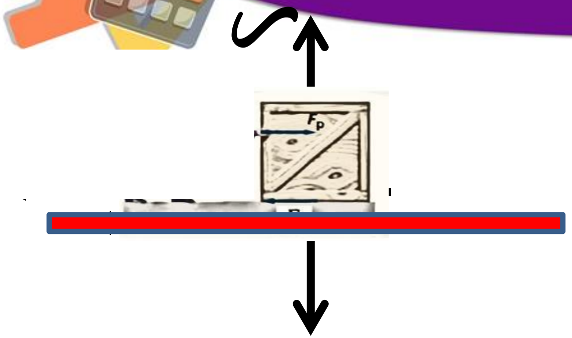
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني
MINISTRY OF EDUCATION AND TECHNICAL EDUCATION

رياضيات

الصف الثالث الثانوي

مفاهيم الرياضيات التطبيقية

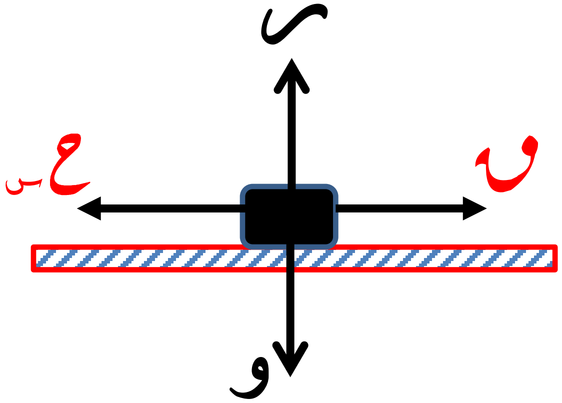
الاحتكاك



اتزان جسم على مستوى افقي خشن

قوة الاحتكاك السكوني (ح)

هي قوة كامنة لا تظهر إلا عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن و يرمز لها بالرمز (ح)



قوة الاحتكاك السكوني النهائي (ح س)

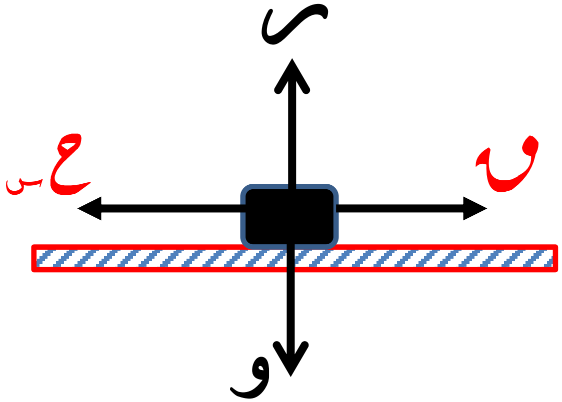
عندما يصبح الجسم على وشك الحركة تصل قوة الاحتكاك الى قيمتها العظمى و تسمى قوة الاحتكاك السكوني و يرمز لها بالرمز ح س

الاحتكاك

معامل الاحتكاك السكوني النهائي ($م_س$)

هي النسبة بين قوة الاحتكاك السكوني النهائي و رد الفعل العمودي وقيمتها ثابتة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين

أي أن $م_س = \frac{ح_س}{ر}$ $\therefore$ $ح_س = م_س \, ر$

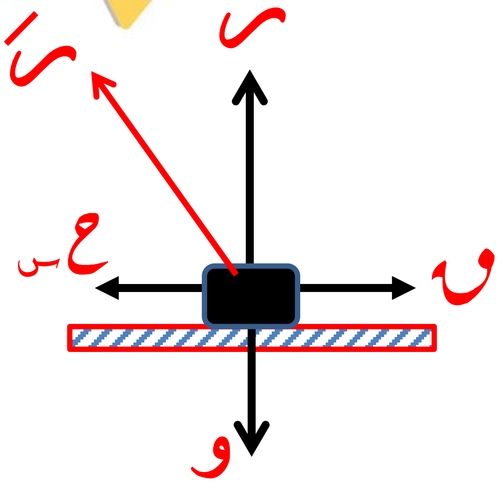


ملحوظة هامة

قوة الاحتكاك $ح \in [\,٠ ، م_س \, ر\,]$ وعند تأثير قوة تكون $ح \in [\,٠ ، م_س \, ر\,]$

الاحتكاك

رد الفعل المحصل (الكلي)



هو محصلة كل من رد الفعل العمودي ر

وقوة الاحتكاك ح ويرمز له بالرمز رَ

أي أن $\text{رَ} = \sqrt{\text{ر}^{2} + \text{ح}^{2}}$

وفي حالة الاحتكاك السكوني النهائي $\text{رَ} = \sqrt{\text{ر}^{2} + \text{ح}_{\text{س}}^{2}}$

