Mathématiques

Livre de l'élève

Première secondaire Premier semestre

Mathématiques

Livre de l'élève

Première secondaire   deuxième semestre

Mathématiques

Première secondaire **Premier semestre**

Les mathématiques ont des applications pratiques dans différents domaines dont la construction de routes, de ponts, l'urbanisme, l'élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et des lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan.

La photo montre le pont Al Salam qui relie les deux rives du canal de suez

Rédigé par

M. **Omar Fouad Gaballa**

Prof.Dr. **Afaf Abo-ElFoutoh Saleh**

Prof.Dr. **Nabil Tawfik Eldhabai**

Dr. **Essam Wasfy Rouphaiel**

M. **Serafiem Elias Skander**

M. **Kamal yones kabsha**

Revision de traduction

M/ Fathi Ahmed Chehata

M/ Kaled Sayed El Shehabey

M/ Akram Fawzy

SAKKARA

Publishing Company

5 Messaha Square - Al nada Building - Dokki - Giza.

Tel.: 02/ 37618469

SAKKARA PUBLISHING

Première édition 2013

Dépôt légal No : 2013 / 14855

I.S.P.N. 978 - 977 - 706 - 009 - 7

INTRODUCTION

بسم الله الرحمن الرحيم

En présentant ce manuel, nous sommes heureux de vous clarifier la philosophie dont nous nous sommes inspirés pour édifier son contenu, en la résumant dans ce qui suit :

1. S'assurer que l'objectif essentiel de ce manuel et d'aider l'apprenant à résoudre les problèmes et à prendre les décisions, dans sa vie quotidienne pour une meilleure participation dans la société.
2. S'assurer du principe de la continuité de l'apprentissage tout au long de la vie, faisant en sorte que les élèves acquièrent un mode de pensée scientifique, et qu'ils pratiquent un apprentissage mêlé de désir et de convoitise. Ceci en misant sur le développement de leur habilitée à résoudre les problèmes, à déduire et démontrer les résultats, à utiliser l'auto apprentissage, l'apprentissage actif avec l'esprit de groupe, la discussion et le dialogue, le respect de l'opinion de l'autre, l'objectivité dans le jugement et la définition de quelques activités et réalisations nationales.
3. Présenter une vue globale consolidée entre la science, la technologie et la société (STS) qui reflète le rôle du progrès scientifique dans le développement de la société locale, en plus de cela l'insistance sur un comportement consciencieux dans l'utilisation des outils technologiques.
4. Développement des tendances positives envers les mathématiques, leurs études et l'estimation des savants.
5. Munir les élèves d'une culture complète pour une meilleure utilisation des ressources disponibles dans l'environnement.
6. Renforcer les bases de la connaissance et le développement des méthodes de pensée, développer les capacités scientifiques, ne pas surcharger inutilement et s'éloigner du par cœur. Dans ce but, il est important de mettre en valeur les notions et les principes généraux, les méthodes de recherche, de résolution, de la pensée qui distinguent les mathématiques du reste.

A la lumière de ce qui précède, ce manuel est organisé comme suit :

- Division du manuel en unités complètes reliées entre elles. Chacune des ces unités a une introduction qui éclaircit son objectif, son contenu, son organisation et le lexique employé, en arabe et en anglais. Elles sont divisées en leçons dont l'objectif est indiqué à l'élève sous la rubrique 'A apprendre'. Chaque leçon commence par l'idée essentielle du contenu et l'exposition de la matière d'une manière progressive. Ces unités comportent aussi un ensemble d'activités, du niveau de l'élève, qui soulignent le lien entre différentes matières ainsi qu'avec la vie pratique. Ces activités prennent en compte les capacités des élèves, leurs différences individuelles et renforcent le travail en groupe pour compléter le sujet.
- Nous avons proposé, dans chaque leçon, des exemples à difficulté croissante, différents niveaux de réflexion, des exercices d'entraînement sous la rubrique 'essaie de résoudre' et chaque leçon se termine par 'Test de compréhension'.

Finalement, nous espérons qu'avec ce manuel nous accomplirons le bien pour nos élèves et pour notre cher Égypte. Dieu nous est témoin, qu'il nous guide vers le bon chemin.

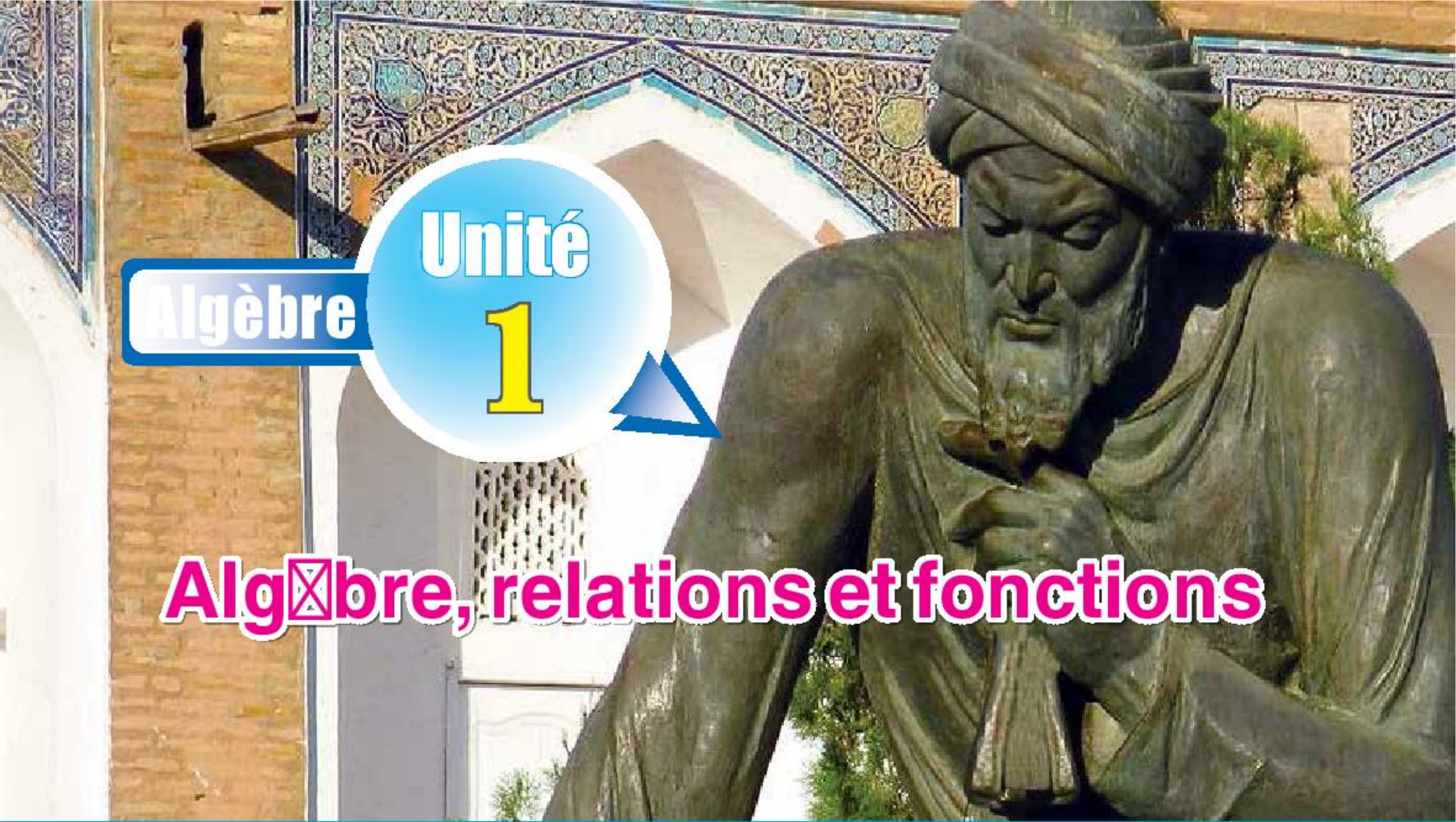
Sommaire

Unité (1) Algèbre, relations et fonctions

Unité (2) Similitude

Unité (3) Théorèmes de la proportion dans un triangle

Unité (4) Trigonométrie



Algèbre

Unité 1

Algèbre, relations et fonctions

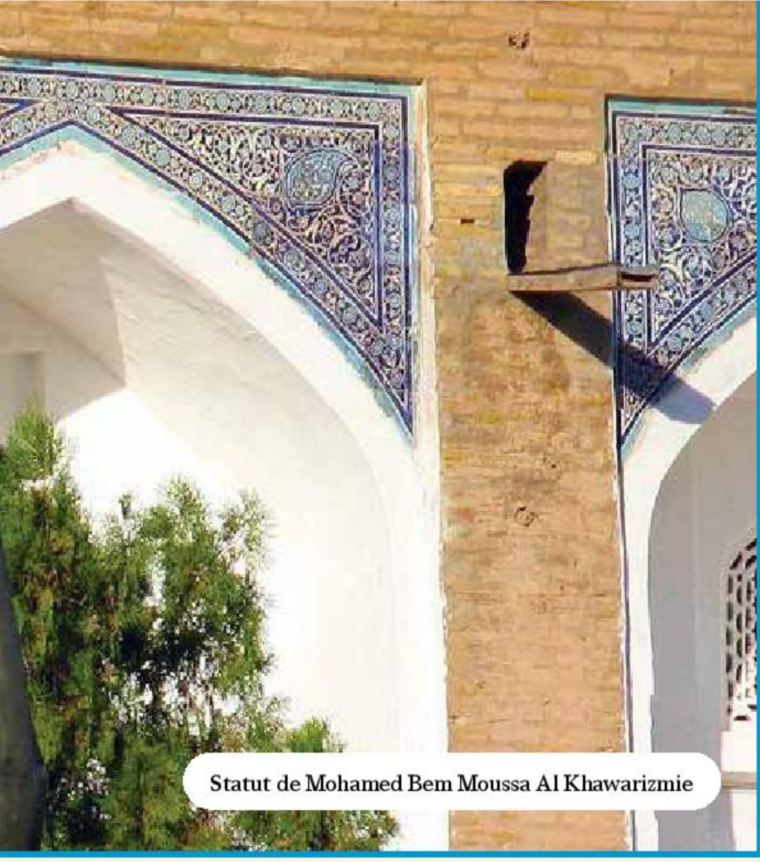
Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Trouver la somme et le produit des racines de l'équation du second degré à une inconnue.
- Trouver les coefficients de certains termes d'une équation du second degré à une inconnue en connaissant l'une ou les deux de ses racines.
- Identifier le discriminant d'une équation du second degré à une inconnue.
- Trouver la nature des deux racines d'une équation du second degré à une inconnue en connaissant les coefficients de ses termes.
- Former une équation du second degré à une inconnue connaissant une autre équation du second degré à une inconnue.
- Trouver le signe d'une fonction.
- Avoir des connaissances sur les nombres complexes (Définition d'un nombre complexe, les puissances de i , écrire un nombre complexe sous forme algébrique, égalité de deux nombres complexes)
- Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue.

Expressions de base

- Équation
- Racine d'une équation
- Coefficient d'un terme
- Discriminant d'une équation
- Signe d'une fonction
- Nombre complexe
- Nombre imaginaire
- Les puissances d'un nombre
- Inéquation



Statut de Mohamed Bem Moussa Al Khawarizmie

Leçons de l'unité

Leçon (1 – 1) : Introduction aux nombres complexes

Leçon (1 – 2) : Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

Leçon (1 – 3) : Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

Leçon (1 – 4) : Signe d'une fonction

Leçon (1 – 5) : Inéquation du second degré à une inconnue.

Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – Papiers graphiques – Ordinateur – Logiciels

Quelques site web comme : www.phschool.com

Historique

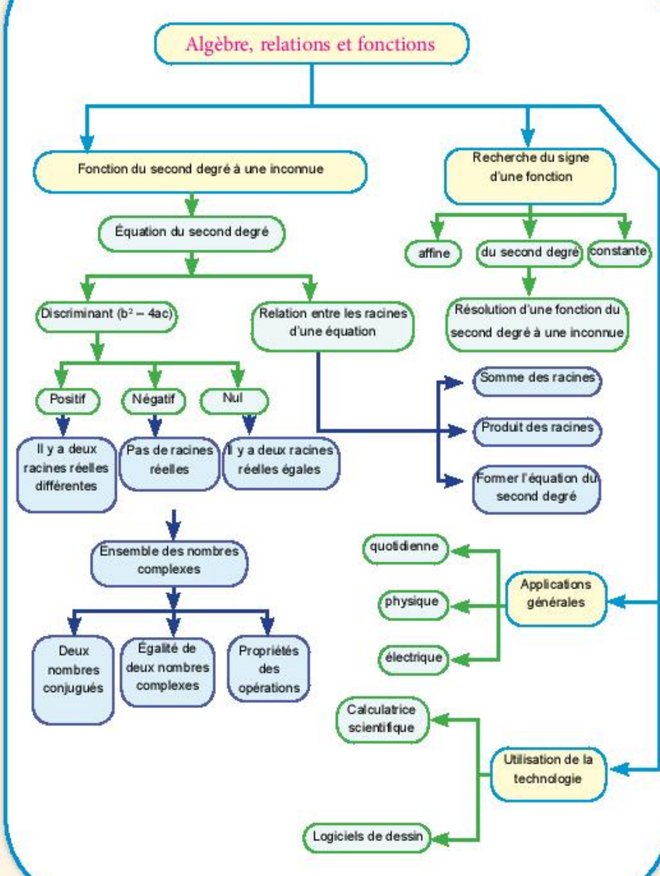
Le mot « Algèbre » est d'origine arabe. Il a été utilisé pour la première fois par Mohamed Bem Moussa Al Khawarizmie (neuvième siècle à l'époque du calife abbasside Al Maamoun) dans son livre « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison » Ce livre a été traduit en plusieurs langues européennes. Dans ce livre, il propose des méthodes pour résoudre les équations et par conséquent, il est considéré le fondateur de l'Algèbre qui faisait partie de l'Arithmétique. Al Khawarizmie a proposé de méthodes géométriques pour résoudre les équations du second degré. Ces méthodes sont en adéquation avec la méthode de complétion du trinôme carré parfait. Plusieurs savants arabes ont contribué à la résolution des équations, parmi lesquels il y a Omar Al Khayyam qui s'est intéressé à la résolution des équations du troisième degré.

Il est important de signaler que le papyrus d'Amos (1860 A.J.) montre des solutions de problèmes qui prouvent que les égyptiens de cette époque ont trouvé une méthode pour calculer la somme des termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

L'Algèbre est devenue maintenant une science bien avancée. Cette science a dépassé le simple traitement des nombres pour traiter des nouvelles notions mathématiques comme les ensembles, les matrices et les vecteurs etc.

Nous comptons sur vous, chers élèves, pour retrouver la gloire scientifique de l'époque pharaonique et l'époque islamique pendant lesquelles nos scientifiques ont contribué pour le progrès du monde entier.

Organigramme de l'unité



1 - 1 Introduction aux nombres complexes

A apprendre

- La notion du nombre imaginaire.
- Les puissances de i.
- La notion d'un nombre complexe.
- Égalité de deux nombres complexes.
- Opérations sur les nombres complexes.

Expressions de base

- Nombre imaginaire
- Nombre complexe

Matériel et moyens

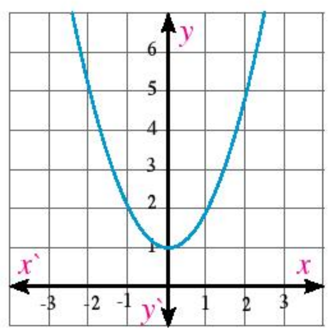
- Une calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié plusieurs ensembles de nombres comme l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous avons vu que chaque ensemble est un élargissement de l'ensemble qui le précède pour pouvoir résoudre de nouvelles équations dont il est impossible de trouver une solution dans l'ensemble qui le précède. Maintenant si on observe l'équation $x^2 = -1$, on trouve qu'elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, car il n'existe pas un nombre réel dont le carré est égal à (-1) et par conséquent, il n'existe pas un nombre réel qui vérifie l'équation d'où le besoin d'un nouvel ensemble de nombres. Cet ensemble est appelé l'ensemble des nombres complexes.

La figure ci-contre montre la représentation graphique de la fonction $y = x^2 + 1$

On remarque que la courbe représentative de la fonction ne coupe pas l'axe des abscisses et par conséquent, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Donc il est nécessaire de trouver un nouvel ensemble de nombres qui permet de résoudre ce type d'équations.



A apprendre

Le nombre imaginaire

Tout nombre de la forme a i où a est un nombre réel et i est tel que $\boxed{i^2 = -1}$ est un nombre imaginaire.

Les nombres 2i, - 5i et $\sqrt{3}$ i sont des **nombres imaginaires**

Donc on écrit $\sqrt{-3} = \sqrt{3i^2} = \pm\sqrt{3}\,i$,

$\sqrt{5} = \sqrt{5\,i^2} = \pm\sqrt{5}$ i et ainsi de suite...

$\sqrt{-243} = \sqrt{9^2 \times 3\,(-1)} = 9\sqrt{3}\,i$

Réflexion critique : Si a et b sont deux nombres réels négatifs, que peut-on dire de l'égalité $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$? Justifie ta réponse par des exemples numériques.

Puissances entières de i :

Toutes les règles de puissance qui sont déjà étudiées s'appliquent sur le nombre i. Nous pouvons calculer les différentes puissances du nombre i comme suit :

$i^1 = i$ $\qquad i^2 = -1$ $\qquad i^3 = i^2 . i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times (-1) = 1$ $\qquad i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

De manière générale, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ **où** $n \in \mathbb{Z}$

Exemple

1 Mets chacun des nombres suivants sous la forme la plus simple :

A i^{30} **B** i^{43} **C** i^{-61} **D** i^{4n+19}

Solution

A $i^{30} = (i^4)^7 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

B $i^{43} = (i^4)^{10} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$

C $i^{-61} = (i^4)^{-16} \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$

D $i^{4n+19} = i^{4n} \times i^{19} = 1 \times (i^4)^4 \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$

Essaie de résoudre

1 Mets chacun des nombres suivants sous la forme la plus simple :

A i^{24} **B** i^{37} **C** i^{-43} **D** i^{-51} **E** i^{4n+29} **F** i^{4n+42}

A apprendre

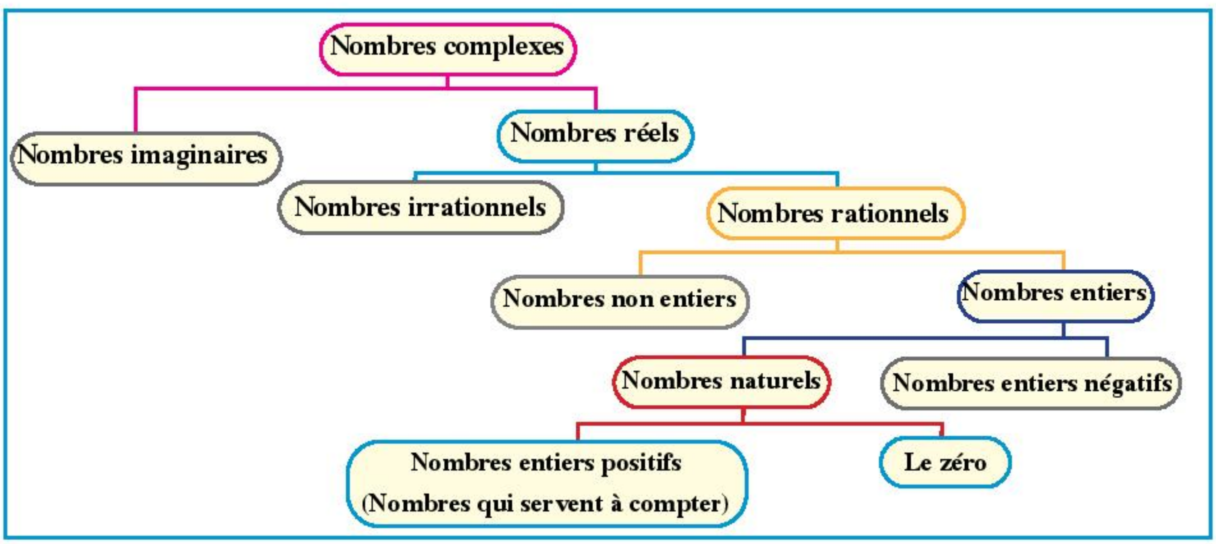
Le nombre complexe

Le nombre complexe est un nombre qu'on peut mettre sous la forme $a + b\,i$ où a et b sont deux nombres réels et i est tel que $i^2 = -1$.

La figure suivante montre les ensembles des nombres faisant parties de l'ensemble des nombres complexes.

Le nombre complexe

$\underbrace{a}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{b\,i}_{\text{Partie imaginaire}}$



Si a et b sont deux nombres réels, alors le nombre z où z = a + bi , est un nombre complexe. a est appelée la partie réelle du nombre complexe z et b est appelée la partie imaginaire du nombre complexe z

Si b = 0 , alors z = a est un nombre réel et si a = 0, alors z = bi est un nombre imaginaire pur

Exemple

2 Résoudre l'équation $9x^2 + 125 = 61$

Solution

$9x^2 + 125 = 61$

$9x^2 + 125 - 125 = 61 - 125$ — **On ajoute (-125) à chacun des deux membres**

$9x^2 = -64$ — **On simplifie**

$x^2 = -\frac{64}{9}$ — **On divise les deux membres par 9**

$x = \pm\sqrt{\frac{-64}{9}}$ — **On calcule la racine carrée de chaque membre**

$x = \pm\sqrt{\frac{64}{9}}\,i = \pm\frac{8}{3}\,i$

Essaie de résoudre

2 Résous chacune des équations suivantes :

A $3x^2 + 27 = 0$ B $5x^2 + 245 = 0$ C $4x^2 + 100 = 75$

Égalité de deux nombres complexes :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

Si : a + b i = c + d i , **alors** : **a = c** et **b = d** et réciproquement.

Exemple

3 Trouve les valeurs de x et y qui vérifient l'équation : $2x - y + (x - 2y)i = 5 + i$ où x et y sont deux nombres réels et $i^2 = -1$

Solution

Les parties réelles sont égales et les parties imaginaires sont égales.

$2x - y = 5$, $x - 2y = 1$

En résolvant le système des deux équations, on obtient $x = 3$, $y = 1$

Essaie de résoudre

3 Trouve les valeurs de x et y qui vérifient chacune des équations suivantes :

A $(2x + 1) + 4y\, i = 5 - 12\, i$

B $2x - 3 + (3y + 1)\, i = 7 + 10\, i$

A apprendre

Opérations sur les nombres complexes

Nous pouvons utiliser les propriétés de la commutativité, l'associativité et de la distributivité pour l'addition et la multiplication des nombres comme dans les exemples suivants :

Exemple

4 Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

A $(7 - 4i) + (2 + i)$

B $(2 + 3i)\,(3 - 4i)$

Solution

A $(7 - 4i) + (2 + i)$

$= (7 + 2) + (-4 + 1)\, i$ **utiliser les propriétés de la commutativité et la distributivité**

$= 9 - 3\, i$ **en simplifiant**

B $(2 + 3i)\,(3 - 4i)$

$= 2\,(3 - 4i) + 3i\,(3 - 4i)$ **utiliser la propriété de la distributivité**

$= 6 - 8i + 9\, i - 12\, i^2$ **en développant**

$= 6 - 8i + 9i + 12$ **car $i^2 = -1$**

$= (6 + 12) + (-8 + 9)\, i = 18 + i$ **en simplifiant**

Essaie de résoudre

4 Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

A $(12 - 5i) - (7 - 9i)$

B $(4 - 3i)(4 + 3i)$

C $(5 - 6i)(3 + 2i)$

Deux nombres conjugués

Les deux nombres a + b i et a – b i sont appelés deux nombres conjugués. **Par exemple,** 4 – 3i et 4 + 3i sont deux nombres conjugués où :

(1) $(4 - 3i)(4 + 3i) = (4)^2 - (3i)^2$

$= 16 - 9i^2 = 16 - 9(-1) = 25$ **(le résultat est un nombre réel)**

(2) $(4 - 3i) + (4 + 3i) = 8$ **(le résultat est un nombre réel)**

Réflexion critique :

La somme de deux nombres conjugués est-elle toujours un nombre réel ? Explique ta réponse.

Le produit de deux nombres conjugués est-il toujours un nombre réel ? Explique ta réponse.

Exemple

5 Trouve les valeurs de x et y qui vérifient l'équation :

$$\frac{(2 + i)(2 - i)}{3 + 4i} = x + i\,y$$

Solution

$\frac{4 - i^2}{3 + 4i} = x + iy$ **en développant**

$\frac{4 + 1}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = x + iy$ **en multipliant le numérateur et le dénominateur par (3 - 4i)**

$\frac{5(3 - 4\,i)}{25} = x + iy$ **en simplifiant**

$\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i = x + yi$ **en appliquant la règle de l'égalité de deux nombres complexes**

Donc $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$

Essaie de résoudre

5 Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

A $\frac{4 - 6i}{2i}$

B $\frac{26}{3 - 2i}$

C $\frac{3 - i}{2 - i}$

D $\frac{3 + 4\,i}{5 - 2i}$

Exemple

6 **Électricité :** Trouve l'intensité du courant électrique passant entre deux résistances placées en parallèle dans un circuit électrique fermé sachant que l'intensité du courant dans la première résistance est $5 - 3i$ Ampère et que l'intensité du courant dans la deuxième résistance est $2 + i$ Ampère (sachant que l'intensité totale du courant électrique est égale à la somme des intensités des courants passant par les deux résistances)

Solution

$\because$ Intensité totale du courant = somme des intensités des courants passant par les deux résistances.

$\therefore$ $= (5 - 3i) + (2 + i)$

$= (5 + 2) + (-3 + 1)\, i$

$= 7 - 2i$ Ampère

Test de compréhension

1 **Réflexion critique :** Mets sous la forme la plus simple : $(1 - i)^{10}$.

Exercices 1-1

1 Mets sous la forme la plus simple :

A i^{66} ....

B i^{-45} ....

C i^{4n+2} ....

D i^{4n-1} ....

2 Mets sous la forme la plus simple :

A $\sqrt{-18} \times \sqrt{-12}$ ....

B $3\,i \times (-2i)$ ....

C $(-4\,i)(-6\,i)$ ....

D $(-2\,i)^3\,(-3\,i)^2$

3 Simplifie :

A $(3 + 2i) + (2 - 5\,i)$ ....

B $(26 - 4i) - (9 - 20\,i)$ ....

C $(20 + 25\,i) - (9 - 20\,i)$ ....

4 Mets sous la forme $a + b\,i$:

A $(2 + 3\,i) - (1 - 2i)$

B $(1 + 2i^3)\,(2 + 3\,i^5 + 4\,i^6)$

5 Mets sous la forme $a + b\,i$:

A $\dfrac{2}{1+i}$ ....

B $\dfrac{4+i}{i}$ ....

C $\dfrac{2-3i}{3+i}$ ....

D $\dfrac{(3+i)(3-i)}{3-4\,i}$ ....

6 Résous chacune des équations suivantes :

A $3x^2 + 12 = 0$ ....

B $4y^2 + 20 = 0$ ....

C $4z^2 + 72 = 0$ ....

D $\frac{3}{5}\,y^2 + 15 = 0$ ....

7 **Déceler l'erreur :** Mets sous la forme la plus simple : $(2 + 3i)^2\,(2 - 3i)$

Réponse de Karim

$(2 + 3i)^2(2 - 3i) = (4 + 9i^2)(2 - 3i)$

$= (4 - 9)(2 - 3i) = -5\,(2 - 3i)$

$= -10 + 15\,i$

Réponse d'Ahmed

$(2 + 3i)(2 + 3i)(2 - 3i)$

$= (2 + 3i)\,(4 - 9i^2)$

$= (2 + 3i)\,(4 + 9) = 13(2 + 3i)$

$= 26 + 39\,i$

Laquelle des deux solutions est juste ? Pourquoi ?

Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

1 - 2

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié la résolution d'une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$, Tu sais donc que cette équation peut avoir deux solutions ou une solution unique ou ne peut avoir aucune solution. Peux-tu trouver le nombre de racines (solutions) d'une équation du second degré sans la résoudre ?

A apprendre

Le discriminant

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, a, b et c sont des nombres réels : $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Chacune des deux racines contient l'expression $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

L'expression $b^2 - 4ac$ est appelée le discriminant de l'équation du second degré. Le calcul du discriminant permet de déterminer la nature des deux racines de l'équation.

Exemple

1 **Détermine la nature des racines de chacune des équations suivantes :**

A $5x^2 + x - 7 = 0$ **B** $x^2 - 2x + 1 = 0$

C $-x^2 + 5x - 30 = 0$

Solution

Pour déterminer la nature des deux racines :

A a = 5 , b = 1 , c = -7

Le discriminant = $b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times 5 \times (-7) = 141$

$\because$ Puisque le discriminant est positif, l'équation a deux racines réelles différentes.

B a = 1 , b = -2 , c = 1

Le discriminant = $b^2 - 4ac$

$= 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

$\because$ Puisque le discriminant est nul, l'équation a deux racines réelles égales.

A apprendre

- Comment déterminer les racines d'une équation du second degré à une inconnue.

Expressions de base

- Racine
- Discriminant

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

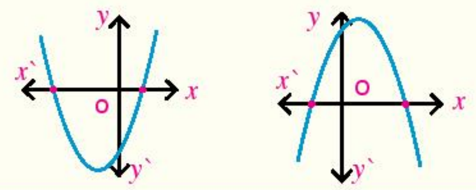
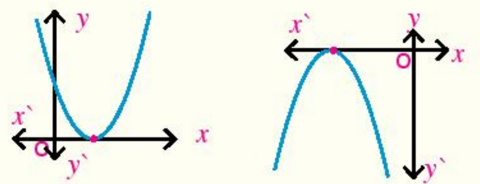
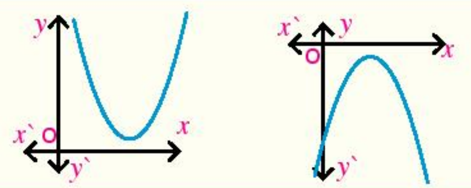
C Dans l'équation $-x^2 + 5x - 30 = 0$ $\quad$ $a = -1$, $b = 5$, $c = -30$

Le discriminant $= b^2 - ac$

$= 25 - 4 \times (-1) \times (-30) = -95$

$\because$ Puisque le discriminant est négatif, l'équation a deux racines complexes.

Remarque que :

Le discriminant	Nombre de racines et leurs natures	Allure de la courbe
$b^2 - 4ac > 0$	**Deux racines réelles différentes**	
$b^2 - 4ac = 0$	**Une racine réelle double** **Deux racines égales**	
$b^2 - 4ac < 0$	**Deux racines complexes** **(Non réelles)**	

Essaie de résoudre

1 Détermine le nombre de racines de chacune des équations suivantes en précisant leurs natures :

A $6x^2 = 19x - 15$ $\quad$ **B** $12x - 4x^2 = 9$

C $x(x - 2) = 5$ $\quad$ **D** $x(x + 5) = 2(x - 7)$

Exemple

2 Démontre que les racines de l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$ sont complexes et non réelles, puis utilise la formule générale pour trouver ces deux racines.

Solution

$a = 2$, $b = -3$, $c = 2$

$\because$ Le discriminant $= b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$

$\because$ Puisque le discriminant est négatif , **l'équation a deux racines complexes (non réelles)**

La formule générale est $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$$

Les deux racines de l'équation sont : $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i$, $\quad \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i$

Réflexion critique : Dans l'ensemble des nombres complexes, les deux racines d'une équation du second degré sont-elles nécessairement deux nombres conjugués ? Justifie ta réponse par des exemples.

Essaie de résoudre

2 Démontre que les deux racines de l'équation $7x^2 - 11x + 5 = 0$, sont complexes, puis utilise la formule générale pour trouver ces deux racines.

Exemple

3 Si les racines de l'équation $x^2 + 2(k - 1)\,x + 9 = 0$ sont égales, trouve la valeur de k, puis vérifie le résultat.

Solution

$b^2 - 4ac = 0$

$4(k - 1)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

$4k^2 - 8k - 32 = 0$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

$(k - 4)(k + 2) = 0$

$k = 4$ ou $k = -2$

Vérification : si $k = 4$

L'équation est : $x^2 + 6x + 9 = 0$

Les racines de cette équation sont égales. Ce sont : -3 et -3

Vérification : Si $k = -2$

L'équation est : $x^2 - 6x + 9 = 0$

Les racines de cette équation sont égales. Ce sont 3 et 3.

Essaie de résoudre

3 Si les racines de l'équation $x^2 - 2kx + 7k - 6x + 9 = 0$ sont égales, trouve les valeurs réelles de k, puis trouve les deux racines.

Exercices 1-2

1) Questions à choix multiples

1 Les racines de l'équation $x^2 - 4x + k = 0$ sont égales si

- **A** $k = 1$
- **B** $k = 4$
- **C** $k = 8$
- **D** $k = 16$

2 Les racines de l'équation $x^2 - 2x + M = 0$ sont réelles différentes si

- **A** $M = 1$
- **B** $M > 1$
- **C** $M > 1$
- **D** $M = 4$

3 Les racines de l'équation $Lx^2 - 12x + 9 = 0$ sont complexes si

- **A** $L < 4$
- **B** $L > 4$
- **C** $L = 4$
- **D** $L = 1$

2) Réponds aux questions suivantes

4 Détermine le nombre de racines et leur nature pour chacune des équations suivantes :

- **A** $x^2 - 2x + 5 = 0$ ....
- **B** $3x^2 + 10x - 4 = 0$ ....
- **C** $x^2 - 10x + 25 = 0$ ....
- **D** $6x^2 - 19x + 35 = 0$ ....

5 Résous, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes en utilisant la formule générale :

- **A** $x^2 - 4x + 5 = 0$ ....
- **B** $2x^2 + 6x + 5 = 0$ ....
- **C** $3x^2 - 7x + 6 = 0$ ....
- **D** $4x^2 - x + 1 = 0$ ....

6 Trouve la valeur de k dans chacun des cas suivants :

- **A** si les racines de l'équation $x^2 + 4x + k = 0$ sont réelles différentes.
- **B** si les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{k} = 0$ sont égales.
- **C** si les racines de l'équation $kx^2 - 8x + 16 = 0$ sont complexes.

7 **Déceler l'erreur :** Trouve, dans $\mathbb{R}$, le nombre de racines de l'équation $2x^2 - 6x = 5$

Réponse de Karim	Réponse d'Ahmed
$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2\,(-5)$	$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 5$
$= 36 + 40 = 76$	$= 36 - 40 = -4$
le discriminant est positif	**le discriminant est négatif**
il y a deux racines réelles différentes	**il n'y a pas de racines réelles**

....

....

8 Si les racines de l'équation $x^2 + 2\,(k - 1)\,x + (2k + 1) = 0$ sont égales, trouve les valeurs réelles de k, puis calcule les deux racines.

....

....

9 **Réflexion critique :** Résous, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $36x^2 - 48x + 25 = 0$

....

....

....

....

1 - 3 Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

A apprendre

- Comment calculer la somme des deux racines d'une équation du second degré.
- Comment calculer le produit des deux racines d'une équation du second degré.
- Trouver une équation du second degré à partir d'une autre du second degré.

Expressions de base

- Somme des deux racines
- Produit des deux racines

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

On sait que les racines de l'équation $4x^2 - 8x + 3 = 0$ sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

La somme des racines $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

Le produit des deux racines $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Y a-t-il une relation entre la somme des racines d'une équation et les coefficients de ses termes ?

