القسم الأدبي

الرياضيات العامة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري

2030 EGYPT VISION

٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ ســيرافيم إلياس إسكندر

أ/مجدى عبد الفتاح الصفتى

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

مراجعة وتعديل

د/ محمد محي الدين عبد السلام د/مدحت عطية أ/ شريف عاطف البرهامي

إشراف علمي

أ/ منال عزقول

مستشار الرياضيات

إشراف تربوي

د/ أكرم حسن

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

المحتويات

الوحدة الثالثة: النهايات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

للدوال أنواع مختلفة وتطبيقات هامة فى مختلف مجالات الحياة، فى علم الفلك والطب والاقتصاد، وعلم الزلازل والجيولوجيا والديموغرافيا ، فنستخدم الدوال فى احتساب متغيرات الطقس والتنبؤ بالطقس المتوقع لفترة مقبلة ،أو تحديد موضع خلل فى عمل القلب باستخدام الرسوم البيانية التى يسجلها رسام القلب الكهربائى، أو تحقيق أفضل ربح بدراسة دالتى الربح والتكاليف، أو تأثير فئات العمر على تعداد السكان . كما تستخدم أيضًا فى الطب الرياضى لتحديد الوزن الأمثل [الوزن = الطول (سم) - ١٠٠] أو قياس نسبة الدهون فى الجسم ، ويكثر استخدامها فى الصناعة لدراسة تأثير المتغيرات المختلفة على جودة الانتاج.

ويعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسرى الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر فى الرياضيات والفيزياء، وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو ص = د(س) للدلالة على الدالة معتبرا أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س ، كما حول جميع النسب المثلثية التى نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. فى هذه الوحدة ستعرف صورًا مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانيًا مستخدمًا التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- يستنتج إطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- يحدد نوع الدوال الحقيقية من حيث كونها زوجية أو فردية
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة المقياس - الدالة التكعيبية - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات:
  د(أس ± ب)± جـ، أ د (س) ± ب
  على الدوال السابقة.
- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- يحل معادلات على الصورة:
  |أ س + ب | = جـ، |أ س + ب| = |ء س + جـ|
- يحل متباينات على الصورة:
  |أ س + ب | < جـ ، |أ س + ب| ≤ جـ ،
  |أ س + ب | > جـ ، |أ س + ب| ≥ جـ
- يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة نشاط.

المصطلحات الأساسية

- دالة حقيقية — *Real Function*
- مجال — *Domain*
- مجال مقابل — *Co–domain*
- مدى — *Range*
- خط رأسي — *Vertical Line*
- دالة متعددة التعريف — *Piecewise– Defind Function*
- دالة زوجية — *Even Function*
- دالة فردية — *Odd Function*
- إطراد دالة — *Monotony of a Function*
- دالة تزايدية — *Increasing Function*
- دالة تناقصية — *Decreasing Function*
- دالة ثابتة — *Constant Function*
- دالة كثيرة الحدود — *polynomial Function*
- دالة مقياس (قيمة مطلقة) — *Absolute Value Function*
- دالة كسرية — *Rational Function*
- خط تقارب — *Asymptote*
- تحويل — *Transformation*
- إزاحة (انتقال) — *Translation*
- انعكاس — *Reflection*
- تمدد — *Stretching*
- حل بياني — *Graphical Solution*

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.

الدرس (١ - ٢): اطراد الدوال.

الدرس (١ - ٣): الدوال الزوجية و الدوال الفردية.

الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.

الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

مخطط تنظيمى للوحدة

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Graph, GeoGebra)

الوحدة الأولى

١ - ١ الدوال الحقيقية

Real Functions

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

- دالة *Function*
- مجال *Domain*
- مجال مقابل *Co-domain*
- مدى *Range*
- مخطط سهمى *Arrow Diagram*
- مخطط بيانى *Cartesian Diagram*
- خط رأسى *Vertical line*
- دالة متعددة التعريف *Piecewise Function*
- قاعدة الدالة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تعريف ١

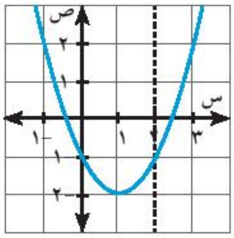
الدالة الحقيقية *Real Function*

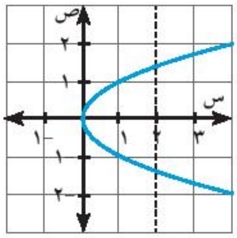
تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

تعلم

اختبار الخط الرأسى

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من س ← ص


دالة

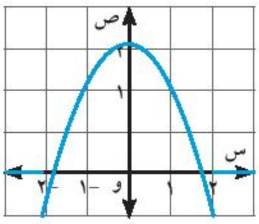

ليست دالة

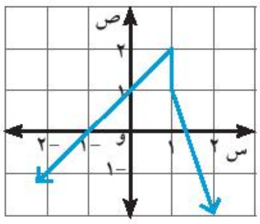
مثال

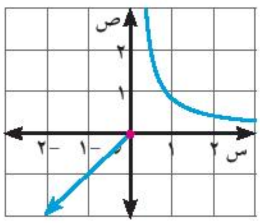
تحديد العلاقة التى تمثل دالة

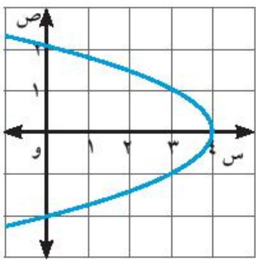
Identify the relation representing the function

١ فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)


شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة فى س

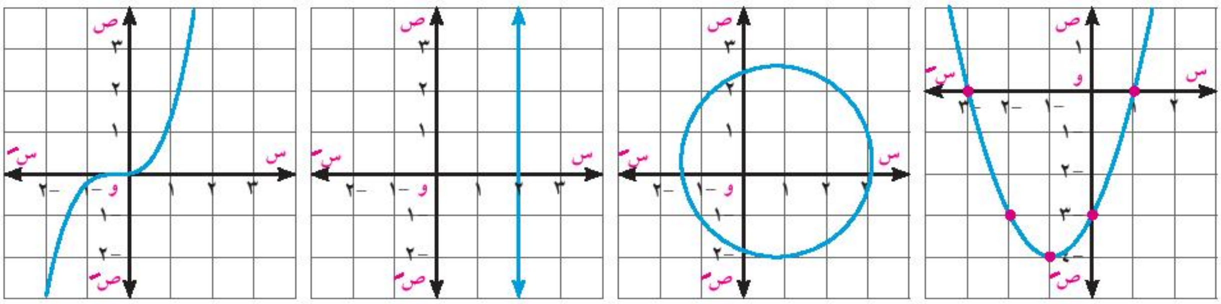
شكل (٢) لا يمثل دالة فى س لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى عدد غير منته من النقط.

شكل (٣) يمثل دالة فى س.

شكل (٤) لا يمثل دالة فى س لأن يوجد خط رأسي يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة.

حاول أن تحل

١ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من س ⟵ ص مع ذكر السبب.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

مثال

تعيين مدى الدالة بيانيًا

٢ إذا كانت د: [١، ٥] ⟵ ع حيث د(س) = س + ١

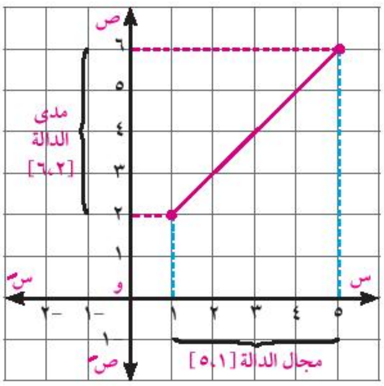
ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحل

الدالة د دالة خطية مجالها [١، ٥] تمثل بيانيًا بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين (١، د(١)) ، (٥، د(٥)) أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).

مدى الدالة د = [٢، ٦]

وهو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.



حاول أن تحل

٢ أ

إذا كانت د: [١ ، ∞[⟵ ع ، حيث د(س) =١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب

إذا كانت ر:]- ∞، -١[⟵ ع، حيث ر(س) = ١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الدالة متعددة التعريف: *Piecewise-Defined Functions*

تعلم

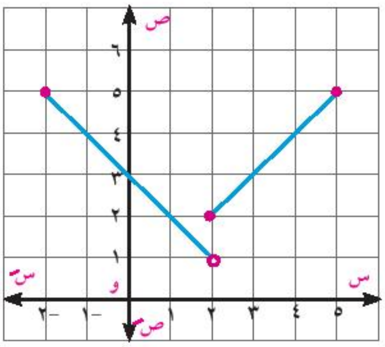
الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

(٣) إذا كانت د(س) = { ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢
س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ }

عين مجال الدالة د ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.



الحل

الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د١(س) = ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ أي على الفترة [-٢، ٢[

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين

(-٢، ٥)، (٢، ١) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ١)

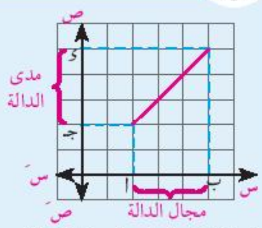
لأن ٢ ∉ [-٢، ٢[**كما فى الشكل المقابل.**

القاعدة الثانية : د٢(س) = س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ **أى** على الفترة [٢، ٥]

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين (٢، ٢)، (٥،٥)

ويكون مجال الدالة د = [-٢، ٢[∪ [٢، ٥] = [-٢، ٥]

لاحظ أن



في الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = [أ ، ب]

مدى الدالة = [جـ ، ى]

ويمكن من الرسم البيانى نستنتج أن:

مجال الدالة د = [-٢، ٥]

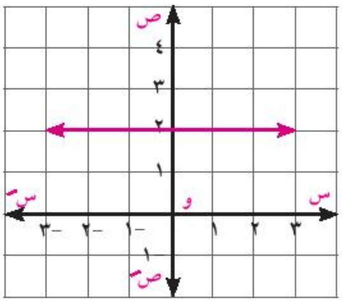
مدى الدالة د =]١، ٥]

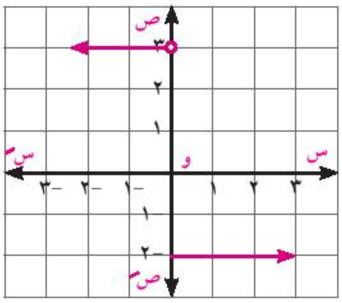
حاول أن تحل

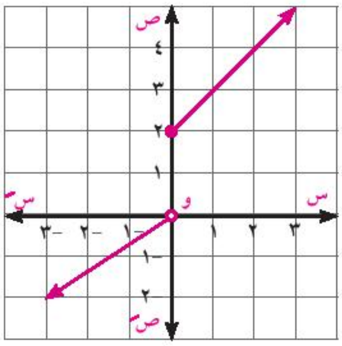
(٣) إذا كانت د(س) = { س - ١ عندما -٢ ≤ س < ٠
س + ١ عندما س ≥ ٠ }

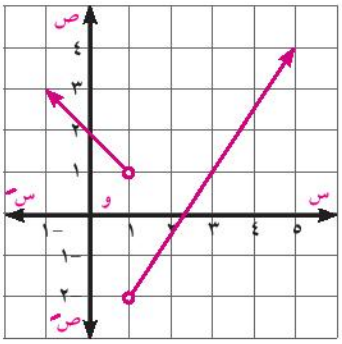
عين مجال الدالة ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.

(٤) فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

أ


ب


ج


د


تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

مثال — تعيين مجال الدالة *Determining Domains*

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ب $د_٢(س) = \sqrt{س - ٣}$

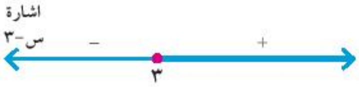
ج $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$

الحل

أ الدالة $د_١$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع $س^٢ - ٩ = ٠$ أى $س = \pm ٣$

وعليه يكون مجال الدالة $د_١$ هو ع - {-٣، ٣}

ب مجال الدالة $د_٢$ هو جميع قيم س التى تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعى موجبًا أو صفرًا ، أى قيم س التى تجعل $س - ٣ \geqslant ٠$.



$\because$ $س - ٣ \geqslant ٠$ $\therefore$ $س \geqslant ٣$ $\therefore$ مجال $د_٢$ = [٣ ، ∞[

ج $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$ ، دليل الجذر عدد فردى مجال $د_٣$ = ع

وعليه فإن مجال $د_٤$ هو]-∞، ٣[

لاحظ:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[ن]{ر(س)}$ حيث ن ∈ ص$^+$، ن > ١ ، ر (س) كثيرة حدود

أولا: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط ر(س) ⩾ ٠

حاول أن تحل

٥) حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) $د_١(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ - ٣س + ٢}$

ب) $د_٢(س) = \sqrt{س - ٢}$

ج) $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث $د(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٦س + ك}$ هو ع -{٣} أوجد قيمة ك.

نشاط

العمليات على الدوال *Operations on Functions*

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$، $م_٢$ على الترتيب ، فإن:

١ $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٢ $(د_١ . د_٢)(س) = د_١(س) . د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ . د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٣ $(\frac{د_١}{د_٢})(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq ٠$ مجال $(\frac{د_١}{د_٢})$ هو $(م_١ \cap م_٢) - ف(د_٢)$

حيث ف $(د_٢)$ مجموعة أصفار $د_٢$

نلاحظ أنه فى جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى $د_١$، $د_٢$ باستثناء القيم التى تجعل $د_٢(س) = ٠$ فى عملية القسمة.

إذا كان $د_١$: ع ⟵ ع حيث $د_١(س) = ٣س - ١$

$د_٢$: [-٢، ٣] ⟵ ع حث $د_٢(س) = س - ٣$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ) $(د_١ + د_٢)$ ب) $(د_١ - د_٢)$ ج) $(د_١ . د_٢)$ د) $(\frac{د_١}{د_٢})$

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن امكن ذلك - لكل من:

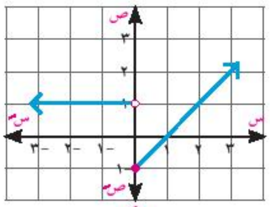
أ) $(د_١ + د_٢)(٣)$ ب) $(د_١ - د_٢)(-٣)$ ج) $(د_١ . د_٢)(-٢)$

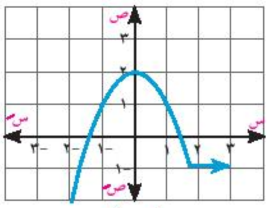
د) $(د_١ . د_٢)(٢)$ هـ) $(\frac{د_١}{د_٢})(٤)$ و) $(\frac{د_١}{د_٢})(-١)$

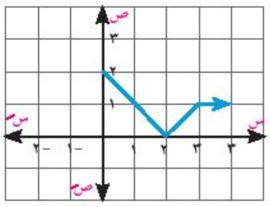
تمـــاريـن ١ – ١

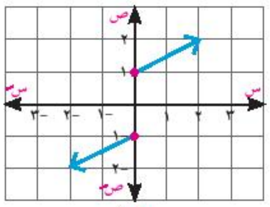
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) أى من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة فى س :


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

أجب عن مايأتى:

(٢) إذا كانت د: س ⟵ ع وكان س = {١، ٢، -٢، -٣}

أوجد مدى الدالة إذا كان د(س) = ٥س - ٣

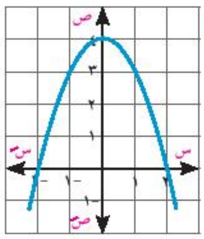
(٣) إذا كانت ر : {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ⟵ ص+ حيث ر(س) = ٤س - ٣

(أ) اكتب مدى الدالة

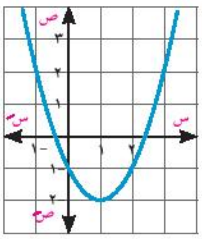
(ب) إذا كانت ر(ك) = ١٧ فأوجد قيمة ك

(٤) استنتج من الشكل البيانى مجال الدالة ومداها فى كل ممايأتى:

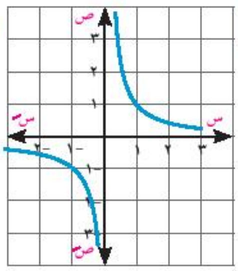
(أ)



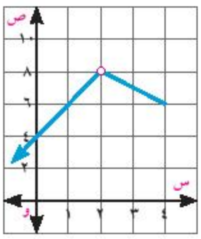
(ب)



(جـ)



(د)



(٥) حدد مجال الدالة د حيث د(س) = { س - ١ عندما ٢ < س ≤ ٤ ، -١ عندما -٢ ≤ س ≤ ٢

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

(٦) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د(س) = { س + ٣ عندما س ≥ ٢ ، ٢س - ١ عندما س < ٢

ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

(٧) إذا كانت د(س) = { ٢س + ٣ عندما -٢ ≤ س < ٠ ، ١ - س عندما ٠ ≤ س ≤ ٤

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٨ إذا كانت د(س) = { س + ١ عندما -٣ ≤ س < ٠ ، س + ٢ عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ }

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٩ إذا كان: د(س) = { -٤س + ٣ عندما س < ٣ ، - $س^٣$ عندما ٣ ≤ س ≤ ٨ ، ٣$س^٢$ + ١ عندما س > ٨ }

أوجد:

أ د(٢) ب د(٣) ج د(١٠)

١٠ الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

د(س) = { $\frac{٥}{٢}$ س عندما ٠ ≤ س ≤ ٥٠٠٠ ، ٢س + ٢٥٠٠ عندما ٥٠٠٠ < س ≤ ١٥٠٠٠ ، $\frac{٣}{٢}$س + ١٠٠٠٠ عندما ١٥٠٠٠ < س ≤ ٦٠٠٠٠ }

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠) ب د(١٠٠٠٠) ج د(٥٠٠٠٠)

١١ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ د(س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ب د(س) = $\frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

ج د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ د د(س) = $\sqrt{٤ - س}$

١ - ٢ اطراد الدوال

Monotonicity of Functions

سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (*Geogebra*) فى رسم منحنى دالة

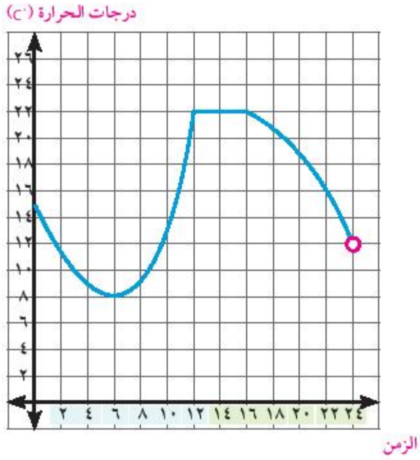
المصطلحات الأساسية

- اطراد. *Monotony*
- دالة تزايدية. *Increasing Function*
- دالة تناقصية. *Decreasing Function*
- دالة ثابتة. *Constant Function*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش



يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة فى أحد الأيام ، لاحظ التغير فى درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ) فترات تناقص درجات الحرارة.

ب) فترات تزايد درجات الحرارة

جـ) فترات ثبات درجات الحرارة.

تساعدنا صفات منحنيات الدوال فى معرفة سلوك الدالة د و تحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

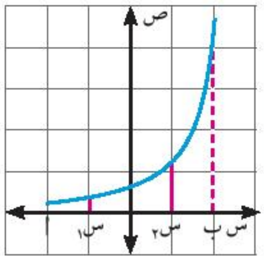
تعلم

تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها **تزايدية** فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان لكل $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∈]أ ، ب[**حيث:** $س_{٢} > س_{١}$

فإن: $د(س_{٢}) > د(س_{١})$

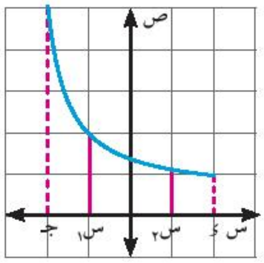


تناقص الدالة:

يقال للدالة د أنها **تناقصية** فى الفترة]جـ ، ء[

إذا كان لكل $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∈] جـ ، ء[**حيث:** $س_{٢} > س_{١}$

فإن: $د(س_{٢}) < د(س_{١})$

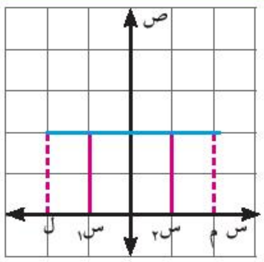


ثبوت الدالة:

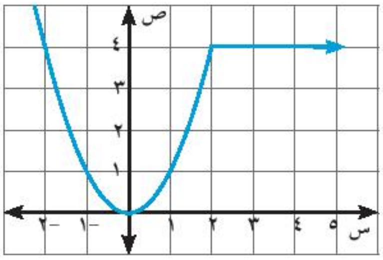
يقال للدالة د أنها **ثابتة** فى الفترة]ل ، م[

إذا كان لكل $س_{١}$، $س_{٢}$ ∈] ل ، م[**حيث:** $س_{٢} > س_{١}$

فإن: $د(س_{٢}) = د(س_{١})$



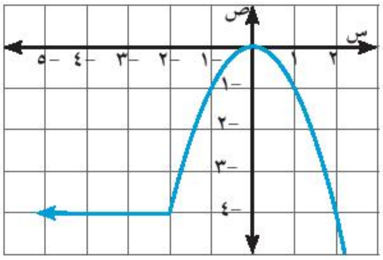
مثال



١ ابحث اطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.

الحل

- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة]٢،∞ [



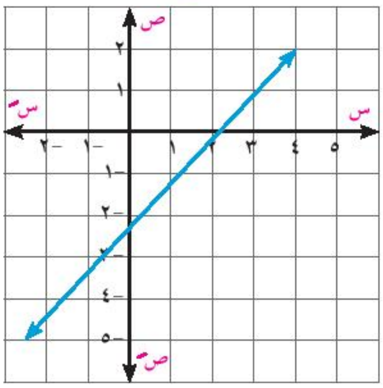
حاول أن تحل

١ فى الشكل المقابل:
ابحث الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التى تكون فيها تناقصية، والفترات التى تكون فيها ثابتة.

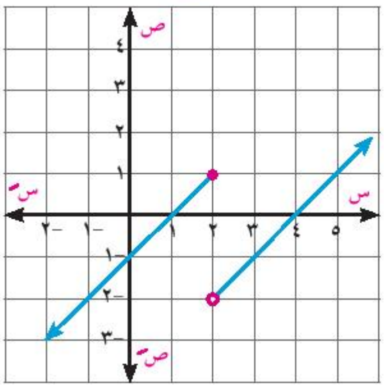
مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ⟵ ص ، استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة، وابحث اطرادها.