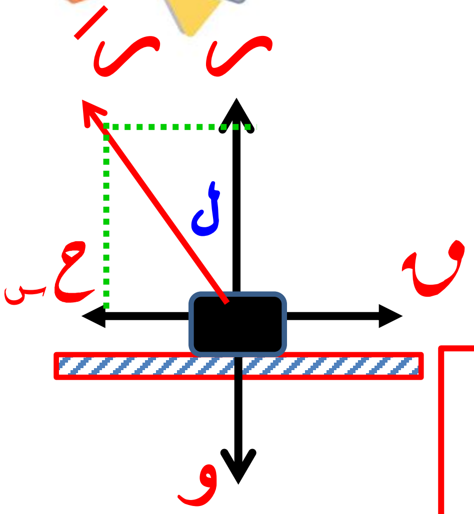
$\therefore \text{رَ} = \sqrt{\text{ر}^{2} + \text{م}_{\text{س}}^{2}\,\text{ر}^{2}}$

$\therefore \text{رَ} = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}_{\text{س}}^{2}}$

الاحتكاك

زاوية الاحتكاك (ل)

هي الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ر
ورد الفعل المحصل ر/ عند الاحتكاك النهائي



ونلاحظ ان $\text{طال} = \dfrac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}} = \text{م}_{\text{س}}$

أي أن $\text{م}_{\text{س}} = \text{طال}$

(عند الاحتكاك النهائي)

$$\because \text{ر}' = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}_{\text{س}}^{2}} = \text{ر}\sqrt{1 + \text{ظا}^{2}\text{ل}} = \text{ر}\sqrt{\text{قا}^{2}\text{ل}} = \text{ر قا ل}$$

الاحتكاك

ملحوظة :

لتحديد ما اذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا

(نقارن بين ح ، $م_{س}$ ر)

ح < $م_{س}$ ر ساكن و مستقر	ح = $م_{س}$ ر على وشك الحركة

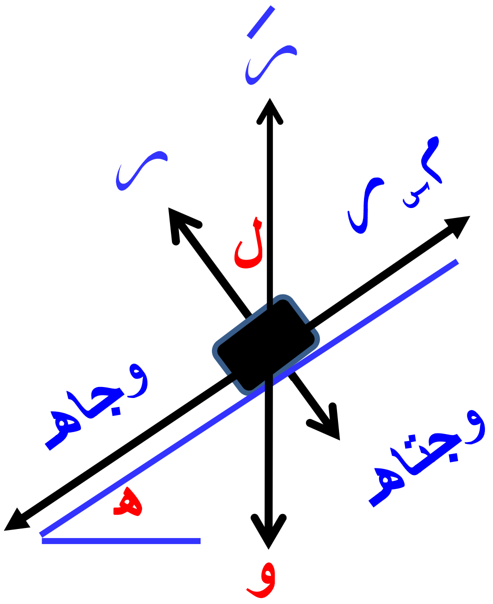
الاحتكاك

ملحوظة هامة :

١ إذا كانت هـ = ل فإن الجسم على المستوى يكون على وشك الحركة

٢ إذا كانت هـ < ل فإن الجسم على المستوى يكون ساكن و مستقر (ليس على وشك الحركة)

٣ إذا كانت هـ > ل فإن الجسم لا يمكن أن يكون متزن على المستوى (متحرك لأسفل)



الاحتكاك

ملحوظات هامة :

❶ أقل قوة موجهة نحو المستوى لأعلى و تحفظ توازن الجسم

(هي التي تمنعه من الانزلاق) أي مس ر لأعلى

❷ أكبر قوة موجهة نحو المستوى لأعلى و تحفظ توازن الجسم

(هي التي تجعله على وشك الحركة لأعلى) أي مس ر لأسفل

❸ لتحديد ما اذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا (نقارن بين ح ، مس ر)

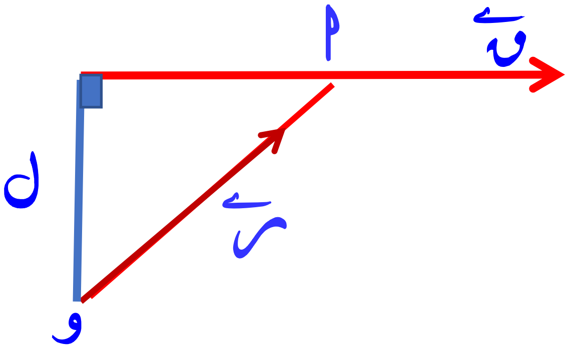
ح < مس ر ساكن	ح = مس ر و شك	ح > مس ر متحرك لأسفل