Y a-t-il une relation entre le produit des racines d'une équation et les coefficients de ses termes ?

A apprendre

La somme et le produit des deux racines

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont :

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = L$ et $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = M$, alors :

$L + M = \frac{-b}{a}$ et $L\,M = \frac{c}{a}$ (à démontrer)

Expression orale : Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, trouve la valeur de $L + M$ et $L\,M$ dans chacun des cas suivants :

A si $a = 1$ **B** si $b = a$ **C** si $a = c$

Exemple

1 Sans résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 12 = 0$, trouve la somme et le produit de ses racines.

Solution

$a = 2$, $b = 5$, $c = -12$

La somme des racines $= \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

Le produit des racines $= \frac{c}{a} = \frac{-12}{2} = -6$

Essaie de résoudre

1 Sans résoudre l'équation, trouve la somme et le produit de ses racines dans chacun des cas suivants :

A $2x^2 + x - 6 = 0$ **B** $3x^2 = 23x - 30$ **C** $(2x - 3)(x + 2) = 0$

Exemple

2 Si le produit des racines de l'équation $2x^2 - 3x + k = 0$ est égal à 1, trouve la valeur de k, puis résous l'équation dans l'ensemble des nombres complexes.

Solution

Le produit des racines $= \frac{c}{a}$ $\therefore \frac{k}{2} = 1$ $\therefore k = 2$

a = 2, b = - 3, c = 2

La formule générale est : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$$

L'ensemble solution est $\{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\,i \ ; \ \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}\,i\}$

Essaie de résoudre

2 Si le produit des racines de l'équation $3x^2 + 10x - c = 0$ est égal à $\frac{-8}{3}$, trouve la valeur de c, puis résous l'équation.

3 Si la somme des racines de l'équation $2x^2 + bx - 5 = 0$ est égale à $-\frac{3}{2}$, trouve la valeur de b, puis résous l'équation.

Exemple

3 Si $(1 + i)$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 2x + k = 0$ où $k \in R$ trouve :

A l'autre racine **B** la valeur de k.

Solution

a = 1 , b = -2 , c = k

A $\because$ $1 + i$ est l'une des racines de l'équation

$\therefore$ l'autre racine $= 1 - i$ **car les deux racines sont conjuguées et leur somme est = 2**

B $\because$ Le produit des racines $= k$

$\therefore (1 + i)(1 - i) = k$

$\therefore 1 + 1 = k$

$\therefore k = 2$

Essaie de résoudre

4 Si $(2 + i)$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 4x + h = 0$, où $h \in R$ trouve

A l'autre racine. **B** la valeur de h.

A apprendre

Former une équation du second degré en connaissant ses deux racines

Soient L et M les racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

En divisant les deux membres de l'équation par a : $\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

D'où $x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a} = 0$

$\because$ L et M sont les racines de l'équation et, $L + M = -\frac{b}{a}$ et $LM = \frac{c}{a}$

$\therefore$ **L'équation du second degré ayant pour racines L et M est :** $\boxed{x^2 - (L + M)x + LM = 0}$

Exemple

4 Forme l'équation du second degré dont les racines sont 4 et -3 .

Solution

Soient les deux racines L et M

$\because L + M = 4 + (-3) = 1$ et $LM = 4(-3) = -12$,

$\because$ **L'équation du second degré est de la forme :** $x^2 - (L + M)x + LM = 0$

$\therefore$ **L'équation est :** $x^2 - x - 12 = 0$

Exemple

5 Dans chacun des cas suivants, forme l'équation du second degré dont les racines sont : $\frac{-2 + 2i}{1 + i}$ et $\frac{-2 - 4i}{2 - i}$

Solution

Soient les deux racines L et M

$L = \frac{-2 + 2i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{4i}{2} = 2i$

$M = \frac{-2 - 4i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{-10i}{5} = -2i$

$L + M = 2i - 2i = 0$

, $LM = 2i \times (-2i) = -4i^2 = 4$

$\because$ L'équation du second degré est de la forme : $x^2 + (L + M)x + LM = 0$

$\therefore$ L'équation est $x^2 + 4 = 0$

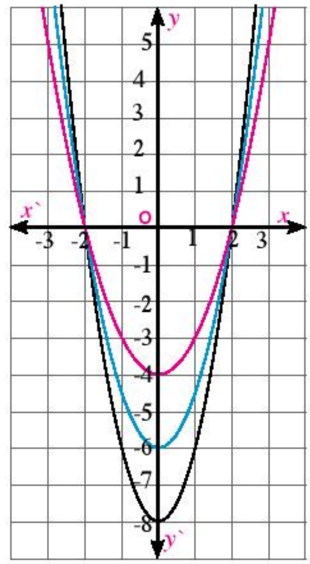
Essaie de résoudre

5 Dans chacun des cas suivants, forme l'équation du second degré dont les racines sont :

A 3 et -5 **B** $-9i$ et $9i$ **C** $\frac{3}{i}$ et $\frac{3 + 3i}{1 - i}$

Réflexion critique : La figure ci-contre, représente les courbes de plusieurs fonctions du second degré passant par les deux points (0, -2) et (0, 2).

Trouve l'expression algébrique de chaque fonction.



Former une équation du second degré connaissant une autre du second degré :

Exemple

6 Si L et M sont les racines de l'équation $2x^2 - 3x - 1 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont L^2 et M^2.

Solution

Dans l'équation donnée, a = 2, b = - 3 et c = -1: $L + M = -(\frac{-3}{2}) = \frac{3}{2}$ et $LM = (-\frac{1}{2})$

Dans l'équation demandée, on sait que $L + M = \frac{3}{2}$ **et** $LM = -\frac{1}{2}$

En utilisant la formule $L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2\,LM$

$\therefore L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2\,LM \quad = (\frac{3}{2})^2 - 2 \times (-\frac{1}{2})$

$= \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4}$

$\because L^2M^2 \quad = (LM)^2$

$\therefore L^2M^2 \quad = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Remarque que

$L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2LM$

$(L-M)^2 = (L + M)^2 - 4\,LM$

L'équation demandée est x^2 – (somme des racines) x + produit des racines = 0

$x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ **En multipliant les deux membres de l'équation par 4**

$\therefore$ **L'équation demandée est :** $4x^2 - 13x + 4 = 0$

Essaie de résoudre

6 Dans l'équation précédente $2x^2 - 3x - 1 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont :

A $\frac{1}{L}, \frac{1}{M}$ **B** $\frac{L}{M}, \frac{M}{L}$ **C** $L + M$, LM

Test de compréhension

1 Dans chacun des cas suivants, forme une équation du second degré dont les racines sont :

A $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ **B** $5\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$ **C** $3 + \sqrt{2}\,i$ et $3 - \sqrt{2}\,i$

2 Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 + 3x - 5 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont L^2 et M^2.

Exercices 1-3

1) Complète ce qui suit :

1 Si $x = 3$ est l'une des racines de l'équation $x^2 + Mx - 27 = 0$, alors M = ... et l'autre racine = ...

2 Si le produit des racines de l'équation: $2x^2 + 7x + 3K = 0$ est égal à la somme des racines de l'équation : $x^2 - (K + 4)x = 0$, alors K = ...

3 L'équation du second degré dont chacune des racines dépasse de 1 les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ est ....

4 L'équation du second degré dont chacune des racines est inférieure de 1 par rapport aux racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ est ....

2) Questions à choix multiples :

5 Si l'une des racines de l'équation $x^2 - 3x + c = 0$ est le double de l'autre, alors c =

A -4 B -2
C 2 D 4

6 Si l'une des racines de l'équation $ax^2 - 3x + 2 = 0$ est l'inverse de l'autre, alors a =

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{2}$
C 2 D 3

7 Si l'une des racines de l'équation $x^2 - (b - 3)x + 5 = 0$ est l'opposé de l'autre, alors b =

A -5 B -3
C 3 D 5

3) Réponds aux questions suivantes :

8 Trouve la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes :

A $3x^2 + 19x - 14 = 0$ B $4x^2 + 4x - 35 = 0$

....

9 Trouve la valeur de a et l'autre racine de l'équation dans chacun des cas suivants :

A Si $x = -1$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 2x + a = 0$ ....

B Si $x = 2$ est l'une des racines de l'équation $ax^2 - 5x + a = 0$ ....

10 Trouve la valeur de a et b dans chacune des équations suivantes :

A Si 2 et 5 sont les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ....

B Si -3 et 7 sont les racines de l'équation $ax^2 + 7x - 21 = 0$ ....

C Si -1 et $\frac{3}{2}$ sont les racines de l'équation $ax^2 - x + b = 0$ ....

D Si $\sqrt{3}\,i$ et $-\sqrt{3}\,i$ sont les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ....

11 Détermine la nature des racines de chacune des équations suivantes, puis trouve l'ensemble solution dans chaque cas :

A $x^2 + 2x - 35 = 0$ ....

B $2x^2 + 3x + 7 = 0$ ....

C $x(x - 4) + 5 = 0$ ....

D $3x(3x - 8) + 16 = 0$ ....

12 Trouve la valeur de c pour que les racines de l'équation $c\,x^2 - 12x + 9 = 0$ soient égales.

....

13 Trouve la valeur de a pour que les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{a} = 0$ soient égales.

....

14 Trouve la valeur de c pour que les racines de l'équation $3x^2 - 5x + c = 0$ soient égales, puis détermine ces deux racines.

....

15 Trouve la valeur de k pour que l'une des racines de l'équation $x^2 + (k - 1)x - 3 = 0$ soit égale à l'opposé de l'autre racine.

....

16 Trouve la valeur de k pour que l'une des racines de l'équation $4kx^2 + 7x + k^2 + 4 = 0$ soit égale à l'inverse de l'autre racine.

....

17 Forme une équation du second degré dont les racines sont :

A -2 et 4 ....

B $-5\,i$ et $5\,i$ ....

C $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ ....

D $1 - 3i$ et $1 + 3i$ ....

E $3 - 2\sqrt{2i}$ et $3 + 2\sqrt{2i}$ ....

18 Trouve une équation du second degré dont chacune des racines est le double d'une racine de l'équation $2x^2 - 8x + 5 = 0$

....

19 Trouve une équation du second degré dont chaque racine dépasse de 1 l'une des racines de l'équation : $x^2 - 7x - 9 = 0$

....

20 Trouve une équation du second degré dont chaque racine est égale au carré de l'une des racines de l'équation : $x^2 + 3x - 5 = 0$

....

21 Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 - 7x + 3 = 0$, trouve une équation du second degré dont les racines sont :

A 2 L et 2 M

B L + 2 et M + 2

C $\frac{2}{L}$ et $\frac{2}{M}$

D L + M et L M

....

1 - 4 Signe d'une fonction

A apprendre

- Étude du signe d'une fonction : constante - du premier degré - du second degré

Expressions de base

- Signe d'une fonction
- Fonction constante
- Fonction affine (du premier degré)
- Fonction du second degré

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié la représentation graphique d'une fonction du premier degré et d'une fonction du second degré. Tu as identifié l'allure de leurs courbes représentatives. Peux-tu trouver le signe de chacune de ses fonctions ?

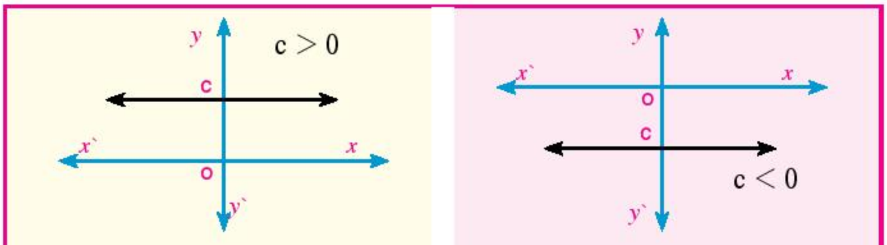
Détermine le signe d'une fonction consiste à déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

f(x) est **positive** c'est-à-dire $f(x) > 0$
f(x) est **négative** c'est-à-dire $f(x) < 0$
f(x) est **nulle** c'est-à-dire $f(x) = 0$

A apprendre

(1) Signe d'une fonction constante

Le signe d'une fonction constante f telle que $f(x) = c$ $(c \neq 0)$ est le même signe que celui de c pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La figure suivante montre le signe de la fonction f.



La fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ | La fonction est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exemple

1. Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

   A. f(x) = 5 B. f(x) = -7

Solution

A. $\because f(x) > 0$ $\therefore$ la fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$

B. $\because f(x) < 0$ $\therefore$ la fonction est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$

Essaie de résoudre

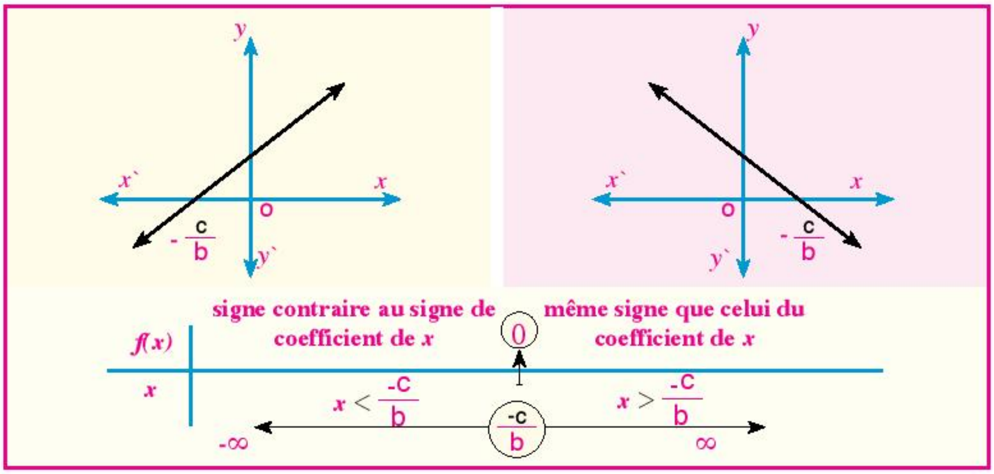
1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A $f(x) = -\frac{2}{3}$ **B** $f(x) = \frac{5}{2}$

(2) Signe d'une fonction du premier degré (fonction affine) :

L'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = bx + c$, $b \neq 0$, $x = -\frac{c}{b}$. si $f(x) = 0$

La figure suivante montre le signe de la fonction f.



Exemple

2 Détermine le signe de la fonction $f(x) = x - 2$ en illustrant la réponse graphiquement :

Solution

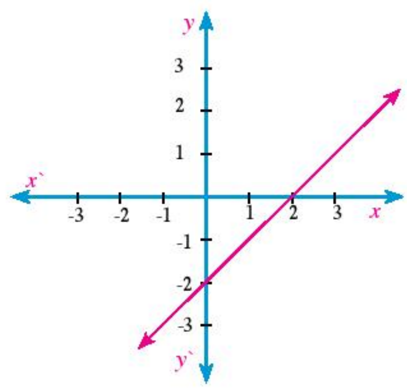
L'expression algébrique de la fonction : $f(x) = x - 2$

Le graphique de la fonction :

Pour tracer la courbe

Si $f(x) = 0$, alors $x = 2$

Si $x = 0$, alors $f(x) = -2$



Du graphique, on trouve que :

- la fonction est positive si $x > 2$
- la fonction est nulle si $x = 2$
- la fonction est négative si $x < 2$

Essaie de résoudre

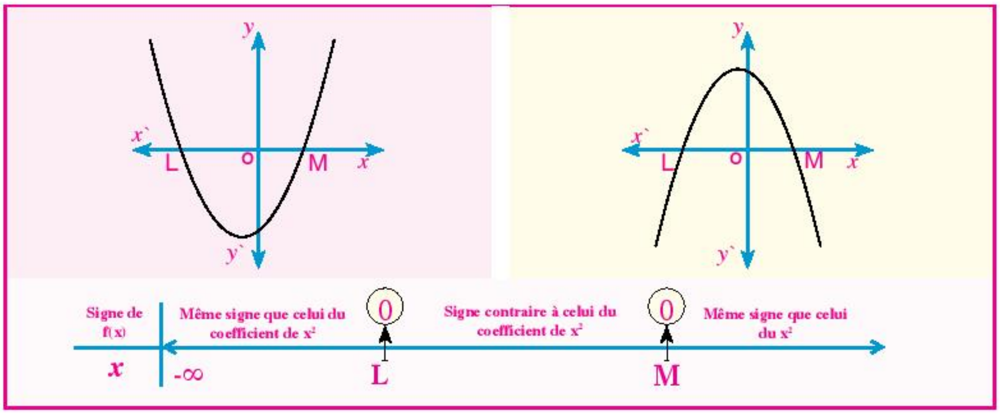
2 Détermine le signe de la fonction $f(x) = -2x - 4$ en illustrant la réponse graphiquement.

(3) Signe d'une fonction du second degré :

Pour déterminer le signe d'une fonction f du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

on calcule le discriminant de la fonction $ax^2 + bx + c = 0$:

(1) Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation a deux racines réelles L et M . En supposant que L < M , le signe de la fonction est indiqué dans les figures suivantes :



Exemple

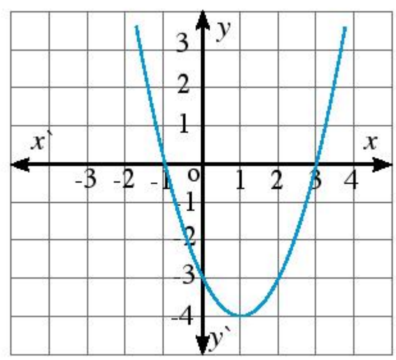
3 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 2x - 3$, puis détermine son signe.

Solution

En factorisant l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

Les racines de l'équation sont : -1 et 3



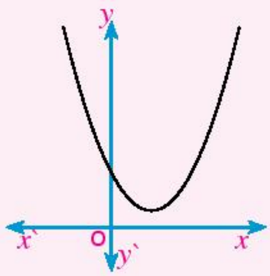
Du graphique, on trouve que :

- $f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R} - [-1, 3]$
- $f(x) < 0$ si $x \in]-1, 3[$
- $f(x) = 0$ si $x \in \{-1, 3\}$

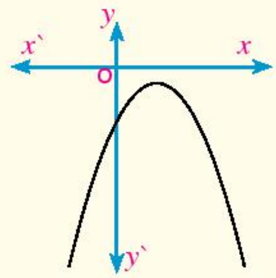
Essaie de résoudre

3 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = x^2 - x + 6$, puis détermine son signe.

(2) Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a pas de racines réelles. Dans ce cas, la fonction f a le même signe que celui du coefficient de x^2, comme l'indique la figure suivante :



Si $a > 0$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

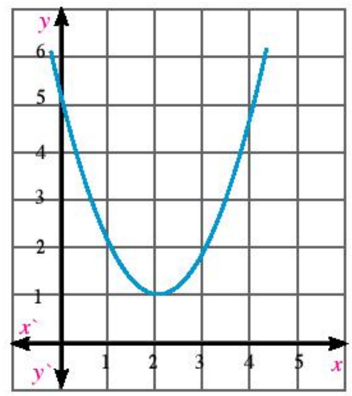


Si $a < 0$, $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exemple

4 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4x + 5$, puis détermine son signe.

Solution



Le discriminant est $(b^2 - 4\,ac) = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

la fonction $x^2 - 4x + 5 = 0$, n'a pas de racines réelles

la fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car le coefficient de $x^2 > 0$)

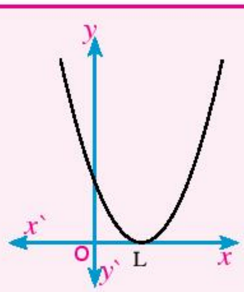
Essaie de résoudre

4 Représente graphiquement la fonction f, telle que $f(x) = -x^2 - 2x - 4$, puis détermine son signe.

(3) Si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation a une racine double. Soit L cette racine. Dans ce cas, le signe de la fonction est comme suit :

- Si $x \neq$ L la fonction a le même signe que celui de a.
- Si $f(x) = 0$ si $x =$ L

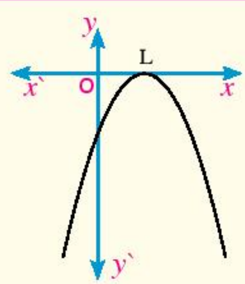
La figure suivante illustre ce cas :



Si $a > 0$

$f(x) > 0 \quad x \neq$ L,

$f(x) = 0$ pour $x =$ L



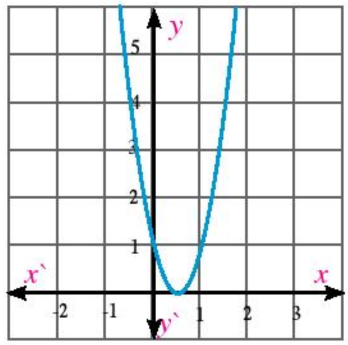
Si $a < 0$

$f(x) < 0 \quad x \neq$ L,

$f(x) = 0$ pour $x =$ L

Exemple

5 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, puis détermine son signe.



Solution

Le discriminant est $(b^2 - 4ac) = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1$

$= 16 - 16 = 0$

la fonction $4x^2 - 4x + 1 = 0$ a une racine double.

En factorisant : $(2x - 1)^2 = 0$

Si : $2x - 1 = 0$, alors $x = \frac{1}{2}$

$f(x) > 0$ pour $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$

Essaie de résoudre

5 Représente graphiquement la fonction f, telle que $f(x) = -4x^2 - 12x - 9$, puis détermine son signe

Exemple

6 Démontre que pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$, les racines de l'équation $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ sont réelles différentes.

Solution

Le discriminant $(b^2 - 4ac) = (-k)^2 - 4 \times 2 \times (k - 3) = k^2 - 8k + 24$

Les deux racines sont réelles différentes si le discriminant est positif.

On étudie le signe de la fonction $y = k^2 - 8k + 24$

Le discriminant de l'équation $k^2 - 8k + 24 = 0$ est :

$(-8)^2 - 4 \times 1 \times 24 = 64 - 96 = -32 < 0$

Donc l'équation $k^2 - 8k + 24 = 0$ n'a pas de racines réelles.

$\therefore$ **La fonction** $y = k^2 - 8k + 24$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ (Pourquoi ?)

Donc le discriminant de l'équation $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ **Les racines de l'équation** $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ sont réelles différentes. pour tout $x \in \mathbb{R}$

Test de compréhension

1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A $f(x) = 2x - 3$ **B** $f(x) = 4 - x$ **C** $f(x) = x^2 - 4$

D $f(x) = 1 - x^2$ **E** $f(x) = 4 + 4x + x^2$ **F** $f(x) = 3x - 2x^2 + 4$

Exercices 1-4

1) Complète ce qui suit :

1 Le signe de la fonction f telle que $f(x) = -5$ est .... dans l'intervalle ....

2 Le signe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 1$ est .... dans l'intervalle ....

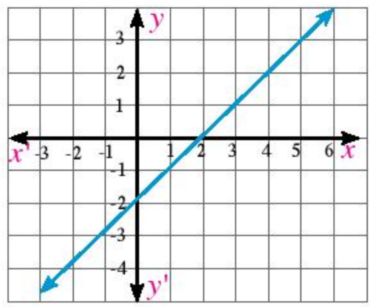
3 La fonction f telle que $f(x) = x^2 - 6x + 9$ est positive dans l'intervalle ....

4 La fonction f telle que $f(x) = x - 2$ est positive dans l'intervalle ....

5 La fonction f telle que $f(x) = 3 - x$ est négative dans l'intervalle ....

6 La fonction f telle que $f(x) = -(x-1)(x+2)$ est positive dans l'intervalle ....

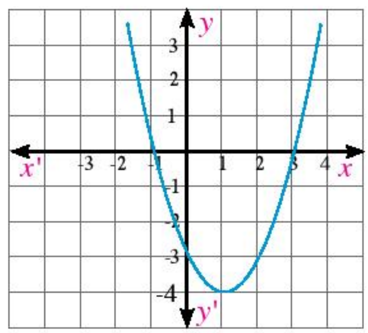
7 La fonction f telle que $f(x) = x^2 + 4x - 5$ est négative dans l'intervalle ....



8 La figure ci–contre représente une fonction f du premier degré en x. Complète :

A $f(x)$ est positive dans l'intervalle ....

B $f(x)$ est négative dans l'intervalle ....



9 La figure ci–contre représente une fonction f du second degré en x. Complète :

A $f(x) = 0$ si $x \ni$ ....

B $f(x) > 0$ si $x \ni$ ....

C $f(x) < 0$ si $x \ni$ ....

2) Réponds aux questions suivantes :

10 Dans les exercices de A à N, détermine le signe de chaque fonction :

A $f(x) = 2$ ....

B $f(x) = 2x$ ....

C $f(x) = -3x$ ....

D $f(x) = 2x+4$ ....

E $f(x) = 3 - 2x$ ....

F $f(x) = x^2$ ....

G $f(x) = 2x^2$ ....

H $f(x) = x^2 - 4$ ....

I $f(x) = 1 - x^2$ ....

J $f(x) = (x-2)(x+3)$ ....

K $f(x) = (2x-3)^2$ ....

L $f(x) = x^2 - x - 2$ ....

M $f(x) = x^2 - 8x + 16$ ....

N $f(x) = -4x^2 + 10x - 25$ ....

11 Trace la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 9$ dans l'intervalle $[-3; 4]$, Du graphique, détermine le signe de $f(x)$.

12 Trace la courbe représentative de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ dans l'intervalle $[-3; 5]$, Du graphique, détermine le signe de $f(x)$.

13 **Déceler l'erreur :** Si $f(x) = x + 1$, $g(x) = 1 - x^2$, détermine l'intervalle où les deux fonctions sont simultanément positives.

Réponse de Youssef

$x = -1$, alors $f(x) = 0$

$f(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1; +\infty[$,

$x = \pm 1$, alors $g(x) = 0$

$g(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1; 1[$

Donc les deux fonctions sont simultanément positives dans l'intervalle

$]-1; +\infty[\cup]-1; 1[=]-1; +\infty[$

Réponse d'Amira

$x = -1$, alors $f(x) = 0$

$f(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1; +\infty[$,

$x = \pm 1$, alors $g(x) = 0$

$g(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1; 1[$

Donc les deux fonctions sont simultanément positives dans l'intervalle

$]-1; +\infty[\cap]-1; 1[=]-1; 1[$

Laquelle des deux solutions est juste ? Représente chacune des deux fonctions graphiquement puis vérifie ta réponse

Inéquation du second degré

1 - 5

L'inéquation du second degré à une inconnue :

A apprendre

- Résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue

Réfléchis et discute

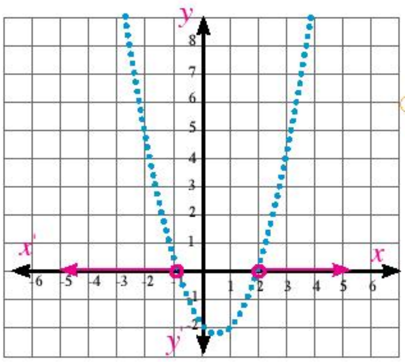
Tu as déjà étudié l'inéquation du premier degré à une inconnue. Tu sais que résoudre cette inéquation consiste à trouver toutes les valeurs de la variable qui vérifient l'inéquation. L'ensemble solution s'écrit sous la forme d'un intervalle. Peux-tu résoudre une inéquation du second degré à une inconnue ?

Remarque que :

$x^2 - x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré tandis que $f(x) = x^2 - x - 2$ est la fonction du second degré correspondante à cette inéquation.

La figure ci-contre montre que :

- L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - x - 2 > 0$ est $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$
- L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - x - 2 < 0$ est $]-1\,;2[$



Expressions de base

- Inéquation

A apprendre

Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

Exemple

1 Résous l'inéquation : $x^2 - 5x - 6 > 0$

Solution

Pour résoudre l'inéquation, on suit les étapes suivantes :

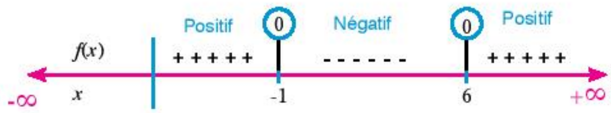
Étape (1) : On écrit la fonction du second degré correspondante à l'inéquation. La fonction est

$f(x) = x^2 - 5x - 6$

Étape (2): On étudie le signe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 5x - 6$, puis on l'illustre sur la droite numérique en posant $f(x) = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$ $\quad\quad\therefore (x - 6)(x + 1) = 0$

$x = 6$ ou $x = -1$



Étape (3): On détermine les intervalles qui vérifient l'inéquation $x^2 - 5x - 6 > 0$

Donc l'ensemble solution est : $]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

Essaie de résoudre

1 Résous chacune des inéquations suivantes :

A $x^2 + 2x - 8 > 0$ $\quad\quad$ **B** $x^2 + x + 12 > 0$

Exercices 1-5

Trouve l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

1. $x^2 \leqslant 9$ ……………………

2. $x^2 - 1 \leqslant 0$ ……………………

3. $2x - x^2 < 0$ ……………………

4. $x^2 + 5 \leqslant 1$ ……………………

5. $(x - 2)(x - 5) < 0$ ……………………

6. $(x - 2)^2 \leqslant -5$ ……………………

7. $x^2 > 6x - 9$ ……………………

8. $3x^2 \leqslant 11x + 4$ ……………………

9. $x^2 - 4x + 4 > 0$ ……………………

10. $7 + x^2 - 4x < 0$ ……………………

Géométrie

Unité 2

Similitude

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Se rappeler de tout ce qu'il a déjà étudié dans le cycle préparatoire concernant la similitude.
- Identifier la similitude de deux polygones.
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables »
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables ».
- Identifier le théorème d'énoncé « Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal à …… ».
- Identifier le corollaire d'énoncé « Deux polygones semblables peuvent être partagés en …… ».
- Identifier le théorème d'énoncé « Le rapport entre les aires de deux polygones semblables est égal à …… ».
- Identifier le corollaire d'énoncé « Deux droites contenant respectivement deux cordes d'un cercle se coupent en un point …… », sa réciproque et ses corollaires.

Expressions de base

- Rapport
- Proportion
- Mesure d'angle
- Longueur
- Aire
- Produit en croix
- Extrême
- Moyen
- Polygones semblables
- Triangles semblables
- Côtés correspondants
- Angles superposables
- Polygone régulier
- Quadrilatère
- Pentagone
- Axiome
- Périmètre
- Aire d'un polygone
- Corde
- Sécante
- Tangente
- Diamètre
- Tangente commune extérieure
- Tangente commune intérieure
- Cercles concentriques
- Rapport de similitude

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Similitude des polygones

Leçon (2 - 2): Similitude des triangles

Leçon (2 - 3): Relation entre les aires de deux polygones semblables

Leçon (2 - 4): Application de la similitude dans le cercle

Matériel utilisé

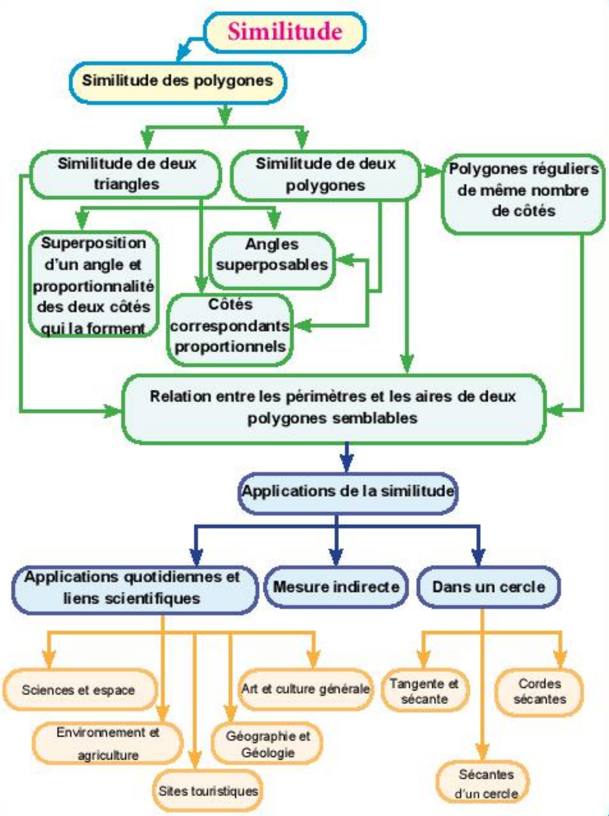
Ordinateur – Vidéo projecteur – Logiciels – Papiers quadrillés – Miroir – Instruments de mesure – Calculatrice

Historique

Pour construire un bâtiment sur un terrain, nous avons besoin de faire un plan de ce bâtiment et comme il est évident qu'on ne peut pas exécuter ce plan sur un papier qui a la dimension du terrain, on a recours à un modèle réduit de la construction en utilisant une échelle et des mesures d'angles analogues à leurs correspondants en réalité.

Si tu observes la figure en haut de la page, tu remarques que la nature contient des modèles qui se reproduisent de différentes grandeurs, par exemple : les feuilles d'arbres, le chou–fleur, les sinuosités du bord de la mer. L'observation de ces motifs récurrents a provoqué l'apparition d'une nouvelle géométrie depuis 40 ans environ. Cette géométrie qu'on appelle géométrie fractale et que tu étudieras plus tard, s'intéresse à l'étude des figures symétriques qui se reproduisent irrégulièrement.

Organigramme de l'unité



2 - 1

Similitude des polygones

A apprendre

- Notion de la similitude.
- Similitude des polygones.
- La relation entre le périmètre de deux polybones semlelables et le rapport de similitude.

Expressions de base

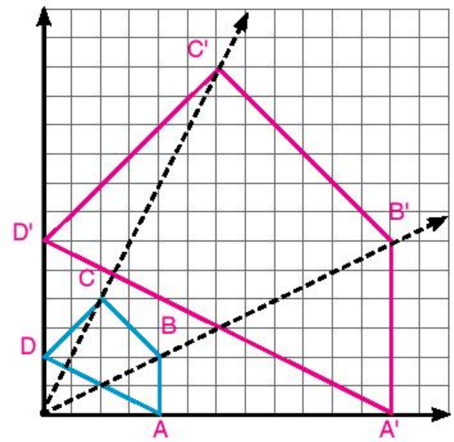
- Polygones semblables
- Triangles semblables
- Côtés correspondants
- Angles superposables
- Polygone régulier
- Quadrilatère
- Pentagone
- Rapport de similitude

Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéo projecteur
- Logiciels
- Papiers quadrillés
- Instruments de mesure
- Calculatrice

Réfléchis et discute

La figure ci-contre illustre un polygone ABCD et son image A'B'C'D' par une transformation géométrique.



A Compare les mesures des angles correspondants :
$\angle A$, $\angle A'$ - $\angle B$, $\angle B'$
$\angle C$, $\angle C'$ - $\angle D$, $\angle D'$
Que remarques-tu ?

B Calcule le rapport entre les longueurs des côtés correspondants $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$, $\frac{C'D'}{CD}$ et $\frac{D'A'}{DA}$. Que remarques-tu ?

Les polygones ayant la même forme, sont appelés des polygones semblables même si leurs côtés correspondants ne sont pas de même longueur.

