.

Remarquez:

1- Si $f(x) = a_0$ et $a_0 \neq 0$ alors f est appelée une fonction polynôme constante.

2- Les fonctions polynôme de premier degré sont appelées des fonctions affines, les fonctions de second degré sont appelées fonction carrées et celles du troisième degré sont appelées fonctions cubes.

3- Si on additionne ou soustrait des fonctions de puissances différentes, on obtient une fonction polynôme.

4- Les zéros d'une fonction polynôme sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction avec l'axe des abscisses.

5- Deux fonctions polynôme f , g sont égales si elles ont le même f degré et les coefficients correspondants sont égaux.

Exemple

1 Si f et g sont deux polynômes telles que $f(x) = (a\,x + 5)^2$.
$g(x) = 9x^2 + 30\,x + c - 4$, et $f(x) = g(x)$, trouvez les valeurs de a et c.

Solution

$f(x) = (a\,x + 5)^2 = a^2 x^2 + 10a\,x + 25$

$\because\ f(x) = g(x)$ $\quad\therefore$ Les coefficient de puissance de x sont égaux

Comparons les coefficients des x : $10a = 30$ $\quad\therefore\ a = 3$

Les termes constants: $c - 4 = 25$ $\quad\therefore\ c = 29$

Essayez de résoudre

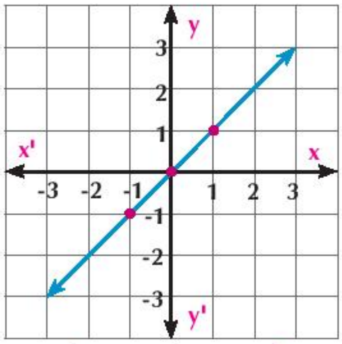
1 Si $f(x) = (a + 2\,b)\,x^3 - c\,x + 4$, $g(x) = 7x^3 + 5x + (a - b)$
trouez les valeurs de a , b et c pour que $f(x) = g(x)$

Tracer les courbes représentatives des fonctions:

I) Fonctions polynôme

A apprendre

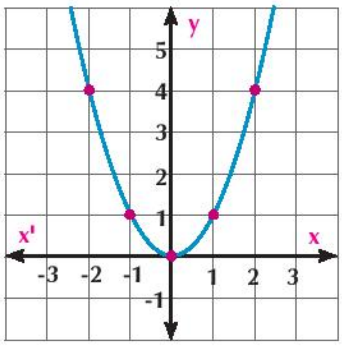
Le graphique ci-contre $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:



1) $f(x) = x$

La fonction f associe chaque nombre à lui-même, elle est représentée par une droite passant par le point de coordonnées (0 ; 0) et de pente = 1

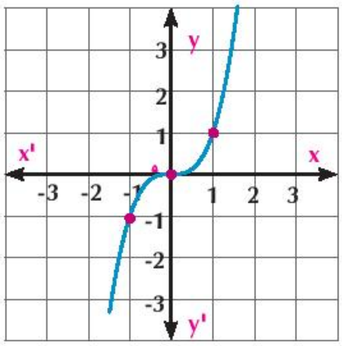
(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est croissante sur $\mathbb{R}$)



2) $f(x) = x^2$

La fonction f associe un nombre à son carré, elle est représentée graphiquement par une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et de sommet le point de coordonnées (0 ; 0)

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction paire , f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$,et f est croissante sur $]0 ; +\infty$ [)



3) $f(x) = x^3$

La fonction f associe le nombre par son cube, elle représentée graphiquement par une courbe dont le point de coordonnées (0 ; 0) est un centre de symétrie.

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est croissante sur $\mathbb{R}$)

Exemple

(2) Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solution

1) Si $x < 2$, $f(x) = x^2$

On trace $f(x) = x^2$ pour tout $x \in]-\infty ; 2[$

en postant un rond vide au **point de coordonnées (2 ; 4)** Figure (1)

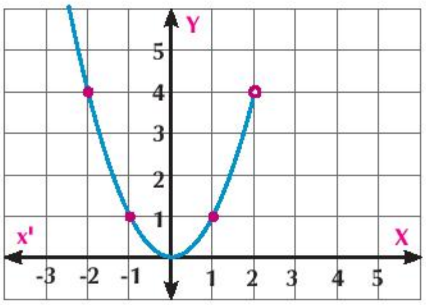


Figure (1)

2) Si $x > 2$; $f(x) = 4$

On trace la fonction constante $f(x) = 4$ pour tout x $]2; +\infty[$ dans le même **graphique (2)**

Remarquez que: l'ensemble défnition de $f = \mathbb{R} - \{2\}$, l'ensemble image $f = [0\ ;\ +\infty[$

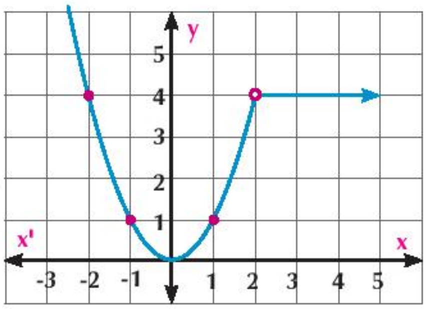


Figure (2)

Essayez de résoudre

(2) Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

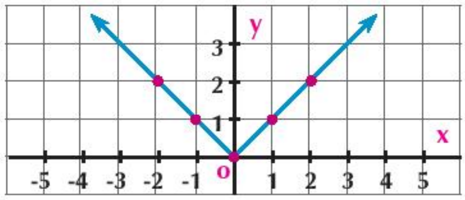
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Déduisez l'ensemble image de la fonction puis étudiez le sens variation de f.

A apprendre — Fonction valeur absolue (module)

La forme la plus simple de la fonction valeur absolue (module) est $f(x) = |x|$; $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



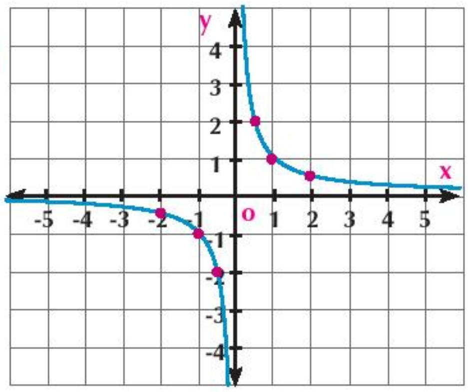
Remarquez que: $|-3| = |3| = 3$, $|0| = \mathbf{0}$. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$

C'est à dire que: $|x| \geqslant 0$, $|-x| = |x|$, $\sqrt{x^2} = |x|$

La fonction f est représentée par deux demi–droites d'origine le point de coordonnée dont la pente de l'une = 1 et celle de l'autre = -1

(**Vérifiez que:** l'ensemble image de $f = [0\ ;\ +\infty[$, f est une fonction paire , f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$)

A apprendre — Fonction rationnelle



La forme la plus simple de la fonction rationnel est:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

La fonction f qui est appelée la fonction inverse, elle relie chaque nombre par son inverse, elle est représentée graphiquement par une hyperbole une courbe dont le point de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ est un centre de symétrie

($x = 0$ et $y = 0$ sont les asymptotes de la courbe)

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0\ [$ et f est décroissantes sur $]0\ ;\ +\infty\ [$)

(3) Tracez la courbe représentative de la fonction $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Déduisez-en l'ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.

Transformations géométriques des courbes représentatives des fonctions

[I] Translation verticale de la courbe

Travail coopératif

Trvaillez avec votre comarade

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f: $f(x) = x^2$ **en utilisant le logiciel Geogebra**

2) Posez la le curseur sur le sommet de la courbe et tirez-la une unité verticalement vers le haut Observez la nouvelle règle de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ **Figure (1).**

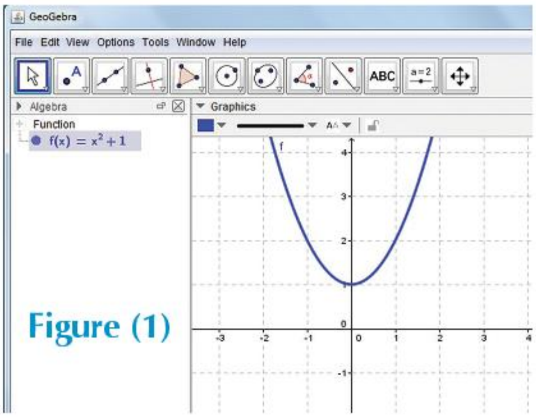


Figure (1)

3) Tirez le sommet de la courbe aux points des coordonnées: (0 ; 2) et (0 ; 3) et rédigez vos remarques à chaque fois.

4) Tirez la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ deux unités verticalement vers le bas et observez le changement de la règle de la fonction, vous trouvez une nouvelle règle $f(x) = x^2 - 2$ **Figure (2)**

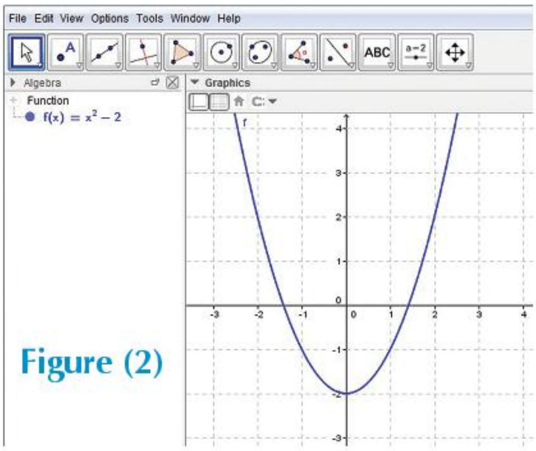


Figure (2)

Refechissez Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $f(x) = x^2 - 5$ à partir de la courbe de la fonction $f(x) = x^2$?

De ce qui précède, on remarque que :

Soient $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x^2 - 2$; alors :

1) la courbe de $g(x)$ est la même que (l'image de) la courbe de $f(x)$ par une translation d'une unité dans le sens positif de l'axe des ordonnées.

2) la courbe de $h(x)$ est la même que (l'image de) la courbe de $f(x)$ par une translation de deux unités dans le sens négatif de l'axe des ordonnées.

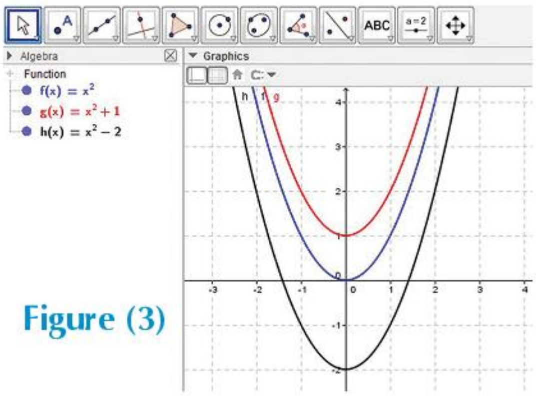


Figure (3)

Pensé critique : comment peut-on utiliser la courbe de la fonction $f(x) = x^3$ pour tracer les courbes des fonctions définie ci-dessous ?

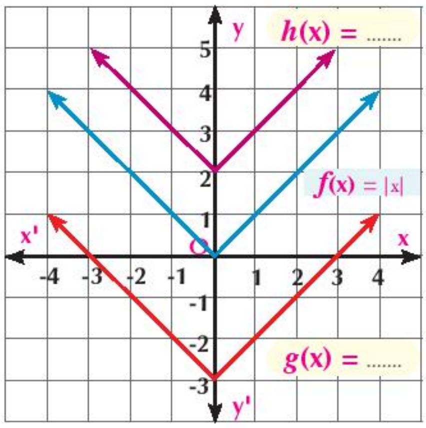
a $g(x) = x^3 + 4$ **b** $h(x) = x^3 - 5$

A apprendre **Tracer la courbe de y = f(x) + a**

Pour une fonction f : la courbe d' équation $y = f(x) + \mathbf{a}$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation d'amplitude **a** unité dans la direction $\overrightarrow{oy}$, si $\mathbf{a} > 0$, ou $\overrightarrow{oy'}$ si $\mathbf{a} < 0$

Exemple

3) La figure ci – contre indique les courbes des fonction f, g et h. Ecrire la règle de g et celle de h sachant que $f(x) = |x|$



La courbe de $g(x)$ est la même que celle de $f(x)$, mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l' axe des ordonnées $\overrightarrow{oy'}$

$g(x) = f(x) - 3$

$\because f(x) = |x| \qquad \therefore\ g(x) = |x| - 3$

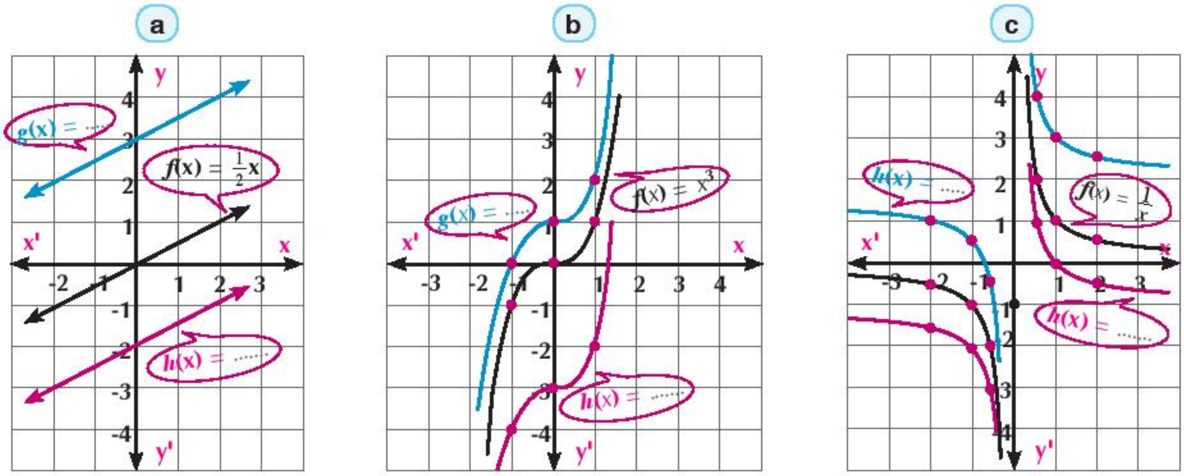
$\because$ La courbe de $h(x)$ est la même que celle de $f(x)$, mais déplacée 2 unités dans la direction positive de l' axe des ordonnées $\overrightarrow{oy}$

$\therefore h(x) = f(x) + 2$

$\because f(x) = |x| \qquad \therefore h(x) = |x| + 2$

Essayez de résoudre

4) Les figures suivantes indiquent les courbes représentatives des fonctions: f , g et h. Ecrivez les règles de g et h en fonction de $f(x)$ dans chaque figure



[II] Translation horizontal de la courbe d'une fonction

Travail coopératif

Travaillez avec votre camarade:

1) Tracez la courbe représentative de la fonction f: $f(x) = |x|$ en utilisant le logiciel géogebra. Écrivez la règle de la fonction dans la fenêtre Insérer comme suivant: abs(x) puis cliquer sur Insérer, la courbe de la fonction apparaît dans la fenêtre graphique et la règle de la fonction $f(x) = |x|$ dans la fenêtre algébrique **Figure (1)**

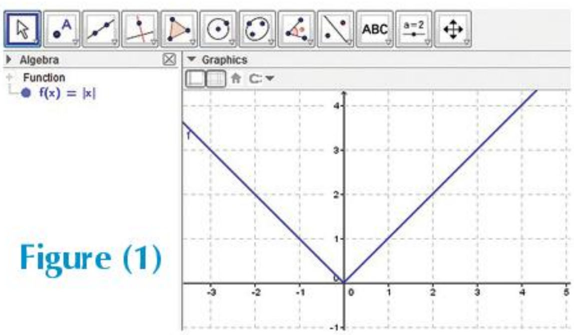


Figure (1)

2) Tirez la courbe quelques unités horizontalement dans la direction positive de l'axe des abscisses. Observez la nouvelle règle dans la fenêtre algébrique **Figure (2)**

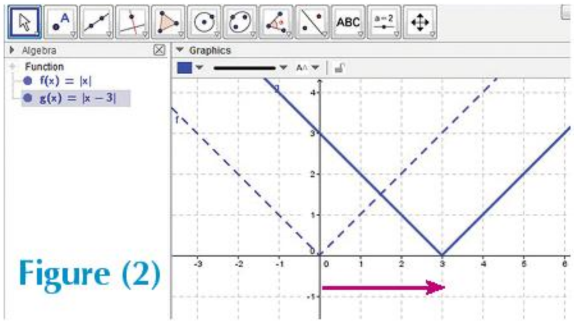


Figure (2)

3) Tirez la courbe dans la direction négative de l'axe des abscisses. Que remarquez-vous? **Figure (3)**

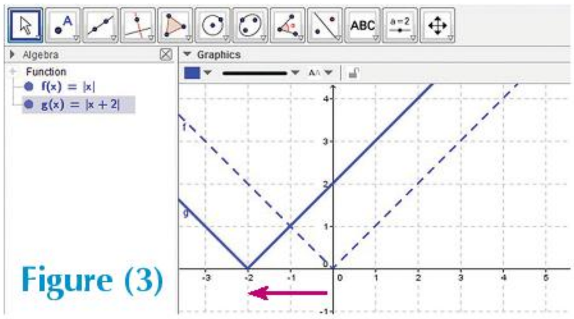


Figure (3)

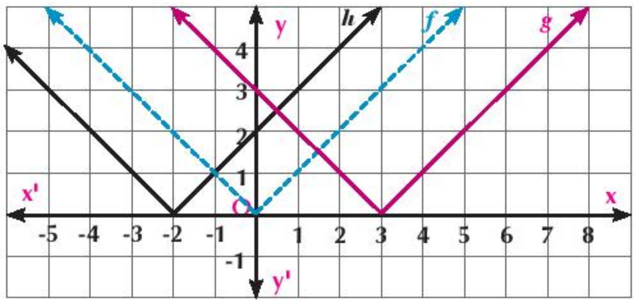
Réflichisse: Comment peut-on obtenir les courbes des fonctions g et h: à partir de la courbe de la fonction f : $f(x) = |x|$ Sachant que $g(x) = |x - 5|$ et $h(x) = |x + 4|$.

A apprendre

Tracé de la courbe de y = f (x + a)

Pour une fonction f, la courbe d' équation, $y = f(x + a)$ est la même que la courbe de $Y = f(x)$ par translation d'amplitude a unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$, ou $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$.

Remarquez que: Dans la figure ci-contre: $f(x) = |x|$:



1) La courbe de la fonction g est la même que celle de f, mais déplacée 3 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox}$

$\therefore$ $g(x) = |x - 3|$ et l'origine de deux demi-droites est le points de coordonnées (3 ; 0).

2) La courbe de h est la même que celle de f, mais déplacée 2 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox'}$

$\therefore$ $g(x) = |x + 2|$, et l'origine de deux demi-droites est le points de coordonnées (-2 ; 0)

Exemple

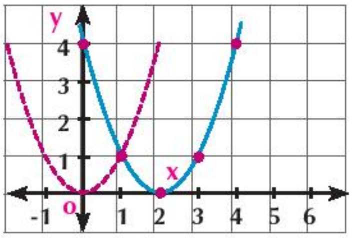
4 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que:

a $g(x) = (x - 2)^2$

b $h(x) = (x + 3)^2$

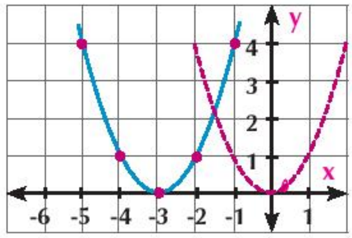
Solution

a



- La courbe de $g(x) = (x - 2)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée deux unités dans la direction positive de l'axe des abscisses les coordonnées du sommet de la courbe sont (2 ; 0).

b



- La courbe de $h(x) = (x + 3)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des abscisses les coordonnées du sommet de la courbe sont (-3 ; 0).

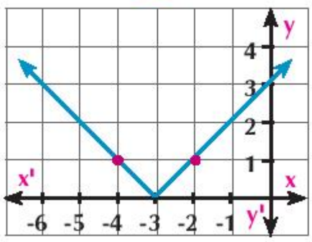
Essayez de résoudre

5) Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que:

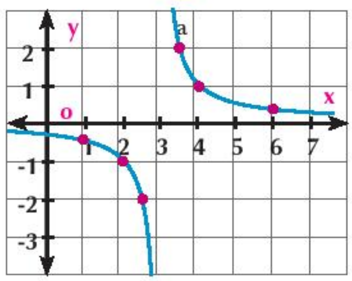
a) $g(x) = (x + 4)^2$ b) $h(x) = (x - 3)^2$

6) Les figures suivantes indiquent les courbes représentatives des fonctions: Écrivez les règles dans chaque figure:

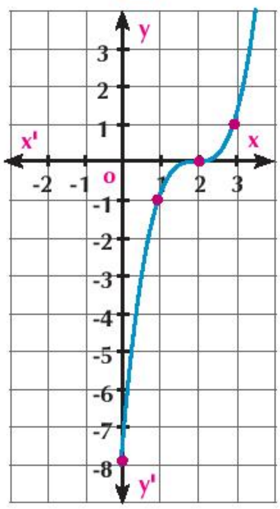
a



b



c



Pensé critique: Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $f(x) = x^2$, à partir de la courbe de la fonction $(x) = (x - 3)^2 + 2$

Tracé de la courbe de $y = f(x + a) + b$

De ce qui précède, on déduit que: la courbe d' équation $y = f(x + \mathbf{a}) + b$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation horizontale d'amplitude **a** unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$ (dans la direction $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$) , suivie par une translation verticale d'amplitude b dans la direction $\overrightarrow{oy}$ si $b > 0$ où $\overrightarrow{oy'}$ si $b < 0$

Essayez de résoudre

7) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que:

a) $g(x) = (x + 2)^2 - 4$

b) $h(x) = (3 - x)^2 - 1$

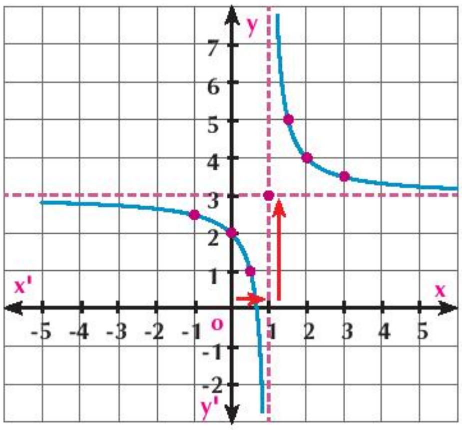
Exemple

5) Tracez la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = \frac{1}{x - 1} + 3$ du graphique déduisez l'ensemble image et le sens de variation de la fonction.

Solution

La courbe de g est la même que celle de f et $f(x) = \frac{1}{x}$ par une translation d'amplitude une unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ (a = -1 < 0) , suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$. Le point coordonnées (1 ; 3) est le centre de symétrie de la courbe = $\mathbb{R}$ - { 3} Ensemble image de g.

Sens de variation de g: est décroissante sur]- ∞ ; 1[et décroissante sur]1 ; +∞[



Pensé critique: Peut-on dire que la fonction $f(x) = \frac{1}{x - 2} + 3$ est décroissante sur son ensemble définition? Justifiez votre réponse.

Essayez de résoudre

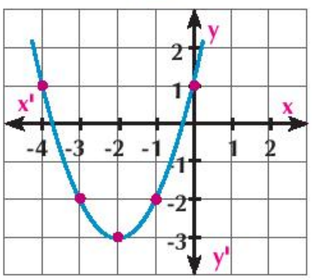
8) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ pour rerésenter chacune des fonctions définie ci-après:

a) $g(x) = \frac{1}{x + 2} + 1$

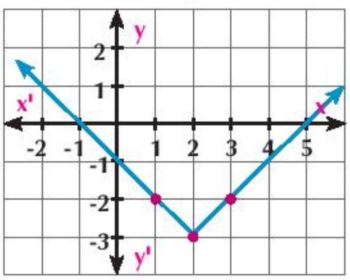
b) $h(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$

9) Ecrivez la règle de chacune des fonctions représentées graphiquement par les figures suivantes:

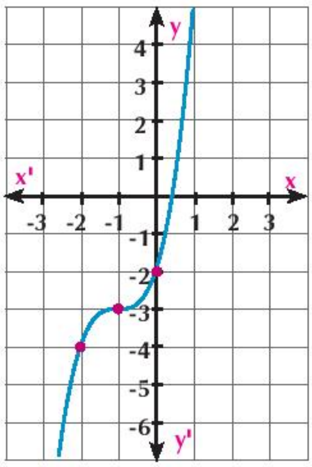
a



b

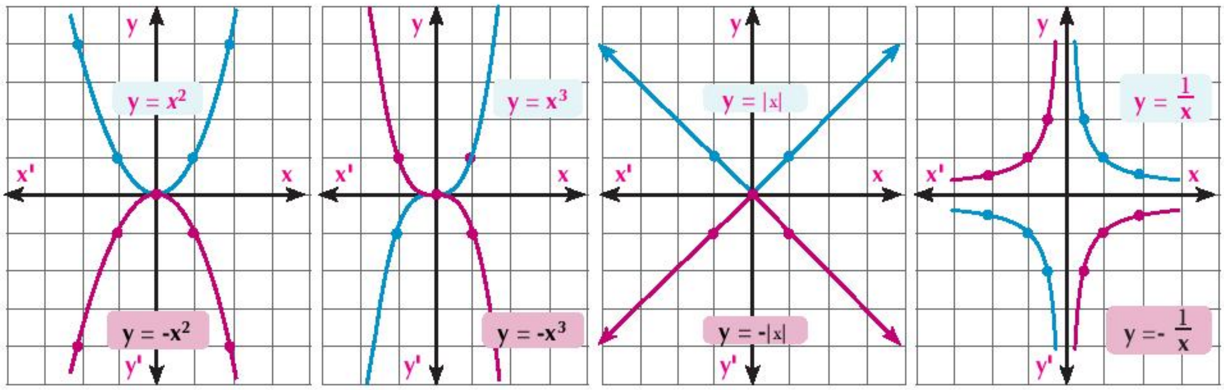


c



[III] Symétrie de la courbe représentative d'une fonction par rapport à l'axe des abscisses:

Les figures suivantes montrent la symétrie de quelques fonctions usuelles par rapport à l'axe des abscisses.



Que remarquez-vous ? Et qu'en déduisez-vous?

A apprendre

Tracé de la fonction $y = -f(x)$ pour une fonction f, la courbe de $y = -f(x)$ est l'image de la courbe de $y = f(x)$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

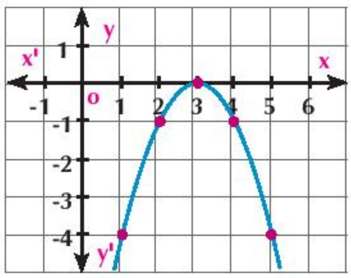
Utilisation des transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions

(6) Utilisez les courbes des fonctions usuelles pour tracer les courbes des fonctions g, h et i telles que:

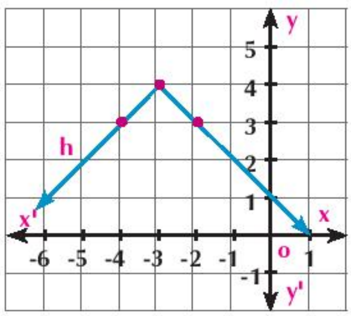
(a) $g(x) = -(x - 3)^2$ (b) $h(x) = 4 - |x+3|$ (c) $i(x) = 2 - \dfrac{1}{x - 3}$

Solution

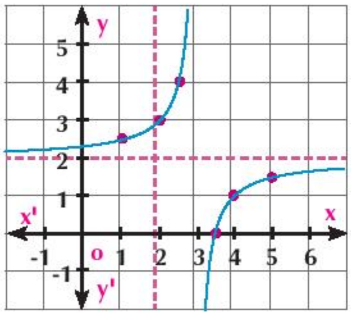
(a) La courbe de $g(x)$ est l'image de celle de $f(x) = x^2$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$, Les coordonnées du centre de la symétrie de la courbe sont (3 ; 0) la courbe est ouverte vers le bas.



(b) La courbe de $h(x)$ est l'image de celle de $f(x) = |x|$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox'}$, et d'une translation d'amplitude 4 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$ les coordonnées d'origine de deux demi-droites sont (-3; 4). La courbe est ouverte vers le bas.



c La courbe de $i(x)$ est l'image de celle de $f(x) = \frac{1}{x}$ dans la symétrie 3 unités dans la direction $\overrightarrow{o\,x}$, et d'une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{o\,y}$, les coordonnées du centre de la courbe sont (3 ; 2).



Essayez de résoudre

10 Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe de la fonction g telle que:

a $g(x) = 3 - (x+1)^2$ **b** $g(x) = -(x-3)^3$

c $g(x) = 3 - |x - 5|$

Puis justifier votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique.

Exemple

Utilisation des transformations géométriques pour tracer les courbes des fonctions

7 En utilisant une transformation géométrique convenable, tracez les deux courbes des fonctions g , h telles que $g(x) = 4 - x^2$, $h(x) = |4 - x^2|$

Solution

i) Tracé de la courbe de g

La courbe de $g(x)$ est l'image de celle de $f(x) = x^2$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 4 unités dans la direction $\overrightarrow{o\,y}$ Figure (1).

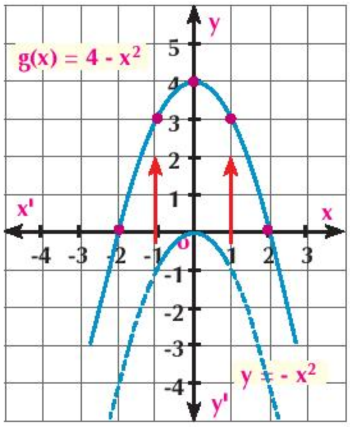


Figure (1)

ii) Tracé de la courbe de h

$\because h(x) = |4 - x^2|$ $\therefore h(x) = |g(x)|$

Alors l'ordonnée de tous les points de la courbe de h est positive où :

$h = |g(x)|$

$$\therefore y = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) > 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que la courbe de la fonction h se trouve dans le premier et le dexième quadrant. Alors c'est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses de la courbe de g pour tout $g(x) < 0$ Figure **(2).**

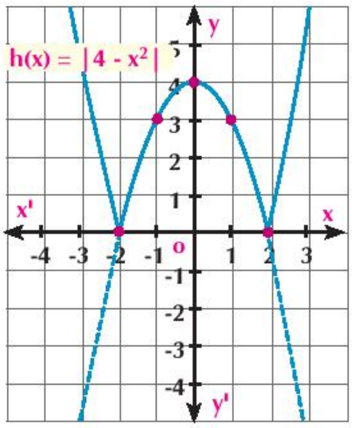
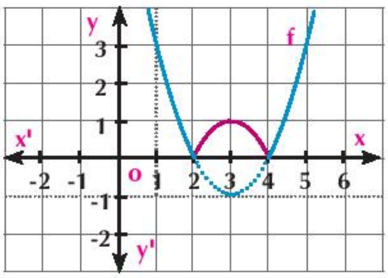


Figure (2)

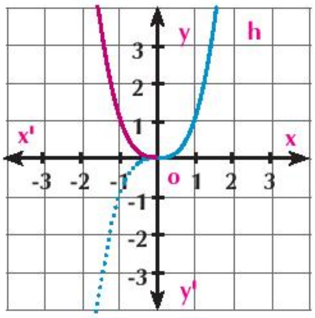
Essayez de résoudre

(11) Les figures ci-dessous montrent les courbes représentatives des fonctions f, g et h. Ecrivez la règle de chacune des fonctions dans chaque cas:

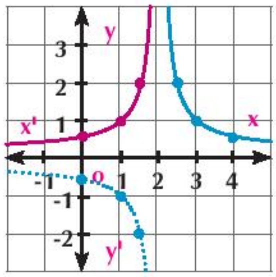
a



b



c



[IV] Dilatation de la courbe d'une fonction

Travail coopératif

Tracé de la courbe de $g(x) = a\,f(x)$

Travaillez avec votre camarade.

1) Tracez la courbe de la fonction f: $f(x) = x^2$ en utilisant le logiciel *Geogebra* dans la fenetre Inserer, écrivez la règle de la fonction comme suivant:

[a] [◄ ►] [χ] [^] [2] [↵]

Une nouvelle fenêtre apparaitra **(Figure 1)**

en choisissez *créer des curseurs*

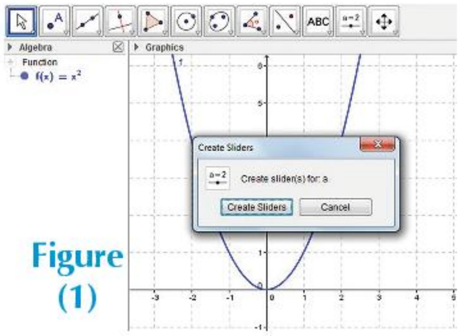


Figure (1)

2) Utilisez le curseur des valeurs pour choisir d'autres valeurs de a où $a \quad 1 < a$

Observez le changement de la courbe par rapport à la courbe de la fonction f pour tout $x \in \mathbb{R}$ **Figure (2)**

Faisez le meme pour $1 > a$ **Figure (3)**

Que remarquez-vous ? Qu'en déduisez-vous ?