العزوم

عزم قوة حول نقطة

يعرف عزم القوة $\overline{ق}$ حول النقطة (و) بأنه مقدرة القوة $\overline{ق}$ على احداث دوران للجسم حول نقطة و ويمكن حساب هذا التأثير الدوراني من العلاقة

$$\boxed{\overline{\text{ج}}_{\text{و}} = \overline{\text{ر}} \times \overline{\text{ق}}}$$



$$\therefore \text{ل} = \frac{\|\overline{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overline{\text{ق}}\|} = \frac{\|\text{العزم}\|}{\|\text{القوة}\|}$$

حيث ل هو طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة و يسمى ذراع العزم

العزوم

ملحوظة هامة :

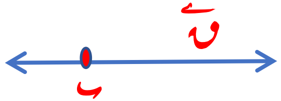
١) يتوقف العزم على { مقدار القوة
بعد خط عمل القوة عن مركز العزم

٢) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_1 ، \text{أ}_2)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_1 ، \text{ب}_2)$

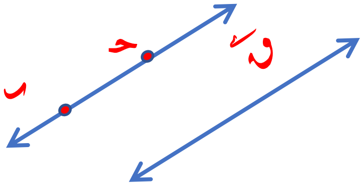
فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)\ \overrightarrow{\text{ع}}$

حيث $\overrightarrow{\text{ع}}$ متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

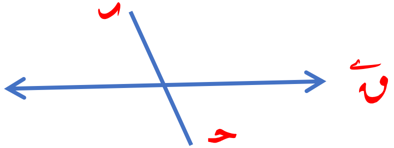
٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}} = \overrightarrow{0}$ $\Longleftarrow$ خط عمل القوة يمر بنقطة ب



٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{جـ}}$ $\Longleftarrow$ خط عمل القوة // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$



٥) إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{جـ}}$ $\Longleftarrow$ خط عمل القوة ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$



العزوم

عزم قوة حول نقطة في الفراغ

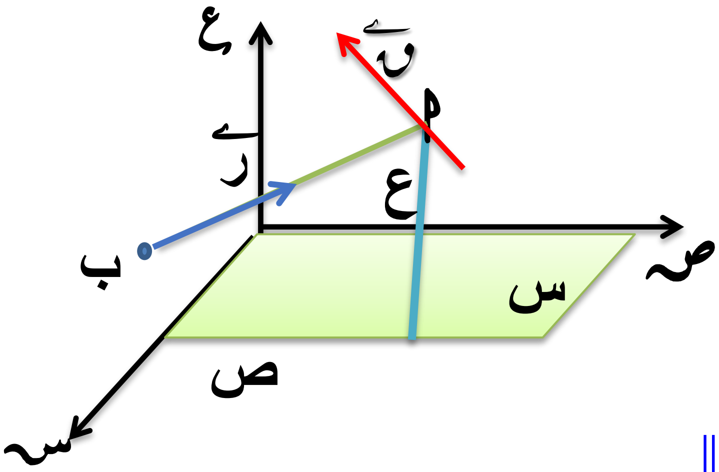
إذا كانت $\vec{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}}\text{، } \text{ق}_{\text{ص}}\text{، } \text{ق}_{\text{ع}})$ تؤثر في نقطة م فإن

عزم $\vec{\text{ق}}$ حول ب يساوي $\vec{\text{ع}}_{\text{ب}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ق}}$

حيث $\vec{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{بم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ب}} = (\text{س، ص، ع})$

$$\therefore \vec{\text{ع}}_{\text{ب}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

ويكون طول العمود الساقط من ب على خط عمل $\vec{\text{ق}}$ هو $\text{ل} = \dfrac{\|\vec{\text{ع}}\|}{\|\vec{\text{ق}}\|}$



العزوم

المركبات الإحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة

إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}} \text{ ، } \text{ق}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{ق}_{\text{ع}})$ تؤثر في نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل

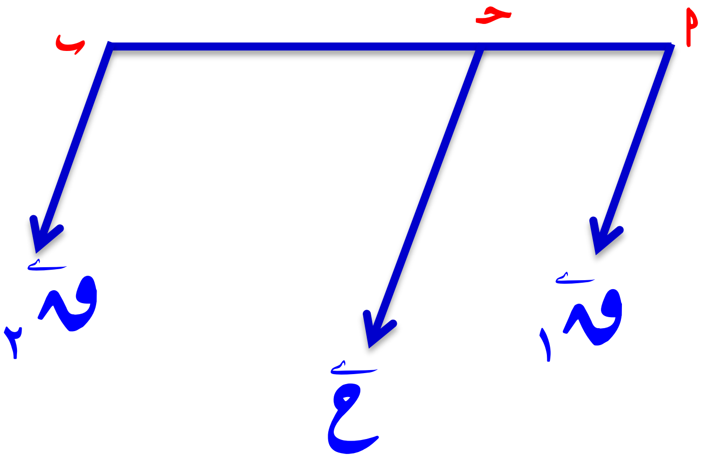
حيث $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س ، ص ، ع})$ فإن عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول النقطة الأصل و يساوي

$$\therefore \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{[\text{ص ق}_{\text{ع}} - \text{ع ق}_{\text{ص}}]}_{\text{مركبة العزم في اتجاه محور س}} \hat{\text{س}} - \underbrace{[\text{س ق}_{\text{ع}} - \text{ع ق}_{\text{س}}]}_{\text{مركبة العزم في اتجاه محور ص}} \hat{\text{ص}} + \underbrace{[\text{س ق}_{\text{ص}} - \text{ص ق}_{\text{س}}]}_{\text{مركبة العزم في اتجاه محور ع}} \hat{\text{ع}}$$