Polygones semblables

Définition

Deux polygones ayant le même nombre de côtés sont semblables si leurs angles correspondants sont superposables et leurs côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

Remarque que :

1- Dans la figure précédente, on a :

A **les angles correspondants sont superposables :**

$\angle A' \equiv \angle A$, $\angle B' \equiv \angle B$

$\angle C' \equiv \angle C$, $\angle D' \equiv \angle D$

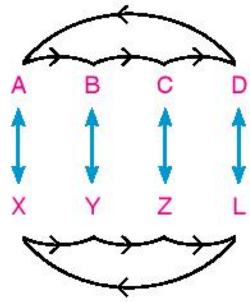
B **les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles :**

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

C'est pour cela qu'on peut dire que les deux figures ABCD et A'B'C'D' sont semblables.

2- On utilise le symbole (~) pour exprimer la similitude de deux polygones et on écrit leurs noms en respectant l'ordre des sommets correspondants pour faciliter la recherche des côtés correspondants.

Si polygone ABCD ~ polygone XYZL , alors :



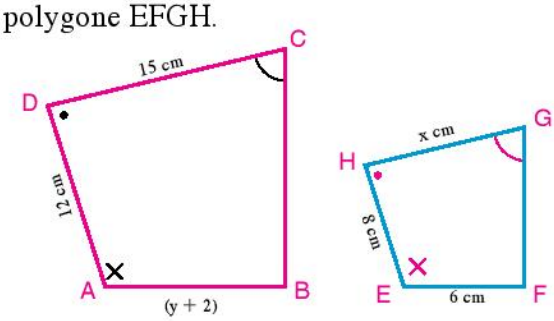
A $\angle A \equiv \angle X$, $\angle B \equiv \angle Y$, $\angle C \equiv \angle Z$, $\angle D \equiv \angle L$

B $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZL} = \frac{DA}{LX} = K$ (rapport de similitude) où $K \neq 0$

Dans ce cas, le rapport de similitude du polygone ABCD au polygone XYZL = K et le rapport de similitude du polygone XYZL au polygone ABCD = $\frac{1}{K}$

Exemple

1 **Dans la figure ci-contre,** polygone ABCD ~ polygone EFGH.



A Trouve le rapport de similitude du polygone ABCD au polygone EFGH

B Trouve la valeur de x et y.

Solution

$\because$ polygone ABCD ~ polygone EFGH

donc: $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$ = le rapport de similitude,

$$\frac{y+2}{6} = \frac{BC}{FG} = \frac{15}{x} = \frac{12}{8}$$

A Le coefficient de proportionnalité $= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

B $\frac{15}{x} = \frac{3}{2} \longrightarrow x = 10\text{cm}$, $\frac{y+2}{6} = \frac{3}{2} \longrightarrow y = 7\text{cm}$

Réfléchis

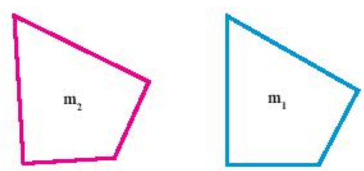
Tous les carrés sont-ils semblables ?

Tous les losanges sont-ils semblables ?

Tous les rectangles sont-ils semblables ?

Tous les parallélogrammes sont-ils semblables ?

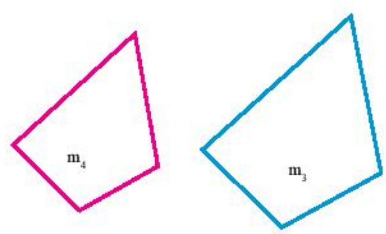
Exeplique ta réponse



polygone $m_1 \equiv$ polygone m_2

1- Pour que deux polygones soient semblables, les deux conditions doivent être vérifiées simultanément. Une seule condition ne suffit pas.

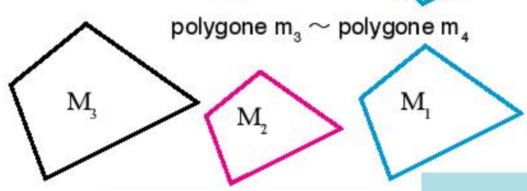
2- Deux polygones superposables sont semblables car les deux conditions de la similitude sont vérifiées. Dans ce cas, le rapport de similitude est égal à 1 mais deux polygones semblables ne sont pas nécessairement superposables comme le montre la figure ci-contre.



polygone m_3 ~ polygone m_4

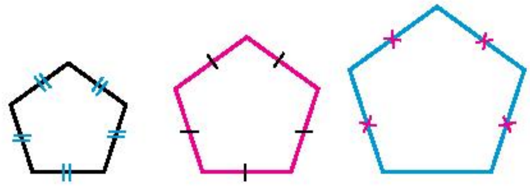
3- Deux polygones semblables à un même troisième sont semblables.

Si polygone M_1 ~ polygone M_3



et polygone $M_2 \sim$ polygone M_3
alors polygone $M_1 \sim$ polygone M_2

4- Tous les polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables. Pourquoi ?

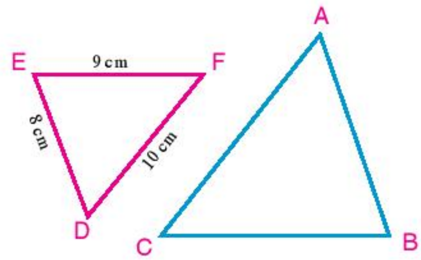


Exemple

2 **Dans la figure ci-contre,** $\triangle ABC \sim \triangle DEF$,

$DE = 8cm$, $EF = 9cm$, $FD = 10cm$

Si le périmètre du triangle $ABC = 81$ cm, calcule les longueurs des côtés du triangle ABC



Solution

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{AE + EF + FD} = \frac{\text{Périmètre de } \triangle ABC}{\text{Périmètre de } \triangle DEF}$ (propriété de la proportionnalité)

Donc $\frac{AB}{8} = \frac{BC}{9} = \frac{CA}{10} = \frac{81}{27}$

$\therefore AB = 8 \times \frac{81}{27} = 24cm$, $BC = 9 \times 3 = 27$, $CA = 10 \times 3 = 30cm$

Remarque que :

Si polygone $P_1 \sim$ polygone P_2, **alors** $\frac{\text{Périmètre du Ploygone } P_1}{\text{Périmètre du Ploygone } P_2}$ = Rapport de similitude

Rapport de similitude de deux polygones

Soit k le rapport de similitude du polygone P_1 au polygone P_2.

Si $k > 1$ le polygone P_1 est un agrandissement du polygone P_2.

Si $0 < k < 1$ le polygone P_1 est une réduction du polygone P_2.

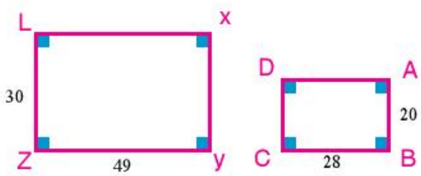
Si $k = 1$ le polygone P_1 se superpose au polygone P_2.

D'une manière générale, on peut utiliser le rapport de similitude pour calculer des dimensions dans des figures semblables.

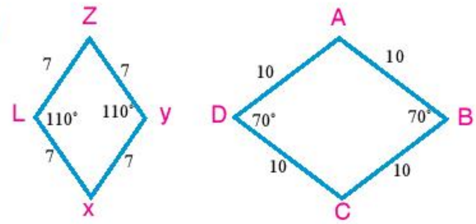
Exercices 2-1

1 Lesquelles des pairs de polygones suivants sont semblables? Écris les polygones semblables en ordonnant les sommets correspondants puis détermine le coefficient de proportionnalité. (les longueurs sont mesurées en centimètres) .

A



B

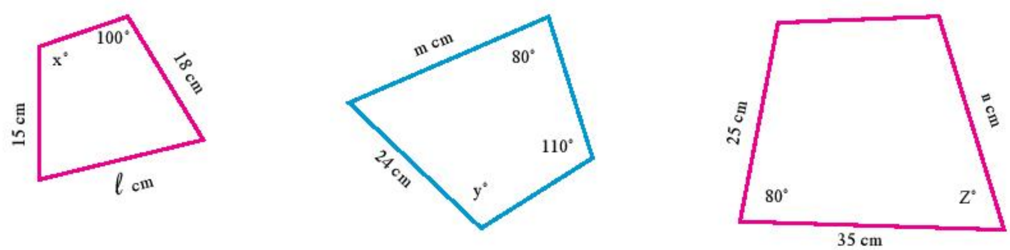


2 Soit un rectangle de dimensions 10 cm et 6 cm. Calcule le périmètre et l'aire d'un rectangle qui lui est semblable si :

A le rapport de similitude est 3.

B le rapport de similitude est 0,4

3 Les trois polygones suivants sont semblables. Trouve la valeur numérique du symbole utilisé pour la mesure.



....

4 Soient deux rectangles semblables dont le premier a pour dimensions 8 cm et 12 cm. Le périmètre du second rectangle est 200 cm. Calcule la longueur du second rectangle et son aire.

....

....

2 - 2 Similitude des triangles

A apprendre

- Cas de similitude de triangles.
- Propriétés de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle

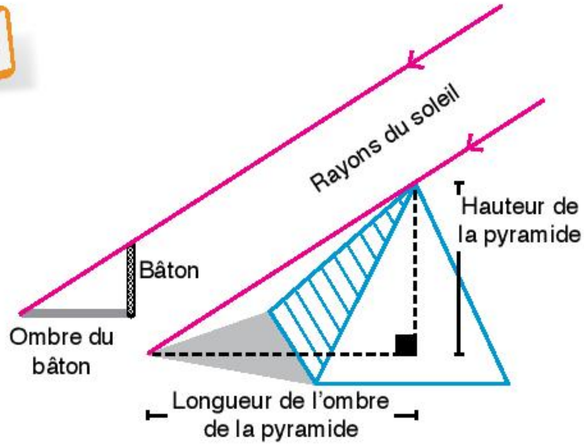
Expressions de base

- Corollaire

Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéo projecteur
- Logiciels de dessin
- Papiers quadrillés
- Miroir plat
- Instruments de mesure
- Calculatrice

Réfléchis et discute

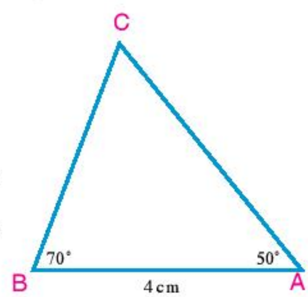


Le Pharaon a demandé au mathématicien Thalès (600 A.JC.) De trouver la hauteur de la grande pyramide. A l'époque, il n'y avait ni appareils ni instruments ni méthodes permettant de trouver la hauteur de la pyramide directement.

Thalès a fixé un bâton verticalement, puis il a commencé à mesurer la longueur de son ombre, puis l'a comparée à la longueur réelle du bâton jusqu'à ce qu'il ait trouvé que la longueur de l'ombre est égale à la longueur du bâton. A ce moment, il a mesuré la longueur de l'ombre de la pyramide. Cette mesure était la même que la hauteur de la pyramide.

Si on te demande de trouver la hauteur du mât du drapeau en utilisant un bâton et une bande graduée, vas-tu attendre le moment où la longueur de l'ombre du bâton soit égale à la longueur de l'ombre du mât du drapeau ou tu peux calculer la hauteur du mât du drapeau à tout moment d'une journée ensoleillée ? Explique ta réponse.

Travail coopératif



1- Trace un triangle ABC tel que : $m(\angle A) = 50°$, $m(\angle B) = 70°$ et $AB = 4cm$

2- Trace un triangle DEF tel que : $m(\angle D) = 50°$, $m(\angle E) = 70°$, $DE = 5cm$

3- Mesure à un millimètre près les longueurs des côtés: $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DF}$ et $\overline{EF}$

4- Utilise ta calculatrice pour calculer les rapports $\frac{AC}{DF}$, $\frac{BC}{EF}$ et $\frac{AB}{DE}$

Ces rapports sont-ils égaux ? Que peux-tu déduire des deux triangles ? Compare tes résultats aux résultats obtenus par d'autres groupe, puis note tes remarques.

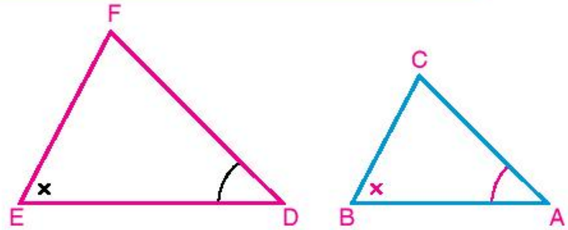
Axiome

Deux triangles ayant deux paires d'angles correspondants superposables sont semblables.

Dans la figure ci-contre :

Si $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$

alors $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



Remarque que

1- Deux triangles équilatéraux sont semblables.

2- Deux triangles isocèles sont semblables si un angle à la base dans l'un des deux triangles a la même mesure qu'un angle à la base dans l'autre triangle.

3- Deux triangles rectangles sont semblables si un angle aigu dans l'un des deux triangles a la même mesure qu'un angle aigu dans l'autre triangle.

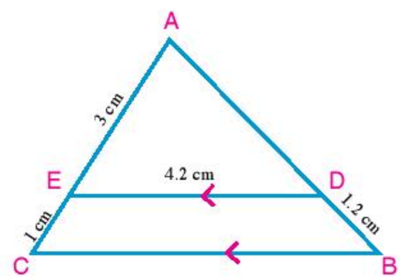
Exemple

1 ABC est un triangle. $D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$ tels que $\overline{DE} // \overline{BC}$,

BD = 1,2cm , AE = 3cm , AC = 4cm et DE = 4,2cm.

A Démontre que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

B Trouve la longueur de $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$



Solution

A $\because \overline{DE} // \overline{BC}$ et $\overleftrightarrow{AB}$ est une sécante.

$\therefore \angle ADE \equiv \angle ABC$

Dans les deux triangles ADE et ABC :

$\because \angle ADE \equiv \angle ABC$ (démontré)

$\angle DAE \equiv \angle BAC$ (angle commun)

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (axiome)

B $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$:

$\frac{AD}{AD + 1,2} = \frac{3}{4} = \frac{4,2}{BC}$

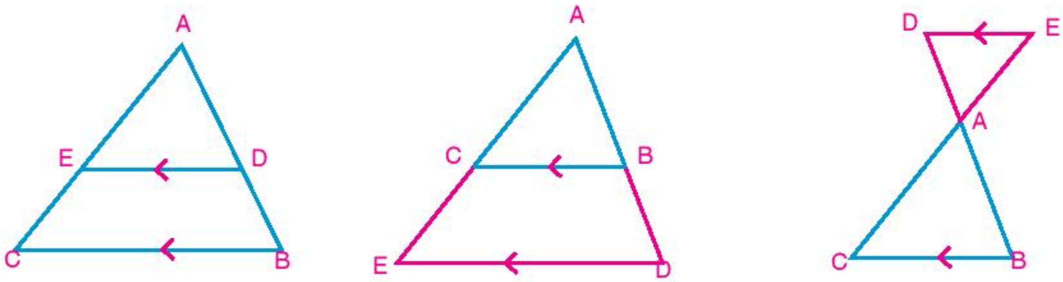
$4\,AD = 3(AD + 1,2)$, $3BC = 4 \times 4,2$

$4\,AD = 3AD + 3,6$ $BC = \frac{4 \times 4,2}{3}$

$AD = 3,6cm$ $BC = 5,6cm$

Résultats importants

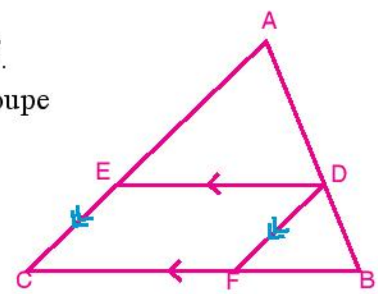
Corollaire 1 **Si une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés ou les droites qui les contiennent, le triangle formé est semblable au triangle initial.**



Si $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ en D, et E respectivement comme le montre les trois figures précédentes :

alors $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Exemple



2 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle et $D \in \overline{AB}$.
On trace $\overrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E, $\overrightarrow{DF} \,//\, \overline{AC}$ qui coupe $\overline{BC}$ en F. Démontre que : $\triangle ADE \sim \triangle DBF$

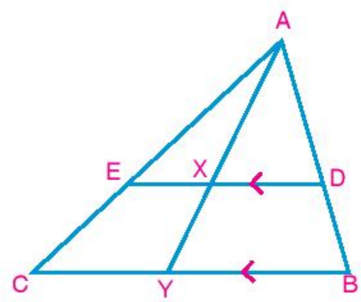
Solution

$\because \overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ $\quad \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ $\quad$ **(1)**

$\because \overline{DF} \,//\, \overline{AC}$ $\quad \therefore \triangle DBF \sim \triangle ABC$ $\quad$ **(2)**

De **(1) et (2) on obtient :** $\triangle ADE \sim \triangle DBF$ $\quad$ **(ce qu'il fallait démontrer)**

Essaie de résoudre



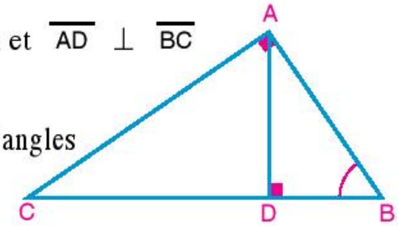
1 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle et $D \in \overline{AB}$
On trace $\overrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E, On trace $\overrightarrow{AX}$ qui coupe $\overline{DE}$ et $\overline{BC}$ en X et Y respectivement.

A Cite trois pairs de triangles semblables.

B Démontre que $\frac{DX}{BY} = \frac{XE}{YC} = \frac{DE}{BC}$.

Corollaire 2 **La perpendiculaire issue du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles semblables et chacun des deux triangles obtenus est semblable au triangle initial.**

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$



Dans les deux triangles DBA et ABC on a :
m ($\angle$ ADB) = m ($\angle$ CAB) = 90° et $\angle$ B est commun aux deux triangles

$\therefore \triangle$ DBA ~ $\triangle$ ABC (axiome) (1)

De même $\triangle$ DAC ~ $\triangle$ ABC (2)

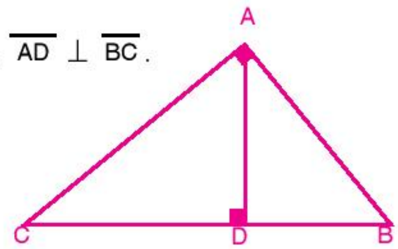
$\because$ les deux triangles sont semblables à un même troisième

$\therefore \triangle$ DBA ~ $\triangle$ DAC ~ $\triangle$ ABC

Exemple

3 ABC est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .telque $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ .Démontre que DA est une moyenne proportionnelle entre DB et DC..

Solution



Hypothèses : Dans le triangle $\triangle$ ABC: m ($\angle$A) = 90°, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

Conclusion : Démontre que $(DA)^2 = DB \times DC$.

Démonstration : Dans le triangle $\triangle$ ABC

$\because$ m ($\angle$A) = 90° et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

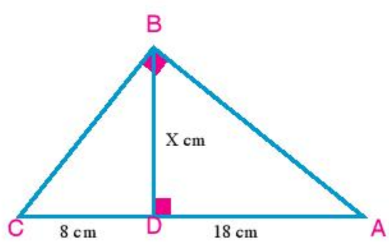
$\therefore \triangle$ DBA ~ $\triangle$ DAC (corollaire)

$\therefore \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DA}$ d'où $(DA)^2 = DB \times DC$

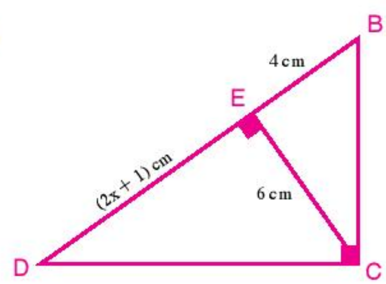
Essaie de résoudre

2 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x :

A

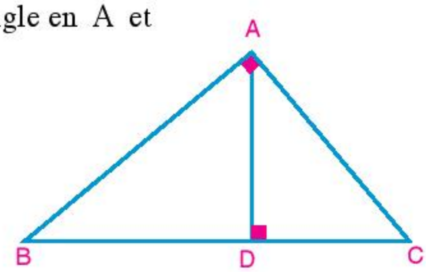


B



Exemple

4 **Dans la figure ci-contre, ABC** est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ Démontre que :



A $(AB)^2 = BC \times BD$

B $(AC)^2 = CB \times CD$

Solution

Dans le triangle ABC:

$\because$ m $(\angle A) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$ (corollaire)

$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$, $(AB)^2 = BC \times BD$

, $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ (corollairet)

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CA}$, $(AC)^2 = CB \times CD$

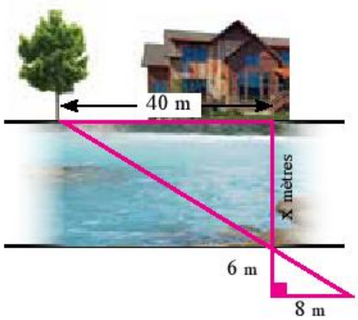
A retenir

Dans les exemples 3 et 4 nous avons démontré le théorème d'Euclide déjà étudié au cycle préparatoire

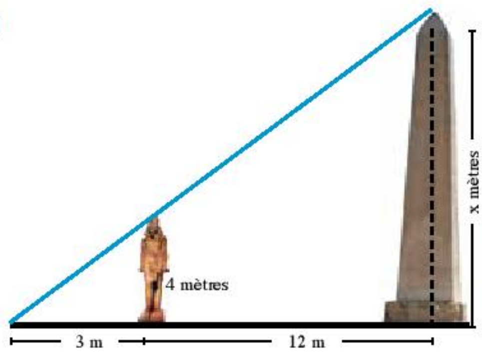
Essaie de résoudre

3 Trouve la distance x dans chacun des cas suivants :

A



B

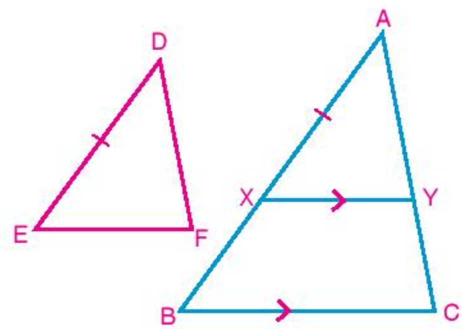


Théorème 1 **Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles alors ces deux triangles sont semblables (La démontration n'est pas sujet à léxamen)**

Hypothèses : ABC et DEF sont deux triangles tels que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

Conclusion : Démontre que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Démonstration : Dans le triangle ABC



On détermine $X \in \overline{AB}$ tel que $AX = DE$

On trace $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

$\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (Corolaire (1))

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CA}{YA}$

$\because AX = DE$ (Construction)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{XY} = \frac{CA}{YA}$ (1)

$\because \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (Hypothèse) (2)

De (1) et (2) on déduit que: $XY = EF$, $YA = FD$

et $\triangle$ AXY $\equiv$ $\triangle$ DEF (Les côtés correspondants sont superposables)

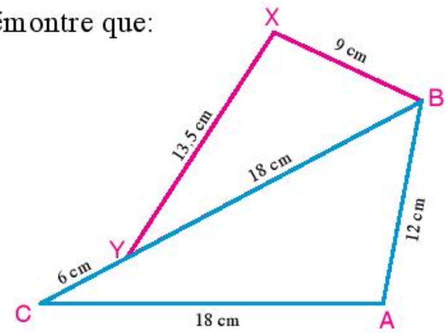
$\therefore \triangle$ DEF $\sim \triangle$ AXY

$\because \triangle$ ABC $\sim \triangle$ AXY (Résultat démontré)

$\therefore \triangle$ ABC $\sim \triangle$ DEF (Ce qu'il fallait démonter)

Exemple

5 **Dans la figure ci-contre,** B , Y et C sont alignés. Démontre que:



A $\triangle$ ABC $\sim \triangle$ XBY

B $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle$ ABX

Solution

A Dans les deux triangles ABC et XBY on a:

$\frac{AB}{XB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, $\frac{BC}{BY} = \frac{18+6}{18} = \frac{4}{3}$

$\frac{AC}{XY} = \frac{18}{13{,}5} = \frac{4}{3}$

Donc $\frac{AC}{XY} = \frac{BC}{BY} = \frac{AB}{XB}$ d'où les longueurs de trois côtés correspondants sont proportionnelles

$\therefore \triangle$ ABC $\sim \triangle$ XBY

B $\because \triangle$ ABC $\sim \triangle$ XBY $\therefore$ m ($\angle$ ABC) = m ($\angle$ XBY)

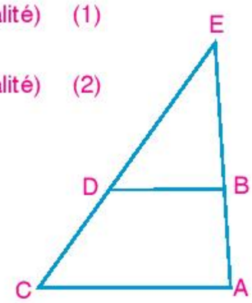
Donc: $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle$ ABX

6 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD}$ = {E} tel que $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ et $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DE}$
Démontre que $\overleftrightarrow{AC}$ // $\overleftrightarrow{BD}$

Solution

$\because \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ $\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$ (Propriété de la proportionnalité) (1)

$\because \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DE}$ $\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DE}$ (Propriété de la proportionnalité) (2)



De (1)et (2), on déduit que $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = \frac{CA}{DB}$

Donc $\triangle$ AEC $\sim \triangle$ BED

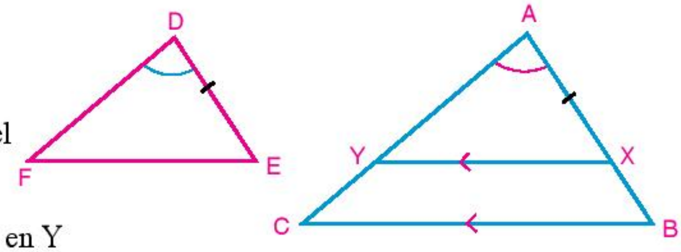
$\therefore$ m($\angle$ ACE) = m($\angle$ BDE)

Ces deux angles sont alterne – internes par rapport à la sécante $\overleftrightarrow{CE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AC}$ // $\overleftrightarrow{BD}$

Théorème 2 **Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables. (La démonstration n'est pas sujet à léxamen)**

Hypothèses : $\angle A \equiv \angle D$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$



Conclusion : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Démonstration : On détermine $X \in \overline{AB}$ tel que $AX = DE$

On trace $\overrightarrow{XY} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Y

$\because \overline{XY} \,//\, \overline{BC}$ $\quad \therefore \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (corollaire) (1)

, $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$

$\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (hypothèse) , $AX = DE$ (construction)

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{DF}$, $AY = DF$

$\therefore \triangle AXY \equiv \triangle DEF$ (deux côtés et un angle compris)

$\triangle AXY \sim \triangle DEF$ (2)

De (1) et (2), on déduit que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ Ce qu'il fallait démonter.

Exemple

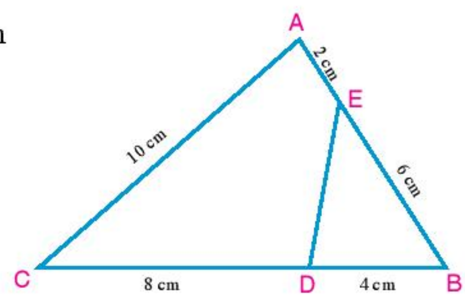
7 ABC est un triangle tel que AB = 8 cm, AC = 10 cm et BC = 12 cm. $E \in \overline{AB}$ tel que AE = 2cm, $D \in \overline{BC}$ tel que BD = 4cm.

A Démontre que $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ puis déduis la longueur de $\overline{DE}$.

B Démontre que le quadrilatère ACDE est inscriptible.

Solution

$\because AB = 8cm$ et $AE = 2cm$ $\quad \therefore BE = 6cm$



A Dans les deux triangles BDE et BAC on a :

$\angle DBE \equiv \angle ABC$ (1)

, $\frac{BD}{BA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{BE}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ (2)

De (1) et (2) $\quad \therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC$ (théorème)

De la similitude $\frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$, $DE = \frac{1}{2} \times 10 = 5cm$

B De la similitude, on a $\angle BDE \equiv \angle BAC$ $\therefore m(\angle BDE) = m(\angle BAC)$

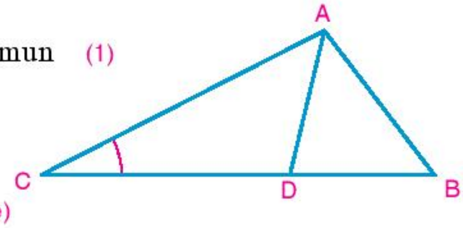
$\because \angle BDE$ est extérieur au quadrilatère ACDE

$\therefore$ ACDE est un quadrilatère inscriptible.

Exemple

8 ABC est un triangle. $D \in \overline{BC}$ tel que $(AC)^2 = CD \times CB$. Démontre que $\triangle ACD \sim \triangle BCA$

Solution



Dans les deux triangles ABC et DAC, $\angle C$ est commun (1)

$\because (AC)^2 = CD \times CB$

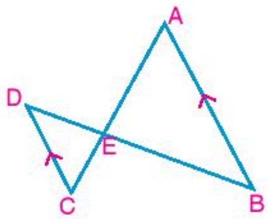
$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC}$ (2)

De (1) et (2), on déduit que $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ (théorème)

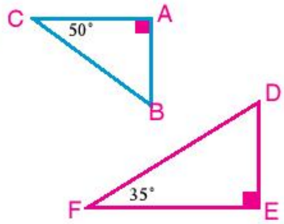
Exercices 2-2

1 Lesquels des cas suivants représentent deux triangles semblables. Justifie ta réponse.

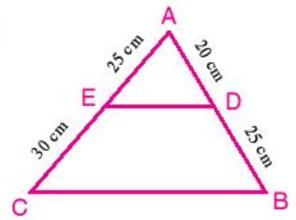
A



B

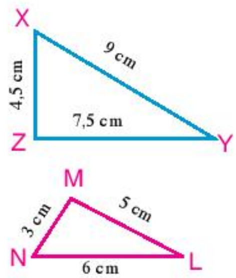


C

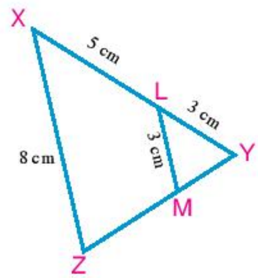


....

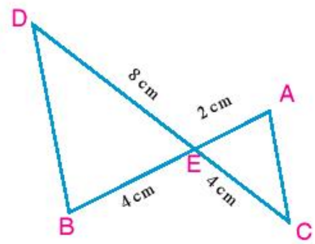
D



E



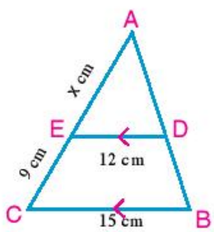
F



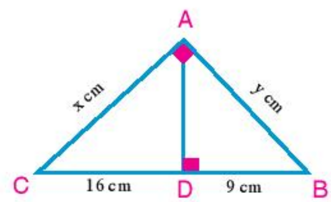
....

2 Trouve la valeur numérique du symbole utilisé pour la mesure :

A

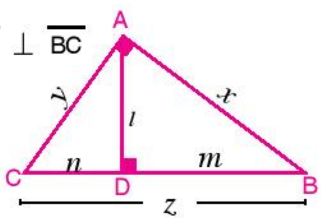


B



....

3 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$



1) Complète : $\triangle ABC \sim \triangle$ .... $\sim \triangle$ ....

2) Si x, y, z, l, m et n sont les longueurs des segments indiqués sur la figure en centimètres, complète les proportions suivantes :

A $\dfrac{x}{z} = \dfrac{m}{\cdots\cdots}$ **B** $\dfrac{x}{z} = \dfrac{l}{\cdots\cdots}$ **C** $\dfrac{m}{l} = \dfrac{x}{\cdots\cdots}$ **D** $\dfrac{l}{\cdots\cdots} = \dfrac{\cdots\cdots}{l}$

E $\dfrac{x}{\cdots\cdots} = \dfrac{\cdots\cdots}{x}$ **F** $\dfrac{\cdots\cdots}{y} = \dfrac{y}{\cdots\cdots}$ **G** $\dfrac{l}{x} = \dfrac{\cdots\cdots}{z}$ **H** $\dfrac{l}{x} = \dfrac{\cdots\cdots}{y}$

4 $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$ sont deux cordes d'un cercle, $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \{E\}$, où E est à l'extérieur du cercle. Si AB = 4cm, DC = 7cm et BE = 6cm. démontre que $\triangle ADE \sim \triangle CBE$, puis trouve la longueur de $\overline{CE}$

....

....

....

5 Soit $\triangle$ ABC un triangle tel que AC > AB, M $\in \overline{AC}$ tel que m($\angle$ABM) = m ($\angle$C). Démontre que $(AB)^2 = AM \times AC$.

....

....

....

6 Soit ABC un triangle rectangle en A. On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$ qui le coupe en D.

Si $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ et AD = $6\sqrt{2}$ cm. trouve la longueur de $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

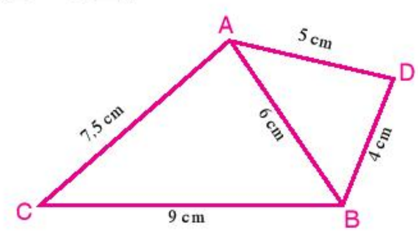
....

....

....

7 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle tel que AB = 6cm , BC = 9cm et AC = 7,5cm.

D est un point extérieur au triangle ABC tel que DB = 4cm et DA = 5cm. Démontre que :



A $\triangle ABC \sim \triangle DBA$

B $\overrightarrow{BA}$ est une bissectrice de $\angle$ DBC

....

....

....

2 - 3 Relation entre les aires de deux polygones semblables

A apprendre

- Relation entre les périmètres de deux polygones semblables et rapport de similitude.
- Relation entre les aires de deux polygones semblables et rapport de similitude.

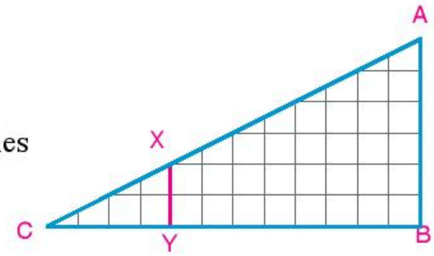
Expressions de base

- Périmètre
- Aire
- Aire d'un polygone
- Côtés correspondants

Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéoprojecteur
- Logiciels
- Papiers quadrillé
- Calculatrice

Réfléchis et discute



Sur un papier quadrillé, trace les deux triangles ABC et XYC.

1- Démontre que :
$\triangle XYC \sim \triangle ABC$. Calcule le rapport de la similitude dans ce cas.

2- Calcul le rapport entre l'aire du triangle XYC et l'aire du triangle ABC.

3- Détermine un point $D \in \overline{AC}$ puis trace $\overrightarrow{DD'} \,//\, \overline{AB}$ qui coupe $\overline{BC}$ en D' pour obtenir un triangle DD'C. Est-ce que $\triangle DD'C \sim \triangle XYC$?

4- Complète le tableau suivant :

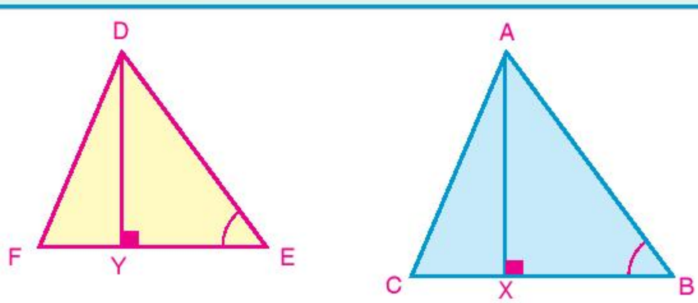
Triangles	Rapport de similitude	Aire du premier triangle	Aire du deuxième triangle	Rapport de l'aire du premier triangle à l'aire du deuxième triangle
$\triangle XYC \sim \triangle ABC$	$\frac{1}{3}$	4	36	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$\triangle DD'C \sim \triangle ABC$				
$\triangle XYC \sim \triangle DD'C$				

5- Quelle relation existe-t-il entre les rapports obtenus et les rapports de similitude ?