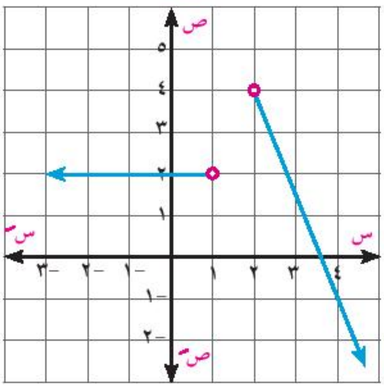
أ



ب



ج



الحل

أ مجال د = ع =]-∞، ∞[، مدى د =]-∞ ،∞ [الدالة تزايدية فى]-∞ ، ∞[

ب مجال د =]-∞ ، ٢] ∪]٢،∞ [=]-∞، ∞ [

الدالة تزايدية فى]-∞، ٢[، تزايدية أيضًا فى] ٢ ،∞ [، مدى الدالة = ع

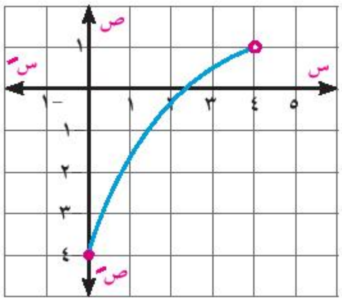
ج مجال د=]-∞ ، ١[∪] ٢،∞ [، مدى د =]-∞ ، ٤[

الدالة ثابتة فى]-∞ ، ١[، وتناقصية فى] ٢ ،∞ [

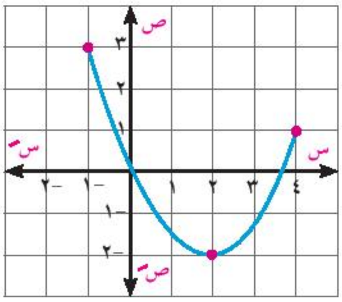
حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

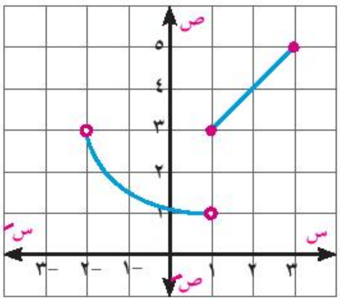
أ



ب

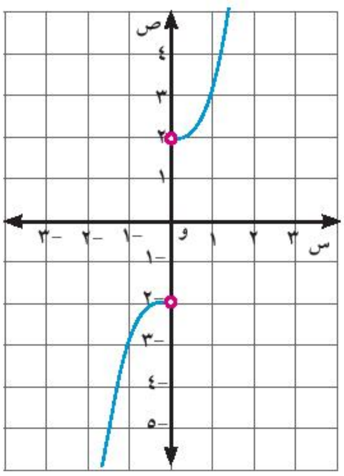


ج

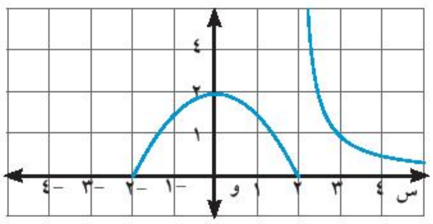


تمارين ١ - ٢

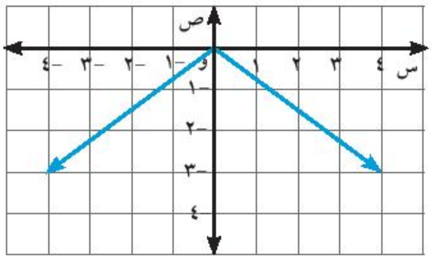
١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الاطراد:



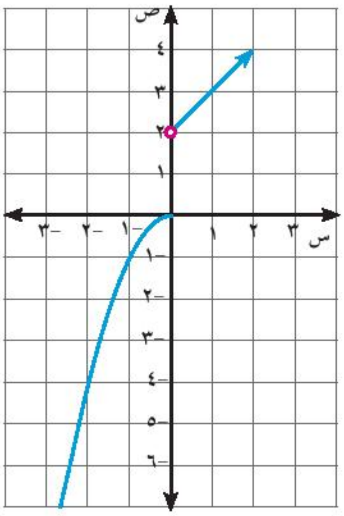
شكل (١)



شكل (٢)



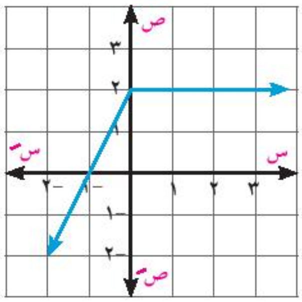
شكل (٣)



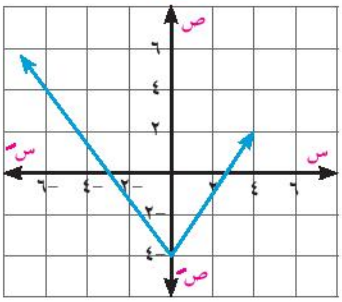
شكل (٤)

(٢) حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية، ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

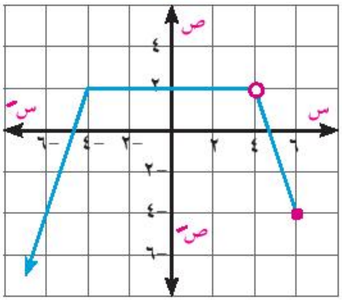
أ



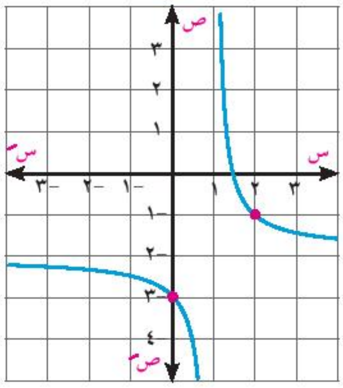
ب



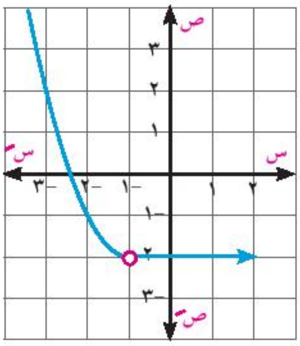
ج



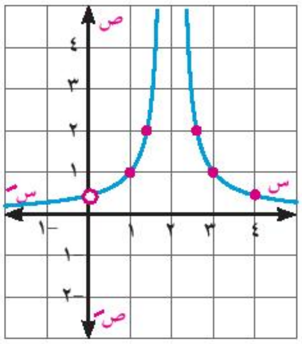
د



هـ



و



(٣) إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح

$$د(س) = \begin{cases} \text{٤ - س} & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ١ \\ \text{س} & \text{عندما } ١ \leqslant س \leqslant ٦ \end{cases}$$

ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

١ - ٣ الدوال الزوجية والدوال الفردية

Even and Odd Functions

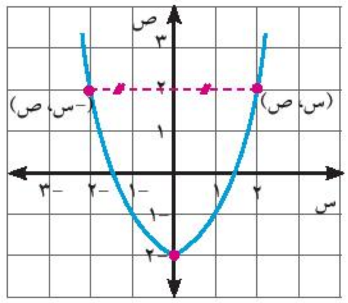
قد يتميز الشكل البيانى للدالة د حيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، و يمكن استخدامها فى دراسة الدوال وتطبيقاتها، وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

سوف تتعلم

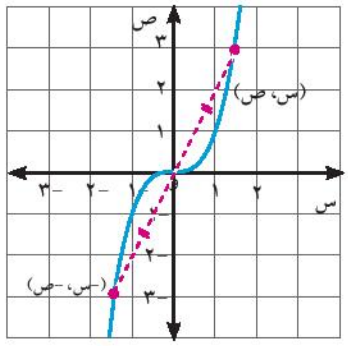
- التماثل فى منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل:



التماثل حول محور الصادات
شكل (١)



التماثل حول محور نقطة الأصل.
شكل (٢)

المصطلحات الأساسية

- تماثل *Symmetry*
- دالة زوجية *Even Function*
- دالة فردية *Odd Function*

فى شكل (١):

تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

الأدوات المستخدمة

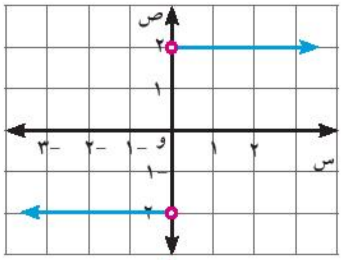
- آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

فى شكل (٢):

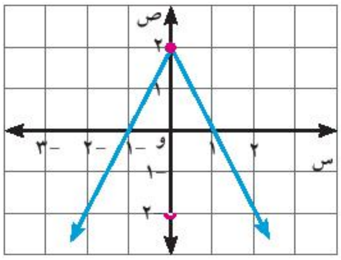
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.

حاول أن تحل

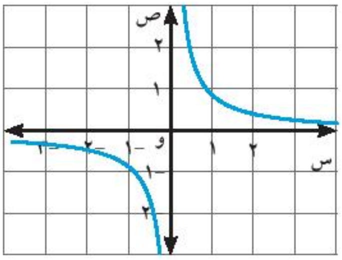
(١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



(أ)



(ب)



(جـ)

تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ **فسر إجابتك.**

الدوال الزوجية والدوال الفردية: *Even and Odd Functions*

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: سـ ⟵ صـ إنها دالة زوجية إذا كان د (- س) = د (س)، لكل س ، -س ∈ سـ
ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: سـ ⟵ صـ إنها دالة فردية إذا كان د (- س) = - د (س)، لكل س ، -س ∈ سـ
ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، و إذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

مثال

(١) ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

(أ) د (س) = س^{٢} (ب) د(س) = س^{٣} (جـ) د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ (د) د(س) = جتا س

الحل

(أ) د (س) = س^{٢} ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س)= (-س)^{٢} = س^{٢}

أي أن: د(-س) = د(س) ∴ د دالة زوجية

(ب) د(س) = س^{٣} ، مجال د = ع

∵ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س) = (-س)^{٣} = - س^{٣}

أي أن: د(-س)= -د(س) ∴ د دالة فردية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د: ع ⟵ ع ، د(س) = أ س^{ن} حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ صـ$^{+}$ دالة القوى ،
وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجي ، فردية عندما ن عدد فردي.

تذكر أن

جا (-س) = - جا س
جتا (-س) = جتا س
ظا (-س) = - ظا س

(ج) د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ ، مجال د = [-٣ ، ∞ [

لاحظ أن ٤ ∈ [-٣ ، ∞ [بينما -٤ ∉ [-٣ ، ∞]

` الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

(د) د(س) = جتا س ، مجال د = ع

` لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = جتا (-س) = جتا س

أي أن: د(-س) = د(س) ` د دالة زوجية

حاول أن تحل

(٢) ابحث نوع الدالة د فى كل ممايأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(أ) د (س) = جا س
(ب) د (س) = س^{٢} + جتا س
(ج) د(س) = س^{٣} - جا س
(د) د(س) = س^{٢} جتا س
(هـ) د(س) = س^{٣} جا س
(و) د(س) = س^{٣} جتا س
(ز) د(س) = س^{٣} + س^{٢}
(ح) د(س) = جا س + حتا س
(ط) د(س) = جاس جتا س

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية ، وكان كل من: ر$_{١}$، ر$_{٢}$ دالة فردية ، فإن:

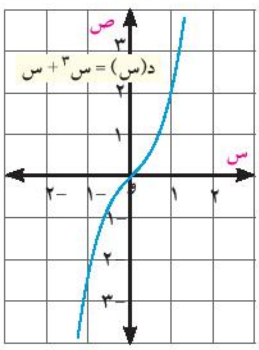
١) د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية
٢) ر$_{١}$+ ر$_{٢}$ دالة فردية.
٣) د$_{١}$ × د$_{٢}$ دالة زوجية
٤) ر$_{١}$× ر$_{٢}$ دالة زوجية.
٥) د$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة فردية
٦) د$_{١}$+ ر$_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك فى بند حاول أن تحل (٢)

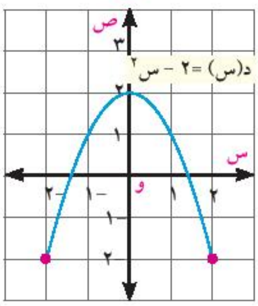
مثال

(٢) يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.

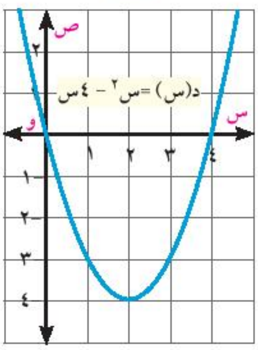
(أ)



(ب)



(ج)



الحل

(أ) د (س) = س^{٣} + س، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ح، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أى أن الدالة فردية

∵ كل س ، -س ∈ ح   ∴ د (-س) = (- س)^{٣} + (- س)

بالتبسيط: د (-س) = - س^{٣} - س

نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا   د (-س) = - (س^{٣} + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.

(ب) د (س) = ٢ - س^{٢} ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية

∵ كل س ، -س∈ [-٢، ٢]   ∴ د (-س) = ٢ - (-س)^{٢}

بالتبسيط   د (-س) = ٢ - س^{٢}

د (-س) = د (س)   **أى أن** الدالة زوجية

(ج) د (س) = س^{٢} - ٤س ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د= ح ، ومنحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛

أى أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∵ كل س ، -س ∈ ح   ∴ د (-س) = (-س)^{٢} - ٤ (-س)

بالتبسيط   د (-س) = س^{٢} + ٤س ≠ د(س) ∴ د ليست زوجية

ولكن   - د (س) = - س^{٢} + ٤ س

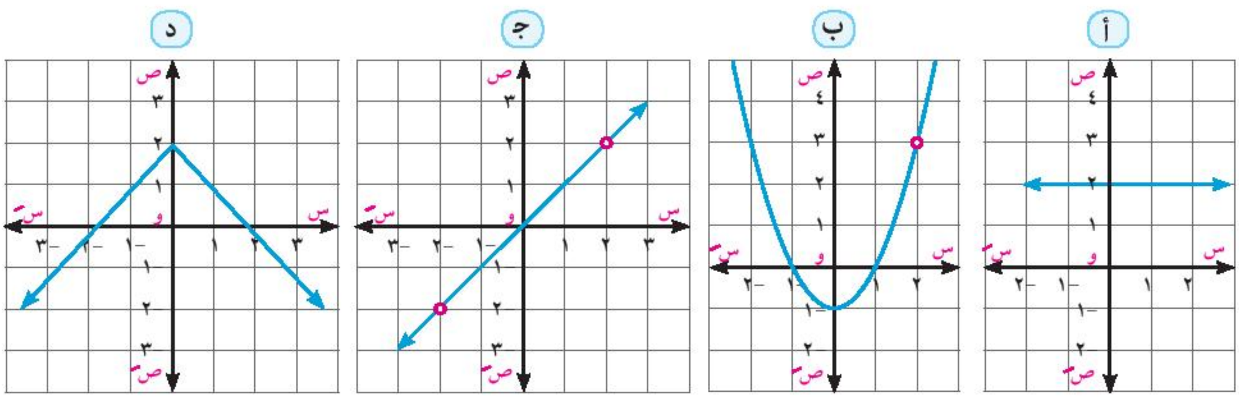
لذلك فإن   د (-س) ≠ - د (س) ∴ د ليست فردية

أى أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

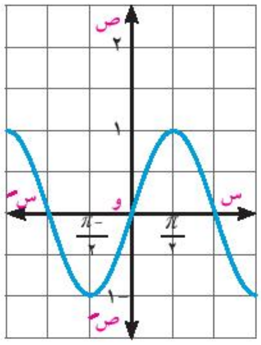
حاول أن تحل

(٣) اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

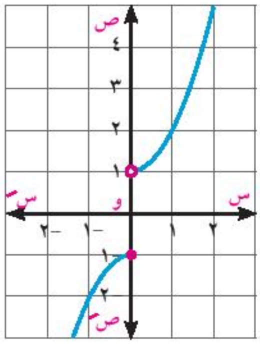
(أ) (ب) (ج) (د)



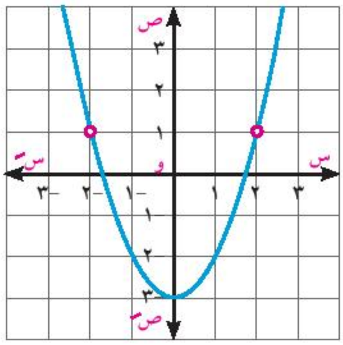
ه



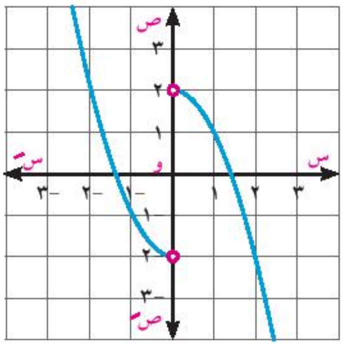
و



ز

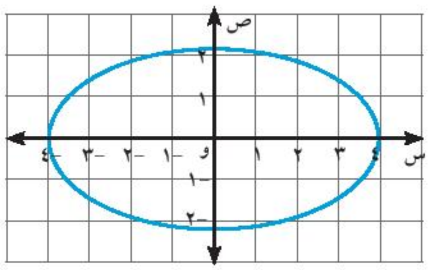


ح

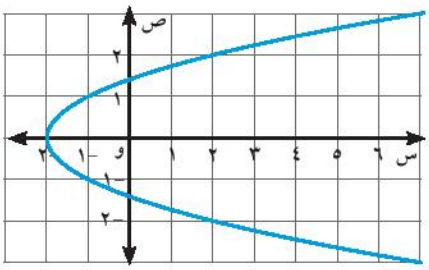


تمـــارين ١ – ٣

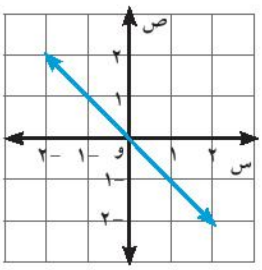
(١) اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسِّر إجابتك.



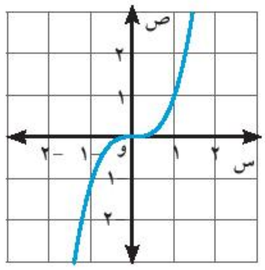
شكل (١)



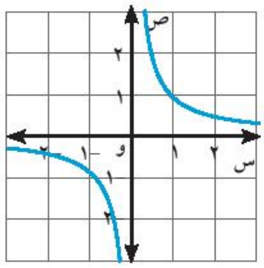
شكل (٢)



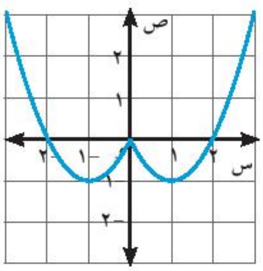
شكل (٣)



شكل (٤)

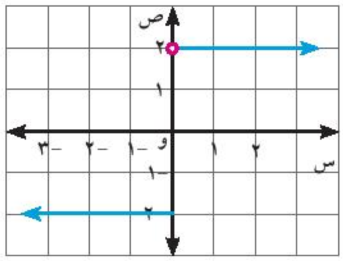


شكل (٥)

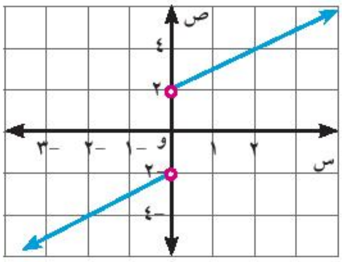


شكل (٦)

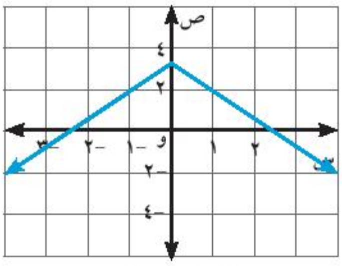
(٢) أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



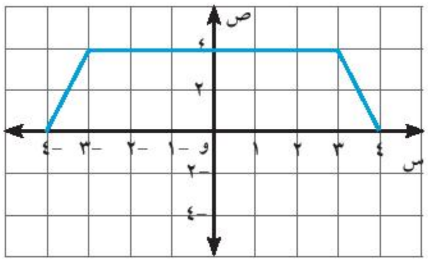
شكل (أ)



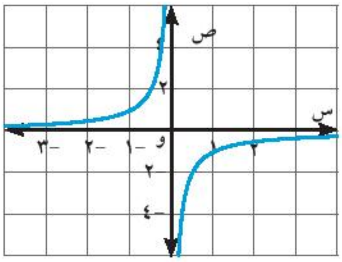
شكل (ب)



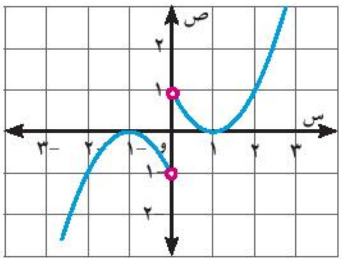
شكل (جـ)



شكل (د)



شكل (هـ)



شكل (و)

٣ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ $د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١$ ب $د(س) = ٣ س - ٤ س^{٣}$ جـ $د(س) = ٥$

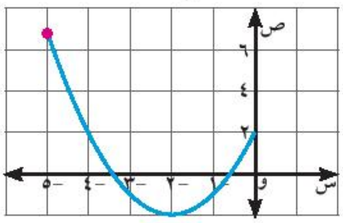
د $د(س) = س^{٢} - ٣س$ هـ $د(س) = \frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$ و $د(س) = س$ حتا س

٤ إذا كانت $د_{١}$، $د_{٢}$، $د_{٣}$ دوال حقيقية حيث $د_{١}(س) = س^{٥}$، $د_{٢}(س) =$ حاس، $د_{٣}(س) = ٥س^{٢}$،

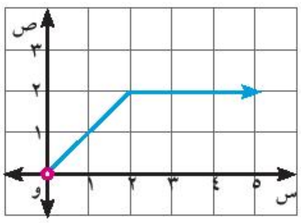
فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك.

أ $د_{١} + د_{٢}$ ب $د_{١} + د_{٣}$ جـ $د_{١} \times د_{٢}$ د $د_{٣} \times د_{٢}$

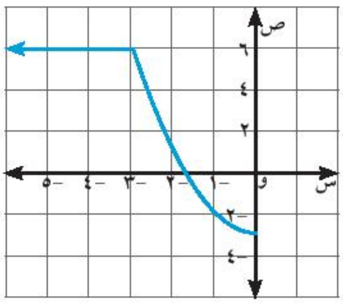
٥ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



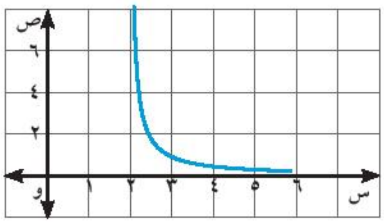
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة ثم ابحث اطرادها.

٤ - ١ التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometrical Transformations

الدالة كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

$$د(س) = أ_{٠} + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + ... + أ_{ن}س^{ن}$$

حيث: $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ،...... ، $أ_{ن} \in ع$ ، $أ_{ن} \neq ٠$ ، $ن \in ط$

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها) ، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن ، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

لاحظ:

١- إذا كان د(س) = $أ_{٠}$ ، $أ_{٠} \neq ٠$ فإن د تسمى كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالاً خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالاً تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالاً تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

رسم منحنيات الدوال *Graphs of Functions*

أولاً: دوال كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

تعلم

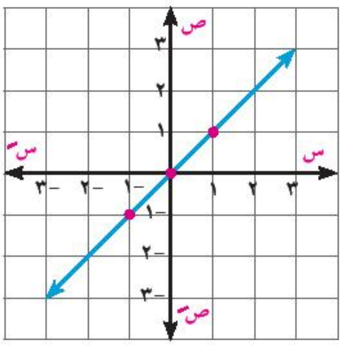
فيما يلى التمثيل البيانى لبعض دوال كثيرات الحدود::

١) د دالة خطية أبسط صورة لها هى :

$$\boxed{د(س) = س}$$

وهى دالة د ترفق العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١

(**تحقق من:** مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)



سوف تتعلم

- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية - الدالة التربيعية - الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم المنحنيات

ص = د(س) + أ

ص = د(س + أ)

ص = د(س + أ) + ب

ص = - د(س)

ص = أ د (س)

ص = أ د(س +ب) + جـ

- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

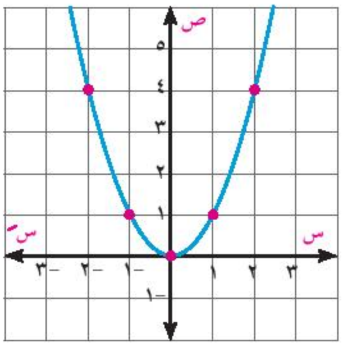
- تحويل. *Transformation*
- انتقال. *Translation*
- انعكاس. *Reflection*
- رأسى *Vertical*
- أفقى *Horizontal*
- خط تقارب *Asymptotes*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

٢) د دالة تربيعية ، أبسط صورة لها هى :

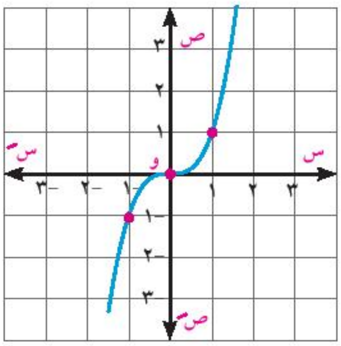
$$\boxed{د(س) = س^٢}$$



وهى دالة ترفق العدد بمربعه، و يمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات ، ونقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)
(**تحقق من**: مدى د = ع ، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠،∞ [)

٣) **د دالة تكعيبية ، أبسط صورة لها هى :**

$$\boxed{د(س) = س^٣}$$



وهى دالة ترفق العدد بمكعبه، و يمثلها منحنى نقطة تماثله هى (٠، ٠)
(**تحقق من**: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)

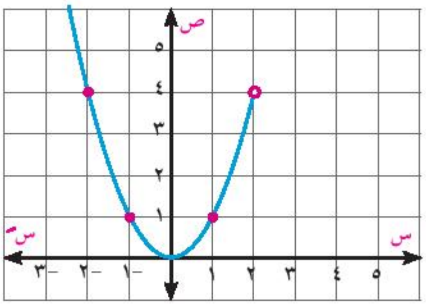
مثال

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

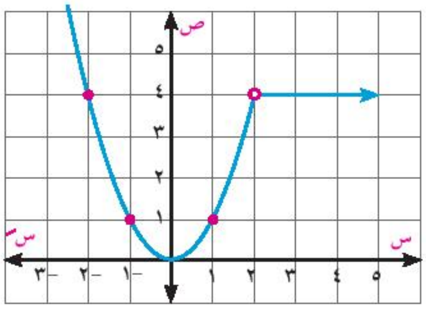
الحل

١) عندما س < ٢ ، د(س) = $س^٢$
نرسم د(س) = $س^٢$ لكل س]- ∞ ، ٢[
مع وضع **دائرة مفرغة** عند النقطة **(٢، ٤)** كما فى **شكل (١)**



شكل (١)

٢) عندما س > ٢ ؛ د(س) = ٤
ترسم الدالة الثابتة د(س) = ٤ لكل س]٢،∞ [
على نفس الشكل البيانى كما فى **شكل (٢)**
لاحظ أن مجال الدالة د = ع - {٢} ، ومدى د = [٠ ، ∞[



شكل (٢)

حاول أن تحل

(١) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{عندما س} < ٠ \\ \text{س} & \text{عندما س} \geqslant ٠ \end{cases}$$

ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

تعلم

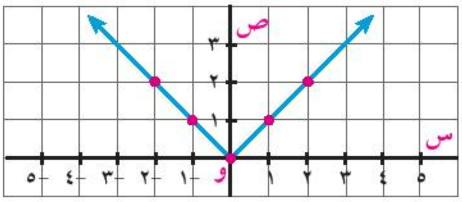
دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة): *The Absolute Value Function*

أبسط صورة لدالة المقياس هى

$$\boxed{\text{د(س)} = |\text{س}| \text{ ، س} \in \text{ح}}$$

وتعرف كما يلي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} & \text{عندما س} \geqslant ٠ \\ -\text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$$



لاحظ أن: $|-٣| = |٣| = ٣$ ، $|٠| = ٠$ ، $\sqrt{(-٢)^{٢}} = \sqrt{٢^{٢}} = ٢$

أى أن: $|\text{س}| \geqslant ٠$ ، $|-\text{س}| = |\text{س}|$ ، $\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}|$

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = -١

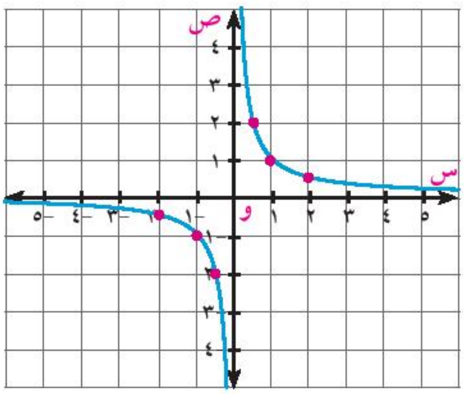
(**تحقق من:** مدى د = [٠، ∞[، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠،∞[ )

تعلم

الدالة الكسرية *Rational Function*

أبسط صورة للدالة الكسرية هى:

$$\boxed{\text{د(س)} = \frac{١}{\text{س}} \text{ ، س} \in \text{ح} - \{٠\}}$$



وهى دالة ترفق العدد بمعكوسه الضربى ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله (٠، ٠) ويتكون من جزئين أحدهما يقع فى الربع الأول والآخريقع فى الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما (س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحنى)

(**تحقق من:** مدى د = ح - {٠}، د فردية ، د **تناقصية** فى]-∞، ٠[، **وتناقصية** أيضًا فى]٠،∞[)

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال *Transformations of Graphs*

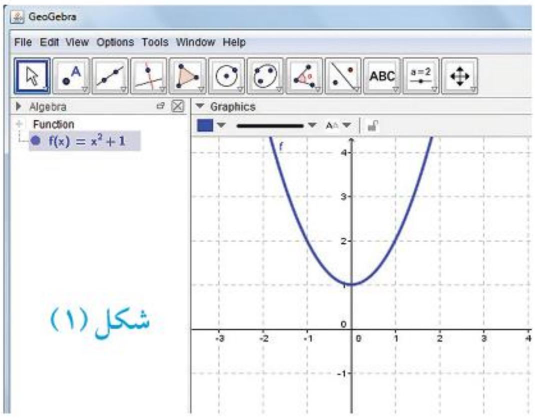
أولاً: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة *Vertical Translation*

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} باستخدام برنامج *Geogebra*

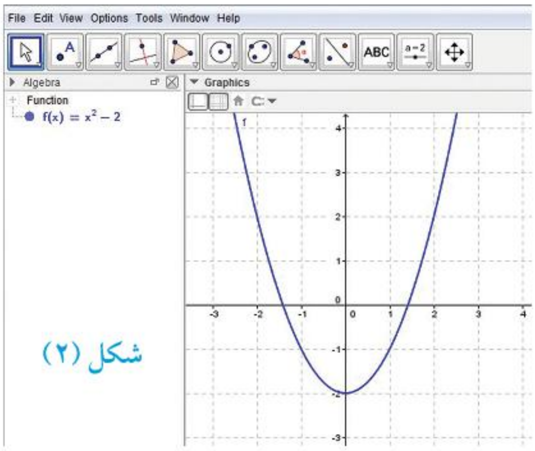
٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًا لأعلى وحدة واحدة، ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} + ١ كما فى **شكل (١)**.



شكل (١)

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك فى كل مرة.

٤) اسحب منحنى د(س) = س^{٢} وحدتين رأسيًا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} - ٢ كما فى **شكل (٢)**



شكل (٢)

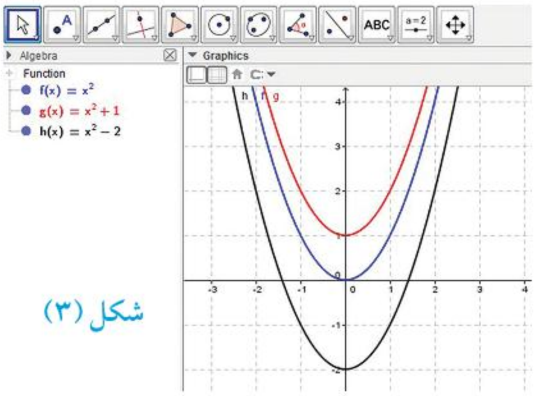
فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^{٢} - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^{٢}؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٢} + ١ ، ق (س) = س^{٢} - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.



شكل (٣)

تفكير ناقد: باستخدام منحنى د(س) = س^{٣} بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^{٣} + ٤

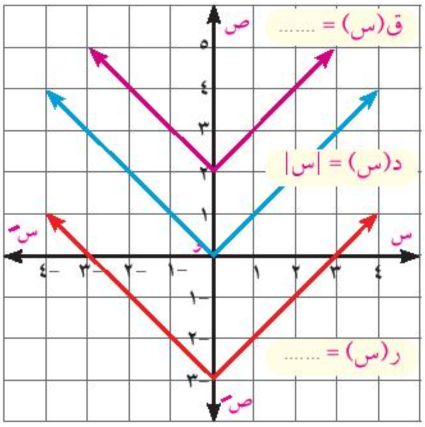
ب) ق(س) = س^{٣} - ٥

تعلم

رسم المنحنى ص = د(س) + ا

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + ا هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها ا من الوحدات فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ ، عندما ا > ٠ ، و فى اتجاه $\overleftarrow{و ص'}$ عندما ا < ٠ .

مثال



(٢) يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر ، ق، حيث كل من ر ، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية اكتب قاعدة كل من ر ، ق

الحل

∵ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بازاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص َ}}$

∴ ر(س) = د(س) - ٣

∵ د(س) = |س| ∴ ر(س) = |س| - ٣

، ∵ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بازاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

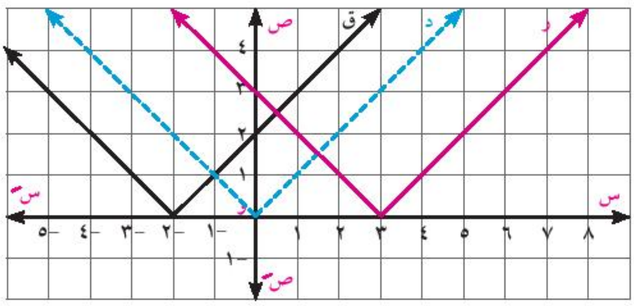
∴ ق(س) = د(س) + ٢ ∵ د(س) = |س| ∴ ق (س) = |س| + ٢

ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة *Horizontal Translation*

تعلم

رسم المنحنى ص = د (س + ا)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى، ص = د(س + ا) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها ا من الوحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما يكون ا > ٠، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س َ}}$ عندما يكون ا < ٠ .



لاحظ: فى الشكل المقابل: د(س) =|س|

١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س َ}}$

∴ ق(س) = |س + ٢| ، نقطة بدد الشعاعين (-٢ ، ٠)

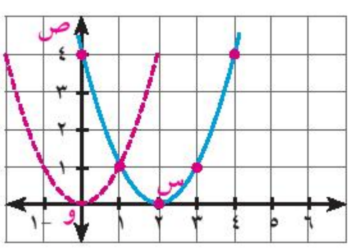
مثال

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

(أ) ر(س) = $(س - ٢)^{٢}$ (ب) ع (س) = $(س + ٣)^{٢}$

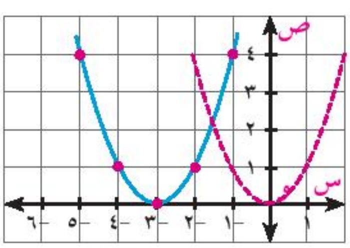
الحل

أ



منحنى ر (س) = (س - ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٢،٠).

ب



منحنى ع (س) = (س+٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣ ، ٠).

حاول أن تحل

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س + ٤)^{٢} ب ع (س) = (س – ٣)^{٢}

تفكير ناقد: إذا كان د(س) = س^{٢} ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = (س - ٣)^{٢} + ٢

رسم المنحنى ص = د(س + أ) + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د(س + أ) + ب هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات (فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$ عندما أ < ٠ ، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما أ > ٠) ، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات (فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$ عندما ب > ٠ ، وفي اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ عندما ب < ٠)

حاول أن تحل

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س + ٢)^{٢} – ٤ ب ع (س) = (٣ - س)^{٢} – ١

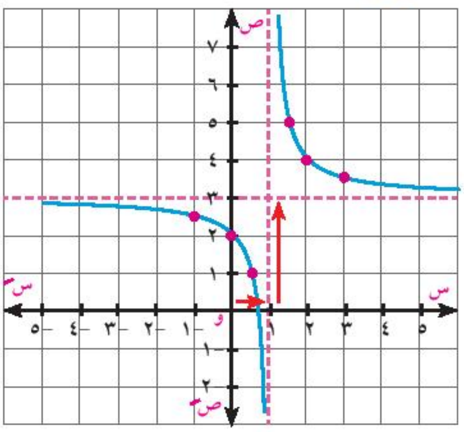
مثال

تطبيق التحويلات الهندسية على رسم منحنيات الدوال

(٤) ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها:

الحل



منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$ (أ = -١ < ٠) ، ثم إزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$ وتكون نقطة تماثل منحنى الدالة ر هى النقطة (١، ٣) ، مدى ر = ح - {٣}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية فى] - ∞، ١[، وتناقصيه أيضًا فى] ١ ، ∞ [

تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

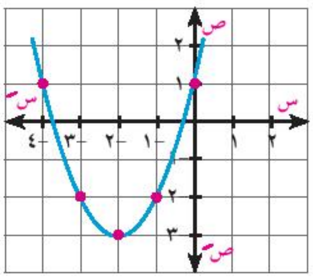
حاول أن تحل

(٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، لتمثيل كل من:

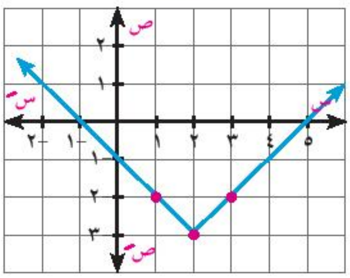
(أ) ر(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ + ١ (ب) ق (س) = $\frac{٢ س - ٣}{س - ٢}$

(٥) اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًّا بالأشكال التالية :

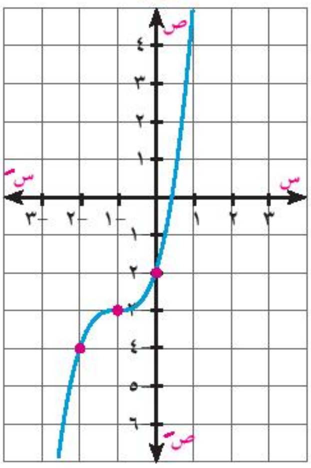
أ



ب



جـ

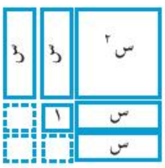


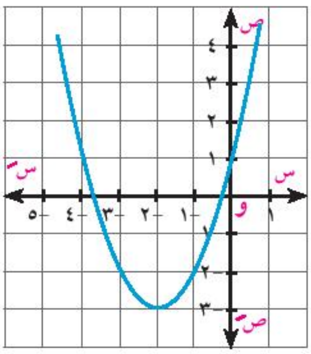
ملاحظة : يمكن رسم منحنى د(س) = س^{٢} + ٤س + ١ باستخدام الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية للمنحنى ر(س) = س^{٢} كمايلى.

د(س) = س^{٢} + ٤س + ١ باكمال المربع

= (س^{٢} + ٤س + ٤) - ٣

= (س + ٢)^{٢} - ٣



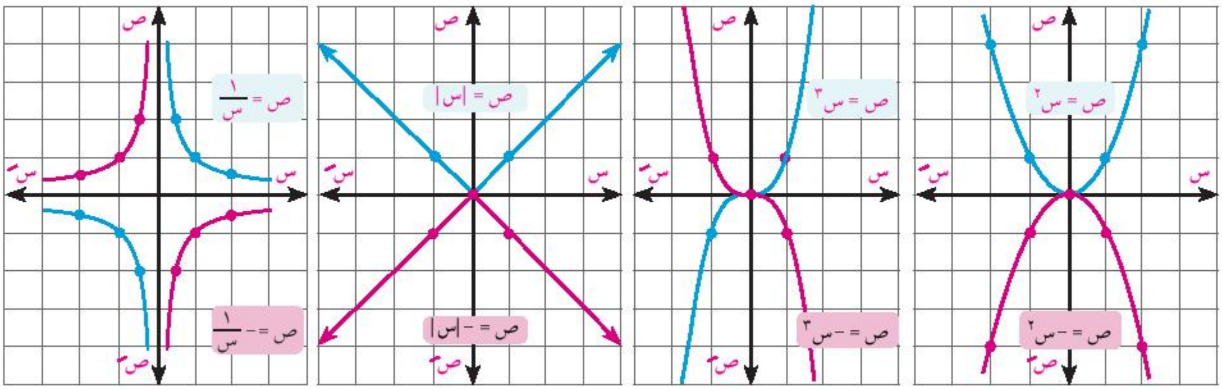


أى أن منحنى الدالة د (المعطاة) هو نفس منحنى الدالة ر حيث ر(س) = س^{٢} بازاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، ثم ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ و يمثله الرسم المقابل.

تطبيق: ارسم منحنى د(س) = س^{٢} + ٦س + ٧ باستخدام الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية لمنحنى ر(س) = س^{٢} ثم ابحث اطراد الدالة د.

ثالثًا: انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

تبين الأشكال التالية انعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

تعلم

رسم المنحنى ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات

مثال

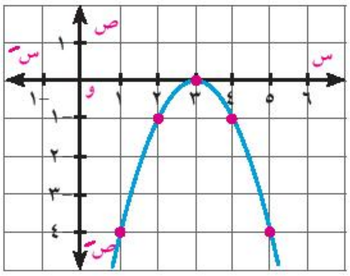
تطبيق التحويلات الهندسية على رسم المنحنيات

٥ باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

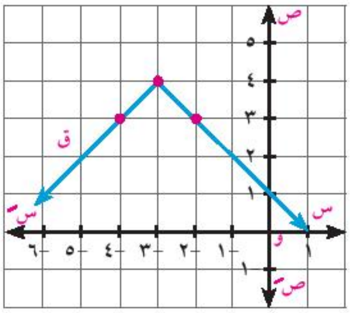
أ ر(س) = -(س - ٣)^{٢} ب ق (س) = ٤ - |س+٣|

ج ع (س) = ٢ - $\frac{١}{س-٣}$

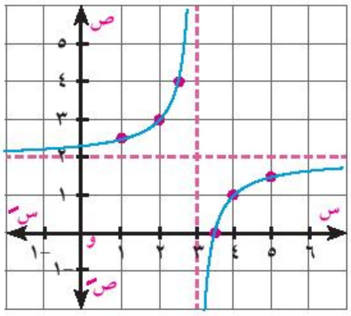
الحل



أ منحنى ر(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) = س^{٢} فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.



ب منحنى ق(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) = |س| فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}^-}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هى النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



(ج) منحنى ع(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) = $\frac{١}{س}$ فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هى (٣، ٢)

حاول أن تحل

(٦) فى كل ممايأتى ارسم منحنى الدالة ر حيث:

(أ) ر(س) = ٣ - (س + ١)^{٢} (ب) ر(س) = - (س - ٣)^{٣} (ج) ر(س) = ٣- -|س - ٥|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحدالبرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

تمـاريـن ١ – ٤

(١) **ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها**

(أ) د(س) = { |س| عندما س ≤ ٠ ، س^{٢} عندما س > ٠ }

(ب) د(س) = { ٤ عندما س < -٢ ، س^{٢} عندما س ≥ -٢ }

(ج) د(س) = { س^{٣} عندما س < ١ ، ١ عندما س > ١ }

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٢) منحنى ر(س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س^{٢} بازاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه:

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$ (ج) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

(٣) منحنى ر(س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د(س) = |س| بازاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه:

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$ (ج) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

(٤) نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = (٢ - س)^{٢} + ٣ هي:

(أ) (٢، ٣) (ب) (٢، -٣) (ج) (-٢، ٣) (د) (-٢، -٣)

٥ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س)= ٢ - (س+١)^{٣} هي :

أ (١، ٢)   ب (-١، ٢)   جـ (٢، ١)   د (٢، -١)

٦ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هي:

أ (٣، -٤)   ب (-٣، -٤)   جـ (٣، ٤)   د (-٣، ٤)

أجب عن مايأتى:

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتي بيانيًّا.

أ د$_{١}$(س) = س^{٢} – ٤   ب د$_{٢}$(س) = (س – ٣)^{٢} جـ د$_{٣}$(س) = (س – ١)^{٢} - ٢

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل مايأتى بيانيًّا:

أ د$_{١}$ (س) = |س| + ١   ب د$_{٢}$(س) = |س + ٢| جـ د$_{٣}$(س) = |س – ٣| - ٢

◄ **ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.**

٩ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣}. لتمثيل ما يأتي بيانيًّا:

أ د$_{١}$(س) = د(س) – ٣   ب د$_{٢}$(س) = د (س – ٢)   جـ د$_{٣}$(س) = د(س + ٣) + ٢

◄ **ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.**

١٠ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ ق(س) = د(س – ٣)   ب ق(س) = د(س) + ٢   جـ ق(س) = د(س - ٢) + ٢

١١ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتي بيانيًّا:

أ د$_{١}$(س) = ٤ - س^{٢} ب د$_{٢}$(س) = – (س – ٣)^{٢} جـ د$_{٣}$(س) = ٢- (س +٣)^{٢}

١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانيًا
- حل معادلات المقياس جبريًا
- حل متباينات المقياس بيانيًا.
- حل متباينات المقياس جبريًا
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية

- معادلة. Equation
- متباينة. Inequality
- حل بياني. Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

أولًا: حل المعادلات

فكر و ناقش

مثل بيانيًا فى شكل واحد منحنيى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة ثابتة.

لاحظ الرسم ثم اجب:

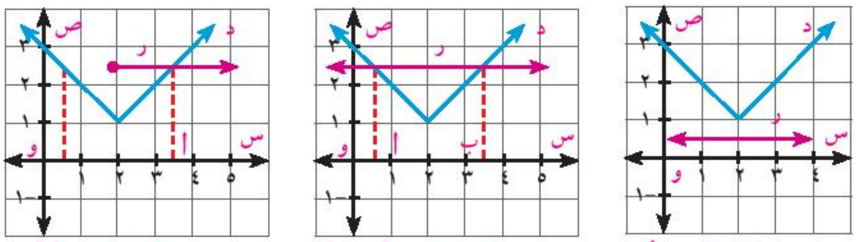
(أ) ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنيى الدالتين معًا؟

(ب) إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟

لاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين.

٢) لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:

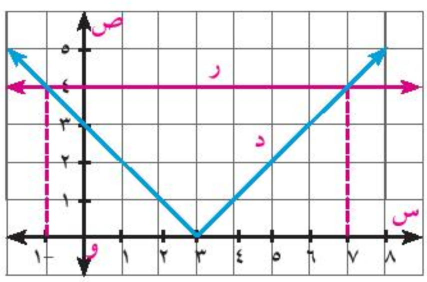


مجموعة الحل = {أ} ‏‏ ‏ مجموعة الحل = {أ، ب} ‏ ‏ مجموعة الحل = ϕ

حل المعادلة: |أ س + ب| = جـ

مثال

(١) حل المعادلة: |س - ٣| = ٤ بيانيًا وجبريا.



الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٤

١) نرسم منحنى الدالة د:د(س) = |س -٣| بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

٢) على نفس الشكل نرسم ر(س) = ٤ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠، ٤)

∴ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (-١، ٤) ، (٧، ٤)

` مجموعة حل المعادلة هى: {-١ ، ٧}

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: د(س) = $\begin{cases} \text{س - ٣} & \text{عندما س} \geqslant \text{٣} \\ \text{- س + ٣} & \text{عندما س} < \text{٣} \end{cases}$

عندما س ⩾ ٣ : س − ٣ = ٤ أى أن: س = ٧ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : − س + ٣ = ٤ أى أن: س = -١ ∈]- ∞ ، ٣[

مجموعة حل المعادلة هى: {− ١ ، ٧} وهذا يطابق الحل البياني.

حاول أن تحل

١ حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |س| - ٤ = ٠　　ب |س| + ١ = ٠　　ج | س − ٧ | = ٥

بعض خواص مقياس العدد *Properties of the Absolute Value*

تعلم

١) |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلا:

|٢ × - ٣| = |- ٦| = ٦ ، |٢| × |- ٣| = ٢ × ٣ = ٦

٢) |أ + ب| ⩽ |أ| + |ب|

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ، | - ٤ - ٥| = |- ٤| + | - ٥| = ٩

٣) |أ − س| = |س − أ|

لاحظ:

١) إذا كان: |س| = أ فإن: س = أ أو س = -أ لكل أ ∈ ع+

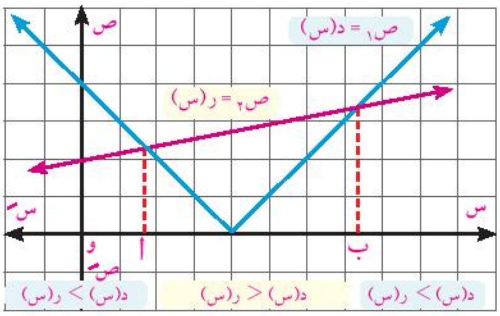
٢) إذا كان: |أ| = |ب| فإن: أ = ب أو أ = − ب لكل أ ، ب ∈ ع

٣) |س|٢ = |س٢| = س٢

ثانيا: حل المتباينات *Solving the Inequalities*

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< ، > ، ≥ ، ≤)
والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانيًا



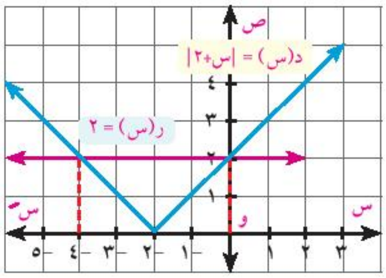
يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:
ص١ = د(س) ، ص٢ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة
د(س) = ر(س) هى {أ ، ب}

أى أن: ص١ = ص٢ عندما س = أ أو س = ب

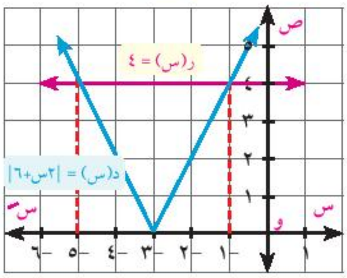
ويلاحظ: ص١ < ص٢ أى د(س) < ر(س) عندما س∈] أ ، ب[
ص١ > ص٢ أى د(س) > ر(س) عندما س∈] - ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[

مثال

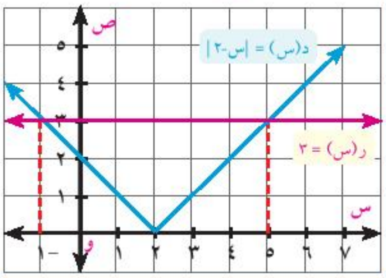
٢ أ



ب



جـ



أ	ب	جـ
مجموعة حل المتباينة	مجموعة حل المتباينة	مجموعة حل المتباينة
|س+٢| < ٢	|٢ س + ٦| ≥ ٤	|س - ٢| ≤ ٣
هى:]-٤ ، ٠[	هى:]- ∞، -٥] ∪ [-١ ، ∞[	هى: [-١ ، ٥]
	أى أن: ع -]-٥ ، -١[	

حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية فى مثال (٧):

أ \|س + ٢\| < ٢ ب \|٢ س + ٦\| < ٤ جـ \|س - ٢\| > ٣

حل المتباينات جبريًا

تعلم

أولاً: إذا كان \|س\| < أ ، أ > ٠ **فإن:** -أ < س < أ

ثانيًا: إذا كان \|س\| ≥ أ ، أ > ٠ **فإن:** س≥أ **أو** س ≤ -أ

مثال

(٣) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

|س - ٣| < ٤

الحل

∵ |س - ٣| < ٤ أي - ٤ < س - ٣ < ٤ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ - ٤ + ٣ < س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣ أي أن: - ١ < س < ٧

∴ **مجموعة الحل** =] - ١ ، ٧ [

تذكر أن

لكل من أ ، ب ، جـ

إذا كان: أ > ب ، ب > جـ

فإن أ > جـ

إذا كان: أ > ب فإن

أ + جـ > ب + جـ

أ جـ > ب جـ عند جـ > ٠

أ جـ < ب جـ عند جـ < ٠

حاول أن تحل

(٣) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

(أ) |س - ٧| < ١١ (ب) |٣س + ٧| < ٨

تطبيقات حياتية

مثال

الأرصاد الجوية

(٤) قامت محطة الأرصاد الجوية بتسجيل درجة الحرارة على مدينة القاهرة فى يوم ما فكانت ٣٢° باختلاف ٧° عن معدلها الطبيعى فى ذلك اليوم . كم تكون درجة الحرارة المحتملة لمدينة القاهرة فى ذلك اليوم ؟

الحل

بفرض أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها على مدينة القاهرة فى هذا اليوم = س°

∵ |س - ٣٢| = ٧ أى أن س - ٣٢ = ± ٧

ويكون س = ٣٢ + ٧ = ٣٩ أو س = ٣٢ - ٧ = ٢٥

أى أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها هى ٣٩° أو ٢٥°

تمـــاريـن الدرس الخامس

أكمل مايأتى:

(١) مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{1}{2}$ هى ....

(٢) مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى ....

(٣) مجموعة حل المتباينة |س - ٢| < ٠ هى ....

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة مما يأتى:

(٤) |س − ٢| = ٣	(أ)]−١ ، ٥[
(٥) |س − ٢| < ٣	(ب) ع
(٦) |س − ٢| > −٣	(ج) {−١ ، ٥}
(٧) |س − ٢| ≤ ٣	(د) ع − [−١ ، ٥]
(٨) |س − ٢| > ٣	(هـ) ϕ
(٩) |س − ٢| = −٣	(و) [−١ ، ٥]

أوجد جبريا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٠) |س + ٣| = ٦ (١١) |٢س − ٧| = ٥ (١٢) |٣ − ٢س| = ٧

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٣) |س + ٤| = ٣ (١٤) |٢س − ٥| = ٣

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

(١٥) |س − ١| < ٣ (١٦) |س − ٢| ≤ ٥ (١٧) |س + ٣| > ٢

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

(١٨) |٢س − ١| > ٣ (١٩) |٢س + ٣| ≤ ٧ (٢٠) |٣س − ٧| ≥ ٢

الوحدة
الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أُدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات فى أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر ، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ص، ويرجع الفضل فى ذلك للعالم ليونهارت أويلر فى القرن الثامن عشر الذى قام بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع فى مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة الڤولت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلولٍ ما.

مخرجات تعلم الوحدة

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية.
- يتعرف التمثيل البيانى للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلة أسية على الصورة : $أ^{س}$ = ب.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية.
- يحول جبريًّا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية فى فترات محدودة، ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانيًّا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات.
- يحل معادلات لوغاريتمية.
- يحل مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠.
- يوجد قيمة اللوغاريتمات باستخدام الآلة الحاسبة.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل بعض المعادلات الأسية .

المصطلحات الأساسية

القوة النونية	The n^{th} Power	دالة أسية.	Expontential Function	انعكاس	Reflection
الأساس	Base	نمو إسى.	Exponential Growth	لوغاريتم	Logarithm
الأس	Exponent	تضاؤل أسى.	Exponential Decay	معادلة لوغاريتمية.	Logarithmic Equation
جذر نونى	n^{th} Root	مجال	Domain	دالة لوغاريتمية	Logarithmic Function
أس كسرى	Rational – Exponent	مدى	Range		

دروس الوحدة

٢ - ١: الأسس الكسرية

٢ - ٢: الدالة الآسية وتمثيلها البيانى وتطبيقاتها

٢ - ٣: حل المعادلات الأسية

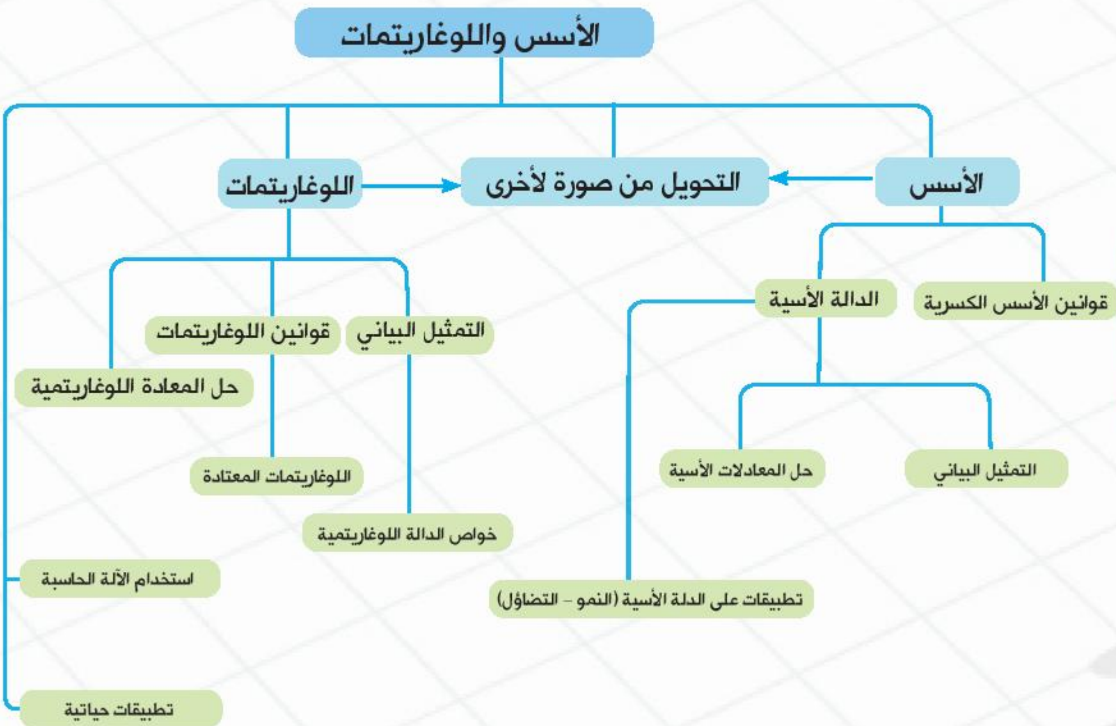
٢ - ٤: الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

٢ - ٥: بعض خواص اللوغاريتمات

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية geogebra-graph

مخطط تنظيمى للوحدة



٢ - ١ الأسس الكسرية

Rational Exponents

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النونى.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

- القوة النونية The n^{th} Power
- الأساس Base
- الأس Exponent
- جذر نونى n^{th} Root
- أس كسرى Rational Exponent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقى غير سالب، وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والتكعيبية، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها، وسوف تتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

الجذر النونى The n^{th} Root

علمت أن الجذر التربيعى لعدد ما هو عملية عكسية لتربيع ذلك العدد، وبالمثل فإن الجذر النونى لعدد هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن).

مثال:

١ إذا كانت $س^{٣} = ٨$

فإن ٢ هو الجذر التكعيبى للعدد ٨ أى أن $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

٢ إذا كانت $س^{٥} = ٣٢$

فإن ٢ هو الجذر الخامس للعدد ٣٢ أى أن $\sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

٣ إذا كانت $س^{ن} = أ$

فإن س هو الجذر النونى للعدد أ أى أن $\sqrt[ن]{أ} = س$

تعريف ١

لأى عدد حقيقي أ $\geq$ ٠، ن $\in$ $ص^{+}$ - {١} **يكون** $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما أ $<$ ٠، ن عدد صحيح فردى أكبر من ١

مثال:

$(١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$

$(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩} \notin ح$

$-(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = -\sqrt[٣]{٢٧} = -٣$

$(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$

لاحظ أن

مثال

(١) إذا كانت $س^ن = أ$ فأوجد قيم س في ع (إن وجدت) في كُلٍّ من الحالات الآتية:

(أ) ن = ٥ ، أ = صفر (ب) ن = ٤ ، أ = ٨١

(جـ) ن = ٢ ، أ = -٤ (د) ن = ٣ ، أ = -٨

الحل

(أ) **عندما** ن = ٥، أ = صفر فإن $س^٥ = ٠$ **وتكون** $س = \sqrt[٥]{٠} = ٠$

(ب) **عندما** ن = ٤ ، أ = ٨١ فإن $س^٤ = ٨١$ **وتكون** $س = \pm\sqrt[٤]{٨١} = \pm٣$

(جـ) **عندما** ن = ٢ ، أ = -٤ فإن $س^٢ = -٤$ **وتكون** $س = \pm\sqrt{-٤} \notin ع$

(د) **عندما** ن = ٣ ، أ = -٨ فإن $س^٣ = -٨$ **وتكون** $س = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

نستنتج من المثال السابق أن:

إذا كانت $س^ن = أ$ فإن قيم س التي تحقق المعادلة تتضح من الجدول التالي:

ن	أ	$\sqrt[ن]{أ}$
ن ∈ ص⁺ - {١}	أ = ٠	$\sqrt[ن]{أ}$ = صفر
عدد صحيح زوجي موجب	أ > ٠	يوجد جذران حقيقيان هما $\pm\sqrt[ن]{أ}$
عدد صحيح زوجي موجب	أ < ٠	لاتوجد جذور حقيقية.
عدد صحيح فردي موجب، ن ≠ ١	أ ∈ ع	يوجد جذر حقيقي واحد فقط هو $\sqrt[ن]{أ}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيم س في كل مما يأتي (إن وجدت) :

(أ) $س^٢ = ٣٦$ (ب) $س^٥ = -٣٢$ (جـ) $س^٣ = ١٢٥$

(د) $س^٤ = ١٢٩٦$ (هـ) $س^٢ = -٤٩$ (و) $س^٧ = -١٢٨$

تفكير ناقد: وضح بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{أ}$

تعريف ٢

إذا كان ن ∈ ص⁺ - {١} ، م ∈ ص⁺ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ع$ فإن: $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^م} = (\sqrt[ن]{أ})^م$

مثال:

$(١٦)^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{١٦})^٣ = (٤)^٣ = ٦٤$

$\sqrt[٣]{(-١٢٥)^٢} = (\sqrt[٣]{(-١٢٥)})^٢ = (-٥)^٢ = ٢٥$

مثال

(٢) أوجد فى أبسط صورة كُلًّا من:

أ) $-\sqrt[3]{٨أ^{٦}ب^{٩}}$ ب) $\pm\sqrt{٦٤(أ^{٢}+٣)^{٦}}$

الحل

أ) $-\sqrt[3]{٨أ^{٦}ب^{٩}} = -\sqrt[3]{(٢أ^{٢}ب^{٣})^{٣}} = -٢أ^{٢}ب^{٣}$

ب) $\pm\sqrt{٦٤(أ^{٢}+٣)^{٦}} = \pm\sqrt{[٨(أ^{٢}+٣)^{٣}]^{٢}}$

$= \pm ٨(أ^{٢}+٣)^{٣}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد فى أبسط صورةٍ كُلًّا من:

أ) $\sqrt[4]{٦٢٥أ^{١٢}}$ ب) $\sqrt[5]{-٢٤٣ب^{٥}}$ ج) $\sqrt[7]{١٢٨(أ+ب)^{٧}}$

استخدام المقياس *Using The Modulus*

يستخدم مِقياس العدد إذا كان دليل الجذر (ن) عددًا زوجيًّا فيكون $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$, أما إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فلا داعى لاستخدام المقياس.

$$\sqrt[ن]{س^{ن}} = \begin{cases} |س| & \text{إذا كان ن زوجيًّا.} \\ س & \text{إذا كان ن فرديًّا.} \end{cases}$$

مثال

(٣) أوجد ناتج كل مما يأتي فى أبسط صورةٍ:

أ) $\sqrt{٩س^{٢}}$ ب) $\sqrt[3]{-٨س^{٣}}$

ج) $\sqrt[4]{(٢-\sqrt{٣})^{٤}}$ د) $\sqrt[6]{(١-\sqrt{٧})^{٦}}$

لاحظ أن

مربع أى من العددين (أ) أو (-أ) هو $أ^{٢}$

الحل

أ) $\sqrt{٩س^{٢}} = \sqrt{(٣س)^{٢}} = |٣س|$

ب) $\sqrt[3]{-٨س^{٣}} = \sqrt[3]{(-٢س)^{٣}} = -٢س$

ج) $\sqrt[4]{(٢-\sqrt{٣})^{٤}} = |٢-\sqrt{٣}| = ٢-\sqrt{٣}$ حيث $٢ > \sqrt{٣}$

د) $\sqrt[6]{(١-\sqrt{٧})^{٦}} = |١-\sqrt{٧}| = \sqrt{٧}-١$ حيث $\sqrt{٧} > ١$

حاول أن تحل

(٣) أوجد ناتج كل مما يأتي فى أبسط صورةٍ:

(أ) $\sqrt[٤]{١٦ أ^{١٢}}$ (ب) $\sqrt[٦]{(س - ٢)^{١٨}}$

(ج) $\sqrt[٣]{(-٢\sqrt{٥})^{٣}}$ (د) $\sqrt[٤]{(-٢\sqrt{٥})^{٤}}$

تعريف ٣

إذا كان ن $\in$ ص$^{+}$ - {١}، م $\in$ ص$^{+}$، $\sqrt[ن]{أ} \in$ ح فإن: $أ^{-\frac{م}{ن}} = \frac{١}{أ^{\frac{م}{ن}}}$

مثال: $٧^{-\frac{٣}{٥}} = \frac{١}{٧^{\frac{٣}{٥}}}$ ، $\frac{١}{٤^{-\frac{٢}{٣}}} = ٤^{\frac{٢}{٣}}$

تعريف ٤

إذا كان ن $\in$ ص$^{+}$ - {١}، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ عددين حقيقيين فإن:

- $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$
- $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب $\neq$ صفر

مثال

(٤) أوجد فى أبسط صورة كُلًّا من:

(أ) $\frac{\sqrt[٣]{٨} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$ (ب) $\frac{٣٢^{-\frac{٣}{٥}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}}}{\sqrt[٤]{٤} \times \sqrt[٨]{١٦^{٥}}}$

الحل

(أ) المقدار $= \frac{٨^{\frac{١}{٣}} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$ تحويل الجذور إلى أسسٍ كسرية.

$= \frac{(٢^{٣})^{\frac{١}{٣}} \times (٢^{٢})^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{(٢ \times ٣)^{-٢} \times ٣^{٢}}$ تحليل كل أساس إلى عوامله الأوليةِ.

$= \frac{(٢)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{-٢} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٣^{-٢} \times ٢^{-٢} \times ٣^{٢}}$ بالتبسيط

$= ٢^{\frac{٣}{٢} - ٢ - \frac{٣}{٢} + ٢} \times ٣^{٢ - ٢}$

$= ٢^{صفر} \times ٣^{صفر} = ١$

(ب) المقدار $= \frac{٣٢^{\frac{٣}{٥}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}}}{٤^{\frac{١}{٤}} \times ١٦^{\frac{٥}{٨}}}$ تحويل الجذور إلى أسسٍ كسرية.

$= \frac{(٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} \times (٢^{٣})^{\frac{٢}{٣}}}{(٢^{٢})^{\frac{١}{٤}} \times (٢^{٤})^{\frac{٥}{٨}}}$ تحليل كل أساس إلى عوامله الأوليةِ.

$= \frac{٢^{٣} \times ٢^{٢}}{٢^{\frac{١}{٢}} \times ٢^{\frac{٥}{٢}}} = ٢^{٣ + ٢ - \frac{١}{٢} - \frac{٥}{٢}} = ٢^{٢} = ٤$

حاول أن تحل

(٤) أوجد فى أبسطِ صورة كُلًّا من :

(أ) $\frac{\sqrt[٣]{٢٤٣} \times \sqrt{٨^{-١}}}{\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٩}}$ (ب) $\frac{\sqrt[٤]{٤} \times \sqrt[٥]{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt[١٠]{٤}}$

حل المعادلات:

مثال

(٥) أوجد فى ع مجموعة حل كُلٍّ من المعادلات الآتية:

(أ) $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ (ب) $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

الحل

(أ) $\because س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ برفع الطرفين للقوة ٣

$\therefore (س^{\frac{٢}{٣}})^{٣} = ٩^{٣}$

$\therefore س^{٢} = ٩^{٣}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{٩^{٣}}$ $\therefore |س| = ٣^{٣}$ $\therefore س = \pm ٢٧$

$\therefore$ مجموعة الحل = {- ٢٧، ٢٧}

(ب) $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ برفع الطرفين للقوة ٤

$\therefore (س + ١)^{٣} = ٨^{٤}$

$\therefore (س + ١) = (\sqrt[٣]{٨})^{٤}$

$\therefore س + ١ = ٢^{٤}$ $\therefore س = ١٥$ $\therefore$ مجموعة الحل = {١٥}

حاول أن تحل

(٥) أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية :

(أ) $س^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$ (ب) $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = \frac{١}{٣٢}$

تمــــاريــن ٢ – ١

(١) **اكتب كُلًّا ممايأتى على صورةٍ أسية:**

(أ) $\sqrt[٣]{س}$ (ب) $\sqrt[٤]{أ^{٣}}$ (ج) $٢\sqrt[٣]{ن}$

(د) $\sqrt[٤]{أ^{٢}ب^{٣}}$ (هـ) $\sqrt[٦]{س^{٥}}$ (و) $\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٥]{س^{٢}}}$

(٢) اكتب كُلًّا ممايأتى على صورة جذرية:

(أ) $أ^{\frac{١}{٢}}$ (ب) $ب^{\frac{٢}{٣}}$ (ج) $٦ ص^{\frac{٣}{٤}}$

د $٨\,\text{ب}^{\frac{٤}{٩}}$ ه $(٣\,\text{س})^{-\frac{٢}{٣}}$ و $٥^{\frac{١}{٢}}$

٣ أوجد قيمة كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة:

أ $(١٦)^{\frac{٣}{٤}}$ ب $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ج $٢٧^{-\frac{٤}{٣}}$

د $\left(\frac{١}{٨}\right)^{\frac{٢}{٣}} + \left(\frac{١}{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$ ه $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{\sqrt{٢}}$ و $\frac{١}{(٢^{-٢} \times ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}})^{-٢}}$

٤ أوجد فى أبسط صورة ناتجَ العمليات لآتية:

أ $(\text{أ}^{-\frac{٢}{٣}})^{-٣}$ ب $\sqrt[٣]{\text{س}} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ج $(٣^{٢} + ٤^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

د $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}})(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{١}{٢}})$ ه $(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - \text{ص}^{\frac{١}{٣}})(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{س}^{\frac{١}{٣}}\text{ص}^{\frac{١}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}})$

و $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{-\frac{١}{٢}})^{٢}$ ز $(١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣})^{\frac{١}{٢}}$

٥ اختصر كُلًّا ممايأتى لأبسط صورة :

أ $\sqrt[٥]{٢٤٣} + \sqrt[٩]{٥١٢}$ ب $\left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{\frac{١}{٢}} \times \left(\frac{٧٢٩}{٨}\right)^{\frac{١}{٣}}$ ج $(١٦)^{\frac{٣}{٢}} \div (٨)^{\frac{٢}{٣}}$

د $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$ ه $\sqrt{٠,١} \times \sqrt[٣]{٠,٢١٦} \times \sqrt{٢,٥}$ و $\frac{٨^{\frac{٣}{٨}} \times ٤^{-\frac{٣}{١٦}}}{٢^{-\frac{٥}{٤}}}$

ز $(١٢٥)^{\frac{٢}{٣}} \times ٨١^{\frac{١}{٤}} \times (١٥)^{-١}$ ح $\frac{١٦^{\text{س}-\frac{١}{٤}} \times ٩^{\text{س}+\frac{١}{٢}}}{٨^{\text{س}-١} \times ١٨^{\text{س}+٢}}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦ إذا كان $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} = ٩$ فإن س $\in$ أ $\{٢٧\}$ ب $\{٢٧، -٢٧\}$ ج $\{١\}$ د ϕ

٧ $٦٤^{-\frac{١}{٦}} =$ أ ٢ ب -٢ ج $\frac{١}{٢}$ د $-\frac{١}{٢}$

٨ $\sqrt[٣]{\text{س}^{-٣}} =$ أ $\text{س}^{-١}$ ب $-\text{س}$ ج $|\text{س}^{-١}|$ د $-|\text{س}|$

٩ $\sqrt[٤]{\text{س}^{٤}\text{ص}^{٨}} =$

أ $\text{س}\,\text{ص}^{٢}$ ب $\pm\,\text{س}\,\text{ص}^{٢}$ ج $|\text{س}|\text{ص}^{٢}$ د $\text{س}|\text{ص}^{٢}|$

١٠ إذا كان $\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن س =

أ ٤ ب -٤ ج $\frac{١}{٤}$ د $-\frac{١}{٤}$

١١ $\frac{٦^{-\frac{١}{٥}} \times ٦^{\frac{٣}{٥}}}{\sqrt[٥]{٣٦}} =$

أ ١ ب ٦ ج $\frac{١}{٦}$ د $\sqrt{٦}$

١٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٥$ ب $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = \frac{١}{١٢٨}$ ج $\sqrt{\text{س}^{٣}} = ٢٧$

د $(\text{س} - ٥)^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$ ه $٣\,\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٨}$ و $٢^{٣\text{س}-١} = \frac{١٦}{\sqrt{٢}}$

الوحدة الثانية

٢ - ٢ الدالة الآسية وتطبيقاتها

Exponential Function and its Application

تمهيد

كثيرًا ما نتعامل فى حياتنا عن أمور تتطلب حسابات دقيقة مثل الفوائد البنكية والزيادة السكانية وتكاثر الخلايا فى بعض الكائنات وفترات عمر النصف للذرات المشعة وغيرها، وتلك هذه الأمور تتطلب مفهوم الدالة الأسية التى سوف نتناولها فى هذا الدرس ونعرض بعض خواصها .

تعلم

الدالة الأسية *Exponential Function*

تعريف ١

إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجبًا $\neq$ ١ فإن الدالة:

د حيث د: ع ⟵ $ع^{+}$ ، د(س) = $أ^{س}$

تسمى **دالة اسية** اساسها أ

لاحظ أن

الدالة الجبرية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.

الدالة الأسية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لايساوى الواحد.

تعبير شفهى: وضح لماذا لاتمثل الدالة د(س) = $(-٣)^{س}$ حيث س $\in$ ع دالة أسية

التمثيل البيانى للدالة الأسية *Graphical Representation of the Exponential Function*

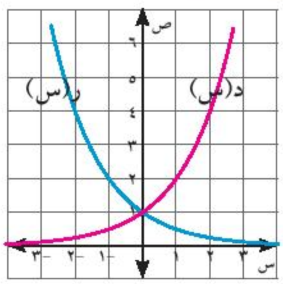
مثال

١ بالاستعانة بقيم س $\in$ [-٣، ٣] ارسم فى شكل واحد جزءًا من منحنى كل من الدالتين:

د(س) = $٢^{س}$ ، ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ر(س)	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



من الرسم يمكن استنتاج الخواص الآتية للدالة الأسية

١ الدالة د: د(س) = $٢^{س}$ متزايدة على مجالها لأن (أ > ١)

الدالة ر : ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ متناقصة على مجالها لأن (٠ < أ < ١)

٢ مدى كل من الدالتين هو $ع^{+}$

٣ منحنى الدالة د: د(س) = $٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة

سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

- دالة أسية. *Expontential Function*
- نمو أسى. *Exponential Growth*
- تضاؤل أسى. *Exponential Decay*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

أضف إلى معلوماتك

تسمى الدالة الأسية د(س)= $أ^{س}$ فى حالة أ > ١ بدالة النماء (growth function) وترتبط بكثير من التطبيقات الحياتية مثل التزايد السكانى والفائدة المركبة للبنوك.

وتسمى الدالة الأسية د(س) =$أ^{س}$ فى حالة ١ > أ > ٠ بدالة التضاؤل (decay) وترتبط بكثير من التطبيقات مثل فترة عمر النصف للذرات المشعة .

ر: ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.

حاول أن تحل

(١) بالاستعانة بقيم س ∈[-٢ ، ٢] ارسم فى شكلٍ واحدٍ منحنى كُلٍّ من الدوال $د_١$(س) = $٢^{س}$، $د_٢$(س) = $٣^{س}$ ، $د_٣$ (س) = $٤^{س}$

مثال

(٢) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ فأكمل مايأتى:

أ) د(٢) = ...
ب) د (س +٢) = ... × $٣^{س}$
جـ) د(س) × د(-س) = ...

الحل

أ) د(٢) = $٣^{٢}$ = ٩
ب) د(س +٢) = $٣^{س+٢}$ = $٣^{س}$ × $٣^{٢}$ = ٩ × $٣^{س}$
جـ) د(س) × د(- س) = $٣^{س}$ × $٣^{-س}$ = $٣^{س-س}$ = $٣^{صفر}$ = ١

تمارين ٢ - ٢

(١) ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أى منها تكون متزايدة وأى منها متناقصة؟

أ) د(س) = $٢^{س}$
ب) د(س) = $٣^{س}$
جـ) د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$
د) د(س) = $٢^{-س+١}$

(٢) أكمل مايأتى:

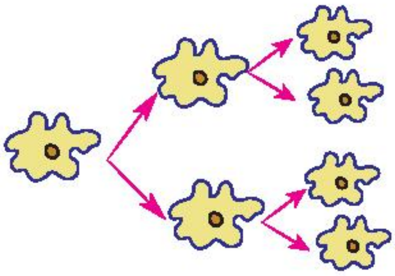
أ) الدالة د : د(س) = $٢^{س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....
ب) الدالة د : د(س)= $٢^{-١-س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....
جـ) إذا مر منحنى الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ بالنقطة (١، ٣) فإن أ = ...
د) منحنى الدالة د : د(س) = $٣^{-س}$ هو صورة منحنى الدالة ر : ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ بالانعكاس فى ....
هـ) الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية إذا كان أ ∈ ....
و) الدالة د حيث د(س) = $(٢أ)^{س}$ تكون متزايدة عندما أ ∈ ....

٢ - ٣ حل المعادلات الأسية

Solving Power Equations

سوف تتعلم
- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.
- خواص الدالة الأسية.

فكر و ناقش



تتكاثر الأميبا بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين بعد فترة زمنية ثابتة، ثم تنقسم كل خلية جديدة إلى خليتين بعد نفس الفترة الزمنية، وفي نفس الشروط وهكذا .....

١ أوجد عدد الخلايا الناتجة من خلية واحدة بعد ٩ فترات زمنية.

٢ أوجد عدد الفترات الزمنية اللازمة لإنتاج ٨١٩٢ خلية من هذه الخلية.

المصطلحات الأساسية
- معادلة أسية. Power Equation
- حل بيانى. Graphical Solution

تعلم

المعادلة الأسية *Power Equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($٢^{س+١} = ٨$)

حل المعادلات الأسية:

أولًا: إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن $م = ن$.

مثال

① أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $٢^{س+٣} = ٨$ ب) $٣^{س-٢} = \left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س}$

الحل

أ) $\because ٢^{س+٣} = ٨$ $\therefore ٢^{س+٣} = ٢^{٣}$

$\therefore س + ٣ = ٣$ ومنها س = صفر

$\therefore$ مجموعة الحل = {صفر}

ب) $\because ٣^{س-٢} = \left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س}$ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{-٣س}$

$\therefore س - ٢ = -٣س$ $\therefore س + ٣س = ٢$

$\therefore ٤س = ٢$ ومنها $س = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

حاول أن تحل

(١) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلاتِ الآتيةِ:

(أ) $٥^{س+١} = ٢٥$ (ب) $٢^{١-س^٢} = \frac{١}{٨}$

ثانيًا: إذا كان $أ^م = ب^م$ حيث أ، ب $\not\ni$ {٠، ١، -١}،

إما: م = صفر

أو: أ = ب عندما م عدد فردي.

، أ = ± ب عندما م عدد زوجي.

مثال

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلاتِ الآتيةِ:

(أ) $٣^{س+٢} = ٧^{س+٢}$ (ب) $٤^{س-٢} = ٣^{٢س-٤}$

الحل

(أ) $\because ٣^{س+٢} = ٧^{س+٢}$

$\therefore$ س + ٢ = صفر ومنها س = -٢

$\therefore$ مجموعة الحل = {-٢}

(ب) $\because ٤^{س-٢} = ٣^{٢س-٤}$ $\therefore ٤^{س-٢} = ٣^{٢(س-٢)}$

$\therefore ٤^{س-٢} = ٩^{س-٢}$

$\therefore$ س - ٢ = صفر ومنها س = ٢

$\therefore$ مجموعة الحل = {٢}

حاول أن تحل

(٢) أوجد في ع مجموعة حل المعادلة:

(أ) $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ (ب) $٢^{٢س-٦} = ٧^{س-٣}$

مثال

(٣) إذا كانت د(س) = $٢^{س+١}$ أوجد قيمة س التي تحقق د(س) = ٣٢

الحل

$\because$ د(س) = ٣٢ $\therefore ٢^{س+١} = ٣٢$

$\therefore ٢^{س+١} = ٢^٥$ $\therefore$ س + ١ = ٥

$\therefore$ س = ٤ $\therefore$ مجموعة الحل = {٤}

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت د(س) = $٧^س$، أوجد قيمة س التي تحقق د(س+١) = ٤٩

تمارين ٢ – ٣

١) أكمل ما يأتى:

أ) إذا كان $٥^{س-٢} = ١$ فإن س = ...

ب) إذا كان $٣^{س-٢} = ٧^{س-٢}$ فإن س = ...

ج) إذا كان $٣^{س+١} = ٥^{س+١}$ فإن $٣^{س+١}$ = ...

د) إذا كان $٢^{|س|} = ٣٢$ فإن س = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

٢) إذا كان $٣^{س-٥} = ٩$ فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٧ ج) -٣ د) -٧

٣) إذا كان $٣^{س} = ٩$ فإن $٣^{س+١}$ = ...

أ) ٥ ب) ١٥ ج) ٢٧ د) ٤٥

٤) العدد $٥^{س+١} + ٥^{س}$ يقبل القسمة على .... لجميع قيم س الطبيعية.

أ) ٧ ب) ٦ ج) ١٣ د) ١٧

٥) إذا كان $(\frac{٢}{٣})^{س-٢} = \frac{٨}{٢٨}$ فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥

٦) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $٣^{س+٤} = ٩$ ب) $٢^{س-٥} = \frac{١}{٣٢}$

ج) $٥^{س+٢} = ١$ د) $٣^{|س|} = ٣$

هـ) $٢ \times ٣^{س-٢} = ٥٤$ و) $٧^{س-٥} = ٣^{س-٥}$

ز) $٢^{٣س-٦} = ٥^{س-٢}$ ح) $(\frac{٣}{٢})^{س-٢} = \frac{٨}{٢٧}$

ط) $٢^{س} \times ٥^{-س} = \frac{٤}{٢٥}$ ى) $٤^{س} = ٦٤$

ك) $٤^{١-س} = \frac{١}{٤}$ ل) $(٣)^{س-٥} = \frac{١}{٩}$

(٧) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

(أ) د(س) = ٨

(ب) د(س+١) = $\frac{١}{٣٢}$

(٨) إذا كانت د(س) = $٣^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

(أ) د(س) = ٢٧

(ب) د(س-١) = $\frac{١}{٩}$

(٩) إذا كانت د(س) = $٧^{س-٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

(أ) د(س) = ٣٤٣

(ب) د(٢س) = $\frac{١}{٤٩}$

(١٠) اكتشف الخطأ: قام كل من محمد وكريم بحلِّ المعادلة ٢ × $٢^{س}$ = ١٦

حل محمد

٢ × $٢^{س}$ = ١٦

∴ $٤^{س}$ = ١٦

∴ $٤^{س}$ = $٤^{٢}$

∴ س = ٢

حل كريم

٢ × $٢^{س}$ = ١٦

∴ $٢^{س}$ = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

∴ $٢^{س}$ = $٢^{٣}$

∴ س = ٣

أي الحلين هو الصواب؟ ولماذا؟

الوحدة الثانية

٢ - ٤ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

Logarithmic Function and its Graphical Representation

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

- لوغاريتم *Logarithm*
- دالة عكسية *Inverse Function*
- مجال *Domain*
- اللوغاريتم المعتاد *Common Logarithm*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

إرشادات للدراسة

تسمى $لو_ا$ س = ص بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى $ا^ص$ = س بالصورة الأسية المكافئة لها.

لاحظ أن (ا) أساس موجب

فإذا كانت $(-٣)^٤ = ٨١$

فإنه لا توجد صورة لوغاريتمية مكافئة لها.

فكر و ناقش

تأمل المعادلات الأسية الآتية وحاول الإجابة عليها:

إذا كان $٢^س = ٢$ ، $٢^ص = ٣$ ، $٢^ع = ٤$ فإن:

١ - س = ... ، ص = ...

٢ - قيمة ع محصورة بين عددين صحيحين متتاليين هما .... ، ....

لاحظ أن قيمة ص لا يمكن حسابها مباشرة مثل س ، ع لذلك نحتاج إلى مفهوم دالة جديدة لحساب قيمة ص.

تعلم

الدالة اللوغاريتمية *Logarithmic Function*

إذا كان س، ا عددين موجبين حيث ا ≠ ١ فإنَّ الدالة اللوغاريتمية ص = $لو_ا$ س هي الدالة العكسية للدالة الأسية ص = $ا^س$

مثال: إذا كان $لو_٢ ٣٢ = ٥$ فإن $٢^٥ = ٣٢$ والعكس صحيح.

تعبير شفهي:

إذا كانت النقطة (جـ، ى) ∈ للدالة الأسية ص = $ا^س$ فإن:

١ - النقطة(........، ....) ∈ للدالة ص = $لو_ا$ س.

٢ - الصورة الأسية $ا^جـ$ = ى حيث ا ∈ $ع^+$ - {١} تكافئ الصورة اللوغاريتمية ....

مثال

التحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

(١) حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة اللوغاريتمية:

(أ) $٣^٤ = ٨١$ (ب) $٢٥^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٥}$ (جـ) $١٠^{-٢} = ٠,٠١$

الحل

(أ) $لو_٣ ٨١ = ٤$ (ب) $لو_{٢٥} \frac{١}{٥} = -\frac{١}{٢}$ (جـ) $لو_{١٠} ٠,٠١ = -٢$

تعبير شفهي: هل يمكن تحويل $(-٢)^٤ = ١٦$ إلى الصورة اللوغاريتمية؟ فسر ذلك.

حاول أن تحل

(١) عَبِّر عن كلٍّ مما يأتي بصورة لوغاريتمية:

(أ) $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ (ب) $٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$ (ج) $ب^{س} = ص$ حيث $ب \in ع^{+} - \{1\}$

اللوغاريتم المعتاد Common Logarithm

هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ ويكتب بدون كتابة الأساس، أي $لو_{١٠} ٧ = لو ٧$ ، $لو_{١٠} ١٢٧ = لو ١٢٧$ ويمكن استخدام مفتاح log الموجود بالحاسبة لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لأي عدد.

مثال

(٢) حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة الأسية:

(أ) $لو_{٢} ٣٢ = ٥$ (ب) $لو ١٠٠٠ = ٣$ (ج) $لو_{٢} ١ = صفر$

الحل

(أ) $٢^{٥} = ٣٢$ (ب) $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ (ج) $٢^{صفر} = ١$

حاول أن تحل

(٢) حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة الأسية:

(أ) $لو_{١٢٥} ٢٥ = \frac{٢}{٣}$ (ب) $لو ١٠٠ = ٢$ (ج) $لو_{٥} ٥ = ١$

مثال إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية

(٣) أوجد قيمة كُلٍّ من:

(أ) $لو_{٥} ١٢٥$ (ب) $لو ٠,٠١$

الحل

(أ) نفرض $لو_{٥} ١٢٥ = س$ وبالتحويل إلى الصورة الأسية

$\therefore ٥^{س} = ١٢٥$ $\therefore ٥^{س} = ٥^{٣}$ ومنها $س = ٣$

$\therefore لو_{٥} ١٢٥ = ٣$

(ب) نفرض $لو ٠,٠١ = ص$ (لوغاريتم معتاد أساسه ١٠) وبالتحويل للصورة الأسية

$\therefore ١٠^{ص} = ٠,٠١$ $\therefore ١٠^{ص} = ١٠^{-٢}$

منها $ص = -٢$ $\therefore لو ٠,٠١ = -٢$

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة كل من:

أ $لو_{٣}$ ٨١ ب $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣٢

مثال حل المعادلات

٤ أوجد في ح مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $لو_{٢}$ (س+٥) = ٣ ب $لو_{٥}$ ٦٢٥ = س - ١ ج $لو_{س}$ (س+٦) = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم س + ٥ > صفر أي س > -٥ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية

∴ س + ٥ = $٢^{٣}$ ∴ س + ٥ = ٨

ومنها س = ٣

∴ ٣ ∈ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لجميع قيم س الحقيقية وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية.

∴ $٥^{س-١}$ = ٦٢٥ ∴ $٥^{س-١}$ = $٥^{٤}$

∴ س - ١ = ٤ ومنها س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

ج المعادلة معرفة لجميع قيم س التي تُحقِّق كلًّا من
س + ٦ > صفر
س > صفر
س ≠ ١

أي أن مجال تعريف المعادلة هو]صفر ، ∞[- {١}

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية:

$س^{٢}$ = س + ٦ $س^{٢}$ - س - ٦ = ٠

(س - ٣) (س + ٢) = ٠

إما س = ٣ أو س = -٢

وحيث إن س = -٢ ∉ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٣}

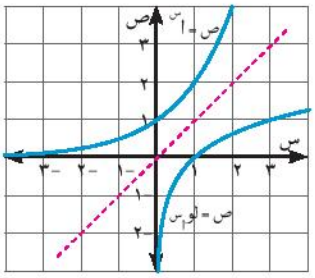
حاول أن تحل

٤ أوجد في ح مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $لو_{٥}$ (٣س-١) = ١ ب $لو_{٣}$ ٢٧ = س + ٢ ج $لو_{(س-١)}$ ٩ = ٢

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتيمة Graphical Representation of the Logarithmic Function

إذا كانت د(س) = أ^س^ حيث أ ∋ ع^+^ -{١} فإن الدالة العكسية للدالة د تسمى بالدالة اللوغاريتمية أى ص =لو~أ~ س



العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

الشكل المقابل يمثل الدالة الأسية ص = أ^س^ والدالة اللوغاريتمية ص = لو~أ~ س ادرس خواص كل من الدالتين من حيث المجال والمدى والاطراد والتماثل حول المستقيم ص = س .

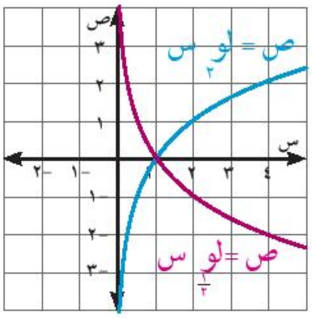
مثال

٥ ارسم فى شكل واحد منحنى كلٍّ من الدالتين ص = لو~٢~ س، ص =لو~½~ س

الحل

نختار قيم س قوى العدد ٢ (الأساس) {٢^-٢^ ، ٢^-١^، ٢^٠^، ٢^١^، ٢^٢^}

س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
لو~٢~ س	-٢	-١	صفر	١	٢
لو~½~ س	٢	١	صفر	-١	-٢



من الرسم يمكنك استنتاج الخواص الآتية لمنحنى الدالة اللوغاريتمية

المجال = ع+ ، المدى = ع

الدالة ص = لو~أ~ س متزايدة لكل أ > ١ ومتناقصة لكل ٠ < أ < ١

تمارين ٢ – ٤

١ أكمل ما يأتى:

أ) الصورة الأسية المكافئة للصورة لو~٣~ ٢٧ = ٣ هى ....

ب) الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة ٣^صفر^ = ١هى ....

جـ) لو ٠,٠٠١ = ...

د) لو~٢~ ١ = ...

هـ) إذا كان لو~س~ ٤ = ٢ فإن س = ...

و) إذا كان لو~٢~ ١٢٨ = س + ١ فإن س = ...

(ز) مجال الدالة د : د(س) = $لو_{٢}$ س هو ....

(ح) الدالة د حيث د(س) = $لو_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∋ ....

(ط) منحنى الدالة د حيث د(س) = $لو_{٢}$ س يمر بالنقطة (٨، ....)

(ى) إذا كان لو٣ = س ، لو٥ =ص فإن لو ١٥ = ... (بدلالة س،ص)

(٢) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:-

(أ) $لو_{٢}$ (س - ١) = ٢

(ب) $لو_{٥}$ (س + ٢) = ٣

(جـ) $لو_{س}$ ٩ = $\frac{٢}{٣}$

(د) $لو_{س+١}$ ٨ = $\frac{٣}{٤}$

(هـ) $لو_{س}$ (س + ٢) = ٢

(و) $لو_{س}$ ٩ = ٢

(٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

(أ) $لو_{٥}$ ١

(ب) $لو_{٧}$ ٧

(جـ) $لو_{٣}$ ٩

(د) $لو_{٦}$ ٣ + $لو_{٦}$ ٢

(٤) استخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد قيمة كلٍّ من:-

(أ) لو ١٥

(ب) $لو_{٢}$ ٢٧

(جـ) ٤لو ٧ - ٥لو١٣

٢ - ٥ بعض خــواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

تَعلَّمت فى الدرس السابق مفهوم اللوغاريتم وكيفية تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانيًّا وفيما يلى بعض خواص اللوغاريتمات التى تُساعد فى تبسيط المقادير اللوغاريتمية أو حل المعادلات التى تَحتوى على لوغاريتم.

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية. *Logarithmic Equation*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات *Some Properties of Logarithms*

إذا كان $أ \in ع^+ - \{١\}$ ، س ، ص $\in ع^+$ فإن

١- $لو_{أ}\, أ = ١$

فمثلًا $لو_{٣}\, ٣ = ١$ ، $لو\, ١٠ = ١$

٢- $لو_{أ}\, ١ =$ صفر

فمثلا $لو_{٥}\, ١ =$ صفر ، $لو\, ١ =$ صفر

حاول إثبات كل من **١** ، **٢** من تعريف اللوغاريتم

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

$لو_{أ}\, س\, ص = لو_{أ}\, س + لو_{أ}\, ص$ حيث س، ص $\in ع^+$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع $ب = لو_{أ}\, س$ ، $جـ = لو_{أ}\, ص$

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

$س = أ^{ب}$ ، $ص = أ^{جـ}$

فتكون $س\, ص = أ^{ب} \times أ^{جـ}$ **أي أن** $س\, ص = أ^{ب + جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: $لو_{أ}\, س\, ص = ب + جـ$

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون $لو_{أ}\, س\, ص = لو_{أ}\, س + لو_{أ}\, ص$

مثال

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $لو_{٣٤}\, ٢ + لو_{٣٤}\, ١٧$

الحل

المقدار $= لو_{٣٤} (٢ \times ١٧)$ استخدام خاصية (٣)

$= لو_{٣٤} ٣٤$

$= ١$ استخدام خاصية (١)

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$لو_أ \frac{س}{ص} = لو_أ س - لو_أ ص$ (حاول بنفسك إثبات صحة العلاقة)

مثال

(٢) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٥٠ - لو ٥

الحل

المقدار $= لو \frac{٥٠}{٥}$ استخدام خاصية القسمة

$= لو ١٠ = ١$ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $لو_٢ ٧ - لو_٢ ٣,٥$

٥- خاصية لوغاريتم القوة:

$لو_أ س^ن = ن لو_أ س$ حيث $س > ٠$ (حاول إثبات صحة العلاقة بنفسك)

مثال

(٣) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $لو_٥ ١٢٥$

الحل

المقدار $= لو_٥ ٥^٣$

$= ٣ لو_٥ ٥$ استخدام خاصية القوة

$= ٣ \times ١ = ٣$ استخدام خاصية (١)

لاحظ أن: $لو_أ (\frac{١}{س}) = - لو_أ س$ حيث $س \in ع^+$

٦ - خاصية تغيير الأساس

$$\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{ص}}$$ وإثبات صحة هذه الخاصية

بوضع: $\text{ع} = \text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س}$

$\text{ص}^{\text{ع}} = \text{س}$ بالتحويل إلى الصورة الأسية

$\text{ع}\ \text{لو}_{\text{ا}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{ا}}\,\text{س}$ يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ا

فتكون $\text{ع} = \frac{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{ص}}$ أي أن: $\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{ص}}$

مثال

(٤) اختصر لأبسط صورة $\text{لو}_{٧}\,١٦ * \text{لو}_{٢}\,٤٩$

الحل

المقدار $= \frac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٧} \times \frac{\text{لو}\,٤٩}{\text{لو}\,٢}$ استخدام خاصية (٦)

$= \frac{\text{لو}\,٢^{٤}}{\text{لو}\,٧} \times \frac{\text{لو}\,٧^{٢}}{\text{لو}\,٢}$

$= \frac{٤\,\cancel{\text{لو}\,٢}}{\cancel{\text{لو}\,٧}} \times \frac{٢\,\cancel{\text{لو}\,٧}}{\cancel{\text{لو}\,٢}}$ استخدام خاصية (٥)

$= ٤ \times ٢ = ٨$

حاول أن تحل

(٢) أوجد حل المثال السابق بتغيير الأساس لعدد آخر غير ١٠

٧ - خاصية المعكوس الضربى

$\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ا} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{ب}}$ أىْ أنَّ كلًّا من $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ا}$ ، $\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{ب}$ ، معكوس ضربى للآخر (حاول إثبات صحة العلاقة)

مثال

(٥) أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة $\frac{١}{\text{لو}_{٣}\,١٥} + \frac{١}{\text{لو}_{٥}\,١٥}$

الحل

المقدار $= \text{لو}_{١٥}\,٣ + \text{لو}_{١٥}\,٥$ استخدام خاصية (٧)

$= \text{لو}_{١٥}\,(٣ \times ٥)$ استخدام خاصية (٣)

$= \text{لو}_{١٥}\,١٥ = ١$ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

(٣) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\,٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٣}\,٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٥}\,٣٠}$

تبسيط المقادير اللوغاريتمية *Simplifying the Logaritmic Experssions*

مثال

(٦) اختصر لأبسط صورة لو ٠,٠٠٩ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + ٣ لو $\frac{٥}{٢}$ - لو $\frac{١}{١٢}$

الحل

المقدار = لو $\frac{٩}{١٠٠٠}$ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $(\frac{٥}{٢})^{٣}$ - لو $\frac{١}{١٢}$ **خاصية (٥)**

= لو $(\frac{٩}{١٠٠٠} \times \frac{١٦}{٢٧} \times \frac{١٢٥}{٨} \times \frac{١٢}{١})$ **خاصية (٣) ، (٤)**

= لو ١ = صفر **خاصية (٢)**

حاول أن تحل

(٤) اختصر لأبسط صورة ٤ لو $\sqrt{٣}$ - لو ١ $\frac{٢}{٥}$ - لو $\frac{٩}{٧}$ - لو $\frac{١}{٢}$

حل المعادلات اللوغاريتمية *Solving Logarithmic Equations*

مثال

(٧) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات

(أ) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ١) = ١

(ب) لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣

الحل

(أ) الدالة معرفة لكل س > صفر ، س + ١ > صفر

أى أن س > صفر **(مجال تعريف المعادلة)**

∴ لو$_{٢}$ س (س + ١) = ١ **استخدام خاصية (٣)**

∴ س (س + ١) = $٢^{١}$ **تحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية**

∴ $س^{٢}$ + س - ٢ = صفر ∴ (س + ٢) (س - ١) = صفر

إما س = -٢ أو س = ١ وحيث إن س = -٢ ∌ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {١}

(ب) الدالة معرفة لكل س > صفر **(مجال تعريف المعادلة)**

∴ لو$_{٢}$ س + $\frac{لو_{٢} س}{لو_{٢} ٤}$ = ٣ **خاصية (٦)** لو$_{٢}$ س + $\frac{لو_{٢} س}{٢}$ = ٣ **بالضرب فى ٢**

∴ ٢ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ س = ٦ ∴ ٣ لو$_{٢}$ س = ٦ ∴ لو$_{٢}$ س = ٢

∴ س = ٤ **(التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية)**

وحيث إن س = ٤ ∈ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٤}

حاول أن تحل

(٥) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية :

(أ) لو (٢ س + ١) - لو (٣ س -١) =١   (ب) $لو_{٢}$ س = $لو_{س}$ ٢

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات *Solving the Power Equations by Using Logarithms*

مثال

(٨) أوجد فى ع مجموعة حل ٢ ^{س} = ٧ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

الحل

٢^{س} = ٧   بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ٢^{س} = لو ٧   ∴ س لو٢ = لو ٧   ∴ س = $\frac{لو ٧}{لو ٢}$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتى:

log 7) ▼ log 2) = 2.807354922

∴ س ≃ ٢,٨١   ∴ مجموعة الحل = {٢,٨١}

(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)   2 $x^{■}$ ans = 7

حاول أن تحل

(٦) أوجد لأقرب رقمين عشريين مجموعة حل المعادلة : ٧ ^{س} = ٢

تمارين ٢ – ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) لو$_{٢}$ ٨ =

أ) ٤ ب) ٣

ج) ١٦ د) ١٠

٢) لو٢ + لو٥ =

أ) ١ ب) لو ٧

ج) لو٢,٥ د) ١٠

٣) لو$_{٥}$ $\sqrt{٥}$ =

أ) ٢ ب) ٥

ج) $\frac{١}{٢}$ د) -١

٤) إذا كان لو٣ = س ، لو ٤ = ص فإنَّ لو ١٢ =

أ) س + ص ب) س ص

ج) س - ص د) لوس + لو ص

٥) ٢ لو$_{٦}$ ٢ + ٢ لو$_{٦}$ ٣ =

أ) ٦ ب) ٣٦

ج) ٢ د) ١٢

٦) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ =

أ) ١ ب) ١٠

ج) $\frac{٥}{٢}$ د) صفر

٧) لو$_{٥}$ ٢ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٢}$ ٣ =

أ) ٣٠ ب) ١

ج) صفر د) لو ٣٠

(٨) عَبِّر عن كلٍّ مماياًتى بدلالة لوس ، لو (س + ١)

(أ) لو س (س+١) (ب) لو $\frac{\text{س}}{\text{س}+١}$

(ج) لو $\sqrt{\text{س}}$ (س+١)^{٢}

(٩) اختصْر لأبسطِ صورة:

(أ) لو$_{٦}$ ٥٤ - لو$_{٦}$ ٩ (ب) لو$_{٦}$ ٢ + لو$_{٦}$ ٣

(ج) لو$_{٢}$ ١٢ + لو$_{٢}$ $\frac{٢}{٣}$ (د) لو ٤٨ + لو١٢٥ - لو ٦

(هـ) $\frac{\text{١ - لو٢}}{\text{لو١٢٥}}$ (و) $\frac{\text{لو٤٩ + ٣ لو ٧}}{\text{لو ٧}}$

(ز) لو$_{٢}$ ١٦ + لو$_{٢}$ $\sqrt{٣}$ + لو ٠,١ (ح) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ب + ٢ لو$_{٢}$ جـ - لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أب}}$ - لو$_{٢}$ ٣جـ^{٢}

(١٠) أوجد فى ع مجموعة حلَّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

(أ) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س+٢) = ٣ (ب) لو س + لو (س -٣) =١

(ج) لو$_{٥}$ س - لو$_{٥}$ ٢ = ٢ (د) لو (س+٣) - لو ٣ = لو س

(هـ) $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{ س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٣}\text{ س}}$ = ٢ (و) لو س - $\frac{٣}{\text{لوس}}$ = ٢

(١١) أثبت أنَّ لو$_{\text{ب}}$ أ × لو$_{\text{جـ}}$ ب × لو$_{\text{ء}}$ جـ × لو$_{\text{أ}}$ ء = ١ ثم احسب قيمة لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ ١٦

(١٢) أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

(أ) ٣$^{\text{س}}$ = ٧ (ب) ٥$^{\text{س}-١}$ = ٢ (ج) ٤ × ٧$^{\text{س}-٢}$ = ١

الوحدة الثالثة

النهايات

Limits

مقدمة الوحدة

التفاضل والتكامل (calculus) أحد الفروع الحديثة لمادة الرياضيات، والتى تختص بدراسة النهايات والاتصال والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير فى الدوال وتحليلها.

ويدخل علم التفاضل والتكامل فى العديد من التطبيقات الهندسية والحياتية والتجارية والعلوم المختلفة، فكثيرًا ما نحتاجه لدراسة سلوك الدالة، والتغير فيها وحل بعض المشكلات التى يعجز علم الجبر وبعض العلوم الأخرى عن حلها.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف بعض الكميات غير المعنية مثل: $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\cdot \times \infty$
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن أ}^{\text{ن}-1}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون: $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$
- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية جبريًا وبيانيًا
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقرير قيمة النهاية.
- يتعرف تطبيقات متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال.

المصطلحات الأساسية

- كمية غير معينة *Unspecified Quantity*
- غير معرف *Undefined*
- نهاية دالة *Limit of a Function*
- تعويض مباشر *direct Substitution*
- مرافق *Conjugate*
- دالة كثيرة الحدود *Polynomial Function*
- نهاية الدالة عند اللانهاية *Limit of a Function at Infinity*

مخطط تنظيمى للوحدة

- **النهايات**
  - نهاية الدالة
    - مقدمة في النهايات
    - إيجاد نهاية الدالة عند نقطة
      - التعويض المباشر
      - التحليل
      - الضرب في المرافق
      - نظرية $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-1}$
    - إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

دروس الوحدة

الدرس (٣-١): مقدمة فى النهايات.

الدرس (٣-٢): إيجاد نهاية الدالة جبريًا.

الدرس (٣-٣): نهاية الدالة عند اللانهاية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

الوحدة الثالثة

٣-١ مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- كمية غير معينة Unspecified Quantities
- غير معرف Undefined
- قيمة دالة Value of a Function
- نهاية دالة Limit of a Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية فى علم التفاضل، ويعتمد هذا المفهوم بصفة أساسية على سلوك الدالة عند جميع نقاط تعريفها. ولدراسة هذا السلوك ينبغى التعرف على أنواع الكميات فى مجموعة الأعداد الحقيقية.

فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

(١) ٣ × ٥ (٢) ٢٨ ÷ ٤

(٣) ٤ - ٩ (٤) ٧ ÷ ٠

(٥) ٠ ÷ ٠ (٦) ∞ + ٣

(٧) ∞ ÷ ∞ (٨) ∞ - ∞

تذكر أن

∞ هى رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

الكمياتُ غير المعينة: Unspecified Quantities

تعلم

فى بند فكّر وناقش نجد أنَّ بعض نواتج العمليات محددًا تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ ، بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أنَّ: ٧ ÷ ٠ غير معرفة حيث إن القسمة على صفر لا معنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية ٠ ÷ ٠ حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضُرب كلٌّ منها فى صفر كان الناتج صفر لذلك فإن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا: $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ - ∞ ، ٠ × ∞ **(لماذا؟)**

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، - ∞ كالآتى:

لكل أ ∈ ع فإن:

١ ∞ + أ = ∞ ٢ -∞ + أ = - ∞

٣ ∞ × أ = $\begin{cases} -\infty \text{ ، إذا كان أ} < \text{٠} \\ \infty \text{ ، إذا كان أ} > \text{٠} \end{cases}$

٤ -∞ × أ = $\begin{cases} -\infty \text{ ، إذا كان أ} > \text{٠} \\ \infty \text{ ، إذا كان أ} < \text{٠} \end{cases}$

مثال

(١) أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

(أ) ٤ + ∞ (ب) ٣ - ∞ (جـ) ٠ ÷ ٣ (د) - ٥ ÷ ٠

(هـ) ∞ + ∞ (و) ٠ ÷ ٠ (ز) ٥ × ∞ (ح) - ٦ × - ∞

الحل

(أ) ∞ (ب) - ∞ (جـ) ٠ (د) غير معرفة

(هـ) ∞ (و) كمية غير معينة (ز) ∞ (ح) ∞

حاول أن تحل

(١) أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

(أ) ٠ ÷ (- ٢) (ب) ٧ ÷ ٠ (جـ) ٩ ÷ ∞ (د) ∞ × ٠

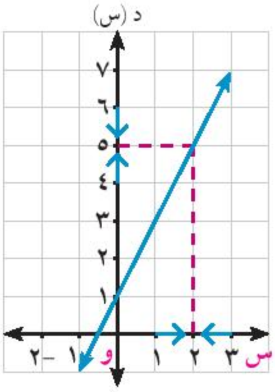
(هـ) (- ٧) × ∞ (و) (- ∞) + ١٢ (ز) ∞ + ∞ (ح) ∞ ÷ ∞

نهاية دالة عند نقطة :

في الشكل التالي: الخط البياني للدالة د المعرفة على ع **وفق القاعدة** د (س) = ٢ س + ١ أكمل الجداول الآتية، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

س	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
....	....
↓	↓
٢	٥
س > ٢	
س تقترب من ٢ جهة اليمين	

س	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
....	....
↓	↓
٢	٥
س < ٢	
س تقترب من ٢ من جهة اليسار	



لاحظ أن:

- عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليمين، ما القيمة التي تقترب إليها د (س).
- عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليسار، ما القيمة التي تقترب إليها د (س).

عندما تَقترب س من العدد (٢) من اليمين و من اليسار فإنَّ د(س) تَقترب من العَددِ (٥) ونُعبرٌ عن ذلك رياضيًّا كالآتي: $\lim\limits_{س \to ٢}$ (٢ س + ١) = ٥

تعريف ١

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل **وتكتب رمزيًا:** $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د(س) = ل

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

مثال

(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٢.

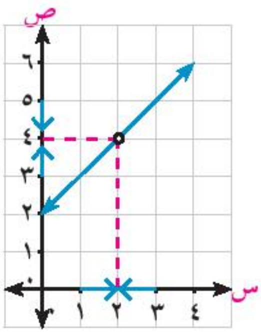
الحل

س	د(س)
٢,١	٤,١
٢,٠١	٤,٠١
٢,٠٠١	٤,٠٠١
....	....
↓	↓
٢	٤

س > ٢

س	د(س)
١,٩	٣,٩
١,٩٩	٣,٩٩
١,٩٩٩	٣,٩٩٩
....	....
↓	↓
٢	٤

س < ٢



من الشكل البيانى ومن بيانات الجدول الموضحةَ نجد أنَّ د(س) ⟵ ٤ عندما س ⟵ ٢ من جهة اليمين و من جهة اليسار ∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = ٤$

لاحظ من هذا المثال أنَّ:

١- الفجوة في الشكل البياني تَعني حالة من حالات عَدم التعيين $\frac{صفر}{صفر}$ عندما س = ٢ (أى أن الدالة غير معرفة عند س = ٢)

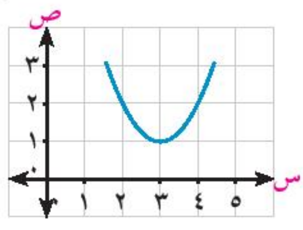
٢- وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعنى بالضرورة أنْ تكون الدالة معرفة عند س = ٢

حاول أن تحل

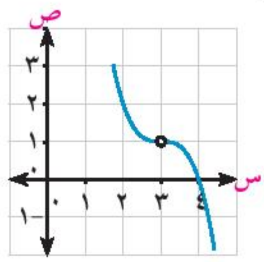
(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س + ١}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من (- ١)

مثال

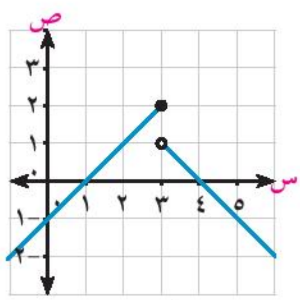
(٣) في كل من الأشكال الآتية أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ د(س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

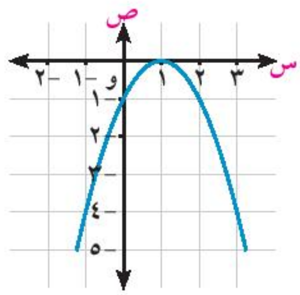
شكل (١) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س) = ١

شكل (٢) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س) = ١ (لاحظ أن الدالة غير معرفة عند س = ٣)

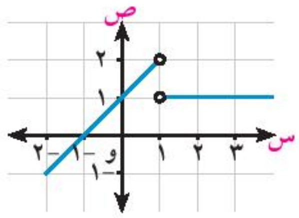
شكل (٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س) ليس لها وجود

حاول أن تحل

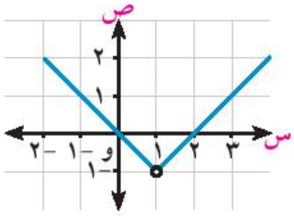
٣ في كل من الأشكال الآتية . أوجد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}}$ د(س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

من الأمثلة السابقة نَستنتج أنَّ:

وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أنْ تكون الدالة معرفة عند س = أ،
والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالةعند س = أ

تعبير شفهى: عبر بأسلوبك عن الفرق بين قيمة دالة عند نقطة ونهاية الدالة عند نفس النقطة.

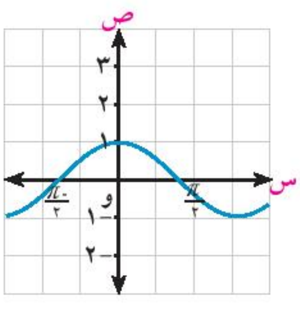
تمـــاريـن (٣-١)

أولا: تمارين على إيجاد النهاية بيانياً:

١ من الرسم البيانى أوجد:

أ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}$ د(س)

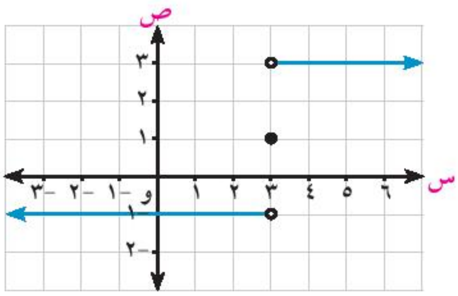
ب د(٠)



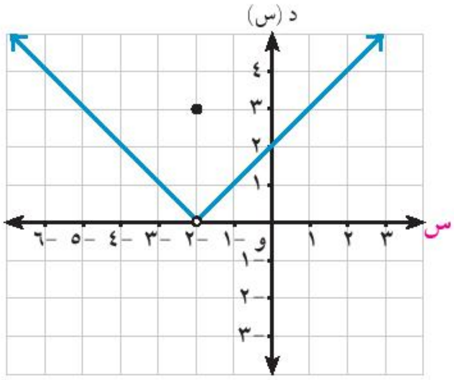
٢ من الرسم البيانى المقابل أوجد إنْ كان ذلك ممكنًا:

أ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س)

ب د(٣)



٣ من الرسم البيانى المقابل أوجد:



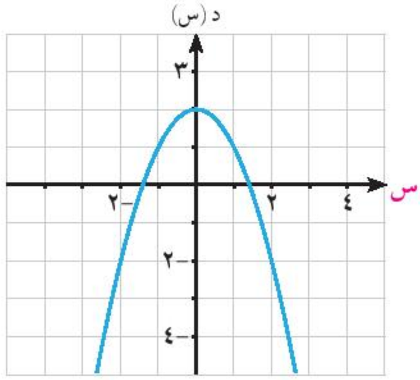
أ نهـــا د(س)
س ← -٢

ب د(- ٢)

جـ نهـــا د(س)
س ← ٠

د د(٠)

٤ الشكل البياني المقابل للدالة د(س) = ٢ - س^{٢}



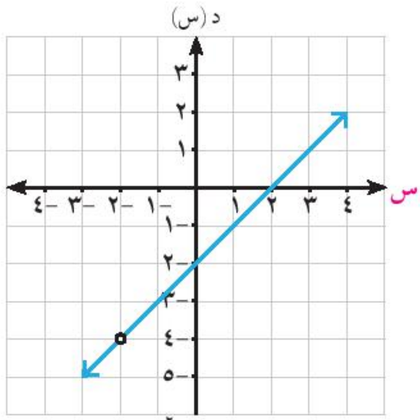
د(س) = ٢ − س^{٢}

من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ نهـــا (٢ - س^{٢})
س ← ٠

ب د(٠)

٥ الشكل البياني المقابل للدالة د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٢}$



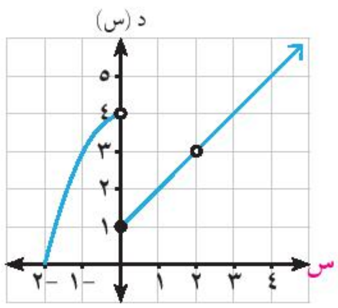
د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٢}$

من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ نهـــا د(س)
س ← -٢

ب د(- ٢)

٦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:



أ د (٠)

ب نهـــا د(س)
س ← ٠

جـ د (٢)

د نهـــا د(س)
س ← ٢

ثانيًا: إيجاد نهاية الدالة جبريًا:

٧ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

٨ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ (٣ س + ١)

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	⟵	-١	⟶	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ١}$

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	⟵	-١	⟶	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				⟵	؟	⟶			

٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the Limit of a Function Algebraically

في هذا الدرس نتعرف على بعض الطرق والنظريات التي تمكننا من حساب نهاية دالة عند نقطة دون الحاجة إلى عمل جدول وإيجاد النهاية عدديًّا أو رسم منحنى الدالة وإيجاد النهاية بيانيًّا.

نشاط

إذا كانت $\text{د}_1(\text{س}) = \text{س}^٢ + ١$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = ٢\,\text{س} + ٣$ أوجد

١ - $\text{د}_1(١)$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}_1(\text{س})$ (ماذا تلاحظ)

٢ - $\text{د}_2(٠)$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}_2(\text{س})$ (ماذا تلاحظ)

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a Polynomial Function*

نظرية ١

➤ **إذا كانت** د(س) كثيرة حدود، $\text{أ} \in \text{ع}$

فإن: $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$

مثال

١) أوجد نهاية كلٍّ من الدوال الآتية:

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥)$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} (-٤)$

الحل

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥)$

$= ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ **(بالتعويض المباشر)**

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} (-٤) = -٤$ **لاحظ أنَّ** د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم $\text{س} \in \text{ع}$

حاول أن تحل

١) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} (٢\text{س} - ٥)$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} (٣\text{س}^٢ + \text{س} - ٤)$

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة في إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$
- $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة *Limit of a Function*
- دالة كثيرة الحدود *Polynomial Function*
- تعويض مباشر *Direct Substitution*
- قسمة تركيبية *Synthetic Division*
- المرافق *Conjugate*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نظرية ٢

إذا كان $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د(س) = ل$ ، $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ ى(س) = م$

فإن:

١- $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ ك\ د(س) = ك . ل$ حيث $ك \in ع$

٢- $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ [د(س) \pm ى(س)] = ل \pm م$

٣- $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د(س) . ى(س) = ل . م$

٤- $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ \frac{د(س)}{ى(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط $م \neq ٠$

٥- $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ (د(س))^{ن} = ل^{ن}$ حيث $ل^{ن} \in ع$

مثال

٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow -١}{نها}\ \frac{٣س + ٧}{س^٢ + ٢س - ٥}$ ب) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نها}\ \frac{ظا س}{س}$

الحل

أ) $\underset{س \leftarrow -١}{نها}\ \frac{٣س + ٧}{س^٢ + ٢س - ٥} = \frac{\underset{س \leftarrow -١}{نها}\ (٣س + ٧)}{\underset{س \leftarrow -١}{نها}\ (س^٢ + ٢س - ٥)} = \frac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^٢ + ٢(-١) - ٥} = \frac{٤}{-٦} = \frac{-٢}{٣}$

ب) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نها}\ \frac{ظا س}{س} = \frac{\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نها}\ ظا س}{\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نها}\ س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

حاول أن تحل

٢) احسب النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\ \frac{س^٢ - ٣}{٢س + ١}$ ب) $\underset{س \leftarrow \pi}{نها}\ س\ جتا س$

نظرية ٣

◄ **إذا كانت** $د(س) = ى(س)$ لكل $س \in ع - \{أ\}$

وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ ى(س) = ل$ **فإن** $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د(س) = ل$

مثال

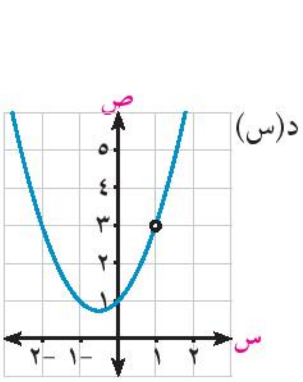
٣) أوجد: $\underset{س \leftarrow ١}{نها}\ \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$

الحل

نُلاحظ أنَّ $د(س) = \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ غير مُعينة عند $س = ١$

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفريَّة

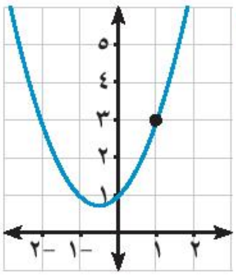
فإنه يمكن كتابة د(س) على الصورة:



$\text{د(س)} = \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} - ١)}} = \text{س}^٢ + \text{س} + ١$

$= \text{ق(س)}$

ق(س)



من ذلك نَجد أنَّ $\text{د(س)} = \text{ق(س)}$ لكل $\text{س} \neq ١$

وحيث أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \text{ ق(س)} = ٣$ (كثيرة الحدود)

فإنه طبقًا **للنظرية السابقة نستنتج أن** $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \text{ د(س)} = ٣$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١} = ٣$

مثال

استخدام المرافق

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} - ١}{\text{س} - ٤}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣}$

الحل

لاحظ أنَّ: $\text{د(س)} = \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} - ١}{\text{س} - ٤}$ غير معينة عند س = ٤

لذلك نبحث عن طرق نتخلَّص بها من العامل (س - ٤) فى كلٍّ من البسط و المقام.

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} - ١}{\text{س} - ٤} \times \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} - ٣ - ١}{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س} - ٣} + ١)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} - ٤}{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س} - ٣} + ١)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{١}{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٥)(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣)}{\text{س} + ٤ - ٩} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٥)(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣)}{(\text{س} - ٥)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \text{ س}(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣) = ٥(٣ + ٣) = ٣٠$

حاول أن تحل

٣ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢}$

نظرية ٤

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١}$$

مثال

٥ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٩} - ١}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٩} - ١^{١٩}}{س - ١} = ١٩ \times ١^{١٨} = ١٩$

نتائج

نتائج على النظرية:

١- $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + أ)^{ن} - أ^{ن}}{س} = ن\, أ^{ن-١}$

٢- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$

مثال

٦ أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

ب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

ج $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{١١} - ١}{س}$

د $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$

الحل

أ $= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{س} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

ب $= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times ٢^{٣} = ٢٠$

ج $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{١١} - ١^{١١}}{س} = ١١ \times ١^{١١-١} = ١١$

د $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ (-٢)^{٤} = ٨٠$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥}$

ب $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(هـ + ٣)^{٤} - ٨١}{هـ}$

ج $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ١}{س}$

تمارين (٣-٢)

أكمل ما يأتى:

(١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} (٣س + ١) = ...$

(٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س - ١}{س + ١} = ...$

(٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢} - س}{س} = ...$

(٤) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = ...$

(٥) $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \frac{س^{٥} - أ^{٥}}{س - أ} = ...$

(٦) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} = ...$

(٧) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١} = ...$

(٨) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢} = ...$

(٩) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨} = ...$

(١٠) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \left(\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}\right)^{٥} = ...$

(١١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - س - ٢}{٢س - ٤} = ...$

(١٢) $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٧} + ١}{س^{٥} + ١} = ...$

اختر الإجابة الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:

(١٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢} - ١}{س}$ تُساوى:

(أ) ٠

(ب) ١

(ج) ٢

(د) ليس للدالة نهاية

(١٤) $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٢} + س}{س + ١}$ تُساوى:

(أ) -١

(ب) صفر

(ج) ١

(د) ٣

(١٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{٢س^٢ - ٨}{س - ٢}$ تُساوي:

أ) ٢

ب) ٤

ج) ٦

د) ٨

(١٦) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س}}{س}$ تساوي

أ) ١

ب) $\frac{\pi}{٢}$

ج) $\frac{٢}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

(١٧) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{طا س}}{س}$ تساوي

أ) $\frac{\pi}{٢}$

ب) ١

ج) $\frac{٤}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

أوجد قيمةَ كلٍّ من النهايات الآتية (إنْ وجِدَت)

(١٨) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} (س^٢ - ٣س + ٢)$

(١٩) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

(٢٠) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} (٢س - \text{جا س})$

(٢١) $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا ٢س}}{س}$

(٢٢) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

(٢٣) $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـــا}} \frac{٩ - س}{س^٢ - ٨١}$

(٢٤) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ + ٤}{س - ٤}$

(٢٥) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س}$

(٢٦) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{٤س^٢ - ٦٤}{س - ٤}$

(٢٧) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ - ٢٥س}{س - ٥}$

(٢٨) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$

(٢٩) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س^{٢} + ٥}{٣س^{٢} - ٣}$

(٣٠) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٤}$

(٣١) $\underset{س \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٢} - س - ٣}{٤س^{٢} - ٩}$

(٣٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - س - ٢}$

(٣٣) $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٢} + ٥س - ٣}{س^{٢} + س - ٦}$

(٣٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$

(٣٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{٣} - ١}{س}$

(٣٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س^{٢}}{س + ١} - \dfrac{٣س + ٤}{س + ١}\right)$

(٣٧) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + س^{٢} - ٢}{س - ١}$

(٣٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٥س^{٢} - س}{س^{٤} + ٢س}$

(٣٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

(٤٠) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

(٤١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤س - ٣} - ٣}{س - ٣}$

(٤٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$

(٤٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٩س + ١٦} - ٤}{س}$

(٤٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - ١}{س - ١}$

(٤٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

(٤٦) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٦٤}{س - ٤}$

(٤٧) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$

(٤٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - ١٢٨}{٢س - ٤}$

(٤٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٦} - ٦٤}{س^{٥} - ٣٢}$

(٥٠) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٣} - ١٢٨}{س^{٢} - ١٦}$

٣-٣ نهاية دالة عند اللانهاية

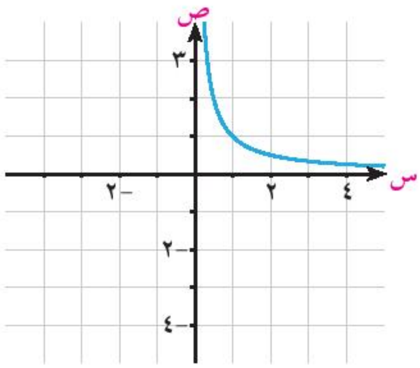
Limit of a Function at Infinity

نحتاج فى كَثيرٍ من التطبيقات العمليَّة والحياتية إلى مَعرفة سلوك الدالة د(س) عندما س ⟵ ∞ والنشاط التالى يوضِّح ذلك.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د حيث: د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠

ماذا تُلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تَقترب من ما لانهاية؟



من الشكل المرسوم نُلاحظ أنَّ:

➤ إنه كلما زادت قيم س واقتربت من مالا نهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر، لذلك نَقول إنَّ نهاية د(س) عندما تقترب س من ما لانهاية تُساوى صفر.

تعلم

نهاية دالة عند اللانهاية *Limit of a Function at Infinity*

نظرية

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$

نتيجة

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ {حيث ن ∈ ع$^{+}$، أ ثابت}

قواعد أساسية:

➤ $\lim\limits_{س \to \infty}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت

➤ إذا كان ن عددًا موجبًا أكبر من الواحد فإنَّ $\lim\limits_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$

لاحظ أن: نَظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضَرب أو قسمة دالتين عند س ⟵ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما س ⟵ ∞

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية. *Limit of a Function at Infinity*

الأدوات المستخدمة

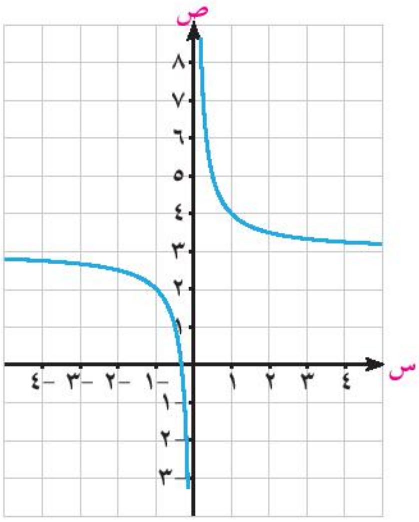
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال

(١) أوجد:

(أ) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٣\right)$ (ب) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(٤ - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)$

➤ ثم تَحقق من ذلك بيانيًّا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

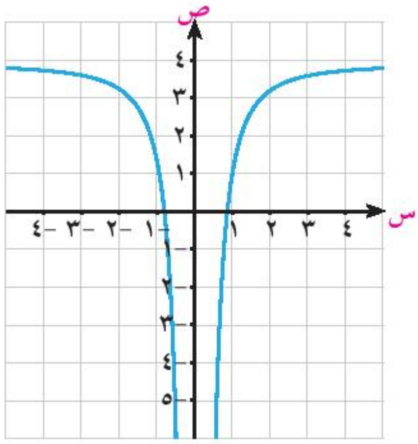


الحل

(أ) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٣\right) = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}} + \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} ٣$

$= ٠ + ٣ = ٣$

$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٣\right) = ٣$



(ب) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(٤ - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right) = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} ٤ - \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}$

$= ٤ - ٣ \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣}{\text{س}^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(٤ - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right) = ٤$

حاول أن تحل

(١) أوجد:

(أ) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{٥}{\text{س}} + ٢\right)$ (ب) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}} + ٥\right)$

مثال

(٢) أوجد: $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} (\text{س}^{٣} + ٤\text{س} - ٥)$

الحل

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} (\text{س}^{٣} + ٤\text{س} - ٥) = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \text{س}^{٣} \left(١ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}^{٣}}\right)$ وذلك بأخذ $\text{س}^{٣}$ عامل مشترك

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \text{س}^{٣} \times \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \left(١ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}^{٣}}\right) = \infty \times ١ = \infty$

حاول أن تحل

(٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \to \infty} (س^٣ + ٧س^٢ + ٢)$ ب) $\lim\limits_{س \to \infty} (٤ - ٣س - س^٣)$

مثال

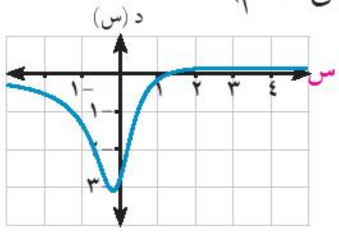
(٣) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س - ٣}{٣س^٢ + ١}$ ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^٢ - ٣}{٣س^٢ + ١}$ جـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^٣ - ٣}{٣س^٢ + ١}$

الحل

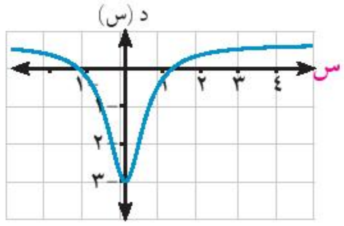
فى كل الحالات نقسم كل من البسط والمقام على $س^٢$ (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).

أ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س - ٣}{٣س^٢ + ١} = \frac{\lim\limits_{س \to \infty} (\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^٢})}{\lim\limits_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^٢})} = \frac{٠ - ٠}{٣ + ٠} = ٠$



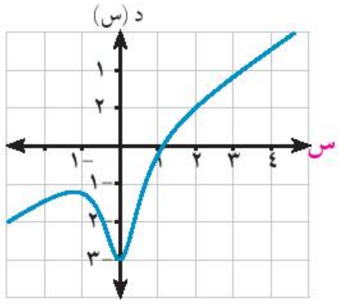
ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^٢ - ٣}{٣س^٢ + ١} = \frac{\lim\limits_{س \to \infty} (\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^٢})}{\lim\limits_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^٢})}$

$= \frac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٢}{٣}$



جـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^٣ - ٣}{٣س^٢ + ١} = \frac{\lim\limits_{س \to \infty} (٢س - \frac{٣}{س^٢})}{\lim\limits_{س \to \infty} (٣ + \frac{١}{س^٢})}$

$= \frac{\infty - ٠}{٣ + ٠} = \infty$



نستنتج من هذا المثال أنَّ: عند إيجاد $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام.
- النهاية تُساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- النهاية تعطى (∞ أو $-\infty$) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.
- يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولا تعتبر طريقة للحل.

حاول أن تحل

(٣) أوجد:

أ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥س^٢ - ٣س + ١}{٢س^٢}$ ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٤س^٣ - ٥س}{٨س^٤ + ٣س^٣ - ٢}$ جـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{-٦س^٢ + ١}{٣س^٢ + س - ٢}$

تمـــاريـن (٣-٣)

أكمل ما يأتى:

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(١ + \frac{٣}{س}\right) =$ ....

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢\right) =$ ....

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (-٧) =$ ....

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (س^{٢} - ٣) =$ ....

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٢س + ١}{س}$ ....

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٣} - ٥}{س^{٢} + ١} =$ ....

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٥} + ٣}{س^{٣} - ٥} =$ ....

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢} - ١}} =$ ....

⑨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^{٢}}\right) =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٦س}{٢س + ٣}$ تُساوى:

أ) صفر ب) ٢ جـ) ٣ د) ∞

⑪ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ∞

⑫ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س + ٣}{٢ - س^{٢}}$

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) ∞

⑬ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^{٢} + ١}{٢س - ١}$

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ١ د) ∞

⑭ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \sqrt{\frac{١ + س}{٤س - ١}}$

أ) -١ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

(١٥) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١)$

(١٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٧\text{س}}{٢ + ٣\text{س}}$

(١٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ٣}$

(١٩) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٣}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤}$

(٢١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١}$

(٢٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٢}{٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١}$

(٢٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ١}{٤\text{س}^{٣} - ٥\text{س} - ١}$

(٢٤) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٦}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

(٢٥) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٧ + \frac{٢\text{س}^{٢}}{(\text{س} + ٣)^{٢}}\right)$

(٢٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٣\text{س}^{٢}} - \frac{٥\text{س}}{٢ + \text{س}}\right)$

(٢٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}}{٢\text{س}^{٢} + ١} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{(\text{س} - ٣)^{٢}}\right)$

(٢٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-\text{س}}{\sqrt{٤ + \text{س}^{٢}}}$

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

حساب المثلثات (باللاتيني Trigonometry) هو أحد فروع مادة الرياضيات بوجه عام والهندسة العامة بوجه خاص حيث يوجد العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه في صورة دوال مثلثية (دالة الجيب، دالة جيب التمام، دالة الظل، ....)، وكان قدماء المصريين أول من عمل بقواعد حساب المثلثات، إذ استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم، ترجع معرفتنا لعلم حساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها وصاغوا نظرياتها، كما قدم البيروني برهانًا لمساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه. كما أن الغرب عرفوا هندسة أقليدس عن طريق العرب. ومن مآثر العرب في حساب المثلثات هو استخدامهم النسب المثلثية الست حيث كشف التباني العلاقة الخاصة بالمثلث الكروي القائم الزاوية كما اكتشف قانون إيجاد ارتفاع الشمس.

لعلم حساب المثلثات تطبيقات كثيرة في حساب المسافات والزوايا التي تستخدم في إنشاء المباني والملاعب الرياضية والطرق وفي صناعة المحركات والأجهزة الكهربية والميكانيكية، كما يستخدم حساب المثلثات في حساب المسافات الجغرافية والفلكية وفي أنظمة الاستكشافات بالأقمار الصناعية.

مخرجات تعلم الوحدة :

في نهاية هذه الوَحْدةِ وتنفيذا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يَتعرف قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث، والذى يَنص على أنه فى أيِّ مثلث تَتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يَستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- يَستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث .
- يَستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأيِّ مثلث وطول نِصف قُطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث.
- يَتعرف قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانون (قاعدة الجيب، وجيب التمام) لأى مثلث.

المصطلحات الأساسية

- حساب مثلثات — Trigonometry
- قاعدة الجيب — Sine Rule
- قاعدة جيب التمام — Cosine Rule
- زاوية حادة — Acute Angle
- زاوية منفرجة — Obtuse Angle
- زاوية قائمة — Right Angle
- أقصر ضلع — Shortest Side
- أطول ضلع — Longest Side
- طول ضلع مجهول — Missing Length
- زاوية مجهولة — UnKnown Angle
- أصغر زاوية — Smallest Angle
- أكبر زاوية — Largest Angle
- مساحة المثلث — The Area of the Triangle
- أطوال أضلاع المثلث — The Sides Lenghtes of a Triangle
- زاوية مقابلة — The Opposite Angle of an Side

دروس الوحدة

الدرس (٤-١): قانون (قاعدة) الجيب

الدرس (٤-٢): قانون (قاعدة) جيب التمام

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة

٤-١ قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

سوف تتعلم
- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة الجيب.
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها

المصطلحات الأساسية
- قاعدة الجيب *Sine Rule*
- زاوية حادة *Acute Angle*
- زاوية منفرجة *Obtuse Angle*
- زاوية قائمة *Right Angle*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تذكر أن
الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة متساوية في القياس.
الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة.

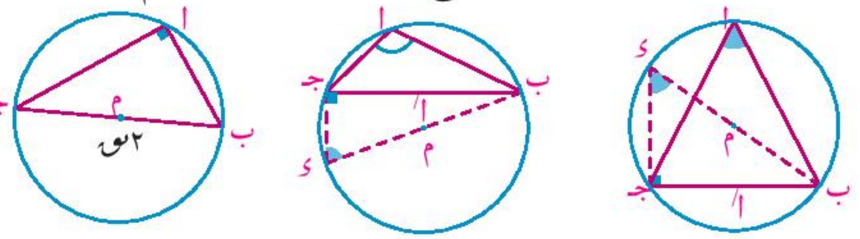
تمهيد

سبق أن تَعلَّمت كيفية حل المثلث القائم الزاوية، والآن سوف نتعامل مع مثلثات غير قائمة الزوايا لتتعلم كيفية إيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا هذه المثلثات.
تعلم أنَّ كل مثلث يتكون من ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا، و إذا أعطيت أى ثلاثة عناصر منها (على أن يكون من بينها طول أحد الأضلاع على الأقل) فإنه يمكنك إيجاد العناصر الثلاثة الأخرى، وذلك باستخدام قانونى الجيب وجيب التمام، وعندئذ نقول: إنه أمكننا حل المثلث.

تعلم

قانون (قاعدة) الجيب *The Sine Rule*

تمثل الأشكال الآتية ثلاثة أنواع من المثلثات.



شكل (١)	شكل (٢)	شكل (٣)
ق(∠أ) = ق(∠ى)	ق(∠أ) = ١٨٠° - ق $(\hat{ى})$	ق(∠أ) = ٩٠°

فى الشكل (١) حيث △ أ ب جـ حاد الزوايا جا أ = جا ى = $\frac{\text{أ/}}{\text{٢نق}}$

وبالمثل يمكن استنتاج أن جا ب = $\frac{\text{ب/}}{\text{٢نق}}$، جا جـ = $\frac{\text{جـ/}}{\text{٢نق}}$

فى الشكل (٢) حيث △ أ ب جـ منفرج الزاوية فى أ

جا أ = جا (١٨٠° - ى) = جا ى

[**لاحظ أن** : جا (١٨٠° - ى) = جا ى]

جا ى = $\frac{\text{أ/}}{\text{٢نق}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{أ/}}{\text{٢نق}}$

وبالمثل يمكن استنتاج أنَّ

جا ب = $\frac{\text{ب/}}{\text{٢نق}}$ ، جا جـ = $\frac{\text{جـ/}}{\text{٢نق}}$ «استعن بمعلمك لاثبات صحة ذلك»

لاحظ أن
أ/ ، ب/، جـ/ رموز لأطوال الأضلاع $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ فى △أ ب جـ على الترتيب.

والآن: حاول إثبات نفس العلاقة السابقة في △ أ ب جـ القائم الزاوية فى أ

وبصفة عامة قانون (قاعدة) الجيب فى المثلث أ ب جـ هى:

$\frac{أ َ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ} =$ ٢نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث.

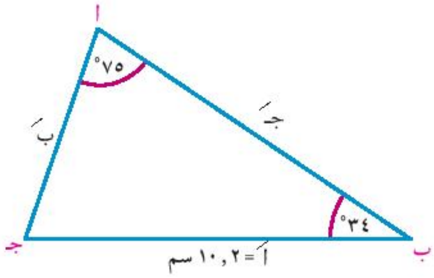
أي أن: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.

استخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطول أضلاع أي مثلث:

مثال

(١) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق (∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب)= ٣٤°، أَ = ١٠,٢سم، أوجد كلًّا من بَ، جـَ لأقرب عدد صحيح.

الحل



∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٧٥° + ٣٤°)

= ٧١°

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد بَ ، جـَ

∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{١٠,٢}{جا ٧٥°} = \frac{بَ}{جا ٣٤°} = \frac{جـَ}{جا ٧١°}$

بَ = $\frac{١٠,٢ \times جا ٣٤°}{جا ٧٥°} \simeq$ ٦سم باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ ← 1 0 . 2 × sin 3 4 ,,,) ÷ sin 7 5 ,,,) =

جـَ = $\frac{١٠,٢ \times جا ٧١°}{جا ٧٥°} \simeq$ ١٠سم باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ ← 1 0 . 2 × sin 7 1 ,,,) ÷ sin 7 5 ,,,) =

حاول أن تحل

(١) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق(∠جـ) = ٦١°، ق(∠ب) = ٧١°، بَ = ٩١سم، فأوجد كل من أَ ، جـَ.

إيجاد طول أكبر ضلع فى المثلث

تذكر أن

أكبر ضلع فى المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية والعكس أصغر زاوية فى المثلث هى المقابلة لأصغر ضلع.

مثال

(٢) أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٤٩° ١١َ ١١ً ، ق(∠ب) = ٧٦° ١٧َ ، جـَ = ١١,٢٢سم مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

الحل

∵ ق(∠جـ) = ١٨٠° - [ق (∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠° - (١١َ ٤٩° + ١٧َ ٧٦°) = ٣٢َ ٥٤°

∴ أكبر ضلع هو المقابل لزاوية ب، أيْ أنّ المطلوب هو إيجاد بَ

∵ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ١٧َ ٧٦°}} = \frac{\text{١١,٢٢}}{\text{جا ٣٢َ ٥٤°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{١١,٢٢ × جا ١٧َ ٧٦°}}{\text{جا ٣٢َ ٥٤°}}$ ≃ ١٣,٣٨سم

حاول أن تحل

(٢) أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٤٣°، ق(∠ب) = ٦٥°، جـَ = ٨,٤سم مقربًا الناتج لرقم عشري واحد.

حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the Triangle Using the Sine Rule*

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات العناصر المجهولة فيه إذا عُلِمَ منه ثلاثة عناصر من العناصر الستة بشرط أنْ يكون من بين العناصر المعلومة طول أحد الأضلاع على الأقل، لأنه لايمكن حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسات ثلاث زوايا، ويسمح لنا قانون الجيب بحل المثلث، إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه.

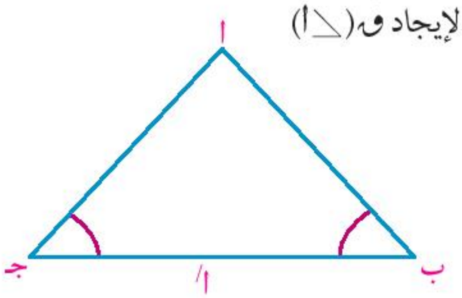
حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه:

لاحظ أنه لحل المثلث أ ب جـ إذا عُلِمَ فيه قياسا الزاويتين ب، جـ والطول أَ نتبع التالى:

١- نستخدم العلاقة ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠° لإيجاد ق(∠أ)

٢- نستخدم قانون الجيب: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ لإيجاد بَ

٣- نستخدم قانون الجيب: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ لإيجاد جـَ

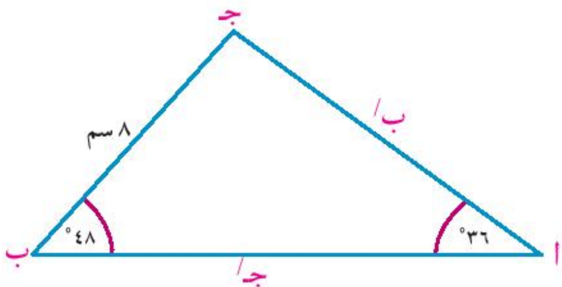


وفيما يلى أمثلة توضّح ذلك:

مثال

(٣) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب) = ٤٨°، أَ = ٨سم مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



نوجد ق(∠جـ) من العلاقة:

ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°

نوجد بَ من قانون الجيب كالآتي:

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\frac{\text{٨}}{\text{جا ٣٦°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٤٨°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{٨ × جا ٤٨°}}{\text{جا ٣٦°}}$ ∴ بَ ≃ ١٠,١١٥سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي: ابدأ ← 8 × sin 4 8 ÷ sin 3 6 =

$\because \frac{أَ}{جا أ} = \frac{جَـ}{جا جـ}$ $\therefore \frac{٨}{جا ٣٦°} = \frac{جَـ}{جا ٩٦°}$

$\therefore جَـ = \frac{٨ \times جا ٩٦°}{جا ٣٦°} \simeq ١٣,٥٣٥$ سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي: ابدأ ← 8 × sin 9 6 ÷ sin 3 6 =

حاول أن تحل

(٣) حل المثلث س ص ع فيه صَ = ١٠٧,٢ سم، ق(∠س) = ١٦ ٣٣َ °، ق(∠ع) = ١٩ ٤٤َ °

تطبيقات هندسية — Geometrical Applications

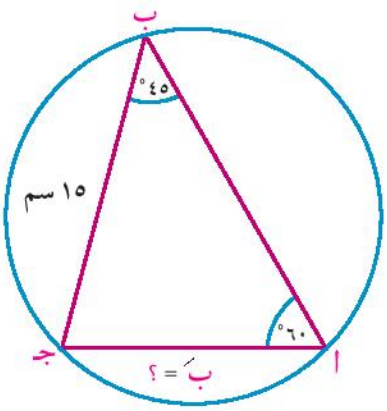
العلاقة بين قاعدة الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث

سبق أن علمنا أن: $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{حَـ}{جا حـ} = ٢نق$ حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث

مثال

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٥ سم، ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أوجد جـَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

الحل



نوجد ق(∠جـ) كالآتي:

ق(∠جـ) = ١٨٠° - [٦٠° + ٤٥°]

= ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥°

نستخدم قانون الجيب لإيجاد جـَ:

$\because \frac{جَـ}{جا جـ} = \frac{أَ}{جا أ}$ $\therefore \frac{جَـ}{جا ٧٥°} = \frac{١٥}{جا ٦٠°}$

$جَـ = \frac{١٥ \times جا ٧٥°}{جا ٦٠°} \simeq ١٧$ سم

لإيجاد نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ نستخدم العلاقة:

$\frac{أَ}{جا أ} = ٢نق$ $\therefore \frac{١٥}{جا ٦٠°} = ٢نق$ $\therefore ٢نق \times جا ٦٠° = ١٥$

$\therefore نق = \frac{١٥}{٢ جا ٦٠°} \simeq ٩$ سم

ابدأ ← 1 5 ÷ (2 sin 6 0) =

حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٢٣ ٦٤َ °، ق(∠ب) = ٢٣ ٧٢َ °، جـَ = ١٨ سم، أوجد كل من أَ ، بَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ .

مثال

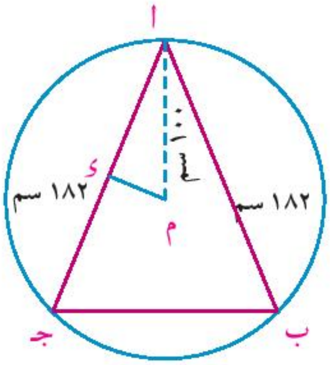
تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

⑤ ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م، وطول نصف قُطرها ١٠٠سم فإذا كان ا ب = ا جـ = ١٨٢سم أوجد

(أ) طول $\overline{\text{ب جـ}}$ لأقرب رقم عشري واحد.

(ب) مساحة سطح المثلث ا ب جـ لأقرب سنتيمتر مربَّع.



الحل

نوجد ق(∠ب) كالآتي:

في △ ا ب جـ يكون:

$\frac{\text{ا جـ}}{\text{جا ب}} = ٢\text{نق}$ (قاعدة الجيب)

$\frac{١٨٢}{\text{جا ب}} = ٢٠٠$ جا ب = $\frac{١٨٢}{٢٠٠}$ = ٠,٩١

∴ ق(∠ب) = ١٩ً ٣٠َ ٦٥°

(ق(∠ب) = ق(∠جـ) لأن المثلث ا ب جـ متساوى الساقين وكلاهما زاوية حادة)

نوجد ق(∠ا)

ق(∠ا) = ١٨٠° - ٢ × (١٩ً ٣٠َ ٦٥°) ≃ ٢٢ً ٥٩َ ٤٨°

نوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ باستخدام قانون الجيب كالآتي:

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٢٢ً ٥٩َ ٤٨°}} = \frac{١٨٢}{\text{جا ١٩ً ٣٠َ ٦٥°}}$ ∴ ب جـ = $\frac{\text{١٨٢ × جا ٢٢ً ٥٩َ ٤٨°}}{\text{جا ١٩ً ٣٠َ ٦٥°}}$ ≃ ١٥٠,٩سم

ابدأ → 1 8 2 × sin 4 8 °′″ 5 9 °′″ 2 2 °′″) ÷

sin 6 5 °′″ 3 0 °′″ 1 9 °′″) =

مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ا ب × ا جـ جا ا

= $\frac{1}{2}$ × ١٨٢ × ١٨٢ جا ٢٢ً ٥٩َ ٤٨° ≃ ١٢٤٩٧ سم^2

حاول أن تحل

⑤ ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ا جـ = ١٠,٣سم، مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨,٤سم أوجد:

(أ) طول القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ (ب) مساحة سطح المثلث ا ب جـ

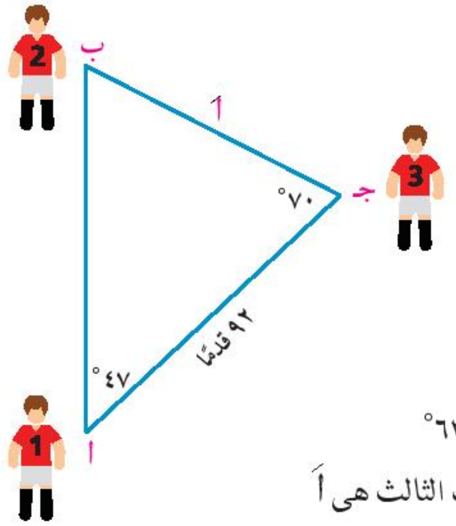
تطبيقات حياتية على قاعدة الجيب

Life Applications on the Sine Rule

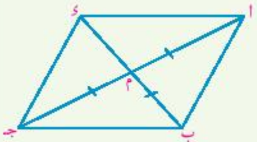
يُمكن استخدام قاعدة الجيب في حل الكثير من التطبيقات وذلك برسم مثلث ثم حل هذا المثلث لإيجاد المطلوب.

مثال

٦ الربط بالرياضة: يُمثِّل الشكل المقابل ثلاثة لاعبين من فريق كرة القدم خلال إحدى المباريات.
أوجد المسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث لأقرب قدم.



إرشاد



مساحة سطح متوازى الاضلاع
أ ب جـ ء = ٢ م(△ أ ب جـ)
ومساحة △ أ ب جـ =
$\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ جا ب أ جـ

الحل

ق(∠ ب) = ١٨٠° - (٧٠° + ٤٧°) = ٦٣°

والمسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث هى أَ

فيكون: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا } 47^\circ} = \frac{92}{\text{جا } 63^\circ}$ ∴ أَ = $\frac{92 \times \text{جا } 47^\circ}{\text{جا } 63^\circ}$ ≃ ٧٦ قدمًا

باستخدام الآلة الحاسبة ابدأ ← 9 2 × sin 4 7) ÷ sin 6 3) =

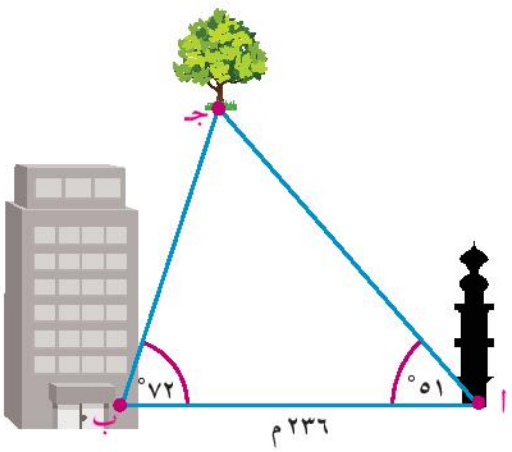
المسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث هو تقريبًا ٧٦ قدمًا

حاول أن تحل

٦ أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثانى لأقرب قدم.

مثال

٧ الربط بالجغرافيا: فى الشكل التالى ثلاثة مواقع جغرافية تُشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع أ، والموقع ب، ٢٣٦مترًا، ، وكان قياس الزاوية عند الموقع ب يساوى ٧٢°، وقياس الزاوية عند الموقع أ تساوي ٥١° أوجد:



أ المسافة بين الموقع جـ والموقع ب مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

ب مساحة الأرض التى تمثل المواقع أ، ب، جـ رؤوسًا لها مقربًا الناتج لأقرب متر مربع.

الحل

أ نوجد ق(∠جـ) في △ أ ب جـ: ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٥١° + ٧٢°) = ٥٧°

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد طول $\overline{\text{ب جـ}}$:

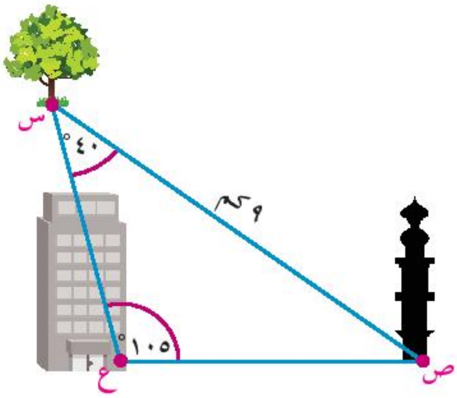
∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}}$ (قاعدة الجيب) ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } 51^\circ} = \frac{236}{\text{جا } 57^\circ}$ ومنها ب جـ = $\frac{236 \times \text{جا } 51^\circ}{\text{جا } 57^\circ}$ = ٢١٨,٦٨٧١ ≃ ٢١٩ مترًا

ب نوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ بمعلومية أَ، جـَ، ق(∠ب)

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أَ جَ جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ٢١٨,٦٨٧١ × ٢٣٦ × جا ٧٢° ≃ ٢٤٥٤٢ م^{٢}.

حاول أن تحل



(٧) فى الشكل المقابل ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع س والموقع ص تُساوى ٩ كم ، وقياس الزاوية عند الموقع س تساوي ٤٠°، وقياس الزاوية عند الموقع ع تُساوى ١٠٥°، فأوجد:

(أ) المسافة بين الموقع س والموقع ع.

(ب) مساحة سطح المثلث الذى رؤوسة المواقع الثلاثة س، ص، ع.

تمــاريـن (٤ - ١)

أكمل:

(١) فى أيِّ مثلث تَتناسب أطوال أضلاع المثلث مع ....

(٢) اب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠$\sqrt{٣}$ سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث تُساوى ....

(٣) مثلث ا ب جـ فيه ق(∠ا) = ٦٠°، ق(∠جـ) = ٤٠°، جـَ = ٨,٤ سم فإن اَ = ... سم

(٤) فى المثلث ا ب جـ يكون $\frac{٢ بَ}{جا ب}$ = ... نق

(٥) دائرة طول قطرها ٢٠سم، تمر برؤوس المثلث اب جـ الحاد الزوايا الذى فيه ب جـ = ١٠سم فإن ق(∠ا) = ...°

(٦) مساحة المثلث المتساوى الاضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(٧) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ الذى فيه ق(∠ا) = ٣٠°، اَ = ١٠سم هو

(أ) ١٠سم (ب) ٢٠سم (جـ) ٥سم (د) ٤٠سم

(٨) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ يساوى ٤سم، ق(∠ا) = ٣٠° فإن طول اَ هو

(أ) ٤سم (ب) ٢سم (جـ) ٤$\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

(٩) فى المثلث ا ب جـ يكون المقدار ٢نق جا ا مساويًا

(أ) اَ (ب) بَ (جـ) جـَ (د) مـ(△ا ب جـ)

(١٠) إذا كانت نق هى طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{\text{ص َ}}{\text{جا ص}}$ يساوى

أ) نق ب) ٢ نق ج) $\frac{1}{2}$ نق د) ٤ نق

(١١) المثلث ل م ن فيه، ق(ل) = ٣٠°، م ن = ٧سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسة تساوى:

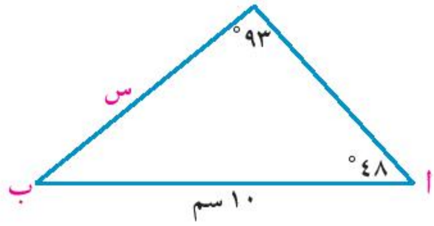
أ) ٧سم ب) ٣,٥سم ج) ١٤سم د) $\frac{14}{\sqrt{3}}$

(١٢) فى المثلث س ص ع إذا كانت ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن س َ: ص َ: ع َ تساوى

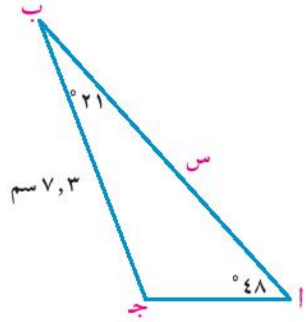
أ) ٤ : ٣ : ٢ ب) ٣ : ٤ : ٦ ج) ٦ : ٤ : ٣ د) ٦ : ٣ : ٤

(١٣) باستخدام قانون الجيب أوجد س لأقرب جزء من عشرة.

أ)



ب)



حل كُلَّ مثلث أ ب جـ باستخدام قانون الجيب إذا عَلمتَ أن:

(١٤) ق(∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب) = ٣٤°، أ َ = ١٠,٢سم

(١٥) ق(∠أ) = ١٩°، ق(∠جـ) = ١٠٥°، جـ َ = ١١,١سم

(١٦) ق(∠أ) = ١١٦°، ق(∠جـ) = ١٨°، أ َ = ١٧سم

(١٧) ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب) = ٧٧°، ب َ = ٢,٥سم

(١٨) ق(∠أ) = ٤٩° ١١َ، ق(∠ب) = ٦٧° ١٧َ، جـ َ = ٢٢,١١سم

(١٩) ق(∠ب) = ١١٥° ٤َ، ق(∠جـ) = ١١° ١٧َ، جـ َ = ١٦,٢٥سم

أوجد طول قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ فى كُلّ حالة مما يلى:

(٢٠) ق(∠أ) = ٧٥°، أ َ = ٢١سم

(٢١) ق(∠ب) = ٥٠°، ب َ = ٩٠سم

(٢٢) ق(∠جـ) = ١٠٢°، جـ َ = ١١سم

(٢٣) ق(∠أ) = ٧٠°، أ َ = ٨,٥سم

(٢٤) فى المثلث أ ب جـ، ق(∠أ) = ٦٧° ٢٢َ، ق(∠جـ) = ٤٤° ٣٣َ، ب َ = ١٠٠ سم، أوجد محيط المثلث أ ب جـ ومساحة سطحه.

(٢٥) في المثلث س ص ع إذا كان ص َ = ٦٨,٤سم، ق(∠ص) = ١٠٠°، ق(∠ع) = ٤٠°، أوجد س َ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع، ثم أوجد مساحة سطح المثلث .

(٢٦) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٢٢° ٣٧َ، ق(∠ب) = ٦٧° ٢٣َ ومحيطه ٣٠سم أوجد كل من أ َ، ب َ لأقرب سنتيمتر

٤-٢ قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث.
- نمذجة و حل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

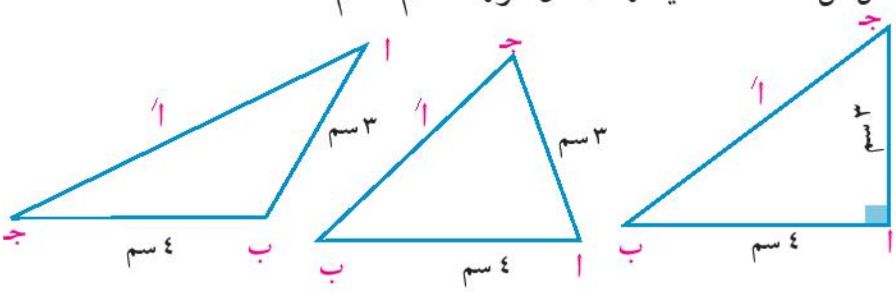
- قاعدة جيب التمام Cosine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

كل من المثلثات التالية لها ضلعان طولهما ٣سم، ٤سم .



شكل (١)　　　شكل (٢)　　　شكل (٣)

أ) من شكل (١) $\angle$ا قائمه ، أوجد أَ.

ب) ما القيم الممكنة لـ أَ في حالة ما تكون $\angle$ا زاوية حادة (شكل ٢) ؟

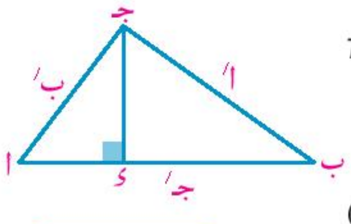
جـ) ما القيم الممكنة لـ أَ فى حالة ماتكون $\angle$ا زاوية منفرجة (شكل ٣) ؟

د) هل يمكن حل المثلثين فى شكلى (٢) ، (٣) إذا علمتوه ($\angle$ا) باستخدام قانون الجيب؟ فسرِّ إجابتك.

يُساعدنا قانون (قاعدة) جيب التمام فى حَلِّ مثل هذه المثلثات.

تعلم

قانون (قاعدة) جيب التمام The Cosine Rule



في الشكل المقابل: $\overline{جـ ى} \perp \overline{ا ب}$

في $\triangle$ ب جـ ى : (ب جـ)^{٢} = (جـ ى)^{٢} + (ب ى)^{٢}

(من فيثاغورث)

(ب جـ)^{٢} = (جـ ى)^{٢} + (اب - ا ى)^{٢} وبفك الأقواس

= (جـ ى)^{٢} + (ا ى)^{٢} + (ا ب)^{٢} - ٢اب.ا ى

= (ا جـ)^{٢} + (ا ب)^{٢} - ٢اب.ا ى

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا ا

لاحظ أن

- (جـ ى)^{٢}+(ا ى)^{٢}=(ا جـ)^{٢}
- ا ى = اجـ. جتا ا

فكر: أوجد قيمة كل من بَ^{٢} ، جـَ^{٢} بدلالة أَ ، بَ ، جـَ وقياسات زوايا $\triangle$ ا ب جـ.

يَنص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه : فى أىِّ مثلث أ ب جـ يكون :

أَ^٢ = بَ^٢ + جـَ^٢ - ٢ بَ جـَ جتا أ ، بَ^٢ = جـَ^٢ + أَ^٢ - ٢ جـَ أَ جتا ب

، جـَ^٢ = أَ^٢ + بَ^٢ - ٢ أَ بَ جتا جـ

إيجاد طول ضلع مجهول فى مثلث.

مثال

(١) س ص ع مثلث فيه سَ = ٢٤,٣سم ، صَ = ٢٢,٨سم ، ق(∠ ع) = ٤٢° أوجد عَ مقربًا لرقم عشري واحد.

الحل

عَ^٢ = سَ^٢ + صَ^٢ - ٢سَ صَ جتا ع

= (٢٤,٣)^٢ + (٢٢,٨)^٢ - ٢ × ٢٤,٣ × ٢٢,٨ جتا ٤٢° ≃ ٢٨٦,٨٧

ع ≃ ١٦,٩ سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

ابدأ ← 2 4 . 3 x^2 + 2 2 . 8 x^2 − 2 × 2 4 . 3

× 2 2 . 8 cos 4 2 = √ ANS =

حاول أن تحل

(١) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧٢,٨ سم ، بَ = ٥٨,٤سم ،ق(∠ جـ) = ٦٤,٨° أوجد جـَ مقربًا لرقم عشري واحد.

إيجاد قياس زاوية فى المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

سبق أن علمت أن :

أَ^٢ = بَ^٢ + جـَ^٢ - ٢ بَ جـَ جتا أ (قاعدة جيب التمام)

أي أن : ٢بَ جـَ جتا أ = بَ^٢ + جـَ^٢ - أَ^٢

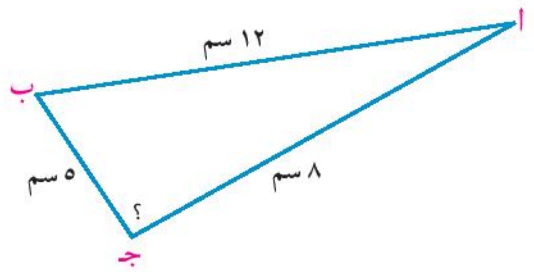
فتكون: جتا أ = (بَ^٢ + جـَ^٢ - أَ^٢) / (٢بَ جـَ) (بالقسمة على ٢بَ جـَ)

كما يمكن استنتاج أن:

جتا ب = (جـَ^٢ + أَ^٢ - بَ^٢) / (٢ جـَ أَ) ، جتا جـ = (أَ^٢ + بَ^٢ - جـَ^٢) / (٢ أَ بَ)

استخدام قاعدة جيب التمام لأي مثلث في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث.

مثال



(٢) من الشكل المقابل، أوجد ق($\angle$ جـ)

الحل

$\text{جتا جـ} = \dfrac{\text{أ}^{\prime 2} + \text{ب}^{\prime 2} - \text{جـ}^{\prime 2}}{\text{٢ أَ بَ}}$ (قاعدة جيب التمام)

$= \dfrac{(٥)^٢ + (٨)^٢ - (١٢)^٢}{٢ \times ٥ \times ٨}$ (بالتعويض)

$= \dfrac{-٥٥}{٨٠}$

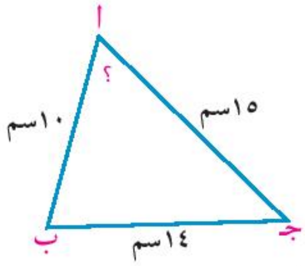
وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى

ابدأ ← `5` `x²` `+` `8` `x²` `-` `12` `x²` `÷` `(` `2` `×` `5` `×` `8` `)` `=`

ونلاحظ أن جيب تمام الزاوية سالب وبالتالى $\angle$ جـ منفرجة فيكون `SHIFT` `cos` `=` `°'''`

ق($\angle$ جـ) $\simeq$ ٥٧ً ٢٥َ ١٣٣°

حاول أن تحل



(٢) من الشكل المقابل أوجد ق($\angle$ أ)

مثال

(٣) أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ل م ن ، إذا عُلِمَ أنَّ لَ = ٧,٥سم ، مَ = ١٢,٥سم، نَ = ١٧,٥سم، ومن ذلك أثبت أنه فى هذا المثلث يكون :

جتا ن - ٣ $\sqrt{٣}$ جا ن + ٥ = ٠

تذكر أن

جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° - ٦٠°)

= - جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

جا ١٢٠ = جا (١٨٠° - ٦٠°)

= جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الحل

أكبر زاوية هى المقابلة لأكبر ضلع؛ لذلك تكون $\angle$ ن هى أكبر زاوية فى المثلث

ويكون : جتا ن = $\dfrac{\text{لَ}^٢ + \text{مَ}^٢ - \text{نَ}^٢}{\text{٢ لَ مَ}} = \dfrac{(٧,٥)^٢ + (١٢,٥)^٢ - (١٧,٥)^٢}{٢ \times ٧,٥ \times ١٢,٥} = -\dfrac{١}{٢}$

$\therefore$ جتا ن = $-\frac{١}{٢}$ $\quad$ $\therefore$ ق($\angle$ ن) = ١٢٠°

ابدأ ← `7` `.` `5` `x²` `+` `1` `2` `.` `5` `x²` `-` `1` `7` `.` `5` `x²` `=`

`÷` `(` `2` `×` `7` `.` `5` `×` `1` `2` `.` `5` `)` `=`

`SHIFT` `cos` `ANS` `)` `=` `°'''`

الطرف الأيسر = جتا ن - ٣ $\sqrt{٣}$ جا ن + ٥ = جتا ١٢٠° - ٣ $\sqrt{٣}$ جا ١٢٠° + ٥

= $-\frac{١}{٢}$ - ٣ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ = صفر = الطرف الأيمن.

حاول أن تحل

(٣) المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٥سم ، جـَ = ١٨ سم ، أثبت أن ق($\angle$ جـ) = ٢ ق($\angle$ أ)

استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث

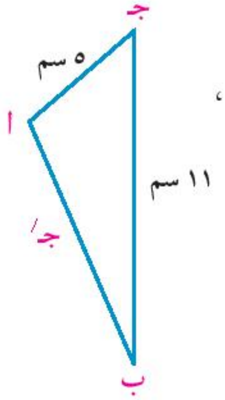
يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما وفى هذه الحالة يوجد مثلث وحيد.

حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

Solving the Triangle in Terms of Lengths of Two Sides and the Measure of the Included Angle

مثال

٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ١١سم ، بَ = ٥سم ، ق(∠جـ) = ٢٠°



الحل

∵ جـَ^{2} = أَ^{2} + بَ^{2} - ٢أَ بَ جتا جـ

∴ جـَ^{2} = (١١)^2 + (٥)^2 - ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠°

∴ جـَ = $\sqrt{(١١)^2 + (٥)^2 - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ جتا } ٢٠}$

≃ ٦,٥٢٩سم

ابدأ ← √ 1 1 x^2 + 5 x^2 − 2 × 1 1 × 5 cos 2 0 =

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{أَ}^2}{\text{٢بَ جـَ}}$$

$$= \frac{(٥)^2 + (٦,٥٢٩)^2 - (١١)^2}{٢ \times ٥ \times ٦,٥٢٩} \simeq -٠,٨١٧$$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٤٤,٧٨٦°

ق(∠ب) = ١٨٠° - [ق(∠أ) + ق(∠جـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°]

= ١٥,٢١٤°

∴ جـَ = ٦,٥٢٩سم ، ق(∠أ) = ١٤٤° ٤٧َ ٩٦ً

ق(∠ب) ≃ ١٥° ١٢َ ٥٠ً

تذكر أن

حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة، وفى هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من جـَ ، ق(∠أ) ، ق(∠ب)

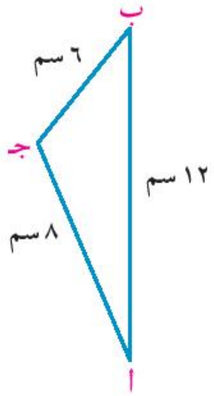
معلومة مفيدة

عند إيجاد قياس زاوية فى مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة، يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلاً من استخدام قانون الجيب، وذلك لأن :
فى حالة استخدام قانون الجيب فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب، لأن الجيب موجب في الربعين الأول والثاني.
أما فى حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه إذا كانت الزاوية منفرجة فإن جيب تمامها يكون سالبًا .
وإذا كانت الزاوية حادة فإن جيب تمامها يكون موجبًا

حاول أن تحل

٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٢٤,٦سم ، جـَ = ١٤,٢سم ، ق(∠ب) = ٤٢° ١٨َ

حل المثلث بمعلومية أطوال اضلاعه الثلاثة *Solving the Triangle knowing its Three Side Lengths*



مثال

⑤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٦سم ، بَ = ٨سم ، جـَ = ١٢سم

الحل

المطلوب إيجاد قياسات زوايا المثلث الثلاثة فيكون:

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\ \text{بَ}\ \text{جـَ}} = \frac{(٨)^{٢} + (١٢)^{٢} - (٦)^{٢}}{٢ \times ٨ \times ١٢}$$

$$= \frac{٤٣}{٤٨}$$

$\therefore$ ق $(\angle \text{أ}) \simeq ٤'' ٢٣' ٢٦°$

ابدأ ← 8 x^2 + 1 2 x^2 − 6 x^2 = ÷ (2 × 8 × 1 2) = SHIFT cos ANS) =

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{جـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\ \text{جـَ}\ \text{أَ}} = \frac{(١٢)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٢ \times ٦} = \frac{٢٩}{٣٦}$$

$\therefore$ ق $(\angle \text{ب}) \simeq ١٠'' ٢٠' ٣٦°$

$\therefore$ ق $(\angle \text{جـ}) = ١٨٠° - [٤'' ٢٣' ٢٦° + ١٠'' ٢٠' ٣٦°]$

$= ٤٦'' ١٦' ١١٧°$

> **تذكر أن**
>
> حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة، وفى هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من حَ ، ق$(\angle \text{أ})$، ق$(\angle \text{ب})$

حاول أن تحل

⑤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ١٢,٢ سم ، بَ = ١٨,٤سم ، جـَ = ٢١,١ سم

مثال

⑥ الربط بالهندسة : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ ء = ٨ سم، ء أ = ٩سم، أ جـ = ١١سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

الحل

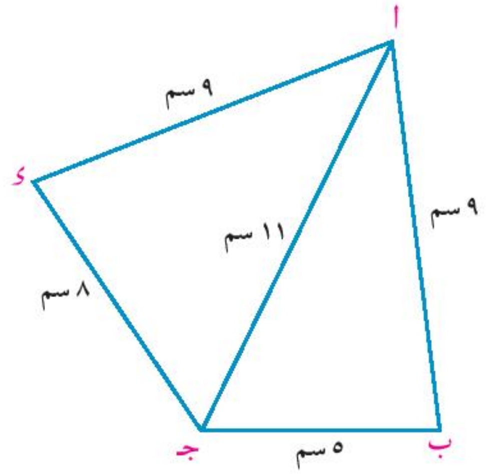
في المثلث أ ب جـ

$$\text{جتا ب} = \frac{(٩)^{٢} + (٥)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٦}$$

فى المثلث أ ء جـ

$$\text{جتا ء} = \frac{(٩)^{٢} + (٨)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$$

أىْ أنَّ جتا ء = - جتا ب



> **تذكر أن**
>
> الشكل الرباعى الدائرى هو شكل تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.
>
> ويكون الشكل رباعى دائرى اذا كان:
> - زاويتان متقابلتان متكاملتان.
> - قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوسه تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.
> - فيه زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.
> - إذا كانت رؤوسه على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

ويكون ق(∠ى) + ق(∠ب) = ١٨٠°

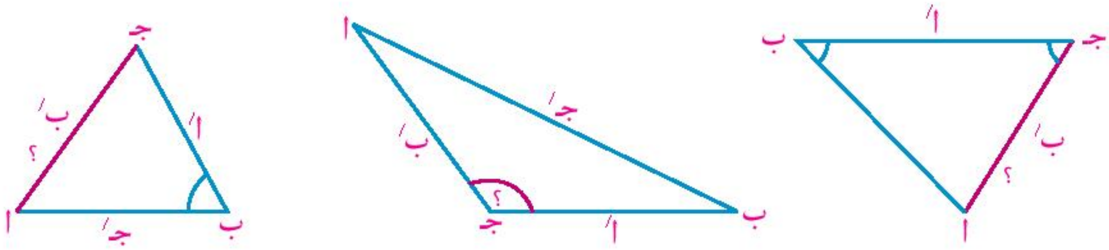
وحيث أن ∠ى ، ∠ ب زاويتان متقابلتان ومتكاملتان فى الشكل أ ب جـ ى

∴ الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى. **(وهو المطلوب)**

حاول أن تحل

(٦) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٧,٢سم ، أ جـ = ٧,٢ سم، ب جـ = ٦,٣سم، جـ ى = ٤,٥سم ، ب ى = ٧,٢سم.
أثبت أنَّ الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى.

مناقشة: لكل من المثلثات التالية ، اكتب الصيغةَ الصحيحةَ لقانون الجيب أو قانون جيب التمام لإيجاد ما هو مطلوب (يشار إليه باللون الأحمر)، استخدم فقط المعلومات المعطاة والمشار إليها باللون الأزرق.



تمـــاريــن (٤-٢)

أكمل ما يأتى:

(١) فى أى مثلث س ص ع يكون :

سَ٢ = صَ٢ + عَ٢ .... ، جتا س = (صَ٢ + عَ٢ ......) / (......)

(٢) مثلث أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات، فإن قياس أكبر زواياه هو ....°

(٣) مثلث أطوال أضلاعه ٥,٧سم ، ٥,٧سم ، ٤,٢سم، فإن قياس أصغر زواياه هو ....°

(٤) مثلث أ ب جـ فيه أَ = ١٠سم ، بَ = ٦سم ، ق(∠جـ) = ٦٠° فإن جـَ = ...

(٥) فى المثلث ل م ن يكون مَ٢ + نَ٢ - لَ٢ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى :

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٧) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{لَ}^{٢} + \text{مَ}^{٢} - \text{نَ}^{٢}}{٢\,\text{لَ}\,\text{مَ}}$ مساويًا :

(أ) جا ل　　(ب) جتا م　　(ج) جتا ن　　(د) جا ن

(٨) فى المثلث س ص ع يكون صَ^{٢} + عَ^{٢} - سَ^{٢} = ٢صَ عَ...

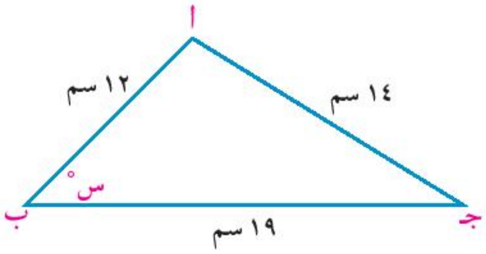
(أ) جتا س　　(ب) جا ع　　(ج) جتا ع　　(د) جا س

(٩) فى المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ : بَ : جـَ = ٣ : ٢ : ٢ فإن حتا أ تساوى :

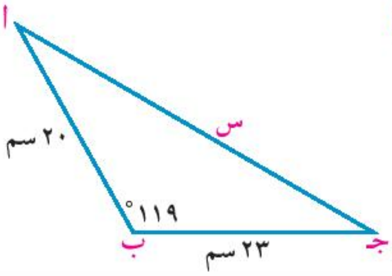
(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) -$\frac{١}{٨}$　　(ج) $\frac{١}{٢}$　　(د) $\frac{٣}{٤}$

استخدم قانون جيب التمام لإيجاد قيمة س لأقرب جزء من عشرة

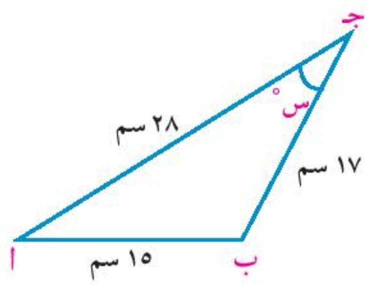
(١٠)



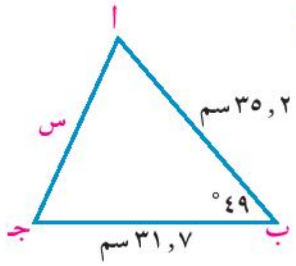
(١١)



(١٢)



(١٣)



فى المثلث أ ب جـ إذا كان:

(١٤) أَ = ٥، بَ = ٧ ، جـَ = ٨ ، فأثبت أن ق(∠ب) = ٦٠°

(١٥) أَ = ٣، بَ = ٥ ، جـَ = ٧ ، فأثبت أن ق(∠جـ) = ١٢٠°

(١٦) أَ = ١٣، بَ = ٧ ، جـَ = ١٣ ، فأوجد ق(∠جـ)

(١٧) أَ = ١٣، بَ = ٨ ، جـَ = ٧ ، فأوجد ق(∠أ)

(١٨) أَ = ١٠، بَ = ١٧ ، جـَ = ٢١ ، فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث .

(١٩) أَ = ٥، بَ = ٦ ، جـَ = ٧ ، فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث.

(٢٠) أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° ، فأوجد جـَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(٢١) بَ = ١٦سم، جـَ = ١٤سم ، ق(∠أ) = ٧٢° ، فأوجد أَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(٢٢) مثلث أ ب جـ فيه أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = $\sqrt{١٩}$ سم أوجد :

(أ) ق(∠جـ)　　(ب) مساحة المثلث أ ب جـ

(٢٣) ا ب جـ مثلث فيه اَ = ٩سم ، بَ = ١٥سم ، جـَ = ٢١ سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى هذا المثلث ، وأثبت أنها تُحقق العلاقة جتا جـ - ٥ $\sqrt{٣}$ جا جـ + ٨ = ٠

(٢٤) ا ب جـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ٣سم ، اجـ = ٨سم ، ب جـ = ٧سم ، جـ ء = ٥سم ، ب ء = ٨سم ، أثبت أن الشكل رباعى دائرى.

(٢٥) ا ب جـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ١٥سم ، ب جـ = ٢٠سم ، جـ ء = ١٦سم، ا جـ = ٢٥ سم ، ق(∠ا جـ ء) = ٥٢ ٣٦ ٦٢°، أوجد طول $\overline{\text{ا ء}}$ لأقرب سنتيمتر ، ثم أوجد مساحة سطح الشكل الرباعى ا ب جـ ء.

(٢٦) ا ب جـ ء متوازى أضلاع فيه ا ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٠سم ، طول القطر $\overline{\text{ب ء}}$ يساوى ١٤سم ، أوجد طول القطر $\overline{\text{ا جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

(٢٧) اب جـ ء شكل رباعى فيه ب جـ = ٧٨ سم ، جـ ء = ٩٦سم ، ق(∠ ب جـ ء) = ٩٧°، ق(∠ ا ب ء) = ٧٢°، ق(∠ ا ء ب) = ٤٣° أوجد طول $\overline{\text{ا ب}}$.