القوى المتوازية

محصلة قوتين متوازيتين مستويتين



١) القوتان في نفس الاتجاه

$$\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٢}$$

واتجاهها (في نفس اتجاه القوتين)

$$\text{ح} = \text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢}$$

نقطة تأثير المحصلة جـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بحيث

$$\text{ق}_{١} \times \text{أ جـ} = \text{ق}_{٢} \times \text{ب جـ}$$

القوى المتوازية

القوتان متضادتان في الاتجاه

المحصلة (ح) = |ق١ − ق٢| (في اتجاه القوة الأكبر)

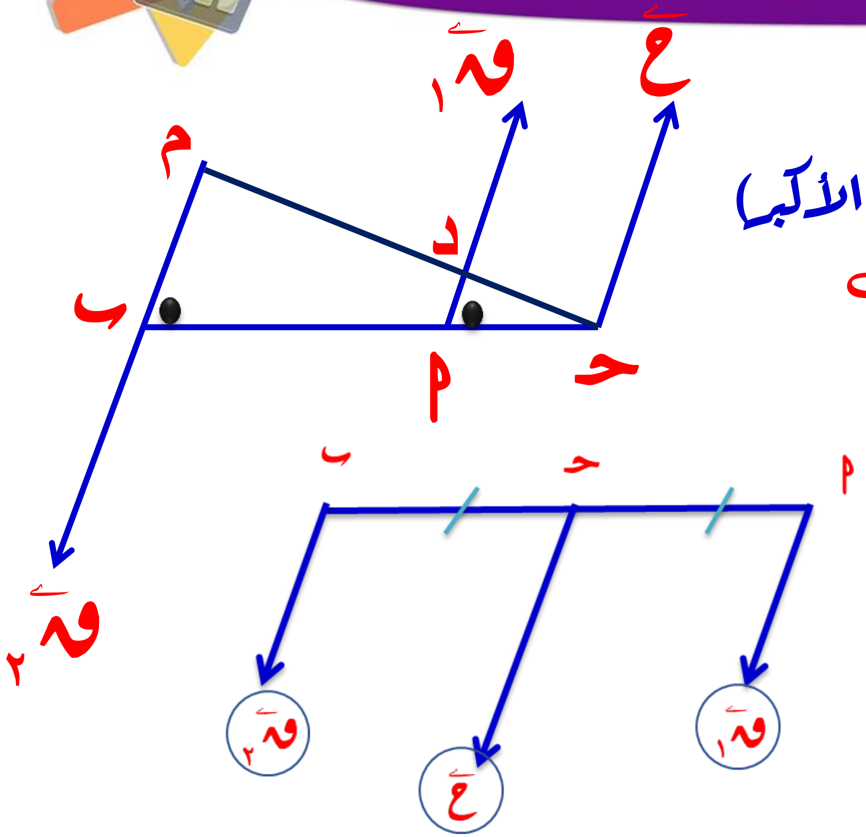
نقطة تأثير المحصلة ج تقسم أ ب من الخارج بحيث

ق١ × أ ج = ق٢ × ب ج

وإذا كانت القوتان ق١ ، ق٢ متحدتي الاتجاه

ومقدار كل منهما يساوي ق فإن

- مقدار المحصلة ح = ٢ ق
- اتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوتين
- نقطة تأثير المحصلة : ج ينصف اب



القوى المتوازية

محصلة عدة قوى متوازية مستوية - واتزانها

لتعيين محصلة عدة قوى $\overrightarrow{\text{ق}}_{1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{2}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{3}$ ، .... $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$

فإن : مقدار واتجاه المحصلة يتعين من العلاقة

$$\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{1} + \overrightarrow{\text{ق}}_{2} + \overrightarrow{\text{ق}}_{3} + \ldots\ldots + \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$$

ونقطة تأثير المحصلة تتعين باستخدام

نظرية العزوم (المجموع الجبري لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول نقطة في مستويها يساوي عزم محصلتها حول نفس النقطة)