1) Rapport des aires de deux triangles semblables

Théorème 3

Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants. (La démontration n'est pas sujet à léxamen)



Hypothèses : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Conclusion : $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\dfrac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{FD}\right)^2$

> **Remarque**
> **La lettre A représente l'aire de la surface du polygone**

Démonstration : On trace $\overrightarrow{AX} \perp \overline{BC}$ tel que $\overrightarrow{AX} \cap \overline{BC} = \{X\}$,

On trace $\overrightarrow{DY} \perp \overline{EF}$ tel que $\overrightarrow{DY} \cap \overline{EF} = \{Y\}$

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle E)$ et $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ (1)

Dans les deux triangles ABX et DEY on a :

$m(\angle X) = m(\angle Y) = 90°$, $m(\angle B) = m(\angle E)$

$\therefore \triangle ABX \sim \triangle DEY$ (Axiome)

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AX}{DY}$ (2)

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AX}{\frac{1}{2} EF \times AY} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AX}{DY}$$

De (1) et (2) on obtient :

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AB}{DE} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{CA}{FE}\right)^2$$ (Ce qu'il fallait démonter)

Remarque que : $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\dfrac{AB}{DE}\right)^2$, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AX}{DY}$

D'où $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\dfrac{AX}{DY}\right)^2$

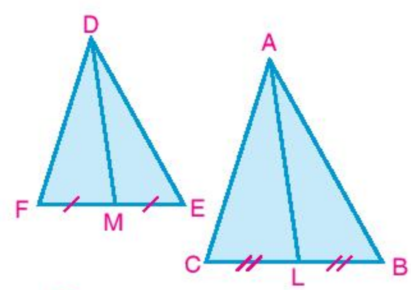
Donc le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport entre les longueurs de deux hauteurs correspondantes dans les deux triangles.

Réflexion critique :

1- Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, L est le milieu de $\overline{BC}$ et M est le milieu de $\overline{EF}$.

a-t-on $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\dfrac{AL}{DM}\right)^2$?

Explique ta réponse et note tes remarques

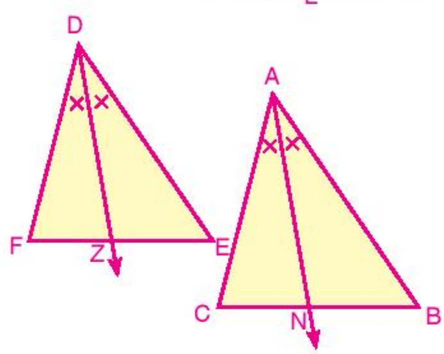


2- Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\overrightarrow{AN}$ est une bissectrice de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en N,

$\overrightarrow{DZ}$ est une bissectrice de $\angle D$ qui coupe $\overline{EF}$ en Z.

A-t-on $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\dfrac{AN}{DZ}\right)^2$?

Explique ta réponse et note tes remarques

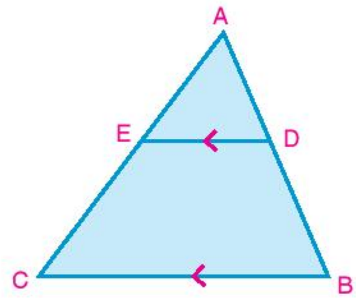


Exemple

1 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle, D ∈ $\overline{AB}$ tel que $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, $\overrightarrow{DE}$ // $\overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E.

Si l'aire du triangle ABC = 784 cm², trouve :

A l'aire du tringle ADE **B** l'aire du trapèze DBCE



Solution

Dans Le triangle ADC :

$\because \overline{DE}$ // $\overline{BC}$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (corollaire)

$\therefore \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$ (théorème)

Donc $\frac{A(\triangle ADE)}{784} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$ $\therefore A(\triangle ADE) = 784 \times \frac{9}{49} = 144 cm^2$

$\because$ Aire du trapèze DBCE = aire du triangle ABC – aire du triangle ADE

$\therefore$ Aire du trapèze DBCE = 784 – 144 = 640 cm²

Exemple

2 Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est 4 : 9 . Si le périmètre du grand triangle est 90 cm, trouve le périmètre du plus petit triangle.

Solution

Supposons que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{4}{9}$ d'où $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$

$\because \frac{\text{Périmètre de } \triangle ABC}{\text{Périmètre de } \triangle DEF} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3} < 1$

$\therefore$ Périmètre $\triangle ABC$ < Périmètre $\triangle DEF$

D'où $\frac{\text{Périmètre } (\triangle ABC)}{90} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ Périmètre $\triangle ABC$ = 60cm

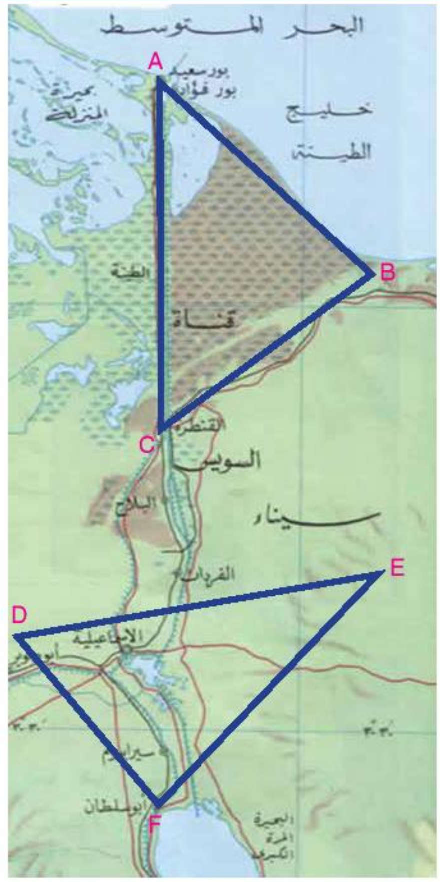
Essaie de résoudre

1 ABC et DEF sont deux triangles semblables et $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{3}{4}$

A Si le périmètre du plus petit triangle est $45\sqrt{3}$ cm. calcule le périmètre du plus grand triangle

B Si EF = 28 cm, trouve la longueur de $\overline{BC}$.

Exemple



3 Si chaque centimètre sur la carte représente 10 kilomètres en réalité, trouve à un kilomètre carré près, l'aire réelle de la surface représentée sur la carte par le triangle ABC sachant que $(\triangle ABC) = 6{,}4\text{cm}^2$.

Solution

$$\text{Echelle} = \text{Rapport de similitude} = \frac{1}{10 \times 10^5}$$

$$\frac{A(\triangle ABC)}{\text{Aire réelle}} = \text{Le carré du rapport de similitude}$$

$$\frac{6{,}4}{\text{Aire réelle}} = \left(\frac{1}{10 \times 10^5}\right)^2$$

$$\text{Aire réelle} = 6{,}4 \times 10 \times 10 \times 10^5 \times 10^5 \text{ cm}^2$$

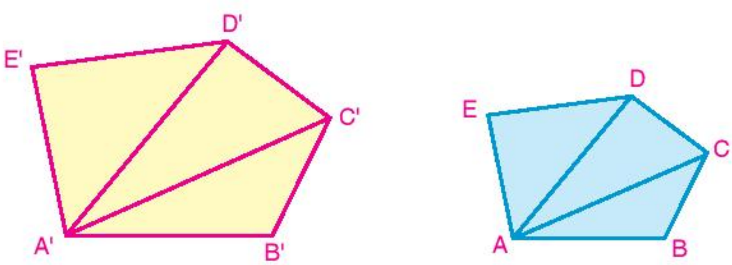
$$\simeq 640 \text{ km}^2$$

Corollaire : Deux polygones semblables peuvent être partagés en un même nombre de triangles deux à deux semblables.

Remarque : Le corollaire précédent est vrai quelque soit le nombre de côtés dans les deux polygones semblables (deux polygones semblables ont le même nombre de côtés). Si le nombre de côtés d'un polygone est n côtés, il peut être partagé (par des diagonales tracées d'un même sommet) en $(n - 2)$ triangles.

Théorème 4

Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants. (La démontration n'est pas sujet à léxamen)



Hypothèses : polygone ABCDE ~ polygone A'B'C'D'E'

Conclusion : $\dfrac{A\,(\text{polygone ABCDE})}{A\,(\text{polygone A'B'C'D'E'})} = \left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2$

Démonstration : Des points A et A' on trace $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{A'C'}$ et $\overline{A'D'}$

$\because$ polygone ABCDE ~ polygone A'B'C'D'E'

$\therefore$ Ils peuvent être partagés en un même nombre de triangles correspondants semblables **(corollaire)**

On a : $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle A'B'C')} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2$, $\frac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle A'C'D')} = \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2$, $\frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{DE}{D'E'}\right)^2$

$\because \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AB}{A'B'}$ (de la similitude des deux polygones)

$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle A'B'C')} = \frac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle A'C'D')} = \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

D'après les propriétés de la proportionnalité :

$$\frac{A(\triangle ABC) + A(\triangle ACD) + A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'B'C') + A(\triangle A'C'D') + A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

D'où $\frac{A\,(\text{polygone } ABCDE)}{A\,(\text{polygone } A'B'C'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$ (Ce qu'il fallait démonter)

Remarque

$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$

Essaie de résoudre

2 **A** Si Polygone ABCD ~ Polygone A'B'C'D' et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{3}$, trouve le valeur de :
$\frac{A\,(\text{polygone } ABCD)}{A\,(\text{polygone } A'B'C'D')}$, $\frac{\text{périmètre du polygone } ABCD}{\text{périmètre du polygone } A'B'C'D'}$

B Si les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' sont semblables, et si le rapport entre leurs aires est 4 : 25 , trouve le valeur de : $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{\text{périmètre du polygone } AB\,CDE}{\text{périmètre du polygone } A'B'C'D'E'}$

C Si le rapport entre les périmètres de deux polygones est 1 : 4 et l'aire du premier polygone est 25 cm², calcule l'aire du deuxième polygone.

D Si les longueurs de deux côtés correspondants dans deux polygones semblables sont 12 cm et 16 cm et si l'aire du plus petit polygone est 135 cm², calcule l'aire du plus grand polygone.

Exemple

4 ABCD et XYZL sont deux polygones semblables tels que $m(\angle A) = 40°$ et $XY = \frac{3}{4}AB$, $CD = 16$cm.

Calcule : **1°)** $m(\angle X)$

2°) la longueur de $\overline{ZL}$

3°) A(polygone ABCD) : A (polygone X Y Z L)

Solution

1°) $\because$ polygone ABCD ~ polygone XYZL

$\therefore m(\angle A) = m(\angle X)$ d'où $m(\angle X) = 40°$ (C.Q.F.D en 1°)

2°) $\because XY = \frac{3}{4}AB \quad \therefore \frac{AB}{XY} = \frac{4}{3}$ (propriété de la proportionnalité)

De la similitude des deux polygones, on déduit que $\frac{AB}{XY} = \frac{CD}{ZL}$

$\therefore \frac{4}{3} = \frac{16}{ZL}$ donc $ZL = \frac{3 \times 16}{4} = 12cm$ (C.Q.F.D en 2°)

A(polygone ABCD) : A (polygone XYZL) $= (AB)^2 : (XY)^2$

$= 16k^2 : 9k^2$

3°) $= 16 : 9$ (C.Q.F.D en 3°)

Remarque

$AB = 4k$

$XY = 3k$

$k \neq 0$

Exemple

5 Le rapport entre les périmètres de deux polygones semblables est $3 : 4$. Si la somme de leurs aires est 225 cm^2, calcule l'aire de chaque polygone.

Solution

$\because$ Le rapport entre les périmètres des deux polygones $= 3 : 4$

$\therefore$ Le rapport entre deux côtés correspondants $= 3 : 4$

Supposons que l'aire du premier polygone $= 9x \text{ cm}^2$,

$\therefore$ l'aire du deuxième polygone $= 16x \text{ cm}^2$

$\therefore 9x + 16x = 225$, d'où $x = \frac{225}{9 + 16} = 9$

$\therefore$ L'aire du premier polygone $= 9 \times 9 = 81 \text{cm}^2$

$\therefore$ L'aire du deuxième polygone $= 16 \times 9 = 144 \text{cm}^2$

Essaie de résoudre

3 **Lien avec l'agriculture :** Deux fermes ont la forme de deux polygones semblables. Le rapport entre les longueurs de deux côtés correspondants est $5 : 3$. Si la différence entre leurs superficies est égale à 32 acres, trouve l'aire de chaque ferme.

Exercices 2-3

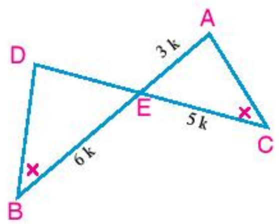
1 Complète :

A Si $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ et $AB = 3\ XY$, alors $\dfrac{A(\triangle XYZ)}{A(\triangle ABC)} = \dotfill$.

B Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $A(\triangle ABC) = 9\ A(\triangle DEF)$ et $DE = 4cm$, alors
$AB = \dotfill$ cm

2 Observe chacune des figures suivantes où k est une constante , puis complète :

A

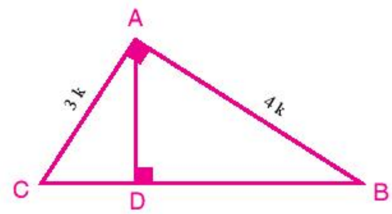


$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

$A(\triangle ACE) = 900\ cm^2$

Alors $A(\triangle DEB) = \dotfill\ cm^2$

B



$m(\angle BAC) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$A(\triangle ADC) = 180\ cm^2$ Alors :

$A(\triangle ABC) = \dotfill\ cm^2$

3 Soit ABC un triangle. $D \in \overline{AB}$ tel que $AD = 2\ BD$ et $E \in \overline{AC}$ tel que $\overline{DE} \ // \ \overline{BC}$
Si l'aire du triangle $\triangle ADE = 60cm^2$, trouve l'aire du trapèze DBCE.

....

....

....

4 Soit ABC un triangle rectangle en B. On trace les triangles équilatéraux ABX, BCY, et ACZ à l'extérieur du triangle ABC. Démontre que $A(\triangle ABX) + A(\triangle BCY) = A(\triangle ACZ)$.

....

....

....

5 Soit ABC un triangle tel que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{3}$. On trace le cercle passant par ses sommets. Du point B on trace la tangente au cercle qui coupe $\overrightarrow{AC}$ en E.

Démontre que: $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle ABE)} = \dfrac{7}{16}$

....

....

....

6 Soit ABCD un parallélogramme. $X \in \overrightarrow{AB}$ et $X \notin \overline{AB}$, tel que BX = 2 AB, $Y \in \overrightarrow{CB}$ et $Y \notin \overline{CB}$,

tel que BY = 2 BC. On trace le parallélogramme BXZY. Démontre que : $\frac{A\,(ABCD)}{A\,(XBYZ)} = \frac{1}{4}$

....

....

....

2 - 4 Applications de la similitude dans le cercle

A apprendre

- Relation entre deux cordes sécantes d'un cercle.
- Relation entre deux sécantes d'un cercle d'un point extérieur au cercle.
- Relation entre la longueur d'une tangente à un cercle et les longueurs des deux parties d'une sécante tracées d'un point à l'extérieur du cercle.
- Modélisation, résolution de problèmes et application à la vie quotidienne utilisant la similitude des polygones dans un cercle.

Expressions de base

- Corde
- Sécante
- Tangente
- Diamètre
- Tangente commune extérieurement
- Tangente commune intérieurement
- Cercles concentriques

Réfléchis et discute

Dans chacune des figures suivantes, il y a deux triangles semblables. Ecris les noms des triangles en ordonnant les sommets correspondants, puis déduis les côtés correspondants.

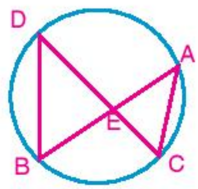


figure (1)

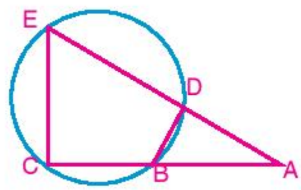


figure (2)

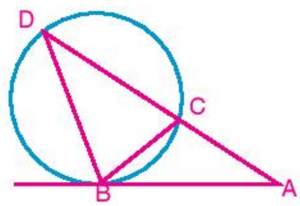


figure (3)

- **Dans la figure (1):** Y a-t-il une relation entre EA × EB et EC × ED ?
- **Dans la figure (2):** Y a-t-il une relation entre AE × AD et AC × AB ?
- **Dans la figure (3):** Y a-t-il une relation entre AD × AC et $(AB)^2$?

Problème type

Si deux droites contenant respectivement deux cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ d'un cercle se coupent en un point E , alors EA × EB = EC × ED

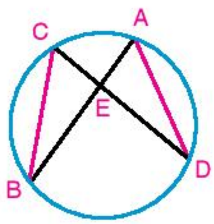


figure (1)

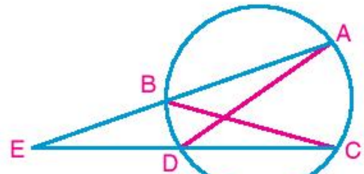


figure (2)

Pour démontrer ce résultat :

- Trace $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$
- Dans chacune des deux figures, démontre que les deux triangles EAD et ECB sont semblables. Par conséquent, on obtient :

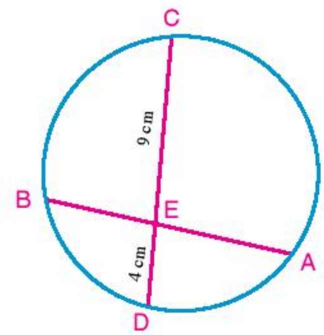
  $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$ $\quad\quad \therefore EA \times EB = EC \times ED$

Exemple

1 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$,

Si $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$, EC = 9cm et ED = 4cm,

trouve la longueur de $\overline{EB}$



Solution

$\because \frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$ $\therefore$ EA = 4k et EB = 3k où $k \neq 0$

$\because \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ $\therefore$ EA $\times$ EB = EC $\times$ ED (problème type)

d'où : $4k \times 3k = 9 \times 4$

$12k^2 = 36$

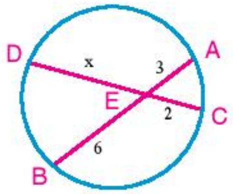
$k^2 = 3$

$k = \sqrt{3}$, EB = $3\sqrt{3}$ cm

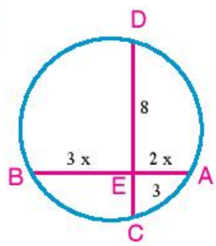
Essaie de résoudre

1 Trouve la valeur de x dans chacune de figures suivantes (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

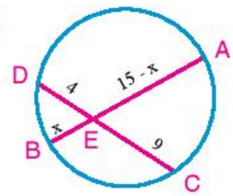
A



B



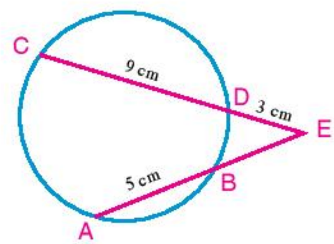
C



Exemple

2 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$, AB = 5cm,

CD = 9cm et ED = 3cm. Trouve la longueur de $\overline{BE}$



Solution

Soit la longueur de B E = x cm.

$\because \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$

$\therefore$ EB $\times$ EA = ED $\times$ EC (problème type)

Donc: $x (x + 5) = 3 (3 + 9)$

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$(x - 4) (x + 9) = 0$

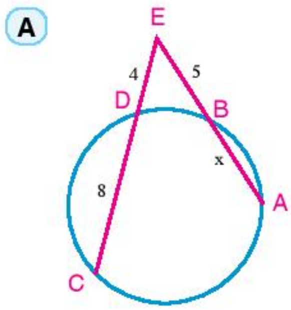
$\therefore x = 4$, $x = -9$ refusée

$\therefore$ La longueur de $\overline{BE}$ = 4cm.

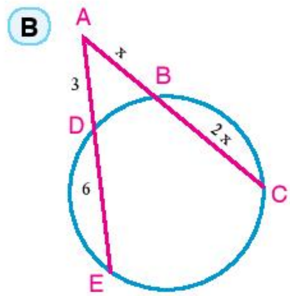
Essaie de résoudre

2 Trouve la valeur de x dans chacune des figures suivantes :

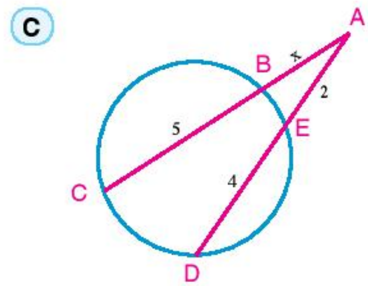
A



B



C

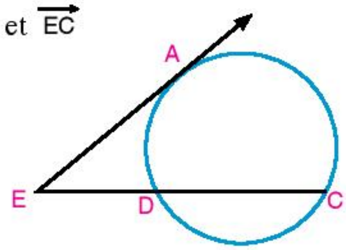


Corollaire 1

Si E est un point exterieur a un cercle; $\overrightarrow{EA}$ est un tangente du cercle en A et $\overrightarrow{EC}$ coupe le cercle en D et C alors $(EA)^2 = ED \times EC$

Dans la figure ci-contre, $\overrightarrow{EA}$ est une tangente au cercle et $\overrightarrow{EC}$ coupe le cercle en D, C

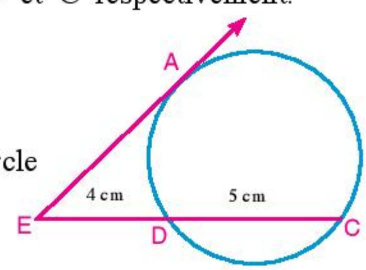
$\therefore (EA)^2 = ED \times EC$



Exemple

3 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{EA}$ coupe le cercle en D et C respectivement.

Si ED = 4cm, CD = 5cm, trouve la longueur de $\overline{EA}$



Solution

$\because$ $\overrightarrow{EA}$ est une tangente et $\overrightarrow{EC}$ est une sécante au cercle

$\therefore (EA)^2 = ED \times EC$ (corollaire)

$(EA)^2 = 4(4 + 5) = 36$

$\therefore EA = 6cm$

Réciproque du problème type

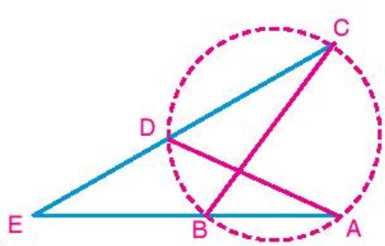
Si deux droites contenant respectivement deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ se coupent en un point E (différent des points A , B , C et D) et si $EA \times EB = EC \times ED$, alors les points A , B , C et D sont cocycliques.

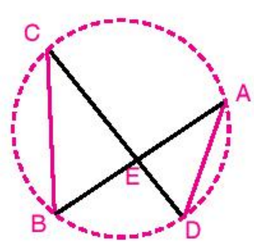
Remarque que :

$EA \times EB = EC \times ED$

donc $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$

- A-t-on $\triangle EAD \sim \triangle ECB$? Pourquoi ?
- A-t-on $m(\angle A) = m(\angle C)$? Pourquoi ?

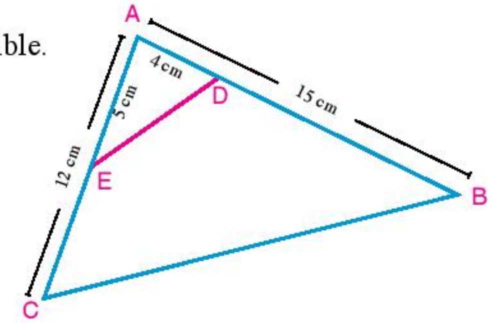




⯐ Les points A , B , C , et D appartiennent-ils à un même cercle ? Explique ta réponse.

Exemple

4 Soit ABC un triangle tel que AB = 15 cm et AC = 12 cm. D ∈ $\overline{AB}$ tel que AD = 4cm et E ∈ $\overline{AC}$ tel que AC = 5cm.
Démontre que le quadrilatère DBCE est inscriptible.



Solution

$\because AD \times AB = 4 \times 15 = 60,$

$AE \times AC = 5 \times 12 = 60$

$\therefore AD \times AB = AE \times AC$

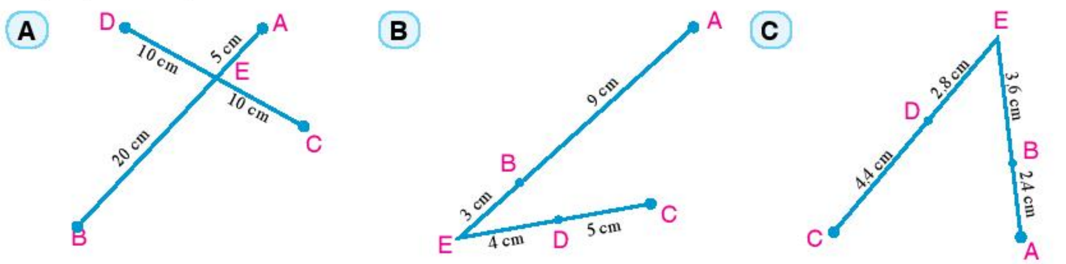
$\because \overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{CE} = \{A\}$ et $AD \times AB = AE \times AC$

∴ les points D , B , C et E sont cocycliques. (Réciproque du problème type)

d'où le quadrilatère DBCE est inscriptible

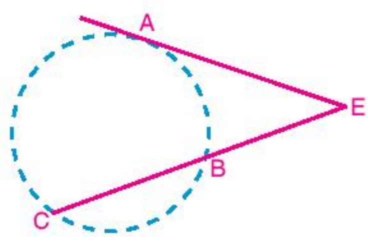
Essaie de résoudre

3 Dans lesquelles des figures suivantes, les points A , B , C et D sont-ils cocycliques ? Explique ta réponse.



Corollaire 2

Si $(EA)^2 = EB \times EC$
alors $\overleftrightarrow{EA}$ est une tangente au cercle passant par les points A , B et C.



Exemple

5 Soit ABC un triangle tel que AB = 8 cm et AC = 4 cm. D ∈ $\overrightarrow{AC}$ et D ∉ $\overline{AC}$ tel que CD = 12cm. tel que $\overline{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D.

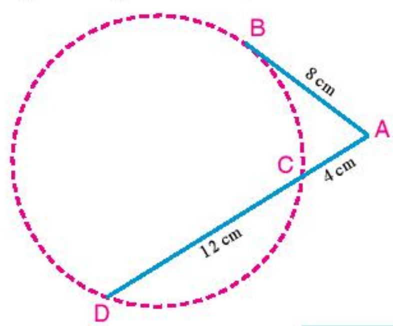
Solution

$\because AC \times AD = 4\ (4 + 12) = 64,$

et $(AB)^2 = (8)^2 = 64$

$\therefore (AB)^2 = AC \times AD$

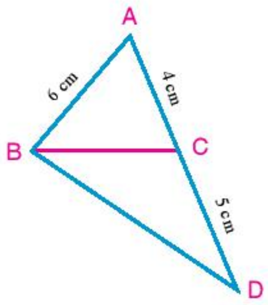
∴ $\overline{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D.



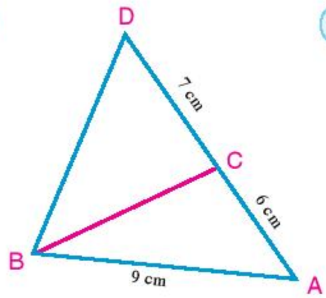
Essaie de résoudre

4) Dans lesquelles des figures suivantes, $\overleftrightarrow{AB}$ est-une tangente au cercle passant par les points B , C et D ?

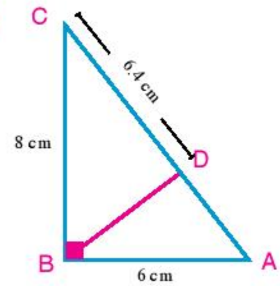
A



B



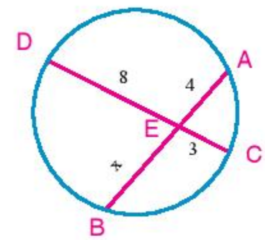
C



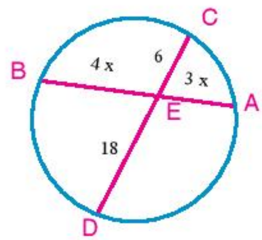
Exercices 2-4

1 En utilisant une calculatrice ou par le calcul mental, trouve la valeur numérique de x dans chacun des cas suivants (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

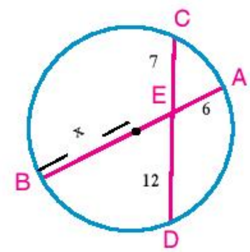
A



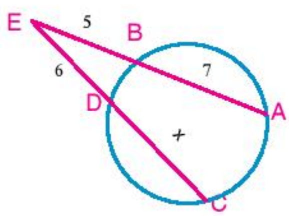
B



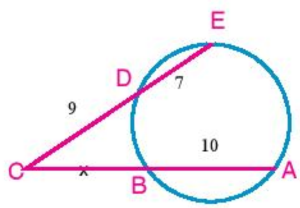
C



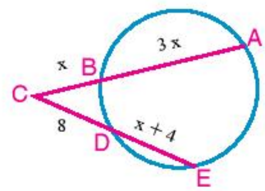
D



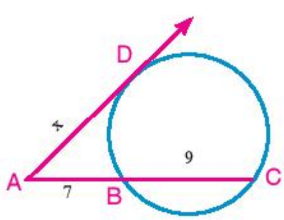
E



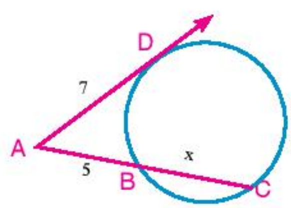
F



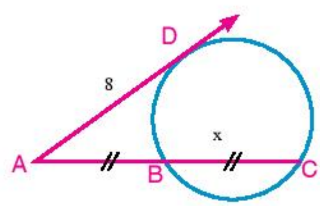
G



H

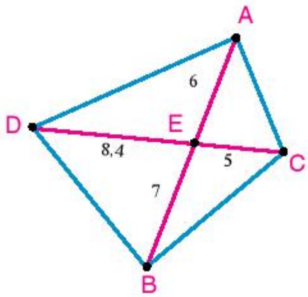


I

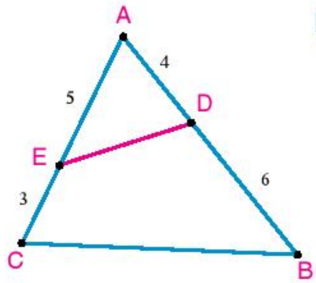


2 Dans lesquelles des figures suivantes, les points A , B , C et D sont-ils cocycliques ? Explique ta réponse. (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

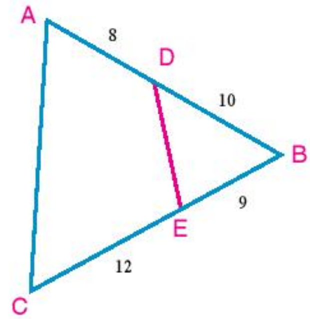
A



B



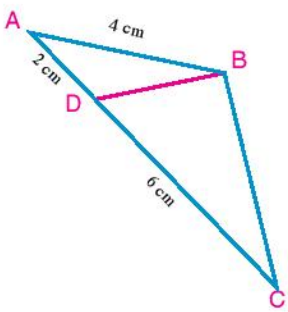
C



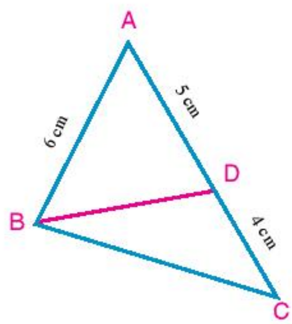
....

3 Dans lesquelles des figures suivantes, $\overline{AB}$ est-elle une tangente au cercle passant par les points B, C et D.

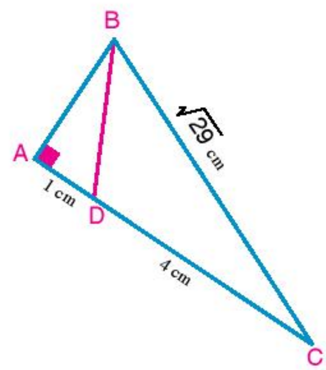
A



B



C



....

....

....

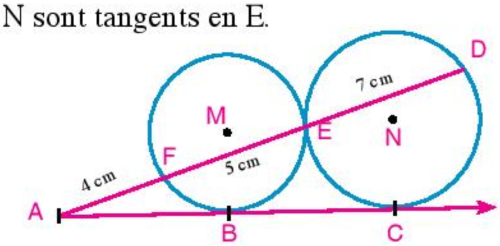
....

4 Soient deux cercles sécants en A et B. C ∈ $\overleftrightarrow{AB}$ et C ∉ $\overline{AB}$, Du point C, on trace les deux segments $\overline{CX}$ et $\overline{CY}$ tangents au cercle en X et Y . Démontre que CX = CY.

....

....

5 **Dans la figure ci-contre,** les deux cercles M et N sont tangents en E.
$\overrightarrow{AC}$ est une tangente au cercle M en B et au cercle N en C. $\overrightarrow{AE}$ est une sécante aux deux cercle M et N en F et D respectivement.
Si AF = 4 cm, FE = 5 cm et ED = 7 cm,
Démontre que B est le milieu de $\overline{AC}$



....

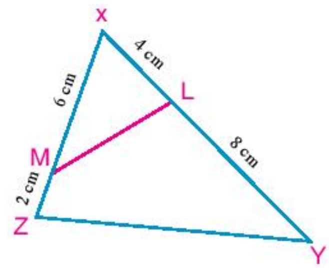
....

6 **Dans la figure ci-contre,** $L \in \overline{XY}$ tel que $XL = 4cm$, $YL = 8cm$, $M \in \overline{XZ}$ tel que $XM = 6cm$ et $ZM = 2cm$

Démontre que :

A $\triangle XLM \sim \triangle XZY$

B La figure LYZM est un quadrilatère inscriptible.



....

....

7 $\overline{AB} \cap \overline{CE} = \{E\}$, $AE = \frac{5}{12} BE$ et $DE = \frac{3}{5} EC$. si $BE = 6cm$ et $CE = 5cm$.

démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

....

....

8 Soit ABC un triangle. $D \in \overline{BC}$ tel que $DB = 5cm$ et $DC = 4cm$. si $AC = 6cm$. démontre que :

A $\overline{AC}$ est une tangente au cercle passant par les points A, B et D.

B $\triangle ACD \sim \triangle BCA$

C $A(\triangle ABD) : A(\triangle ABC) = 5 : 9$

....

....

9 Soient deux cercles concentriques de centre M de longueurs de rayons 12 cm et 7 cm. On trace la corde $\overline{AD}$ dans le grand cercle qui coupe le petit cercle en B et C respectivement. Démontre que $AB \times BD = 95$

....

....