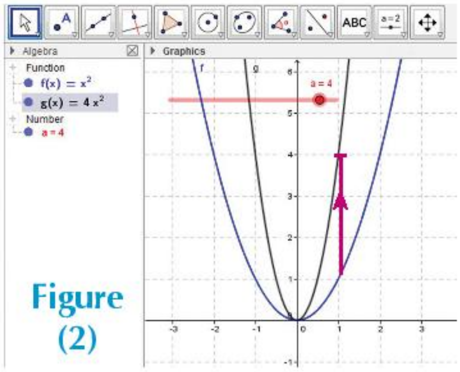


Figure (2)

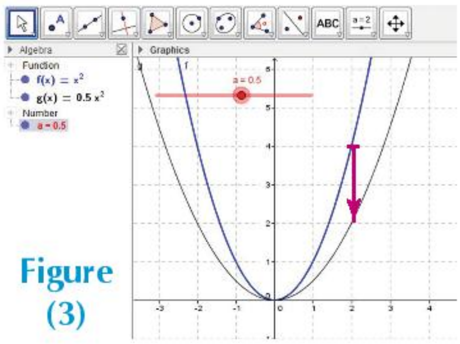


Figure (3)

A apprendre

Tracé de la courbe de $y = a\,f(x)$

Pour une fonction f : la courbe de $y = a f(x)$ où $a > 0$

Est une dilatation verticale de la courbe de $y = f(x)$: de coefficient a Cette dilatation est un agrandissement si $a > 1$ et est réduction si $a < 1$

Tracé de la courbe de la fonction h telle que $h(x) = a\,f(x + b) + c$

Exemple **Utilisation des transformations géométriques pour tracer les courbes des fonctions**

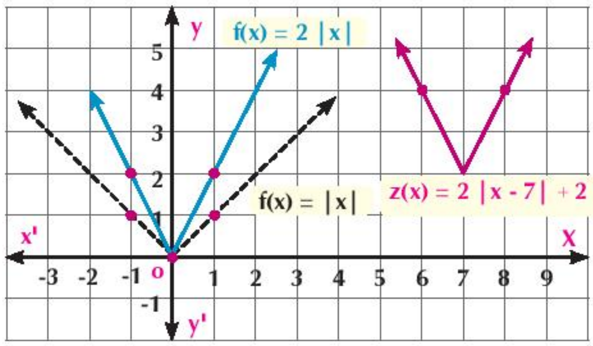
(8) Utilisez la courbe de la foction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer les deux courbes des fonctions g et h telles que:

(a) $g(x) = 2|x|$ (b) $h(x) = 2|x - 7| + 2$

Solution

(a) Tracé la courbe de $g(x)$ est une dilatation verticale de la courbe de la fonction f le coefficient a $= 2 > 0$ alors pour tout:
pour tout $(x\ ;\ y) \in$ graphe de f
$(x\ ;\ 2y) \in$ graphe de g

(b) La courbe de $h(x)$ est l'image de celle de $g(x)$ par une translation d'amplitude 7 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$, suivi d'une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$



Essayez de résoudre

(12) Utilisez la courbe de la foction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes des fonctions g et h telles que :

(a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ (b) $h(x) = 2 - \frac{1}{2}(x - 5)^2$

Justifiez votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique puis déterminez l'ensemble image et le sens de variation.

Activité

Application des transformations géométriques étudiées pour les fonctions de sinus de cosinus

Fonctions trigonométriques (courbe de la fonction sinus):

I: Translation de la courbe de la fonction dans la direction de l'axe des abscisses :

1) Utiliser le logiciel (*GeoGebra*) et régler ses paramètres pour que la graduation de l'axe des abscisses soit en radians. Pour cela, avec un clic-droit sur l'interface, choisir (axe des abscisses), dans la dernière ligne puis choisir le mode de graduation (π).

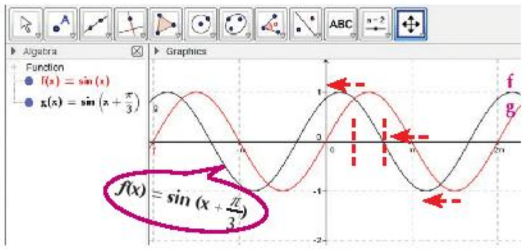
2) Dans la zone virtuelle, située en bas de l'écran, tapez l'instruction: **sin (x)** puis appuyer sur (**enter**) La courbe de la fonction sinus s'affiche. La couleur et l'épaisseur de la courbe peuvent être réglées par un clic-gauche sur la courbe de la fonction suivi par le choix de la couleur désirée et l'épaisseur de la courbe etc...

3) De la même manière, on tape: **((3/π) + x) sin** qui veut dire: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ puis on appuie sur (**enter**) puis on accorde une autre couleur à la nouvelle courbe.

4) Comparez les deux courbes. Que remarquez-vous?

On remarque que:

La courbe de la fonction sinus a été translatée horizontalement de $\frac{\pi}{3}$ vers la gauche. la deuxième fonction et la fonction **sin x** ont le même [-1 ; 1] , la fonction sin $(x + \frac{\pi}{3})$ n'est ni paire ni impaire car elle n'est ni symétrique par rapport à l'axe des y ni par rapport au point d'origine.



Pour réfléchir:

- Quelle translation dans la direction de l'axe des x peut porter la courbe de la fonction sin $(x - \frac{\pi}{3})$.

II: Translation de la courbe de la fonction dans la direction de l'axe des Y.

1) Tracez la courbe représentative de la fonction f : $f(y) = \sin x$ comme précédemment.

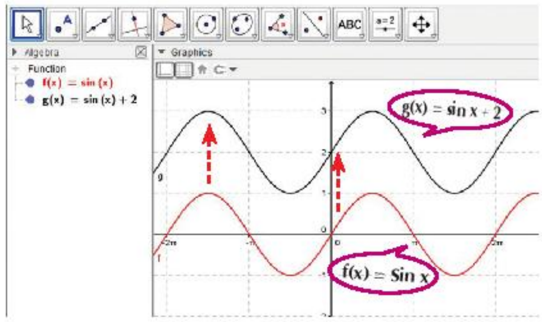
2) Tracez, en une autre couleur, la courbe représentative de la fonction$(x) = \sin x + 2$

Comparez les deux courbes. Que remarquez-vous?

Dans la représentation graphique:

on trouve que la courbe de la deuxième fonction est obtenue de la courbe de **y = sin x ,** par une translation de 2 unités vers le haut.

On remarque que l'ensemble image de la deuxième fonction est **[1 ; 3]** : car on a translaté la courbe de la première fonction de 2 unités dans la direction positive de l'axe des y. On remarque également que la fonction **y = sin x + 2** n'est ni paire ni impaire.

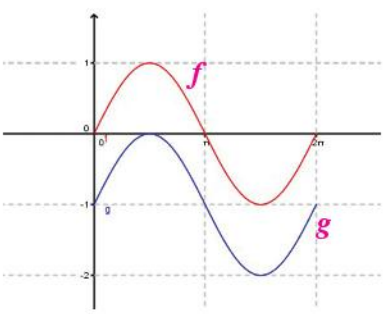


Pensé critique:

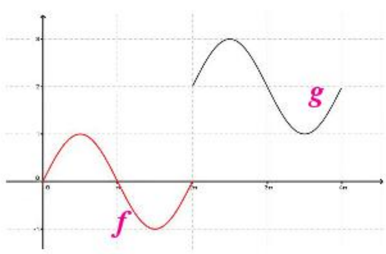
Dans chacune des figures ci-dessous:

Décrivez les transformations géométriques de la courbe de la fonction f pour tracer la courbe de la fonction g, puis déterminez son ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.

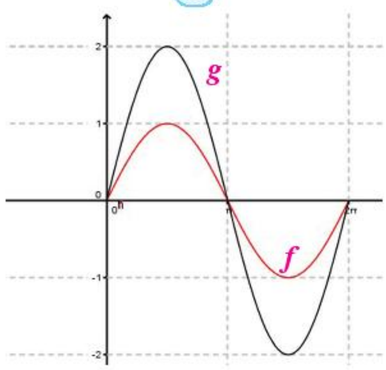
a



b



c



Exercices 1 - 4

1) Trouez les valeurs de a , b et c pour que $f(x) = g(x)$ sachant que

$f(x) = (a + b)\,x^3 + 3x - 2$, $g(x) = 5x^3 + (a + c)\,x + b$

2) Tracez la courbe représentative de la fonction f , du graphique déduisez l'ensemble image puis étudiez le sens variation de la fonction de f.

a) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ |x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données:

3) La courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 + 4$ est le même que celle de la fonction $f(x) = x^2$ par une translation d'amplitude 4 unités dans la direction:

a) $\overrightarrow{o\,x}$ b) $\overrightarrow{o\,x'}$ c) $\overrightarrow{o\,y}$ d) $\overrightarrow{o\,y'}$

4) La courbe représentative de la fonction $g(x) = |x + 3|$ est le même que celle de la fonction $f(x) = |x|$ par une translation d'amplitude 3 unités dans la direction:

a) $\overrightarrow{o\,x}$ b) $\overrightarrow{o\,x'}$ c) $\overrightarrow{o\,y}$ d) $\overrightarrow{o\,y'}$

5) Les coordonnées du sommet de la courbe de la fonction $f(x) = (2 - x)^2 + 3$ sont:

a) (2 ; 3) b) (2 ; -3) c) (-2 ; 3) d) (-2 ; -3)

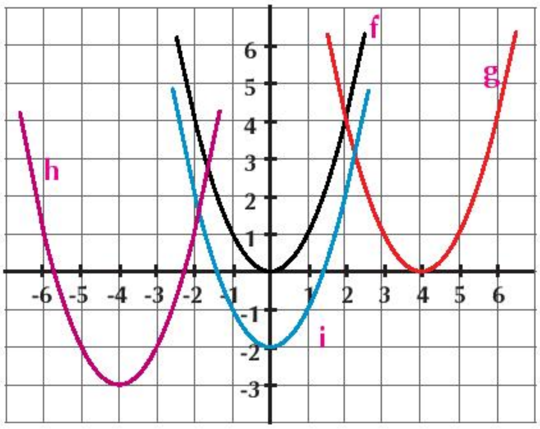
6) Les coordonnées du centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x - 3} + 4$ sont:

a) (3 ; -4) b) (-3 ; -4) c) (3; 4) d) (-3 ; 4)

7) Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = x^2$. La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y.

Ecrivez les règle de chacune des fonctions:

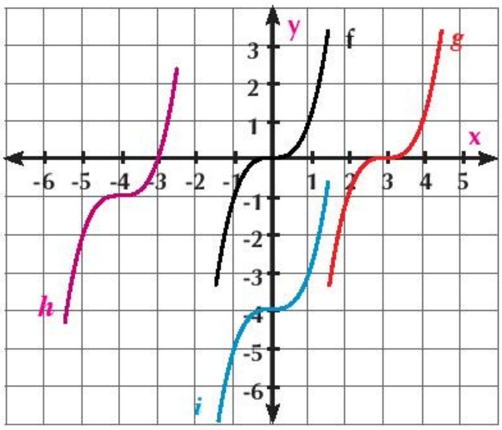
➢ g , h , i



8 Dans la figure: ci-contre, on tracé la courbe de la fonction f. $f(x) = x^3$ courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y

Ecrivez les règle de chacune des fonctions:

➢ g , h et i

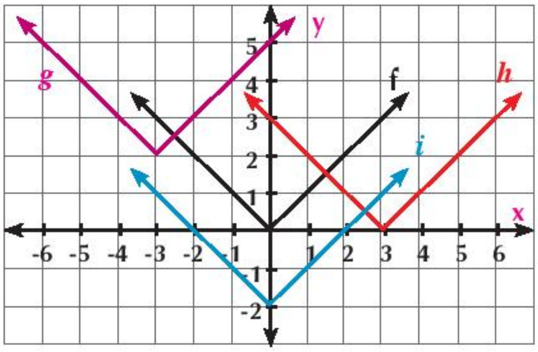


9 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = |x|$

La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y.

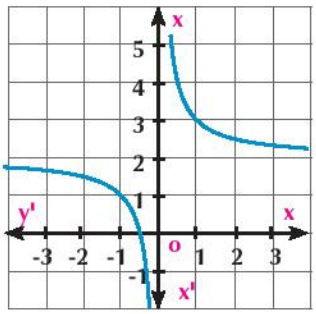
Ecrivez les règle de chacune des fonctions:

➢ g , h et i

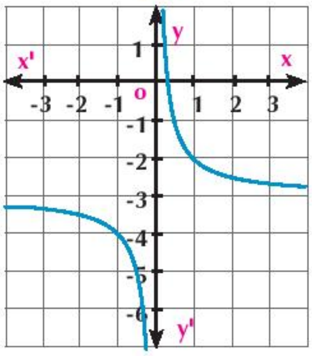


10 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction f : $f(x) = \dfrac{1}{x}$, La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y Ecrivez les règles de chacune des fonctions représentées dans chacune des figures ci-dessous:

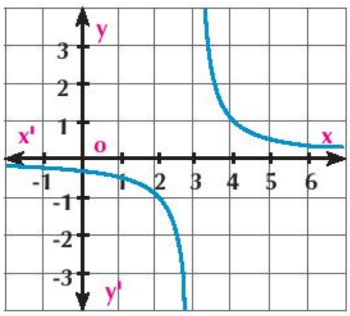
a



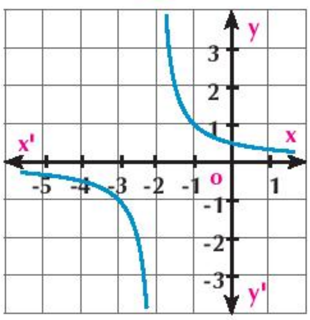
b



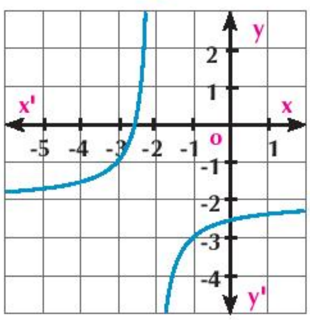
c



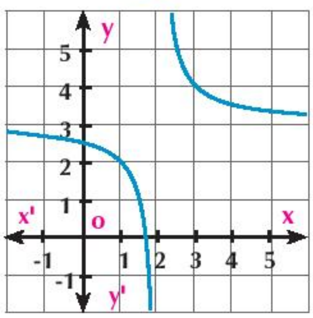
d



e



f



11 Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous.

a $f_1(x) = x^2 - 4$ **b** $f_2(x) = x^2 + 1$ **c** $f_3(x) = (x + 1)^2$

d $f_4(x) = (x - 3)^2$ **e** $f_5(x) = (x - 1)^2 - 2$ **f** $f_6(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}$

12 Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous

a $f_1(x) = |x| + 1$ **b** $f_2(x) = |x| - 3$ **c** $f_3(x) = |x + 2|$

d $f_4(x) = |5 - x|$ **e** $f_5(x) = |x + 2| + 1$ **f** $f_6(x) = |x - 3| - 2$

➢ **Puis déterminez les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes des coordonnées dans chaque cas.**

13 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^3$. pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $f_1(x) = f(x) - 3$ **b** $f_2(x) = f(x) + 1$ **c** $f_3(x) = f(x - 2)$

d $f_4(x) = f(x + 3)$ **e** $f_5(x) = f(x - 2) - 1$ **f** $f_6(x) = f(x + 3) + 2$

➢ **Puis déterminez les coordonnées de centre de symétrie dans chaque cas.**

14 Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $k(x) = f(x + 1)$ **b** $k(x) = f(x - 3)$ **c** $k(x) = f(x) + 2$

d $k(x) = f(x) - 4$ **e** $k(x) = f(x + 2) - 5$ **f** $k(x) = f(x - 2) + 2$

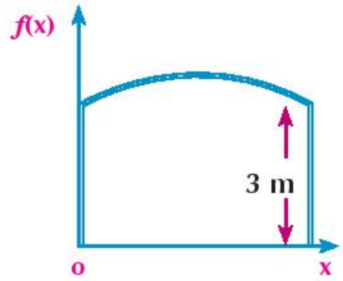
15 En utilisanr les transformations géométriques, tracez la courbe représentative de la fonction f définie ci-dessous. Puis étudiez le sens de variation de f dans chacune des cas.

a $f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \\ -x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ **b** $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } -4 \leqslant x < 0 \\ -x^2 - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

c $f_3(x) = x\,|x| - 1$ **d** $f_4(x) = \frac{2x}{x + 1}$

16 Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe représentative de la fonction f telle que: $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$]

17 **En lien avec l'industrie:** Dans la figure ci-contre : Les deux hauteurs latérales d'un potail métalique bombé est de 3mètres de longueur chacune et la forme de son arc superieure suit la courbe de la fonction f telle que f. $f(x) = a\,(x - 2)^2 + 4$ Trouvez:



a La valeur de a

b La hauteur maximale de la portail

c La largeur de la portail

Unité (1)

Résolution des Equations et inéquations de la valeur absolue

1 - 5

Allez apprendre

- Résolution des équations de la valeur absolue graphiquement
- Résolution des équations de la valeur absolue algébriquement
- Résolution des inéquations de la valeur absolue graphiquement.
- Résolution des inéquations de la valeur absolue algébriquement
- Modélisation des problèmes et des applications quotidiennes et sa résolution en utilisant les équations et inéquation de la valeur absolue

Vocabulaires de base

- Equation
- Inéquation
- Résolution graphique

Aides pédagogiques

- Feuilles quadrillées
- Logiciels de graphisme

[I] Résolution des équations

Travail coopératif

Dans un même repère tracez les courbes représentatives de deux fonctions f et g où f est la fonction de valeur absolue et g est fonction affine observez le graphique puis répondre:

a Quel est le nombre des points probable d'intersection de deux courbes?

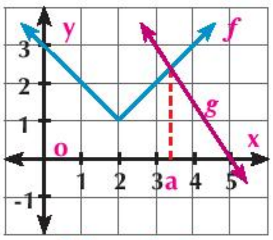
b Les points d'intersection de deux courbes vérifient–ils tes règles de deux fonctions?

c Utilisez une calculatrice programmable la pour justifier votre réponse.

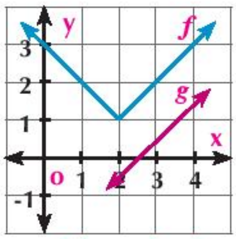
Remarquez que:

1) Aux points d'intersections, s'ils existent, on a $f(x) = g(x)$ et réciproquement pour tout x appartenant à l'ensemble de définition commune de deux fonction.

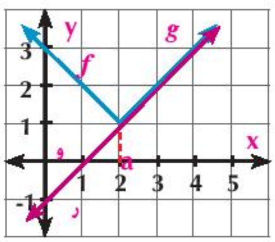
2) Pour deux fonctions f et g l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses de points d'intersection comme il est indiqué dans les figures suivantes:



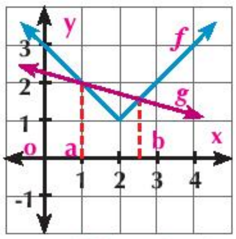
Ensemble solution = {a}



Ensemble solution = ϕ



Ensemble solution = [a ; $+\infty$[



Ensemble solution = {a ; b}

Résolution de l'équation: $|ax - b| = c$

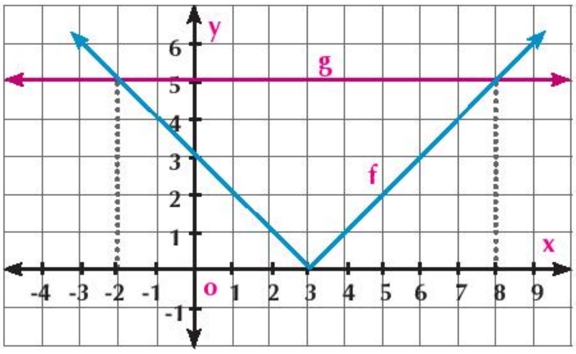
Exemple

(1) Résoudre l'équation: $|x - 3| = 5$ graphiquement et algébriquement.

Solution

Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = 5$

1) On trace la courbe de la fonction $f: f(x) = |x - 3|$ en déplaçant la courbe de la fonction $h(x) = |x|$ trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$



2) Dans le même quadrillage, on trace la courbe de la fonction $g(x) = 5$, où g qui est une fonction constante Sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisse et passant par le point de coordonnées (0 ; 5).

$\because$ Les coordonnés des points d'intersection des deux courbes sont (-2 ; 5) , (8 ; 5)

$\therefore$ L'ensemble solution de l'équation est: {-2 ; 8}

Solution algébrique:

D'après la définition de la fonction valeur absolue: $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{pour} \quad x > 3 \\ -x + 3 & \text{pour} \quad x < 3 \end{cases}$

Pour $x > 3$: $x - 3 = 5$ c'est-à-dire: $x = 8 \in \,]3 ; +\infty[$

Pour $x \leqslant 3$: $-x + 3 = 5$ c'est-à-dire: $x = -2 \in \,]-\infty ; 3]$

L'ensemble solution de l'équation est: **{ - 2 ; 8}** ce qui confirme la solution graphique.

Essayez de résoudre

1 Résoudre chacune des équations suivantes graphiquement et algébriquement.

a $|x| - 4 = 0$ **b** $|x| + 1 = 0$ **c** $|x - 7| = 5$

Quelques propriétés de la valeur absolue d'un nombre

A apprendre

1) $|a\, b| = |a| \times |b|$ par exemple:

$|2 \times -3| = |-6| = 6$ et $|2| \times |-3| = 2 \times 3 = 6$

2) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

L'égalité est obtenue si les deux nombres **a** et **b** sont de même signe. Par exemple:

$|4 + 5| = |4| + |5| = 9$ et $|-4 - 5| = |-4| + |-5| = 9$

Remarquez que:

1) Si : $|x| = a$ alors: $x = a$ **ou** $x = -a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$

2) Si : $|a| = |b|$ alors: $a = b$ **ou** $a = -b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

3) $|x|^2 = |x^2| = x^2$ **4)** Si : $|x| = x$ alors: $x \in [0; \infty[$

5) Si : $|x| = -x$ alors: $x \in \,]-\infty; 0[$

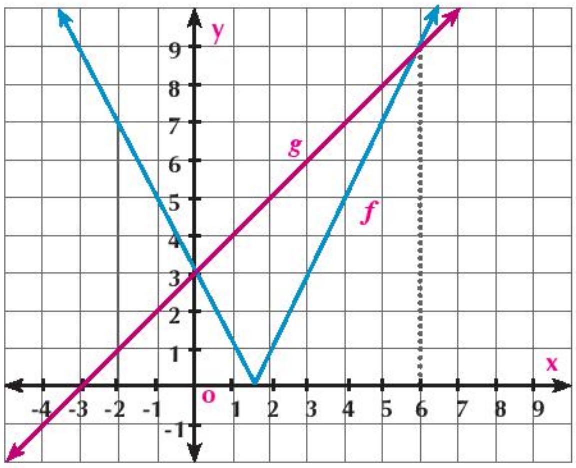
Résolution de l'équation |a x + b| = c x + d

Exemple

(2) Résoudre l'équation: $|2x - 3| = x + 3$ graphiquement et algébriquement.

Solution

Soient $f(x) = |2x - 3|$, $g(x) = x + 3$



Solution graphique:

f: $f(x) = |2x - 3| = |2(x - \frac{3}{2})|$

$f(x) = 2\,|x - \frac{3}{2}|$

La courbe de f est la même que la courbe de $2|x|$ par une translation d'amplitude $\frac{3}{2}$ dans la direction $\overrightarrow{ox}$

g: g(x) = x + 3 est représentée graphiquement par une droites de pente = 1 et passant par le points de coordonnés (0 ; 3)

$\because$ Les coordonnés des points d'intersection des courbes (0 ; 3) et (6 ; 9)

$\therefore$ L'ensemble solution de l'équation est: **{0 ; 6}**

Solution algébrique:

$$\because \quad |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ Pour $x \geqslant \frac{3}{2}$ on a $2x - 3 = x + 3$ d'où $x = 6 \in [\frac{3}{2} ; +\infty[$

Pour $x < \frac{3}{2}$ on a $-2x + 3 = x + 3$ d'où $x = 0 \in]-\infty ; \frac{3}{2}[$

$\therefore$ L'ensemble solution de l'équation est: **{0 ; 6}**

Essayez de résoudre

(2) Résoudre chacune des équations suivantes graphiquement et algébriquement.

(a) $|2x + 4| = 1 - x$ (b) $|2x + 5| = x - 4$ (c) $|x - 3| = 3 - x$

Résolution de l'équation : |a x + b| = |c x + d|

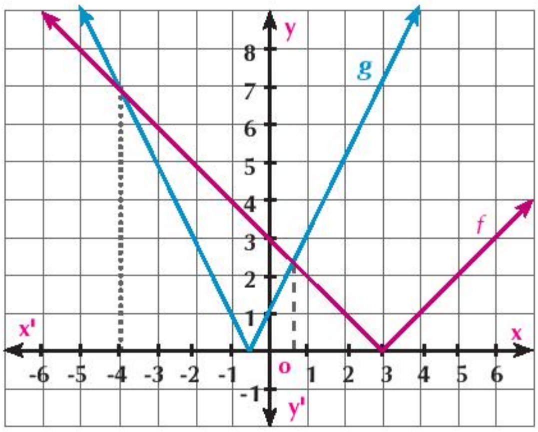
Exemple

(3) Résoudre l'équation $|x - 3| = |2x + 1|$ graphiquement.

Solution

Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = |2x + 1|$

La courbe de la fonction f: $f(x) = |x - 3|$ est le même que la courbe de $|x|$ en la déplaçant trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$. Pour la courbe de la fonction g : $g(x) = 2\,|x + \frac{1}{2}|$ est le même que la courbe de $2|x|$ en la déplaçant horizontalement $\frac{1}{2}$ unités dans la direction de $\overrightarrow{ox'}$, Les coordonnées des points d'intersection des courbes des deux fonctions f et g sont: $(-4\,;\,7)$ et $(\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2})$



L'ensemble solution de l'équation est $\{-4\,;\,\frac{1}{2}\}$

Essayez de résoudre

3) Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes.

a) $|x + 7| = |2x + 3|$

b) $|x - 2| + |x - 1| = 0$

Exemple

4) Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a) $|x + 7| = |x - 5|$

b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 9 - 2x$

a) $\because |x + 7| = |x - 5|$ $\qquad \therefore x + 7 = \pm (x - 5)$

$\therefore x + 7 = x - 5$ **mais** $7 \neq -5$ **(solution refusée).**

ou $x + 7 = -x + 5$ **et donc :** $2x = -2$

$\therefore x = -1$ **Donc** l'ensemble solution est $\{-1\}$

Remarque

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $|a| = |b|$, alors $a = \pm b$

Vérification:

En posant $x = -1$ dans les deux membres de l'équation, on trouve que:

Membre de gauche = Membre de droite = 6 **Donc** l'ensemble solution est $\{-1\}$

Réfléchissez:

Trouver l'ensemble solution de l'équation précédente en utilisant la méthode de l'élévation des carrés des deux membres puis vérifier les valeurs trouvées.

b) $\because \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 9 - 2x$

$\therefore \sqrt{(x-3)^2} = 9 - 2x$ **alors:** $\therefore |x - 3| = 9 - 2x$

i) Si $x > 3$ **donc:** $x - 3 = 9 - 2x$

$\therefore 3x = 12$ **alors:** $x = 4 \in]3\,;+\infty[$

ii) Si $x < 3$ **donc:** $x - 3 = -9 + 2x$

$\therefore x = 6$ **et donc:** $x = 6 \notin]-\infty\,;3[$ $\qquad \therefore$ L'ensemble solution est **{4}**

Remarque

pour tout nombre réel a;

$\sqrt{a^2} = |a|$

Réfléchissez:

1) Peut-on utiliser la méthode algébrique pour résoudre l'équation précédente? Comment?

(4) Trouvez algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(a) $|x - 1| - 2\,|2 - x| = 0$ (b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$

Applications de la vie courante sur la résolution des équations

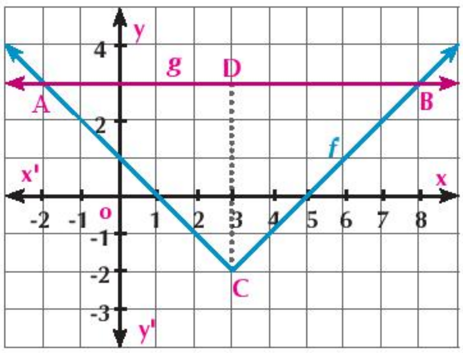
Exemple **Planification des villes**

(5) Une parcelle du terrain comprise entre les deux courbes de fonctions f et g , où:

$f(x) = |x - 3| -2$ et $g(x) = 3$, Calculez son aire, en unités carrées. Si la longueur de l'unité est 8 mètres, calculez l'aire du terrain en mètres carrées.

Solution

En représentant les courbes de deux fonctions, on trouve qu'elles se courbent aux points A (-2 ; 3) et B (8 ; 3) , La parcelle du terrain a la forme d'un triangle ABC rectangle en C



On a AB = 8 - (-2) = 10 unités

CD = 3 - (-2) = 5 unités

$\therefore$ Aire $\triangle$ B A C $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ CD

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$ unités carrées

L'aire du terrain = 25 (8 × 8) = 1600 mètres carrées.

Essayez de résoudre

(5) Trouvez, en unités carrées, l'aire comprise entre les deux courbe des fonctions f et g où:

$f(x) = |x-2| -1$, $g(x) = 5-|x-2|$

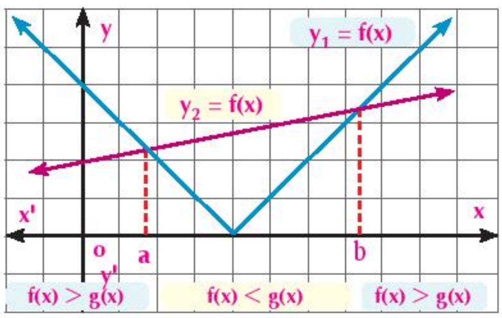
[II] Résolution des inéquations

Vous avez déjà étudié les équations. Une inéquation est une proposition mathématique qui contient l'un des symboles: ($<$; $>$; $\leqslant$; $\geqslant$). Résoudre une inéquation consiste à trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie..

Résolution des inéquations graphiquement

La figure ci-contre montre les courbes représentatives de deux fonctions f et g où : $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est {a ; b}.



C'est-à-dire que: $y_1 = y_2$ si $x = a$ ou $x = b$

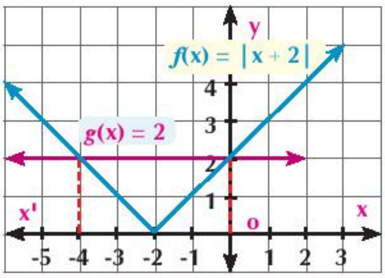
On remarque que: $y_1 < y_2$ C.à.d. $f(x) < g(x)$ si $x \in]\, a\,;\, b\,[$

$y_1 > y_2$ C.à.d. $f(x) > g(x)$ si $x \in]-\infty\,;\, a[\cup]\, b\,;\, +\infty[$

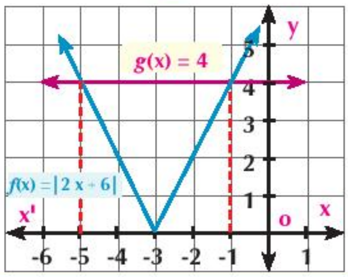
Exemple

6

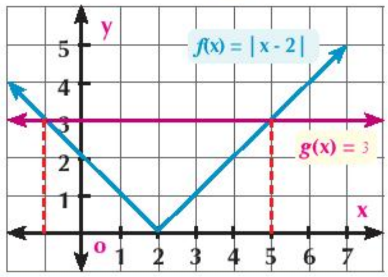
a



b



c



a	b	c
Ensemble solution de l'inéquation est $\lvert x + 2\rvert < 2$ **ou:** $]-4\,;\, 0[$	**Ensemble solution de l'inéquation est** $\lvert 2x + 6\rvert > 4$: $]-\infty\,;\, -5] \cup [-1\,;\, \infty[$ **ou:** $\mathbb{R} -]-5\,;\, -1[$	**Ensemble solution de l'inéquation est** $\lvert x - 2\rvert \leqslant 3$ $[-1\,;\, 5]$

Essayez de résoudre

6 Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes en vos aidants par les figures de l'exemple (7):

a $|x + 2| \leqslant 2$ **b** $|2x + 6| \leqslant 4$ **c** $|x - 2| > 3$

Résolution des inéquations algébriquement

A apprendre

i) Si $|x| \leqslant a$, $a > 0$ **alors:** $-a \leqslant x \leqslant a$

ii) Si $|x| \geqslant a$, $a > 0$ **alors:** $x \geqslant a$ **ou** $x \leqslant -a$

Exemple

7 Trouver, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

a $|x - 3| < 4$ **b** $\sqrt{x^2 - 2x + 1} > 4$

c $\dfrac{1}{|2x - 3|} > 2$

Solution

a $\because |x - 3| < 4$ **c.à.d.** $-4 < x - 3 < 4$

En ajoutant 3 aux membres de la double inégalité

$\therefore -4 + 3 < x - 3 + 3 < 4 + 3$ **c.à.d:** $-1 < x < 7$

$\therefore$ **L'ensemble solution** $=]-1\,;\, 7[$

Remarque

Pour tout a , b et c:

Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.

Si a et b sont deux nombres positifs et si $a < b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

b $\because \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ **d'où:** $|x-1| > 4$

$\therefore x - 1 > 4$ donc $x > 5$ ou $x - 1 \leqslant -4$ **donc** $x \leqslant -3$

$x \in \mathbb{R} -]-3\ ,\ 5[$

$\therefore$ **L'ensemble solution est** $]-\infty\ ;\ -3] \cup [5\ ;+\infty[$

c $\because \dfrac{1}{|2x-3|} > 2$ **En calculant l'inverse des deux membres**

$\therefore |2x-3| \leqslant \dfrac{1}{2}\ ,\quad x \neq \dfrac{3}{2}$

$\therefore -\dfrac{1}{2} \leqslant 2x - 3 \leqslant \dfrac{1}{2}$ **En ajoutant 3 aux membres de la double inégalité**

$\therefore -\dfrac{1}{2} + 3 \leqslant 2x - 3 + 3 \leqslant \dfrac{1}{2} + 3$

$\therefore \dfrac{5}{2} \leqslant 2x \leqslant \dfrac{7}{2}$ **En divisant par2** $\therefore \dfrac{5}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{4}$

$\therefore$ **L'ensemble solution de l'inéquation est** $[\dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{4}] - \{\dfrac{3}{2}\}$

Essayez de résoudre

7 Trouvez sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

a $|x-7| < 11$ **b** $|3x+7| \leqslant 8$ **c** $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 8$ **d** $\dfrac{1}{|3x|} > 5$

Pensé critique: Ecrivez sous la forme d'un intervalle de valeur absolue pour ce qui suit:

a $-4 \leqslant x \leqslant 4$ **b** $0 < x < 6$

c $x \geqslant -2\ , x \leqslant 2$ **d** $R - [-2\ ;\ 6]$

Exercices 1 - 5

Trouvez algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

1) $|x - 2| = 3$
2) $|3 - 2x| = 7$
3) $|x + 2| = 3x - 10$
4) $|x + 2| + x - 2 = 0$
5) $x + |x| = 2$
6) $|x - 2| = 3x - 4$
7) $|x - 1| = x - 2$
8) $|2x - 6| = |x - 3|$
9) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2x = 9$

Trouvez graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

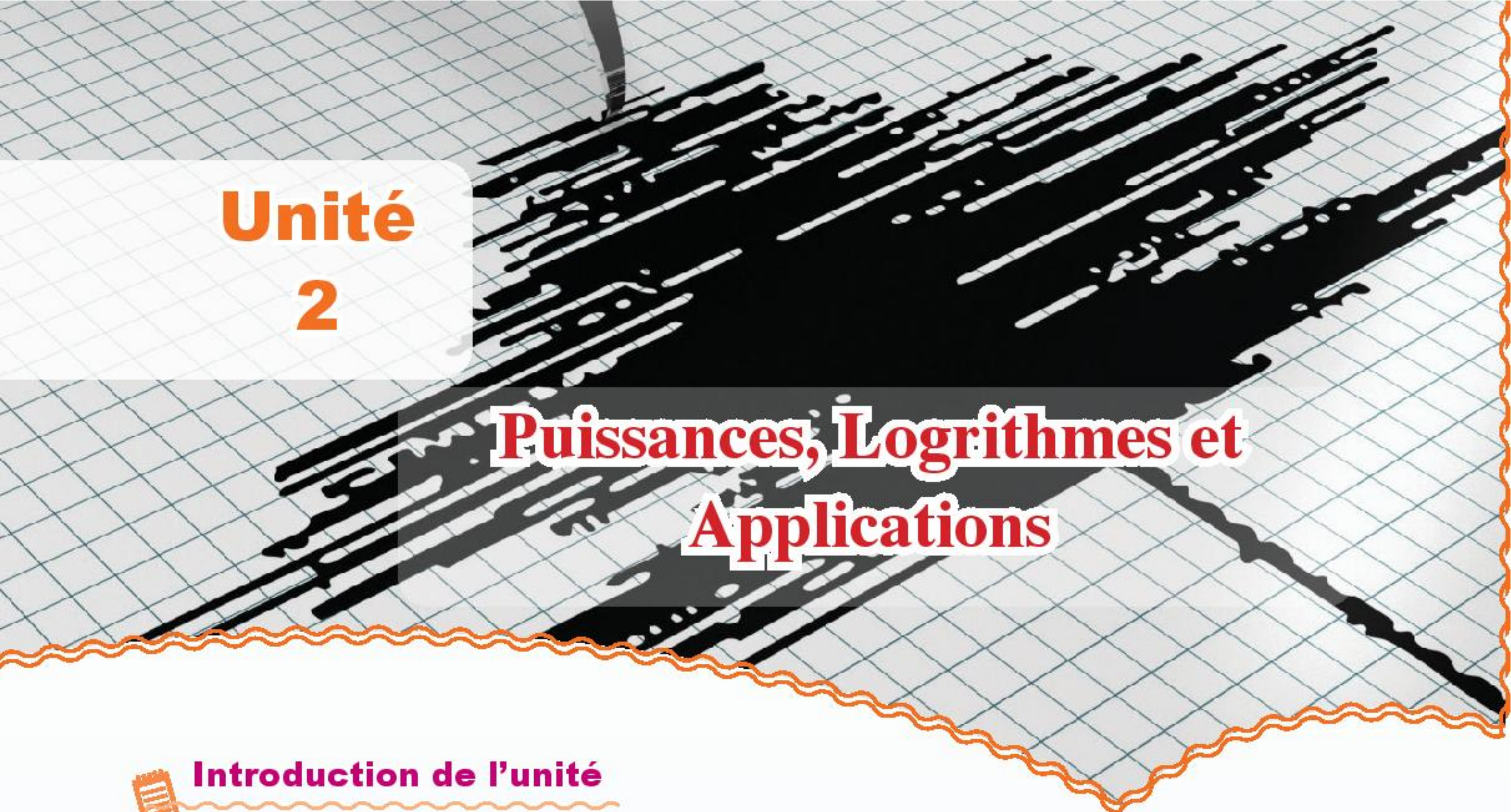
10) $|x - 3| = 7$
11) $|x + 2| + x - 2 = 0$
12) $|x - 2| = 3x - 4$
13) $|2x - 4| = |x + 1|$
14) $|x| + x = 0$
15) $|x + 2| = |x - 3|$

Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

16) $|x - 1| < 2$
17) $|x - 2| < 3$
18) $|5 - x| > 3$
19) $|2x - 3| \geqslant 7$
20) $|x + 3| > -1$
21) $|2x - 5| \geqslant 2$

Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

22) $|x - 3| \leqslant 15$
23) $|3x - 2| < 4$
24) $|3x - 7| \geqslant 2$
25) $|3x + 2| + 5 < 4$
26) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geqslant 4$
27) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \leqslant 9$
28) $|2x - 3| + |6 - 4x| < 12$
29) $\dfrac{1}{|2x - 5|} \geqslant 3$
30) $\dfrac{1}{|2x - 3|} > 2$



Unité 2

Puissances, Logrithmes et Applications

Introduction de l'unité

La notion des logarithmes a été introduite en mathématique à la fin par john Nabbier au début de 17[ième] siécle. Il l'a introduite comme un moyen pour simplifier certains calculs pour aider les marins, les savants et les ingenieurs à partir des outils performants (à l'époque) comme les règle du calcul et les tableaux des logarithmes. Léonhard Euler en 18[ième] siècle a decouvert des proprietées très utiles pour les praticiens. Parmi ces proprietées : déterminé le logarithme de produit de deux nombres $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, cela à partir une relation entre les exposants et les logarithmes. La notion des logaritmes est également util dans d'autres domaines par Exemple le décibel qui est une unité logaritmique pour mesurer de l'intensité du son ainsi que le volte et la puissance hydrogène pour Déterminez le niveau d'acide dans une liquid en chemie.

Compétences attendues de l'unité

- Reconnaître la fonction exponentielle $f : x \longrightarrow a^x$ où $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
- Reconnaître la représentation graphique de la fonction exponentielle et déduire ses propriétés
- Reconnaître les formules de puissance rationnelles
- Résoulvez des équations exponentielles
- Résoulvez dexs problèmes conduisant à des équations de la forme $a^x = b$.
- Reconnaître la fonction logarithme $= \log_a x$ or $f(x) = \log_a x$ oú $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$.
- Transformer algébriquement de la forme exponentielle à la forme logarithmique et inversement.
- Reconnaître la fonction réciproque et la condition de son existence (test de la droite horizontale).
- Reconnaître la représentation graphique de d'une fonction réciproque comme image d'une fonction par symétrie par rapport à la droite $y = x$. On étudie par exemple, la représentation graphique de la fonction logarithme dans des intervalles déterminés comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et on déduit ses propriétés.
- Déduire la relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme graphiquement.
- Reconnaitre les formules de logarithme :
  - $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $x > 0$; $y > 0$
  - $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, $x > 0$; $y > 0$
  - $\log_a (x)y = y \log_a x$, $x > 0$; $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $n \in \mathbb{R}$
  - $\log_a (\frac{1}{x}) = -\log_a x$, $x > 0$; $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $x > 0$; $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $a , b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a a = 1$ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a 1 = 0$ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- Résoulvez des équations logarithmiques.
- Résoulvez des problèmes en appliquant les formules des logarithmes
- Reconnaître les logarithmes usuels à base 10.
- Trouvez la valeur d'un logarithme en utilisant la calculatrice.
- Utiliser la calculatrice pour Résoulvez des équations exponentielles en utilisant le logarithme.

Vocabulaires de base

- Exposant
- Puissance
- Base
- Racines
- Exposant fractionnaires
- Racine carrée
- Racine cubique
- Racine nième
- Racine réelle
- Croissance exponentielle
- Décroissance exponentielle
- Pair
- Impair
- Formules exponentielles
- Fonctions exponentielle
- Equations exponentielles
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Symétrie
- Intérêt composé
- Fonction réciproque
- Logarithme
- Forme exponentielle
- Forme logarithmique
- Logarithme usuel
- Logarithme naturel
- Fonctions logarithmiques
- Equations logarithmiques

Leçons de l'unité

Lesson (2 - 1): Puissances fractionnaires

Lesson (2 - 2): Fonction exponentielle etapplications.

Lesson (2 - 3): Résolution des equations exponentielles.

Lesson (2 - 4): Fonction réciproque.

Lesson (2 - 5): Fonction logarithme et sa représentation graphique

Lesson (2 - 6): Quelques propriétés des logarithmes

Organigramme de l'unité

Puissances, logarithmes et applications

- Puissances fractionnaires
  - Racine nième
  - Généralisation des formules de puissances
- Fonction exponentielle
  - Définition de la fonction exponentielle formules de puissances
  - Représentation graphique de la fonction exponentielle formules de puissances
  - Application sur de la fonction exponentielle (croissance – décroissance) formules de puissances
- Equations exponentielles
- Fonction réciproque
  - Conditions de l'existence d'une fonction réciproque
  - Trouver la fonction réciproque algébriquement et graphiquement
- Fonction exponentielle
  - Représentation graphique de la fonction logarithme
  - Application sur la fonction logarithme
- Propriétés des logarithmes
  - Quelques propriétés des logarithmes
  - Résoudre les équations logarithmiques

Aides pédagogiques

Feuilles millimétrés - Une calculatrice scientifique – Ordinateur – Logiciels Graphique

Unité 2

2 - 1 Puissances fractionnaires

Allez apprendre

- Généralisation des formules de puissances.
- Racine nième.
- Formules de puissances frac-tionnaires.

Vocabulaires de base

- Puissances $n^{ième}$
- Base
- Puissance
- Racine nième
- Exposant fractionnai

Remarque

Pour tout réelle a

$\sqrt{a^2} = |a|$

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Préliminaire

Vous avez déjà étudié les racines carrées d'un nombre réel non négatSi et quelques propriétés des racines carrées et des racines cubiques ainsi que les puissances entières. Dans cette leçon, nous allons étudier les puissances fractionnaires.

A apprendre

Racine $n^{ième}$

Vous avez déjà étudié que:

L'équation $x^2 = 9$ admet uniquement deux racines réelles qui sont $\sqrt{9} = 3$ and $-\sqrt{9} = -3$

On remarque que $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$

De même, l'équation $x^3 = 8$ admet uniquement une racine réelle qui est $\sqrt[3]{8} = 2$ (les deux autres racines sont des nombres complexes)

On remarque que $(2)^3 = 8$

De manière générale :

L'équation $x^n = a$ où $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ admet n racines. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques cas :

1) Si n est pair et a est positif : $a > 0$

L'équation $x^n = a$ admet deux racines réelles, l'une est positive et l'autre est négative (les autres racines sont des nombres complexes). Les deux racines réelles sont notées $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$, La racine $n^{ième}$ positive du nombre a est appelée la racine $n^{ième}$ principale du nombre

Par exemple: l'équation $x^4 = 16$ admet deux racines réelles qui sont $\sqrt[4]{16} = 2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$

(Les autres racines sont des nombres complexes)

On remarque que $(2)^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$

2) Si n est pair et a est négatif et $a < 0$

L'équation $x^n = a$ a n'admet pas de racines réelles (les racines sont des nombres complexes). **Par exemple:** l'équation $x^2 = -9$ n'admet pas de racines réelles (les racines sont des nombres complexes).

3) Si n est impair et, $a \in \mathbb{R}- \{0\}$

L'équation $x^n = a$ admet une racine réelle unique qui est $\sqrt[n]{a}$ **les racines sont des nombres complexes)**

Par exemple: l'équation $x^5 = -32$ admet une racine réelle unique qui est $\sqrt[5]{-32} = -2$ **(les racines sont des nombres complexes). On remarque que$(-2)^5 = -32$**

4) Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $a = 0$

L'équation $x^n = 0$ admet une racine réelle unique qui est égale à zéro. $x = 0$ **(l'équation admet n des racines répétées et nulles si n > 1).**

Essayez de Résoudre:

1) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

a) $x^4 = 81$ b) $x^5 = 243$ c) $x^4 = -16$ d) $x^3 = -64$

Réflexion critique : Donnez un exemple numérique qui montre la diférence entre la racine 6$^{\text{ième}}$ du nombre a et $\sqrt[6]{a}$

A apprendre

Puissances fractionnaires

Vous avez déjà étudié que la racine carrée d'un nombre réel non négatif a est le nombre dont le carré est égal à a. Si a^m représente la racine carrée principale du nombre a:

$\therefore (a^m)^2 = a$ $\therefore a^{2m} = a$ **d'où** $2m = 1$ $\therefore m = \frac{1}{2}$

Donc $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée principale du nombre a **d'où** $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

De même, $a^{\frac{1}{3}}$ est **la racine cubique principale du nombre a.** **d'où** $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

De manière générale, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Définition 1

1) Pour tout nombre réelle $a \geqslant 0$; $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ **alors** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ racine n$^{\text{ième}}$ de a . Cette expression est aussi valable si $a < 0$, et n est un nombre paire plus grand que 1

2) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ où $a \in \mathbb{R}$, et m , n sont des entiers qui n'ont pas de facteurs communs $n > 1$; $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$

Généralisations des lois des puissances

Les lois des puissances fractionnaire sont soumises au mêmes lois des puissances entières.

Exemple

1) Trouvez, si cela est possible, la valeur de .

a) $(16)^{\frac{1}{4}}$ b) $-(27)^{\frac{1}{3}}$ c) $(-243)^{\frac{1}{5}}$

d) $(-9)^{\frac{1}{2}}$ e) $16^{\frac{3}{2}}$ f) $(27)^{\frac{4}{3}}$

Solution

a) $(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

b) $-(27)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{27} = -3$

c) $(-243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-243} = -3$

d) $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$ Remarquez que $\sqrt{-9} = 3i$

e) $16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

f) $(27)^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{4}{3}}} = (\frac{1}{\sqrt[3]{27}})^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

Essayez de Résoudre:

2 Trouvez, si cela est possible, la valeur de :

a) $(125)^{\frac{1}{3}}$ b) $(-81)^{\frac{3}{4}}$ c) $(128)^{\frac{-2}{7}}$ d) $-(343)^{\frac{2}{3}}$

Expliquez pourquoi?

Le nombre $(-8)^{\frac{1}{3}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{R}$, tandis que le nombre $(\sqrt[6]{-8})^2$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

Propriétés des racines $n^{\text{ièmes}}$

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$ **où** $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$

Remarque

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n est pair

$\sqrt[n]{a^n} = a$ si n est impair

Exemple

2 Mettez sous la forme la plus simple :

a) $-\sqrt[3]{8a^6 b^9}$ b) $\sqrt[4]{16 x^4 y^8}$

Solution

a) $-\sqrt[3]{8 a^6 b^9} = -\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{b^9} = -2 a^2 b^3$

b) $\sqrt[4]{16x^4 y^8} = \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{x^4} \times \sqrt[4]{y^8} = 2 |x| y^2$

Essayez de Résoudre:

3 Trouvez sous la forme la plus simple :

a) $\sqrt[4]{16 a^{12}}$ b) $\sqrt[6]{(x + 2y)^{18}}$

Remarque

Les formules des puissances entières sont aussi valables pour les puissances fractionnaires.

Exemple

3 Trouvez sous la forme la plus simple :

a) $(18)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(24)^{\frac{1}{2}}}$ b) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \times (147)^{\frac{1}{6}}}{(63)^{\frac{1}{3}}}$

Solution

a L'expression $= (2\times 3^2)^{-\frac{1}{2}} \times (3\times 2^2)^{\frac{3}{2}} \times (3\times 2^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{2\times 3}{2}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{3}{2}}$

$= 2^{\frac{-1+6-3}{2}} \times 3^{\frac{-2+3-1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}}\times 3^0 = 2\times 1 = 2$

b L'expression $= \dfrac{3^{\frac{1}{2}}\times(3\times 7^2)^{\frac{1}{6}}}{(3^2\times 7)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}\times 7^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}\times 7^{\frac{1}{3}}}$

$3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}\times 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0\times 7^0 = 1\times 1 = 1$

Essayez de Résoudre:

4 Démontrez que:

a $\dfrac{(343)^2x^{-\frac{1}{3}}\times(4)^3x^{+1}}{(196)^3x\times 4} = \dfrac{1}{7}$

b $\dfrac{125\times\sqrt[8]{4^3}\times 10^{-\frac{1}{4}}}{4^{\frac{5}{8}}\times\sqrt[4]{6^{-3}}\times 15^{\frac{3}{4}}} = 25$

Solution des équations exponentielles dans $\mathbb{R}$

Exemple

4 Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes

a $x^{\frac{7}{2}} = 128$ **b** $(2x+3)^{\frac{4}{3}} = 81$

c $x^{\frac{4}{3}} - 10\,x^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$ **d** $\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[6]{x^5} = 6$

Remarque

Si $x^{\frac{m}{n}} = a$

alors $x = a^{\frac{n}{m}}$
oú m et un nomre impair

Si $x^{\frac{m}{n}} = a$

a lors $x = \pm\, a^{\frac{n}{m}}$
est un nombre pair et m, n n'ont pas de facteurs communs

Solution

a $x^{\frac{7}{2}} = 128$

$x = (128)^{\frac{2}{7}}$ $\quad x = (2^7)^{\frac{2}{7}}$

$x = 2^2 = 4$ $\quad \therefore$ E.S $= \{4\}$

b $(2x+3)^{\frac{4}{3}} = 81$

$((2x+3)^{\frac{4}{3}})^3 = (3^4)^3$ en élvant les deux memebres à la puissance 3

$(2x+3)^4 = 3^{12}$

$2x+3 = \pm(3^{12})^{\frac{1}{4}}$ $\quad 2x+3 = \pm 3^3$

soit $2x+3 = 27$ $\quad 2x = 24$ $\quad \therefore x = 12$

ou $2x+3 = -27$ $\quad 2x = -30$ $\quad \therefore x = -15$

S.S $= \{12; -15\}$

c $x^{\frac{4}{3}} - 13\, x^{\frac{2}{3}} + 36 = 0$

$(x^{\frac{2}{3}} - 9)\,(x^{\frac{2}{3}} - 4) = 0$

soit $x^{\frac{2}{3}} - 9 = 0$ **ou** $x^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$

$x^{\frac{2}{3}} = 3^2$ $x^{\frac{2}{3}} = 2^2$

$x = \pm\,(3^2)^{\frac{3}{2}}$ $x = \pm\,(2^2)^{\frac{3}{2}}$

$x = \pm\,27$ $x = \pm\,8$

E.S = {27; -27; 8 , -8}

d $\sqrt[3]{x^5} - 31\,\sqrt[6]{x^5} - 32 = 0$

$x^{\frac{5}{3}} - 31x^{\frac{5}{6}} - 32 = 0$

$(x^{\frac{5}{6}} - 32)\,(x^{\frac{5}{6}} + 1) = 0$

soit $x^{\frac{5}{6}} - 32 = 0$ **ou** $x^{\frac{5}{6}} + 1 = 0$

$x^{\frac{5}{6}} = 2^5$ $x^{\frac{5}{6}} = -1$ **réfuseé**

$x = (2^5)^{\frac{5}{6}}$

$x = 64$

E.S = {64}

Essayez de Résoudre:

5 Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes:

a $x^{\frac{4}{3}} = 81$ **b** $(x + 1)^{\frac{-5}{2}} = 32^{\frac{-1}{2}}$ **c** $\sqrt[5]{x^4} - 3\,\sqrt[5]{x^2} = 4$

Exercices 2 - 1

1 Simplifiez $\dfrac{\sqrt{8} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{6^{-2} \times 3^2}$

2 Dans quelles conditions la relation $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ est-elle vraie pour toutes les valeurs réelles de a et b ?

3 Complétez ce qui suit :

a $(8)^{\frac{2}{3}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

b $(6\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

c $(\frac{16}{625})^{-\frac{3}{4}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

d $\sqrt[3]{(3\frac{3}{8})^{-1}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

e $(5^2 - 3^2)^{\frac{1}{2}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

4 Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

a Si $5^x = 2$ alors 25^x est égal à = ... (10 , 625 , 4 , 2)

b $(2^7 \div 2^5)^{-\frac{1}{2}}$ = ... $(2\ ,\ -2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2})$

c Si $x^{\frac{3}{2}} = 64$ alors x = ... (512 , 16 , 4 , 2)

d Laquelle des valeurs ci- contre n'est pas équivalente à $(\sqrt[5]{x^4})$ $((\sqrt[5]{x})^4\ ,\ \sqrt[4]{x^5}\ ,\ x^{\frac{4}{5}}\ ,\ (x^{\frac{1}{5}})^4)$

e Si $4\,x^5 = 128$ alors x est égal à = ... $(4\ ,\ \pm 2\ ,\ 2\ ,\ -2)$

f L'ensemble des racines réelles de l'équation $(x - 2)^4 = 16$ ....({0} , {4} , {8} , {0; 4})

g Si $3^a = 4^b$ alors $9^{\frac{a}{b}} + 16^{\frac{b}{a}}$ est égal à = ... (7 , 12 , 20 , 25)

5 **Déceler l'erreur :**

a $-9 = (-9)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

b Si $x^4 = 81$ alors $x = \sqrt[4]{81}$
$\therefore\ x = 3$

6 **Lien avec la géométrie :** Si le rayon d'une sphère est donné en fonction de son volume par la relation $r = (\frac{3V}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$. Trouvez la valeur de l'augmentation de son rayon lorsque son volume varie de $\frac{32}{3}\pi$ à 36π unités de volume.

7 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a $x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}$

b $x^4 = 81$

c $\sqrt[3]{(x-1)^5} = 32$

d $(x^2 - 5x + 9)^{\frac{5}{2}} = 243$

e $x^{\frac{4}{5}} - 5x^{\frac{2}{5}} + 4 = 0$

f $x + 15 = 8\sqrt{x}$

g $\sqrt[3]{x^2} - 25\sqrt[3]{x} - 54 = 0$

h $(2x - 1)^4 = (x + 3)^4$

8 Soit $x^{\frac{3}{2}} = 3y^{\frac{2}{3}} = 27$. Trouvez la valeur de $x + y$

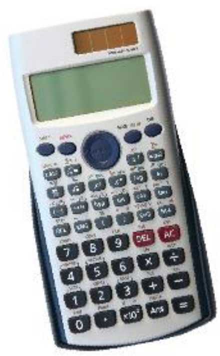
9 **Pensé critique** Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

a Si $x < 0$ alors: $\sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 =$ .... $(x\ ,\ -x\ ,\ 0\ ,\ -1)$

b Si $a = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}}$ lequel des nombres ci-contre est rationnel .... $(a^{12}\ ,\ a^{16}\ ,\ a^{18}\ ,\ a^{24})$

Activité

Utilisez une calculatrice pour effectuer les opérations suivantes
(Arrondir le résultat à un centième près) :



a $\sqrt[3]{\frac{7^4 \times 3^{-5}}{2^{-7}}}$

b $(23)^{-\frac{3}{2}} + (0{,}01)^{-\frac{5}{3}}$

Unité 2

2 - 2 Fonction exponentielle et applications

Allez apprendre

- Fonction exponentielle.
- Représentation graphique d'une fonction exponentielle.
- Propriétés d'une fonction exponentielle

Vocabulaires de base

- Fonction exponentielle
- Croissance exponentielle
- Décroissance exponentielle

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de
- Graphisme

Rappel

Fonction algébrique:
La variable indépendante x est la base et la puissance est un nombre réell.

Fonction exponentielle:
La variable indépendante x est la puissance

et la base est un nombre réel positif déférent de 1.

Activité

Les bactéries se développent en se divisant chacune en deux cellules directement dans une période déterminée puis les deux cellules se divisent en quatre et les quatre en huit et ainsi de suite dans des périodes équivalentes et dans les mêmes conditions.

Le tableau suivant montre le temps de division d'une cellule de bactérie en heures et le nombre de cellules produites :

Temps en heures	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de cellules	1	2	4	....	....	....	64

1) Complétez Le tableau précédent.
2) Exprimez le nombre de cellules sous forme exponentielle de base 2.
3) Peut-on estimer le nombre de cellules après 8 heures ?
4) Exprimez, sous forme exponentielle, le nombre de cellules après x heures

A apprendre

Fonction exponentielle

Definition 1

La fonction f telle que $f(x) = a^x$ où $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ **est appelée fonction exponentielle.**

Exemple:

$f(x) = 2^x$ est une fonction exponentielle **de base** (2) et **d'exposant** (x).

$f(x) = 5^{x+1}$ est une fonction exponentielle **de base** (5) et **d'exposant** (x+1).

$f(x) = (\frac{1}{3})^{2x}$ est une fonction exponentielle **de base** $(\frac{1}{3})$ et **d'exposant** (x).

Essayez de Résoudre:

1 Parmi les fonctions suivantes, identifiez les fonctions exponentielles :

a $f(x) = x^2$ b $f(x) = (2)^x$

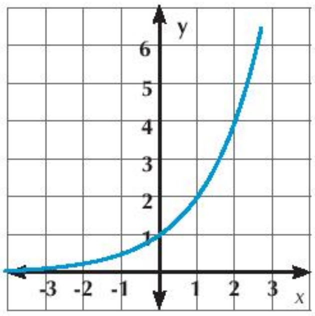
c $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ d $f(x) = x^3 - 1$

e $f(x) = (\frac{3}{4})^{x-1}$ f $f(x) = (-2)^x$

Représentation graphique d'une fonction exponentielle

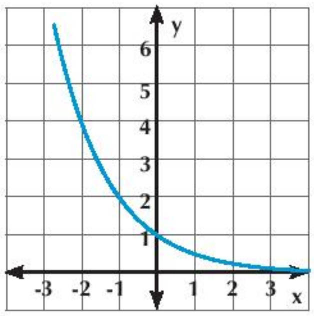
Représentez graphiquement les deux fonctions : $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

sur un intervalle arbitraire $x \in [-3, 3]$



$f(x) = 2^x$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$



$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Propriétés des fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ oú $a > 0$, $a \neq 1$

1) l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = (a)^x$ est $\mathbb{R}$ et son ensemble image est $]0\ ;+\infty[$

2) Si $a > 1$, alors la fonction est croissante sur son ensemble de définition elle est applée croissance exponentielle . Si $0 < a < 1$, la fonction est décroissante sur son ensemble de définition elle est applée décroissance exponentielle.

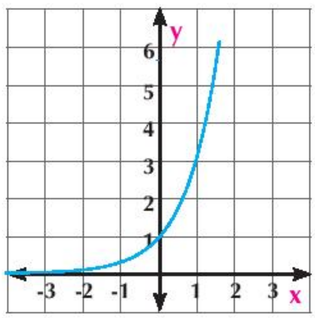
3) La courbe de la fonction $f(x) = a^x$ passe par le point (0; 1) pour tout $a > 0\ ;\ a \neq 1$

4) $f(x) = a^x$ est une fonction injective

5) La courbe de la fonction $f(x) = a^x$ est l'image de la fonction $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

6) $a^x \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$ et $a > 1$; $a^x \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$ et $0 < a < 1$

Essayez de Résoudre:



2 La figure ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (3)^x$. Sur le même graphique, tracez la courbe représentative de la fonction $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, Déterminez ensuite, l'ensemble de définition et l'ensemble image de chacune des deux fonctions. Laquelle des deux fonctions est croissante et laquelle des deux fonctions est décroissante ? Justifiez la réponse.

3 **Pensé critique:** Si $f(x) = a^x$ oú $0 < a < 1$ rangez ce qui suit dans un ordre croissant $f(7), f(-2)\ , f(\sqrt{5})\ , f(0)$.

Exemple

(1) Si $f(x) = 3^x$, **complétez ce qui suit:**

(a) $f(2) =$ .... (b) $f(x+2) =$ .... $\times f(x)$ (c) $f(x) \times f(-x) =$ ....

Solution

(a) $f(2) = 3^2 = 9$ (b) $f(x+2) = 3^{x+2} = 3^x \times 3^2 = 9\,f(x)$

(c) $f(x) \times f(-x) = 3^x \times 3^{-x} = 3^{x-x} = 3^0 = 1$

Essayez de Résoudre:

(4) Dans les exercices suivants, écrivez la règle de la fonction convenable en dessous de figure :

(a) $y = 3^x$ (b) $y = 3^{-x}$ (c) $y = -3^x$

(d) $y = -3^{-x}$ (e) $y = 3^x - 1$ (f) $y = 3^{x-1}$

(g) $y = 3^{1-x}$ (h) $y = 1 - 3^x$

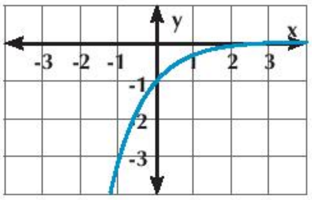


figure (1)

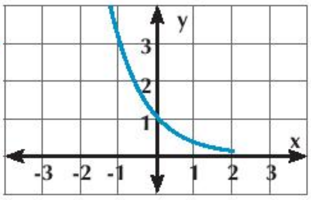


figure (2)

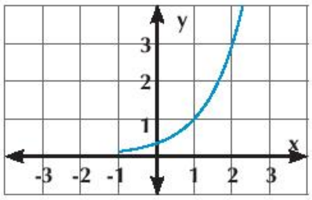


figure (3)

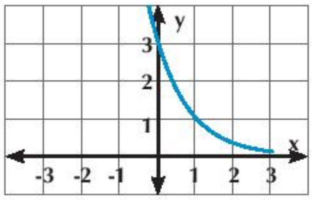


figure (4)

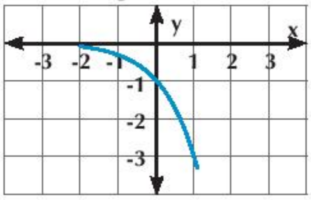


figure (5)

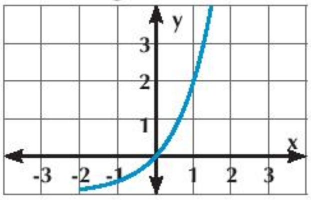


figure (6)

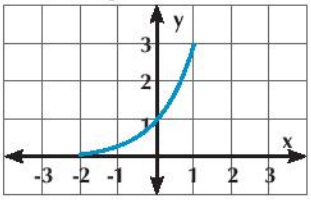


figure (7)

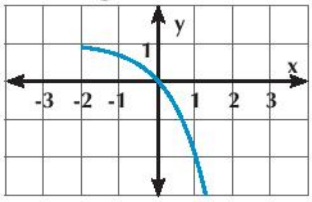


figure (8)

Applications impliquent aux équations à la forme $a^x = b$

Croissance et décroissance exponentielle :

Dans la vie courante, il y a des multiples phénomènes qui peuvent être modélisés comme des fonctions décrivant la croissance ou la décroissance au cours du temps. Par exemple, l'étude : de la population, des bactéries, des virus, de la radiation, de l'électricité et de la météorologie. Dans le domaine de l'algèbre, il y a deux fonctions peuvent facilement utiliser pour exprimer les notions de la croissance et celle de décroissance qui sont les fonctions de la croissance et celle de décroissance exponentielle.

Croissance exponentielle

Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(t) = a\,(1 + p)^t$ pour représenter la croissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où t est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps. Discuter avec votre professeur pour déduire la relation précédente.

Exemple

(2) **Intérêt composé:** Pour calculer le total T d'un montant investit m dans un banque pour un intérêt annuel c (un pourcentage) pour un nombre n d'années, les intérêts peuvent être composés sur x fractions (des intervalles) d'une année, on utilise la relation suivante :

$T = m\,(1 + \frac{c}{x})^{nx}$

Exemple: Un homme a déposé un montant de 5000 livres égyptiennes dans une banque pour un intérêt composé annuel de 8%.Trouvez la somme totale après 10 ans dans chacun des cas suivants :

(a) Intérêts annuels (b) Intérêts trimestriels (c) Intérêts mensuels.

Solution

En utilisant la relation suivante $T = m\,(1 + \frac{c}{x})^{nx}$ où x sont les fractions annuelles

(a) Intérêts annuels $\therefore x = 1$

$T = 5000\,(1+ 0.08)^{10} = 10794{,}62$ L.E

(b) Intérêts trimestriels $\therefore x = 4$

$T = 5000\,(1 + \frac{0{,}08}{4})^{10 \times 4} = 11040{,}2$ L.E

(c) Intérêts mensuels $\therefore x = 12$

$T = 5000\,(1+ \frac{0{,}08}{12})^{10 \times 12} = 11098{,}2$ L.E

Essayez de Résoudre:

(5) Dans une ruche, les abeilles se développent à un taux de croissance de 25% par semaine. Si le nombre initial d'abeilles est 60; écrire la fonction de croissance exponentielle représentant le nombre d'abeilles après t semaines puis estimer ce nombre après 6 semaines.

Décroissance exponentielle

Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(t) = a\,(1 - p)^t$ pour représenter la décroissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où n est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps.

Exemple

(3) **En lien avec le commerce :** Karim a acheté une nouvelle voiture à 120000 Livres Égyptiennes. Si le prix de la voiture diminue à un taux annuel de 12% .

1- écrire un fonction exponentielle représentant le prix de la voiture n ans après l'année d'achat.

2- estimer à une Livre près, le prix de la voiture 6 ans après l'année d'achat.

Solution

$a = 120000$, $p = \frac{12}{100} = 0.12$, La durée $n = 6$ ans

1: La fonction de décroissance exponentielle est f telle que : $f(t) = a(1 - p)^t$

En substituant les valeurs de a et p :

$f(t) = 120000\ (1 - 0{,}12)^t$ **d'où:** $f(t) = 120000\ (0{,}88)^t$

2: En remplaçant t = 6 dans la fonction de décroissance exponentielle:

$f(5) = 120000(0{,}88)^6 = 55728{,}49041$ Le prix estimé de la voiture après 55728 L.E

Essayez de Résoudre:

6 **En lien avec la médecine:** Un malade prend 40 milligrammes d'un médicament. Le corps du malade, se débarrasse d'environ 10% de la quantité de ce médicament dans le corps chaque heure.

a) Ecrivez une équation exponentielle exprimant la quantité du médicament restante dans le corps t heures après l'avoir pris.

b) Estimez la quantité du médicament restante dans le corps 4 heures après l'avoir pris.

Exercices 2 - 2

1 Complétez :

a La fonction f telle que $f(x) = a^x$ est exponentielle si a ...., x ....

b La fonction exponentielle g telle que $g(x) = 3^{x-1}$ a pour base ....

c La fonction p telle que $p(x) = (\frac{-1}{2})^{x+1}$ n'est pas une fonction exponentielle car ....

d Les coordonnées du point d'intersection de la courbe de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ avec la droite $x = 0$ est le point (......... ; ....)

e L'équation de l'axe de symétrie de la courbe constituée des deux courbes représentatives des deux fonctions f et g telles que, $f(x) = 3^x$, $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ est ....

2 Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

a Une fonction exponentielle de base a est croissante si :
(a) $a > 0$ (b) $a > 1$ (c) $0 < a < 1$ (d) $a = 1$

b Une fonction exponentielle de base a est décroissante si :
(a) $a > 0$ (b) $a < 0$ (c) $0 < a < 1$ (d) $-1 < a < 0$

c La courbe représentative de la fonction exponentielle f telle que $f(x) = a^x$, $a > 1$ s'approche de :
(a) l'axe des abscisses (sens positif) (b) l'axe des abscisses (sens négatif)
(c) l'axe des ordonnées (sens positif) (d) l'axe des ordonnées (sens négatif)

d Dans la fonction exponentielle f telle que $f(x) = a^x$ (où $a > 1$) $f(x) > 1$ si :
(a) $x \in \mathbb{R}$ (b) $x \in \mathbb{R}^+$ (c) $x \in \mathbb{R}^-$ (d) $x \in$ Y

e Dans la fonction exponentielle g telle que $g(x) = a^x$, $(0 < a < 1)$ alors $0 < a^x < 1$ si $x \in$
(a) $]0 ; +\infty[$ (b) $]-\infty ; 0]$ (c) $]1 ; +\infty[$ (d) $]-\infty ; 1]$

3 Parmi les fonctions suivantes, identifiez les fonctions exponentielles en déterminant la base et la puissance de chaque fonction:-

a $f(x) = 2x^3$ b $f(x) = \frac{2}{3}(5)^x$ c $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

d $f(x) = 3x^2 - 1$ e $f(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$ f $f(x) = (-7)^x$

4 Dans chacun des cas suivants, représentez la fonction f graphiquement puis déterminez son ensemble de définition son ensemble image et étudier son sens de variation:

a $f(x) = 3^x$ b $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ c $f(x) = -3\ (2)^x$ d $f(x) = 2^{x+1} + 1$

e $f(x) = (\frac{1}{2})^{x+2} - 2$ f $f(x) = 2\ (\frac{2}{3})^{x-1} + 1$ g $f(x) = -(\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{4}$

Unité 2

2 - 3 Résolution des équations exponentielle

Allez apprendre apprendre

- Résolution de l'équation expo- nentielle algébriquement.
- Résolution de l'équation expo- nentielle graphiquement

Vocabulaires de base

- Equation exponentielle
- Résolution graphique

Aides pédagogiques

- Ordinateur et logiciels de graphisme
- Calculatrice scientifique

Découvrez

D'après le tableau suivant, quand les deux expressions $2x$ et 2^x sont-elles égales ?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x$	-4	-2	0	....	....	....	....
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	....	....	....	....

A apprendre

Equation exponentielle

Si une équation contient la variable en position d'exposant, alors c'est une équation exponentielle comme par exemple, l'équation ($3^x = 27$) alors:

1: Si $a^m = a^n$, $a \notin \{0; 1; -1\}$ **alors** $m = n$.

Exemple

1. Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ b) $(2\sqrt{2})^{x-3} = 8^{x-2}$

Solution

a) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ $\therefore 3^{x+1} = 3^{-3}$

$\therefore x + 1 = -3$, $x = -4$ $\therefore$ E.S = **{-4}**

b) $(2\sqrt{2})^{x-3} = 8^{x-2}$ $\therefore (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{x-3} = (2^3)^{x-2}$

$\therefore (2^{\frac{3}{2}})^{x-3} = (2^3)^{x-2}$ $\therefore 2^{\frac{3}{2}(x-3)} = 2^{3(x-2)}$

$\therefore \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 3x - 6$ **multipliant par 2**

$\therefore 3x - 9 = 6x - 12$ $\therefore 3x - 6x = 9 - 12$

$-3x = -3$ $x = 1$ $\therefore$ E.S = **{1}**

Essayez de Résoudre:

1. Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $2^{3-x} = \frac{1}{16}$ b) $\frac{(3^2 + 5^2)^x}{68^x} = \frac{1}{32}$

2 : Si $a^m = b^m$, $a, b \notin \{0; 1; -1\}$, alors

ou: $m = 0$

ou: $a = b$ Si **m** est impair , $a = \pm b$ Si **m** est pair.

Exemple

1) Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a) $2^{x-3} = 5^{x-3}$ b) $7^{x+1} = 3^{2x+2}$

Solution

a) $2^{x-3} = 5^{x-3}$ $\therefore\ x - 3 = 0$ $x = 3$

$\therefore$ L'ensemble solution est **{3}**

b) $7^{x+1} = 3^{2x+2}$ $\therefore\ 7^{x+1} = 3^{2(x+1)}$ $\therefore\ 7^{x+1} = 9^{x+1}$

$\therefore\ x + 1 = 0$ $x = -1$ $\therefore$ L'ensemble solution est **{-1}**

Essayez de Résoudre :

2) Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a) $3^{x-5} = 2^{x-5}$ b) $4^{x+2} = 3^{2x+4}$

Réflexion critique : Trouvez toutes les solutions de l'équation $x^{x-2} = 4^{x-2}$

Exemple

2) Si $f(x) = 3^x$

a) Démontrez que $f(x+2) \times f(x-2) = f(2x)$

b) Soit $f(x+1) - f(x-1) = 72$ Trouvez la valeur de x

Solution

a) **Membre de gauche** $= f(x+2) \times f(x-2) = 3^{x+2} \times 3^{x-2}$

$= 3^{x+2+x-2}$ $= 3^{2x}$ $= f(2x) =$ **Membre de droite**

b) $\because f(x+1) - f(x-1) = 72$ $\therefore\ 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore\ 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore\ 3^{x-1}(3^2 - 1) = 72$

$\therefore\ 3^{x-1} = 9 = 3^2$ $\therefore\ x - 1 = 2$ $\therefore\ x = 3$

Essayez de Résoudre:

3) Si $f_1(x) = 8^x, f_2(x) = 4^x$

a) Démontrez que $\dfrac{f_1(2x+1) + f_2(3x+2)}{f_1(2x-1) + f_2(3x-2)} = 128$

b) Résolvez l'équation $f_1(2x) + f_2(3x-1) = 80$

Exemple

3 Si $f(x) = 2^x$

Trouvez la valeur de x qui vérifie l'équation : $f(x) + f(5 - x) = 12$:

Solution

Substituons dans l'équation $f(x) + f(5 - x) = 12$

$2^x + 2^{5-x} = 12$

$2^x \times 2^x + 2^{5-x} \times 2^x = 12 \times 2^x$ multippliant les deux membres par 2^x

$2^{x+x} + 25^{-x+x} - 12 \times 2^x = 0$

$2^{2x} - 12 \times 2^x + 32 = 0$ par factorisation

$(2^x - 4)(2^x - 8) = 0$

Soit : $2^x = 2^2$ alors $x = 2$

Ou: $2^x = 2^3$ alors $x = 3$

Essayez de Résoudre:

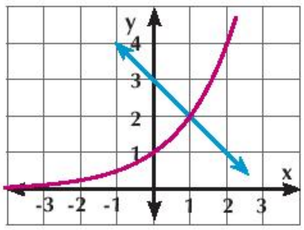
4 Dans l'escemple précédebt, démontrez que: $\dfrac{f(x+1)}{f(x-1)} + \dfrac{f(x-1)}{f(x+1)} = \dfrac{18}{25}$

Résolution des équations exponentielles graphiquement

Activité

4 En utilisant un logiciel de graphisme, tracez dans un même graphique, les deux fonctions $f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 3 - x$. Du graphique, Trouvez l'ensemble solution de l'équation $2^x = 3 - x$

Solution



En utilisant *Geogebra* , on trace les courbes des deux fonctions. Du graphique, les coordonnées du point d'intersection des deux courbes est (1 ; 2) .

$\therefore$ L'ensemble solution est = $\{1\}$ $\longrightarrow$ C'est l'abscisse du point d'intersection

Essayez de Résoudre:

5 En utilisant un logiciel de graphisme, tracez dans un même graphique, les deux fonctions :

$f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = x + 2$. Du graphique, trouvez l'ensemble solution de l'équation $2^x = x + 2$

Exercices 2 - 3

1. Choisissez la bonne réponse:

a) Si $2^{x+1} = 8$, alors $x =$ ....

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 3

b) Si $5^{x-1} = 4^{x-1}$; alors $x =$ ....

(a) 5 (b) 1 (c) -1 (d) 0

c) $(\frac{1}{2})^{a^2-a-2} = 1$ où $a > 0$; alors a = ...

(a) 1 (b) -3 (c) 2 (d) 3

2. Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $2^{x+1} = 4$ b) $3^{x-1} = \frac{1}{9}$ c) $7^{x-2} = 1$

d) $5^{x+3} = 4^{x+3}$ e) $(3\sqrt{3})^{|x|} = 27$ f) $3^{x+3} - 3^{x+2} = 162$

g) $5^{2x} + 25 = 26 \times 5^x$ h) $2^x + 2^{5-x} = 12$ i) $(\frac{1}{2})^{x+1} + (\frac{1}{2})^{x+3} + (\frac{1}{2})^{x+5} = 84$

3. Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

$3^x \times 5^y = 75$, $3^y \times 5^x = 45$

4. Si $f_1(x) = 3^x, f_2(x) = 9^x$ Trouvez la valeur de x qui vérifie $f_1(2x - 1) + f_2(x + 1) = 756$

5. Si $f(x) = 7^{x+1}$Trouvez la valeur de x qui vérifie $f(2x - 1) + f(x - 2) = 50$

6. Trouvez graphiquement , en utilisant un logiciel de graphisme l'ensemble solution des équations :

a) $3^{x-2} = 3 - x$ b) $2^x = 2x$

7. **Réflexion créative :** Si $x^3 = y^2$ et $x^{n+1} = y^{n-1}$, trouvez la valeur de n .

8. **En lien avec les nombres:** Si la somme des nombres $2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n$ donnée par la relation $s_n = 2(2^n - 1)$

a) Trouvez la somme des dix premiers nombres

b) Trouvez le nombre de termes qu'il faut ajouter à partir du premier terme pour obtenir une somme de 131070

9. Résolvez chacune des équations suivantes

a) $3^{x^2-42} = (\frac{1}{3})^x$ b) $7^{2-x} + 7^{-x} = 50$

10. **Réflexion créative**

Trouvez l'ensemble solution de l'équation :

$9^{x+1} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$

2 - 4 Fonction réciproque

Allez apprendre

- Fonction réciproque.
- Représentation graphique d'une fonction réciproque.
- Trouvez une fonction réciproque graphiquement et algébriquement

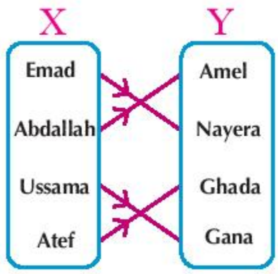
Vocabulaires de base

- Fonction
- Fonction réciproque
- Fonction injective
- Ensemble de définition
- Ensemble image
- Symétrie

Aides pédagogiques

- Calculatrice
- Ordinateur et logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez



La figure ci-contre représente une relation de l'ensemble des pères X = { Emad , Abdallah , Ossama , Atef } et l'ensemble de leurs filles Y = { Amal , Nayerah , Ghada , Ganah }. A l'aide de la figure :

1) Ecrivez le graphe de la relation « est le père de » qui relie X à Y. Cette relation est-elle une fonction ?

2) Ecrivez le graphe de la relation « est la fille de » qui relie Y à X. Cette relation est-elle une fonction ?

A apprendre

Fonction réciproque

Si f est une fonction injective définie de l'ensemble X vers l'ensemble Y, alors la fonction f^{-1} définie de l'ensemble Y vers l'ensemble X est appelée la fonction réciproque de la fonction f si :

pour tout $(x\,;\,y) \in G_f$ **alors** $(y\,;\,x) \in G_{f^{-1}}$

Exemple

1 Soit f une fonction dont le graphe $G_f = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8)\}$.
Trouvez la fonction réciproque de la fonction f puis représenter les deux fonctions dans un même graphique

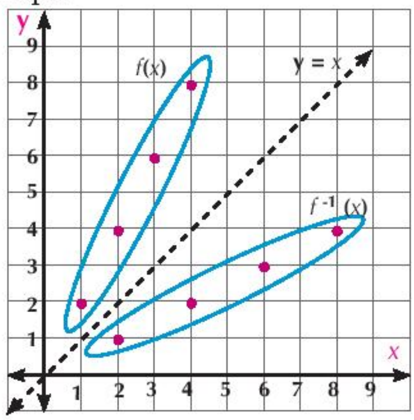
Solution

Comme la fonction f est injective, elle admet une fonction réciproque.

$\because\ G_f = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8)\}$

$\therefore\ G_{f^{-1}} = \{(2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4)\}$

On remarque que la fonction f et la fonction f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Donc $f^{-1}(x)$ est l'image de $f(x)$ par la symétre parrapport à la droite d'équation $y = x$

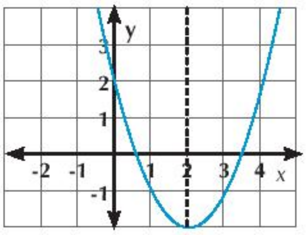
Essayez de Résoudre:

1) Trouvez la fonction réciproque de la fonction représentée par le tableau suivant:

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	7	3	1	0	$\frac{1}{2}$

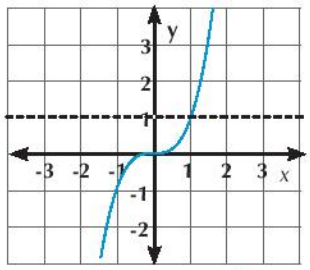
Test de la droite verticale

Si toute droite verticale coupe la ourbe en un seul point, alors cette courbe représente une fonction.



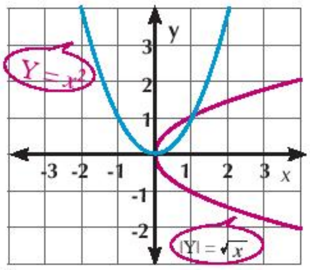
Test de la droite horizontale

Si toute droite horizontale courbe en un seul point, al courbe représente une fo injective



Remarquez que :

Si la fonction n'est pas injective (ne vérifie pas le test de la droite horizontale), alors la réciproque de cette fonction ne représente pas de fonction. $y = x^2$ (n'est pas injective) Sa réciproque $|y| = \sqrt{x}$ ne représente pas de fonction.



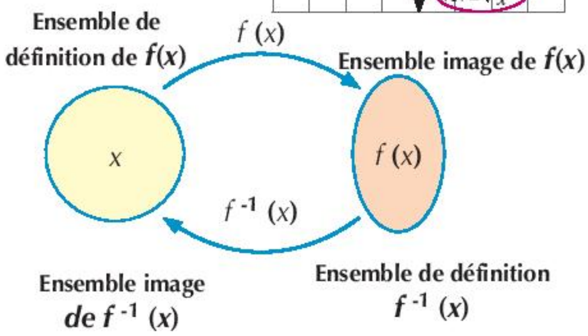
Propriétés de la fonction réciproque :

1) On dit que $f(x)$, $g(x)$sont inverse l'une à l'autre si

$(f \circ g)(x) = x$ **et** $(g \circ f)(x) = x$

2) L'ensemble définition de $f(x)$ = L'ensemble image de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$

L'ensemble image de $f^{-1}(x)$ = L'ensemble définition de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$



Pensé critique:

Quel est l'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour qu'elle admette une fonction réciproque ? Trouvez dans ces conditions, la fonction réciproque.

Remarque

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction on trouve x en fonction de y

Exemple

1) Trouvez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = 2x + 1$ puis représentez la fonction et la fonction réciproque dans un même graphique.

Solution

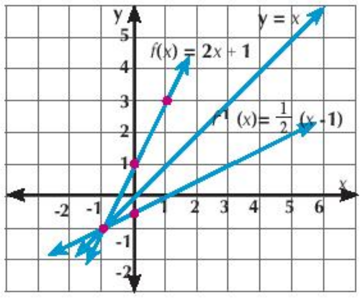
$y = 2x + 1$

$\therefore\ x = 2y + 1$ **En permutant les variables**

$\therefore\ 2y = x - 1$

$\therefore\ y = \frac{1}{2}(x - 1)$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

x	1	0	-1
$f(x)$	3	1	-1
$f^{-1}(x)$	0	$\frac{-1}{2}$	-1



On remarque que la fonction f et la fonction réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Essayez de Résoudre:

2) Trouvez la fonction réciproque de la fonction d'équation $y = x^3$ puis représentez la fonction et la fonction réciproque dans un même graphique

Exemple

2) Si $f(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$ Trouvez:

a) L'ensemble définition et l'ensemble image de $f(x)$

b) $f^{-1}(x)$ et son ensemble définition et son l'ensemble image

c) En utilisant un logiciel de graphisme, tracer les deux courbes des fonctions $f(x)$ et $f^{-1}(x)$

Solution

a) $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs de $x - 1 \geqslant 0$ d'ou $x \geqslant 1$

$\therefore$ L'ensemble définition de $f(x) = [\,1\,;+\infty[$

$\because\ \sqrt{x - 1} \geqslant 0$

Pour toutes les valeurs de x appartenant à l'ensemble définition de la fonction

$\therefore 3 + \sqrt{x - 1} \geqslant 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant 3$

$\therefore$ L'ensemble image de $f(x) = [3\,;+\infty[$

b) $\because y = 3 + \sqrt{x - 1}$

En permutant les variables x , y

$x = 3 + \sqrt{y - 1}$ $x - 3 = \sqrt{y - 1}$ **En élevant au carré**

$(x - 3)^2 = y - 1$

$\therefore y = (x - 3)^2 + 1$ $\therefore f^{1}(x) = (x - 3)^2 + 1$

son ensemble définition $f^{-1}(x) = [3\,;+\infty[$ et son l'ensemble image $[1\,;+\infty[$

Essayez de Résoudre:

3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

a) Trouvez: $f^{-1}(x)$ son ensemble définition et son l'ensemble image

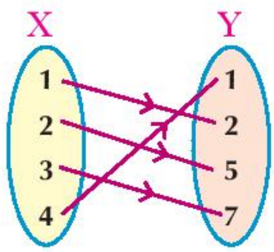
b) En utilisant un logiciel de graphisme, tracez la courbe de $f(x)$, $f^{-1}(x)$

Exercices 2 - 4

1) Complétez:

a) Si la fonction f est telle que $G_f = \{(1; 4), (2; -3), (3; 1), (4; 0)\}$ alors $G_{f^{-1}} =$ ....

b) La figure ci-contre représente une fonction $f : x \longrightarrow Y$ alors $f^{-1}(2) =$ ....



c) L'image du point (2 ; 1) par la symétrie par rapport à la droite $y = x$ est le point ....

d) Si f est une fonction injective et si $f(2) = 6$ alors $f^{-1}(6) =$ ....

e) Si $f : x \longmapsto 4x$ alors $f^{-1} : x \longmapsto$ ....

2) Mettre le signe (✓) devant la phrase correcte et le signe (✗) devant la phrase fausse:

a) L'ensemble de définition d'une fonction est le même que celui de sa fonction réciproque (..................)

b) Une fonction croissante dans son domaine de définition admet toujours une fonction réciproque. (..................)

c) Une fonction paire admet toujours une fonction réciproque. (..................)

d) Une fonction impaire admet toujours une fonction réciproque. (..................)

3) Trouvez la fonction réciproque de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

b) $f(x) = 4x$

c) $f(x) = 5 + \frac{4}{x}$

d) $f(x) = \frac{3}{x}$

e) $f(x) = 8x^3 - 1$

f) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x}$

g) $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$

h) $f(x) = x^2$ si $x > 0$

i) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ si $x > 1$

j) $f(x) = x^2 + 8x + 7$ si $x > -4$

k) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ si $-3 \leqslant x \leqslant 0$

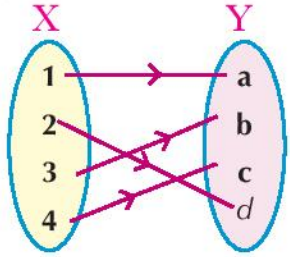
l) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$

n

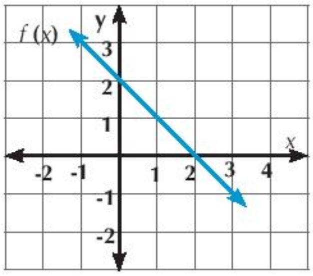
x	-2	1	2	5
$f(x)$	7	4	1	-1

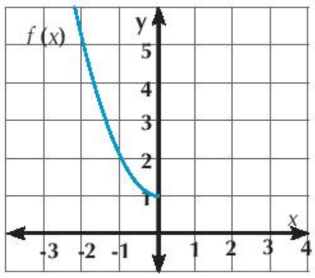
4 **a** Soit $f(x) = 5x$. Trouvez $f^{1}(x)$ puis représentez les deux fonctions graphiquement.

b La figure ci-contre représente une fonction de X vers Y. Trouvez la valeur de $f^{-1}(b) + 2f^{-1}(c)$.



5 Dans chacune des figures suivantes, tracer la fonction réciproque $f^{-1}(x)$ de la fonction représentée:





6 **Décelez l'erreur :**

Waael et Rana ont essayé chacun de trouvez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \frac{x-5}{x}$

solution de Wael

$\because f(x) = \frac{x-5}{x}$

$\because f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

$\therefore f^{-1}(x) = 1 \div \frac{x-5}{x}$

$= 1 \times \frac{x}{x-5}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-5}$

solution de Rana

$\because y = \frac{x-5}{x}$

$\therefore x = \frac{y-5}{y}$

$\therefore y\,x = y - 5$

$\therefore y\,x - y = -5$

$\therefore y\,(x-1) = -5$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-5}{x-1}$

Laquelle des deux solutions est correcte ? Pourquoi ?

7 **Question ouverte** Peut-on trouvez une fonction f telle que la fonction et sa fonction réciproque f^{-1}? sont les mêmes ? Si oui, donnez des exemples.

8 Lesquelles des fonctions suivantes admettent une fonction réciproque ?

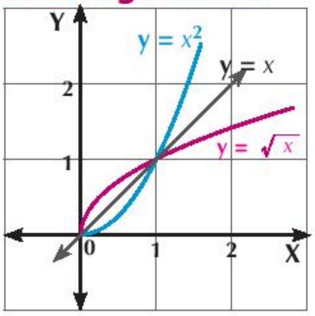
a $f(x) = x^2$ **b** $f(x) = x^3$ **c** $f(x) = \frac{1}{2}x$

Fonction logarithme et sa représentation graphique

2 - 5

Représentation graphique de la fonction logarithme

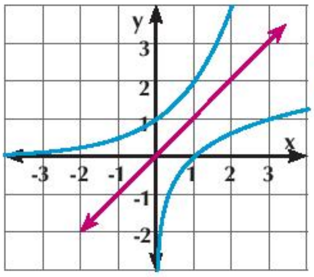
Découvrez



On sait que la fonction $y = \sqrt{x}$ est la fonction réciproque de la fonction $y = x^2$ pour tout $x > 0$ (Sa courbe est symétrique par rapport á la droite d'équation $y = x$) Nous pouvons représenter la fonction réciproque de la fonction exponentielle f telle que $f(x) = 2^x$ en représentant les coordonnées des couples de la fonction.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



De ce qui précède, on trouve que la fonction inverse de la fonction d'équation $y = 2^x$ is $x = 2^y$ aest la fonction d'équation $x = 2^y$ est appelée logarithme de x. **qui s'écrit $y = \mathrm{Log}_a\, x$ se lit y est égale au logarithme de base a de x .**

A apprendre

Fonction logarithme

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ la fonction logarithme $y = \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction $y = a^x$

La fonction $f(x) = \log_a x$ est appelée la fonction logarithme

- Ensemble définition de la fonction logarithme $= \mathbb{R}^+$
- Ensemble image de la fonction logarithme $= \mathbb{R}$
- La forme $y = \log_a x$ est équivalente à la forme $a^y = x$

Allez apprendre

- Définition d'une fonction logarithme.
- Représentation graphique d'une fonction logarithme.
- Transformation de la forme expo- nentielle en forme logarithmique et inversement.
- Résolution de quelques équations logarithmiques simples.

Vocabulaires de base

- Logarithme
- Fonction réciproque
- Ensemble de définition
- Logarithme usuel

Aides pédagogiques

- Logiciels.
- Calculatrice scientifique

Remarque

$\log_a x = y$ est une forme logarithmique, la forme exponentielle correspondante est $a^y = x$
$(-3)^4 = 81$ n'a pas de forme logarithmique correspondante.

Transformation d'une forme exponentielle en forme logarithmique :

(a) $2^4 = 16$ est équivalente à $\log_2 16 = 4$ (b) $5^2 = 25$ est équivalente à $\log_5 25 = 2$

(c) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ est équivalente à $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$ (d) $10^{-2} = 0{,}01$ est équivalente à $\log_{10} 0{,}01 = -2$

Essayez de Résoudre:

(1) Transformez les expressions suivantes de la forme exponentielle en forme logarithmique

(a) $7^2 = 49$ (b) $(\sqrt{2})^{10} = 32$ (c) $(\frac{3}{5})^4 = \frac{81}{625}$ (d) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

Logarithme décimal de base 10

Si la base du logarithme est 10; le logarithme est appelé dans ce cas Logarithme décimal. On le note sans base .

Par exemple: $\log_{10} 7$ s'écrit $\log 7$; $\log_{10} 127$ s'écrit $\log 127$

Transformation de la forme logarithmique en forme exponentielle:

(a) $\log_3 81 = 4$ est équivalente à $3^4 = 81$ (b) $\log_2 128 = 7$ est équivalente à $2^7 = 128$

(c) $\log \frac{1}{100} = -2$ est équivalente à $10^{-2} = \frac{1}{100}$ (d) $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$ est équivalente à $81^{\frac{3}{4}} = 27$

Essayez de Résoudre:

(2) Transformez les expressions suivantes de la forme logarithmique en forme exponentielle:

(a) $\log_5 125 = 3$ (b) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$ (c) $\log_4 1 = 0$ (d) $\log 1000 = 3$

Trouvez la valeur d'une expression logarithmique de base donnée:

Exemple

(1) Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

(a) $\log 0{,}001$ (b) $\log_3 \sqrt[4]{27}$

Solution

(a) **En posant $y = \log 0{,}001$**

En mettant sous la forme exponentielle:

$10^y = 0{,}001$

$10y = (\frac{1}{10})^3$ En mettant sous la forme exponentielle

$10^y = (10)^{-3}$ Propriété des puissances

$y = -3$ d'où $\log 0{,}001 = -3$

(b) **En posant $y = \log_a \sqrt[4]{27}$**

En mettant sous la forme exponentielle :

$3^y = 3^{\frac{3}{4}}$ **Propriété des puissances**

$y = \frac{3}{4}$

Donc $\log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{3}{4}$

Essayez de Résoudre:

(3) Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

(a) $\log 0{,}00001$ (b) $\log_{\frac{1}{2}} 128$

Exemple

(2) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

(a) $\log_3 (2x - 5) = 1$ (b) $\log_x (x + 2) = 2$

Solution

(a) a L'équation est définie pour toutes les valeurs de x qui vérifient $2x - 5 > 0$: $x > \frac{5}{2}$ (Ensemble de validité de l'équation)

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente

$\therefore\ 3^1 = 2x - 5$ $\therefore\ 2x = 8$

$\therefore\ x = 4 \in$ ensemble de validité de l'équation $\therefore$ L'ensemble solution est $= \{4\}$

(b) L'équation est définie pour toutes les valeurs de qui vérifient

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{C ést .à. dire} \quad \begin{cases} x > -2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$x \in]0\ ; +\infty[- \{1\}$

d'où l'ensemble de définition de l'équation est $]0\ ; +\infty[- \{1\}$ (Domaine de définition de l'équation)

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente

$\therefore\ x^2 = x + 2$ $\therefore\ x^2 - x - 2 = 0$

$\therefore\ (x - 2)(x + 1) = 0$ $\therefore\ x = 2$ ou $x = -1$

$\because\ x = -1 \notin$ ensemble de validité de l'équation $\therefore$ L'ensemble solution est $= \{2\}$

Essayez de Résoudre:

(4) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

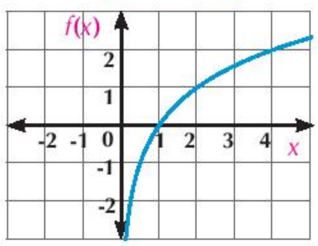
(a) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ (b) $\log_x 5x = 2$

A apprendre

Représentation graphique de la fonction logarithme

La fonction f telle que $f(x) = \log_a x$ où $a \neq 1$ est représentée graphiquement comme suit:

Si a > 1



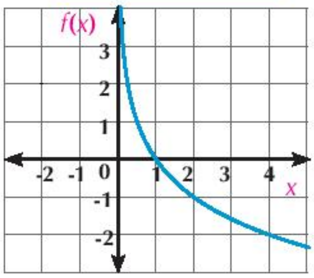
Ensemble de définition $\mathbb{R}^+$

Ensemble image: $\mathbb{R}$

Point d'intersection avec l'axe des x **:** (1; 0)

Sens de variation : f **est croissante sur** $\mathbb{R}^+$

Soil $0 < a < 1$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}^+$

Ensemble image : $\mathbb{R}$

Point d'intersection avec l'axe des x: $(1;\ 0)$

Sens de variation : f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Pensé critique: Peut-on déduire la relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme?

Exemple

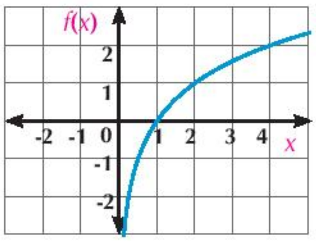
(3) Représentez, graphiquement les fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \log_2 x$ (b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Solution

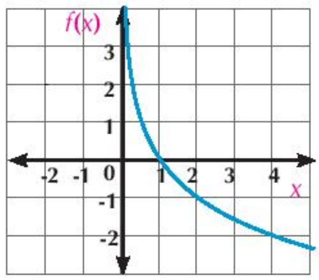
(a) **On remarque : que la base** $2 > 1$

x	2	1	4
$f(x)$	1	0	2



(b) **On remarque :** the base: $0 < \frac{1}{2} < 1$

x	2	1	4
$f(x)$	-1	0	-2



Utilisation de la calculatrice :

Nous pouvons utiliser la calculatrice pour calculer les logarithmes comme suit :

1) Pour calculer $\log_2 4$ on appuie sur les boutons dans l'ordre ci-dessous

log▫▫ 2 REPLAY 4 = 2

2) Pour calculer $\log 38$ on appuie sur les boutons dans l'ordre ci-dessous

log▫▫ 3 8 = 1.579783597

Exercice :

Utilisez la calculatrice pour la valeur de chacun de ce qui suit:

(a) $\log_3 12$ (b) $\log_3 24$ (b) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$ (d) $\log 128$

Exercices 2 - 5

1 Exprimez les expressions suivantes sous une forme logarithmique équivalente :

a) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ b) $(\frac{2}{5})^4 = \frac{16}{625}$ c) $5^0 = 1$ d) $(\sqrt{2})^4 = 4$

2 Exprimez les expressions suivantes sous une forme exponentielle équivalente :

a) $\log 100 = 2$ b) $\log_2 4\sqrt{2} = \frac{5}{2}$ c) $\log_7 1 = 0$ d) $\log_{\sqrt{11}} 121 = 4$

3 Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \log_3 (2x + 1)$ b) $f(x) = 2\log x$ c) $f(x) = \log_{(5-x)} (x - 3)$

4 Sans utilisez une calculatrice, trouver la valeur de :

a) $\log_2 16$ b) $\log_{\sqrt{5}} 5$ c) $\log_8 1$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$

5 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $\log_3 27 = x + 2$ b) $\log_x (2x + 3) = 2$ c) $\log (2x + 1) = 0$

d) $\log_2 (\log_3 x) = 1$ e) $\log_4 [13 + \log_2 (x - 1)] = 2$ f) $\log_2 (4^x - 2) = x$

6 Représentez graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$f(x)$					

x	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	7
$f(x)$						

7 Dans un même graphique, tracez les deux fonction f et g telles que $f(x) = \log_2 x$ et $f(x) = 6 - x$.
De la représentation graphique, trouvez l'ensemble solution de l'équation $\log_2 x = 6 - x$.

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

8 Si $\log_3 x = 2$; alors $x =$ ....

a) 9 b) 8 c) 3 d) 5

9 Si $\log_a 16 = 4$ alors a $\in$ ....

a) $\{16\}$ b) $\{2\}$ c) $\{2; -2\}$ d) $\{1\}$

10 $\log_5 125 =$ ....

a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) 5 d) 125

11) L'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = \log_{(1-x)} 3$ est ....

a) $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ 1[$ b) $]-\infty\ ;\ 1[$ c) $]1\ ;\ \infty[$ d) $]-1\ ;\ 1[$

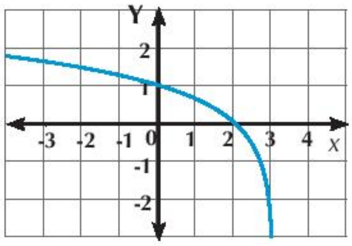
12) $\log 100 =$ ....

a) 1 b) 2 c) 3 d) -1

13) Si la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \mathrm{Log}_a\, x$ passe par le point (8; 3): alors $f(4) =$ ....

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) -2

14) La figure ci-contre représente la fonction ....



a) $y = 3^{x-1}$ b) $y = 3^{x+1}$

c) $y = \log_3 (2 - x)$ d) $y = \log_3 (3 - x)$

15) Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit puis vérifiez le résultant en utilisant la calculatrice :

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 \frac{1}{8}$ c) $\log_{\sqrt{7}} 343$ d) $\log\ 0{,}001$

16) Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit puis vérifiez le résultant en utilisant la calculatrice:

a) $\log_{81} = \frac{3}{4}$ b) $\log_3(2x - 5) = 0$ c) $\log_x (x + 6) = 2$

d) $\log_5 \log_2 \log_3 x = 0$ e) $\log_3(\frac{x^2}{2x - 3}) = 1$ f) $\log_5| 2x + 1| = 1$

17) **En lien avec l'enseignement:** Si la relation entre le degré de mémorisation des connaissances étudiées par un étudiant, en première secondaire, et le nombre de mois écoulés (t) depuis la fin de cette année d'étude est donnée par la formule: $f(n) = 70 - 4 \log_2 (n + 1)$
trouve le degré de mémorisation étudiées :

a): au mois où l'étudiant termine l'étude en première secondaire (n = 0)

b): après 7 mois de la fin d'étude en première secondaire.

18) **Applications :** Une étude pour mesurer le degré de mémorisation des connaissances étudiées en une matière par un groupe d'étudiants consiste à repasser un examen dans la matière de temps en temps. Si les notes d'un étudiant sont données par la relation $f(n) = 85 - 25 \log (n + 1)$, où t est le nombre de mois écoulés après la fin de l'étude et $f(t)$ est la note de l'étudiant (en pourcentage), trouver .

a) la note de l'étudiant dans cette matière.

b) la note de l'étudiant 3 mois après la fin d'étude de cette matière.

c) la note de l'étudiant un an après la fin d'étude de cette matière.

Quelques propriétés des logarithmes

2 - 6

Allez apprendre

- Utilisation de quelques pro-prié-tés des logarithmes.
- Résolution des équations loga-rithmiques.
- Utilisation de la calculatrice pour résoudre des équations exponentielles.
- Applications de la viequotidi-enne sur les logarithmes.

Vocabulaires de base

- Equations logarith-miques
- Echelle de Richter

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Ordinateur
- Logiciels de graphisme

Découvrir

En utilisant une calculatrice, Trouvez la valeur de

1) $(\log_2 4 + \log_2 8)$, $\log_2 32$ **2)** $(\log 40 + \log\frac{5}{2})$, $\log 100$

3) $(\log_2 27 - \log_3 9)$, $\log_3 3$Qu'en déduisez-vous ?

A apprendre

Quelques propriétés des logarithmes

Si: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **1)** $\log_a a = 1$ **2)** $\log_a 1 = 0$

Essayez de démontrer les propriétés 1 et 2 à l'aide de la définition du logarithme.

3) **Propriété du logarithme d'un produit :**

$\log_a x\,y = \log_a x + \log_a y$ où x et $y \in \mathbb{R}^+$

Pour démontrer cette propriété :

On pose $b = \log_a x$ et $c = \log_a y$

D'après la définition du logarithme :

$x = a^b$, $y = a^c$

Donc $x\,y = a^b \times a^c$ **i.e.** $x\,y = a^{b+c}$

En transformant le résultat sous la forme logarithmique :

$\log_a x\,y = b + c$

En substituant les valeurs de b et c on a $\log_a x\,y = \log_a x + \log_a y$

Exemple

(1) Trouver la valeur de $\log_2 10$ dans sa forme la plus simple sachant que $\log_2 5 \simeq 2{,}3219$ puis vérifier le résultat en utilisant une calculatrice.

Solution

$\log_2 10 = \log_2 (2 \times 5)$

$= \log_2 2 + \log_2 5$ **En utilisant la propriété du logarithme du produit**

$= 1 + 2{,}3219 \simeq 3{,}3219$ **En utilisant la propriété et la substitution**

La vérification en utilisant une calculatrice :

log 2 REPLAY 1 0 = 3,321928095

Essayez de résoudre :

1) Trouvez la valeur de $\log_3 15$ dans sa forme la plus simple sachant que $\log_3 5 \simeq 1.465$ vérifiez le résultat en utilisant une calculatrice

4) Propriété du logarithme d'un quotient :

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ où x, $y \in \mathbb{R}^+$ et $y \in R^+$ (**Essayer de démontrer cette propriété**)

Exemple

1) Trouver la valeur de l'expression : log30 - log3 .

Solution

$\log 30 - \log 3 = \log \frac{30}{3} = \log 10 = 1$

Essayez de résoudre :

2) En utilisant la propriété du logarithme du quotient, démontrer que : $\log 2 = 1 - \log 5$

5) Propriété du logarithme d'une puissance :

$\log_a x^n = n \log_a x$ **où** $n \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $a \in \mathbb{R}^+$ et $a \neq 1$

Exemple

2) Trouver dans sa forme la plus simple $\log_5 \sqrt[4]{125}$

Solution

$\log_5 \sqrt[4]{125} = \log_5 (5)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_5 5 = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

Remarque

$(\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}})$

Essayez de résoudre :

3) Trouver dans sa forme la plus simple

$\log_3 \sqrt[7]{243}$, $\log_7 \sqrt[4]{343}$

Remarque: $\log_a (\frac{1}{x}) = -\log_a x$ oú $x \in \mathbb{R}^+$

6) Propriété du changement de base du logarithme :

Si $x \in \mathbb{R}^+$ and y, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, démontrer que : $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

Démonstration **(Ne fait pas l'objet d'un examen)**

soit: $z = \log_y x$

$y^z = x$ **En transformant sous la forme exponentielle**

$z \log_a y = \log_a x$ **En calculant le logarithme de chaque membre en base a**

On obtient D'où $z = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$ **c.a.d:** $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

Essayez de résoudre :

4) Utilisez la propriété 6 pour trouver la valeur de : a) $\log_4 8$ b) $\log_9 243$

7- Propriété de l'inverse : $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Réflexion critique : Si $a, b \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ démontrer que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de : $\log_3 7 \times \log_7 3$ Simplification des expressions logarithmiques .

Résolution des équations logarithmiques:

Exemple

3) Mettez sous la forme la plus simple :

a) $2\log 25 + \log(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + 2\log 3 - \log 30$ b) $\log_5 49 \times \log_8 5 \times \log_9 8 \times \log_7 9$

Solution

a) L'expression $= \log 25^2 + \log\frac{8}{15} + \log 3^2 - \log 30$ **Propriété 5**

$= \log(25^2 \times \frac{8}{15} \times 3^2 \times \frac{1}{30})$ **Propriétés 3 et 4**

$= \log 100 = 2$

b) L'expression $= \dfrac{\log 49}{\log 5} \times \dfrac{\log 5}{\log 8} \times \dfrac{\log 8}{\log 9} \times \dfrac{\log 9}{\log 7}$ **Propriété 6**

$= \dfrac{\log 49}{\log 7} = \dfrac{2\log 7}{\log 7} = 2$

Essayez de résoudre :

5) Simplifiez : $\log 0{,}009 - \log\frac{27}{16} + \log 15\frac{5}{8} - \log\frac{1}{12}$

6) Démontrez que : $\dfrac{\log 729 - \log 64}{\log 9 - \log 4} = 3$

7) Si $x^2 + y^2 = 8xy$, Démontrez que: $2\log(x + y) = 1 + \log x + \log y$

Résolution des équations logarithmiques :

Exemple

4 Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_3(x - 1) + \log_3(x + 1) = \log_3 8$ b $\log_3 x + \log_x 3 = 2$

Solution

a L'équation est définie pour tout $x \in \{x : x - 1 > 0\} \cap \{x : x + 1 > 0\}$

Donc $x > 1$ (est l'ensemble de validité de l'équation)

$\log_3(x - 1) + \log_3(x + 1) = \log_3 8$

$\therefore \log_3(x - 1)(x + 1) = \log_3 8$ **Propriété 3**

$\therefore x^2 - 1 = 8$ $\therefore x^2 = 9$ alors $x = \pm 3$

$x = -3$ n'appartient pas à l'ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ L'ensemble solution est $\{3\}$

b L'équation est définie pour tout $x > 0$, $x \neq 1$

$\therefore \log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x} = 2$ **Propriété 7**

$\therefore (\log_3 x)^2 + 1 = 2\log_3 x$ **En multipliant par** $\log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x + 1 = 0$ $\therefore (\log_3 x - 1)^2 = 0$

$\therefore \log_3 x = 1$ $\therefore x = 3 \in$ L'ensemble de validité de la fonction

$\therefore$ L'ensemble solution est $\{3\}$

Essayez de résoudre :

8 Trouver dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$ b $\log(8 - x) + 2\log\sqrt{x - 6} = 0$ c $\log x - \log_x 100 = 1$

Résolution des équations exponentielles en utilisant les logarithmes

Exemple En calculant le logarithme de chaque membre

5 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centièmes près :

a $2^{x+1} = 5$ b $5^{x-2} = 3 \times 4^{x+1}$

Solution

a $2^{x+1} = 5$ **En calculant le logarithme de chaque membre**

$\therefore \log 2^{x+1} = \log 5$ $\therefore (x + 1)\log 2 = \log 5$

$\therefore x + 1 = \dfrac{\log 5}{\log 2}$ **d'où . :** $x = \dfrac{\log 5}{\log 2} - 1$ $\therefore x \simeq 1{,}32$

L'utilisation de la calculatrice

log 5 (÷ log 2 (- 1 = 1,321928095

b $5x^{-2} = 3 \times 4x^{+1}$ **En prenant le logarithme de chaque membre**

$\therefore \log 5^{x-2} = \log(3 \times 4^{x+1})$ $\therefore \log 5^{x-2} = \log 3 + \log 4^{x+1}$

$\therefore (x-2)\log 5 = \log 3 + (x+1)\log 4$ $\therefore x\log 5 - 2\log 5 = \log 3 + x\log 4 + \log 4$

$\therefore x\log 5 - x\log 4 = \log 3 + \log 4 + 2\log 5$ $\therefore x(\log 5 - \log 4) = \log 3 + \log 4 + 2\log 5$

$$\therefore x = \frac{\log 3 + \log 4 + 2\log 5}{\log 5 - \log 4} \simeq 25{,}56$$

En utilisant la calculatrice :

log 3 (+ log 4 (+ 2 log 5 (= ÷) log) 5 (- log 4 = 25,56104553

Essayez de résoudre :

9 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un dixièmes près $\frac{1}{10}$:

a $3^{7-2} = 13{,}4$ **b** $7^{x-2} = 4^{x+3}$

Exemple **Applications sur les lois des logarithms**

6 **Liens avec la Géologie :** Si l'intensité d'un tremblement de terre sur l'échelle de Richter est donnée par la relation $f = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I est la force du tremblement de terre et I_0 la force initiale (c'est la plus petite force du mouvement de la terre non détecté par l'échelle).

a Trouver sur l'échelle de Richter l'intensité d'un tremblement de terre dont la force est équivalente à 10^6 fois sa force initiale.

b En 1989 , il ya eu un tremblement de terre d'intensité 7,1 sur l'échelle de Richter. Calculer sa force.

Solution

a $\because f = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, $I_0 = 10^6 I_0$ $\therefore f = \log\left(\frac{10^6 I_0}{I_0}\right) = \log^6 10 = 6\log 10 = 6$

Donc l'intensité du tremblement de terre = 6. sur l'échelle de Richter

b $\because$ L'intensité du tremblement de terre = 7,1

$\therefore 7{,}1 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ $\therefore \frac{I}{I_0} = 10^{7.1}$ $I = 10^{7.1} I_0$

Donc La force du tremblement de terre est équivalente à 12590000 fois sa force initiale.

Essayez de Résoudre:

10 Si le nombre d'habitants d'une ville, à partir de l'année 2000; est donné par la relation $N = 10^5\,(1{,}3)^{n-2010}$, où n est le nombre d'habitants et a l'année :

a Calculer le nombre d'habitant de cette ville en 2015

b En quelle année, le nombre d'habitants de cette ville deviendra 1,4 million d'habitants

Exercices 2 - 6

1 Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de

a $\log 1000$ **b** $\log_2 32$ **c** $\log_{\frac{1}{4}} 16$ **d** $\log_7 49$

e $\log 0.001$ **f** $\log_8 2$ **g** $\log_8 1$ **h** $\log_y \sqrt{y}$

2 Mettez dans sa forme la plus simple

a $\log 2 + \log 5$ **b** $\log_5 15 - \log_5 3$ **c** $\dfrac{\log 25}{\log 5}$

d $\log_2 5 \times \log_5 2$ **e** $\log 54 - 3\log 3 - \log 2$ **f** $1 + \log 3 - \log 2 - \log 15$

g $\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c$ **h** $\dfrac{1}{\log_2 12} + \dfrac{1}{\log_8 12} + \dfrac{1}{\log_9 12}$

3 Mettez le signe (✓) devant la phrase correcte et le signe (✗) devant la phrase fausse oú x et $y \in \mathbb{R}^+$; a et b $\in \mathbb{R}^+ - \{1\}$:

a $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$ ( )

b $\log_a(x + y) = \log_a x \times \log_a y$ ( )

c $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$ ( )

d $\log 2x^5 = 5\log 2x$ ( )

e $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x + \log_a y^{-1}$ ( )

f $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$ ( )

g Si $x < 0$ alors $\log_a x^4 = 4\log_a x$ ( )

4 Si $\log 2 = x^8$; $\log 3 = y$ trouver la valeur de $\log 6$ et $\log_{18} 12$ en fonction de x et y

5 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centième près :

a $7^{3x-2} = 5$ **b** $7^{x+1} = 3^{x-2}$ **c** $\dfrac{5}{10^{2x}} = 7$ **d** $x^{\log x} = 100\,x$

6) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $\log_4 x = 1 - \log_4 (x - 3)$ b) $\log_3 (x + 6) = 2 \log_3 x$ c) $\log (x + 8) - \log (x - 1) = 1$

d) $(\log x)^2 - \log x^2 = 3$ e) $(\log x)^3 = \log x^9$ f) $3^{\log x} = 2^{\log 3}$

g) $\log_3 x = \log_x 3$ h) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$ i) $\log_2 (2^x - 4) + x - 5 = 0$

7) Utilisez une calculatrice pour trouver la valeur de :

a) $\log 3{,}15$ b) $\log_2 25$ c) $2 \log 5 - 3 \log 7$ d) $\dfrac{3^{150} \times 5^{200}}{7^{250}}$

8) **Décelez l'erreur :** Amira et Israa ont simplifié chacune l'expression : $\log x^3 + \log y^4 - \log x\,y^2$

Solution d'Israa

L'expression $= \log \dfrac{x^3 \times y^4}{x\,y^2} = \log x^2 y^2$

$= \log (x\,y)^2 \quad = 2 \log x\,y$

$= 2 (\log x + \log y)$

Solution d'Amira

L'expression $= 3 \log x + 4 \log y - 2 \log x\,y$

$= 3 \log x + 4 \log y - 2 (\log x + \log y)$

$= 3 \log x + 4 \log y - 2 \log x - 2 \log y$

$= \log x + 2 \log y$

Laquelle des deux solutions est correcte. Justifier votre réponse ?

9) **Réflexion critique:** Sans utiliser une calculatrice, Trouvez la valeur de :

$\log (\tan 1^\circ) + \log (\tan 2^\circ) + \log (\tan 3^\circ) + \ldots\ldots\ldots + \log (\tan 89^\circ)$

Unité (3)

Limites et continuité

Introduction de l'unité

Les premières idées sur le calcul différentiel et intégral sont apparues dans les travaux d'Archimède, qui a mis en place plusieurs lois en géométrie comme le volume et l'aire de la surface de la sphère en utilisant des méthodes précurseurs dans le calcul intégral. Au xvIème et au xvIème siècle, de nombreux savants se sont intéressés à des problèmes dont la résolution nécessite le calcul différentiel jusqu'à ce que l'Anglais Newton et l'Allemand Leibniz ont découvert chacun de son côté la théorie de base du calcul différentiel et intégral. Le calcul différentiel et intégral est une branche des mathématiques qui étudie les limites, la dérivée, l'intégral et les suites infinies. C'est une science qui étudie et qui analyse la variation des fonctions. Le calcul différentiel et intégral entre dans de nombreuses applications en géométrie et dans différents domaines scientifiques où il y a besoin d'étudier la variation de la fonction, son changement et la résolution des problèmes que l'algèbre ne peut résoudre facilement.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître les bases des limites.
- Reconnaître les formes indéterminées comme $\frac{0}{0}$; $\frac{+\infty}{+\infty}$; $+\infty - \infty$; $0 \times +\infty$; ...
- Déterminer une méthode pour calculer la limite d'une fonction: Par la substitution directe, par la factorisation, par la division euclidienne ou en multipliant par le conjugué.
- Calculer les limites en utilisant la formule $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$
- Calculer les limites en utilisant la formule $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$
- Calacler les limites d'une fonction àl'infini
- Calculer les limites de certaines fonctions trigonométriques.
- Utiliser les logiciels de graphisme pour vérifier la limite d'une fonction et pour estimer une limite sous forme d'activité.
- Identifier la limite à droite et la limite à gauche d'une fonction en un point où la diffinition de la fonction est changeè.
- Identifier la notion de la continuité d'une fonction.
- La continuité d'une fonction en un point – La continuité d'une fonction dans un intervalle
- Redéfinir quelques fonctions discontinues pour qu'elles deviennent continues.
- Découvrir des applications (exercices et activités) variées sur les notions de base des limites des fonctions et leur continuité.

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Limite à droite
- Limite à gauche
- Limite d'une fonction
- Substitution directe
- Fonction polynôme
- Limite d'une fonction à l'infini
- Fonction trigonométrique
- Limite d'une fonction trigonométrique
- Continuité d'une fonction

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – Ordinateur – Logiciels de graphisme

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1): Introduction aux limites.

Leçon (3 - 2): Déterminé la limite d'une fonction algébriquement

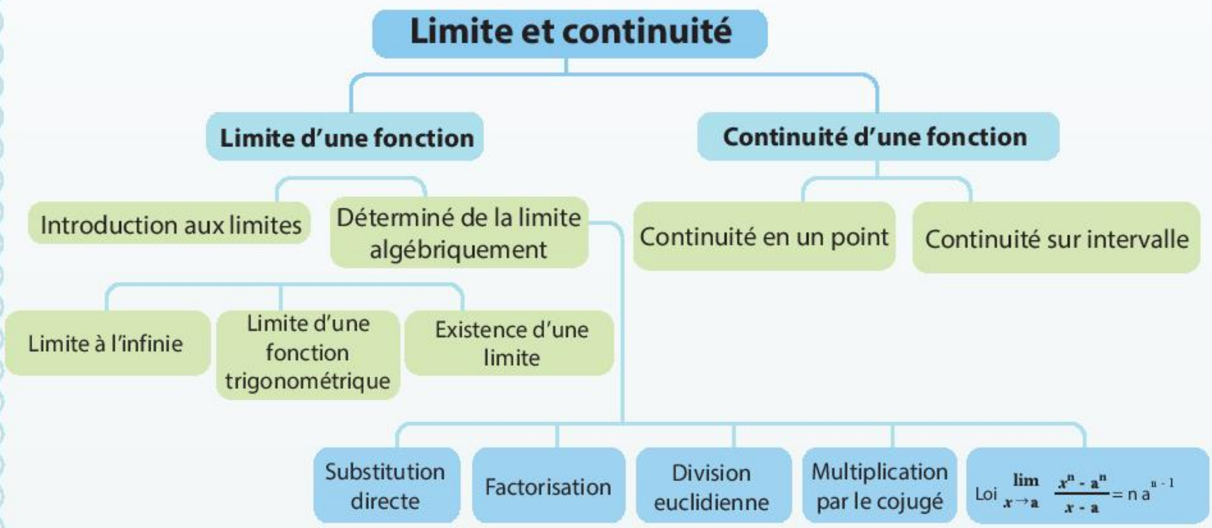
Leçon (3 - 3): Limite d'une fonction à l'infini.

Leçon (3 - 4): Limite des fonctions trigonométriques.

Leçon (3 - 5): Existence de la limite d'une fonction en un point donné .

Leçon (3 - 6): Continuité.

Organigramme de l'unité



Unité (3)

3 - 1 Introduction aux limites

Allez apprendre

- Quantités indéterminées
- Limite d'une fonction en un point

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Ensemble des nombres réels prolongé
- Limite à droite
- Left limit
- Valeur de la fonction
- Limite d'une fonction

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

La notion de la limite d'une fonction en un point est des notions essentielles à la science de calcule différentiel. Dans cette unité, nous allons reconnaitre la notion de la limite d'une fonction dans les cadres graphique et algébrique. Mais reconnaissons d'abord les différents types des quantités dans l'ensemble des nombres réelles.

Remember

$+\infty$ is a symbol that indicates the largest real number that can be imagined.

Trouvez le résultat de ce qui suit, si cela est possible...:

1) 3×5 2) $28 : 4$ 3) $4 - 9$

4) $7 : 0$ 5) $0 : 0$ 6) $\infty + 3$

7) $+\infty : +\infty$ 8) $+\infty - \infty$

Quantités indéterminées

A apprendre

Dans la rubrique «Réfléchissez et discutez» on trouve que les résultats des opérations sont parfaitement déterminés dans les questions 1 ; 2 ; 3 tandis qu'ils ne le sont pas dans les autres cas.

On remarque que 7 : 0 est indéfinie car la division par 0 n'a pas de sens. De même, on ne peut pas déterminer le résultat de l'opération 0 : 0 car il existe une infinité de nombres en les multipliant par 0 on obtient 0 .

C'est pour cela que $\frac{0}{0}$ est une quantité indéterminée. Les quantités $\frac{+\infty}{+\infty}$, $+\infty - \infty$, $0 \times +\infty$ sont également indéterminées **(Pourquoi)?**

Pour votre connaissance

On effectue les opérations sur l'ensemble des nombres réels est les deux symbols $+\infty$ et $-\infty$ comme ce qui suit :

1- $+\infty + a = +\infty$

2- $-\infty + a = -\infty$

3- $+\infty \times a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$

4- $-\infty \times a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 0 \\ -\infty \text{ si } a > 0 \end{cases}$

Exemple

(1) Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible:

(a) $4 + (+\infty)$ (b) $3 - \infty$ (c) $0 : 3$ (d) $- 5 : 0$
(e) $(+\infty) + (+\infty)$ (f) $0 : 0$ (g) $5 \times (+\infty)$ (h) $- 6 \times (- \infty)$

Solution

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) Indéfini
(e) $+\infty$ (f) Quantité indéterminée (g) $+\infty$
(h) $+\infty$

Essayez de résoudre

(1) Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible:

(a) $0 : (- 2)$ (b) $7 : 0$ (c) $9 : +\infty$ (d) $+\infty \times 0$
(e) $(- 7) \times (+\infty)$ (f) $(-\infty) + 12$ (g) $(+\infty) + (+\infty)$ (h) $(+\infty) \div (+\infty)$

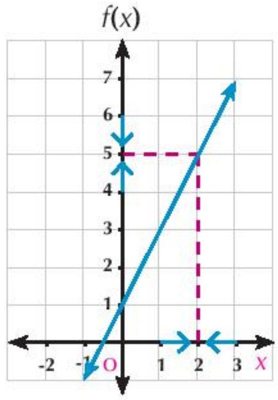
Limite d'une fonction en un point:

Activité

Etudier les valeurs de la fonction f telle que $f(x) = 2x + 1$ quand x tend vers 2 à travers les données du tableau suivant:

$x > 2$	$f(x)$
2.1	5.2
2.01	5.02
2.001	5.002
2.0001	5.0002
....	....
↓	↓
$x \to 2^+$	$f(2^+) \to 5$

$x < 2$	$f(x)$
1.9	4.8
1.99	4.98
1.999	4.998
1.9999	4.9998
....	....
↓	↓
$x \to 2^-$	$f(2^-) \to 5$



On remarque que:

Quand x tend vers le nombre **2** du côté droite ou du côté gauche, $f(x)$ tend vers **5**. On exprime cette relation mathématiquement par $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1) = 5$ la représentation graphique explique cette relation.

Définition 1

Si la valeur de la fonction $f(x)$ tend vers une valeur réelle unique ℓ quand x tend vers le nombre réel a soit du côté droit et du côté gauche, alors la limite de la fonction est égale à $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

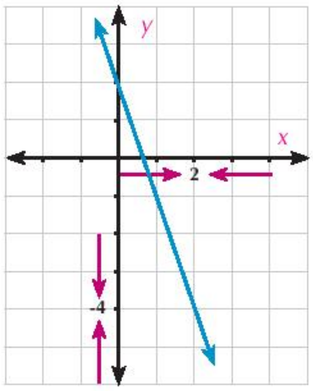
Il se lit: la limite de la fonction $f(x)$ si x tends vers a est égale à ℓ

Exemple **Estimé la limite (La limite est égale à la valeur de la fonction)**

(2) Estimez $\lim\limits_{x \to 2} (2 - 3x)$ graphiquement et à partir d'une étude numérique.

Solution

Graphiquement: On représente la fonction affine: $y = 2 - 3x$ comme dans la figure ci-contre:



Du graphique on remarque que:

Si $x \to 2$ alors $f(x) \to -4$

C'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to 2} (2 - 3x) = -4$

À partir d'une étude numérique: on construit le tableau des valeurs de $f(x)$ en choisissant des valeurs proche du nombre 2 du côté droit ou du côté gauche comme suivant:

x	2.1	2.01	2.001	$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$	1.999	1.99	1.9
$f(x)$	-4.3	-4.03	-4.003	$\longrightarrow$	-4	$\longleftarrow$	- 3.997	- 3.97	-3.7

Ò Le tableau montre lorsque x tends vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche alors les valeurs de $f(x)$ tends vers le nombre -4

Essayez de résoudre

(2) Estimez de chacun de ce qui suit graphiquement et à partir d'une étude numérique:

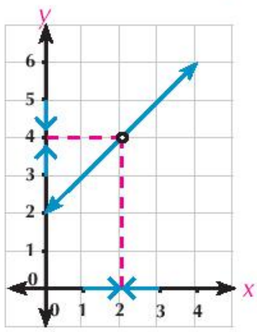
(a) $\lim\limits_{x \to 2} (1 - 3x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2)$

Exemple

Estimation de la limite (La limite n'est pas égale à la valeur de la fonction)

(3) Estimez graphiquement et à partir d'une étude numérique $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Solution



Graphiquement: La représentation graphique ci-contre de la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ où $x \neq 2$.

Montre que Si $x \to 2$ alors $f(x) \to 4$ Donc: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

À partir d'une étude numérique: on construit le tableau des valeurs de $f(x)$ en choisissant des valeurs procher du nombre 2 du côté droite ou du côté gauche comme suivant.

x	2,1	2,01	2,001	$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$	1,999	1,99	1,9
$f(x)$	4,1	4,01	4,001	$\longrightarrow$	4	$\longleftarrow$	3,999	3,99	**3,9**

Ò Le tableau montre lorsque x tends vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche alors les valeurs de $f(x)$ tends vers le nombre 4

Dans cet exemple, on remarque:

1- Le rond vide dans la représentation graphique veut dire qu' on a une forme indéterminée $(\frac{0}{0})$, si $x = 2$

2- L'existence d'une limite de la fonction si $x \longrightarrow 2$ ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = 2$ où $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Cette remarque montre une notion importante en limites

Essayez de résoudre

3 Estimez la limite chacun de ce qui suit graphiquement et à partir d'une étude numérique:

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ **c** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

Utilisation de la technologie pour déterminer la limite d'une fonction en un point

Activité

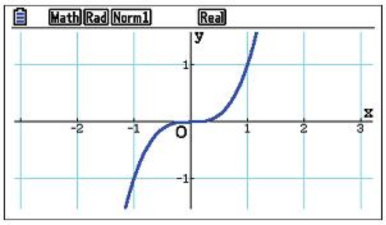
Dans chacun des cas suivants, utilisez une calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f puis estimez la limite de la fonction aux points indiqués.

1) $f(x) = x^3$ si $x \longrightarrow 0$

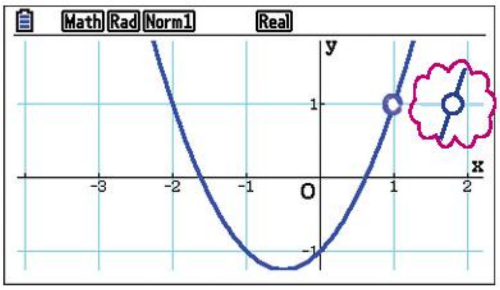
2) $f(x) = \left(\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\right) - 2$ si $x \longrightarrow 1$

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \longrightarrow 0$ où x est mesuré en radians.

On peut utiliser une calculatrice de graphisme ou un logiciel (*Geogebra*) pour tracer la courbe représentative de la fonction comme suivant:



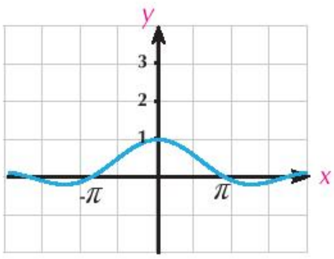
1) En utilisant la calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f, telle que $f(x) = x^3$ du graphique $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



2) En utilisant la calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f, telle que $f(x) = \left(\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\right) - 2$

du graphique $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Remarquez le rand vide au point de'coordonnees (1 , 1))



3) En utilisant la calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f, telle que:

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

du graphique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

On déduit de l'activité précédente que :

L'existence d'une limite de la fonction si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = a$

Pensé critique: Si la fonction f est définie en $x = a$ cela signifie que la fonction admet une limite en a? Justifiez votre réponse.

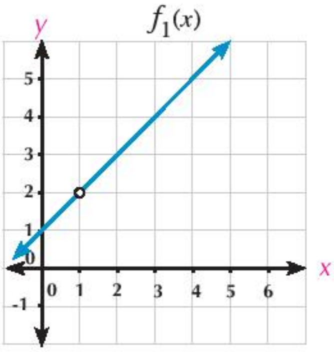
Exercice sur l'activité: Utilisez une calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f puis estimez la limite de la fonction aux points indiqués:

a $\lim\limits_{x \to 0} (2 - x^2)$ **b** $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$ **c** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Sin}3x}{x}$ oú x est mesure' en radians

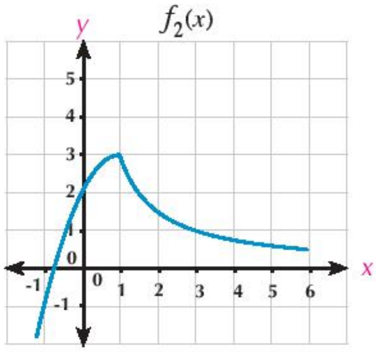
Exercices 3 - 1

1 Estimez la limite de chacune de fonctions suivantes si $x \longrightarrow 1$

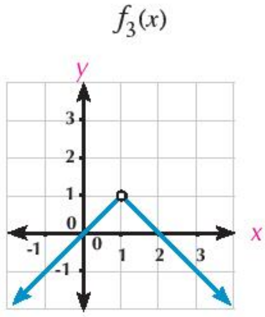
a



b

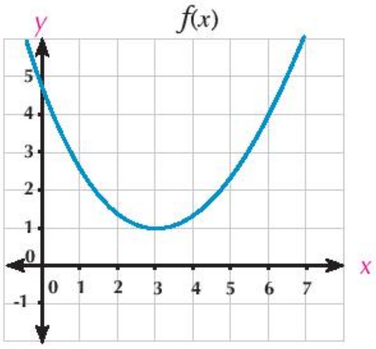


c



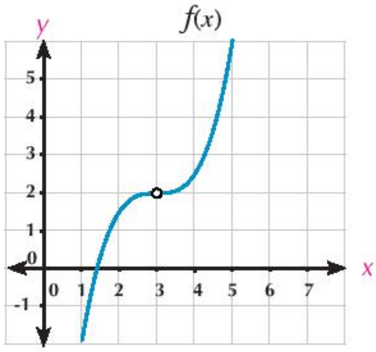
2 Estimez la limite de chacun de fonctions suivantes au point indiqué:

a



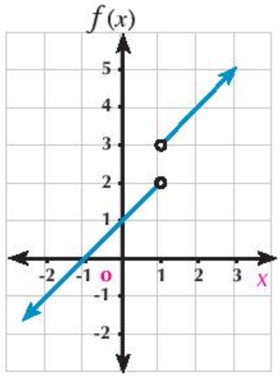
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

b



$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

c

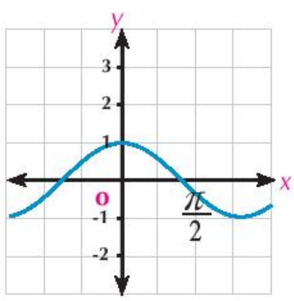


$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ ....

3 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez:

a $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

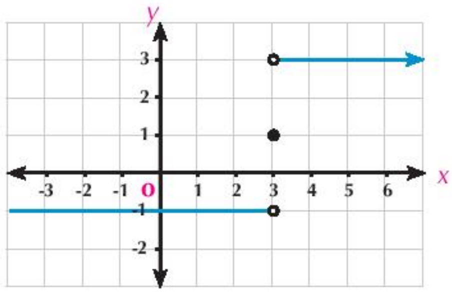
b $f(0)$

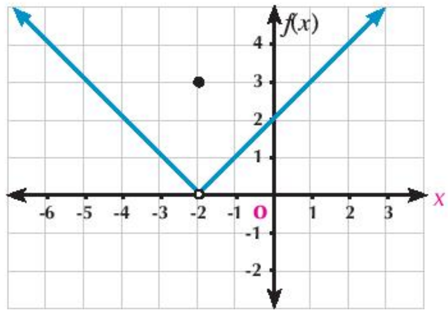


4 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez:

a $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

b $f(3)$





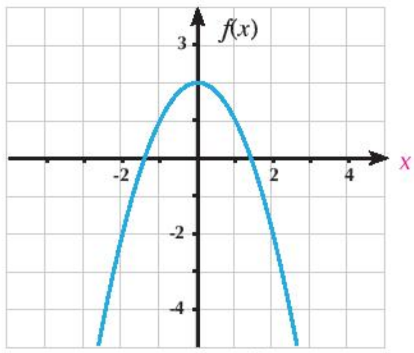
5 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b $f(-2)$

c $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

d $f(0)$

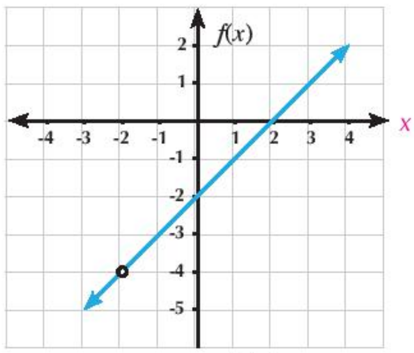


$f(x) = 2 - x^2$

6 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim\limits_{x \to 0} (2 - x^2)$

b $f(0)$

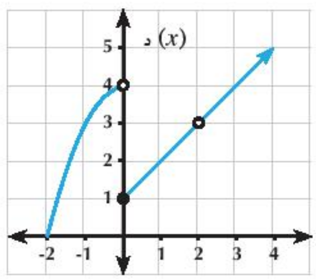


$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

7 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

b $f(-2)$



8 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $f(0)$

b $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c $f(2)$

d $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

9 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ où $f(x) = 5x + 4$

x	**1,9**	**1,99**	**1,999**	$\longleftarrow$	**2**	$\longrightarrow$	**2,001**	**2,01**	**2,1**
$f(x)$					**?**				

10 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 1)$

x	**- 0,9**	**- 0,99**	**- 0,999**	$\longleftarrow$	**- 1**	$\longrightarrow$	**- 1,001**	**- 1,01**	**- 1,1**
$f(x)$					**?**				

11 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

x	**- 0,9**	**- 0,99**	**- 0,999**	$\longleftarrow$	**- 1**	$\longrightarrow$	**- 1,001**	**- 1,01**	**- 1,1**
$f(x)$					**?**				

12 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	**1,9**	**1,99**	**1,999**	$\longleftarrow$	**2**	$\longrightarrow$	**2,001**	**2,01**	**2,1**
$f(x)$					**?**				

13 Utilisez une calculatrice de graphisme ou un logiciel du graphique pour tracer la courbe représentative de la fonction f puis estimez la limite de la fonction ensuite vérifiez votre solution en utilisant les points indiqués.

a $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 4)$

b $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4)$

c $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

d $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2}$

e $\lim\limits_{x \to 0} (x + \sin x)$

f $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x}$

g $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$

h $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|}$

Déterminé la limite d'une fonction algébriquement

3 - 2

On a déjà étudié comment déterminer la limite d'une fonction en $x = a$ graphiquement et à partir de l'étude de quelques valeur de la fonction. Dans ce qui suit nous allons présenter quelques théorèmes et résultat pour déterminer la limite d'une fonction sans parcourir aux tableaux du calcule.

Activité

Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter graphiquement chacune des deux fonctions:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, \; f_2(x) = x + 1$$

Que remarquez-vous?

Calculez: $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x)$

Que pouvez-vous déduire?

A apprendre

Limite d'une fonction polynôme:

Theorem 1

➢ **Si** $f(x)$ est une fonction polynôme et $a \in \mathbb{R}$

alors: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple **Par substitution directe**

1) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (-4)$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5) = 4 - 6 + 5 = 3$

(Par substitution directe)

b) $\lim\limits_{x \to 3} (-4) = -4$ On remarque que

$f(x) = -4$ **(constante) pour tout** $x \in \mathbb{R}$

Rappel

une fonction est appelée polynôme, si elle est à la forme $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \ldots + c_n x^n$

Où: $n \in \mathbb{N}$, $c_n \neq 0$, $c_0, c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$

Allez apprendre

- Limite d'une fonction polynôme.
- Quelques théorèmes des limites.
- Utilisation de la division euclidienne pour trouvez la limite d'une fonction .
- Utiliser le théorème $\lim\limits_{x \to a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$

Vocabulaires de base

- Limite d'une fonction
- fonction polynôme
- Substitution directe
- Factorisation
- Division composée
- Conjugué

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Essayez de résoudre

1) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 + x - 4)$ c) $\lim\limits_{x \to -2} (7)$

Theorem 2

Ò **Si** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ **alors:**

1- $\lim\limits_{x \to a} c\,f(x) = c.\ell$ **si** $k \in \mathbb{R}$

2- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$

3- $\lim\limits_{x \to a} f(x)\,.\,g(x) = \ell.m$

4- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x(x)} = \dfrac{\ell}{m}$ **où** $m \neq 0$

5- $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \ell^n$ **si** $\ell^n \in \mathbb{R}$

Exemple **Utilisation du théorème**

1) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x + 7}{x^2 + 2x - 5}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} (\sqrt{4x^2 - 3})$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x + 7}{x^2 + 2x - 5} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -1} (3x + 7)}{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x - 5)} = \dfrac{3 \times -1 + 7}{(-1)^2 + 2\,(-1) - 5} = \dfrac{4}{-6} = \dfrac{-2}{3}$

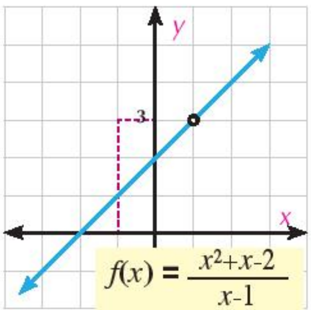
b) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -2} (4x^2 - 3)} = \sqrt{4(-2)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$

Essayez de résoudrev

2) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3}{2x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{2x^2 + 1}$

Détermination de la limite d'une fonction dans les cas des formes indéterminées:



Pour trouver $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ en utilisation la substitution directe, on trouve $\dfrac{0}{0}$, qui est une forme indéterminée. La figure ci-contre est une représentation graphique de la fonction f, on trouve que

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

C'est pour cela qu'on cherche une autre fonction équivalente, soit $g(x)$ en divisant par les facteurs commun non nuls au numérateur et au dénominateur.

Theorem 3

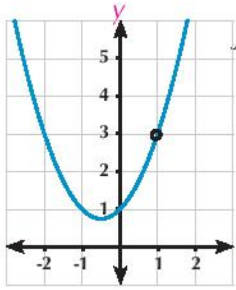
Ò **Si** $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{ a \}$

and if $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

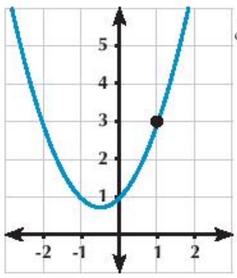
Exemple **Utilisation de la factorisation**

2 Utilisez la factorisation pour trouver les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + x - 2}$



$f(x)$



$g(x)$

Solution

a On remarque que $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ est indéterminée en $x = 1$

En factorisant puis on divise par les facteurs communs non nuls, nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme.

$$f(x) = \frac{\cancel{(x - 1)}\,(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = x^2 + x + 1 = g(x)$$

De ce qui précède, on trouve que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 1$

Comme $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$

Et d'après le **théorème 3 ,** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

On déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

Méthode de la division Euclidienne

b On remarque que pour $x = 1$, la fonction du numérateur est $f(x) = 0$ et la fonction du numérateur est $g(x) = 0$. Cela signifie que $(x - 1)$ est un facteur commun du numérateur et du dénominateur. Vu la difficulté de factoriser la fonction du numérateur en deux facteurs dont l'un est $(x - 1)$, on utilise la méthode de la division euclidienne pour Trouvez l'autre facteur de l'expression $x^3 - 2x^2 + 1$ comme suit:

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & -\ 2x^2 & & +\ 1 & x - 1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -\ \ x^2 & & & x^2 - x - 1 \\ \cline{1-4}
0 & -\ \ x^2 & & +\ 1 & \\
 & -\ \ x^2 & +\ x & & \\ \cline{1-4}
0 & & -\ x & +\ 1 & \\
 & & -\ x & +\ 1 & \\ \cline{1-4}
0 & & & & \\ \cline{1-4}
\end{array}$$

Conseil pour la solution

Dans la division euclidenne:
(1) On range le dividende et le diviseur soit dans l'ordre croissant ou dans l'ordre décroissant.
(2) On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur et on écrit le résultat.
(3) On multiplie le résultat par le diviseur puis on rehanche le produit du dividende pour obtenir le reste.
(4) On répète le méme processus jusqu à la fin de la division .

Nous pouvons utiliser une méthode simple pour effectuer la division. Cette méthode est appelée la division composée:

On utilise dans cette méthode, les coefficients des polynômes comme suivant:

Etape 1: On écrit les coefficients du dividende dans l'ordre décroissant puis on égalise le diviseur par zéro pour obtenir la valeur de x comme l'indique la figure ci-contre:

Valeur de x 1	1	0	- 2	1	+ **cofficient**

Etape 2: On multiplie le premier coefficient par la valeur obtenue de x et on écrit le produit en dessous du deuxième facteur puis on additionne.

1	1	0	- 2	1
			1×1 1	$\downarrow$
			- 1	1

Etape 3: On répète les opérations en étape 2 les coefficients du quotient sont 1 , – 1 et – 1 respectivement

1	1	0	- 2	1
	-1×1 -1	-1	1×1 1	$\downarrow$
	0	-1	-1	1

Donc le quotient est $x^2 - x - 1$

On obtient donc $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1)$

Donc $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x - 1)(x^2 - x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 2} = -\dfrac{1}{3}$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez :

(a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ (b) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2x - 8}{x^2 - x - 12}$

(c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ (d) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3 - 10x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

Exemple **Utilisation du conjugué**

(3) Calculez les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4}$ (b) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2 - 5x}{\sqrt{x + 4} - 3}$

Solution

(a) **On remarque que :** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4}$ est une quantité indéterminée $x = 4$

On cherche une méthode pour se débarrasser du facteur $(x – 4)$ existant au numérateur et au dénominateur.

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x - 3} + 1}{\sqrt{x - 3} + 1} = \lim_{x\to4} \frac{x - 3 - 1}{(x - 4)(\sqrt{x - 3} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x - 3} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 1} = \frac{1}{2}$$

b $$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3} \times \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x+4} + 3}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x+4} + 3)}{x + 4 - 9} = \lim_{x\to 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x+4} + 3)}{(x-5)}$$

$$= \lim_{x\to 5} x(\sqrt{x+4} + 3) = 5(3+3) = 30$$

Essayez de résoudre

4 Calculez les limites suivantes :

a $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$ **b** $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - 2}$

Théorème 4

Soit la fonction f tel que $f(x) = \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\,a^{n-1}$

Activité

A l'aide de votre professeur, démontrez théorème 4.

Exemple

Déterminé la limite d'une fonction en un point en utilisant théorème (4)

4 Déterminez $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

Solution

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - {}^4 3}{x - 3} = 4(3)^3 = 108$$

Corollaires

Corollaires issus du théorème (4):

1- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+a)^n - a^n}{x} = n\,a^{n-1}$ **2-** $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m}\,a^{n-m}$

Exemple

5 Calculez:

a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+5)^4 - 625}{x}$ **b** $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

c $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x-4)^5 + 32}{x - 2}$ **d** $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x^5} - 32}{\sqrt{x^3} - 64}$

Solution

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+5)^4 - 5^4}{x} = 4 \times 5^3 = 500$

b $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5 - 2^5}{x^2 - 2^2} = \dfrac{5}{2} \times 2^3 = 20$

c $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-4)^5 + 32}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-4)^5 - (-2)^5}{(x-4) - (-2)}$

$= 5\,(-2)^4 = 80$

d $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x^5} - 32}{\sqrt{x^3} - 64} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x^{\frac{5}{4}} - (16)^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} \times (16^{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}) = \dfrac{5}{6} \times 16^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{12}$

Remarque

$16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^{4 \times \frac{5}{4}}$
$= 2^5 = 32$

Donc :

$16^{\frac{3}{2}} = 64$

Essayez de résoudre

5 Calculez:

a $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^4 - 625}{x+5}$ **b** $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x^7} - 128}{x - 16}$ **c** $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt[5]{x+25} - 2}{x - 7}$

Réflexion créative:

si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^n - 64}{x - 2} = l$ **Quel est la valeur de n et celle de l :**

Exercices 3 - 2

Complétez ce qui suit:

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 1) = \dots\dots$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x+1} = \dots\dots$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{x} = \dots\dots$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dots\dots$
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^5 - a^5}{x - a} = \dots\dots$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \dots\dots$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x^3} - 1}{x^4 - 1} = \dots\dots$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{-1} - 2^{-1}}{x^{-3} - 2^{-3}} = \dots\dots$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$ est égale à:

a -3 **b** -2 **c** 3 **d** La fonction n'a pas de limite

10) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$ est égale à:

a) 1 b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{2}{\pi}$ d) La fonction n'a pas de limite

11) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 16}$ est égale à:

a) zero b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) La fonction n'a pas de limite

12) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x}{x}$ est égale à:

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{4}{\pi}$ d) La fonction n'a pas de limite

13) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 243}{x^3 - 27}$ est égale à:

a) 0 b) $\dfrac{5}{3}$ c) 15 d) 9

14) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4a}{x - 2}$ exists then a equals:

a) -1 b) 1 c) 2 d) 4

15) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5}{(x - 2)^3}$ est égale à:

a) $-\dfrac{5}{2}$ b) 0 c) 5 d) La fonction n'a pas de limite

Trouver les limites suivantes si elles existent:

16) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2)$

17) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

18) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2x - \sin x)$

19) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 2x}{x}$

20) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^3 + 1}$

21) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{9 - x}{x^2 - 81}$

22) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x}$

23) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

24) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x + \sqrt{x} - 12}{x - 9}$

25) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2}}{x}$

26) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^4 - 16}$

27) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2 - x}{x - 1}\right)$

28) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 12x + 4}{x^3 - 4x}$

29) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{2x^2 - 7x - 4}$

30) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 + 2x - 15}$

31) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$

32) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^{-8} - (16)^{-2}}{x - 2}$

33) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x} - 1}{x - 1}$

34) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^{-9} - \frac{1}{512}}{x - 2}$

35) $\lim\limits_{x \to \sqrt{5}} \dfrac{x^7 - 125\sqrt{5}}{x^4 - \sqrt{25}}$

36) $\lim\limits_{x \to 81} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 3}{x - 81}$

37) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^7 - 128}{x^5 - 32}$

38) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{(x-5)^7 - 1}{x - 6}$

39) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt[5]{x+25} - 2}{x - 7}$

40) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-3)^6 - 1}{x - 2}$

41) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x-2h)^{17} - x^{17}}{51\,h}$

42) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^4 - 81}{x^5 + 243}$

43) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^4 - 81}{6\,h}$

44) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x + 1}$

45) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+7} - 2}{x + 3}$

46) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$

47) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

48) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x-1)^2 - 1}{5x}$

49) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3 - 1}\right)$

50) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

51) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$

Activité

52) **En Lien avec le volume** On utilise un papier cartonné sous forme carrée de longueur de côté 24 cm pour fabriquer une boîte sans couvercle en découpant quatre carrés de ses quatre coins. Si la longueur du côté de chaque carré découpé est x cm:

1) Dessinez une figure illustrative de la boîte.

2) Démontrez que le volume de la boîte est donné par la relation $V = x(24 - 2x)^2$

3) Trouver le volume de la boîte si $x = 4$ en étudiant les valeurs de la fonction quand $x \to 4$ à l'aide du tableau suivant:

x	3	3.5	3.9	→	4	→	4.1	4.5	5
$f(x)$	....	....	....	→	....	→	....	....	....

4) Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la relation puis vérifiez que la valeur maximale du volume est réalisée pour $x = 4$

Réflexion critique :

53) Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ **calculez :** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

54) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$ **calculez :**

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

55) **En lien avec le commerce:** Une société trouve si elle dépense x livres égyptiennes pour la publicité de sa production, alors le bénéfice est donné par la relation $f(x) = 0{,}2\,x^2 + 40\,x + 150$. Trouvez le bénéfice de la société si la dépense pour la publicité tend vers 100 livres égyptiennes.

Limite d'une fonction à l'infini

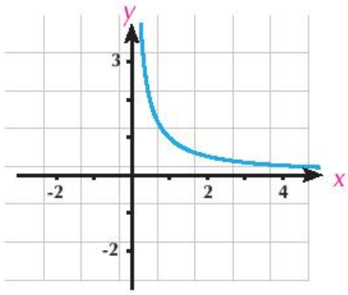
3 - 3

Dans beaucoup d'applications pratiques et de la vie quotidienne, nous avons besoin de connaitre le comportement d'une fonction f quand $x \longrightarrow +\infty$. L'activité suivante illustre cette situation.

Activité

Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la fonction f telle que :

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$



Que se passe-t-il dans la courbe de la fonction quand les valeurs de $x \longrightarrow +\infty$ augmentent et tendent vers l'infini:

- De la représentation graphique, on remarque que lorsque x s'approche de l'infini, la valeur de $f(x)$ s'approche de zéro. Pour cela, on dit que quand x tend vers l'infini, $f(x)$ tend vers un nombre déterminé.

Complétez le tableau suivant pour découvrir ce nombre $f(x)$

x	10	100	1000	10000	100000	$x \to +\infty$
$f(x)$	0,1	0,01				$x \to ?$

A apprendre

Limite d'une fonction à l'infini

De l'activité précédent, on trouve que si les valeurs de x augmentent tendant vers l'infini les valeurs de $f(x)$ tendent vers 0.

Theorem 1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Corollary

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$ aù $n \in \mathbb{R}^+$, a est un constant

Formules de base :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$ où c est constant.
- Si n est un nombre entier positif, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Remarquez que: le théorème (2) déjà étudié dans la leçon précédente, concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions lorsque $x \to a$ est vrai aussi quand $x \to +\infty$

Allez apprendre

- Limite d'une fonction à l'infini.
- Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution algébrique.
- Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution graphique.

Vocabulaires de base

- Limite d'une fonction à l'infini

Aides pédagogiques

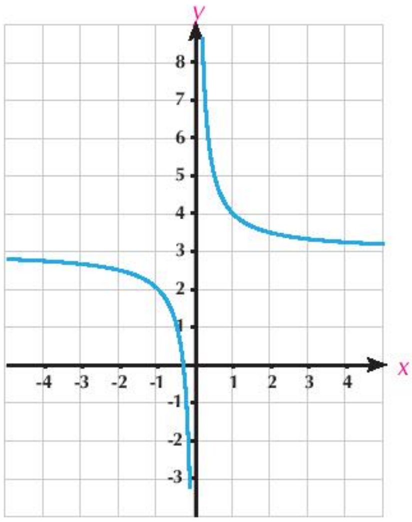
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Exemple

1 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right)$ b $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right)$

Ò En utilisant un logiciel de graphisme, vérifiez le résultat graphiquement.

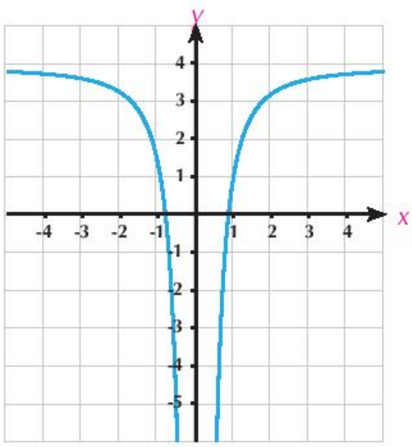


Solution

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} 3$

$= 0 + 3 = 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) = 3$



b $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}$

$= 4 - 3 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 4 - 3 \times 0 = 4$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right) = 4$

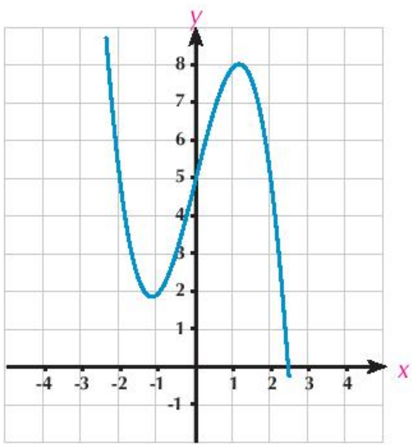
Essayez de résoudre

1 Calculez:

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{x} + 2\right)$ b $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2} + 5\right)$

Exemple

2 Calculez: $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x - x^3 + 5)$



Solution

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\frac{4}{x^2} - 1 + \frac{5}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x^2} - 1 + \frac{5}{x^3}\right)$

$= +\infty \times -1 = -\infty$

Essayez de résoudre

2) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 7x^2 + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - 3x - x^3)$

Exemple

1) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{3x^2 + 1}$

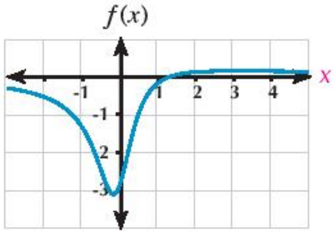
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3}{3x^2 + 1}$

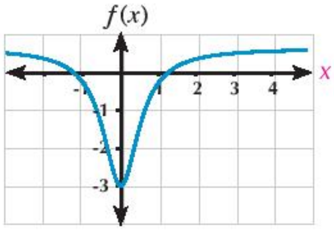
Solution

Dans tous les cas, on divise le numérateur et le dénominateur par x^2 (la plus grande puissance existante au dénominateur).

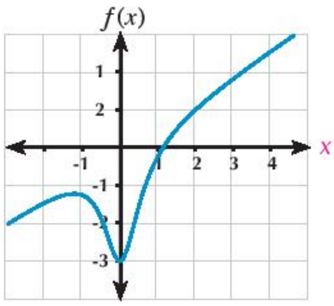
a) $$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{3x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0 - 0}{3 + 0} = 0$$



b) $$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$



c) $$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 3}{3x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x2}\right)} = \frac{+\infty - 0}{3 + 0} = +\infty$$



De l'exemple précédent, on déduit que le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions polynômes:

- La limite est un nombre réel différent de zéro si le degré du numérateur = le degré du dénominateur.
- La limite est égale à zéro si le degré du numérateur < degré du dénominateur.
- La limite est égale à $\pm\infty$ si le degré du numérateur > degré du dénominateur.

Essayez de résoudre

3) Calculez:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 5x}{8x^4 + 3x^2 - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^2 + 1}{3x^2 + x - 2}$

Exemple

2 Calculez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$

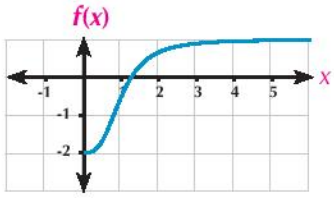
Solution

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

$\because x \longrightarrow +\infty$

$\therefore x > 0$ **d'où** $|x| = x$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{x^3 + 1}$



$f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

En divisant le numérateur et le dénominateur par x^3

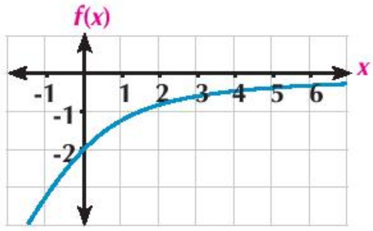
$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{x^3})}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - \sqrt{x^2 + 4})}{1} \times \dfrac{(x + \sqrt{x^2 + 4})}{(x + \sqrt{x^2 + 4})}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x^2 - 4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$



$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$

$\because x \longrightarrow +\infty$

$\therefore x > 0 \longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $x = \sqrt{x^2}$

$$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}})} = \frac{0}{1 + 1} = 0$$

Essayez de résoudre

4 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 5x} - \sqrt{3}\, x)$

Exercices 3 - 3

Complétez ce qui suit :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{3}{x}) =$ ....

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3}{x^2}-2) =$ ....

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-7) =$ ....

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3) =$ ....

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x}$ ....

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5}{x^2+1} =$ ....

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+3}{x^3-5} =$ ....

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}} =$ ....

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^2}) =$ ....

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2x+3}$ est égale à

a) 0 b) 2 c) 3 d) $+\infty$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{x}+1}$ est égale à

a) 0 b) 1 c) 2 d) $+\infty$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{2-x^2}$ est égale à

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $+\infty$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{2x-1}$ est égale à

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $+\infty$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1+x}{4x-1}}$ est égale à

a) -1 b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 1

Trouvez les limites suivantes:

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+5x^2+1)$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-7x}{2+3x}$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+3}$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{x^2+3}$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-6x-3x^2}{2x^2+x+4}$

(22) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 1}$

(23) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{3x^2 + 4x - 1}$

(24) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5x - 1}$

(25) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 6}{(x - 1)^2}$

(26) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(7 + \dfrac{2x^2}{(x + 3)^2}\right)$

(27) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{5x}{2 + x}\right)$

(28) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{2x+1} + \dfrac{3x^2}{(x-3)^2}\right)$

(29) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{4 + x^2}}$

(30) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 4x + 5}{(2x - 1)^3}$

(31) △ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x\right)$

(32) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 4x + 7} - \sqrt{5x^2 + x + 3}\right)$

(33) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x\right)$

(34) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}$

(35) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$

(36) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x + 2)^3(3 - 2x^2)}{3x(x^2 + 7)^2}$

(37) Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + 3bx + 5} - 2x\right) = 3$. Trouvez la valeur de a et celle de b.

(38) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{-1} + 3x^{-2} + 5}{2x^{-2} - x^{-3} + 1}$

(39) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^{-1} - 3x^{-2} + x^{-3}}{4x^{-3} + x^{-1}}$

(40) **Réflexion créative** : Une entreprise produit des cartes de vœux. Le coût fixe d'une production s'élève à 5000 Livres. De plus, se rajoute une demie Livres par toute carte produite. Le coût total de la production est $S = \frac{1}{2}x + 5000$ où est x le nombre de cartes produites.

Trouvez :

1. Le coût de la production d'une carte si l'entreprise produit :
   - a) 10000 cartes
   - b) 100000 cartes
2. Le coût de la production d'une carte si l'entreprise produit une infinité de cartes.

Limite des fonctions trigonométriques

3 - 4

Activité

Soit f un fonction telle que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, on veut étudier les valeuss de x lorsque $x \to 0$ ou x est mesuré en radian.

on construit un tableau pour étudier le comportement de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0.

x	1	0,01	0,001	$\to$	0	$\to$	0,001	-0,01	10
$\frac{\sin x}{x}$	0,8415	0,9983	....	$\to$	....	$\to$	....	0,9983	0,8415

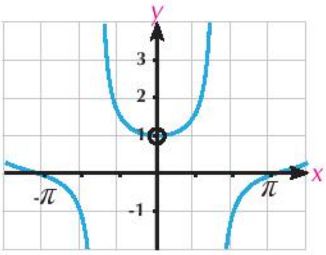
Du tableau précédent, on déduit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

A apprendre

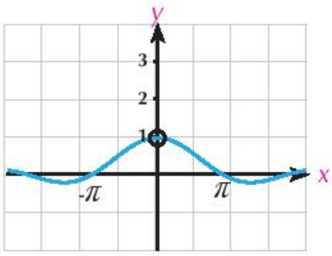
Theorem 1

Si x est la mesure d'un angle en radians, alors:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$



$f(x) = \frac{\tan x}{x}$

Expression orale:

Si x est la mesure d'un angle en degrés, peut-on trouvez $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$? Justifiez votre réponse.

Corollaire 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin a x}{x} = a\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x} = a$$

Allez apprendre

- Limite de la fonction sinus.
- Limite de la fonction tangente.

Vocabulaires de base

- Fonctions trigonométriques.
- Limite d'une fonction trigonométrique

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Enrichissez votre connaissance

Il y a plusieurs démonstration pour ce théoréme. Voir la connection: http://math.stackexchange.com/question/75130

Exemple

(1) **a** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3$ **b** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{7x} = \dfrac{1}{7} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x} = \dfrac{2}{7}$

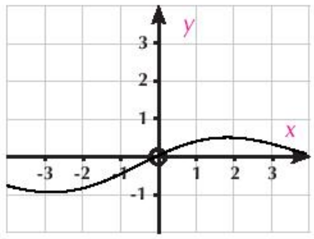
c $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x \cos 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = 5 \times 1 = 5$

Essayez de résoudre

(1) Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$ **b** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 4x}{5x}$ **c** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \pi x}{1 - x}$

Corollaire 2



a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = \text{zero}$

Ò **A l'aide de votre professeur démontre corollaire (2)**

Exemple

(2) Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\tan x}$ **b** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Solution

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} \times \dfrac{x}{\tan x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} \times \dfrac{x}{\tan x} = 0 \times 1 = 0$

b $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \times \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} = (1)^2 \times \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

Rappel

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Essayez de résoudre

(2) Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2 \csc 2x \cot x$ **b** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin 2x}$

Exemple

3 Trouvez les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + 3\sin x}{2x}$

b $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\sin x}{\sin x \cos x}$

c $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$

d $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$

Solution

a $= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{x} - \dfrac{x}{x} + \dfrac{\text{Sin}x}{x}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \left(x - 1 + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

$= \dfrac{1}{2} (0 - 1 + 1) = 0$

b $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos x}{\sin x \cos x}$

Divisant le numérateur et la dénominateur

par $x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\dfrac{\sin x}{x} \times \cos x}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} (1 + \cos x)}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \times \cos x}$

$= \dfrac{1 + \cos 0}{1 \times \cos 0} = \dfrac{1 + 1}{1} = 2$

c $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$

Pasant $1 - \cos x = y$

Lorsque $x \longrightarrow 0$ alors $y \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = 1$

d $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$

$= \dfrac{1}{5} \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}\right)^2$

$= \dfrac{1}{5} \times (3)^2$

$= \dfrac{9}{5}$

Essayez de résoudre

3 Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x^3 - 4x}$

b $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$

c $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$

d $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sin 2x + \sin^2 2x}{\tan^2 3x + x^2}$

Exercices 3 - 4

Complétez ce qui suit:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \cos 3x =$ ....
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 2x =$ ....
3. $\lim\limits_{x \to 0} \tan x =$ ....
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{x} =$ ....
5. $\lim\limits_{x \to 0} \tan \dfrac{3x}{4x} =$ ....
6. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sin (x - 5)}{3 (x - 5)} =$ ....
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{2x} =$ ....
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{Sin}^2 x}{x^2} =$ ....
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 + 2x}{\cos 4x} =$ ....
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x} =$ ....
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\tan 3x} =$ ....
12. $\lim\limits_{x \to 0} 3x \csc 2x =$ ....
13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{3x^2} =$ ....
14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x \tan 3x}{4x^2} =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ est égale à ....

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 3

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{5x}$ est égale à ....

a) 0 b) $\frac{4}{5}$ c) 1 d) $\frac{5}{4}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 3 \tan x}{5x}$ est égale à ....

a) 1 b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{6}{5}$ d) 2

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 2x}{x \sin 3x}$ est égale à ....

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{3}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{1}{2} x}{\sin \frac{3}{4} x}$ est égale à ....

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ est égale à .... où x est mesuré en système sexagénaire

a) 1 b) $\frac{\pi}{180}$ c) $\frac{180}{\pi}$ d) π

Trouvez les limites suivantes:

21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{5x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x}$

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^2}$

26) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \tan x}{x}$

27) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x^2}$

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos^2 x)}{x^2}$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos x}{\sin^2 3x}$

32) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\tan x}{\sin x - \cos x}$

33) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x\cos(-2x+1)}{x^2+x}$

34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3\sin x}{x}$

35) $\lim\limits_{x\to -0} (1+\cos x)\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

36) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x^2 + \sin^2 5x}{x^2}$

37) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x^3 + \sin^3 5x}{2x^3}$

38) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x^2+\sin 3x}{2x^2+\tan 6x}\right)^4$

39) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 + x\sin 5x}{x^2 - \tan 3x^2}$

40) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + \sin x}{1-\cos x - \sin x}$

41) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x + 5\sin 3x}{2\sin 3x - \tan 5x}$

42) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan 2x}{x^2 + \sin^2 3x}$

43) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\cos^2 2x - 1}$

44) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\cos 3x - \cos 4x}{x}$

45) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x^2 + \sin^2 5x}{x^2}$

46) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\cos^2 5x - 1}$

47) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{5\sin x}$

48) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}$

49) $\lim\limits_{x\to 0} x\,(\csc 2x - \cot 3x)$

Unité (3)

3 - 5 Existence de la limite d’une fonction en un point

Allez apprendre

- Limite à gauche.
- Limite à droite.

Vocabulaires de base

- Limite à gauche.
- Limite à droite.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

Figure (1) :

Représente la courbe de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 2 \\ 3 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Ò **Etudiez** l’existence de $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

Ò **Etudiez** l’existence de $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

Est-ce que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$?

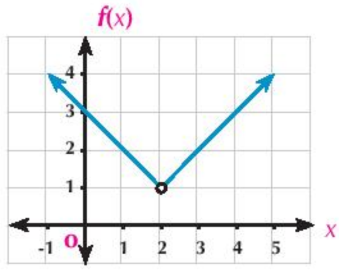


Fig (1)

Figure (2) :

Représente la courbe de la fonction f telle que:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ò **Etudiez** l’existence de $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$

Ò **Etudiez** l’existence de $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

Est-ce que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$?

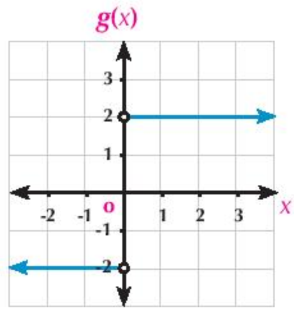


Fig (2)

A apprendre

Limite à droite et limite à gauche

on dit que la limite d’une fonction f quand x tend vers a est égale à ℓ si et seulement si sa limite à droite et à gauche quand x tend vers a sont égales à ℓ où $\ell \in \mathbb{R}$. Cela s’écrit par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ si et seulement si : } f(a^+) = f(a^-) = \ell$$

où:

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Exemples illustratifs

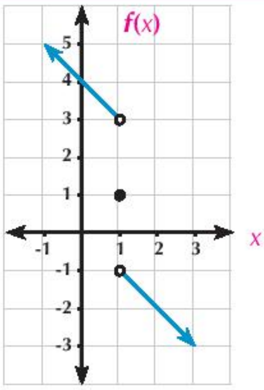


Fig (1)

a **Dans la figure ci-contre, on remarque que:**

$f(1^-) = 3$ $\qquad$ $f(1^+) = -1$

$\therefore\ f(1^-) \neq f(1^+)$

$\therefore$ La fonction n'a pas de limite lorsque $x \longrightarrow 1$

b **Dans la figure ci-contre, on remarque que :**

$f(-1^-) = 3$ $\qquad$ $f(-1^+) = 3$

$\therefore\ f(-1^-) = f(-1^+) = 3$

$\therefore\ \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

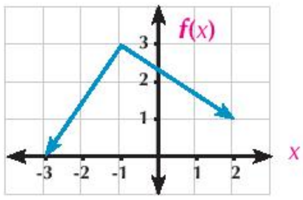
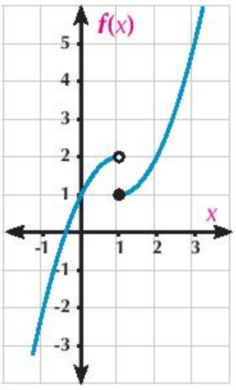
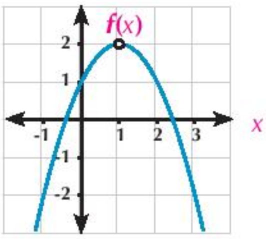


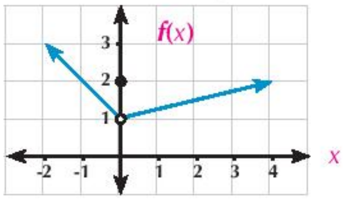
Fig (2)

Essayez de résoudre

1) Etudiez les représentations graphiques suivantes pour trouver :







a $f(1^-)$	**a** $f(1^-)$	**a** $f(0^-)$
b $f(1^+)$	**b** $f(1^+)$	**b** $f(0^+)$
c $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	**c** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	**c** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Exemple

1) Trouvez la limite de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x\,|x| - 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{|x|}{x} - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ lorsque $x \longrightarrow 0$

Solution

En redéfinissant la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} x(-x) - 1 & \text{si } \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x} - 2 & \text{si } \quad x > 0 \end{cases} \qquad = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{pour tout } \quad x < 0 \\ -1 & \text{pour tout } \quad x > 0 \end{cases}$$

$\because\ f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2 - 1) = -1$

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} -1 = -1$ $\qquad$ $\because\ f(0^-) = f(0^+) = -1$ $\qquad$ $\therefore\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

Essayez de résoudre

(2) Soit $f(x) = \begin{cases} |x-3| & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$

Trouvez $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (si cela est possible)

Exemple

(2) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{x} & \text{Si } x < 0 \\ \dfrac{x + \tan x}{3x - \sin 2x} & \text{Si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{lorsque } x \to 0$$

Solution

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + \tan x}{3x - \sin 2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\tan 2x}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + \frac{\tan 2x}{x}}{3 - \frac{\sin 2x}{x}}$$

$$= \frac{1+1}{3-2} = 2$$

$\because f(0^-) = f(0^+) = 2 \qquad \therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

Essayez de résoudre

(3) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f lorsque $x \longrightarrow \pi$ telle que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x - \pi} & \text{si } x > \pi \\ \cos x & \text{si } x < \pi \end{cases}$$

Exemple

(3) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que: $f(x) = \sqrt{x-1}$ quand $x \longrightarrow 1$

Solution

$\because$ $f(x)$ La fonction f est définie pour $x - 1 > 0$

$\therefore$ l'ensemble de définition de $f(x)$ est $[1 + \infty[$

$\because f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \qquad \therefore f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

$f(1^-)$ n'est pas définie car la fonction n'est pas définie à gauche de 1

$\therefore f(x)$ n'a pas de limite quand $x \longrightarrow 1$

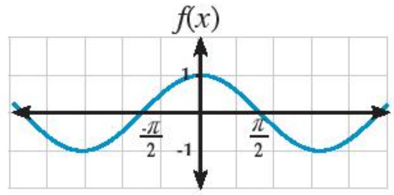
Essayez de résoudre

(4) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{3-x}$ quand $x \longrightarrow 3$.

Exercices 3 - 5

Complétez ce qui suit :

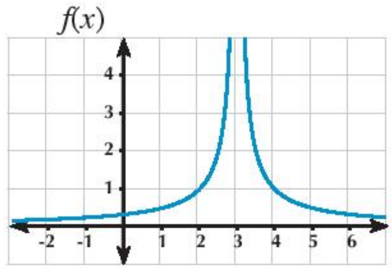
1 Dans la figure ci-contre :



a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ……………………

b $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ ……………………

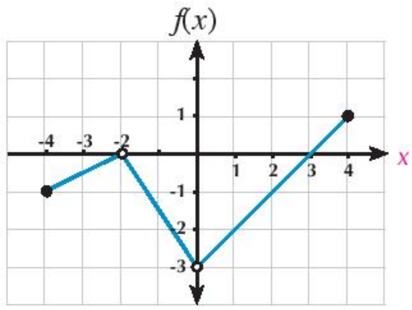
2 Dans la figure ci-contre :



a $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$ ……………………

b $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$ ……………………

3 Dans la figure ci-contre :



a $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$ ……………………

b $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ ……………………

c $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$ ……………………

d $\lim\limits_{x \to -4} f(x) =$ ……………………

e $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$ ……………………

4 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ 2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ …………………… **b** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ ……………………

5 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 0 \\ -3x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ …………………… **b** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ……………………

6 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ …………………… **b** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ……………………

Etudiez la limite de chacune des fonctions suivantes (si elle existe):

7. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ où f définié par $f(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

8. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ où f définié telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -3 \\ 3\,x + 1 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ où f définié telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -0 \\ 3x + 1 & \text{si } x > -0 \end{cases}$

10. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ où f définié telle que $f(x) = \begin{cases} 2\,x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

11. Trouvez la valeur de m pour que la fonction f telle que

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & \text{si } x < 1 \\ 6x - 3\,\text{m} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ admette une limite quand en $x = 1$.

12. Etudiez l'existence de la limite de la fonction f quand $f(x)$ $x \longrightarrow \pi$ telle que

soit f une fonction telle que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{\pi - x} & \text{si } x < \pi \\ 1 + \cos x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

13. Soit $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3\text{m} & \text{si } x < 2 \\ 5x + \text{k} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Trouvez la valeur de m et k

14. Trouvez la valeur de k pour que la fonction f admette $f(x) = \begin{cases} x^2 + \text{k} & \text{si } x < -1 \\ x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

une limite en $x = -1$.

15. Etudiez l'existence de la limite de la fonction f lorsque $f(x)$ $x \longrightarrow 0$ telle que ,

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x + \tan 2\,x}{6\,x + \sin x} & \text{si } x > 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

16. Etudiez l'existence de la limite de la fonction telle que

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\,x}{\tan x} & \text{si } -\dfrac{\pi}{3} < x < 0 \\ 3\cos x & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

a) lorsque $x \longrightarrow \dfrac{-\pi}{3}$ b) lorsque $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$ c) lorsque $x \longrightarrow 0$

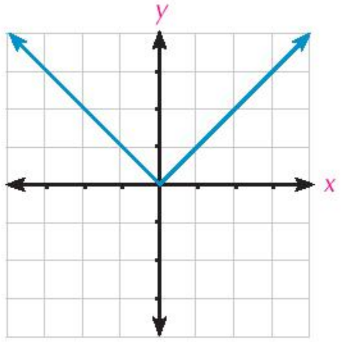
17. Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ torsque $x \to 2$

Continuité

3 - 6

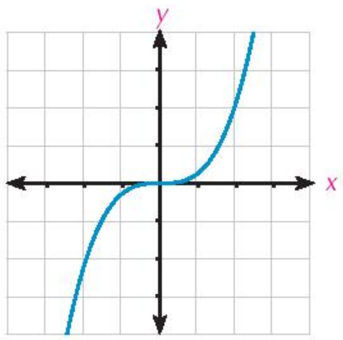
Réfléchissez et discutez

Observez les figures suivantes. Que remarquez-vous?



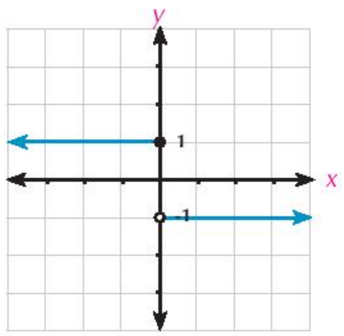
$f_1(x) = |x|$

Fig (1)



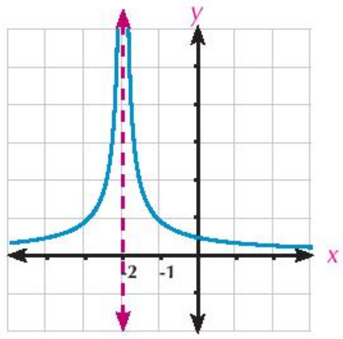
$f_2(x) = 2x^3$

Fig (2)



$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Fig (3)



$$f_4(x) = \frac{1}{|x+2|}$$

Fig (4)

Dans **les figures (1) et (2)**, on remarque que la courbe de chacune des deux fonctions est continue en tout point de son ensemble de définition.

Dans **les figures (3)**, on remarque que la courbe de la fonction est discontinue au point d'abscisse $x =$ ……………………

Dans **les figures (4)** on remarque que la courbe de la fonction est discontinue au point d'abscisse $x =$ ……………………

De ce qui précède, on déduit que la fonction f est continue au point d'abscisse $x = a$ si la courbe de la fonction n'est pas coupée en ce point et la fonction f est discontinue au point d'abscisse $x = a$ si la courbe de la fonction est coupée en ce point.

Allez apprendre

- Continuité d'une fonction en un point.
- Continuité d'une fonction sur un intervalle.

Vocabulaires de base

- Continuité d'une fonction
- Continuité en un point
- Continuité d'une fonction sur un intervalle

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Continuité d'une fonction en un point:

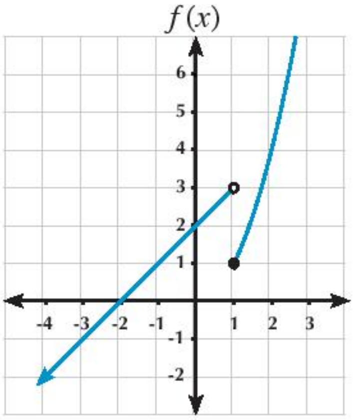


Figure (1)

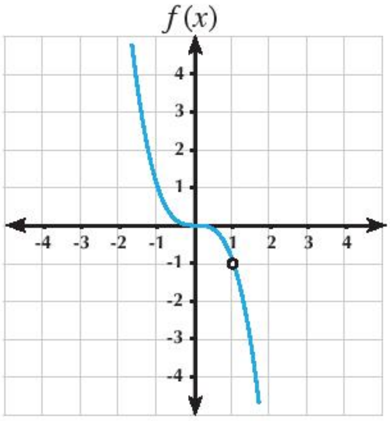


Figure (2)

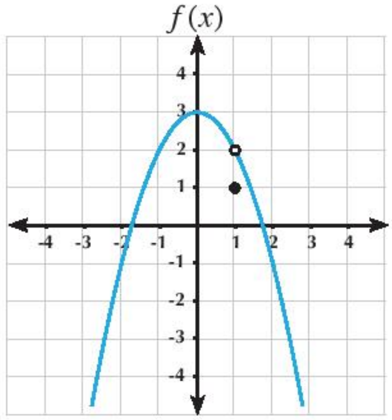


Figure (3)

Observez les figures précédentes puis calculez $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$ s'ils existent.

Dans la figure (1) : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ **donc** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas tandis que $f(1) = 1$

Dans la figure (2) : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} (x) = -1$ **donc** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$, $f(1)$ est indéfinie.

Dans la figure (3) : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} (x) = 2$ **donc** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ tandis que $f(1) = 1$

C'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

On voit que la fonction f dans les trois figures précédentes est discontinue en $x = 1$

A partir des observations précédentes, essayez de déduire une définition de la continuité d'une fonction en un point.

Definition 1

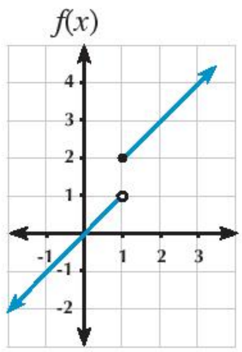
Une fonction f est continue en $x = a$ si elle vérifie simultanément les conditions suivantes :

Ò $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe Ò $f(a)$ existe Ò $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exemple **Continuité d'une fonction en un point**

(1) Etudiez la continuité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(a) en $x = 0$ (b) en $x = 1$



Solution

(a) Etudiez la Continuité de la fonction en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$,

$f(0) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Alors la fonction est continue en $x = 0$

b Etude de la continuité de la fonction en $x = 1$

On remarque que la règle de la définition de la fonction à droite du point $x = 1$ est différente de celle de gauche. Pour cela, on cherche de l'existence d'une limite à droite et d'une limite à gauche en $x = 1$

$f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$, $f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$

Cela veut dire que: $f(1^+) \neq f(1^-)$ est consition suffisante pour que f ne soit pas continue en $x = 1$ La figure indique la non continuite de f en $x = 1$

Essayez de résoudre

1) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Exemple **Vérifie la continuité d'une fonction en un point**

2) Etudiez la continuité de chacune des fonctions définies ci-après au point donné:

a $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$ en $x = 2, x = 3$ **b** $f(x) = 5 - |x - 3|$ en $x = 3$

Solution

a **i)** Etude de la continuité de la fonction en $x = 2$

$\because$ l'ensemble de dèfinition = R - {2} $\therefore f(x)$ est indéfinie en $x = 2$

$\therefore f(x)$ n'est pas continue $x = 2$

ii) Etude de la continuité de la fonction en $x = 3$

$\because f(3) = \dfrac{3 + 3}{3 - 2} = 6$ $\because \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 3}{x - 2} = \dfrac{3 + 3}{3 - 2} = 6$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$ $\therefore$ Donc la fonction est continue en $x = 3$

b On redéfinie la fonction $f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{si } x > 3 \\ x + 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$\because f(3) = 5$, $\because f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (8 - x) = 5$, $f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x + 2) = 5$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ **i.e:** $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$\therefore$ Pour cela, la fonction est continue en $x = 3$

Essayez de résoudre

2) Etudiez la continuité de chacune des fonctions définies ci-après au point donné:

a $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 1$ et en $x = 2$ **b** $f(x) = 3 - |x - 2|$ en $x = 2$

Redéfinir une fonction pour qu'elle soit continue (si cela est possible)

Exemple

3 Redéfinir la fonction f pour qu'elle soit continue en $x = 3$ (si cela est possible)

a $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

b $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & \text{si } x > 1 \\ 5x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Solution

a Pour que la fonction f soit continue en $x = 1$ il faut avoir $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+3)$

d'où: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

Donc on peut redéfinir la fonction f pour qu'elle soit con tenue par est:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

b Pour que la fonction f soit continue en $x = 1$, il faut avoir $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\therefore f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 2x) = 1 + 2 \times 1 = 3$, $f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (5x - 1) = 5 - 1 = 4$

$\because f(1^-) \neq f(1^+)$ la fonction n'a pas de limte en $x \to 1$

pour cela , on ne peut pas redéfinir la fonction pour qu'elle soit continue en $x = 1$

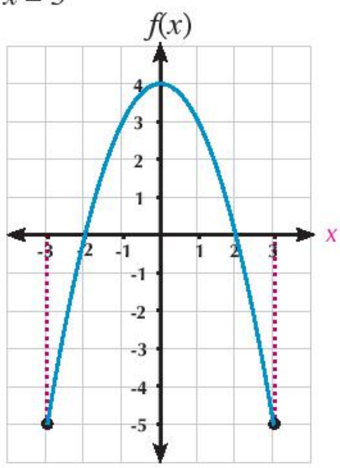
Essayez de résoudre

3 Soit f une fonction telle que $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. Redéfinissez la fonction f pour qu'elle soit continue en $x = 3$ si cela est possible.

4 Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ n'est pas continue en $x = 3$

puis trouver la valeur de h pour que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} & \text{at } x \neq 3 \\ h + 1 & \text{at } x = 3 \end{cases}$ soit continue en $x = 3$

Continuité d'une fonction sur un intervalle



La figure ci-contre représente une fonction f telle que $f(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle [-3, 3]. Pour que la fonction f soit continue sur l'intervalle [-3, 3], il faut qu'elle soit continue en tout point de cet intervalle.

C'est-à-dire pour tout x $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in]-3, 3[$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$ $\quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

De ce qui précède, nous pouvons trouvez la définition suivante:

Definition 2

Soit $f(x)$ une fonction définie sur [a, b] .
La fonction f est continue sur [a, b] Si :
1- $f(x)$ est continue sur]a, b[
2- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

A lide de la definition précédete et les formules des limite on peut montrer quelques fonction continues:

1- Fonction polynôme: est continue sur R ou sur son ensemble de définition.

2- Fonction rationnelle: est continue sur R privé de l'ensemble des zéros de dénominateur.

3- Fonctions sinus et cosinus: sont continue sur R.

4- Fonction tangente: $f(x)$ = tan x est continue sur $\mathrm{R} - \{x : x = \frac{\pi}{2} + \mathrm{n}\pi\}$; $\mathrm{n} \in Z$

Exemple

(4) Etudiez la continuité de la fonction f sur [0 ; +∞[telle que

Soit f un fonction $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \cos 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

Solution

$$\begin{array}{ccccc} & \sin x - \cos x & & \cos 2x & \\ 0 & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & +\infty \end{array}$$

$f(x)$ La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; +∞[
Pour étudier la continuite de fonction , on étudie sa continuité:
sur des intervalls précis des son ensemble de définition
aux bornes de ces intervalls
à droite du zéro.

1) $f(x) = \sin x - \cos x$ est continue sur]0 ; π[
De même $f(x) = \cos 2x$ est continue sur]π ; +∞[

2) $f(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x - \cos x) = -1$

Donc: $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ d'où la fonction est continue à droite en $x = 0$

3) On étudie la continuité en $x = \pi$

$f(\pi) = \sin\pi - \cos\pi = 1$

$f(\pi^-) = \lim\limits_{x\to\pi^-} (\sin x - \cos x) = 1$, $f(\pi^+) = \lim\limits_{x\to\pi^+} \cos 2x = 1$

$f(\pi^-) = f(\pi^+)$, $f(\pi) = 1$, $f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi)$

$\therefore$ La fonction est continue en $x = \pi$ **De (1) , (2) et (3)** la fonction est continue sur $[0, +\infty[$

Essayez de résoudre

(5) Etudiez la continuité de la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple

(5) Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2 + 1}$

Solution

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ est une fonction polynôme du second degré donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 4}$ est une fonction rationnelle, son ensemble définition $\mathbb{R} - \{-4\}$, les zéros de dénominateur = $\{-4\}$

$\therefore$ Donc la fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{-4\}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2 - 1}$

$\because$ $\sin x$ et $\cos x$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction de deenominateur $(x - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les zéros de dénominateur $=\{-1 ; 1\}$

$\because$ La fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

d) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2 + 4}$

La fonction du numérateur: $\tan x$ est continue sur $\mathbb{R} - \{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

La fonction du dénominateur : $x^2 + 1 > 0$ pour toutes les valeurs de x, il n'existe pas de zéros pour le dénominateur.

C'est-à-dire que la fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Essayez de résoudre

6) Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes:

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{\sin x}$

d) $f(x) = (x + 1)\cos x$

Remarque

si f_1 et f_2 deux fonction définie sur R, alors:

1- $f_1 \pm f_2$ est continue sur R

2- $f_1 \times f_2$ est continue sur R

3- $\dfrac{f_1}{f_2}$ est continue sur R - privé de l'ensemble des zéros de dénominateurs.

Activité

7) **En lien avec la chimie**

Dans une expérimentation chimique, le taux de réaction est donné par la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{0.6\,x}{x + 12}$ où x est la concentration de la solution.

Cherchez sur les sites internet des expérimentation qui peuvent étre représentées par cette fonction.

a) En utilisant un logiciel de graphisme, représentez graphiquement la fonction.

b) Etudiez la continuité de la fonction f.

Exemple

6) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ est continue sur R

Solution

Lorsque $x^2 + x + 1$ est positive pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$

(Discriminant = $b^2 - 4\,ac = 1 - 4 = -3 < 0$)

Ou $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ **Complétant le carrés**

$\therefore\ x^2 + x + 1$ est positive pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$

$\therefore f(x) = (\sqrt{x^2 + x + 1})$ **est définie pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on trouve que $f(a) = \sqrt{a^2 + a + 1}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (\sqrt{x^2 + x + 1}) = \sqrt{a^2 + a + 1}$$

$\therefore f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

$\therefore f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Essayez de résoudre

8) Etudiez la continuité de la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x - 2}$ sur son ensemble de définition.

Exercices 3 - 6

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes aux points d'abscisses donnés :

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , \quad x \leqslant 1 \\ 3x & , \quad x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \leqslant 2 \\ 2x - 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & , \quad x \leqslant 3 \\ x^2 - 2x - 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$ en $x = 3$

4) $f(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -2 \\ 1 & , \quad -2 \leqslant x < -1 \\ 2x + 3 & , \quad x \geqslant -1 \end{cases}$ en $x = -2$, en $x = -1$

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x - 2)}{x^2 - 4} & , \quad x < 2 \\ 1 - \dfrac{3}{x^2} & , \quad x \geqslant 2 \end{cases}$ en $x = 2$

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & , \quad x > 0 \\ 2 \sin x & , \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

7) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

8) $f(x) \dfrac{-x}{x^2 + 1}$

9) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 2x}$

10) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 2x - 15}$

11) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 2}$

12) $f(x) = \dfrac{|x + 2|}{(x + 2)^2}$

13) $f(x) = \sin x - 3\cos(x + 1)$

14) $f(x) = x^2 + \cos^2 x$

15) $f(x) = x^3 \sin 2x$

16) $f(x) = \tan^2 x - 1$

17) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos x}{x^2 - 9}$

18) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2 - 9}$

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

19) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \tan x + \sin^2 3x}{5x^2} & , \quad -\dfrac{\pi}{4} < x < 0 \\ 2\cos 2x & , \quad 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}[$

20) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^6 - 1}{x^3 - 1} & , \quad -4 < x < 1 \\ 3x - 1 & , \quad 1 \leqslant x < 4 \\ x^2 & , \quad 4 \leqslant x < 6 \end{cases}$ sur l'intervalle $]-4, 6[$

Trouvez la valeur de a dans chacun des cas suivants si :

21) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + ax + 9}$ est continue sur $\mathbb{R}$

22 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^4 - 81}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Trouvez la valeur de b et c dans chacun des cas suivants si :

23 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } \; 1 < x < 3 \\ x^2 + b\,x + c & \text{si } \; x \in \mathbb{R} -]\,1\,,3\,[\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

24 $f(x) = \begin{cases} x + 2b & \text{si } \; x < -2 \\ 3\,b\,x + c & \text{si } \; -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x - 2b & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Redéfinissez chacune des fonctions suivantes pour qu'elle soit continue au point donné (si cela est possible) :

25 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } \; x > 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } \; x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

26 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + 1 - \cos x}{5x} & \text{si } \; x > 0 \\ \dfrac{3}{5}\cos x & \text{si } \; x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$

27 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^{50} + (x-3)}{x - 3} & \text{si } \; x > 3 \\ \cos(3 - x) & \text{si } \; x < 3 \end{cases}$ en $x = 3$

28 $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ en $x = 3$

29 Trouvez la valeur de c pour que la fonction f soit continue en $x = c$ où :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leqslant c \\ x & \text{si } x > c \end{cases}$$

Unité (4)

Trigonométrie

Introduction de l'unité

Le trigonométrie est l'un des branches des mathématiques dont les pharaons sont des premiers qui le sont utilisé. Ils sont utilisés les règles trigonométriques pour bâtir les pyramides et les temples. Les grecs ont élaboré les règles trigonométriques pour trouver des relations liant les longueurs des cotés d'un triangle par les mesures de ses angles. Ils ont également créé une méthode pour élaborer les tableaux des sinus dans le triangle. Nous signalons ici que le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) qui a présenté une nouvelle expression des fonctions trigonométriques. Il a également présenté beaucoup des symboles qui sont utilisés dans les problèmes de mathématiques présentés actuellement à nos étudiants dans les écoles et les universités. Dans cet unité, nous allons étudier les règles qui relient les longueurs des cotés d'un triangle par la mesure de ses angles.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Déduire la loi de sinus dans un triangle dont l'énoncé est : «Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés».
- Utiliser la loi de sinus pour trouver les longueurs des côtés d'un triangle.
- Utiliser la loi de sinus pour trouver les mesures des angles d'un triangle (Il y a deux solutions pour un angle inconnu).
- Déduire la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle et utiliser cette relation pour résoudre des exercices variés.
- Identifier et déduire la loi de cosinus dans un triangle.
- Utiliser la loi de cosinus pour trouver la longueur d'un côté inconnu dans un triangle.
- Utiliser la loi de cosinus pour trouver la mesure d'un angle
- inconnu dans un triangle.
- Utiliser les lois de sinus et cosinus pour résoudre un triangle
- dans l'un des cas suivants :
  - en connaissant les mesures de deux de ses angles et la longueur de l'un de ses côtés.
  - en connaissant les longueurs de deux de ses côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.
  - en connaissant les longueurs de ses trois côtés.
- Utiliser la calculatrice pour résoudre des exercices et des activités variées en utilisant les lois de sinus et cosinus dans un triangle.

Vocabulaires de base

- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Cas ambigu
- Solutions possibles
- Solution unique
- Le plus petit côté
- Le plus long côté
- Aire du triangle
- Longueurs des cotés d'un triangle
- Angles inconnus
- Le plus petit angle
- Le plus grand angle
- Loi de cosinus

Leçons de l'unité

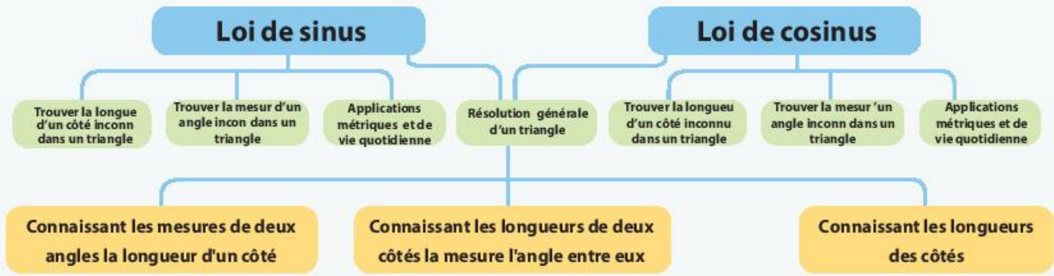
Leçon (4 - 1): Loi de sinus

Leçon (4 - 2): Loi de cosinus

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



4 - 1 Loi de sinus

Allez apprendre

- Lois de sinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de sinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de sinus.
- Utilisation de la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle pour résoudre des problèmes.

Vocabulaires de base

- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Cas ambigu

Aides pédagogiques

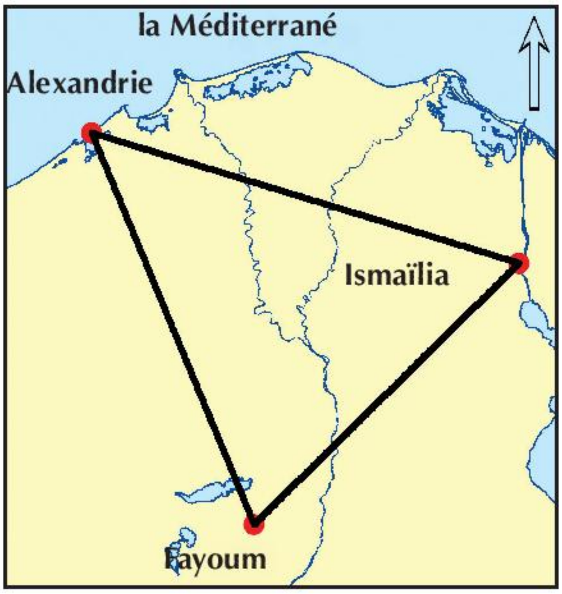
- Calculatrice scientifique

Vous avez déjà étudié comment utiliser un triangle rectangle pour trouver la hauteur d'un minaret, sans avoir besoin de la mesurer, en étant à une distance connue de sa base. Dans la suite, nous allons apprendre des méthodes pour trouver les longueurs des côtés d'un triangle quelconque.

Activité

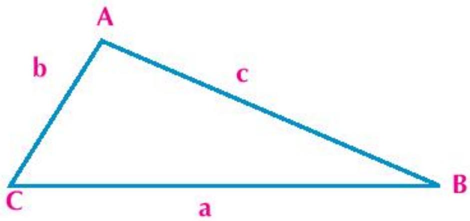
Karim veut déterminer la distance entre Fayoum et Ismaïlia en utilisant les données existantes sur la carte ci-contre. Mesurez les longueurs sur le dessin (l'échelle est 1 cm représente 43 km). Justifiez vos mesures après votre étude des méthodes de solution d'un triangle non rectangle.

L'une de ces méthodes est la loi de sinus



A apprendre

Loi (règle) de sinus



Dans le triangle ABC, on utilise le symbole a pour noté le coté opposé à l'angle A, le symbole b pour noté le coté opposé à l'angle B et le symbole c pour noté le coté opposé à l'angle C. On peut utiliser la règle du calcule de l'aire du triangle pour déduire la loi de sinus indiquant la relation entre les longueurs des cotés d'un triangle et les sinus des angles qui lui sont opposés.

On a : $\frac{1}{2}$ b c sin A = $\frac{1}{2}$ a c sin B = $\frac{1}{2}$ a b sin C

les formules du calcule de l'aire d'un triangle sont égales

Remarque

Aire du triangle A = $\frac{1}{2}$ produit des longueurs de deux cotés × sinus de l'angle compris entre les deux côtés

bc sin A = ac sin B = ab sin C **Multipliant par 2**

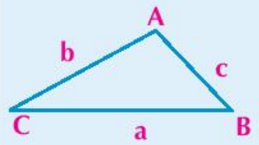
$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$ **En divisant** les trois membres par a b c on obtient

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ **En** simplifiant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ **D'après les propriétés de la proportionnalité**

C'est-à-dire que : Dans un triangle, les longueurs des cotés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles qui lui sont opposés. La loi de sinus. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Remarque



Aire du triangle A B C

$= \frac{1}{2}$ ab sin C

$= \frac{1}{2}$ ac sin B

$= \frac{1}{2}$ bc sin a

Utiliser la loi (règle) de sinus pour trouver la longueur du coté dans un triangle

Exemple

(1) Trouvez la longueur du plus grand côté dans un triangle ABC tel que m $(\angle A) = 54° 33'$, m$(\angle B) = 49° 22'$, a = 124.5 cm

Solution

Le plus grand côté est opposé au plus grand angle **(Inégalité dans le triangle)**

$m(\angle C) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)]$

$= 180° - [45° 33' + 49° 22'] = 76° 5'$

$\therefore$ Le plus grand côté est c car il est opposé à l'angle C qui est le plus grand angle

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $\quad\therefore \frac{124{,}5}{\sin 54° 33'} = \frac{c}{\sin 76° 5'}$

$\therefore c = \frac{124{,}5 \sin 76° 5'}{\sin 54° 33'} = 148{,}4$cm

Remarque

Dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. Le plus petit côté est opposé au plus petit angle

Essayez de résoudre

(1) Trouvez la longueur du plus petit côté dans un triangle ABC tel que m $(\angle A) = 43°$, m$(\angle B) = 65°$, c = 8,4cm

Résolution d'un triangle en utilisant la loi de sinus

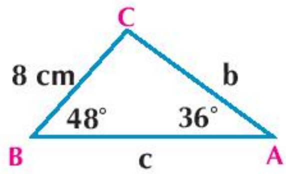
La loi de sinus permet de résoudre un triangle en connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux de ses angles (On peut calculer la mesure du troisième angle).

[I] Résolution d'un triangle en connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux angles :

Exemple

(2) Résolevez le triangle ABC tel que a = 8 cm , m($\angle$A) = 36° , m($\angle$B) = 48°

Solution



m($\angle$C) = 180° - (36° + 48°) = 96°

$\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ $\quad \therefore \frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b}$

$\therefore b = \frac{8 \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \simeq 10{,}114$ cm.

On utilise la calculatrice pour effectuer les opérations. Vérifierz d'abord que la calculatrice est réglée pour les mesures des angles en degrés puis appuyer sur les boutons dans l'ordre suivant :

(8 × SIN 4 8) ÷ SIN 3 6 =

$\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ $\quad \therefore \frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$ $\quad \therefore c = \frac{8 \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \simeq 13{,}535$cm

On utilise la calculatrice comme suit :

(8 × SIN 9 6) ÷ SIN 3 6 =

Dans $\triangle$ ABC: b = 10,114 cm , c = 13,535 cm ,

Essayez de résoudre

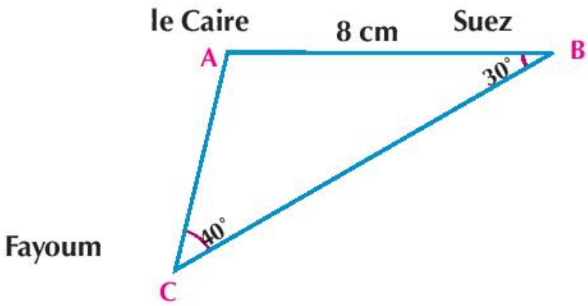
(2) Résolevez le triangle ABC tel que a = 8cm , m($\angle$A) = 60° , m($\angle$B) = 40°

Exemple

(3) **En lien avec la géographie :** La figure ci-contre représente les positions de trois villes égyptiennes. Si la distance sur le dessin entre le Suez et le Caire est 8 cm et la mesure de l'angle dont le sommet est Fayoum est 40°. Trouvez à un kilomètre près .

(a) La distance entre le Caire et Fayoum.

(b) La distance entre le Suez et Fayoum.



Solution

m($\angle$A) = 180° - (30° + 40°) = 110°

$\because \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 110^\circ} = \frac{8}{\sin 40^\circ}$

$\therefore AC = \frac{8 \times \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \simeq 6{,}22$cm

$\therefore$ La distance entre le Caire et Fayoum $\simeq 6{,}22 \times 16{,}75 \simeq$ 104 km

$BC = \frac{8 \times \sin 110^\circ}{\sin 40^\circ} \simeq 11{,}7$cm

$\therefore$ La distance entre le Suez et Fayoum $\simeq 11{,}7 \times 16{,}75 \simeq$ 196 km

Applications géométriques de la loi de sinus

Probléme - type

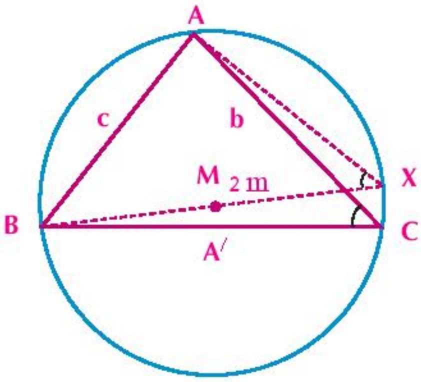
Dans un triangle ABC on a : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$

où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

Démonstration :-

Si le cercle passe par les sommets d'un triangle acutangle

On trace le cercle passant par les sommets du triangle ABC acutangle ABC puis on trace le diamètre $\overline{BX}$ and et la corde $\overline{XA}$



$\because m(\angle BAX) = 90°$, $m(\angle AXB) = m(\angle ACB)$

$\therefore \sin X = \frac{AB}{BX}$, $\sin C = \frac{AB}{BX}$

D'où AB = BX sin C

$\therefore c = 2r \sin C$ $\qquad \frac{c}{\sin C} = 2r$

De la même manière, nous pouvons démontrer que : $\frac{a}{\sin A} = 2r$, $\frac{b}{\sin B} = 2r$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$

Auto-apprentissage : Démontrez la règle précédente si le cercle passe par les sommets d'un triangle obtusangle.

Exemple

4) MNO est un triangle tel que tel que n = 68,4cm , $m(\angle M) = 100°$, $m(\angle N) = 40°$. Trouvez:

a) m

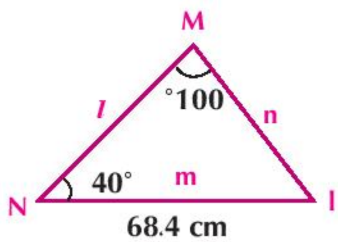
b) la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle MNO

c) l'aire du triangle MNO

Solution

$m(\angle M) = 180° - (100° + 40°) = 40°$

$\frac{l}{\sin 40°} = \frac{68,4}{\sin 100°}$ **(Régle de sinus)**



$m = \frac{68,4}{\sin 100°} \times \sin 40° \simeq 44,64\text{cm}$ **ce qu il fout démontrer (1)**

$\because \frac{m}{\sin M} = 2r$ $\qquad \therefore \frac{68,4}{\sin 100°} = 2r$

Donc on a $r = \frac{68,4}{2 \sin 100°} \simeq 34,72$ cm **ce qu il fout démontrer (2)**

Aire le triangle MNO $= \frac{1}{2}$ n m sin O $= \frac{1}{2} \times 68,4 \times 44,64 \sin 40° = 981,1$ cm^2

Essayez de résoudre

3 Résolvez le triangle ABC tel que $a = 25$ cm , $m(\angle B) = 35° \ 18'$, $m(\angle C) = 103° \ 42'$ Calculez ensuite son aire et la longueur du rayon de son cercle circonscrit.

Exemple

5 ABCD est un trapèze tel que $\overline{AD} \,//\, \overline{BA}$, $AD = 7{,}4$cm , $m(\angle B) = 62°$, $m(\angle D) = 106°$, $m(\angle ACB) = 41°$. Trouvez

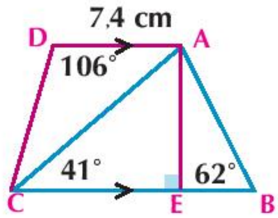
I: la longueur de $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ **II**: Aire du trapèze ABCD à un centimètre carré près.

Solution

Dans le triangle ACD

$\because m(\angle DAC) = m(\angle ACB) = 41°$ **(Deux angles alterne - internes)**

, $m(\angle ACD) = 180° - (41° + 106°) = 33°$



$\because \dfrac{AC}{\sin 106°} = \dfrac{7{,}4}{\sin 33°}$ $\therefore AC = \dfrac{7{,}4 \times \sin 106°}{\sin 33°} = 13{,}06$cm

Dans le triangle $m(\angle BAC) = 180° - (62° + 41°) = 77°$

$\because \dfrac{BC}{\sin 77°} = \dfrac{13{,}06}{\sin 62°}$ $\therefore BC = \dfrac{13{,}06 \times \sin 77°}{\sin 62°} = 14{,}41$cm

$\because \dfrac{AE}{AC} = \sin 41°$ $\therefore AE = 13{,}06 \times \sin 41° = 8{,}568$cm

$\because$ **L'air du trapèze ABCE** $= \dfrac{1}{2} AC \times BC \sin 41° + \dfrac{1}{2} AC \times AD \sin 41°$

$= \dfrac{1}{2} \times 13{,}06 \times (7{,}04 + 14{,}41) \sin 41° \simeq 93\text{cm}^2$

Essayez de résoudre

4 ABCD est un quadrilatère tel que $CD = 100$ cm , $m(\angle BCA) = 36°$, $m(\angle BDA) = 55°$, $m(\angle BCD) = 85°$, $m(\angle CDA) = 87°$, Trouver la longueur de $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ à un centimètre près.

Exercises 4 - 1

Complétez ce qui suit:

1) Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux ....

2) Dans un triangle AB C si 2 sin A= 3 sin B = 4 sin C alors a : b : c = ...

3) Soit ABC est un triangle équilatéral de longueur de côté 2cm. La longueur du diamètre du cercle circonscrit au triangle = ...

4) Si ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle C) = 40°$ et c = 8,4 cm alors a = ... cm

5) Dans un triangle ABC on a $\frac{2\ b}{\sin B}$ = ...r

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :-

6) Si ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 30°$, a = 10 cm alors la longueur du rayon de son cercle circonscrit est ....

a) 10cm b) 20cm c) 5cm d) 40cm

7) Si la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est égale à 4cm , $m(\angle A) = 30°$ alors a =

a) 4cm b) 2cm c) $4\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{16}$

8) Dans un triangle ABC, l'expression 2 r sin A est égale à ....

a) a b) b c) c d) l'aire du ($\triangle ABC$)

9) Si r est le rayon du cercle circonscrit au triangle XYZ , alors $\frac{y}{2\sin Y}$ est égal à ....

a) r b) 2r c) $\frac{1}{2}$r d) 4r

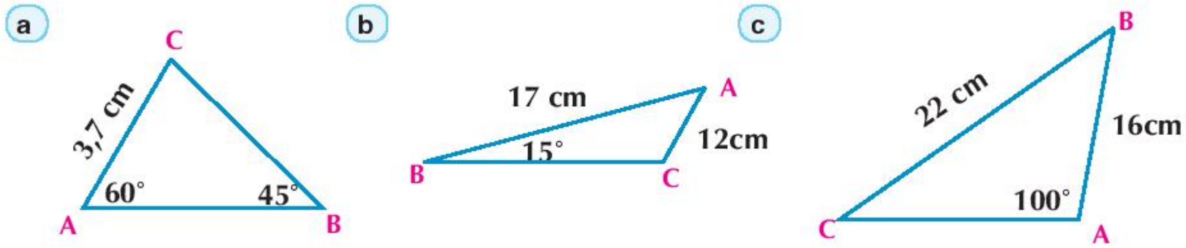
10) Si MNO est un triangle tel que $m(\angle M) = 30°$, NO = 7cm alors la longueur du rayon de son cercle circonscrit est ....

a) 7cm b) 3,5cm c) 14cm d) $\frac{14}{\sqrt{3}}$

11) Dans un triangle XYZ, si 3 sin X = 4 sin Y= 2 sin Z , alors x : y : z = ...

a) 2 : 3 : 4 b) 6 : 4 : 3 c) 3 : 4 : 6 d) 4 : 3 : 6

12) **Réslvez chacun des triangles suivants** :



13) ABC est un triangle dans lequel $(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 45°$, démontrez que: $a : b : c = \sqrt{6} : 2 : \sqrt{3} + 1$

14) ABCD est parallélogramme tel que AB = 19,77cm les angles formés par ses diagonales et $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ son coté $\overline{AB}$ angles of mesurent 36° 22' et 44° 58', Trouvez la longueur de chacune de ses diagonales.

15. ABCD est trapèze dans lequel $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, AD = 10,7cm, m($\angle$D) = 100°, m($\angle$B) = 61° 19', m($\angle$CAD) = 33° 50' , trouver les longueurs de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$

16. ABCD est quadrilatère dans lequel m($\angle$BCD) = 85°, m($\angle$CDA) = 87°, m($\angle$BCA) = 36°, m($\angle$BDA) = 55° CD = 1000 meters trouver les longueurs de $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ à un mètre près.

17. ABC est un triangle tel que sin C = 0,35 , c = 14cm, Trouver l'aire de son cercle circonscrit en fonction de π

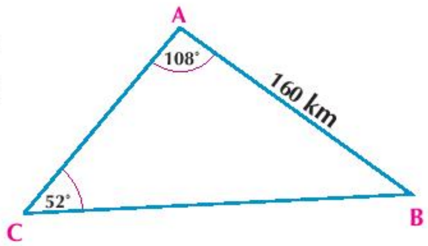
18. ABC est un triangle dans lequel a = 58, m($\angle$B) = 38°, ($\angle$C) = 62° . Trouvez : la longueur de la perpendiculaire issue de A á $\overline{BC}$

19. ABC est un triangle tel que m($\angle$A) = 60°, m($\angle$B) = 45°, Si a + b = ($\sqrt{6}$ + 2) cm trouvez la longueur de a, b

20. ABC est triangle inscrit dans un cercle de 20 cm de diamètre. Si m($\angle$A) = 42°, m($\angle$B) = 74° 48', trouver la longueur des cotés du triangle ABC.

21. ABC est un triangle tel que c = 19cm, m($\angle$A) = 112°, m($\angle$B) = 33°, trouvez b et le rayon de son cercle circonscrit à deux décimaux près.

22. **En lien avec la géographie :** La figure ci-contre représente les positions de trois villes A, B et C. Trouvez, à un kilomètre près la distance entre :



a) A et C
b) B et C

23. **Réflexion créative :**

a) Dans le triangle ABC, démontrez que : $\dfrac{3c - 4\,b}{3 \sin C - 4 \operatorname{Sin} B} = \dfrac{c}{\sin C}$

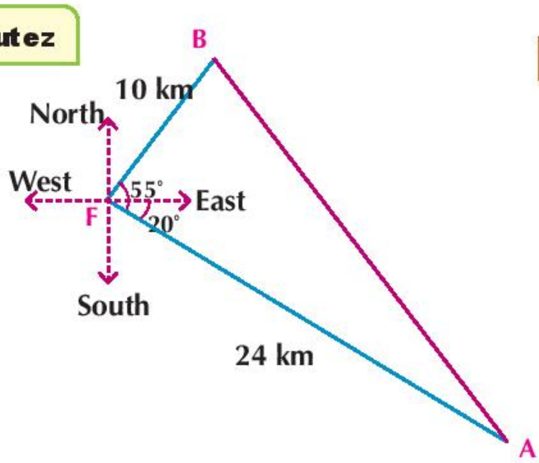
b) Soit Δ l'aire du triangle ABC. Démontrez que $\Delta = a^2 \left(\dfrac{\sin B \sin C}{2 \sin A}\right)$

Loi de cosinus

4 - 2

Réfléchissez et discutez

Deux bateaux A et B se déplacent, en même temps d'un port. Le bateau A se déplacent dans la direction 20° Sud par rapport à l'Est, il a parcouru 24 km. Le bateau B meut dans la direction 55° Nord par rapport à l'Est, il a parcouru une distance de 10 km dans le même temps.



Trouvez la distance qui sépare les deux bateaux à la fin de cette duré du temps. Utilisez les instruments géométriques pour déterminer l'échelle et trouver la longueur du $\overline{AB}$.

Peut-on utiliser la règle de sinus pour trouver la longueur de $\overline{AB}$?

Peut-on déduire une autre règle pour trouver la longueur de $\overline{AB}$ en fonction des longueurs de $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et la mesure de l'angle comprise entre eux ?Justifiez votre réponse.

Allez apprendre

- Lois de cosinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de cosinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de cosinus

Vocabulaires de base

- Loi de cosinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit

Aides pédagogiques

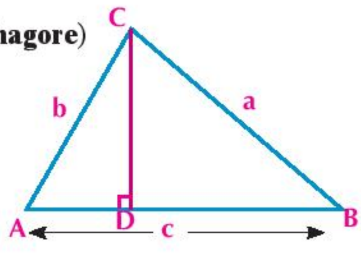
- Calculatrice scientifique

A apprendre

Loi (règle) de cosinus

Le triangle BDC, rectangle en D :

$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2$ (**Théorème de Pythagore**)



C'est-à- dire :

$a^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$

$= b^2 \operatorname{Sin}^2 A + b^2 \cos^2 A + c^2 - 2bc \cos A$

(**En développant**)

$= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$ (**Prenant b^2 facteur commun**)

$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (**En simplifiant**)

On a donc :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Rappel

Identité de pytagore

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Auto-apprentissage : Démontrez la règle précédente dans le cas où $\angle A$ est un angle obtus.

Expression oral : De même façon, écrirez les valeurs de b^2, c^2, cos B et cos C

Pensé critique : La règle précédente est-il vraie si le triangle ABC est rectangle en A ? Vérifiez votre réponse.

Formule de cosinus :

Dans un triangle ABC, on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos B$, $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2\,c\,a}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b}$

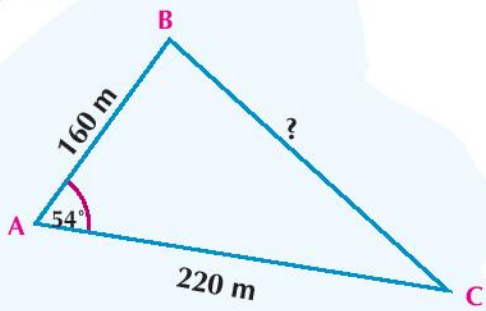
Aide

c'est mieux d'utiliser les longueurs de côtés d'un triangle a ; b et c dans un ordre cyclique pour écrire les lois de cosinus pour déduise l'une des ses forme de l'autre.

Activité

(a) La règle de cosinus utilisée, pour trouver la longueur d'un coté dans un triangle, à l'aide de la calculatrice

Un ingénieur veut déterminer la distance entre deux points dont il est difficile d'y arriver. En utilisant l'appareil de mesure de distance, il a trouvé que la distance qui lui sépare et le première point est 160 mètres, celle entre lui et le deuxième point est 220 mètres et la mesure de l'angle et la mesure de l'angle opposé aux deux points est 54°. Utilisez ces informations pour calculez la distance entre les deux points à un kilomètre près.



1 - Déterminez précieusement les donnés accueillis par l'ingénieur.
2 - Identifiez la conclusion.
3 - Représentez les donnés par une échelle convenable en utilisant les instruments géométriques nécessaires .
4 - Trouvez la longueur de $\overline{BC}$ en centimètres.
5 - Calculez la distance réelle entre les deux points B et C à un kilomètre près.
6 - Peut-on utiliser la règle de cosinus pour trouver la distance entre les deux points B et C ? Expliquez.
7 - Comparez les deux résultats obtenus par la mesure et en utilisant la règle de cosinus.

Rappel

la longueur réelle = la longueur sur la dessin: l'échelle

D'après l'activité précédent, on trouve que :

1 - L'échelle convenable : 1 cm représente 20 kilomètres
2 - Par mesure : la longueur de $\overline{BC}$ = 9 cm.
3 - La longueur réelle de $\overline{BC} \simeq 9 \times 20 \simeq 180$ km

4 - La règle de cosinus est : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos C$

Par substitution $a^2 = (160)^2 + (220)^2 - 2 \times 160 \times 220 \cos 54° \simeq 32619{,}9$

Alors $a \simeq 180{,}6$ km.

5 - Les résultats sont proches si le dessin est minutieux, mais les résultats obtenus en utilisant les règles restent plus précis.

6 - Utilisation de la calculatrice scientifique pour trouver le résultat :

[1] [6] [0] [χ^2] [+] [2] [2] [0] [χ^2] [−] [2] [×] [1] [6] [0] [×]
[2] [2] [0] [×] [cos] [5] [4] [(] [=] [√] [=]

Application sur l'activité précédente : Calculez la longueur du troisième coté, à un centième près dans le triangle ABC dans chacun des cas suivants :

a $a = 4{,}36$ cm , $b = 3{,}84$ cm, m $(\angle C) = 101°$

b $b = 2$ cm , $c = 5$ cm, m $(\angle A) = 60°$

Trouver la mesure d'un angle d'un triangle en connaissant ses trois côtés :

Exemple

1 Trouvez la mesure du plus grand angle dans le triangle ABC tel que $a = 4.6$, $b = 3.2$, $c = 2.8$

Solution

$\because$ Le plus grand angle dans un triangle est opposé au plus grand côté

$\therefore \angle A$ est le plus grand angle

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3{,}2)^2 + (2{,}8)^2 - (4{,}6)^2}{2 \times 3{,}2 \times 2{,}8}$$

En utilisant la calculatrice

[3.2] [χ^2] [+] [2.8] [χ^2] [−] [4.6] [χ^2] [=] [÷] [(] [2] [×] [3.2] [×] [2.8] [)] [=] [Shift]
[cos] [=] [,,,]

Comme le cosinus de l'angle est négatif, donc l'angle est obtus et non pas supérieur à 180°

$\therefore$ m $(\angle A) = 99°\ 53'\ 49''$

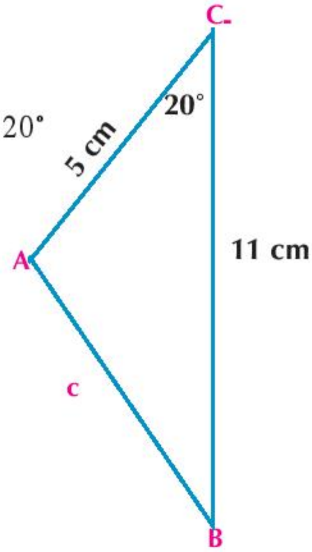
Essayez de résoudre

1 Trouvez la mesure du plus grand angle dans le triangle ABC tel que $a = 11$ cm, $b = 10$ cm et $c = 8$ cm

Utilisé la loi de cosinus pour résoudre un triangle :

La loi de cosinus nous permet de résoudre un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.

[I] Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux :



Exemple

(2) Résoudre le triangle ABC tel que a = 11cm , b= 5cm , m ($\angle$ C) = 20°

Solution

Il faut calculer c ; m ($\angle$A) ; m ($\angle$B)

$\because$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C$ **(loi de cosinus)**

$= (11)^2 + (5)^2 - 2 \times 11 \times 5 \cos 20°$

$c = \sqrt{(11)^2 + (5)^5 - 2 \times 11 \times 5 \cos 20°} \simeq 6{,}529$ cm

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(5)^2 + (6{,}529)^2 - (11)^2}{2\,(5)\,(6{,}529)} \simeq -\,0{,}817$

m ($\angle$ A) = 144° 49'

m ($\angle$ B) = 180° - [m ($\angle$ A) + m ($\angle$ C)]

= 180° - [144,786° + 20°] = 15,214°

Remarque

Dans certains cas, nous avons deux possibilités pour calculer la mesure d'un angle, l'une par la loi de sinus et l'autre par la loi de cosinus. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser la loi de cosinus pour calculer la mesure de l'angle pour les raisons suivantes:

1- Au cas où on utilise **la loi de sinus :**

- le sinus d'un angle aigu ou d'un angle obtus est toujours positif.

2- Au cas où on utilise **la loi de cosinus :**

- le cosinus d'un angle obtus est négatif.
- le cosinus d'un angle aigu est positif.
- la loi de cosinus nous permet résoudre un triangle en connaissant les longueurs de trais côtes. Connaissez - vous que la somme des longueurs de deu côtés est plus grande que la longueur du troisième côté.

Aide

On peut utiliser la loi pour calculer m ($\angle$ A), m ($\angle$ B) après avoir déterminé c, mais c'est mieux pour distinguer les angles aigus et les angles obtus .

Essayez de résoudre

(2) Résoudre le triangle ABC tel que a = 24,6 cm , c= 14,2 cm, m ($\angle$ B) = 42° 18'

[II] Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de ses trois côtés :

Exemple

(3) Résoudre le triangle ABC tel que a = 9cm , b = 7 cm , c= 5 cm.

Solution

Il faut calculer les mesures des angles A, B et C

$\because \quad \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 5} = -0{,}1$

$m(\angle A) \simeq 95° \; 44' \; 21''$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c\,a} = \dfrac{5^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 9} \simeq 0{,}633$

$m(\angle B) \simeq 50° \; 42' \; 13''$

$m(\angle C) = 180° - [\, m(\angle A) + m(\angle B)] = 33° \; 33' \; 26''$

Essayez de résoudre

(3) Résoudre le triangle ABC tel que a = 12,2cm, b = 18,4cm, c = 21,1cm

Essayez de résoudre

(4) Résoudre le triangle ABC tel que a = 8,6cm , b = 11,1cm , $m(\angle A) = 63°$

Applications géométriques sur la loi de cosinus

Exemple

(4) ABC est un triangle tel que a = 63 cm , b - c = 27 cm, et le périmètre du triangle est égal à 140 cm, Calculer b et c puis trouver la mesure du plus petit angle du triangle et l'aire de sa surface à un centimètre carré près.

Solution

$\because \; a + b + c = 140$ **(périmètre du triangle)** , a = 63

$\therefore \; b + c = 140 - 63$ **d'où** b + c = 77 **(1)**

$\because \; b - c = 27$ **(hypothèse)** **(2)**

De (1) et (2) par addition on obtient:

2 b = 104 **d'où** b = 52 cm

En substituant en (1) , on a c = 25cm

On remarque que c est le plus petit côté du triangle ABC

$\therefore \; \angle C$ est le plus petit angle du triangle ABC

$\therefore \; \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a\,b} = \dfrac{(63)^2 + (52)^2 - (25)^2}{2 \times 63 \times 52} = 0{,}9230769$

$\therefore$ m ($\angle$ C) = 22° 37'

L'aire du triangle ABC = $\frac{1}{2}$ ab sin C

$= \frac{1}{2} \times 63 \times 52 \times \sin 22° 37' \quad \simeq 630 \text{ cm}^2$

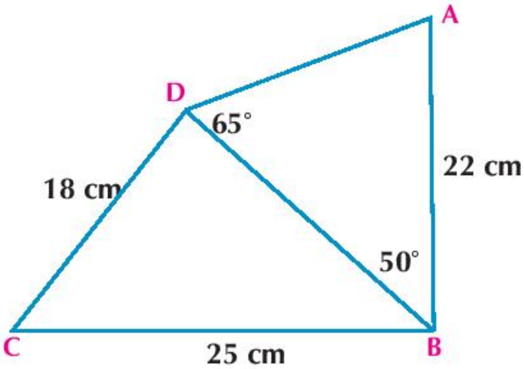
Essayez de résoudre

5 ABC est un triangle tel que b = 4cm, a + c = 11cm , a - c = 1cm , Démontrer que m ($\angle$A) = 2 m ($\angle$B), Trouver ensuite, le périmètre du triangle ABC et l'aire de sa surface à un centimètre carré près.

Exemple

5 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 22cm , m ($\angle$ADB) = 65° , m ($\angle$DBA) = 50°, BC = 25cm, DC = 18cm, Calculer : m ($\angle$CBD) , m ($\angle$ BCD)

Solution



Dans le triangle ABD

m ($\angle$ A) $= 180° - (50° + 65°)$

$= 180° - 115° = 65°$

$\because$ m ($\angle$ A) = m ($\angle$ D) = 65°

$\therefore$ AB = BD = 22cm

Dans le triangle DBC

$$\cos(\angle DBC) = \frac{(BD)^2 + (BC)^2 - (DC)^2}{2\,(BD)\,(BC)}$$

$$= \frac{(22)^2 + (25)^2 - (18)^2}{2 \times 22 \times 25} \simeq 0{,}7137$$

$\therefore$ m ($\angle$ DBC) $\simeq$ 44° 28' 6''

$$\cos(\angle BCD) = \frac{(BC)^2 + (CD)^2 - (BD)^2}{2\,(BC)\,(CD)} = \frac{(25)^2 + (18)^2 - (22)^2}{2 \times 25 \times 18} \simeq 0{,}5167$$

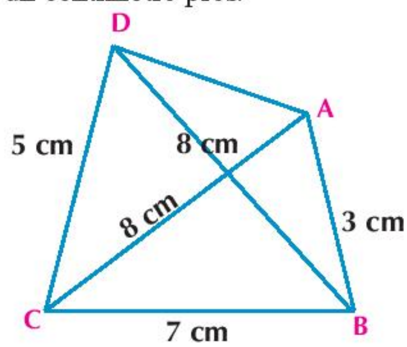
$\therefore$ m ($\angle$ BCD) $\simeq$ 58° 53' 28''

Essayez de résoudre

ABCD est un quadrilatère tel que m ($\angle$ DAB) = m ($\angle$ DBC) = 90° , BD = 10cm , AD = 8cm , m ($\angle$ DCB) = 30° , Calculer AC à un centimètre près.

Exemple

6 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 3cm , AC = 8cm, B C = 7cm , CD = 5cm , BD = 8cm, Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible.



Solution

Dans le triangle ABC

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(8)^2 + (3)^2 - (7)^2}{2 \times 8 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ m ($\angle$ A) = 60° **(1)**

Dans le triangle BDC

$$\cos D = \frac{(CD)^2 + (DB)^2 - (BC)^2}{2\,(CD)\,(DB)} = \frac{(5)^2 + (8)^2 - (7)^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ m ($\angle$ D) = 60° **(2)**

$\because$ m ($\angle$BAC) = m ($\angle$BDC) et les deux angles sont tracés sur une même base $\overline{BC}$ et d'un même côté de la base, alors le quadrilatère ABCD est **inscriptible**. **(Ce qu'il fallait démontrer)**.

Essayez de résoudre

6) ABCD est un quadrilatère tel que A B = 9 cm, BC = 5 cm, CD = 8 cm, DA = 9 cm, AC = 11 cm. Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Exercices 4 - 2

Compléter ce qui suit :

1) On utilise .... pour résoudre le triangle étant donné les longueurs de deux cotés et la mesure de l'angle compris entre eux.

2) On utilise .... pour résoudre le triangle étant donné les mesures de deux angle et la longueurs d'un cotés dans le triangle

3) Dans un triangle MNO, on a : $m^2 = n^2 + o^2 -$ .... ; $\cos m = \dfrac{n^2 + o^2 - \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

4) Si les longueurs des côtés d'un triangle ABC sont 13 cm , 17 cm et 15 cm, la mesure du plus grand angle dans le triangle est ....°

5) Si les longueurs des côtés d'un triangle XYZ sont 5,7 cm , 7,4 cm et 4,3 cm, la mesure du plus petit angle dans le triangle est ....°

6) Dans un triangle X YZ si x = 10 cm , y = 6 cm , m ($\angle$ Z) = 60°, alors z = ...

7) Dans un triangle MNO on a $n^2 + o^2 - m^2 =$ ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

8) La mesure du plus grand angle dans un triangle dont les longueurs des côtés sont 3 , 5 et 7 est :

a) 150° b) 120° c) 60° d) 30°

9) Dans un triangle MNO, l'expression $\dfrac{m^2 + n^2 - o^2}{2mn}$ est égale à :

a) cos M b) cos N c) cos O d) Aucune des réponses précédentes

10) Dans un triangle XYZ, on a $y^2 + z^2 - x^2 = 2\,yz$ ....

a) $\cos X$ b) $\sin Z$ c) $\cos Z$ d) $\sin X$

11) Dans un triangle ABC, si a : b : c = 3 : 2 : 2 alors cos A est égal à

a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

Répondre aux questions suivantes :

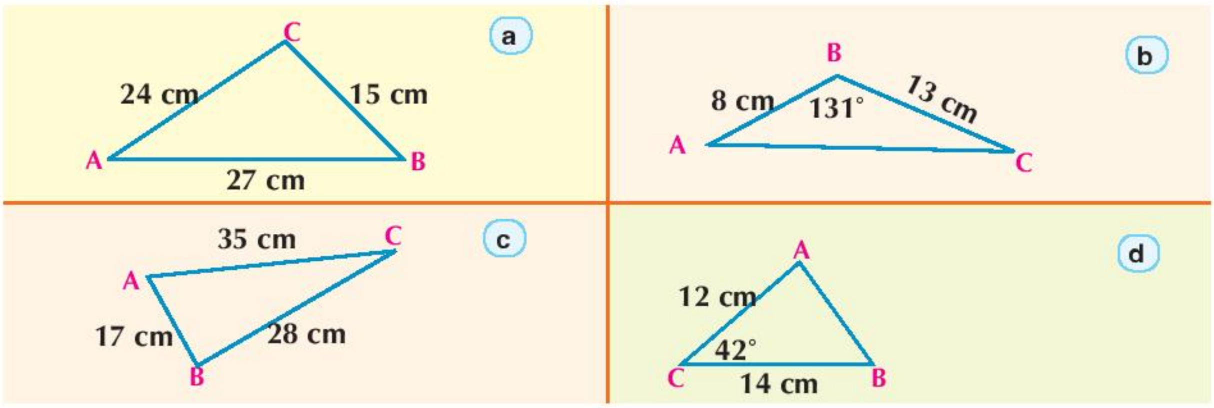
12) Dans chacun des cas suivants, indiquez si le triangle a une solution unique, deux solutions ou n'a pas de solution. Trouvez les solutions possibles puis donnez un résultat approché a un décimal près.

a) $a = 4cm,\ c = 16cm,\ m(\angle C) = 115°$
b) $a = 12\ cm,\ c = 7cm,\ m(\angle A) = 27°$
c) $a = 5cm,\ c = 12cm,\ m(\angle A) = 65°$
d) $a = 14\ cm,\ b = 18cm,\ m(\angle A) = 42°$

13) **Dans le triangle ABC si :**

a) $a = 5cm,\ b = 7cm,\ c = 8cm$ démontrer que $m(\angle B) = 60°$
b) $a = 3cm,\ b = 5cm,\ c = 7cm$ démontrer que $m(\angle C) = 120°$
c) $a = 13cm,\ b = 7cm,\ c = 13cm$ trouver $m(\angle C)$
d) $a = 13cm,\ b = 8cm,\ c = 7cm$ trouver $m(\angle A)$
e) $a = 10cm,\ b = 17cm,\ c = 21cm$ trouver la mesure du plus petit angle du triangle
f) $a = 5cm,\ b = 6cm,\ c = 7cm$ trouver la mesure du plus grand angle du triangle
g) $a = 17cm,\ b = 11cm,\ m(\angle C) = 42°$ trouver c à un centième près
h) $b = 16,\ c = 14,\ m(\angle A) = 72°$ trouver a à un centième près

14) Dans chacun des exercices suivants, résoudre le triangle donné :



Applications géométriques

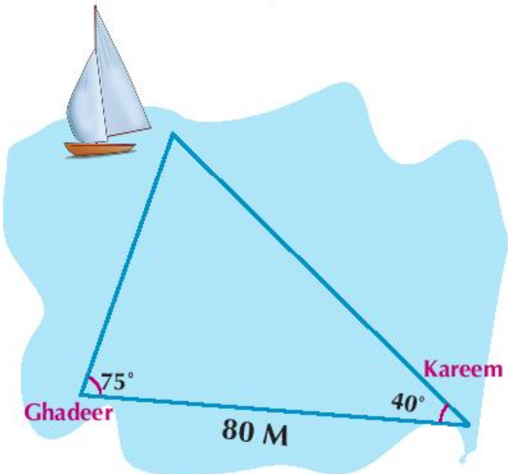
15 Les longueurs de deux côtés d'un parallélogramme sont 18 cm et 26 cm et la mesure de l'angle compris entre eux est 39°. Trouver, à un centième près, la longueur de la plus petite diagonale du parallélogramme.

16 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 9 cm , BC = 5 cm , CD = 8 cm et AC = 11 cm. Démontrer que ABCD est un quadrilatère inscriptible.

17 ABCD est un parallélogramme tel que AB = 9cm, B C= 13cm, A C= 20 cm, Trouver la longueur de $\overline{BD}$

18 ABC est un triangle de périmètre 70cm, a = 26cm, m(∠A) = 60° , Calculer son aire.

19 **En lien avec la navigation maritime :** Karim et Ghadir sont situés au bord d'une rivière.Quelle est la distance entre Karim et le bateau ? Donnez une valeur approchée à un mètre près.



20 **En lien avec l'agriculture :** Un fermier veut poser un bastingage autour d'une parcelle du terrain triangulaire dont les longueurs de deux cotés sont 98m et 64m et la mesure de l'angle formé par ces deux cotés est 50°. Quelle est la longueur du bastingage ?

21 **Theoretical proof:** Soit ABC un triangle tel que D est le milieu de $\overline{BC}$, Démontrer que:

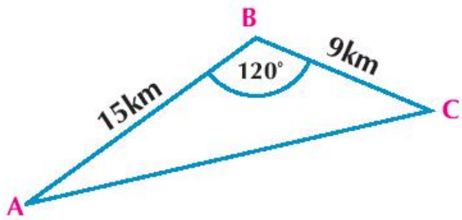
$(AB)^2 + (AC)^2 = 2\,(AD)^2 + 2\,(BD)^2$

Si AB = 5 cm , AC = 8 cm et BC = 12 cm , trouver AD.

22 **Démonstration théorique (pour les excellents) :** Soit ABC un triangle tel que :

$(a + b + c)\,(a + b - c) = k\,ab$ **démontrer que :** $K \in \,]0\,,\,4[$, puis trouver la m(∠C) dans k = 1

Applications de la vie quotidienne :



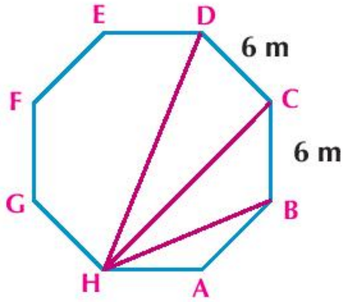
23 **Distances :** Karim prend son moto de la ville C pour aller à la ville A passant par la ville B.

Il roule à une vitesse uniforme 36 km/h. puis il rentre de la ville c vers la ville A á une vitesse uniforme 42 km/h.

Trouvez :

a La distance, en km, entre la ville C et la ville A.

b Le temps total, en minutes, du voyage.



24 **Planification urbaine :** Un ingénieur a dessiné le plan d'un bâtiment sous la forme d'un octogone régulier de 6 mètres de cotés, trouver les longueurs des diagonales $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$.

25 **Découvrir l'erreur :** ABC est un triangle dans lequel a = 7 cm, b = 10 cm, c = 5 cm et m($\angle$A) = 41,62°. Trouver m($\angle$B)

Solution de Ziad

$\because \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$

$\therefore \dfrac{10}{\sin B} = \dfrac{7}{\sin 41{,}62}$

$\therefore \sin B = \dfrac{10 \sin 41{,}62}{7} \simeq 0{,}9488$

$\therefore m(\angle B) = 71{,}59°$

Solution de Karim

$\because \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$

$\therefore \cos B = \dfrac{(7)^2 + (5)^2 - (10)^2}{2 \times 7 \times 5} \simeq -0{,}3714$

$\therefore m(\angle B) \simeq 111{,}8°$