القوى المتوازية

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

شروط توازن عدة قوى متوازية مستوية

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن

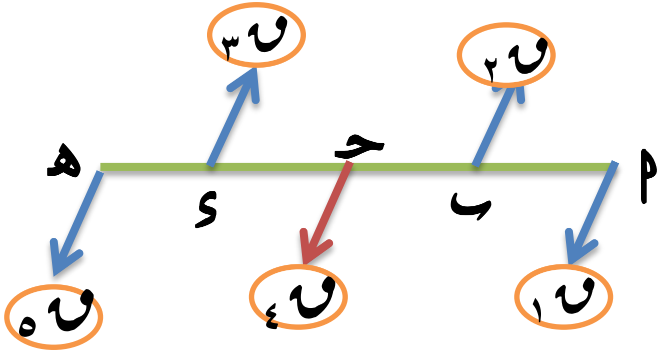
١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوي صفرا

٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أية نقطة في مستويها = صفرا

$\vec{ح} = ٠$ أي أن

$\vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢} + \vec{ق}_{٣} + \vec{ق}_{٤} + \vec{ق}_{٥} = \vec{٠}$

ج (حول أي نقطة) = ٠



الاتزان العام

تعريف

مجموعة القوى المستوية المتوازنة

هي مجموعة القوي التي محصلتها منعدمة أي أن $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{٠}}$

وينعدم عزمها حول أي نقطة في مستواها أي أن $\vec{\text{ج}} = \vec{\text{٠}}$

الجسم المتزن

هو الجسم المؤثر علية مجموعة من القوى المستوية المتوازنة

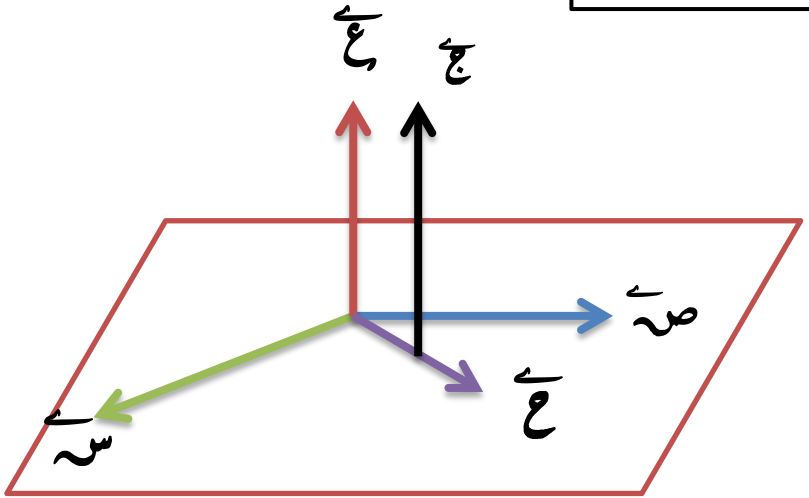
أي أثرت عليه مجموعة من القوى المستوية بشرطين

١) $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{٠}}$ ٢) $\vec{\text{ج}}$ (حول أي نقطة في مستويها) $= \vec{\text{٠}}$

الاتزان العام

الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية

إذا كانت ح محصلة القوى في المستوى وكانت س ، ص مركبتيها المتعامدتين فإن متجه عزم القوي جـ يكون عموديا على ح كما بالشكل



ويكون شروط الاتزان

س = ص = ٠ $\Longleftarrow$ ح = ٠ حيث

س = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة في اتجاه س

ص = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة في اتجاه ص

جـ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى منسوبة لمتجه الوحدة ع

الاتزان العام

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل

١) إذا ارتكز قضيب على مستوى أملس

رد الفعل عموديا على المستوى (ر١)

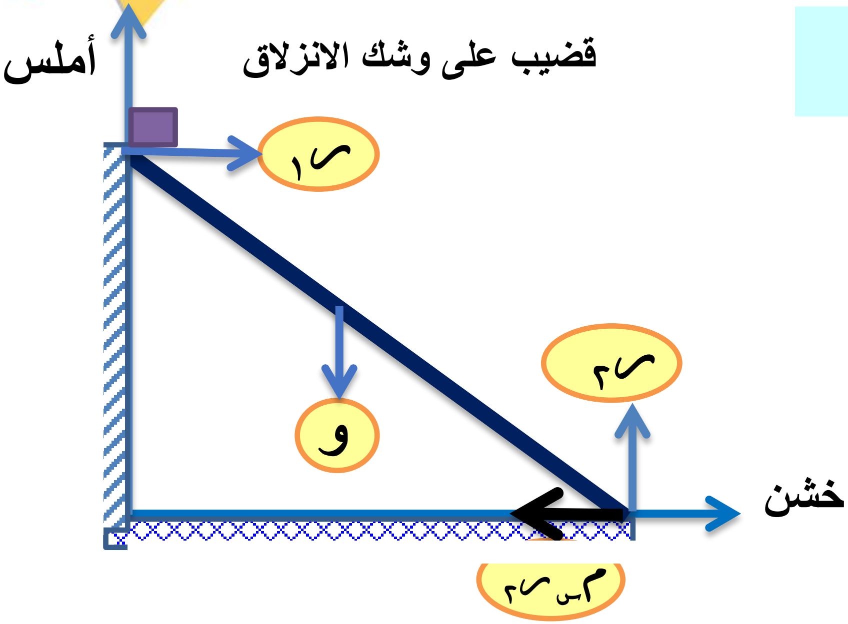
٢) إذا ارتكز قضيب على مستوى خشن

رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن

تحليله إلى مركبتين هما

رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك

(ر٢ ، مس ر٢)