Le temple de Hatshepsout à Louxor

Géométrie

Unité 3

Théorèmes de la proportion dans un triangle

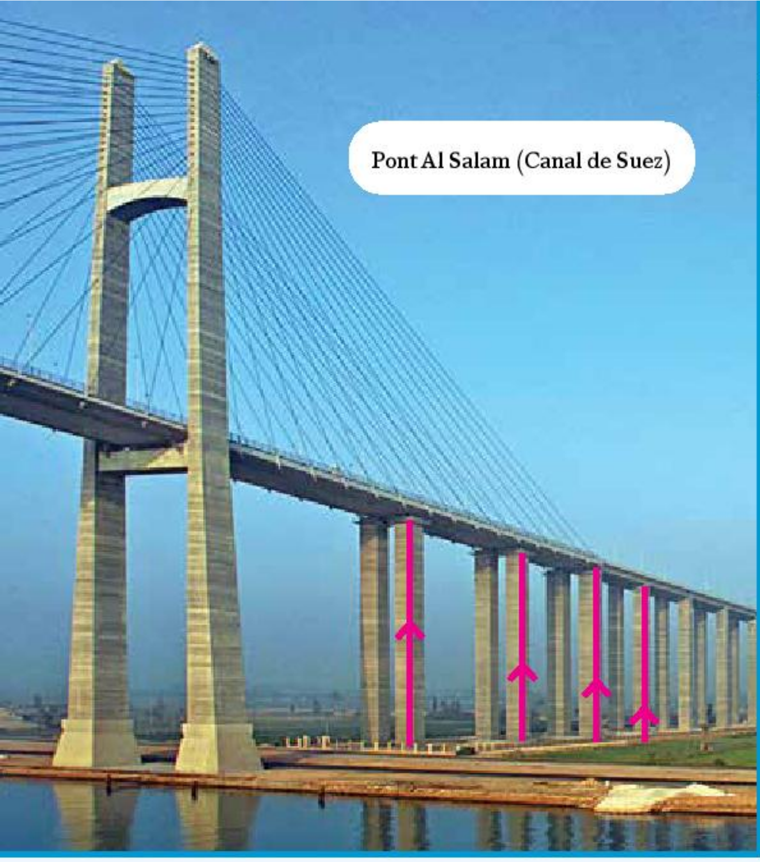
Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Identifier le théorème d'énoncé « Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles », sa réciproque et ses corollaires.
- Identifier le théorème de Thalès d'énoncé « Des parallèles découpent sur deux droites des segments de longueurs proportionnelles » et ses cas particuliers
- Identifier le théorème d'énoncé «La bissectrice intérieure (ou extérieure) d'un angle d'un triangle partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle» et ses cas particuliers.
- Déterminer la puissance d'un point par rapport à un cercle (sécantes et tangentes)
- Déterminer les mesures des angles formés par l'intersection des cordes et de tangentes d'un cercle.
- Résoudre des exercices portant sur la détermination de la longueur d'une bissectrice intérieure ou extérieure.

Expressions de base

- Rapport
- Proportion
- Parallèle
- Milieu
- Médiane
- Sécante
- Bissectrice
- Bissectrice intérieure
- Bissectrice extérieure
- Perpendiculaire à



Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1): Droites parallèles et parties proportionnelles.

Leçon (3 - 2): Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles.

Matériel utilisé

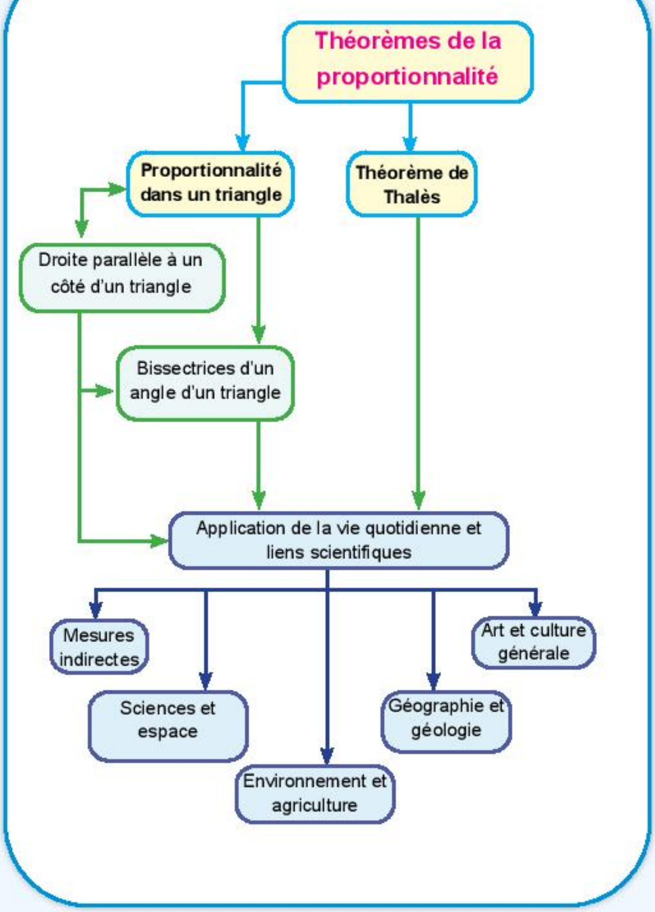
Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer – Une calculatrice – Logiciels – Vidéo Projecteur – Papiers quadrillés – Fil – Paire de ciseau

Historique

La mathématique est une activité intellectuelle plaisante qui ouvre et éveille l'esprit. Elle contribue à résoudre des problèmes quotidiens et des défis scientifiques en les représentant et en les modélisant à l'aide du langage mathématique et ses symboles pour les résoudre avant de les remettre dans leurs contextes matériels.

Les Anciens Égyptiens se sont rendu compte de cela et ils ont construit les temples et les pyramides selon des lignes droites, les unes parallèles et les autres qui les coupent. Ils ont labouré les terres agricoles en lignes droites parallèles. Les Grecs ont emprunté la géométrie des Anciens Égyptiens et Euclide (300 av. J.-C) a construit un système géométrique complet. C'est la géométrie euclidienne. Cette géométrie est basée sur cinq axiomes dont le plus important est : l'axiome du parallélisme « Par un point extérieur à une droite donnée, ne passe qu'une unique droite qui lui est parallèle ». La géométrie euclidienne traite des formes planes (triangles, polygones, cercles) et des solides. Elle a aussi des applications dans différents domaines : construction de routes, de ponts, urbanisme, élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et les lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan (L'échelle).

Organigramme de l'unité



3 - 1 Droites parallèles et parties proportionnelles

A apprendre

- Propriétés d'une droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle.
- Utilisation de la proportionnalité pour calculer des longueurs de segments déterminés par des droites parallèles et des sécantes.
- Modélisation et résolution de problèmes de la vie quotidienne incluant des droites parallèles et leurs sécantes.

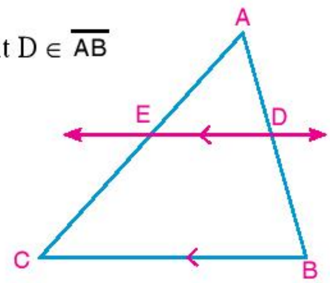
Expressions de base

- Parallèle
- Milieu
- Médiane
- Sécante

Matériel et moyens

- Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer
- Ordinateur
- Logiciels
- Vidéo projecteur

Réfléchis et discute



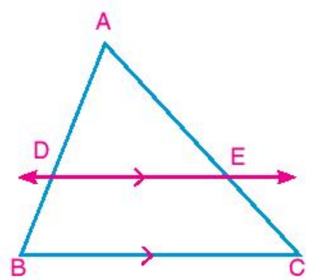
1- Trace un triangle ABC, Détermine un point $D \in \overline{AB}$ puis trace $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E.

2- Mesure les longueurs de : $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ et $\overline{EC}$

3- Calcule les rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$, puis compare-les. Que remarques-tu ?

Si on change la position de $\overleftrightarrow{DE}$ en gardant le parallélisme avec $\overline{BC}$, la relation entre $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$ va-t-elle changer ? Que peux-tu conclure ?

Théorème 1 **Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles. (La démonstration n'est pas sujet à léxamen)**



Hypothèses : ABC est un triangle et $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

Conclusion : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Démonstration : $\because \overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (Axiome)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (1)

$\because D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$

$\therefore AB = AD + DB$ et $AC = AE + EC$ (2)

De (1) et (2) on obtient :

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

D'où : $\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ propriété de la proportionnalité (Ce qu'il fallait démontrer)

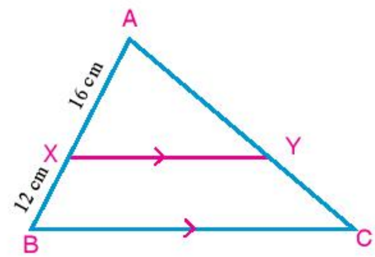
Remarque que :

$\because \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ $\qquad\qquad$ $\therefore \dfrac{AD + DB}{DB} = \dfrac{AE + EC}{EC}$

$$\boxed{\textbf{Donc } \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}}$$

Exemple

1 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, AX = 16cm, BX = 12cm.



A Si AY = 24cm, trouve YC.

B Si CY = 21cm, trouve AC.

Solution

A $\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\qquad \therefore \dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$

et $\dfrac{16}{12} = \dfrac{24}{YC}$ $\qquad \therefore YC = \dfrac{12 \times 24}{16} = 18\text{cm}.$

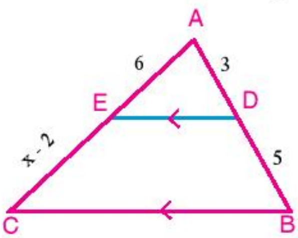
B $\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\qquad \therefore \dfrac{AB}{BX} = \dfrac{AC}{CY}$

et $\dfrac{16 + 12}{12} = \dfrac{AC}{21}$ $\qquad \therefore AC = \dfrac{28 \times 21}{12} = 49\text{cm}.$

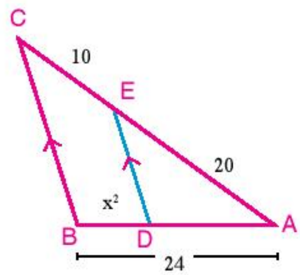
Essaie de résoudre

1 Dans chacune des figures suivantes, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Trouve la valeur numérique de x (les longueurs sont mesurées en centimètres)

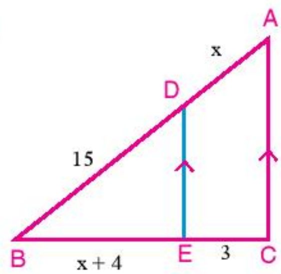
A



B



C

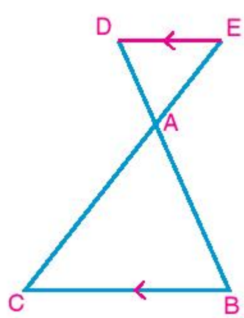


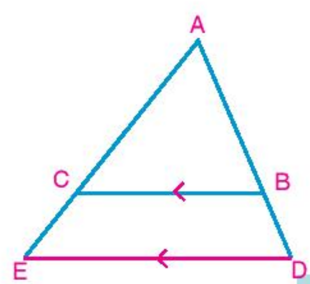
Corollaire

Si une droite extérieure au triangle ABC, parallèle au côté $\overline{BC}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ en D et E respectivement (voir la figure), alors : $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{CE}$.

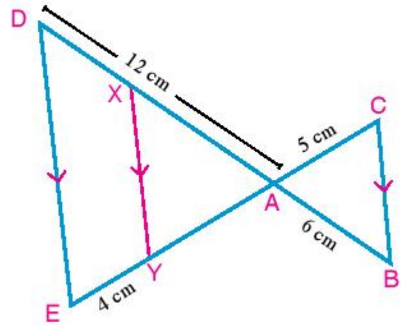
D'après les propriétés des proportions :

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{CE}$





Exemple



2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{A\}$, $X \in \overline{AD}$ et $Y \in \overline{AE}$ où $\overline{XY} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{DE}$.

Si AB = 6cm, AC = 5cm, AD = 12cm, EY = 4cm.

trouve la longueur de $\overline{AE}$ et $\overline{DX}$.

Solution

$\because \overline{ED} \parallel \overline{BC}$, $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{A\}$

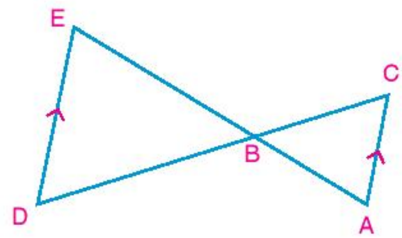
$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ d'où $\frac{12}{6} = \frac{AE}{5}$ $\therefore AE = 10cm$

Dans le triangle AED:

$\because \overline{XY} \parallel \overline{ED}$ $\therefore \frac{AE}{EY} = \frac{AD}{DX}$

d'où $\frac{10}{4} = \frac{12}{DX}$ $\therefore DX = 4{,}8cm$

Essaie de résoudre



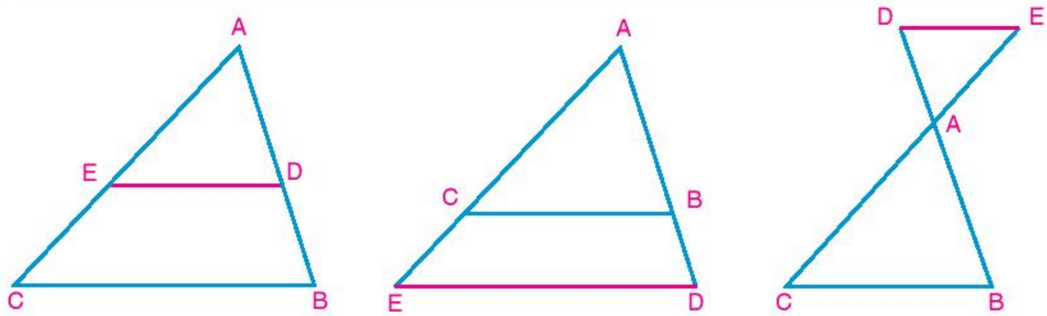
2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, $\overline{AE} \cap \overline{CD} = \{B\}$

A Si AB = 8cm, BC = 9cm, BE = 12cm., trouve la longueur de $\overline{BD}$.

B Si AB = 6cm, BE = 9cm, CD = 18cm., trouve la longueur de $\overline{BC}$.

Réciproque du théorème 1

Si une droite coupant deux côtés d'un triangle les partage en segments de longueurs proportionnelles, alors cette droite est parallèle au troisième côté du triangle.



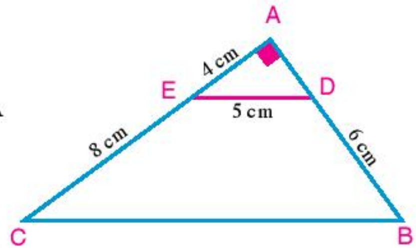
Dans les trois figures précédentes, ABC est un triangle. $\overleftrightarrow{DE}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ en D et $\overleftrightarrow{AC}$ en E,

Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ alors $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

Réflexion logique :

Est-ce que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$? Pourquoi ? - Est-ce que $\angle ADE \equiv \angle B$? Explique ta réponse.

Exemple



3 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle en A

A Démontre que : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

B Trouve la longueur de $\overline{BC}$.

Solution

A $\because$ le triangle ADE est rectangle en A

$\therefore AD = \sqrt{25 - 16} = 3\text{cm}$ (Théorème de Pythagore)

$\because \frac{AD}{DB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ d'où $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

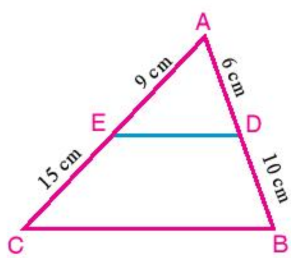
B $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (Pourquoi ?) $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$

d'où $\frac{5}{BC} = \frac{1}{3}$ $\therefore BC = 15\text{cm}$

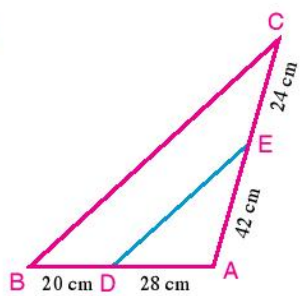
Essaie de résoudre

3 Dans chacune des figures suivantes, détermine si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ou non ?

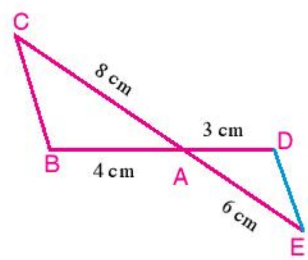
A



B



C

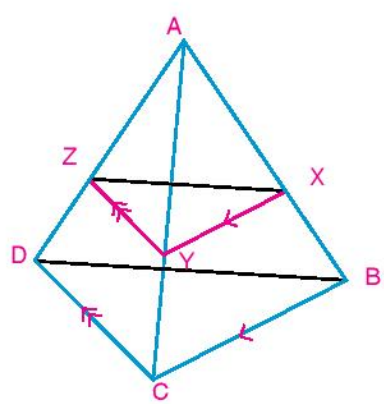


Exemple

4 ABCD est un quadrilatère $X \in \overline{AB}$ et $Y \in \overline{AC}$ tels que $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$,

On trace $\overrightarrow{YZ} \parallel \overline{CD}$ qui coupe $\overline{AD}$ en Z. Démontre que $\overline{XZ} \parallel \overline{BD}$.

Solution



Dans le triangle ABC :

$\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\therefore \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ (1)

Dans le triangle ADC :

$\because \overline{YZ} \parallel \overline{CD}$ $\therefore \frac{AZ}{ZD} = \frac{AY}{YC}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZD}$

Dans le triangle ABD :

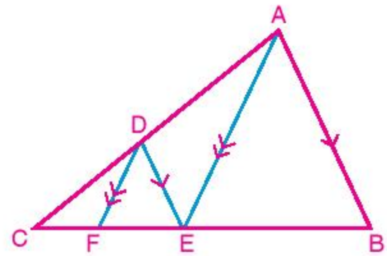
$\because \frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZD}$ $\therefore \overline{XZ} \parallel \overline{BD}$

Essaie de résoudre

4 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle , $D \in \overline{AC}$,

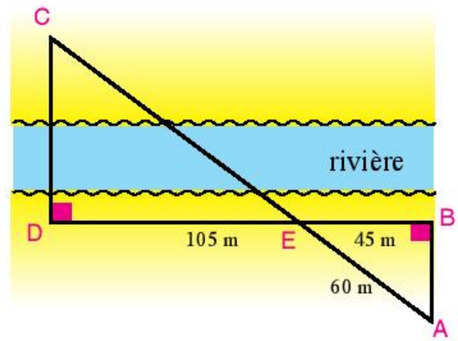
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ et $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$

Dessine un diagramme qui illustre comment démontrer que $(CE)^2 = CF \times CB$.



Exemple

5 **GPS:** Pour déterminer le lieu C,
les géomètres ont mesuré et préparé le schéma ci-contre.
Calcule la distance entre les deux lieux C et A



Solution

$\overline{AB} \perp \overline{BD}$, $\overline{CD} \perp \overline{BD}$ $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

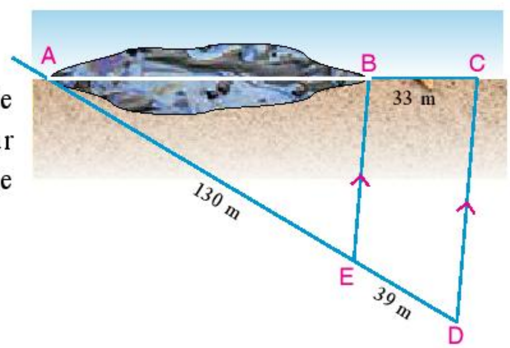
$\because \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\therefore \frac{EA}{AC} = \frac{EB}{BD}$ Donc $\frac{60}{AC} = \frac{45}{45 + 105}$

$\therefore AC = \frac{60 \times 150}{45} = 200$ mètres.

Essaie de résoudre

5 **Lutter contre la pollution :** Une équipe de lutte contre la pollution a localisé une nappe de pétrole sur une plage comme l'indique la figure ci-contre. Calcule la longueur de la nappe.



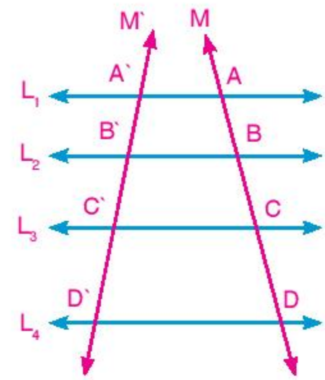
Réfléchis et discute

Tu as peut être remarqué la possibilité d'utiliser le parallélisme d'une droite à l'un des côtés d'un triangle dans des applications de la vie quotidienne. La figure ci-contre montre le portail d'une pépinière formée par des morceaux de bois parallèles et d'autres qui lui sont sécantes.
Y a-t-il une relation entre les longueurs des parties déterminées sur les sécantes de ces morceaux parallèles ?

Modélisation

Pour chercher l'existence d'une relation, modélise le problème (pose un modèle mathématique du problème) comme suit :

1- Trace les droites L_1 , L_2 , L_3 , L_4, M, M` telles que $L_1$ // $L_2$ // $L_3$ // $L_4$ puis trace les deux droites M et M` qui coupent les droites parallèles en A, B, C, D, A`, B`, C`, D` respectivement comme l'indique la figure ci-contre.



2- Mesure les longueurs des segments, puis compare les rapports suivants :

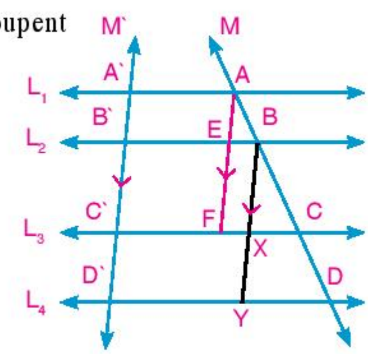
$\frac{AB}{A`B`}$, $\frac{BC}{B`C`}$, $\frac{CD}{C`D`}$, $\frac{AC}{A`C`}$, ...

Que peux-tu déduire ?

Théorème de Thalès

Théorème 2 **Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles. (La démonstration n'est pas sujet à léxamen)**

Hypothèses : L_1 // L_2 // L_3 // L_4 et M et M` sont deux droites qui les coupent



Conclusion : AB : BC : CD = A`B` : B`C` : C`D`

Démonstration : Trace $\overrightarrow{AF}$ // M` qui coupe L_2 en E et L_3 en F

Trace $\overrightarrow{BY}$ // M` qui coupe L_3 en X et L_4 en Y

$\because \overline{AA`}$ // $\overline{EB`}$, $\overline{AE}$ // $\overline{A`B`}$

$\therefore$ AEB`A` est un parallélogramme d'où AE = A`B`

De même : EF = B`C` , BX = B` C` , XY = C`D`

Dans le triangle ACF:

$\because \overline{BE}$ // $\overline{CF}$ $\qquad \therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF}$

Donc : $\frac{AB}{BC} = \frac{A`B`}{B`C`}$, $\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`}$ (permutation des moyens) (1)

De même, dans le triangle BDY:

$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{B`C`}{C`D`}$, $\frac{BC}{B`C`} = \frac{CD}{C`D`}$ (permutation des moyens) (2)

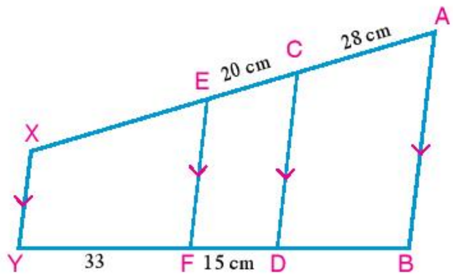
De (1) et (2), on obtient :

$\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`} = \frac{CD}{C`D`}$

$\therefore$ AB : BC : CD = A`B` : B`C` : C`D` Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple

6 **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \,//\, \overline{EF} \,//\, \overline{XY}$,
$AC = 28cm$, $CE = 20cm$, $DF = 15cm$, $FY = 33cm$.
Trouve la longueur de : $\overline{BD}$ et $\overline{EX}$



Solution

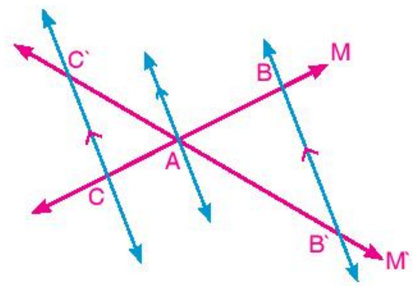
$\because \overline{AB} \,//\, \overline{CD} \,//\, \overline{EF} \,//\, \overline{XY}$

$\therefore \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CE}{DF} = \dfrac{EX}{FY}$

$\dfrac{28}{BD} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{EX}{33}$

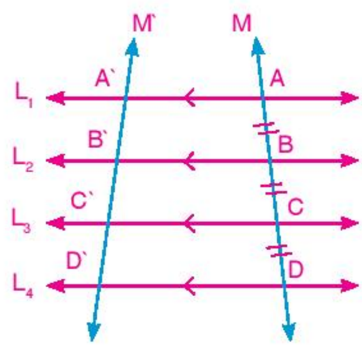
$\therefore BD = 21cm$, $EX = 44cm$.

Cas particuliers



1- Si les droites M et M` se coupent en A
et si $\overleftrightarrow{BB'} \,//\, \overleftrightarrow{CC'}$, alors $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC'}$
Et réciproquement si : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC'}$
alors : $\overleftrightarrow{BB'} \,//\, \overleftrightarrow{CC'}$

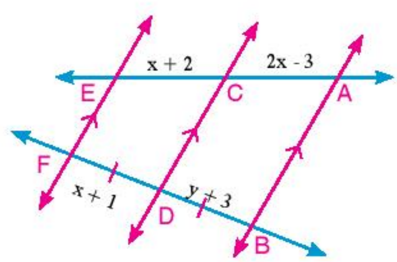
Cas particulier du théorème de Thalès



2- Si des droites parallèles partagent une droite en segments de même longueur, alors elles partagent toute autre droite en segments de même longueur.
Dans la figure ci-contre, $L_1 \,//\, L_2 \,//\, L_3 \,//\, L_4$ et les droites M et M` les coupent. Si $AB = BC = CD$, alors $A'B' = B'C' = C'D'$

Exemple

7 **Dans la figure ci-contre , trouve la valeur numérique de x et y.**



Solution

$\because \overline{AB} \,//\, \overline{CD} \,//\, \overline{EF}$, $BD = DF$

$\therefore AC = CE$

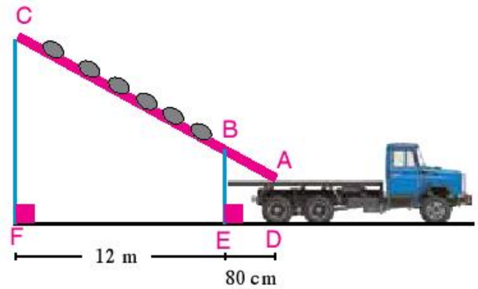
Donc: $2x - 3 = x + 2 \quad \therefore x = 5$

$\because BD = DF$, $x = 5 \qquad \therefore y + 3 = 5 + 1 \qquad \therefore y = 3$

Exemple

8 **Lien avec l'industrie :** On déplace les emballages d'engrais de la production d'une usine en les faisant glisser à travers un tube oblique pour que les camions les transportent aux centres de distribution comme l'indique la figure ci-contre.

Si D, E et F sont respectivement les projections de A, B et C sur le sol, et si AB = 1,2m, D E = 80cm et EF = 12m, Trouver la longueur du tube à un mètre près.



Solution

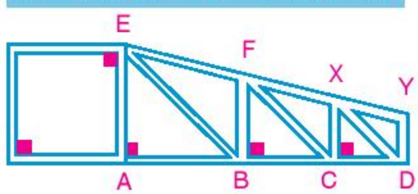
$\because$ D, E et F sont les projections de A, B et C sur l'horizontale, $\therefore \overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$

$\because \overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DF}$ sont sécantes, $\therefore \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DF}{DE} : \dfrac{AC}{1,2} = \dfrac{12 + 0,8}{0,8}$

Donc $\therefore AC = \dfrac{1,2 \times 12,8}{0,8} = 19,2$ m $\therefore AC \simeq 19$ m

Essaie de résoudre

6 **A** **Lien avec les constructions :**

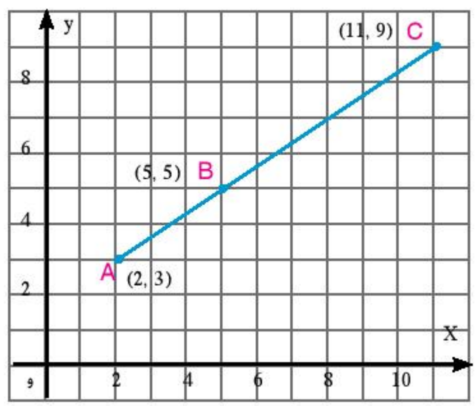


Si AB = 180cm, EF = 2m

AB : BC : CD = 5 : 4 : 3

Trouve la longueur de $\overline{EY}$, et $\overline{CD}$

B **Réflexion critique**

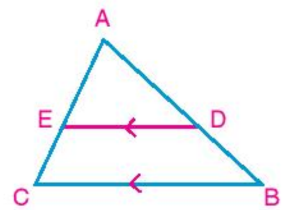


Dans la figure, calcule $\dfrac{AB}{BC}$ de différentes manières.

As-tu obtenu le même résultat ?

Exercices 3-1

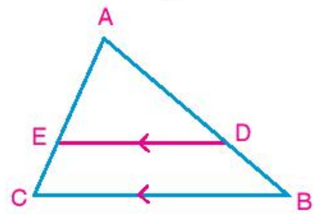
1 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Complète :



A Si $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{3}$, alors : $\frac{AB}{BD} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ et $\frac{CE}{ED} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

B Si $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{7}$, alors : $\frac{CE}{EA} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ et $\frac{BD}{AB} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Détermine les expressions correctes dans ce qui suit :



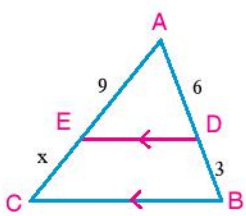
A $\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{EC}$ **B** $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}$

C $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AE}$ **D** $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$

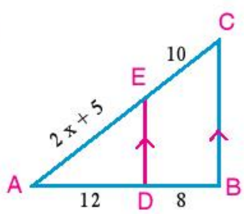
E $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ **F** $\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$

3 **Dans chacune des figures suivantes,** $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Trouve la valeur numérique de x dans chaque cas (les longueurs sont en centimètres).

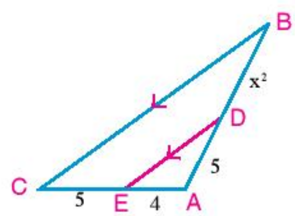
A



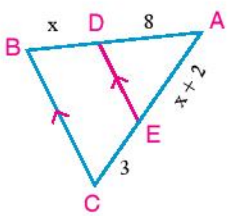
B



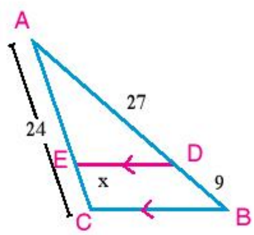
C



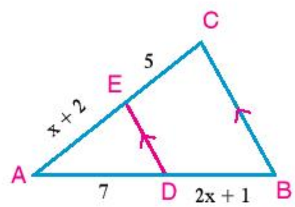
D



E



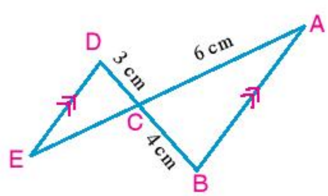
F



4 **Dans la figure ci-contre, :** $\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$ et $\overline{AE} \cap \overline{BD} = \{C\}$

AC = 6cm, BC = 4cm et CD = 3cm.

Trouve la longueur de $\overline{CE}$

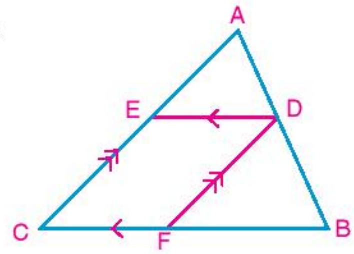


5 $\overline{XY} \cap \overline{ZL} = \{M\}$ et $\overline{XZ} \,//\, \overline{LY}$. Si XM = 9cm, Y M = 15cm et ZL = 36 cm, trouve la longueur de $\overline{ZM}$.

6 Utilise la figure ci-contre pour trouver la valeur de x dans chacun des cas suivants :

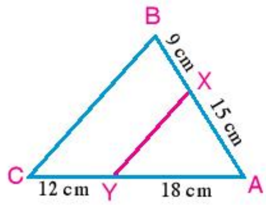
A AD = 4 , BD = 8 , CE = 6 et AE = x.

B AE = x , EC = 5 , AD = x - 2 et BD = 3.

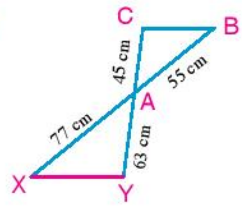


7 Dans chacune des figures suivantes, a-t-on $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$?

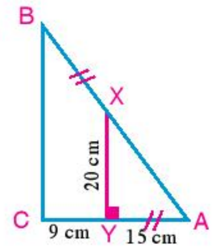
A



B



C



8 Soit XYZ un triangle tel que XY= 14cm, XZ = 21cm et L ∈ $\overline{XY}$ tel que XL = 5,6cm et M ∈ $\overline{XZ}$ tel que XM = 8,4cm. Démontre que $\overline{LM}$ // $\overline{YZ}$

9 Soit ABC un triangle, D ∈ $\overline{AB}$ et E ∈ $\overline{AC}$ tels que 5AE = 4 EC.
Si AD = 10 cm et DB = 8cm. a-t-on $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$? Explique ta réponse.

10 Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en E. Si AE = 6cm, BE = 13cm, EC = 10cm et ED = 7,8 cm. démontre que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

3 - 2 Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles

A apprendre

- Propriétés des bissectrices des angles d'un triangle.
- Utilisation de la proportionnalité pour calculer les longueurs des segments issus de la bissection des angles.
- Modélisation et résolution de problèmes de la vie quotidienne incluant des bissectrices d'angle d'un triangle.

Expressions de base

- Bissectrice
- Bissectrice intérieure
- Bissectrice extérieure
- Perpendiculaire

Matériel et moyens

- Instruments géométriques pour tracer
- Ordinateur et logiciels
- Vidéo projecteur

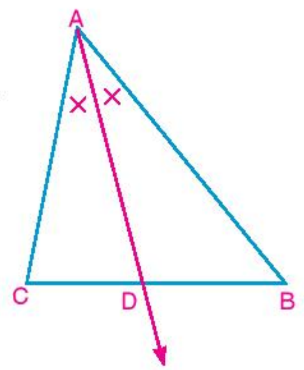
Travail collectif

1- Trace un triangle ABC, puis trace $\overrightarrow{AD}$ la bissectrice de l'angle A qui coupe $\overline{BC}$ en D.

2- Mesure $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

3- Calcule les rapports $\frac{BD}{DC}$ et $\frac{BA}{AC}$, puis compare-les. Que remarques-tu ?

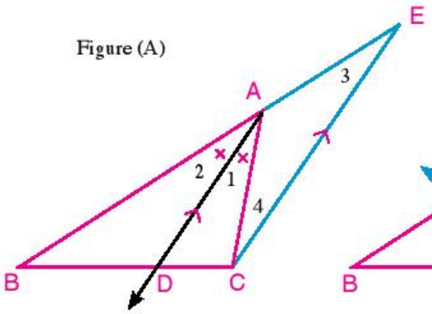
4- Répète les étapes précédentes plusieurs fois. Qu'est ce que tu en déduis ? Exprime le résultat à ta manière.