الاتزان العام

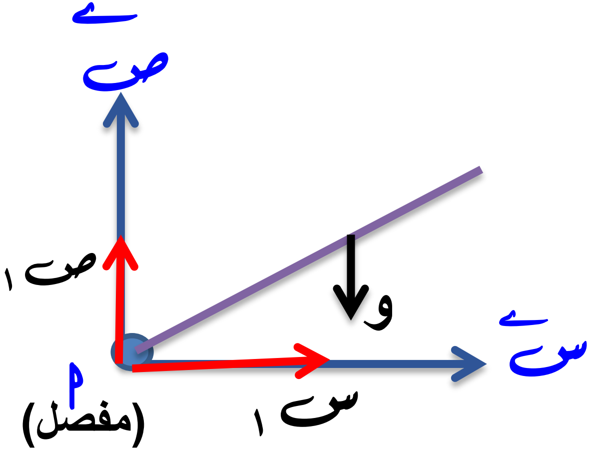
٣) رد فعل المفصل

يكون غير معلوم الاتجاه

ويمكن تحليله إلى مركبتين هما

س$_{1}$ في اتجاه أ$\overrightarrow{\text{س}}$ ، ص$_{1}$ في اتجاه أ $\overrightarrow{\text{ص}}$

ر^{2} = س^{2} + ص^{2} حيث ر رد فعل المفصل



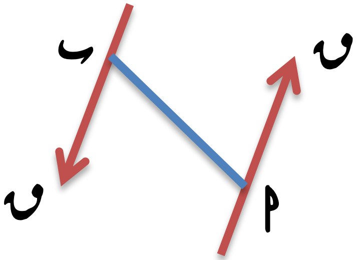
الازدواج

تعريف الازدواج : هو مجموعة تتكون من قوتين :

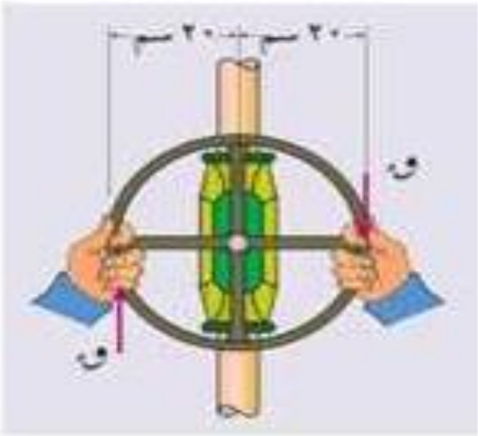
١) متساويتين في المعيار

٢) متضادتين في الاتجاه

٣) لا يجمعهما خط عمل واحد

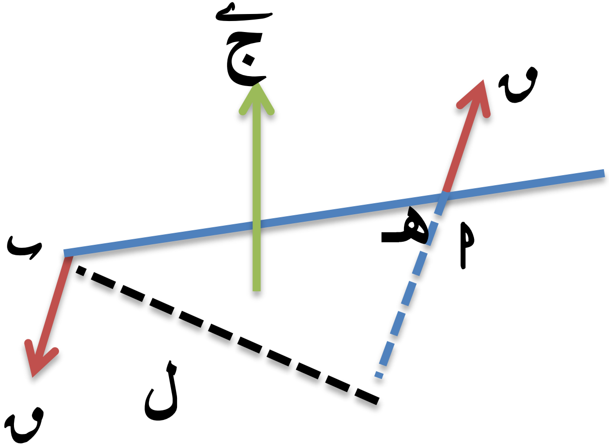


نماذج حياتية



الازدواج

نظرية : عزم الازدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على نقطة التي تنسب إليها عزمي قوتيه ، وهو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى



$$\vec{ج} = \vec{ر} \times \vec{ق}$$

$$\|\vec{ج}\| = \|\overrightarrow{بأ}\| \times \|\vec{ق}\|$$

$$= بأ \times ق \times جا\,هـ$$

$$= ق \times ل$$

الازدواج

معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج
يكون متجه عزم الازدواج عموديا على المستوى الذي يجمع خطي عمل القوتين
القياس الجبري لعزم الازدواج تتحدد اشارته (حسب اتجاه الدوران)

الازدواج

تعريف : تكافؤ ازدواجين

يقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهي عزميهما

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر

تعريف

يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفري

إذا كان $\overline{\text{ج}}_1$ ، $\overline{\text{ج}}_2$ عزمي الازدواجين ، فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير الازدواجين هو $\overline{\text{ج}}_1 + \overline{\text{ج}}_2 = \overline{\text{و}}$

الازدواج

تذكر أن

الازدواج المحصل

مجموع أي عدد من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوي مجموع عزوم هذه الازدواجات أي أن $\vec{ج}$ (الازدواج المحصل) $= \vec{ج}_{١} + \vec{ج}_{٢} + \cdots + \vec{ج}_{ن}$

ملاحظات

إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية $= \vec{ح}$ ومجموع عزومها حول نقطة في مستويها $\vec{ج}$

وكان ١) $\vec{ح} = \vec{و}$ ، $\vec{ج} = \vec{و}$ فإن المجموعة متزنة

٢) $\vec{ح} = \vec{و}$ ، $\vec{ج} \neq \vec{و}$ فإن المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه $= \|\vec{ج}\|$

الازدواج

تذكر أن

الازدواج المحصل

مجموع أي عدد من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوي مجموع عزوم هذه الازدواجات أي أن $\vec{\text{ج}}$ (الازدواج المحصل) $= \vec{\text{ج}}_{1} + \vec{\text{ج}}_{2} + \cdots + \vec{\text{ج}}_{\text{ن}}$

ملاحظات

إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية $= \vec{\text{ح}}$ ومجموع عزومها حول نقطة في مستويها $\vec{\text{ج}}$

وكان ١) $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{ج}} = \vec{\text{و}}$ فإن المجموعة متزنة

٢) $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{ج}} \neq \vec{\text{و}}$ فإن المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه $= \|\vec{\text{ج}}\|$

الازدواج

تابع الملاحظات

٣) إذا أثرت ثلاث قوى مستوية (أو أكثر) في جسم متماسك ومثلها تمثيلا تاما أضلاع مثلث (أو مضلع مقفل) مأخوذة في ترتيب دوري واحد ، كانت المجموعة تكافئ

ازدواجا معيار عزمه = ٢ (مساحة سطح لمثلث أو المضلع) × $\dfrac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$

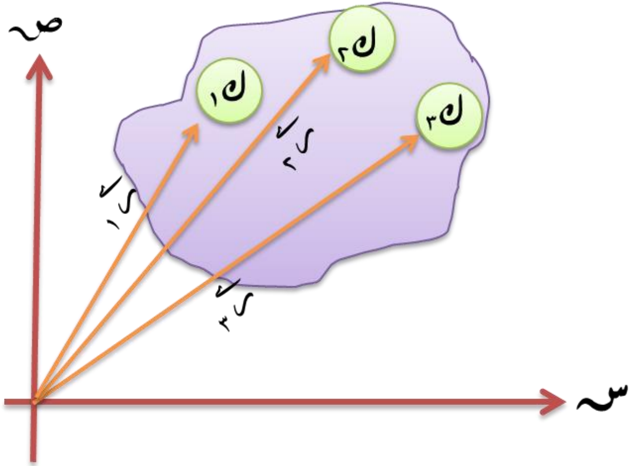
٤) لأى ثلاث نقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة إذا أثرت مجموعة من القوى في مستويها وكان جـ$_{أ}$ = جـ$_{ب}$ = جـ$_{حـ}$ = مقدار ثابت (لا يساوي صفر) فإن المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه = المقدار الثابت

٥) وإذا كان جـ$_{أ}$ = جـ$_{ب}$ = جـ$_{حـ}$ = ٠ فإن المجموعة متزنة

مركز الثقل

مركز الثقل لجسم جاسئ بالنسبة لنقطة الأصل

إذا كانت $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، .... ، $\text{ك}_{ن}$ هي كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\vec{\text{ر}}_{١}$ ، $\vec{\text{ر}}_{٢}$ ، .... ، $\vec{\text{ر}}_{ن}$ هي متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل فإن متجه موضع مركز الثقل $\vec{\text{ر}}_{م}$ بالنسبة لنفس نقطة الأصل يتحدد من العلاقة :



$$\vec{\text{ر}}_{م} = \frac{\text{ك}_{١}\,\vec{\text{ر}}_{١} + \text{ك}_{٢}\,\vec{\text{ر}}_{٢} + \cdots + \text{ك}_{ن}\,\vec{\text{ر}}_{ن}}{\text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢} + \cdots + \text{ك}_{ن}}$$