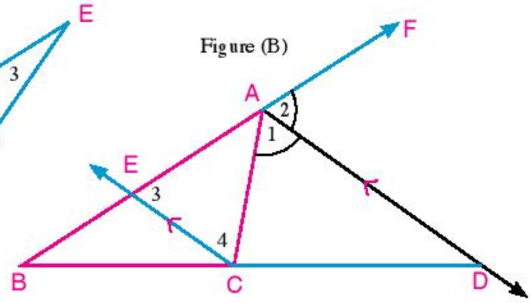


Bissectrice d'un angle

Théorème 3

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle (ou la bissectrice de l'angle extérieure au triangle en ce sommet) partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle. (le démonstration n'est pas sujet a l'exam)





Hypothèses : ABC est un triangle et $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle BAC$ (fig (A) $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de l'angle, extérieure au sommet A fig (B))

Conclusion : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Démonstration : On trace $\overrightarrow{CE}$ // $\overleftrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BA}$ en E. Suis le schéma suivant et rédige la démonstration.

$\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle A \longrightarrow \angle 1 \equiv \angle 2$

$\overline{CE} \,//\, \overrightarrow{AD} \longrightarrow \angle 1 \equiv \angle 4$ (alterne- internes)

$\overline{CE} \,//\, \overrightarrow{AD} \longrightarrow \angle 3 \equiv \angle 2$ (correspondants)

$\longrightarrow \angle 3 \equiv \angle 4 \longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC}$

$\overline{CE} \,//\, \overrightarrow{AD} \longrightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AE}$

$\longrightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

Exemple

1 ABC est un triangle tel que AB = 8cm , AC = 6cm et BC = 7cm , On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle BAC$ qui coupe $\overline{BC}$ en D. Trouve la longueur de $\overline{DB}$ et $\overline{DC}$

Solution

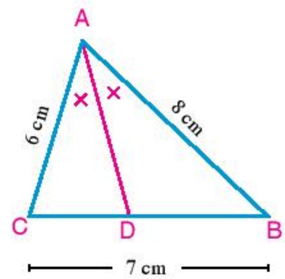
$\because \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$ BAC $\quad \therefore \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (théorème)

$\because$ AB = 8cm, A C = 6cm $\quad \therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

$\because$ BC = BD + DC = 7cm $\quad \therefore \dfrac{DB}{7 - BD} = \dfrac{4}{3}$

3BD = 28 - 4 BD (double produit)

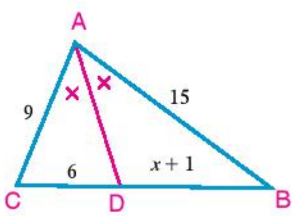
7BD = 28 $\quad \therefore$ BD = 4cm , CD = 3cm



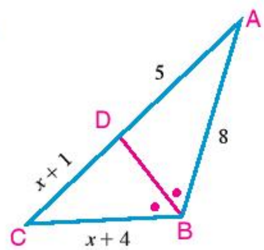
Essaie de résoudre

1 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x (Les longueurs sont mesurées en centimètres)

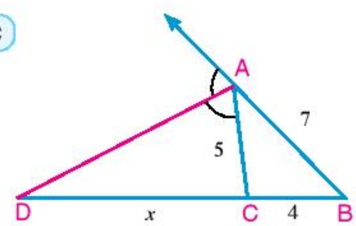
A



B



C



Exemple

2 Soit ABC un triangle. $\overrightarrow{DB}$ est une bissectrice de $\angle$B qui coupe $\overline{AC}$ en D, où AD = 14cm, AC = 6 cm et DC = 18cm. Si le périmètre du triangle ABC = 80cm, trouve la longueur de : $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

Solution

Dans le triangle ABC

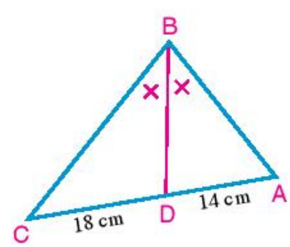
$\because \overrightarrow{BD}$ est une bissectrice de $\angle$B

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{14}{18} = \dfrac{7}{9}$

$\because$ le périmètre du triangle ABC = 80cm, AC = 14 + 18 = 32cm

$\therefore$ AB + BC = 80 - 32 = 48cm



$\because \frac{AB}{BC} = \frac{7}{9}$ $\therefore \frac{AB + BC}{BC} = \frac{7 + 9}{9}$ (propriété de la proportionnalité)

Donc $\frac{48}{BC} = \frac{16}{9}$ $\therefore BC = 27cm$, $AB = 21cm$

Essaie de résoudre

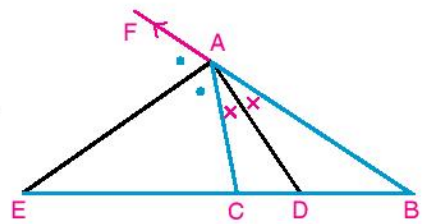
2 Soit ABC un triangle rectangle en B. On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle A$, qui coupe $\overline{BC}$ en D. Si la longueur de $\overline{BD} = 24cm$, $BA : AC = 3 : 5$, trouve le périmètre du triangle ABC.

Remarques importantes

1- Dans un triangle ABC où $AB \neq AC$.

si $\overrightarrow{AD}$ est la bissectrice de $\angle BAC$,

et si $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de l'angle extérieur au triangle en A.



alors : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

d'où $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{EC}$

Donc $\overline{BC}$ est partagé intérieurement en D et extérieurement en E dans un même rapport et les deux bissectrices dans ce cas sont perpendiculaires. (Pourquoi ?)

2- Si $AB > AC$ la bissectrice intérieure de l'angle A coupe $\overline{BC}$ en D où $BD > DC$. tandis que la bissectrice de l'angle extérieure au triangle en A coupe $\overrightarrow{BC}$ en E où $BE > EC$.

Réflexion critique

➢ Si AC augmente, que se passe-t-il pour le point D ?

➢ Si $AC = AB$, où se trouve le point D ? Quelle est la position de $\overrightarrow{AE}$ par rapport à $\overline{BC}$ dans ce cas ?

➢ Si $AC > AB$, quelle est la relation entre DC et DB ? Où se trouve le point E dans ce cas ? Compare ta réponse avec les réponses de tes camarades

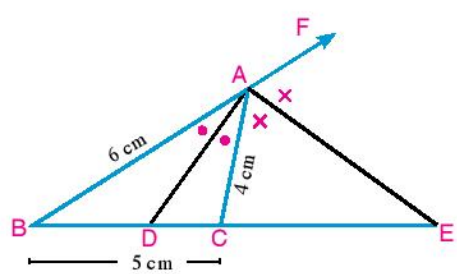
Exemple

3 Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm, AC = 4 cm et BC = 5cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice intérieure de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en D, Trace $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de l'angle extérieure au triangle A qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Calcule la longueur de $\overline{DE}$.

Solution

$\because \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle A$ et $\overrightarrow{AE}$ est une de l'angle bissectrice extérieure au triangle en $\angle A$.

$\therefore$ D et E partagent $\overline{BC}$ intérieurement et extérieurement dans un même rapport.



Donc : $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\because BC = BD + DC = 5$, $BE - EC = BC = 5$

D'après les propriétés de la proportionnalité, on obtient

$\frac{BD + DC}{DC} = \frac{3+2}{2}$ $\qquad \frac{5}{DC} = \frac{5}{2}$ $\quad \therefore DC = 2$

$\frac{BE - EC}{EC} = \frac{3-2}{2}$ $\qquad \frac{5}{EC} = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore EC = 10$

Donc on obtient $DE = DC + CE$ $\qquad DE = 2 + 10 = 12cm$

Calcul de la longueur de la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle

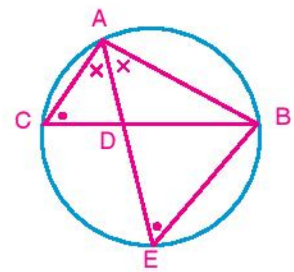
Problème type

Si $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle A$ dans un triangle ABC qui coupe $\overline{BC}$ en D alors : $AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

Hypothèses : ABC est un triangle et $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle$ BAC et $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$

Conclusion : $(AD)^2 = AB \times AC - BD \times DC$

Démonstration : On trace un cercle passant par les sommets du triangle ABC qui coupe $\overrightarrow{AD}$ en E, puis on trace $\overline{BE}$



On a $\triangle ACD \sim \triangle AEB$ (pourquoi)? d'où $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$

$\therefore AD \times AE = AB \times AC$

$AD \times (AD + DE) = AB \times AC$

$(AD)^2 = AB \times AC - AD \times DE$

$(AD)^2 = AB \times AC - BD \times DC$

Donc $AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

Rappel

$AD \times DE = BD \times DC$

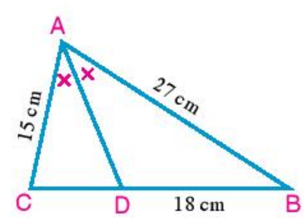
Exemple

4 Soit ABC un triangle tel que AB = 27cm et AC = 15cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en D. Si BD = 18cm, calcule la longueur de $\overline{AD}$.

Solution

$\because \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle BAC$ $\quad \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

D'où $\frac{18}{DC} = \frac{27}{15}$ $\qquad \therefore DC = 10cm$



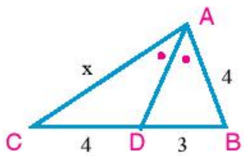
$\because AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

$\therefore AD = \sqrt{27 \times 15 - 18 \times 10} = \sqrt{225} = 15$ cm

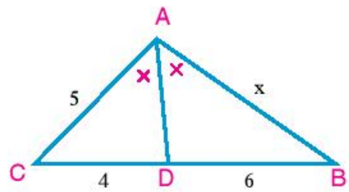
Essaie de résoudre

3 Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur de x et la longueur de $\overline{AD}$ (Les longueurs sont mesurées en centimètres) :

A



B



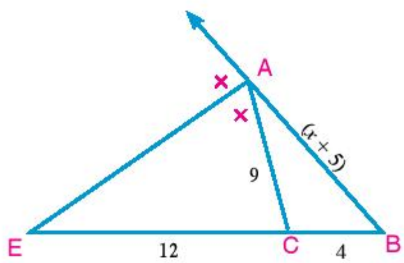
Remarque que : Dans la figure ci-contre, $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de l'angle extérieure de $\angle$ BAC qui coupe $\overleftrightarrow{BC}$ en E. Donc :

$AE = \sqrt{BE \times EC - AB \times AC}$

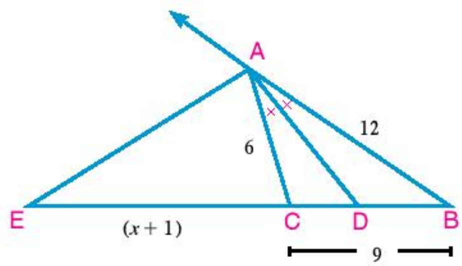
Essaie de résoudre

4 Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur de x et la longueur de $\overline{AE}$ (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

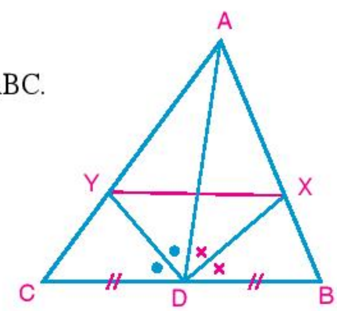
A



B



Exemple



5 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AD}$ est une médiane dans le triangle ABC.

$\overrightarrow{DX}$ est une bissectrice de $\angle$ADB. qui coupe $\overline{AB}$ en X.

$\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de $\angle$ADC qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

Démontre que : $\overline{XY} // \overline{BC}$.

Solution

Dans le triangle ADB: $\because$ $\overrightarrow{DX}$ est une bissectrice de $\angle$ADB $\quad \therefore \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AX}{XB}$ (1)

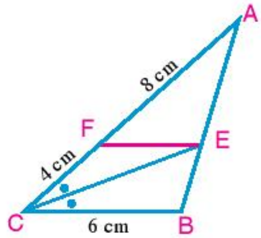
Dans le triangle ADC: $\because$ $\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de $\angle$ADC $\quad \therefore \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AY}{YC}$ (2)

Dans le triangle ABC: $\because$ $\overline{AD}$ est une médiane $\quad \therefore$ DB = DC (3)

De (1), (2) et (3), $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$ $\quad$ d'où $\overline{XY} // \overline{BC}$.

Essaie de résoudre

5 Dans chacune des figures suivantes, démontre que : $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

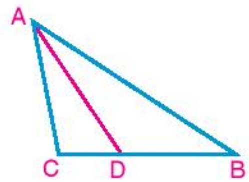


Cas particuliers

1- Dans le triangle ABC:

Si $D \in \overline{BC}$ où $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

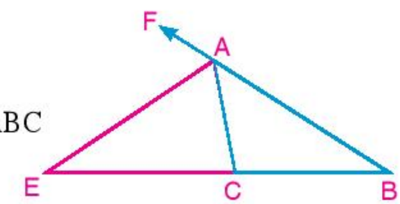
alors : $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$ BAC



Si $E \in \overrightarrow{BC}$ et $E \notin \overline{BC}$ où $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

alors: $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de $\angle$ A extérieure au triangle ABC

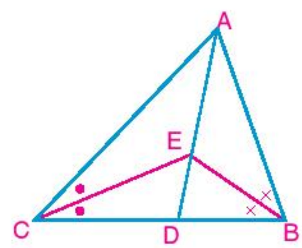
Ce cas est la réciproque du théorème précédent.



2- Dans la figure ci-contre,

$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont des bissectrices des angles B et C qui se coupent en E où $E \in \overrightarrow{AD}$. Que peux-tu conclure ?

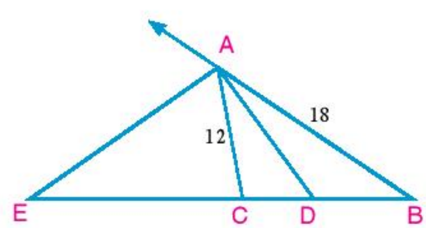
Corollaire : Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.



Exemple

6 Soit ABC un triangle tel que AB = 18cm, BC = 15cm et AC = 12cm, $D \in \overline{BC}$ où BD = 9cm, On trace $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Démontre que $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$BAC, puis calcule la longueur de $\overline{CE}$.

Solution



Dans le triangle ABC: $\frac{AB}{AC} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

CD = BC - BD = 15 - 9 = 6cm

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\because \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$BAC

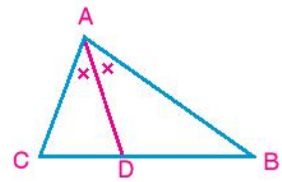
$\because \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E

$\therefore \overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de $\angle$A extérieur au triangle ABC d'où $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

$\because$ BE = BC + CE $\quad \therefore \frac{15 + CE}{CE} = \frac{18}{12}$, $\quad$ CE = 30cm

Exercices 3-2

1 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle A$. Complète :

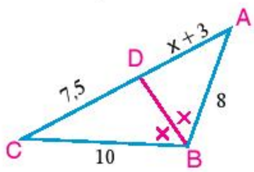


A $\frac{BD}{DC} =$ .... **B** $\frac{AC}{AB} =$ ....

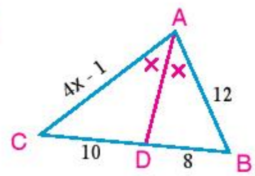
C $\frac{BD}{BA} =$ .... **D** $AB \times CD =$ ....

2 **Dans chacune des figures suivantes,** calcule la valeur numérique de x (les longueurs sont mesurées en centimètres)

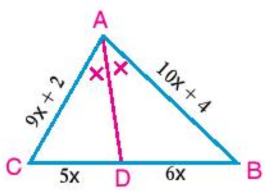
A



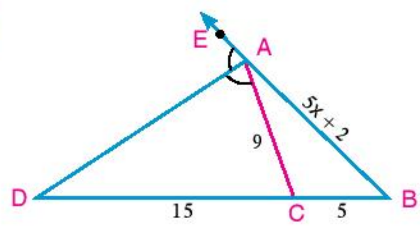
B



C



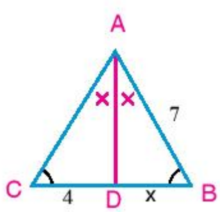
D



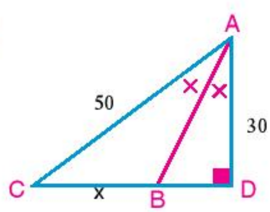
3 Soit ABC un triangle de périmètre 27cm. On trace $\overrightarrow{BD}$ bissectrice de $\angle$ B qui coupe $\overline{AC}$ en D. Si AD = 4cm et CD = 5cm, trouve la longueur de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AD}$

4 **Dans chacune des figures suivantes,** calcule la valeur numérique de x , puis calcule le périmètre du triangle ABC.

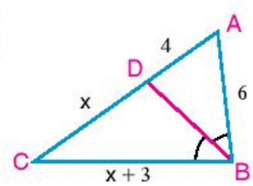
A



B



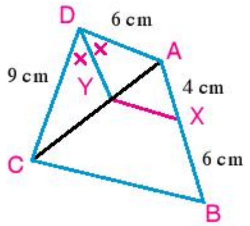
C



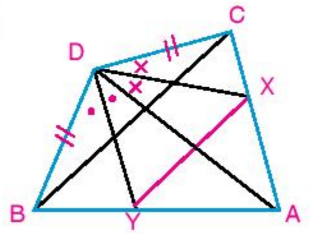
5 Soit ABC un triangle tel que AB = 8cm, AC = 4cm et BC = 6cm. On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle$A qui coupe $\overline{BC}$ en D. On trace $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de $\angle$A extérieur au triangle ABC qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Trouve la longueur de $\overline{DE}$, $\overline{AD}$ et $\overline{AE}$.

6 Dans chacune des figures suivantes, démontre que $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

A



B



....

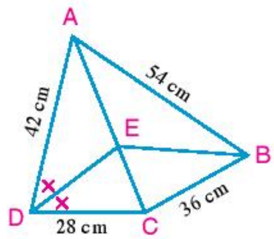
....

....

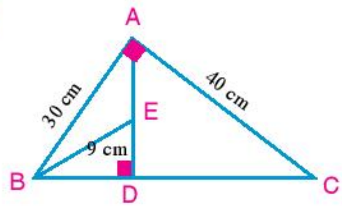
....

7 Dans chacune des figures suivantes, démontre que $\overrightarrow{BE}$ est une bissectrice de $\angle ABC$.

A



B

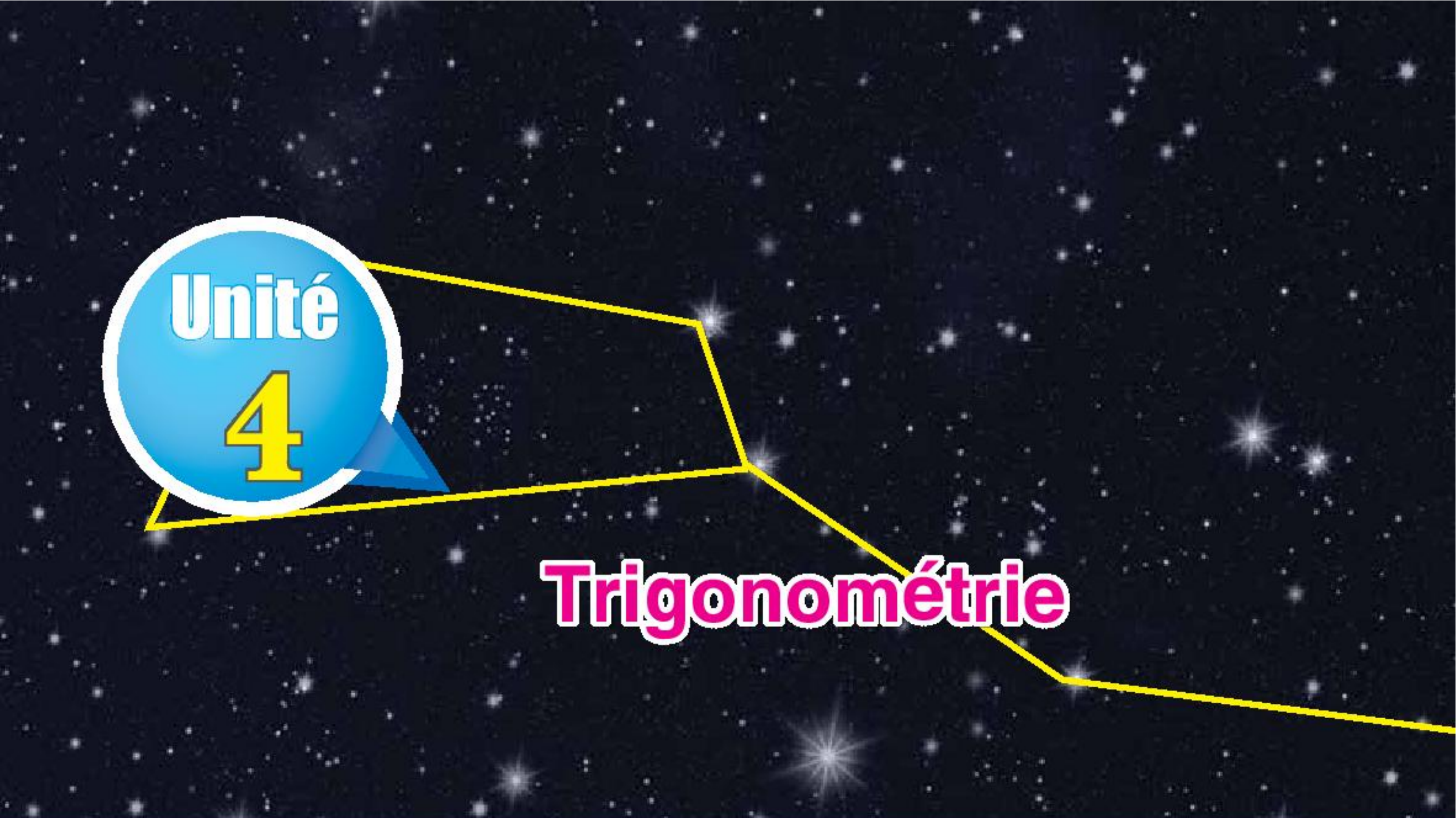


....

....

....

....



Unité 4

Trigonométrie

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Identifier un angle orienté.
- Identifier la position standard d'un angle orienté.
- Reconnaitre la mesure positive et la mesure négative d'un angle orienté.
- Distinguer la nature de la mesure de l'angle (en degrés et en radians).
- Identifier la mesure en radians de l'angle au centre dans un cercle.
- Utiliser une calculatrice pour convertir une mesure en radian en une mesure en degrés et vis versa.
- Identifier les fonctions trigonométriques.
- Déterminer le signe de différentes fonctions trigonométriques dans les quatre quadrants.
- Déduire que les ensembles d'angles équivalents ont les mêmes fonctions trigonométriques.
- Reconnaitre les rapports trigonométriques d'un angle aigu et d'un angle quelconque.
- Déduire les rapports trigonométriques de certains angles particuliers.
- Reconnaitre les relations particulières $(\theta \pm 180°)$, $(\theta \pm 360°)$, $(90° \pm \theta)$ et $(270° \pm \theta)$
- Trouver l'ensemble solution des équations trigonométriques de la forme :
  - $\sin ax = \cos bx$
  - $\text{tg } ax = \text{cotg } bx$
  - $\sec ax = \text{cosec } bx$
- Trouver la mesure d'un angle en connaissant une valeur de l'un de ses rapports trigonométriques.
- Identifier la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus et déduire leurs propriétés.
- Utiliser une calculatrice scientifique pour calculer les rapports trigonométriques de certains angles particuliers.
- Modéliser certains phénomènes physiques et de la vie quotidienne qui sont représentés par des fonctions trigonométriques.
- Utiliser la technologie de l'information pour reconnaitre les différentes applications des concepts de base de la trigonométrie.

Expressions de base

- Mesure en degrés
- Mesure en radians
- Angle orienté
- Radian
- Position standard
- Mesure positive
- Mesure négative
- Angles équivalents
- Angle quadrant
- Fonction trigonométrique
- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cosécante
- Sécante
- Cotangente
- Fonction circulaire
- Angles associés

Leçons de l’unité

Leçon (4 – 1) : L’angle orienté

Leçon (4 – 2) : Mesure en radians et mesure en degrés

Leçon (4 – 3) : Fonctions trigonométriques

Leçon (4 – 4) : Angles associés

Leçon (4 – 5) : Représentation graphique des fonctions trigonométriques

Leçon (4 – 6) : Trouver la mesure d’un angle à partir d’une fonction trigonométrique

Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – Papiers graphiques – Ordinateur – Logiciels.

Historique

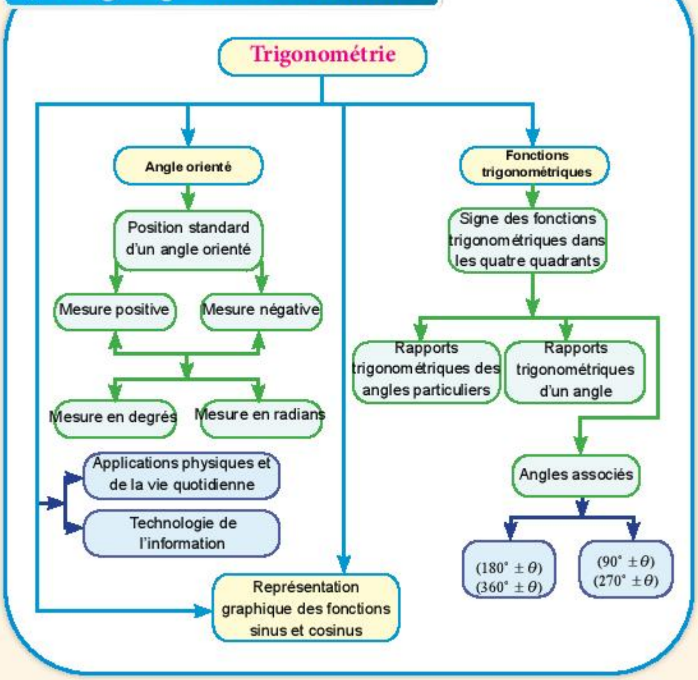
La trigonométrie est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles. Cette science a prospéré, parmi les mathématiques anciennes, particulièrement dans l’astronomie à laquelle l’homme s’est intéressé pour contempler et observer le mouvement du soleil, de la lune, des étoiles et des planètes dans l’univers.

Le mathématicien arabe Nosseir El-dine El-Toussi est considéré comme le premier qui a différencié la trigonométrie de l’astronomie.

Les Arabes se sont beaucoup intéressés à la trigonométrie. On dit que l’expression « tangente » est décrite par le savant arabe Abu'l-Wafa Al Buzjani (940-998) au dixième siècle. Cette expression (en langue arabe) est issue de l’ombre des corps qui se constituent par les rayons de la lumière émise par le soleil.

Les Arabes ont également de nombreux ajouts en trigonométrie plane et trigonométrie sphérique (relative à la surface d’une sphère) et c’est des Arabes que les Occidentaux ont adopté des idées importantes auxquelles ils ont beaucoup contribué. La trigonométrie est devenue un domaine des recherches en mathématique, et dont l’application scientifique et pratique, très diversifiée, a participé au progrès et à la prospérité de l’humanité.

Organigramme de l’unité



4 - 1 L'angle orienté

A apprendre

- Notion de l'angle orienté.
- Position standard d'un angle orienté.
- Mesure positive et mesure négative d'un angle orienté.
- Position d'un angle orienté dans un repère orthogonal.
- Notion des angles équivalents.

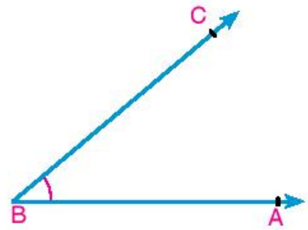
Expressions de base

- Mesure en degrés
- Angle orienté
- Position standard
- Mesure positive
- Mesure négative
- Angle équivalent
- Angle quadrant

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

Réfléchis et discute



Tu as déjà étudié qu'un angle est la réunion de deux demi-droites ayant une même origine.
Dans la figure ci-contre, le point B est appelé « **le sommet de l'angle** » et les deux demi-droites $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont les côtés de l'angle.
Par conséquent, $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = (\angle ABC)$
Qui s'écrit également $\widehat{ABC}$.

Mesure d'un angle en degrés

Tu sais que la mesure en degrés d'un angle est basée sur le partage d'un cercle en 360 arcs de même longueur. Il en résulte :

1- l'angle au centre dont les deux côtés passent par les deux extrémités de l'un de ces arcs a pour mesure un degré qu'on note (1°)

2- Chaque degré est subdivisé en 60 parties égales dont chacune est appelée « une minute qu'on note $(1')$.

3- Chaque minute est subdivisée en 60 parties dont chacune est appelée « une seconde » qu'on note $(1'')$.

Donc $1^\circ = 60'$ et $1' = 60''$

A apprendre

Angle orienté

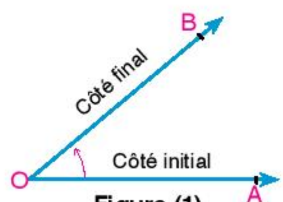


Figure (1)

Si on observe l'ordre de présentation des deux demi-droites formant un angle, on peut les écrire sous la forme du couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
Le premier élément du couple $\overrightarrow{OA}$ est le côté initial de l'angle et son second élément $\overrightarrow{OB}$ est le côté final de l'angle ayant pour sommet O comme le montre la figure (1) .

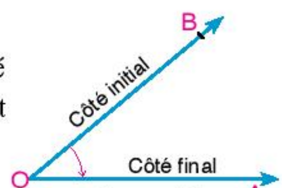


Figure (2)

Si le côté initial de l'angle est $\overrightarrow{OB}$ et le côté final de l'angle est $\overrightarrow{OA}$, le couple s'écrit $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ comme le montre la figure (2).

Définition

L'angle orienté est un couple de demi-droites de même origine. L'origine est le sommet de l'angle et les deux demi-droites sont les côtés de l'angle.

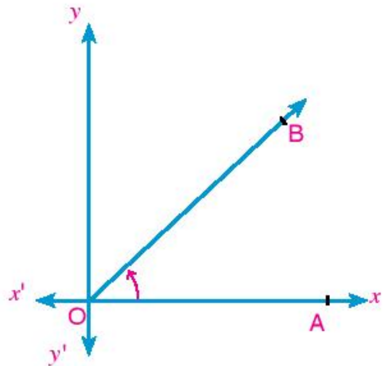
Réflexion critique:

➢ A-t-on $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$? Justifie ta réponse.

Position standard d'un angle orienté

On dit qu'un angle est en position standard si son sommet est le point d'origine dans un repère orthogonal et son côté initial est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.

Dans la figure ci-contre, l'angle $\angle AOB$ est-il un angle orienté ? Explique ta réponse.



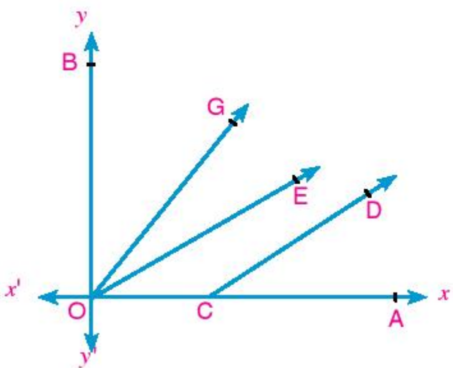
Expression orale

Dans la figure ci-contre, Lesquels des couples suivants représentent des angles orientés en position standard ? Explique ta réponse..

(A) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ (B) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$

(C) $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA})$ (D) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$

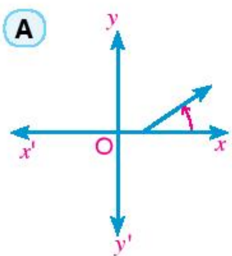
(E) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG})$ (F) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$



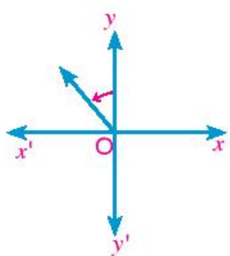
Essaie de résoudre

(1) Lesquels des couples suivants est en position standard ? Explique ta réponse..

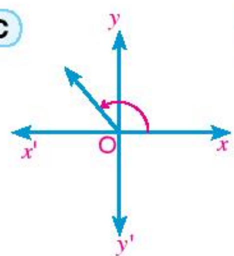
(A)



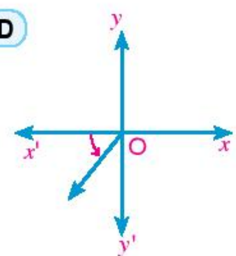
(B)



(C)



(D)



Mesure positive et mesure négative d'un angle orienté

Dans la figure (1), la mesure de l'angle orienté est positive si l'orientation du côté initial $\overrightarrow{OA}$ vers le côté final $\overrightarrow{OB}$ est contre le sens des aiguilles d'une montre.

Dans la figure (2), la mesure de l'angle orienté est négative si l'orientation du côté initial $\overrightarrow{OA}$ vers le côté final $\overrightarrow{OB}$ est dans le sens des aiguilles d'une montre.

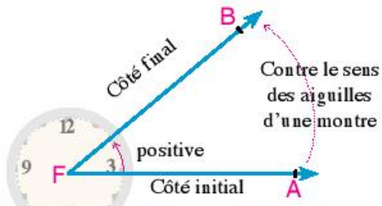


figure (1)

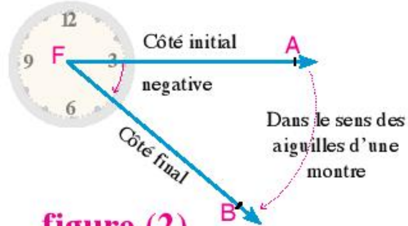
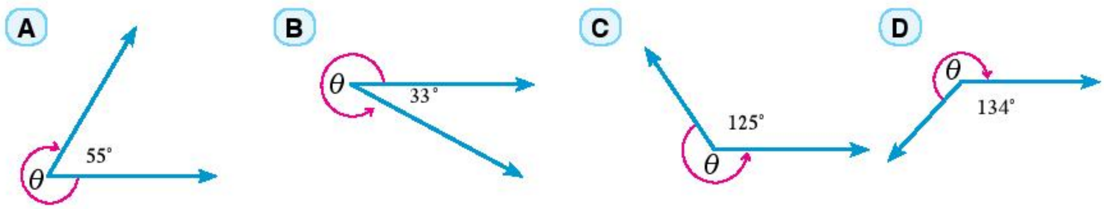


figure (2)

Exemple

1 Trouve la mesure de l'angle orienté θ indiqué dans chacune des figures suivantes :



Solution

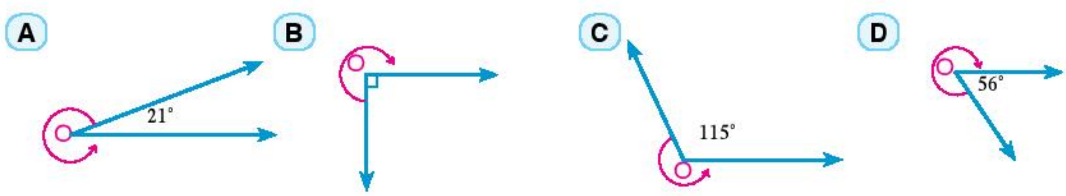
On sait que la somme des mesures des angles formés autour d'un point est égale à 360°

A $\theta = -(360° - 55°) = -305°$ **B** $\theta = 360° - 33° = 327°$

C $\theta = 360° - 125° = 235°$ **D** $\theta = -(360° - 134°) = -226°$

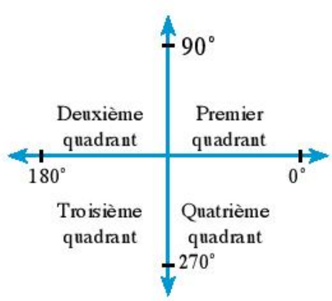
Essaie de résoudre

2 Trouve la mesure de l'angle orienté O indiqué dans chacune des figures suivantes :

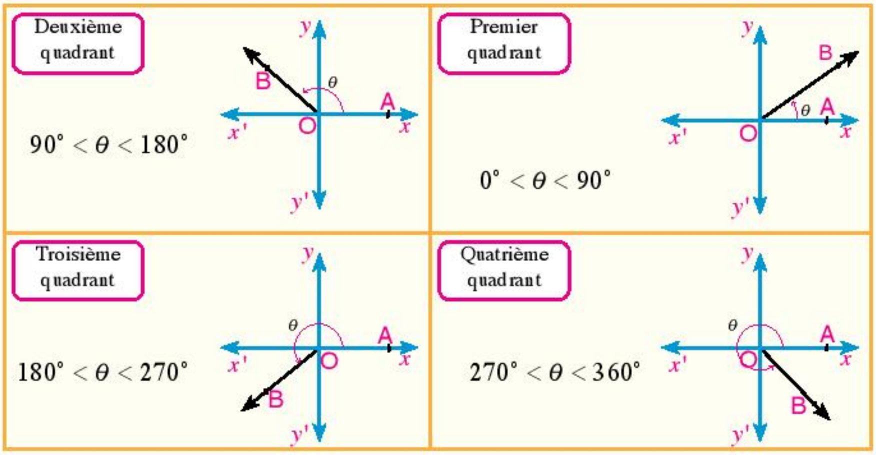


Position d'un angle dans un repère orthogonal :

➢ On partage le repère orthogonal en quatre quadrants comme l'indique la figure ci-contre.



➢ Si l'angle orienté $\angle$ AOB de mesure positive (θ) est en position standard, alors son côté final $\overrightarrow{OB}$ peut être situé dans l'un des quatre quadrants :



➢ Si le côté final $\overrightarrow{OB}$ est situé sur l'un des deux axes, l'angle dans ce cas est appelé « **Angle quadrant** ». Par conséquent les angles des mesures 0°, 90°, 180°, 270°, 360° sont des angles quadrants.

Exemple

2 Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A 48° **B** 217° **C** 135° **D** 295° **E** 270°

Solution

A $0^\circ < 48^\circ < 90^\circ$ Il est situé dans le premier quadrant.

B $180^\circ < 217^\circ < 270^\circ$ Il est situé dans le troisième quadrant.

C $90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$ Il est situé dans le deuxième quadrant.

D $270^\circ < 295^\circ < 360^\circ$ Il est situé dans le quatrième quadrant.

E 270° est un angle quadrant

Essaie de résoudre

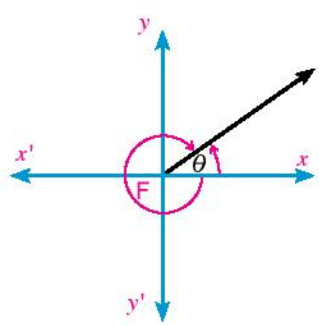
3 Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A 88° **B** 152° **C** 180° **D** 300° **E** 196°

Remarque :

➢ Si (θ°) est la mesure positive d'un angle orienté, alors la mesure négative de cet angle est $(\theta^\circ - 360^\circ)$

➢ Si ($-\theta^\circ$) est la mesure négative d'un angle orienté, alors la mesure positive de cet angle est $(-\theta^\circ + 360^\circ)$



Exemple

3 Détermine la mesure négative d'un angle de mesure 275°.

Solution

La mesure négative d'un angle de mesure $(275°) = 275° - 360° = -85°$

Vérification : $|275°| + |-85°| = 275° + 85° = 360°$

A retenir

La somme des valeurs absolues de la mesure positive et de la mesure négative d'un angle orienté est égale à 360°

Essaie de résoudre

4 Détermine la mesure négative de l'angle de mesure :

A 32° **B** 270° **C** 210° **D** 315°

Exemple

4 Détermine la mesure positive d'un angle de mesure -235°

Solution

La mesure positive d'un angle de mesure $(-235°) = 360° - 235° = 125°$

Vérification : $|-235°| + |125°| = 235° + 125° = 360°$

Essaie de résoudre

5 Détermine la mesure positive de l'angle de mesure :

A –52° **B** –126° **C** –90° **D** –320°

6 **Lien avec le sport :** Un lanceur de disque tourne d'un angle de mesure 150°. Dessine cet angle en position standard.

Angles équivalents :

Observe les figures suivantes, puis détermine l'angle orienté θ en position standard dans chacune des figures suivantes. Que remarques-tu ?

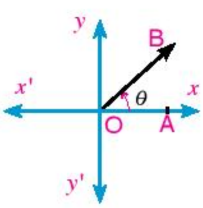


figure (1)

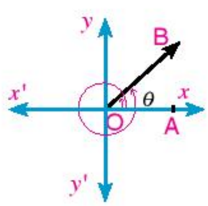


figure (2)

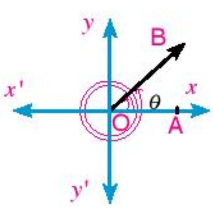


figure (3)

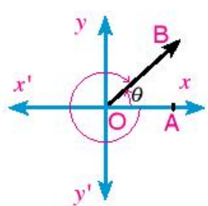


figure (4)

Dans les figures (2) , (3) et (4), on remarque que l'angle (θ) et l'autre angle ont le même côté final $\overrightarrow{OB}$.

Figure (1) : L'angle de mesure θ est en position standard

Figure (2) : Les deux angles de mesures θ et $\theta + 360°$ sont équivalents.

Figure (3) : Les deux angles de mesures θ et $\theta + 360° \times 2$ sont équivalents

Figure (4) : Les deux angles de mesures θ et $\theta - 360°$sont équivalents.

De ce qui précède, on déduit que :

Si un angle orienté de mesure θ est en position standard, tous les angles de mesures :

$$\theta \pm 1 \times 360° \quad \text{ou} \quad \theta \pm 2 \times 360° \quad \text{ou} \quad \theta \pm 3 \times 360° \quad \text{ou} \quad .... \quad \text{ou} \quad \theta \pm n \times 360° \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

ont le même côté final et ils sont appelés **angles équivalents**.

Exemple

5) Détermine deux angles, l'un de mesure positive et l'autre de mesure négative, équivalents à chacun des deux angles suivants :

A) 120° B) – 230°

Solution

A) Un angle de mesure positive : $120° + 360° = 480°$ **(en ajoutant 360°)**
Un angle de mesure négative : $120° - 360° = -240°$ **(en retranchant 360°)**

B) Un angle de mesure positive : $-230° + 360° = 130°$ **(en ajoutant 360°)**
Un angle de mesure négative : $-230° - 360° = -590°$ **(en retranchant 360°)**

Réfléchis : Y a-t-il d'autres angles équivalents de mesures positives et d'autres angles équivalents de mesures négatives ? Cite d'autres angles s'ils existent.

Essaie de résoudre

7) Détermine deux angles, l'un de mesure positive et l'autre de mesure négative, équivalents à chacun des angles suivants :

A) 40° B) 150° C) – 125° D) –240° E) -180°

8) **Déceler l'erreur :** Toutes les mesures d'angles suivantes sont équivalentes à l'angle en position standard de mesure 75° sauf une :

A) -285° B) -645° C) 285° D) 435°

Test de compréhension

1) Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A) 56° B) 325° C) 570° D) 166° E) 390°

2) Détermine un angle de mesure négative, équivalent à chacun des angles suivants :

A) 43° B) 214° C) 125° D) 90 ° E) 312°

3) Détermine un angle de mesure positive, équivalent à chacun des angles suivants :

A) -56° B) -215° C) 495° D) 930° E) -450°

Exercices 4-1

1 **Complète :**

A Un angle orienté est en position standard si ....

B Deux angles orientés en position standard sont dits équivalents si ....

C Un angle orienté a une mesure positive si .... et a une mesure négative si ....

D Si le côté final d'un angle orienté est situé sur l'un des deux axes du repère, alors l'angle est appelé ....

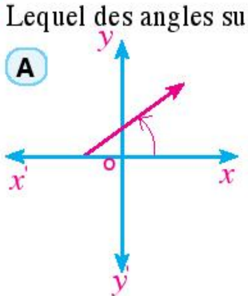
E Si (θ) est la mesure d'un angle orienté en position standard et $n \in \mathbb{Z}$, alors les angles de mesures ($\theta + n * 360°$) sont appelés ....

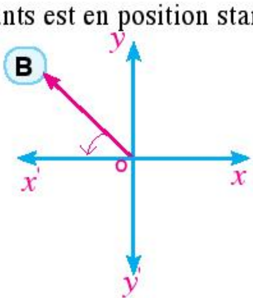
F La plus petite mesure positive d'un angle de mesure 530° est ....

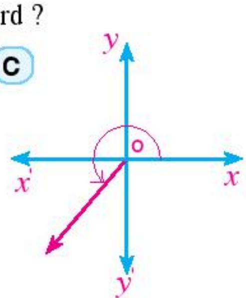
G L'angle ayant pour mesure 930° est situé dans le .... quadrant.

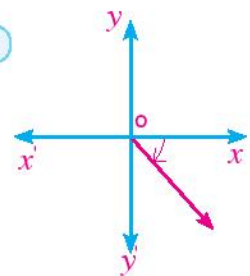
H La plus petite mesure positive d'un angle de mesure $-690°$ est ....

2 Lequel des angles suivants est en position standard ?

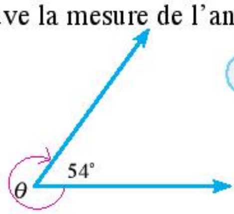
A


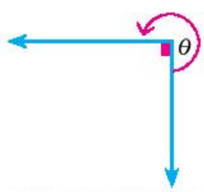
B


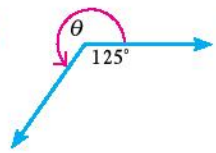
C


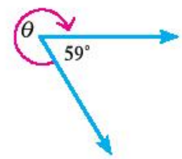
D


3 Trouve la mesure de l'angle orienté θ indiqué dans chacune des figures suivantes :

A


B


C


D


....

4 Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A 24° **B** 215°

C - 40° **D** -220°

E 640°

....

5 Dessine en position standard chacun des angles suivants :

A 32° **B** 140°

C - 80° **D** -110°

E -315°

6 Détermine une mesure négative de chacun des angles suivants :

A 83° **B** 136°

C 90° **D** 264°

E 964° **F** 1070°

....

....

7 Détermine la plus petite mesure positive de chacun des angles suivants :

A -183° **B** -217°

C -315° **D** -570°

4 - 2 Mesure en radians et mesure en degrés

A apprendre

- La notion de mesure en degrés.
- Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians.
- Calcul de la longueur d'un arc d'un cercle.

Expressions de base

- Mesure en degrés
- Mesure en radians
- Radian

Matériel et moyens

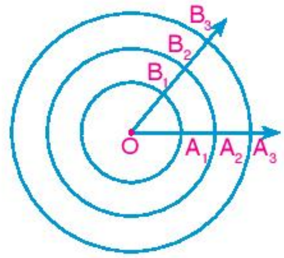
- Une calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

On sait qu'en mesure en degrés, on utilise les degrés, les minutes et les secondes. Un degré = 60 minutes et une minute = 60 secondes Y a-t-il d'autres unités de mesures d'angles ?

Mesure en radians

Travail collectif



1- Trace un ensemble de cercles concentriques comme dans la figure ci-contre.

2- Calcule le rapport entre la longueur de chaque arc interceptant un angle au centre et la longueur du rayon de son cercle. Que remarques-tu ?

On remarque que : le rapport entre la longueur d'un arc et et la longueur du rayon de son cercle est constant.

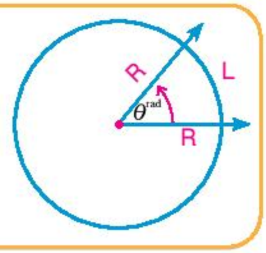
Donc $\dfrac{\text{longueur } \overset{\frown}{A_1B_1}}{OA_1} = \dfrac{\text{longueur } \overset{\frown}{A_2B_2}}{OA_2} = \dfrac{\text{longueur } \overset{\frown}{A_3B_3}}{OA_3} = \text{constante}$

Cette valeur constante est la mesure en radians d'un angle.
La mesure en radians d'un angle au centre $= \dfrac{\text{longueur de l'arc qui intercepte l'angle}}{\text{longueur du rayan du cercle}}$

Définition

Si θ^{rad} la mesure d'un angle au centre d'un cercle de longueur de rayon R, intercepte un arc de longueur L, alors

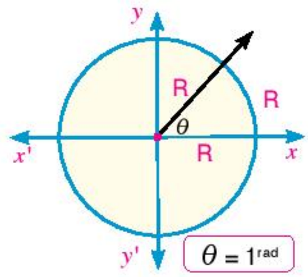
$\boxed{\theta^{\text{rad}} = \dfrac{L}{R}}$ de radian



De la définition précédente, on déduit que :

$$L = \theta^{\text{rad}} \times R \quad \text{et} \quad R = \frac{L}{\theta^{\text{rad}}}$$

L'unité de mesure dans ce cas est le radian notée (1^{rad}) et se lit (un radian).



Définition

Le radian

C'est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale à la longueur du rayon du cercle.

Réflexion critique : La mesure en radians d'un angle au centre est-elle proportionnelle à la longueur de l'arc qu'il intercepte ? Explique ta réponse.

Exemple

8 La longueur du rayon d'un cercle est égale à 8 cm. Trouve à un centième près la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{5}{12}\pi$.

Solution

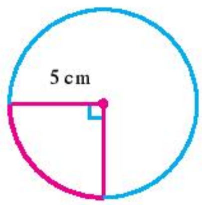
On utilise la formule de la longueur de l'arc : $L = \theta^{rad} \times R$

$r = 8$ cm , $\theta^{rad} = \frac{5\pi}{12}$, $L = 8 \times \frac{5\pi}{12}$ $\therefore L \simeq 10{,}47$cm

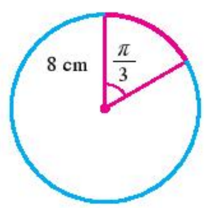
Essaie de résoudre

1 Détermine à un centième près, la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre dans chacun des cercles suivants :

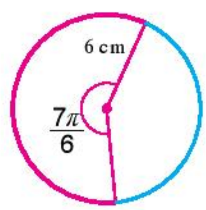
A



B



C



Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians d'un angle :

On sait que la mesure de l'angle au centre dans un cercle est égale à la mesure de l'arc qu'il intercepte.

Par conséquent, l'angle au centre dont la mesure en degrés est 360°, a pour longueur d'arc $2\pi R$

A retenir

Si la longueur du rayon d'un cercle est égale à l'unité de longueur, le cercle est appelé « cercle d'unitair »

Dans un cercle d'unité :

2π (en radians) est équivalent à 360°.

D'où π^{rad} est équivalent à 180° , $1^{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ\, 17'\, 45''$

Si un angle a pour mesure en radians θ^{rad} et pour mesure en degrés x° , alors :

$$\boxed{\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{rad}}{\pi}}$$

Exemple

9 Transforme 30° en mesure en radians en fonction de π.

Pour transformer en radians, on applique la formule $\frac{x°}{180°} = \frac{\theta^{rad}}{\pi}$

$$\theta^{rad} = \frac{30° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$$

Exemple

10 Transforme $1,2^{rad}$ en mesure en degrés.

Solution

$$x° = \frac{1,2 \times 180°}{\pi}$$

$$x° = 68,75493542 = 68°\ 45'\ 18''$$

On peut utiliser la calculatrice comme suit :

1 . 2 × 1 8 0 ÷ π = °'"

D Math

68° 45" 17.77"

A retenir

Il y a une autre unité pour mesurer l'angle appelée «de grade» qui est égale à $\frac{1}{200}$ de la mesure d'un angle plat.

Si x , θ et z sont les meures d'un même angle en degrés, en radians et en grade respectivement, alors :

$$\frac{x°}{180°} = \frac{\theta^{rad}}{\pi} = \frac{Y^{Grad}}{200}$$

Essaie de résoudre

2 Transforme chacune des mesures en radians suivantes en mesure en degrés :

A $0,7^{rad}$ B $1,6^{rad}$ C $2,05^{rad}$ D $-1,05^{rad}$

\

Exercices 4-2

1) Questions à choix multiples :

1 L'angle en position standard qui a pour mesure 60° est équivalent à l'angle qui a pour mesure

A 120° B 240° C 300° D 420°

2 L'angle qui a pour mesure $\frac{31\pi}{6}$ se trouve dans le quadrant

A premier B deuxième C troisième D quatrième

3 L'angle qui a pour mesure $\frac{-9\pi}{4}$ se trouve dans le quadrant

A premier B deuxième C troisième D quatrième

4 Sachant que la somme des mesures des angles d'un polygone est 180° (n – 2) où n est le nombre de côtés, la mesure en radians d'un angle d'un pentagone régulier est

A $\frac{\pi}{3}$ B $\frac{7\pi}{2}$ C $\frac{3\pi}{5}$ D $\frac{2\pi}{3}$

5 L'angle ayant pour meure en radians $\frac{7\pi}{3}$ a pour mesure en degrés

A 105° B 210° C 420° D 840°

6 Si la mesure d'un angle en degrés est 64° 48' , alors sa mesure en radians est

A $0{,}18^{rad}$ B $0{,}36^{rad}$ C $0{,}18\,\pi$ D $0{,}36\,\pi$

7 Dans un cercle de longueur de rayon 24 cm, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure 30° est égale à

A 2π cm B 3π cm C 4π cm D 5π cm

8 Dans un cercle de longueur de rayon 15 cm, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 5πcm est égale à

A 30° B 60° C 90° D 180°

9 Si la mesure d'un angle dans un triangle est 75° et la mesure d'un autre angle du triangle est $\frac{\pi}{4}$, alors la mesure en radians du troisième angle est

A $\frac{\pi}{6}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{3}$ D $\frac{5\pi}{12}$

2) Réponds aux questions suivantes :

10 Trouve en fonction de π, la mesure en radians de chacun des angles suivants :

A 225° .... B 240° ....

C -135° .... D 300° ....

E 390° .... F 780° ....

11 Trouve, à un millième près, la mesure en radians de chacun des angles suivants :

A 56,6° B 25° 18' C 160° 50' 48''

....

12 Trouve, à une seconde près, la mesure en degrés de chacun des angles suivants :

A $0{,}49^{rad}$ B $2{,}27^{rad}$ C $-3\frac{1}{2}^{rad}$

....

13 Soit un cercle de longueur de rayon R. θ est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur L.

A Si R = 20 cm et 78 = θ° 15' 20'' , alors L= (à un dixième près)

B Si L = 27,3 cm et 78 = θ° 0' 24'' , alors R =. (à un dixième près)

14 Dans un cercle, un angle au centre de mesure 150° intercepte un arc de longueur 11 cm. Calcule la longueur du rayon du cercle (à un dixième près).

15 Trouve la mesure en radians et la mesure en degrés d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 8 ,7 cm dans un cercle de rayon de longueur 4 cm.

16 **Lien avec la géométrie :** Dans un triangle, la mesure de l'un des angles est 60° et la mesure d'un autre angle $\frac{\pi}{4}$. Trouve en radians et en degrés la mesure du troisième angle du triangle.

4 - 3 Fonctions trigonométriques

A apprendre

- Cercle d'unité.
- Fonctions trigonométriques de base.
- Fonctions trigonométriques inverses.
- Signe des fonctions trigonométriques.
- Fonctions trigonométriques de certains angles particuliers

Expressions de base

- Fonction trigonométrique
- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cosécante
- Sécante
- Cotangente

Materials

- Une calculatrice scientifique

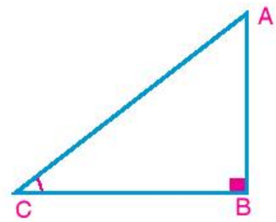
Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié les rapports trigonométriques de base d'un angle aigu. Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\sin C = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos C = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

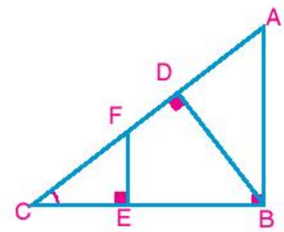
$$\text{tg } C = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AB}{BC}$$



1- **Dans la figure ci-contre,** exprime sin C de trois rapports différents.

★ Les trois rapports sont-ils égaux ? Explique ta réponse.

★ Que peux-tu déduire ?



Remarque que :

Les triangles BAC , EFC et DBC sont semblables. Pourquoi ?

De la similitude des triangles, on obtient : $\frac{BA}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{DB}{BC} = \sin C$ (Pourquoi ?)

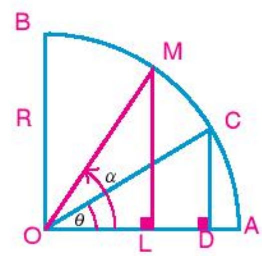
Cela signifie que le rapport trigonométrique d'un angle aigu est constant. Ce rapport ne change que si l'angle lui-même change.

2- **La figure ci-contre** indique un quart cercle de longueur de rayon R cm où: m $(\angle DOC) = \theta$

$$\sin \theta = \frac{CD}{R}$$

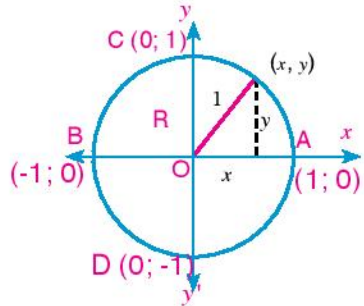
Si m $(\angle DOC)$ augmente et devient α

Alors $\sin \alpha = \frac{ML}{R}$



Donc le changement de la mesure d'un angle entraine le changement de ses rapports trigonométiques.

Cercle trigonométrique



Dans un repère orthogonal, le cercle ayant pour centre le point d'origine du repère et pour longueur de rayon l'unité de longueur est appelé « le cercle trigonométrique ».

★ Le cercle d'unité coupe l'axe des abscisses aux points A (1 ; 0) et B (-1 ; 0), Il coupe également l'axe des ordonnées aux points C (0 ; 1) et D (0 ; -1).

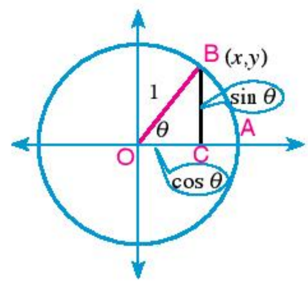
★ Si (x, y) sont les coordonnées d'un point appartenant au cercle d'unité, alors :

$x \in [-1 \ ; \ 1]$, $y \in [-1 \ ; 1]$.

où $x^2 + y^2 = 1$ **Théorème de Pythagore**

Fonctions trigonométriques de base d'un angle

Soit un angle orienté de mesure θ, en position standard. Si le côté final de l'angle coupe le cercle d'unité au point $B(x, y)$. on peut définir les fonctions suivantes :



1- cosinus θ = l'abscisse du point B

Donc $\boxed{\cos\theta = x}$

2- sinus θ = l'ordonnée du point B

Donc $\boxed{\sin\theta = y}$

3- tangente $\theta = \dfrac{\text{l'ordonnée du point B}}{\text{l'abscisse du point B}}$

Donc $\boxed{\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}}$ où $x \neq 0$ et par conséquent , $\boxed{\text{tg}\ \theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ où $\cos\theta \neq 0$

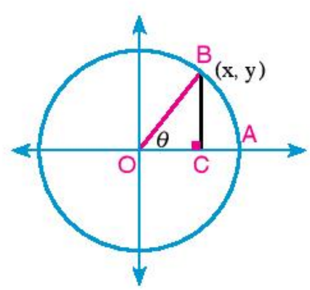
Remarque que : Tout point (x, y) appartenant au cercle d'unité peut s'écrire sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$

Si $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le point d'intersection du côté final d'un angle orienté de mesure θ avec le cercle d'unité

alors : $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ et $\text{tg}\ \theta = \frac{4}{3}$

Inverses des fonctions trigonométriques

Soit un angle orienté de mesure θ en position standard. Si le côté final de l'angle coupe le cercle trigonométrique au point $B(x, y)$, on peut définir les fonctions suivantes :

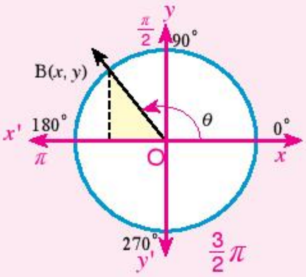


1- sécante θ : $\sec\theta = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ où $x \neq 0$

2- cosécante θ : $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ où $y \neq 0$

3- cotangente θ : $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\text{tg}\theta}$ où $y \neq 0$

Signe des fonctions trigonométriques

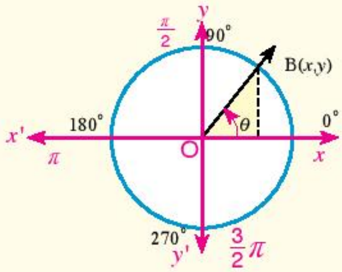


Deuxième quadrant

$x < 0$

$y > 0$

Le côté final de l'angle est situé au deuxième quadrant. Donc la fonction sinus et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives

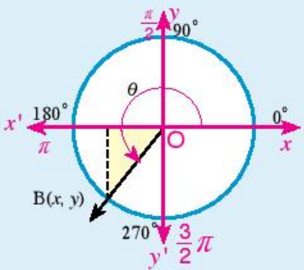


Premier quadrant

$x > 0$

$y > 0$

Le côté final de l'angle est situé au premier quadrant. Donc toutes les fonctions trigonométriques de l'angle. ayant pour côté final $\overrightarrow{OB}$ sont positives.

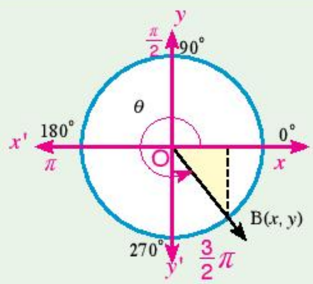


Troisième quadrant

$x < 0$

$y < 0$

Le côté final de l'angle est situé au troisième quadrant. Donc la fonction tangente et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.



Quatrième quadrant

$x > 0$

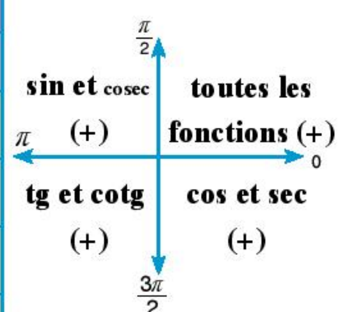
$y < 0$

Le côté final de l'angle est situé au quatrième quadrant.

Donc la fonction cosinus et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.

Nous pouvons résumer les signes de toutes fonctions trigonométriques dans le tableau suivant :

Quadrant auquel appartient le côté final de l'angle	Intervalle auquel appartient la mesure de l'angle	Signe des fonctions trigonométriques		
		sin et cosec	cos et sec	tg et cotg
Premier	$]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$	+	+	+
Deuxième	$]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$	+	−	−
Troisième	$]\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}[$	−	−	+
Quatrième	$]\frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\pi[$	−	+	−



Exemple

1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A sin 130° **B** tg 315° **C** cos 650° **D** sec (-30°)

Solution

A L'angle de mesure 130° est situé au deuxième quadrant $\therefore$ sin 130° est positif

B L'angle de mesure $315°$ est situé au quatrième quadrant $\therefore$ tg $315°$ est négatif.

C L'angle de mesure $650°$ est équivalent à un angle de mesure $650° - 360° = 290°$

$\therefore$ L'angle de mesure $650°$ est situé au quatrième quadrant. $\therefore$ cos $650°$ est positif.

D L'angle de mesure $(-30°)$ est équivalent à un angle de mesure $-30° + 360° = 330°$

L'angle de mesure $(-30°)$ est situé au quatrième quadrant. $\therefore$ sec $(-30°)$ est positif.

Essaie de résoudre

1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A $\cos 210°$ **B** $\sin 740°$ **C** $\text{tg}\,(-300°)$ **D** $\sin 1230°$

Exemple

2 Soit l'angle $\angle$ AOB de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, trouve les rapports trigonométriques de base de $\angle$ AOB si les coordonnées du point B sont :

A $(0\,;-1)$ **B** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y\right)$ **C** $(-x, x)$

où $x > 0$, $y > 0$

Solution

A $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$ et $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{0}$ (indéfini)

B $x^2 + y^2 = 1$ (cercle trigonométrique) en remplaçant x par : $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1$ d'où $y^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ (refusée)

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,\theta = 1$

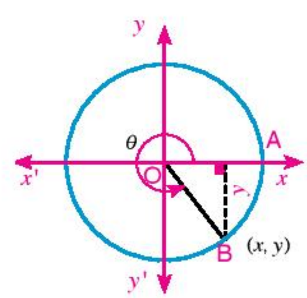
C $(-x)^2 + (x)^2 = 1$ $\therefore 2x^2 = 1$ $\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $x > 0$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,\theta = -1$

3 Si $270° < \theta < 360°$ et si $\sin\theta = -\frac{5}{13}$, trouve tous les rapports trigonométriques de base de l'angle de mesure θ

Solution



Soient m $(\angle$ AOB$) = \theta$ où θ est situé au quatrième quadrant et les cordonnées du point B sont (x, y)

$\because y = \sin\theta = -\frac{5}{13}$, $x = \cos\theta$ où $\cos\theta > 0$

$\because x^2 + y^2 = 1$ $\therefore \cos^2\theta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$ $\therefore \cos^2\theta = \frac{144}{169}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ou $\cos\theta = -\frac{12}{13}$

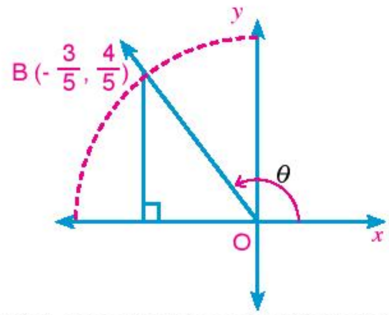
$\cos\theta = \frac{12}{13}$ (Pourquoi ?) $\text{tg}\,\theta = -\frac{5}{12}$

Essaie de résoudre

2 Si $90° < \theta < 180°$ et si $\sin\theta = \frac{4}{5}$, trouve $\cos\theta$ et $\text{tg}\,\theta$ où θ est un angle en position standard dans le cercle trigonométrique

Exemple

4 Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $B(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle θ.



Solution

$\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ et $\text{tg}\,\theta = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ et $\text{cotg}\,\theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

Essaie de résoudre

3 Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B dans chacun des cas suivants :

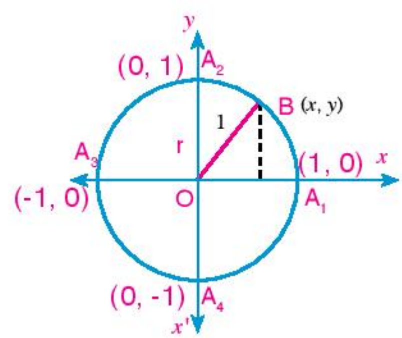
A $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ **B** $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ **C** $(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

Fonctions trigonométriques de certains angles particuliers

Dans la figure ci-contre, le cercle trigonométrique coupe les deux axes aux points

$A_1(1, 0), A_2(0, 1), A_3(-1, 0), A_4(0, -1)$.

Soit θ la mesure de l'angle orienté AOB en position standard tel que son côté final $\overrightarrow{OB}$ coupe le cercle trigonométrique en B.



1) Si $\theta = 0°$ ou $\theta° = 360°$, **alors** B(1, 0)
Donc $\cos 0° = \cos 360° = 1$, $\sin 0° = \sin 360° = 0$ et $\text{tg}\,0° = \text{tg}\,360° = 0$

2) Si $\theta° = 90° = \frac{\pi}{2}$, **alors** B(0, 1)
Donc $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{0}$ (indéfini)

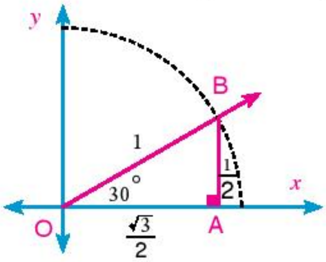
3) Si $\theta° = 180° = \pi$, **alors** B(-1, 0)
Donc $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$, $\text{tg}\,180° = 0$

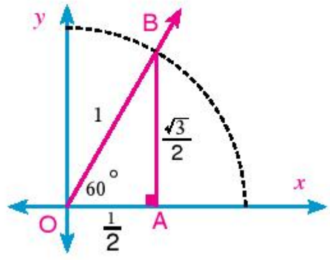
4) Si $\theta^\circ = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, **alors** B(0, -1)

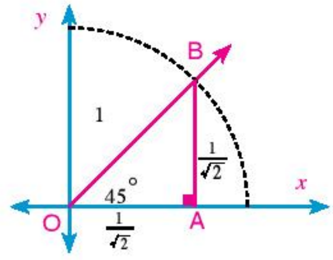
Donc $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -1$, $\text{tg } 270^\circ = \frac{-1}{0}$ (indéfini)

Essaie de résoudre

4 Dans chacune de figures suivantes, détermine les coordonnées du point B, puis déduis les fonctions trigonométriques des angles de mesures 30°, 60°, 45°







Exemple

5 Sans utiliser de calculatrice, démontre que $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin^2 \frac{\pi}{3}$

Solution

On sait que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Membre gauche $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ **(1)**

$\because \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Membre droit $= \sin^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ **(2)**

De (1) et (2), les deux membres sont égaux.

Essaie de résoudre

5 Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de $3 \sin 30^\circ \sin 60^\circ - \cos 0^\circ \sec 60^\circ + \sin 270^\circ \cos^2 45^\circ$

Réflexion critique : Soit θ la mesure d'un angle en position standard. Si $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est-il possible que θ soit égale à 240° ? Explique ta réponse.

Test de compréhension

Démontre chacune des égalités suivantes :

A $1 - 2\sin^2 90^\circ = \cos 180^\circ$ **B** $\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4}$

Exercices 4-3

1) Questions à choix multiples :

1 Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, alors $\sin\theta$ est égal à

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2 Si $\sin\theta = \frac{1}{2}$ où θ est un angle aigu, alors θ est égal à

A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

3 Si $\sin 1 - = \theta$ et $\cos 0 = \theta$, alors θ est égal à

A $\frac{\pi}{2}$ **B** π **C** $\frac{3\pi}{2}$ **D** 2π

4 Si $\text{cosec } 2 = \theta$ où θ est un angle aigu, alors θ est égal à

A 15° **B** 30° **C** 45° **D** 60°

5 Si $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors θ est égal à

A $\frac{2\pi}{3}$ **B** $\frac{5\pi}{6}$ **C** $\frac{5\pi}{3}$ **D** $\frac{11\pi}{6}$

6 Si $\text{tg } 1 = \theta$ où θ est un angle aigu, alors θ est égal à

A 10° **B** 30° **C** 45° **D** 60°

7 tg 45° + cotg 45° - sec 60° est égale à

A Zero **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** 1

8 Si $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ où θ est un angle aigu, alors $\sin\theta$ est égal à

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Réponds aux questions suivantes :

9 Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouve toutes les fonctions trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle trigonométrique au point :

A $(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ **B** $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ **C** $(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ **D** $(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$

10 Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouve toutes les fonctions trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle d'unité au point donné dans chacun des cas suivants :

A $(3a, -4a)$ où $a > 0$

B $(\frac{3}{2}a, -2a)$ où $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

11 Ecris le signe de chacun des fonctions suivantes :

A sin 240° ....

B tg 365° ....

C cosec 410° ....

D cotg $\frac{9\pi}{4}$ ....

E sec - $\frac{9\pi}{4}$ ....

F tg $\frac{-20\pi}{9}$ ....

12 **Trouve la valeur de ce qui suit :**

A $\cos\frac{\pi}{2} * \cos 0 + \sin\frac{3\pi}{2} * \sin\frac{\pi}{2}$

B $tg^2\, 30° + 2\sin^2 45° + \cos^2 90°$

13 **Déceler l'erreur :** L'enseignant a demandé aux élèves de sa classe de calculer 2 sin 45°.

Réponse de Karim

$2\ \sin\ 45° = \sin\ 2 * 45°$
$= \sin 90° = 1$

Réponse d'Ahmed

$2 \sin 45 = 2 * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
$= \sqrt{2}$

Laquelle des deux réponses est correcte ? Pourquoi ?

14 **Réflexion critique :** Si θ est la mesure d'un angle en position standard telle que cotg1 - = θ et cosec $\theta = \sqrt{2}$. Est-il possible que $\theta = \frac{3\pi}{4}$? Explique ta réponse.

4 - 4 Angles associés

A apprendre

- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $180^\circ \pm \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $360^\circ - \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $90^\circ \pm \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $270^\circ \pm \theta$
- Solution générale des équations trigonométriques de la forme :
  - $\sin \alpha = \cos \beta$
  - $\sec \alpha = \mathrm{cosec}\ \beta$
  - $\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{cotg}\ \beta$

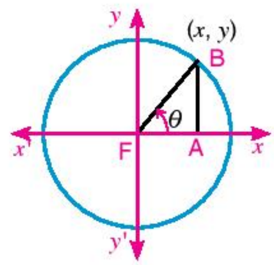
Expressions de base

- Deux angles associés

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

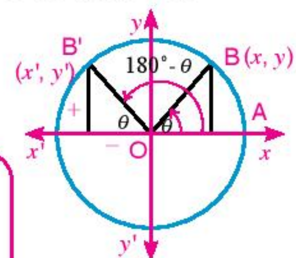


Tu as déjà étudié la symétrie axiale et ses propriétés. **La figure ci-contre** montre un angle orienté AOB, en position standard, de mesure θ où $0° < \theta < 90°$. Son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B (x ; y).

Détermine le point B' image du point B par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis écris ses coordonnées.

Quelle est la mesure de $\angle$ AOB'? $\angle$ AOB' est-il en position standard ?

1- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(180^\circ - \theta)$



Dans la figure ci-contre, B' (x', y') est l'image de $B(x, y)$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. $x' = -x$, $y' = -y$ Donc :

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta \ , \mathrm{cosec}\ (180^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}\ \theta$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \ , \sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$$
$$\mathrm{tg}\ (180^\circ - \theta) = -\mathrm{tg}\ \theta \ , \mathrm{cotg}\ (180^\circ - \theta) = -\mathrm{cotg}\ \theta$$

Par exemple : $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Essaie de résoudre

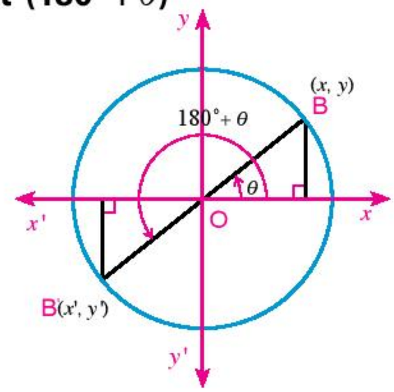
1 Trouve $\mathrm{tg}\ 135^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\cos 150^\circ$

Remarque que : $\theta + (180^\circ - \theta) = 180^\circ$

On dit que les deux angles θ et $(180^\circ - \theta)$ **sont associés.**

Définition Deux angles sont associés si la somme ou la différence de leurs mesures est égale à $n \times 90^\circ$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(180^\circ + \theta)$



Dans la figure ci-contre,

B'(x', y') est l'image de B(x, y) par la symétrie par rapport au pont d'origine O.

On a : $x' = -x$, et $y' = -y$ Donc :

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta \quad , \quad \text{cosec}(180^\circ + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$$
$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta \quad , \quad \sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$$
$$\text{tg}\,(180^\circ + \theta) = \text{tg}\,\theta \quad , \quad \text{cotg}\,(180^\circ + \theta) = \text{cotg}\,\theta$$

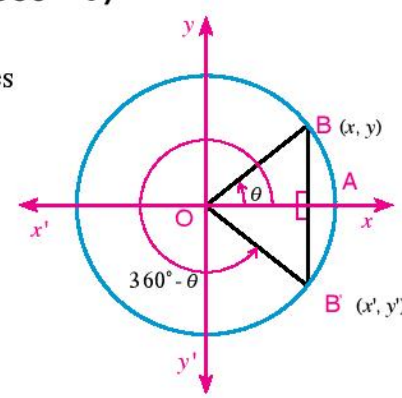
Par exemple :

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\text{tg}\ 240^\circ = \text{tg}\,(180^\circ + 60^\circ) = \text{tg}\ 60^\circ = \sqrt{3}$$

Essaie de résoudre

2 Trouve $\sin 225^\circ$, $\cos 210^\circ$, $\sec 600^\circ$ et $\text{cotg}\ 225^\circ$.

3- Fonctions trigonométriques des deux angles θ , $(360^\circ - \theta)$



Dans la figure ci-contre,

B'(x', y') est l'image de B(x, y) par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

On a : $x' = x$, $y' = -y$ Donc :

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta \quad , \quad \text{cosec}(360^\circ - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$$
$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta \quad , \quad \sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$$
$$\text{tg}\,(360^\circ - \theta) = -\text{tg}\,\theta \quad , \quad \text{cotg}\,(360^\circ - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$$

Par exemple :

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Remarque que

Les fonctions trigonométriques des angles $(-\theta)$ et $(360^\circ - \theta)$ sont identiques.

Essaie de résoudre

3 Trouve : $\sin 315^\circ$, $\text{cosec}\ 315^\circ$, $\text{tg}\ 330^\circ$, $\text{tg}\ 300^\circ$

Réflexion critique : Comment peut-on trouver

$\sin(-45^\circ)$, $\cos(-60^\circ)$, $\text{tg}\,(-30^\circ)$ et $\sin 690^\circ$.

Exemple

15 Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de l'expression :
$\sin 150° \cos(-300°) + \cos 930° \text{ cotg } 240°$

Solution

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos(-300°) = \cos(-300° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 930° = \cos(930° - 2 \times 360°) = \cos 210°$

Donc $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{cotg } 240° = \text{cotg}(180° + 60°) = \text{cotg } 60° = \frac{1}{\text{tg}60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

L'expression $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Essaie de résoudre

4 Démontre que : $\sin 600° \cos(-30°) + \sin 150° \cos(-240°) = -1$

4- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(90° - \theta)$

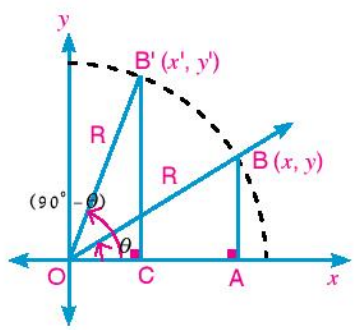
La figure ci-contre indique une partie d'un cercle de centre O.

L'angle de mesure θ est en position standard et a pour rayon R.

De la superposition des deux triangles OAB et OCB':

On a : $x' = y \quad , \quad y' = x$

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(90° - \theta)$:



$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$,	$\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$,	$\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(90° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$,	$\text{cotg}(90° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

Exemple

1 Si le côté final d'un angle de mesure θ, en position standard, passe par le point $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, trouve les fonctions trigonométriques : $\sin(90° - \theta)$ et $\text{cotg}(90° - \theta)$

Solution

$\because \sin(90° - \theta) = \cos\theta$ $\therefore \sin(90° - \theta) = \frac{3}{5}$

$\because \text{cotg}(90° - \theta) = \text{tg}\ \theta$ $\therefore \text{cotg}(90° - \theta) = \frac{4}{3}$

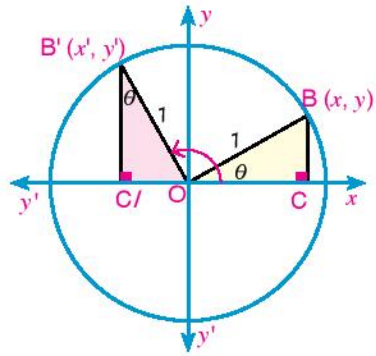
Essaie de résoudre

5 Dans l'exemple précédent, calcule $\cos(90° - \theta)$ et $\text{cosec}(90° - \theta)$

5- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(90° + \theta)$

De la superposition des deux triangles B'C'O et OCB

On a : $y' = x$, $x' = -y$



Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(90° + \theta)$ comme suit :

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$, $\text{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$

$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$, $\sec(90° + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$

$\text{tg}(90° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}(90° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

Exemple

2 Si le côté final d'un angle de mesure θ , en position standard, passe par le point $(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ trouve les fonctions trigonométriques $\text{tg}(90° + \theta)$ et $\text{cosec}(90° + \theta)$

Solution

$\because \text{tg}(90° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$ $\therefore \text{tg}(90° + \theta) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\because \text{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$ $\therefore \text{cosec}(90° + \theta) = 3$

Essaie de résoudre

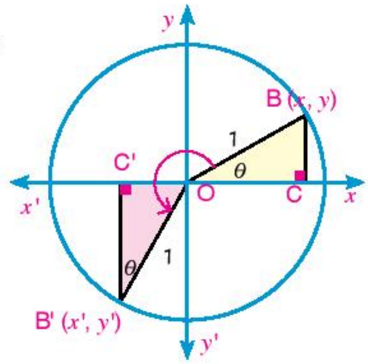
6 Dans l'exemple précédent, calcule : $\sin(90° + \theta)$, $\sec(90° + \theta)$

6- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(270^\circ - \theta)$

De la superposition des deux triangles B'C'O , OCB

On a : $y' = -x$ et $x' = -y$

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(270^\circ - \theta)$ comme suit :



$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$, $\operatorname{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$

$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$, $\sec(270^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\operatorname{tg}(270^\circ - \theta) = \operatorname{cotg}\theta$, $\operatorname{cotg}(270^\circ - \theta) = \operatorname{tg}\theta$

Exemple

3) Si le côté final d'un angle de mesure θ, en position standard, passe par le point $(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2})$ trouve les fonctions trigonométriques : $\cos(270^\circ - \theta)$ et $\operatorname{cotg}(270^\circ - \theta)$

Solution

$\because \cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\therefore \cos(270^\circ - \theta) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\because \operatorname{cotg}(270^\circ - \theta) = \operatorname{tg}\theta$ $\qquad$ $\therefore \operatorname{cotg}(270^\circ - \theta) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

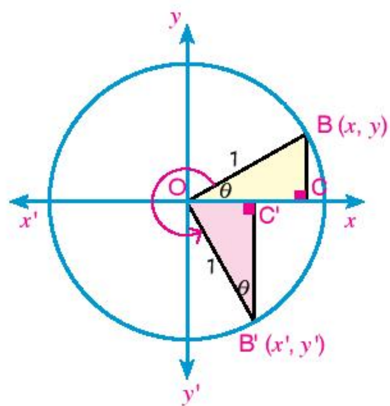
Essaie de résoudre

7) Dans l'exemple précédent, calcule $\operatorname{tg}(270^\circ - \theta)$ et $\operatorname{cosec}(270^\circ - \theta)$

7- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(270^\circ + \theta)$

De la superposition des deux triangles : B'C'O, OCB

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(270^\circ + \theta)$ comme suit :



$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$, $\operatorname{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$, $\sec(270^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\operatorname{tg}(270^\circ + \theta) = -\operatorname{cotg}\theta$, $\operatorname{cotg}(270^\circ + \theta) = -\operatorname{tg}\theta$

Exemple

4) Si le côté final d'un angle de mesure θ, en position standard, passe par le point $(\frac{\sqrt{5}}{3} , \frac{2}{3})$ trouve les fonctions trigonométriques : $\sin(270^\circ + \theta)$ et $\sec(270^\circ + \theta)$

Solution

$\because \sin(270° + \theta) = -\cos\theta \qquad \therefore \sin(270° + \theta) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\because \sec(270° + \theta) = \text{cosec}\ \theta \qquad \therefore \sec(270° + \theta) = \frac{3}{2}$

Essaie de résoudre

8 Dans l'exemple précédent, calcule cotg $(270° + \theta)$ et cosec $(270° + \theta)$.

Solution générale d'une équation trigonométrique de la forme

[sin(α) = cos(β), sec(α) = cosec (β) ou tg (α) = cotg (β)]

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié que si α et β sont les mesures de deux angles complémentaires (leur somme est égale à 90°) alors $\sin\alpha = \cos\beta$, sec = cosec β et tg = cotg β, , alors $\alpha + \beta = 90°$ où α et β sont deux angles aigus. Mais si $\sin\theta = \cos 150°$, quelles sont les valeurs attendues de θ ?

A apprendre

1- Si $\sin\alpha = \cos\beta$ (où α et β sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

- $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient :** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \beta)$ **et par conséquent on obtient :** $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ **d'où** $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

En ajoutant 2πn à l'angle $\frac{\pi}{2}$ on obtient :

Si $\sin\alpha = \cos\beta$, **alors** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

(où $n \in \mathbb{Z}$), De même :

Si $\text{cosec}\ \alpha = \sec\beta$, **alors** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

(où $n \in \mathbb{Z}$),
$\alpha \neq n\pi$ et $\beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

2- Si $\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\beta$ (où α et β sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

- $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}(\frac{3\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient** $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$

En ajoutant 2πn aux deux angles $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ on obtient :

Si $\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\ \beta$, **alors** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi n$

(où $n \in \mathbb{Z}$),

$\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $\beta \neq n\pi$

Exemple

5 Résous l'équation : $\sin 2\theta = \cos\theta$

Solution

$\sin 2\theta = \cos\theta$

$2\theta \pm \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$ — de la définition de l'équation

(1) Soit $2\theta + \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ d'où $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$ — en divisant les deux membres par 3

(2) ou $2\theta - \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ d'où $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

L'ensemble solution est : $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$ ou $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Essaie de résoudre

9 Résous chacune des équations suivantes :

A $\sin 4\theta = \cos 2\theta$ **B** $2\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$ **C** $\cos 5\theta = \sin\theta$

10 **Déceler l'erreur :** Dans un concours de mathématiques, l'enseignant a demandé à Karim et à Ziaad de trouver la valeur de $\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ Qui a trouvé la bonne réponse ? Explique ta réponse.

Réponse de Karim

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi + \theta - \frac{\pi}{2})$

$= \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

$= -\cos\theta$

Réponse de Ziaad

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin[-(\frac{\pi}{2} - \theta)]$

$= -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$= -(-\cos\theta) = \cos\theta$

Test de compréhension

Trouve toutes les valeurs de θ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifient chacune des équations suivantes :

A $\sin\theta - \cos\theta = 0$ **B** $\text{cosec}(\theta - \frac{\pi}{6}) = \sec\theta$ **C** $2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$

Exercices 4-4

(1) Complète ce qui suit :

1. $\cos(180° + \theta) =$ ……………………
2. $\text{tg}(180° - \theta) =$ ……………………
3. $\text{cosec}(360° - \theta) =$ ……………………
4. $\sin(360° + \theta) =$ ……………………
5. $\sin(90° + \theta) =$ ……………………
6. $\text{cotg}(90° - \theta) =$ ……………………
7. $\sec(270° + \theta) =$ ……………………
8. $\cos(270° - \theta) =$ ……………………

(2) Complète ce qui suit par une mesure d'un angle aigu :

9. $\sin 25° = \cos$ ……………………°
10. $\cos 67° = \sin$ ……………………°
11. $\text{tg}\ 42° = \text{cotg}$ ……………………°
12. $\text{cosec}\ 13° = \sec$ ……………………°
13. Si $\text{cotg}\ 2\theta = \text{tg}\ \theta$ où $0° < \theta < 90°$, alors $\theta =$ ……………………
14. Si $\sin 5\theta = \cos 4\theta$ où θ est un angle aigu positif, alors $\theta =$ ……………………°
15. Si $\sec\theta = \sec(90° - \theta)$, alors $\text{cotg}\ \theta =$ ……………………
16. Si $\text{tg}\ 2\theta = \text{cotg}\ 3\theta$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\theta =$ …………………… rad
17. Si $\cos\theta = \sin 2\theta$ où θ est la mesure positive d'un angle aigu, alors $\sin 3\theta =$ ……………………

(3) Questions à choix multiples :

18. Si tg (180° + 1 = (θ où θ est la plus petite mesure d'un angle aigu positif, alors θ est égal à

   A) 45° B) 30° C) 60° D) 135°

19. Si $\cos 2\theta = \sin\theta$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\cos 2\theta =$

   A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1

20. Si $\sin\alpha = \cos\beta$ où α et β sont les mesures de deux angles aigus, alors $\text{tg}(\beta + \alpha)$ est égale à

   A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) indéfinie

21. Si $\sin 2\theta = \cos 4\theta$ où θ est un angle aigu positif, alors $\text{tg}(90° - 3\theta)$ est égale à

   A) -1 B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$

22) Si $\cos(90° + \theta) = \frac{1}{2}$ où θ est la plus petite mesure d'un angle aigu positif, alors θ est égale à

A) 150° B) 210°

C) 240° D) 330°

(4) Réponds aux questions suivantes :

23) Trouve les valeurs de θ où $0 \leqslant \theta < 90°$ qui vérifient ce qui suit :

A) $\sin(315 + \theta°) = \cos(25 - \theta°)$

B) $\sec(25 + \theta°) = \text{cosec}\ (15 + \theta°)$

C) $\text{tg}\ (20 + \theta°) = \text{cotg}\ (330 + \theta°)$

D) $\cos\left(\frac{20 + \theta°}{2}\right) = \sin\left(\frac{40 + \theta°}{2}\right)$

24) Trouve la valeur de ce qui suit :

A) $\sin 150°$ B) $\text{cosec}\ 225°$

C) $\sec 300°$ D) $\text{tg}\ 780°$

....

E) $\text{cosec}\ \frac{11\pi}{6}$ F) $\sin \frac{7\pi}{4}$

H) $\text{cotg}\ \frac{-2\pi}{3}$ I) $\cos \frac{-7\pi}{4}$

....

25) Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométique au point $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, trouve la valeur de :

A) $\sin(180° + \theta)$ B) $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

....

C) $\text{tg}\ (360° - \theta)$ D) $\text{cosec}\ (\frac{3\pi}{2} - \theta)$

....

Représentation graphique des fonctions trigonométriques

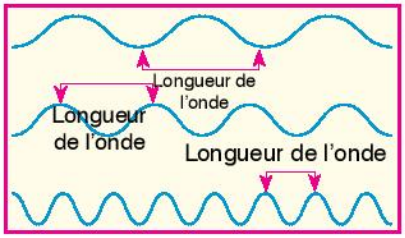
4 - 5

A apprendre

- Représentation de la fonction sinus et déduction de ses propriétés.
- Représentation de la fonction cosinus et déduction de ses propriétés

Réfléchis et discute

Les ultrasons sont basés sur des hautes fréquences de longueurs d'ondes différentes. Ils sont utilisés dans l'imagerie médicale. Ils sont utilisés également comme radar dans les sous-marins travaillant dans les profondeurs de l'océan. La représentation de ces ultrasons graphiquement permet d'étudier les propriétés des fonctions sinus et cosinus. Avec tes camarades, effectue le travail en groupe suivant :



Représentation graphique de la fonction sinus

Expressions de base

- Fonction sinus
- Fonction cosinus
- Valeur maximale
- Valeur minimale

Travail collectif

1 Avec tes camarades, complète le tableau suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	0,5							

2 Trace la courbe en joignant tous les points.

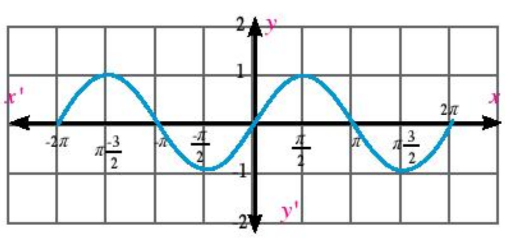
3 Dresse un autre tableau en utilisant les opposés des valeurs présentées dans le tableau précédent.

4 Représente tous les points obtenus dans un repère.

5 Complète la courbe représentative en joignant tous les points.

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique
- Logiciels



6 As-tu remarqué qu'il existe des valeurs maximales et des valeurs minimales de cette courbe? Explique ta réponse.

A apprendre

Propriétés de la fonction sinus

Si f est une fonction telle que $f(\theta) = \sin\theta$, alors :

- ★ le domaine de définition de la fonction sinus est]- ∞ ; + ∞[et son ensemble image est [- 1, 1]
- ★ la fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π ce qui signifie qu'on peut déplacer la courbe dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers la gauche ou vers la droite de 2π unités, de 4π unités, de 6π unités, ... etc.
- ★ la valeur maximale de la fonction sinus est égale à 1 et on l'obtient aux points d'abscisses $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$
- ★ la valeur minimale de la fonction sinus est égale à - 1 et on l'obtient aux points d'abscisses $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Représentation graphique de la fonction cosinus

Travail collectif

1 Avec tes camarades, complète le tableau suivant :

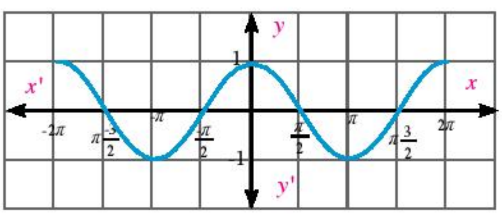
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$	1	0,8							

2 Trace la courbe en joignant tous les points.

3 Dresse un autre tableau en utilisant les opposés des valeurs présentées dans le tableau précédent.

4 Représente tous les points obtenus dans un repère.

5 Complète la courbe représentative en joignant tous les points.



A apprendre

Propriétés de la fonction sinus

Si f est une fonction telle que $f(\theta) = \cos\theta$ alors :

- ★ le domaine de définition de la fonction cosinus est]- ∞ ; + ∞[et son ensemble image est [-1, 1]
- ★ la fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π, ce qui signifie qu'on peut déplacer la courbe dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers la gauche ou vers la droite de 2π unités, de 4π unités, de 6π unités, ... etc.

★ la valeur maximale de la fonction cosinus est égale à 1 et on l'obtient aux points d'abscisses

$\theta = \pm 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

★ la valeur minimale de la fonction cosinus est égale à (- 1) et on l'obtient aux points d'abscisses

$\theta = \pi + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Exemple

1 **Lien avec la physique :** A marrée haute, un navire peut entrer dans un port si la profondeur de l'eau n'est pas inferieure à 10 mètres. Si le mouvement du flux et du reflux suit la relation , $p = 6 \sin (15\ t)^{\circ} + 10$ où t est le temps écoulé en heures après minuit selon le système horaire de 24 heures et p est la profondeur de l'eau. Trouve le nombre de fois où la profondeur de l'eau atteint 10 mètres exactement.

Représente graphiquement la relation qui montre le changement de la profondeur de l'eau pendant le flux et le reflux durant un jour.

Solution

La relation entre t en heures et la profondeur P en mètres est

$p = 6 \sin (15\ t)^{\circ} + 10$

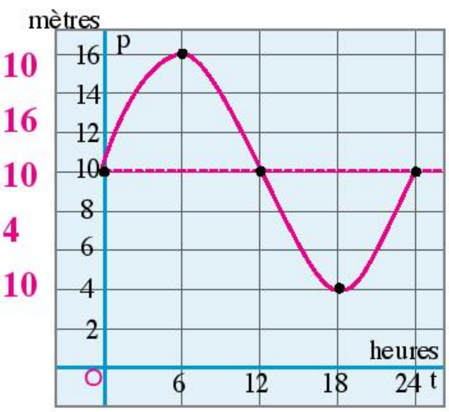
Pour t = 0 $\quad p = 6 \sin (15 \times 0) + 10 \quad = 6 \sin 0 + 10 \quad = \mathbf{10}$

Pour t = 6 $\quad p = 6 \sin (15 \times 6) + 10 \quad = 6 \sin 90^{\circ} + 10 \quad = \mathbf{16}$

Pour t = 12 $\quad p = 6 \sin (15 \times 12) + 10 \quad = 6 \sin 180^{\circ} + 10 \quad = \mathbf{10}$

Pour t = 18 $\quad p = 6 \sin (15 \times 18) + 10 \quad = 6 \sin 270^{\circ} + 10 \quad = \mathbf{4}$

Pour t = 24 $\quad p = 6 \sin (15 \times 24) + 10 \quad = 6 \sin 360^{\circ} + 10 \quad = \mathbf{10}$



t en heures	0	6	12	18	24
P en mètres	10	16	10	4	10

Dans le tableau, on trouve que la profondeur de l'eau atteint 10 mètres si t = 10, 12 et 24 heures

Essaie de résoudre

1 Dans l'exemple précédent, trouve le nombre d'heures d'un jour pendant lesquelles le navire peut entrer dans le port

Test de compréhension

1 Trace la courbe représentative de la fonction $y = 3 \sin x$ où $x \in [0, 2\pi]$

2 Trace la courbe représentative de la fonction $y = 2\cos x$ où $x \in [0, 2\pi]$

(1) Complète ce qui suit :

1. L'ensemble image de la fonction f telle que $f(\theta) = \sin\theta$ est ....
2. L'ensemble image de la fonction f telle que $f(2 = (\theta \sin\theta$ est ....
3. La valeur maximale de la fonction g telle que $g(4 = (\theta \sin\theta$ est ....
4. La valeur minimale de la fonction h telle que $h(3 = (\theta \cos\theta$ est ....

(2) Ecris l'expression algébrique de chacune des fonctions trigonométriques suivantes :

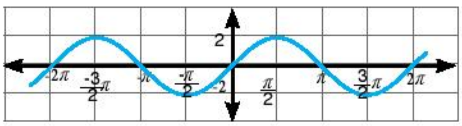


Figure (1) : L'expression algébrique est

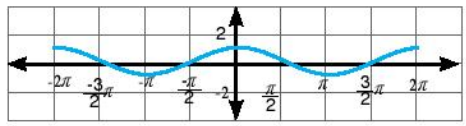


Figure (2) : L'expression algébrique est

(3) Réponds aux questions suivantes :

5. Détermine la valeur maximale, la valeur minimale et l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

   A) $y = \sin\theta$

   ....

   B) $y = 3\cos\theta$

   ....

   C) $y = \frac{3}{2}\sin\theta$

   ....

Trouver la mesure d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques

4 - 6

You will Learn

- Trouver la mesure d'un angle en connaissant une fonction trigonométrique.

Key - Terms

- Fonction trigonométrique

Learning tools

- Fonction trigonométrique

Réfléchis et discute

On sait que si $y = \sin\theta$, alors on peut trouver la valeur de y en connaissant la valeur de θ, En connaissant une valeur de y, peut-on également trouver la valeur de θ ?

A apprendre

Si $y = \sin\theta$, **alors** $\theta = \sin^{-1} y$

Par exemple, si θ est un angle aigu positif et si $y = \frac{1}{2}$,

alors cette relation s'écrit $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$

Exemple

1 Trouve θ tel que $0° < \theta < 360°$ qui vérifie chacun des cas suivants :

A $\theta = \sin^{-1} 0,6325$ **B** $\theta = \text{cotg}^{-1} (-1,6204)$

Solution

A $\because \sin\theta > 0$

$\therefore$ l'angle est situé au premier ou au deuxième quadrant.

En utilisant une calculatrice :

SHIFT sin⁻¹ 0 . 6 3 2 5 = °'''

Dans le premier quadrant : $\theta = 39°\ 14'\ 6''$

Dans le deuxième quadrant : $\theta = 180° - 39°\ 14'\ 6'' = 140°\ 45'\ 54''$

B $\because \text{cotg}\,\theta < 0$

$\therefore$ l'angle est situé au deuxième ou au quatrième quadrant.

En utilisant une calculatrice :

SHIFT tan⁻¹ 1 . 6 2 0 4 x⁻¹ = °'''

Dans le deuxième quadrant $\theta = 180° - 31°\ 40'\ 48'' = 148°\ 19'\ 12''$

Dans le quatrième quadrant $\theta = 360° - 31°\ 40'\ 48'' = 328°\ 19'\ 12''$

Peux-tu vérifier ses réponses en utilisant une calculatrice ?

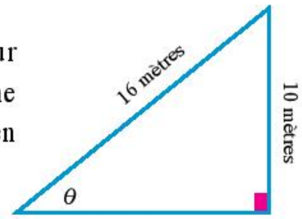
Essaie de résoudre

1 Trouve θ tel que $0° < \theta < 360°$ qui vérifie chacun des cas suivants :

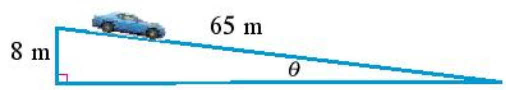
A $\cos\theta = 0{,}6205$ **B** $\text{tg}\,\theta = (-2{,}3615)$ **C** $\text{cosec}\,\theta = (-2{,}1036)$

Test de compréhension

1 **Lien avec les jeux sportifs :** Dans un parc d'attraction, la hauteur d'un toboggan est 10 mères et sa longueur est 16 mètres, écris une fonction trigonométrique permettant de trouver la valeur de θ , en degrés à un millième près.

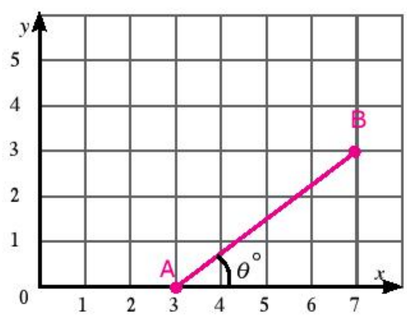


2 **Voitures :** En voiture, Karim se dirige ver le bas d'une descente de longueur 65 mètres et de hauteur 8 mètres. Si la descente fait avec l'horizontale un angle de mesure θ calcule en degrés la valeur de θ.



3 **Réflexion critique :** La figure ci-contre, représente un segment reliant deux points A(3, 0), B (7, 3), Trouve la mesure de l'angle formé entre $\overline{AB}$ et l'axe des abscisses .

4 **Réflexion critique :** La figure ci-contre, représente un segment reliant deux points A(3, 0), B (7, 3), Trouve la mesure de l'angle formé entre $\overline{AB}$ et l'axe des abscisses .



Exercices 4-6

(1) Questions à choix multiples :

1. Si $\sin\ 0{,}4325 = \theta$ où θ est la mesure positive d'un angle aigu, alors $\theta =$
   - A) 25,626°
   - B) 64,347°
   - C) 32,388°
   - D) 46,316°

2. Si $\text{tg}\ 1{,}8 = \theta$ où $90° \leqslant \theta \leqslant 360°$, alors $\theta =$
   - A) 60,945°
   - B) 119,055°
   - C) 240,945°
   - D) 299,055°

(2) Réponds aux questions suivantes :

1. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dans chacun des cas suivants :
   - A) $B\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   - B) $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   - C) $B\left(-\frac{6}{10} ; \frac{8}{10}\right)$

2. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule $\sec\theta$ et $\text{cosec}\,\theta$ dans chacun des cas suivants :
   - A) $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   - B) $B\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} ; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
   - C) $B\left(-\frac{5}{13} ; -\frac{12}{13}\right)$

3. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule $\text{tg}\,\theta$ et $\text{cotg}\,\theta$ dans chacun des cas suivants :
   - A) $B\left(\frac{1}{\sqrt{10}} ; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
   - B) $B\left(\frac{3}{\sqrt{34}} ; -\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$
   - C) $B\left(-\frac{4}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$

4. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule θ où $0° < \theta < 360°$ dans chacun des cas suivants :
   - A) $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$
   - B) $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   - C) $B\left(\frac{6}{10} ; \frac{-8}{10}\right)$

5. Trouve en degré la mesure du plus petit angle positif qui vérifie ce qui suit :
   - A) $\sin^{-1} 0{,}6$
   - B) $\cos^{-1} 0{,}436$
   - C) $\text{tg}^{-1} 1{,}4552$
   - D) $\sec^{-1} (-2{,}2364)$
   - E) $\text{cotg}^{-1} 3{,}6218$
   - F) $\text{cosec}^{-1} (-1{,}6004)$

6. Si $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, trouve la mesure de l'angle θ dans chacun des cas suivants :
   - A) $\sin^{-1} (0{,}2356)$
   - B) $\cos^{-1} (-0{,}642)$
   - C) $\text{tg}^{-1} (-2{,}1456)$

7 Si $\sin\theta = \frac{1}{3}$ et $90° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

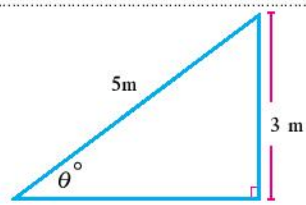
A calcule la mesure de l'angle θ à une seconde près.

B trouve la valeur de $\cos\theta$, $\text{tg}\,\theta$ et $\sec\theta$.

....

....

8 **Echelle :** Une échelle de 5 mètres de long repose sur un mur vertical. Si la hauteur du sommet de l'échelle par rapport à la surface de la terre est égale à 3 mètres, trouve en radians la mesure de l'angle d'inclinaison de l'échelle sur l'horizontale.

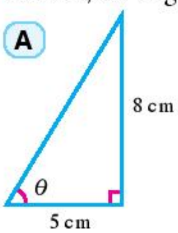


....

....

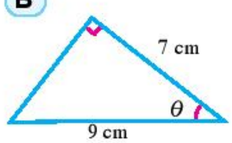
9 Trouve, en degrés, la mesure de l'angle θ dans chacun des cas suivants :

A



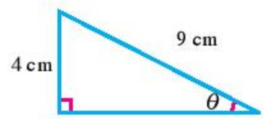
....

B



....

C



....

Mathématiques

Livre de l'élève

Première secondaire **Premier semestre**

- Se rivaliser soi-même c´est la préférable rivalité.
- Qui est digne de confiance en Dieu, sera enrichi et qui se confie en lui sera aisé.
- Qui vit en peur, il ne sera jamais libre.
- Vanter ton ami Publiquement et le blâmer secrètement.
- Choisir tes mots avant de parler.
- Les Peuples seulement sont capable de se libérer eux-même et de réaliser leurs rêves.

Mathématiques

Livre de l'élève

Première secondaire **deuxième semestre**

- Se rivaliser soi-même c´est la préférable rivalité.
- Qui est digne de confiance en Dieu, sera enrichi et qui se confie en lui sera aisé.
- Qui vit en peur, il ne sera jamais libre.
- Vanter ton ami Publiquement et le blâmer secrètement.
- Choisir tes mots avant de parler.
- Les Peuples seulement sont capable de se libérer eux-même et de réaliser leurs rêves.