مركز الثقل

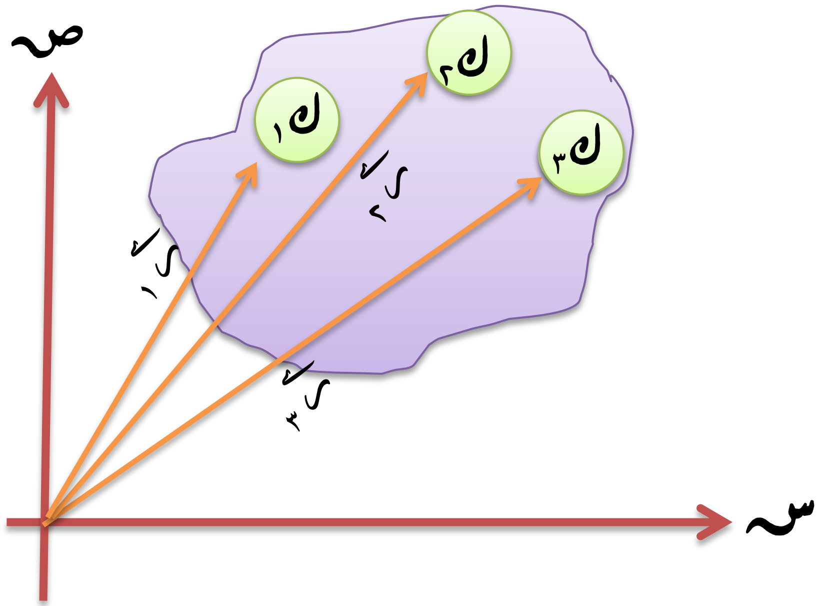
ملاحظة يمكن كتابة

$$\overrightarrow{\text{ر}}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}}_1 + \text{ك}_2 \overrightarrow{\text{ر}}_2 + \cdots + \text{ك}_{\text{ن}} \overrightarrow{\text{ر}}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \cdots + \text{ك}_{\text{ن}}}$$

على الصورة

$$\text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \text{س}_1 + \text{ك}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{ك}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \cdots + \text{ك}_{\text{ن}}}$$

$$\text{ص}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \text{ص}_1 + \text{ك}_2 \text{ص}_2 + \cdots + \text{ك}_{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \cdots + \text{ك}_{\text{ن}}}$$



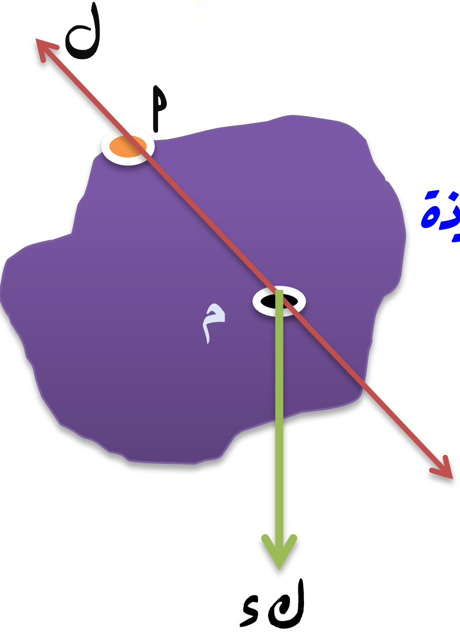
مركز الثقل

مركز ثقل الجسم المنتظم الكثافة

الجسم المنتظم الكثافة :
هو الجسم الذي تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أي جزء منه ثابتة

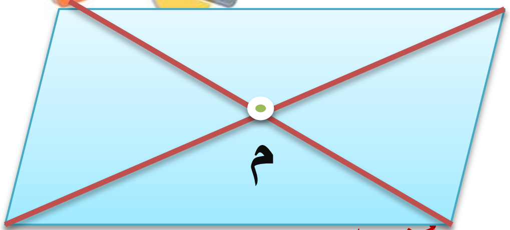
مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقا حرا يقع على الخط الرأسي المار بنقطة التعليق

إذا كان نقطة التعليق الحر أ ، مركز الثقل م فإن الخط الرأسي ل يمر بالنقطة م

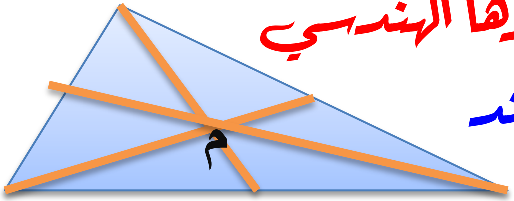


مركز الثقل

حالات خاصة لمركز الثقل :



- مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند منتصفه
- مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل متوازي أضلاع أو أحدى حالاته الخاصة (مربع – مستطيل – معين) يقع عند مركزها الهندسي



- ❑ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقي متوسطات هذا المثلث
- ❑ وينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث

- ❑ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع عند مركزها

الأستاذ / مجدي إمام
موجه الرياضيات بالوزارة

مع تمنياتنا بالتوفيق
الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني