جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لشئون الكتب

٣

# الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى | كتاب الطالب | الفصل الدراسى الثانى

## تأليف

الأستاذ/ عمر فؤاد جاب الله

الأستاذ الدكتور/ عفاف أبو الفتوح صالح
الدكتور/ عصام وصفى روفائيل

الأستاذ/ سيرافيم إلياس إسكندر
الأستاذ/ كمال يونس كبشة

مراجعة

الأستاذ / فتحي أحمد شحاتة
الأستاذ / سمير محمد سعداوي

مراجعة علمية
أ/ جمال الشاهد
مستشار الرياضيات

تحرير واخراج مركز تطوير المناهج

طبعة ٢٠٢١-٢٠٢٢

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى

# مقدمة الكتاب

## أبناءنا الأعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم، وما سبق أن درستموه فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة و الحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات :

يوجد تمارين على كل درس ، وتمارين عامة على الوحدة ، ونشاط خاص بالوحدة ، واختبار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى يوجد نماذج امتحانات تساعد على مراجعة المقرر كاملًا.

**نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.**

**المؤلفون**

# المحتويات

## الجبر

### الوحدة الأولى : المعادلات



### الوحدة الثانية : الدوال الكسرية والعمليات عليها



## الاحتمال

### الوحدة الثالثة : الاحتمال



## الهندسة

### الوحدة الرابعة :



### الوحدة الخامسة : الزوايا والأقواس فى الدائرة

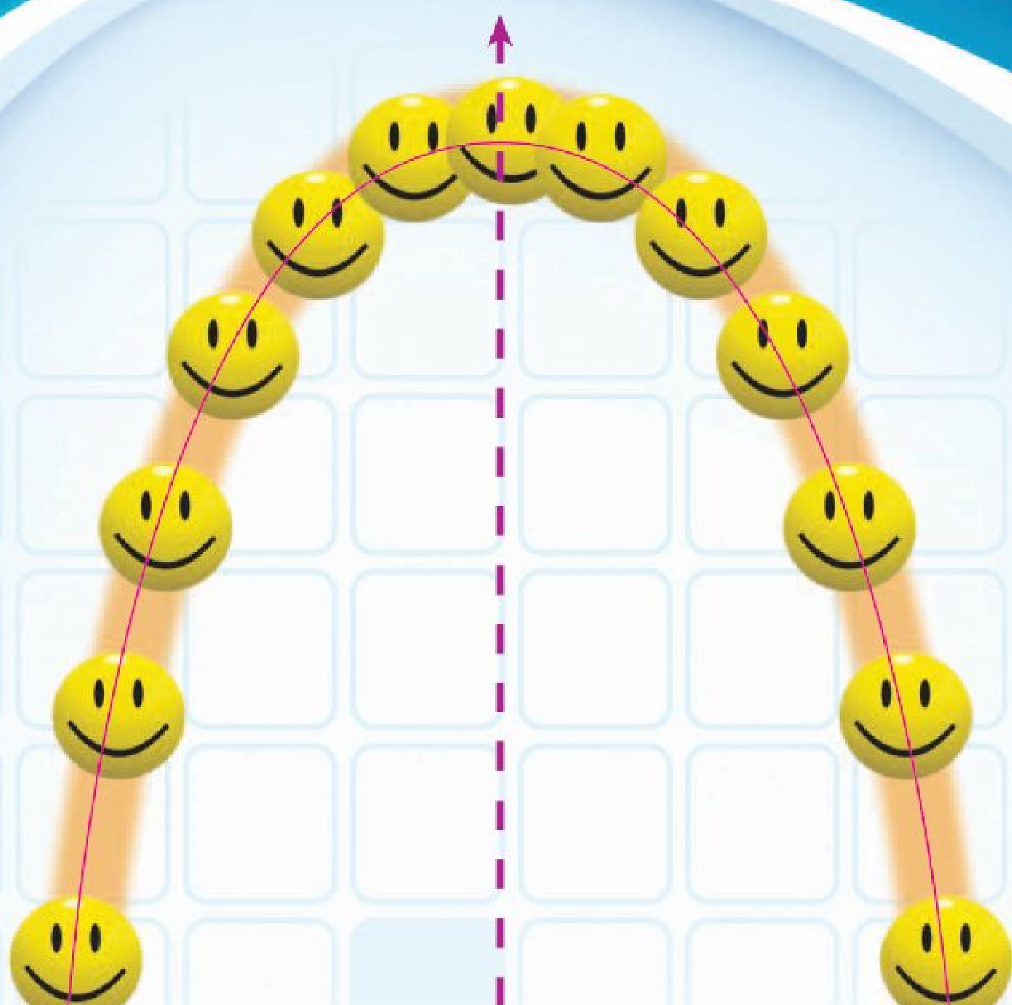
# الرموز الرياضية المستخدمة

| الرمز | يُقرَأ | الرمز | يُقرَأ |
|---|---|---|---|
| ط | مجموعة الأعداد الطبيعية | ⊥ | عمودى على |
| ص | مجموعة الأعداد الصحيحة | // | يوازى |
| ن | مجموعة الأعداد النسبية | $\overline{أب}$ | القطعة المستقيمة أ ب |
| نَ | مجموعة الأعداد غير النسبية | $\overleftarrow{أب}$ | الشعاع أ ب |
| ع | مجموعة الأعداد الحقيقية | $\overleftrightarrow{أب}$ | المستقيم أ ب |
| $\sqrt{أ}$ | الجذر التربيعى للعدد أ | ق (∠ أ) | قياس زاوية أ |
| $\sqrt[3]{أ}$ | الجذر التكعيبى للعدد أ | ق ($\frown{أب}$) | قياس القوس أ ب |
| [أ ، ب] | فترة مغلقة | ~ | تشابه |
| ]أ ، ب[ | فترة مفتوحة | < | أكبر من |
| ]أ ، ب] | فترة نصف مفتوحة | ⩽ | أكبر من أو تساوى |
| [أ ، ب[ | فترة نصف مفتوحة | > | أقل من |
| [أ ، ∞[ | فترة غير محدودة | ⩾ | أقل من أو تساوى |
| ≡ | تطابق | ل(أ) | احتمال وقوع الحدث أ |
| ن (أ) | عدد عناصر الحدث أ | $\overline{س}$ | الوسط الحسابى |
| ف | فضاء العينة | $\sigma$ | الانحراف العيارى |
| | | مجـ أو $\Sigma$ | المجموع |

# الجبر

## المعادلات

## الدوال الكسرية والعمليات عليها



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.

هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

# الوحدة الأولى

## المعادلات

١ - ١

# حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبرياً وبيانياً

## سوف تتعلم

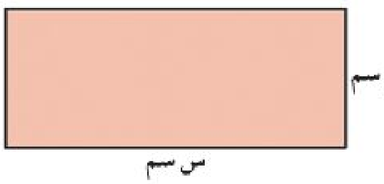
☆ كيفية حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين.

## مصطلحات أساسية

☆ معادلة من الدرجة الأولى.
☆ حل بياني.
☆ حل جبرى.
☆ مجموعة التعويض.
☆ مجموعة الحل.

## فكر وناقش

مستطيل محيطه ٣٠سم ما هى القيم الممكنة لطوله وعرضه




**إذا كان** طول المستطيل = س سم،

عرض المستطيل = ص سم

**فإن :** الطول + العرض = $\frac{١}{٢}$ المحيط

∴ س + ص = ١٥

- تسمى هذه المعادلة معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين .
- حل هذه المعادلة يعنى إيجاد زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق المعادلة.

**هل يمكن أن يكون (-٥، ٢٠) حلا للمعادلة السابقة.**
**نترك لك عزيزى الطالب الإجابة على هذا السؤال بعد عرض الآتى:**

- يمكن حل المعادلة بوضعها على إحدى الصورتين.

(١) ص = ١٥ - س أو (٢) س = ١٥ - ص

وبإعطاء أحد المتغيرين أى قيمة يمكن حساب قيمة المتغير الآخر.

فإذا كان س ∈ ح فإن مجموعة التعويض هى ح × ح ويكون لمعادلة الدرجة الأولى عدد غير منته من الحلول التى كل منها على صورة زوج مرتب (س، ص) حيث مسقطه الأول س ومسقطه الثانى ص.

عند س = ٨ ∴ ص = ١٥ - ٨ = ٧ ∴ (٨، ٧) حل للمعادلة

عند س = ٩,٥ ∴ ص = ١٥ - ٩,٥ = ٥,٥ ∴ (٩,٥، ٥,٥) حل للمعادلة

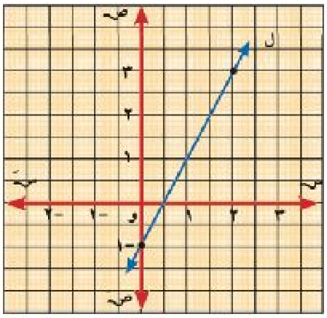
عند س = ٤$\sqrt{٧}$ ∴ ص = ١٥ - ٤$\sqrt{٧}$ ∴ (٤$\sqrt{٧}$، ١٥ - ٤$\sqrt{٧}$) حل للمعادلة

### أولا : حل معادلات من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا :

## أمثلة

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة ٢س - ص = ١

الحل



نكتب المعادلة فى الصورة ص = ٢س - ١

بوضع س = ٠ ∴ ص = -١ ∴ (٠، -١) حل للمعادلة

بوضع س = ٢ ∴ ص = ٣ ∴ (٢، ٣) حل للمعادلة

وبرسم المستقيم ل المار بالنقطتين الممثلتين للزوجين المرتبين (٠، -١)، (٢، ٣)

نجد أن كل نقطة ∈ ل تمثل حلاً للمعادلة

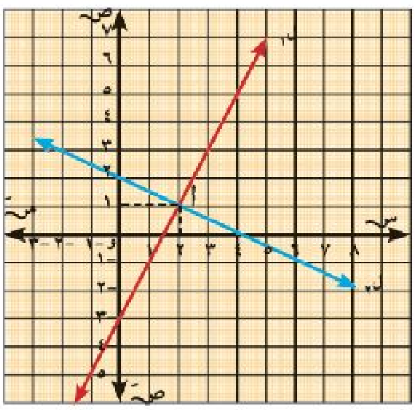
أى أن للمعادلة ٢س - ص = ١ عدد غير منته من الحلول.

اذكر أربعة حلول أخرى لهذه المعادلة.

٢ أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين بيانيًا :

$ل_{١}$ : ص = ٢س - ٣ ، $ل_{٢}$ : س + ٢ص = ٤

الحل



فى المعادلة ص = ٢س - ٣

بوضع س = ٠ ∴ ص = -٣ ∴ (٠، -٣) حل للمعادلة

بوضع س = ٤ ∴ ص = ٥ ∴ (٤، ٥) حل للمعادلة

فيكون $ل_{١}$ فى الشكل المقابل يمثل مجموعة الحل للمعادلة (١)

نضع المعادلة س + ٢ص = ٤ على الصورة س = ٤ - ٢ص

بوضع ص = ٠ ∴ س = ٤ ∴ (٤، ٠) حل للمعادلة

وبوضع ص = ١ ∴ س = ٢ ∴ (٢، ١) حل للمعادلة

فيكون $ل_{٢}$ فى الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المعادلة (٢)

فى الشكل $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ يتقاطعان فى النقطة أ (٢، ١)

∴ مجموعة حل المعادلتين هى {(٢، ١)}

تدرب

فى كراسة الرسم البياني:

أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية بيانيًا:

١ ٢س + ص = ٠ ، س + ٢ص = ٣ ٢ ص = ٣س - ١ ، س - ص + ١ = ٠

## مثال ٣

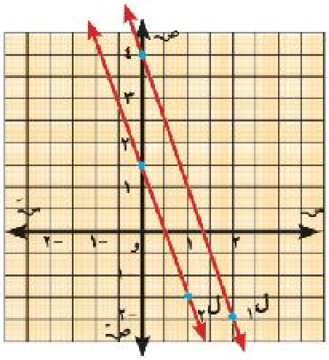
أوجد بيانيا مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

**أولا:** ٣س + ص = ٤ (١) ، ٢ص + ٦س = ٣ (٢)

**ثانيا:** ٣س + ٢ص = ٦ (١) ، ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س (٢)

**الحل**

**أولا:** بوضع المعادلة (١) على الصورة ص = ٤ - ٣س




بوضع س = ٠ ∴ ص = ٤ فيكون (٠ ، ٤) حلا للمعادلة

بوضع س = ٢ ∴ ص = -٢ فيكون (٢، -٢) حلا للمعادلة

ويكون $ل_١$ يمثل مجموعة حل المعادلة (١)

بوضع المعادلة (٢) على الصورة ص = $\frac{٣ - ٦س}{٢}$

بوضع س = ٠ ∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ فيكون (٠، $\frac{٣}{٢}$) حلا للمعادلة

بوضع س = ١ ∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$ فيكون (١، $\frac{-٣}{٢}$) حلا للمعادلة

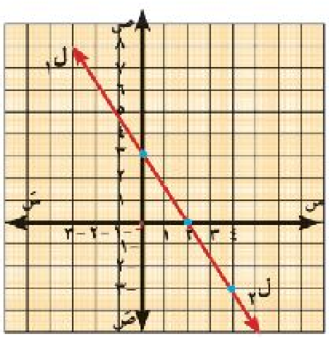
ويكون $ل_٢$ يمثل مجموعة الحل للمعادلة (٢)

∵ $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ ∴ لا يوجد حل للمعادلتين معا.

أى أنه لا يوجد حل للمعادلتين (١)، (٢) إذا كان $ل_١ // ل_٢$

**من الهندسة التحليلية:** ميل $ل_١ = \frac{-٣}{١} = -٣$ ، ميل $ل_٢ = \frac{-٦}{٢} = -٣$ ∴ $ل_١ // ل_٢$

**ثانيا :** بوضع المعادلة (٢) على الصورة ٢ص = ٦ - ٣س




أي ٣س + ٢ص = ٦ وهي نفس المعادلة (١)

والشكل البياني الموضح يبين التمثيل البياني للمعادلتين بمستقيمين منطبقين ونقول إن للمعادلتين (١)، (٢) عدداً غير منته من الحلول وتكون مجموعة الحل هي {(س، ص) : ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س}.

## تدرب

فى كراسة الرسم البياني:

أوجد بيانيا مجموعة الحل لكل زوج فى المعادلات الآتية :

(١) ٣س + ص = ٥ ، ص + ٣س = ٨ (٢) ٢س + ص = ٤ ، ٨ - ٢ص = ٤س

**ثانيا : حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا :**

يمكن حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين آنيًا بالتخلص من أحد المتغيرين، فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد، وبحلها نحصل على قيمة هذا المتغير، ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الذى سبق التخلص منه .

**مثال ٤**

أوجد مجموعة حل المعادلتين:

٢س - ص = ٣ (١) ، س + ٢ص = ٤ (٢)

**الحل** (طريقة التعويض)

من المعادلة (١) ص = ٢س - ٣

بالتعويض فى المعادلة (٢) عن ص ∴ س + ٢ ( ٢س - ٣) = ٤

فيكون : س + ٤س - ٦ = ٤ ∴ ٥س = ١٠ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ص = ٢ × ٢ - ٣ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين = {(٢، ١)}

**حل اخر** ( طريقة الحذف)

ويتم حذف أحد المتغيرين من المعادلتين (بالجمع، أو الطرح) للحصول على معادلة ثالثة فى متغير واحد وبحل المعادلة الناتجة نوجد قيمة هذا المتغير.

٢س - ص = ٣ (١) ، س + ٢ص = ٤ (٢)

بضرب طرفى المعادلة( ١) × ٢ ∴ ٤س - ٢ص = ٦ (٣)

من (٢)، (٣) بالجمع ∴ ٥س = ١٠ ∴ س = ٢

بالتعويض فى (١) ∴ ٢ × ٢ - ص = ٣ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين = {(٢، ١)}.

**تدرب** أجب عن الأسئلة الآتية في كراسة الفصل:

١ أوجد جبريا مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

أ ٣س + ٤ص = ٢٤ ، س - ٢ص + ٢ = ٠

ب ٣س + ٢ص = ٤ ، س - ٣ص =٥

٢ ما عدد حلول كل زوج فى المعادلات الآتية :

أ ٧س + ٤ص = ٦ ، ٥س - ٢ص = ١٤

ب ٩س + ٦ص = ٢٤ ، ٣س + ٢ص = ٨

جـ ٣س + ٤ص = -٤ ، ٥س - ٢ص = ١٥

## مثال ٥

أوجد قيمتى أ، ب علما بأن (٣، -١) حل للمعادلتين.

أ س + ب ص - ٥ = ٠ ، ٣ أ س + ب ص = ١٧

### الحل

∵ (٣، -١) حل للمعادلتين

∴ (٣، -١) حل للمعادلة أ س + ب ص - ٥ = ٠

∴ ٣ أ - ب - ٥ = ٠ أى أن : ٣ أ - ب = ٥ (١)

، (٣، -١) حل للمعادلة ٣ أ س + ب ص = ١٧

∴ ٩ أ - ب = ١٧ (٢)

بطرح طرفى المعادلة (١) من طرفى المعادلة (٢) ينتج أن :

٦ أ = ١٢ ∴ أ = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١)

٣ × ٢ - ب = ٥ ∴ ب = ١

## مثال ٦

عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١، وإذا عكس (بُدِّل) وضع الرقمين، فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلي بمقدار ٢٧ ما هو العدد الأصلي؟

### الحل

نفرض أن رقم الآحاد = س، رقم العشرات = ص

∴ س + ص = ١١ .... (١)

| | رقم الآحاد | رقم العشرات | قيمة العدد |
|---|---|---|---|
| العدد الأصلي | س | ص | س + ١٠ ص |
| العدد الناتج بعد تبديل الرقمين | ص | س | ص + ١٠ س |

العدد الناتج من تبديل وضع رقمية - العدد الأصلي = ٢٧

∴ (ص + ١٠ س) - (س + ١٠ ص) = ٢٧ ∴ ص + ١٠ س - س - ١٠ ص = ٢٧

∴ ٩ س − ٩ ص = ٢٧ وبالقسمة على ٩ ∴ س − ص = ٣ ....... (٢)

بجمع المعادلتين (١)، (٢)

∴ ٢س = ١٤ ∴ س = ٧ وبالتعويض في المعادلة....(١)

∴ ٧ + ص = ١١ ∴ ص = ٤ ∴ العدد هو ٤٧

٢ - ١

# حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيا وجبريا

**سوف تتعلم**

- كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيا وجبريا.

**مصطلحات أساسية**

- حل بيانى.
- حل جبرى.
- مجموعة الحل.

## لاحظ المثال التالي :

سبق أن مثلنا بيانيا الدالة التربيعية د حيث :

د(س) = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ ، أ، ب، جـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

والمعادلة المناظرة لها هى د(س) = ٠ أى **أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠**

وقد سبق لك حل هذه المعادلة بالتحليل.

ولحل المعادلة : س$^{٢}$ - ٤س + ٣ = ٠

نحلل الطرف الأيمن للمعادلة فتأخذ الصورة :

(س - ٣ ) (س - ١) = ٠

$\therefore$ س - ٣ = ٠ أو س - ١ = ٠

$\therefore$ س = ٣ أو س = ١

$\therefore$ مجموعة الحل هى { ٣ ، ١ }

### أولاً: الحل البياني

لحل المعادلة أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ بيانيًا نتبع الآتي:

- نرسم منحنى الدالة د حيث د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ حيث أ $\neq$ ٠
- نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هي مجموعة حل المعادلة.

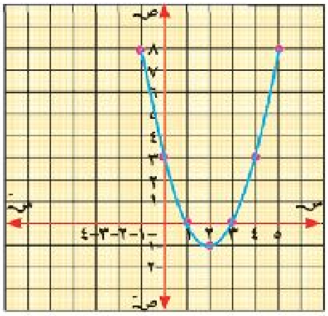
**مثال ١**

ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = س$^{٢}$ - ٤ س + ٣ في الفترة [- ١، ٥]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س$^{٢}$ - ٤ س + ٣ = ٠

**الحل**

نعين بعض الأزواج المرتبة (س، ص) التي تنتمي لبيان الدالة د، والتي مسقطها الأول س ∈ [-١، ٥]



د (-١) = ٨، د (٠) = ٣، د(١) = ٠،

د (٢) = -١، د (٣) = ٠، د (٤) = ٣، د (٥) = ٨

**نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالآتي:**

| س | ٥ | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | ٠ | -١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص = د (س) | ٨ | ٣ | ٠ | -١ | ٠ | ٣ | ٨ |

نعين على المستوى الإحداثي النقط التي تمثل هذه الأزواج المرتبة، ثم نرسم منحنيًا ممهدًا يمر بهذه النقط.
من الرسم نجد أن منحنى الدالة د يقطع محور السينات في النقطتين (٣، ٠)، (١، ٠)
يسمى العددان ١، ٣ بجذري المعادلة س$^{٢}$ - ٤ س + ٣ = ٠
وتكون مجموعة حل المعادلة هي {١، ٣}

**تدرب** فى كراسة الرسم البياني أجب عن السؤالين التاليين:

١ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = س$^{٢}$ + ٢س + ١ في الفترة [-٤، ٢] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة: س$^{٢}$ + ٢ س + ١ = ٠

٢ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = - س$^{٢}$ + ٦ س - ١١ في الفترة [٠، ٦] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س$^{٢}$ - ٦ س + ١١ = ٠

## ثانياً: الحل الجبري باستخدام القانون العام:

**مثال ٢**

حل المعادلة : س$^{٢}$ - ٦ س + ٧ = ٠ مستعينًا بفكرة إكمال المربع.

**الحل** ∵ س$^{٢}$ - ٦ س + ٩ + ٧ - ٩ = ٠

∴ (س - ٣)$^{٢}$ - ٢ = ٠ ⟵ (س - ٣)$^{٢}$ = ٢

س - ٣ = $\sqrt{٢}$ أ، س - ٣ = -$\sqrt{٢}$

س = ٣ + $\sqrt{٢}$ أ، س = ٣ - $\sqrt{٢}$

∴ س = ٣ ± $\sqrt{٢}$

يمكن حل معادلة الدرجة الثانية: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ حيث $أ، ب، جـ \in ح$، $أ \neq ٠$
باستخدام القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \qquad \text{حيث } أ \neq ٠،\ أ، ب، جـ \in ح$$

## أمثلة

**٣** أوجد مجموعة حل المعادلة $٣ س^{٢} = ٥ س - ١$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

**الحل**

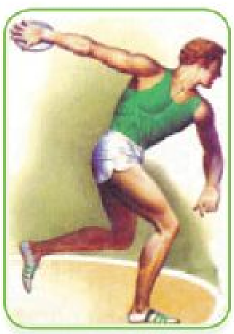
$\because$ $٣ س^{٢} = ٥ س - ١$ $\qquad \therefore$ $٣ س^{٢} - ٥ س + ١ = ٠$

$\therefore$ $أ = ٣$، $ب = -٥$، $جـ = ١$

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦} = \frac{٥ \pm ٣,٦١}{٦}$$

إما $س = \frac{٥ + ٣,٦١}{٦} = ١,٤٤$ $\qquad$ أ، $س = \frac{٥ - ٣,٦١}{٦} = ٠,٢٣$

$\therefore$ مجموعة الحل هي: $\{١,٤٤ ، ٠,٢٣\}$



**٤** في إحدى مسابقات رمي القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع العلاقة: $ص = -٠,٠٤٣ س^{٢} + ٤,٩ س + ١٣$ حيث س تمثل المسافة الأفقية بالمتر، ص تمثل ارتفاع القرص عن سطح الأرض. أوجد المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص بدءًا من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة.

**الحل**

$\because$ $أ = -٠,٠٤٣$ ، $ب = ٤,٩$ ، $جـ = ١٣$

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-(٤,٩) \pm \sqrt{(٤,٩)^{٢} - ٤ \times (-٠,٠٤٣) \times ١٣}}{٢ \times (-٠,٠٤٣)}$$

$$= \frac{(-٤,٩) \pm \sqrt{٢٦,٢٤٦}}{-٠,٠٨٦} = \frac{-٤,٩ \pm ٥,١٢٣}{-٠,٠٨٦}$$

إما $س = \frac{-٤,٩ + ٥,١٢٣}{-٠,٠٨٦} = -٢,٥٩$ (مرفوض) لماذا؟

أ، $س = \frac{-٤,٩ - ٥,١٢٣}{-٠,٠٨٦} = ١١٦,٥٤٦٥١١٦$ متر

$\therefore$ المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص $١١٦,٥٥$ متر.

## ١ – ٣

# حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

### سوف تتعلم

- كيفية حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.

### مصطلحات أساسية

- معادلة من الدرجة الأولى.
- معادلة من الدرجة الثانية.
- مجموعة الحل.

**تمهيد:**

نعلم أن المعادلة ٢ س - ص = ٣ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين، بينما المعادلات: س$^{٢}$ + ص = ٥، س ص = ٢ هي معادلات من الدرجة الثانية في متغيرين لماذا ؟

وسوف نقوم بحل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية، ويعتمد الحل على طريقة التعويض كما سيتضح من الأمثلة التالية.

**حساب ذهني:** إذا كان: س + ص = ١٠، س$^{٢}$ - ص$^{٢}$ = ٤٠ فأوجد س - ص.

### أمثلة

**١** أوجد جبريًّا مجموعة الحل للمعادلتين:

ص + ٢ س + ١ = ٠ ، ٤ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ - ٣ س ص = ١

**الحل**

من المعادلة الأولى: ص = - (٢ س + ١) وبالتعويض في المعادلة الثانية.

∴ ٤ س$^{٢}$ + [- (٢ س + ١)]$^{٢}$ - ٣ س [- (٢س + ١)] = ١

∴ ٤ س$^{٢}$ + ٤ س$^{٢}$ + ٤ س + ١ + ٦ س$^{٢}$ + ٣ س - ١ = ٠

∴ ١٤ س$^{٢}$ + ٧س = ٠ ∴ ٧ س (٢ س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، ٢ س + ١ = ٠ أي أن س = $\frac{-١}{٢}$

**وبالتعويض عن قيم س في المعادلة الأولى:**

عندما س = ٠ ∴ ص = - (٠ + ١) = -١،

عندما س = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ص = - (٢ × $\frac{-١}{٢}$ + ١) = ٠

∴ مجموعة الحل هي: {(٠، -١)، ($\frac{-١}{٢}$، ٠)}


دار النصر للطباعة (هدلاين)

٢ مستطيل محيطه ١٤ سم، ومساحته ١٢ سم$^{٢}$. أوجد كلاً من بعديه.

**الحل**

نفرض أن بعدي المستطيل س، ص

∵ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) ∴ ١٤ = ٢ (س + ص) ..... وبقسمة الطرفين على ٢

∴ س + ص = ٧ أي أن ص = ٧ - س ............. (١)

∵ مساحة المستطيل = الطول × العرض ∴ س ص = ١٢ .......(٢)

**وبالتعويض من المعادلة (١) في المعادلة (٢):**

∴ س (٧ - س) = ١٢ ٧ س - س$^{٢}$ = ١٢

∴ س$^{٢}$ - ٧ س + ١٢ = ٠ (س - ٣) (س - ٤) = ٠

∴ س = ٣ أو س = ٤ وبالتعويض في المعادلة (١)

عندما: س = ٣ ∴ ص = ٧ - ٣ = ٤،

عندما: س = ٤ ∴ ص = ٧ - ٤ = ٣ ∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم، ٤ سم.

٣ عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته، إذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى نصف العدد الأصلى. فما هو العدد؟

**الحل**

نفرض أن رقم الآحاد = س، رقم العشرات = ص

∴ العدد الأصلى = س + ١٠ ص

∵ رقم الآحاد ضعف رقم العشرات

∴ س = ٢ ص ⟵ (١)

∵ حاصل ضرب الرقمين = $\frac{١}{٢}$ العدد الأصلى

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ (س + ١٠ ص) ⟵ (٢) **بحل (١)، (٢) معاً**

∴ ٢ ص$^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ ص

∴ ٢ ص$^{٢}$ = ٦ ص ∴ ٢ ص (ص - ٣) = ٠

∴ ص = ٣ أ، ص = ٠ (مرفوض) بالتعويض في المعادلة (١)

∴ س = ٦ ∴ العدد المطلوب = ٣٦

## مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

### سوف تتعلم

☆ كيفية إيجادُ مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.

### مصطلحات أساسية

☆ دالةٌ كثيرة الحدود.

☆ مجموعةُ أصفارِ الدالة.

### فكر وناقش

**إذا كانت د:** ح ⟵ ح حيث د(س) = س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ + ٢س كثيرةُ حدود من الدرجة الثالثة فى س أوجد : د(٠) ، د(١) ، د(٢) **ماذا تلاحظ ؟**

**نلاحظ أن:** د(٠) = ٠ ، د(١) = ٠ ، د(٢) = ٠

**لذا يسمى: ٠ ، ١ ، ٢ أصفاراً للدالة د .**

**وبصفة عامة**

إذا كانت د: ح ⟵ ح كثيرة حدود فى س فإن مجموعةَ قيم س التى تجعل د(س) = ٠ تسمى مجموعة أصفار الدالة د، و يرمز لها بالرمز ص(د) .

**أى أن:** ص (د) هى مجموعةُ حَلِّ المعادلة د (س) = ٠

وعموما للحصولِ على أصفارِ الدالة د نضع د(س) = ٠ ونحلُّ المعادلةَ الناتجة لإيجاد مجموعة قيم س .

### أمثلة

**أوجد** ص(د) لكل من دوال كثيرات الحدود الآتية:

١ د$_{١}$(س) = ٢س - ٤ ٢ د$_{٢}$(س) = س$^{٢}$ - ٩

٣ د$_{٣}$(س) = ٥ ٤ د$_{٤}$(س) = ٠

٥ د$_{٥}$(س) = س$^{٢}$ + ٤ ٦ د$_{٦}$(س) = س$^{٦}$ - ٣٢س

٧ د$_{٧}$(س) = س$^{٣}$ + س + ١

**الحل**

١ د$_{١}$(س) = ٢س - ٤ بوضع د$_{١}$ (س) = صفر ∴ ٢ س - ٤ = ٠

أى ٢س = ٤ ∴ س = ٢ ∴ ص(د$_{١}$) = {٢}.

٢ د$_{٢}$(س) = س$^{٢}$ - ٩

بوضع د$_{٢}$ (س) = صفر ∴ س$^{٢}$ - ٩ = ٠

أى س$^{٢}$ = ٩ ∴ س = ±٣ ∴ ص(د$_{٢}$) = {-٣ ، ٣}.

٣ ∵ د$_{٣}$(س) = ٥

∴ لا يوجد أيُّ عدد حقيقيٍّ يجعل د$_{٣}$(س) = ٠ ∴ ص(د$_{٣}$) هو $\phi$

٤ ∵ د$_{٤}$(س) = ٠

∴ جميعُ الأعدادِ الحقيقية ح تكون أصفارًا لهذه الدالة ∴ ص(د$_{٤}$) = ح

٥ بوضع س$^{٢}$ + ٤ = ٠

∴ س$^{٢}$ = -٤ ∴ س = ± $\sqrt{-٤}$ $\not\ni$ ح ∴ ص(د$_{٥}$) هو $\phi$

٦ بوضع س$^{٦}$ - ٣٢س = ٠

∴ س(س$^{٥}$ - ٣٢) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س$^{٥}$ = ٣٢

وعندما س$^{٥}$ = ٢$^{٥}$ ∴ س = ٢ ∴ ص(د$_{٦}$) = {٠ ، ٢}

٧ بوضع س$^{٢}$ + س + ١ = صفر

حيث يتعذَّر علينا تحليلُ المقدار س$^{٢}$ + س + ١ لذلك نلجأُ إلى استخدامِ القانون لحلِّ المعادلة التَّربيعية

فيكون س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ حيث أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$ $\not\ni$ ح

∴ لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة ويكون ص (د$_{٧}$) = $\phi$

تدرب

١ أوجد مجموعةَ أصفار الدوال الآتية:

أ د(س) = س$^{٣}$ - ٤س$^{٢}$ ب د (س) = س$^{٢}$ - ٢س + ١ جـ د(س) = س$^{٢}$ - ٢س -١

د د(س) = س$^{٤}$ - س$^{٢}$ هـ د(س) = س$^{٢}$ - س + ١ و د(س) = س$^{٢}$ - ٢

٢ - ٢

# الدالةُ الكسريةُ الجبريةُ

## سوف تتعلم

☆ مفهوم الدالةُ الكسريةُ الجبرية.

## مصطلحات أساسية

☆ دالة كثيرة الحدود.

☆ مجال الكسر الجبرى.

☆ مجال مشترك لكسرين جبريين.

## فكر وناقش

سبق أن درست العددَ النسبيَّ الذى على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

فإذا كانت ق: ح ⟵ ح ، ق (س) = س + ٣ ،

د : ح ⟵ ح ، د (س) = س$^{٢}$ - ٤.

① أوجد مجال ق ، د .

② إذا كان ن(س) = $\frac{ق(س)}{د(س)}$ هل تستطيعُ إيجاد مَجال ن متى علم مجال كل من ق ، د؟

**مما سبق نستنتج الآتي:**

**ن تسمى دالة كسرية جبرية أو كسرًا جبريًّا حيث ن(س) = $\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٤}$**

**ويكون مجال ن فى هذه الحالة هو ح عدا قيم س التى تجعل الكسرَ غير معرف (مجموعة أصفار المقام).**

**أى أن:** مجال ن هو ح - {-٢ ، ٢}

**إذا كان ق ، د كثيرتى حدود، وكان ص (د) هى مجموعةُ أصفارِ د فإن الدالة ن حيث:**

$$ن : ح - ص (د) \longrightarrow ح ، ن(س) = \frac{ق(س)}{د(س)}$$

**تسمى دالةً كسريةً جبريةً حقيقيةً واختصارًا تسمى كسراً جبريًّا.**

**لاحظ أن:** مجال الدالة الكسرية الجبرية = ح - مجموعة أصفار المقام.

## المجالُ المشتركُ لكسرينِ جبريين أو أكثر :

المجالُ المشتركُ لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقية التى تكونُ فيها هذه الكسورُ معرفةً معًا (فى آن واحد) .

**مثال**

إذا كان ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ كسرين جبريين حيث:

$$\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١} \text{ ، } \text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}^{٢} - ٤}$$

فأوجد المجالَ المشتركَ لكلٍّ من ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$

**الحل**

بفرض أن م$_{١}$ مجال ن$_{١}$ ، م$_{٢}$ مجال ن$_{٢}$ .

∴ م$_{١}$ = ح - {١} ، م$_{٢}$ = ح - {-٢ ، ٢} ويكون المجالُ المشتركُ للكسرين ن$_{١}$، ن$_{٢}$ = م$_{١}$ $\cap$ م$_{٢}$

حيث: م$_{١}$ $\cap$ م$_{٢}$ = (ح - {١}) $\cap$ (ح - {-٢ ، ٢})

= ح - {-٢ ، ١ ، ٢}

يلاحظ أنه لأى قيمة للمتغير س تنتمى إلى المجالِ المشتركِ يكون كلٌّ من ن$_{١}$(س)، ن$_{٢}$ (س) معرفا (له وجود)

**وعمومًا**

إذا كان ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ كسرين جبريين وكان:

مجال ن$_{١}$ = ح − س$_{١}$ (حيث س$_{١}$ مجموعة أصفار مقام ن$_{١}$ )

، مجال ن$_{٢}$ = ح − س$_{٢}$ (حيث س$_{٢}$ مجموعة أصفار مقام ن$_{٢}$ )

فإن: المجال المشترك للكسرين ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ = ح − (س$_{١}$ $\cup$ س$_{٢}$)

= ح − مجموعة أصفار مقامى الكسرين.

ويكون المجال المشترك لعدد من الكسور الجبرية

= ح − مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور.

# ٢ - ٣

# تساوى كسرين جبريين

## سوف تتعلم

- ☆ مفهوم تساوى كسرين جبريين.
- ☆ كيفية تحديد متى يتساوى كسران جبريان.

## مصطلحات أساسية

- ☆ اختزال الكسر الجبرى.
- ☆ تساوى كسرين جبريين.

### اختزال الكسر الجبرى

**فكر وناقش**

**إذا كان ن كسرًا جبريًا حيث:** $ن(س) = \frac{س^{٢} + س}{س^{٢} - ١}$ فإن:

١ مجال ن = ح - {١، -١}

٢ العاملُ المشتركُ بين البسطِ والمقامِ بعد تحليلِ كل منهما تحليلاً كاملاً هو س + ١ $\neq$ صفر حيث س لا تأخذ القيمة ١، -١

٣ الكسرُ الجبريُّ فى أبسطِ صورةٍ بعد حذف العامل المشترك = $\frac{س}{س - ١}$

٤ هل يتغيرُ مجالُ الكسرِ الجبريِّ ن بعد وضعه فى أبسط صورة ؟

**مما سبق نستنتج أن:**

وضع الكسرِ الجبرى فى أبسط صورةٍ يسمى باختزال الكسر الجبرى.

وعند اختزال الكسر الجبرى نتبع الخطوات الآتية:

١ نحلل بسطَ ومقامَ الكسر الجبرى تحليلاً كاملاً.

٢ نعين مجالَ الكسر الجبرى قبل حذف العوامل المشتركة فى البسط والمقام.

٣ نحذف العواملَ المشتركةَ فى كلٍّ من البسط والمقام للحصول على أبسط صورة.

**تعريف: يقالُ إن:** الكسرَ الجبريَّ ن فى أبسط صورة له إذا لم توجد عواملُ مشتركةٌ بين بسطه ومقامه.

**مثال ١**

**إذا كان** ن(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٦\text{س}}{\text{س}^{٤} - ١٣\text{س}^{٢} + ٣٦}$ اختصر ن(س) إلى أبسط صورة مبينًا مجال ن.

**الحل**

∵ ن (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٦\text{س}}{\text{س}^{٤} - ١٣\text{س}^{٢} + ٣٦} = \frac{\text{س} (\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦)}{(\text{س}^{٢} - ٤) (\text{س}^{٢} - ٩)} = \frac{\text{س} (\text{س} + ٣) (\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٢) (\text{س} - ٢) (\text{س} + ٣) (\text{س} - ٣)}$

∴ مجال ن(س) = ح - {-٣ ، -٢ ، ٢ ، ٣}.

اختزل (س + ٣) ، (س - ٢) من البسط والمقام . ∴ ن(س) = $\frac{\text{س}}{(\text{س} + ٢) (\text{س} - ٣)}$

## تساوى كسريين جبريين

**فكر وناقش**

**أوجد في أبسط صورةٍ كلاًّ من ن١(س) ، ن٢(س) مبيِّنا المجالَ لكلٍّ منهما فى كلٍّ مما يأتى:**

١) ن١(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، ن٢(س) = $\frac{٢}{٢\text{س} - ٦}$

٢) ن١(س) = $\frac{٢\text{س}}{٢\text{س} + ٤}$ ، ن٢(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$

**هل ن١ = ن٢ فى كل حالة ؟ وضح أجابتك.**

**نلاحظ مما سبق أن:**

١) ن١(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} + ٣) (\text{س} - ٣)} = \frac{١}{\text{س} - ٣}$ **ومجال ن١** = ح - {-٣ ، ٣}

ن٢(س) = $\frac{٢}{٢ (\text{س} - ٣)} = \frac{١}{\text{س} - ٣}$ **ومجال ن٢** = ح - {٣}

**أى أن:** ن١ ، ن٢ اختزلا إلى نفس الكسرِ، ولكن مجال ن١ ≠ مجال ن٢

٢) ن١(س) = $\frac{٢\text{س}}{٢ (\text{س} + ٢)} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$ **ومجال ن١** = ح - {-٢}

ن٢(س) = $\frac{\text{س} (\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)^{٢}} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$ **ومجال ن٢** = ح - {-٢}

**أى أن:** ن١ ، ن٢ اختزلا إلى نفس الصورة ، مجال ن١ = مجال ن٢

**مما سبق نستنتجَ أن:**

**يقال إن الدالتين ن١ ، ن٢ متساويتان( أى : ن١ = ن٢ ) إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً**
**مجال ن١ = مجال ن٢ ، ن١(س) = ن٢(س) لكل س ∈ المجال المشترك .**

**أمثلة**

**٢** **إذا كانت** $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ **أثبت أن** : $ن_١ = ن_٢$

**الحل**

∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢} = \frac{س^٢}{س^٢(س - ١)}$ ∴ $ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$

**ومجال** $ن_١ = ح - \{٠ ، ١\}$ (١)

∵ $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س} = \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س^٣ - ١)} = \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س-١)(س^٢ + س + ١)}$

∴ $ن_٢(س) = \frac{١}{س - ١}$

**ومجال** $ن_٢ = ح - \{٠ ، ١\}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∵ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لكل $س \in ح - \{٠ ، ١\}$ ∴ $ن_١ = ن_٢$

**٣** **إذا كان** $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س}$

**فأثبت أن** $ن_١(س) = ن_٢(س)$ **لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجالِ المشتركِ، وأوجد هذا المجال .**

**الحل**

∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦} = \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

**ومجال** $ن_١ = ح - \{-٣ ، ٢\}$ (١)

∵ $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س} = \frac{س(س - ٣)(س + ٢)}{س(س + ٣)(س - ٣)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

**ومجال** $ن_٢ = ح - \{-٣ ، ٠ ، ٣\}$ (٢)

من (١) ، (٢)

**نلاحظ أن:** $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$ اختزلا إلى نفس الكسر $\frac{س + ٢}{س + ٣}$.

إلا أن مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$ **لذلك** $ن_١ \neq ن_٢$.

**ونستطيعُ أن نقول إن:** $ن_١(س) = ن_٢(س)$ يأخذان نفس القيم إذا كانت س تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ وهو $ح - \{-٣ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$ .

٤ - ٢

# العملياتُ على الكسورِ الجبريَّة

## سوف تتعلم

- كيفية إجراء العمليات ( + ، − ، × ، ÷ ) على الكسور الجبرية

## مصطلحات أساسية

- معكوس جمعي للكسر الجبري.
- معكوس ضربي للكسر الجبري.

## أولاً : جمع و طرح الكسور الجبرية :

### فكر وناقش

١ إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ب}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من:

$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ب}$ ، $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{ب}$

٢ إذا كان $\frac{أ}{ب}$، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من:

$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د}$ ، $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د}$

**مما سبق يمكننا إجراء عملية جمع أو طرح كسرين جبريين متحدى أو مختلفى المقام كالآتى :**

إذا كان س ∈ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_1$، $ن_2$ حيث:

١ $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_2(س)}$

(كسرين جبريين متحدى المقام)

فإن: $ن_1(س) + ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{د_3(س)}{د_2(س)} = \frac{د_1(س) + د_3(س)}{د_2(س)}$ ،

$ن_1(س) - ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} - \frac{د_3(س)}{د_2(س)} = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{-د_3(س)}{د_2(س)}$

٢ $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

(كسرين جبريين مختلفى المقام)

فإن: $ن_1(س) + ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \frac{د_1(س) \times د_4(س) + د_3(س) \times د_2(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$ ،

$ن_1(س) - ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} - \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \frac{د_1(س) \times د_4(س) - د_3(س) \times د_2(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$

أمثلة

① إذا كان $ن_١(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$

فأوجد $ن(س) = ن_١(س) + ن_٢(س)$ مبينا مجال ن.

الحل

$\because$ $ن(س) = ن_١(س) + ن_٢(س)$

$\therefore$ $ن(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س} + \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤} = \frac{س}{س(س + ٢)} + \frac{س + ٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$

مجال ن = ح - {-٢ ، ٠ ، ٢}

$\therefore$ $ن(س) = \frac{١}{س + ٢} + \frac{١}{س - ٢} = \frac{س - ٢ + س + ٢}{(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{٢س}{(س + ٢)(س - ٢)}$

② أوجد: ن(س) فى أبسطِ صورةٍ مبيناً مجال الدالة ن حيث:

$ن(س) = \frac{٣س - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^٢ + س - ٦}$

الحل

$\because$ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٢(س + ٣)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

مجال ن = ح - {-٣ ، ٢ ، ٣}

$\therefore$ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٢}{س - ٢}$

$\because$ م.م.أ للمقامات = (س - ٣)(س - ٢) و بضرب حدي الكسر الثاني فى (س - ٣)

$\therefore$ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٢(س - ٣)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٣س - ٤ + ٢س - ٦}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \frac{٥س - ١٠}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥(س - ٢)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥}{س - ٣}$

**③ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :**

$$\text{ن(س)} = \frac{١٢}{١٢\text{س}^٢ - ٣} + \frac{٢}{٢\text{س} - ٤\text{س}^٢}$$ ، ثم أوجد ن(٠) ، ن(-١) إن أمكن ذلك.

**الحل**

$$\because \text{ن(س)} = \frac{١٢}{١٢\text{س}^٢ - ٣} + \frac{٢}{-٤\text{س}^٢ + ٢\text{س}}$$ (الترتيب تنازلى حسب قوى س)

$$= \frac{١٢}{١٢\text{س}^٢ - ٣} + \frac{٢}{-(٤\text{س}^٢ - ٢\text{س})}$$

$$= \frac{١٢}{٣(٤\text{س}^٢ - ١)} - \frac{٢}{٢\text{س}(٢\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{٤}{(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ١)} - \frac{١}{\text{س}(٢\text{س} - ١)}$$ (التحليل)

$$\text{مجال د} = \text{ح} - \left\{\frac{-١}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢}\right\}$$

م.م.أ للمقامات = س (٢س + ١) (٢س - ١)

$$\therefore \text{ن(س)} = \frac{٤\text{س}}{\text{س}(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ١)} - \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ١)}$$

$$\therefore \text{ن(س)} = \frac{٤\text{س} - (٢\text{س} + ١)}{\text{س}(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ١)} = \frac{٤\text{س} - ٢\text{س} - ١}{\text{س}(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ١)} = \frac{١}{\text{س}(٢\text{س} + ١)}$$

ن(٠) ليس لها وجود لأن الصفر $\notin$ مجال الدالة ن ،

$$\text{ن}(-١) = \frac{١}{-١ \times (-٢ + ١)} = \frac{١}{-١ \times -١} = ١$$

## ثانيًا : ضرب وقسمة الكسور الجبرية

### فكر وناقش

لكل كسر جبري ن(س) $\neq$ ٠ يوجد معكوس ضربي هو مقلوب الكسر ويرمز له بالرمز $ن^{-١}(س)$

فإذا كان $ن(س) = \frac{س + ٢}{س + ٥}$ فإن $ن^{-١}(س) = \frac{س + ٥}{س + ٢}$

حيث مجال ن = ح - {-٥} ، مجال $ن^{-١}$ = ح - {-٢، -٥}

ويكون $ن(س) \times ن^{-١}(س) = ١$

**مما سبق يمكننا إجراءُ عمليَّة ضرب أو قسمة كسرين جبريين على النَّحو الآتي:**

إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين حيث :

$ن_١(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$ فإن :

١ $ن_١(س) \times ن_٢(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \times \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)} = \frac{د_١(س) \times د_٣(س)}{د_٢(س) \times د_٤(س)}$

ويكون مجالَ $ن_١(س) \times ن_٢(س)$ هو ح - (ص $(د_٢)$ $\cup$ ص $(د_٤)$)

٢ $ن_١(س) \div ن_٢(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \div \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)} = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \times \frac{د_٤(س)}{د_٣(س)}$

ويكون مجالَ $ن_١(س) \div ن_٢(س)$ هو المجال المشترك لكل من $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٢^{-١}$

أى ح - (ص$(د_٢)$ $\cup$ ص$(د_٣)$ $\cup$ ص$(د_٤)$)

### أمثلة

٤ إذا كانت $ن(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢} \times \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{٣س^٢ + ١٦س + ٥}$

فأوجد ن(س) فى أبسط صورة وعين مجالها ثم أوجد ن(٠) ، ن(-١) إن أمكن ذلك.

**الحل**

$ن(س) = \frac{س + ١}{(س - ٢)(س + ١)} \times \frac{(س + ٥)(س - ٢)}{(٣س + ١)(س + ٥)}$

$= \frac{(س + ١)(س + ٥)(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)(٣س + ١)(س + ٥)} = \frac{١}{٣س + ١}$ (أبسط صورة)

ومجال ن = ح - {-٥ ، -١ ، $-\frac{١}{٣}$ ، ٢} ، ن(٠) = ١،

ن (-١) ليس لها وجود لأن -١ $\notin$ مجال ن .

**٥** **إذا كانت** $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \div \frac{٣س^٢ + ٦س - ٤٥}{٤س^٢ - ٩}$

**فأوجد ن(س) فى أبسط صورةٍ موضِّحًا مجال ن .**

**الحل**

$\because ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \div \frac{٣(س^٢ + ٢س - ١٥)}{٤س^٢ - ٩}$ $\therefore ن(س) = \frac{(س + ٣)\,(س - ٣)}{س\,(٢س + ٣)} \div \frac{٣\,(س + ٥)\,(س - ٣)}{(٢س + ٣)\,(٢س - ٣)}$

مجال ن = ح - $\{٠ ، -\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، -٥ ، ٣\}$

$\therefore ن(س) = \frac{(س + ٣)\,(س - ٣)}{س\,(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س + ٣)\,(٢س - ٣)}{٣(س + ٥)\,(س - ٣)}$

$= \frac{(س + ٣)\,(س - ٣)\,(٢س + ٣)\,(٢س - ٣)}{٣س\,(٢س + ٣)\,(س + ٥)\,(س - ٣)} = \frac{(س + ٣)\,(٢س - ٣)}{٣س\,(س + ٥)}$

**٦** أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن:

$$ن\,(س) = \frac{س^٢ + ٢\,س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س\,٢ + ٣\,س + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢)، ن (-٢) إن أمكن.

**الحل**

$$ن\,(س) = \frac{س^٢ + ٢\,س}{س^٣ - ٢٧} \times \frac{س^٢ + ٣\,س + ٩}{س + ٢}$$

$$= \frac{س\,(س + ٢)}{(س - ٣)\,(س٢ + ٣س + ٩)} \times \frac{(س٢ + ٣\,س + ٩)}{(س + ٢)}$$

$\therefore$ مجال ن = ح - {٣ ، -٢}

$$\therefore ن\,(س) = \frac{س}{س - ٣}$$

، $ن\,(٢) = \frac{٢}{٢ - ٣} = -٢$

، ن (-٢) غير معرفة لأن -٢ $\notin$ مجال ن

# الوحدة الثالثة: الاحتمال

٣ - ١

# العمليات على الأحداث

## التقاطع و الاتحاد

### تعلم أن :

إذا أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائيًا.
ولوحظ العددُ الظاهرُ على الوجه العلويِّ فإن:

١ فضاء العينة (ف) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }.

٢ حدث ظهور العدد ٧ هو $\phi$ ويسمى الحدث المستحيل
واحتمال ظهوره = صفر

٣ حدث ظهور عدد أقل من ٩ هو ف ويسمى الحدث المؤكد
واحتمال ظهوره = ١

٤ حدث ظهور عدد أولي زوجي هو { ٢ } وهو مجموعة جزئية من ف
واحتمال وقوعه = $\frac{١}{٦}$

**فإذا كان أ** حدث من ف أي: أ $\subset$ ف **فإن:** ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

**حيث:** ن (أ) عددُ عناصر الحدث أ، ن (ف) عدد عناصر فضاء العينة ف،
ل (أ) احتمال وقوع الحدث أ

**نلاحظ أن:** يمكنُ كتابةُ الاحتمالِ في صورةِ كسرٍ أو نسبة مئويّة كما يلي:

| مؤكد الحدوث | غالباً | أحيانًا | نادراً | مستحيل الحدوث |
|---|---|---|---|---|
| ١ | $\frac{٣}{٤}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٤}$ | ٠ |
| ٪١٠٠ | ٪٧٥ | ٪٥٠ | ٪٢٥ | ٪٠ |

☆ إجراء العمليات على الأحداث (التقاطع – الاتحاد).

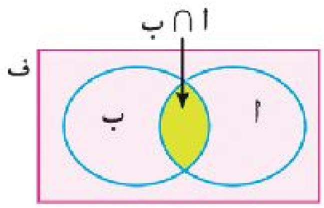
**مصطلحات أساسية**

☆ تقاطع
☆ اتحاد
☆ حدثان متنافيان
☆ شكل ڤن.

## العملياتُ على الأحداثِ:

حيث إن الأحداث هى مجموعاتٌ جزئيةٌ من فضاء العينة (ف)، لذلك فإن العملياتِ على الأحداثِ هى نفس العملياتِ على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع، وباعتبار فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة نستطيع التعبير عن الأحداث والعمليات عليها بأشكال ڤن كما يلى:

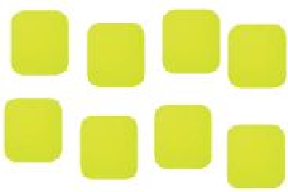
### أولاً: التقاطع




إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن تقاطعَ الحدثينِ أ، ب والذى يرمزُ له بالرمز أ ∩ ب يعنى حدث وقوع أ و ب معًا.

**لاحظ أن: يُقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتجُ التَّجربة عنصرًا من عناصرِ المجموعةِ التى تعَبِّر عن هذا الحدث.**

**مثال (١)**



مجموعةُ بطاقاتٍ متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ بدون تكرار خُلطت جيداً، فإذا سحبت منها بطاقةٌ واحدةٌ عشوائيًّا.

١ اكتب فضاء العينة

٢ اكتب الأحداث الآتية.

أ الحدث أ: أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا.

ب الحدث ب: أن تحمل البطاقةُ المسحوبة عددًا أوليًّا.

جـ الحدث جـ: أن تحمل البطاقةُ المسحوبةُ عددًا يقبلُ القسمةَ على ٤.

٣ باستخدام أشكال ڤن احسب احتمال:

أ حدث وقوع الحدثين أ، ب معًا. ب حدث وقوع الحدثين أ، جـ معًا.

جـ حدث وقوع الحدثين ب، جـ معًا.

**الحل**

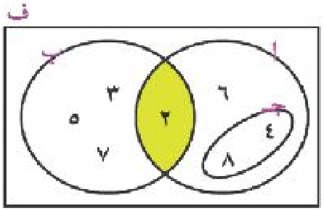
١ ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} ، ن (ف) = ٨

٢ أ أ = {٢، ٤، ٦، ٨}

ب ب = {٢، ٣، ٥، ٧}

جـ جـ = {٤، ٨}

٣ باستخدام شكل ڤن المقابل نجد أن:




أ حدث وقوع الحدثين أ، ب معًا يعنى أ $\cap$ ب حيث:

أ $\cap$ ب = {٢} وهى مجموعة ذات عنصر واحد

$\therefore$ ن (أ $\cap$ ب) = ١

$\therefore$ احتمال وقوع الحدثين أ، ب معًا = ل (أ $\cap$ ب)

$= \frac{\text{ن (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١}{٨}$

ب حدثُ وقوع الحدثين أ، جـ معًا يعنى أ $\cap$ جـ حيث:

أ $\cap$ جـ = {٤، ٨} $\therefore$ ن (أ $\cap$ جـ) = ٢

$\therefore$ احتمال وقوعِ الحدثين أ، جـ معًا = ل (أ $\cap$ جـ) $= \frac{\text{ن (أ} \cap \text{جـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

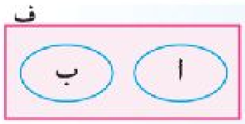
جـ حدث وقوع الحدثينِ ب، جـ معًا يعنى ب $\cap$ جـ حيث:

ب $\cap$ جـ = $\phi$ (لأن ب، جـ مجموعتان منفصلتان أو متباعدتان)، ن (ب $\cap$ جـ) = صفر

$\therefore$ احتمال وقوع الحدثين ب، جـ معًا = ل (ب $\cap$ جـ) $= \frac{\text{ن (ب} \cap \text{جـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٠}{٨}$ = صفر

**لاحظ أن:** الحدثين ب، جـ لا يمكن وقوعهما فى آن واحد، ولذلك يقال إن الحدثين ب، جـ حدثان متنافيان.

**الأحداثُ المتنافيةُ:**




يقال إن الحدثين أ، ب متنافيان إذا كان أ $\cap$ ب = $\phi$

**ويكون** ل (أ $\cap$ ب) $= \frac{\text{عدد عناصر } \phi}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد عناصر ف}} =$ **صفر**

و يقال لعدةِ أحداثٍ أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

مثال ٢ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائيا، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى.

أولا: اكتب فضاء العينة ف.

ثانيا: أوجد ما يأتى:

أ : حدث ظهور عدد زوجى. ب : حدث ظهور عدد فردى.

جـ : حدث ظهور عدد أولى.

ثالثا:

١ أوجد ل (أ $\cap$ ب) ٢ هل الأحداث أ ، ب، جـ أحداث متنافية؟

**الحل**

أولا: ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ثانيا: أ = {٢، ٤، ٦}

ب = {١، ٣، ٥}

جـ = {٢، ٣، ٥}

ثالثا: ١ $\because$ أ $\cap$ ب = $\phi$

$\therefore$ ل (أ $\cap$ ب) = صفر

٢ أ $\cap$ جـ = {٢} ، ب $\cap$ جـ = {٣، ٥}

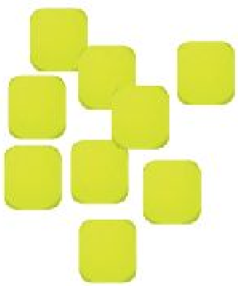
$\therefore$ الأحداث أ، ب، جـ غير متنافية.

## ثانياً: الاتحاد

إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن اتحادَ الحدثينِ، والذى يُرمز له بالرمز أ ∪ ب يعنى حدثَ وقوعِ الحدثين أ أو ب أو كليهما، أى حدث وقوع أحدهما على الأقل.

### مثال (٣)

١ تسع بطاقاتٍ متماثلة مرقَّمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقةٌ واحدةٌ عشوائيًّا.



**أولاً**: اكتب فضاء العينة.

**ثانيًا** اكتب الأحداث الآتية:

أ أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا.

ب أن تحمل البطاقةُ المسحوبة عددًا يقبل القسمة على ٣.

جـ أن تحمل البطاقةُ المسحوبةُ عددًا أوليًّا أكبر من ٥.

**ثالثًا** باستخدام شكلِ ڤن احسب احتمال كل من:

أ حدث وقوع أ أو ب   ب حدث وقوع أ أو جـ

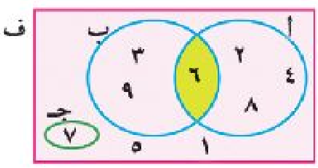
جـ أوجد ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب) ماذا تلاحظ ؟

**الحل**

**أولاً** ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، ن (ف) = ٩

**ثانيًا** أ = {٢، ٤، ٦، ٨} ، ن (أ) = ٤ ، ب = {٣، ٦، ٩} ، ن (ب) = ٣ ، جـ = {٧} ، ن (جـ) = ١

**ثالثًا** من شكل ڤن المقابل:




أ حدث وقوع أ أو ب يعنى أ ∪ ب

حيث: أ ∪ ب = {٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩}، ن(أ ∪ ب) = ٦

∴ احتمال وقوع أ أو ب = ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن(أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

ب حدثُ وقوعِ أ أو جـ يعنى أ ∪ جـ وهما مجموعتان منفصلتان.

فيكون أ ∪ جـ = {٢، ٤، ٦، ٨، ٧} ، ن (أ ∪ جـ) = ٥

∴ احتمال وقوع أ أو جـ = ل (أ ∪ جـ) = $\frac{\text{ن(أ ∪ جـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{٩}$


دار النصر للطباعة (هدلاين)

جـ ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٤}{٩}$ ، ل(ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{٩}$

أ ∩ ب = {٦} ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{٩}$

ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٩}$ + $\frac{٣}{٩}$ - $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$ (١)

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$ (٢)

من (١)، (٢) يكون

| ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ل (أ ∪ ب) |
|---|

يلاحظُ أن أ، جـ حدثان متنافيان .

فيكون ل (أ ∪ جـ) = ل (أ) + ل (جـ) - ل (أ ∩ جـ) لكن ل (أ ∩ جـ) = صفر

لكن ل (أ ∩ جـ) = صفر

∴ ل (أ ∪ جـ) = $\frac{٤}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ - صفر

= $\frac{٥}{٩}$ كما سبق إيجاده

أى أنه إذا كان أ، جـ حدثين متنافيين فإن ل (أ ∪ جـ) = ل (أ) + ل(جـ)

## مثال (٤)

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فأوجد ل (ب).

**الحل**

∵ أ ∩ ب = $\phi$

∴ ل (أ) + ل (ب) = ل (أ ∪ ب)

$\frac{١}{٣}$ + ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$

∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ - $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

### تابع العمليات على الأحداث
# ٣ - ٢ الحدثُ المكملُ، والفرق بين حدثينِ

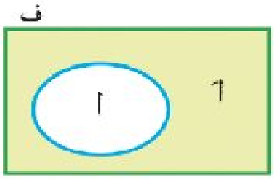
**سوف تتعلم**

- ☆ مفهوم الحدث المكمل
- ☆ مفهوم الفرق بين حدثين

**مصطلحات أساسية**

- ☆ حدث مكمل
- ☆ فرق بين حدثين

## لاحظ أن:




**فى شكل ڤن المقابل:**

إذا كانت ف المجموعة الشاملة، أ ⊂ ف

فإن مكمله المجموعة أ هى أَ ويلاحظ أن:

١ أ ∪ أَ = ف ، أ ∩ أَ = $\phi$

٢ إذا كانت ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} ، أ = {٢، ٤، ٦} فإن: أَ = {١، ٣، ٥، ٧}

**مما سبق نلاحظُ أن:** إذا كان ف فضاء العينةِ لتجربة عشوائية، و سحبت كرة واحدة من صندوق به كرات متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٧ وملاحظة الرقم عليها.

أ حدث ظهور عدد زوجى: أ = {٢، ٤، ٦}

أَ حدث ظهور عدد فردى: أَ = {١، ٣، ٥، ٧} وهو حدث مكمل للحدث أ

### ثالثا: الحدثُ المكمل:

الحدثُ المكمل للحدث أ هو أَ وهو حدث عدم وقوع أ.

**أى أن:** إذا كان أ ⊂ ف فإن أَ هو الحدث المكمل للحدث أ

حيث أ ∪ أَ = ف ، أ ∩ أَ = $\phi$

**أى أن الحدث والحدث المكمل له هما حدثان متنافيان.**

**مثال ١**

إذا كان ف فضاء العينة لتجربةٍ عشوائية، أ ⊂ ف، أَ هو الحدث المكمل للحدث أ، ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

**أكمل الجدول التالى وسجِّل ملاحظاتك.** (بكراسة الفصل)

| الحدث أ | الحدث أَ | ل (أ) | ل (أَ) | ل (أ) + ل (أَ) |
|---|---|---|---|---|
| {٢، ٤، ٦} | {١، ٣، ٥} | $\frac{٣}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | ١ |
| {١، ٢، ٣، ٤، ٥} | {٣، ٦} | $\frac{٤}{٣}$ | $\frac{١}{٣}$ | |
| {٥} | | $\frac{١}{٦}$ | | |
| {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} | | | صفر | |

**من الجدولِ السابق لاحظ ان:** ل (أ) + ل (أَ) = ١ **فيكون:** ل (أَ) = ١ - ل (أ) ، ل (أ) = ١ - ل (أَ)

**ملاحظة:** ل (أ) + ل (أَ) = ل (ف) = ١

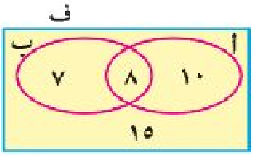
**مثال ٢**

١ فصلٌ دراسيٌّ به ٤٠ تلميذاً منهم ١٨ تلميذاً يقرءون جريدة الأخبار، ١٥ تلميذاً يقرءون جريدةَ الأهرام، ٨ تلاميذ يقرءون الجريدتين معًا. فإذا اختير تلميذ عشوائي من هذا الفصل، احسب احتمال أن يكون التلميذ:

أ يقرأ جريدة الأخبار. ب لا يقرأ جريدة الأخبار.

جـ يقرأ جريدة الأهرام. د يقرأ الجريدتين معًا.

**الحل**




بفرض أن أ حدث قراءة جريدة الأخبار ، ب حدث قراءة جريدة الأهرام

فيكون أ ∩ ب هو حدث قراءة الجريدتين معًا.

ويكون ن (ف) = ٤٠ ، ن (أ) = ١٨ ، ن (ب) = ١٥ ، ن (أ ∩ ب) = ٨

أ الحدث أ: يقرأ جريدة الأخبار فيكون ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١٨}{٤٠} = \frac{٩}{٢٠}$

ب لا يقرأ جريدة الأخبار حدث مكمل للحدث أ وهو أَ

∴ ل (أَ) = $\frac{\text{عدد عناصر المجموعة أَ}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١٠ + ٧}{٤٠} = \frac{٢٢}{٤٠} = \frac{١١}{٢٠}$

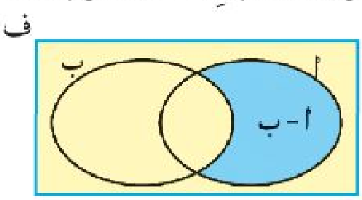
حل آخر: ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - $\frac{٩}{٢٠} = \frac{١١}{٢٠}$

جـ الحدث ب: يقرأ جريدة الأهرام فيكون: ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١٥}{٤٠} = \frac{٣}{٨}$

د الحدث أ ∩ ب يعنى قراءة الجريدتين معًا

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٨}{٤٠} = \frac{١}{٥}$

**فكر** هل حدث أن يقرأ جريدة الأخبارِ يعنى حدث أن يقرأ جريدةَ الأخبارِ فقط؟ فسر إجابتك.




**لاحظ أن:** حدث أن يقرأ جريدةَ الأخبار يمثل بشكل فن المقابل بالمجموعة أ بينما حدث أن يقرأ جريدة الأخبار فقط تعنى قراءة جريدة الأخبار دون قراءة أى جريدة أخرى وتمثل بالمجموعة أ - ب

**وتقرأ أ فرق ب**

## رابعا: الفرقُ بين حدثين

إذا كان أ، ب حدثين من ف فإن أ - ب هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أى حدث وقوع أ فقط.

لاحظ أن: $\boxed{\text{(أ - ب) ∪ (أ ∩ ب) = أ}}$

## مثال ٣

إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان ل(أ) = ٠٫٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠٫٣
فأوجد : ل(أ − ب)

الحل:

∵ (أ − ب) ∪ (أ ∩ ب) = أ

∴ ل(أ − ب) + ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

∴ ل(أ − ب) + ٠٫٣ = ٠٫٧

∴ ل(أ − ب) = ٠٫٧ − ٠٫٣ = ٠٫٤

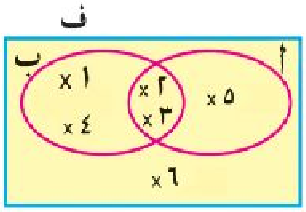
## مثال ٤

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد أولى ، ب هو حدث الحصول على عدد أقل من ٥
فأوجد :

(١) احتمال وقوع الحدث أ فقط

(٢) احتمال وقوع الحدث ب فقط

الحل




ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ،

أ = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

(١) حدث وقوع الحدث أ فقط = أ − ب = {٥} ∴ ن (أ − ب) = ١

احتمال وقوع الحدث أ فقط = ل (أ − ب) = $\frac{\text{ن (أ − ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١}{٦}$

(٢) حدث وقوع الحدث ب فقط = ب − أ = {١ ، ٤} ∴ ن (ب − أ) = ٢

احتمال وقوع الحدث ب فقط = $\frac{\text{ن (ب − أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

# الوحدة الرابعة: الدائرة

يجب أن يعرف سائقو السيارات دلالة علامات المرور جيدا والتمييز بينها

ابحث فى مصادر المعرفة المختلفة (ادارة المرور - المكتبة- الانترنت ...) عن دلالة علامات المرور


# ٤ - ١

# تعاريف ومفاهيم أساسية

## سوف تتعلم

- ☆ المفاهيم الأساسية المتعلقة بالدائرة.
- ☆ مفهوم محور التماثل فى الدائرة.

### مصطلحات أساسية

- ☆ دائرة
- ☆ سطح دائرة
- ☆ نصف قطر دائرة
- ☆ وتر
- ☆ قطر دائرة
- ☆ محور تماثل دائرة

## فكر وناقش

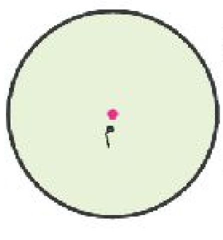
قام يوسف بتشغيل برنامج Google Earth على حاسبه الآلى لدراسة جغرافية مصر. لاحظ يوسف وجود بعض المسطحات الخضراء الدائرية الشكل بجوار المناطق الصحراوية، فسأل والده عنها.

**قال الوالد:** تعلم أن قطرة ماء تعنى ينبوع حياة، لذلك نرشد استهلاك المياه، فنروى الأراضى بطريقة الرى المحورى (رى بالرش)، وفيها تدور عجلات آلة الرى حول نقطة ثابتة فترسم هذه الدوائر.

١ كيف يمكنك رسم دائرة منتصف ملعب كرة القدم؟

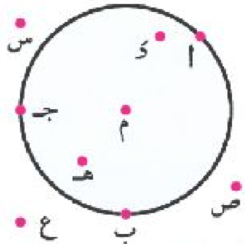
٢ ما دورك فى ترشيد استهلاك المياه؟

**الدائرة: هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة من المستوى تسمى "مركز الدائرة" ويسمى البعد الثابت "طول نصف قطر الدائرة".**




يرمز للدائرة عادة بمركزها، فنقول الدائرة م لنعنى الدائرة التى مركزها النقطة م. **كما فى الشكل المقابل.**

عند رسم دائرة م فى المستوى، فإنها تقسم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط كما بالشكل، وهى:



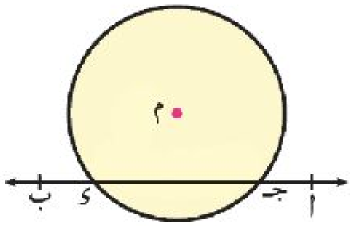

١ مجموعة النقط داخل الدائرة
مثل النقط: م، ء، هـ، ..........

٢ مجموعة النقط على الدائرة
مثل النقط: أ، ب، جـ، ..........

٣ مجموعة النقط خارج الدائرة
مثل النقط: س، ص، ع، ..........

**سطح الدائرة:** هو مجموعة نقط الدائرة $\cup$ مجموعة النقط داخل الدائرة.

### مثال ١

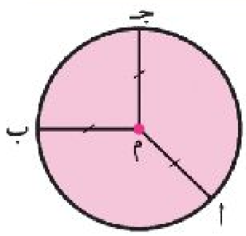



في الشكل المقابل، **لاحظ أن:**

١ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\cap$ الدائرة م = {جـ ، ى} ٢ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\cap$ سطح الدائرة م = $\overline{\text{جـ ى}}$

٣ م $\not\in$ الدائرة م، م $\in$ سطح الدائرة م

**نصف قطر الدائرة:** هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة.



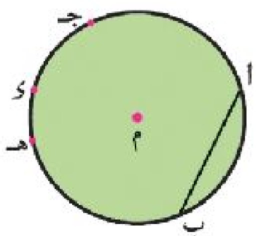

في الشكل المقابل $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ أنصاف أقطار للدائرة م حيث:

م أ = م ب = م جـ = طول نصف قطر الدائرة (نق)

**تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفي قطريهما**

**الوتر:** هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) أي نقطتين على الدائرة

### تدرب

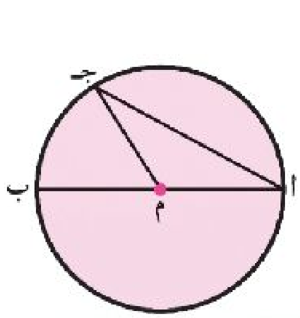



في الشكل المقابل:

ارسم جميع أوتار الدائرة التي تمر بأزواج النقط أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ

**القطر:** هو الوتر المار بمركز الدائرة

### تدرب




١ أي الأوتار في **الشكل المقابل** قطر في الدائرة م؟

٢ ما عدد أقطار أي دائرة؟

٣ لإثبات أن قطر الدائرة هو أكبر أوتارها طولاً:

في المثلث أ م جـ: أ م + م جـ > أ جـ

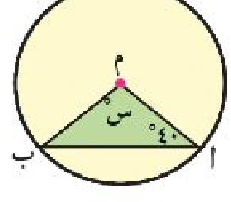
في الدائرة م: جـ م = ب م (أنصاف أقطار)

فيكون: أ م + م ب > أ جـ $\therefore$ أ ب > أ جـ

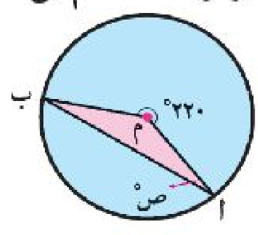
**تدرب**

**فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:**

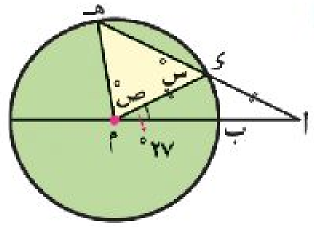
أ



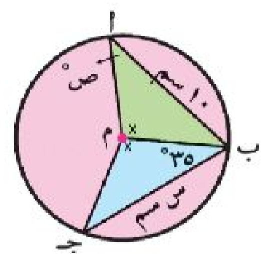

ب



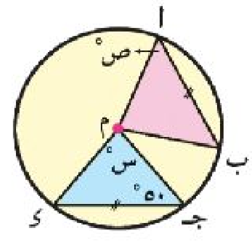

جـ



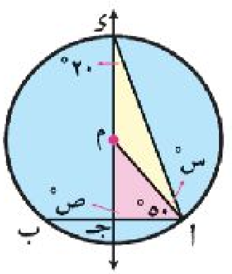

د




هـ




و




**مثال ١**




**فى الشكل المقابل:** $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{بأ} \cap \overleftarrow{ىجـ} = \{ن\}$.

**أثبت أن:** ن ب > ن ى

**الحل**

نرسم نصف القطر $\overline{مى}$ ، فى $\Delta$ ن م ى: م ن + م ى > ن ى

∵ م ب = م ى (أنصاف أقطار)

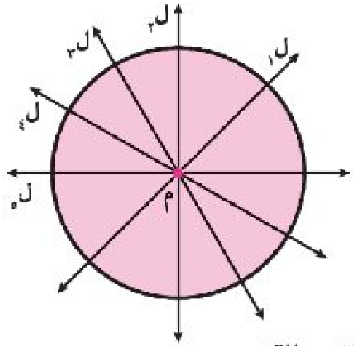
∴ م ن + م ب > ن ى

∴ ن ب > ن ى (وهو المطلوب)

**تدرب**

فى المثال السابق أثبت أن: ن جـ > ن أ.

## التماثل فى الدائرة




### نشاط ١

١ ارسم الدائرة م على ورقه شفافة باستخدام الفرجار.
٢ ارسم مستقيمًا ل١ يمر بمركز الدائرة و يقسمها إلى قوسين.
٣ اطوِ الورقة حول المستقيم ل١، ماذا تلاحظ؟
٤ ارسم مستقيمًا آخر ل٢ يمر بمركز الدائرة ثم اطوِ الورقة حوله .
كرر العمل عدة مرات برسم المستقيمات ل٣، ل٤، ......... ماذا تلاحظ فى كل حالة؟

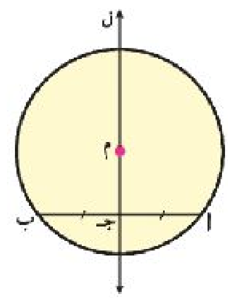
**من النشاط السابق نستنتج أن:**

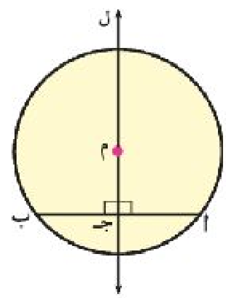
**أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها**

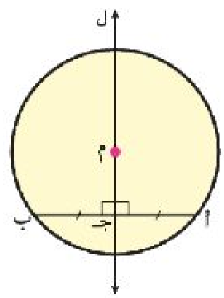
**فكر** ما عدد محاور التماثل فى الدائرة؟

### نشاط ٢

**ادرس كلاً من الأشكال التالية (المعطيات كما بالرسم)، ماذا تستنتج؟**

١



٢



٣


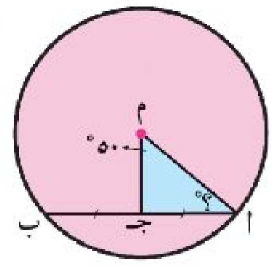

**نتائج هامة**

| | |
|---|---|
| **من ١** | المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديًا على هذا الوتر. |
| **من ٢** | المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر. |
| **من ٣** | المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة. |

**تدرب** أجب في كراسة الفصل:

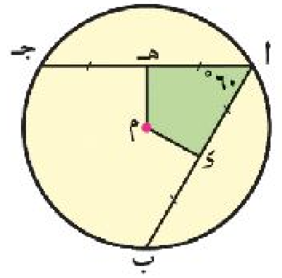
**١** في كل من الأشكال الآتية م دائرة

أ



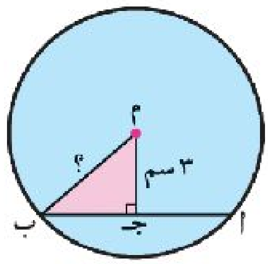

**أوجد** ق (∠ م أ جـ)

ب




**أوجد** ق (∠ ى م هـ)

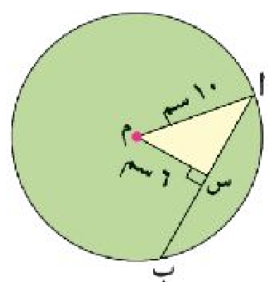
جـ




إذا كان أ ب = ٨سم

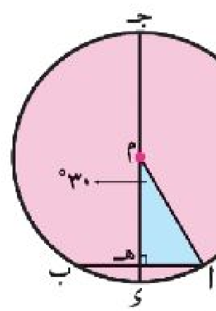
**أوجد** م ب:

د




**أوجد** أ ب

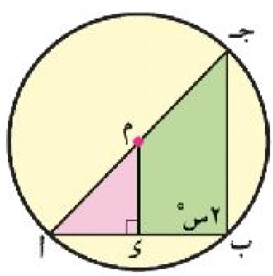
هـ




إذا كان أ ب = ١٠سم

**أوجد** جـ ى

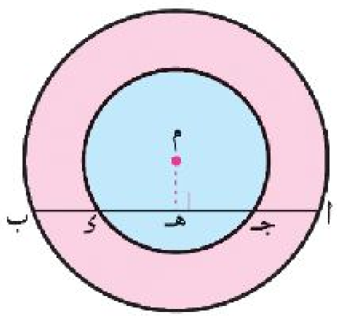
و




**أوجد قيمة** س

**مثال ٢**

**في الشكل المقابل:** دائرتان متحدتا المركز م، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى في جـ، ى. **أثبت أن:** أ جـ = ب ى




**الحل**

**المعطيات:** $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ الدائرة الصغرى = {جـ، ى}

**المطلوب:** أ جـ = ب ى

**العمل:** نرسم $\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$ تقطعها فى هـ.

**البرهان:** فى الدائرة الكبرى $\overleftrightarrow{م هـ} \perp \overline{أ ب}$ $\therefore$ هـ أ = هـ ب (١) (نتيجة)

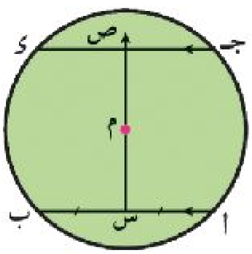
فى الدائرة الصغرى $\overleftrightarrow{م هـ} \perp \overline{جـ ى}$ $\therefore$ هـ جـ = هـ ى (٢) (نتيجة)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن:

هـ أ - هـ جـ = هـ ب - هـ ى $\therefore$ أ جـ = ب ى (وهو المطلوب)

## مثال ٣

فى الشكل المقابل: م دائرة، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ى}$ ، س منتصف $\overline{أ ب}$ رسم $\overleftarrow{س م}$ فقطع $\overline{جـ ى}$ فى ص. **أثبت أن** ص منتصف $\overline{جـ ى}$




**الحل**

**المعطيات:** $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ى}$ ، أ س = ب س

**المطلوب:** جـ ص = ى ص

**البرهان:** $\because$ س منتصف $\overline{أ ب}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{م س} \perp \overline{أ ب}$

$\because$ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ى}$ ، $\overleftrightarrow{س ص}$ قاطع لهما

$\therefore$ ق ($\angle$ ى ص س) = ق ($\angle$ أ س ص) = ٩٠° بالتبادل

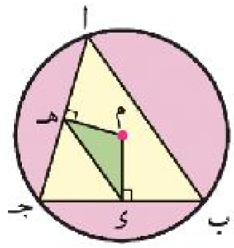
$\therefore$ $\overleftrightarrow{م ص} \perp \overline{جـ ى}$

$\therefore$ ص منتصف $\overline{جـ ى}$ (وهو المطلوب)

مثال ٤

في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م،

$\overline{مء} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$




**أثبت أن:** أولاً: $\overline{هـ ء} // \overline{أ ب}$

ثانيًا: محيط $\Delta$ جـ ء هـ $= \frac{١}{٢}$ محيط $\Delta$ أ ب جـ

الحل

**المعطيات:** $\overline{مء} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

**المطلوب:** أولاً: $\overline{هـ ء} // \overline{أ ب}$

ثانيًا: محيط $\Delta$ جـ ء هـ $= \frac{١}{٢}$ محيط $\Delta$ أ ب جـ

**البرهان:**

أولاً: $\because$ $\overline{مء} \perp \overline{ب جـ}$ $\therefore$ ء منتصف $\overline{ب جـ}$ (١)

$\because$ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$ $\therefore$ هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ (٢)

في $\Delta$ أ ب جـ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

$\therefore$ $\overline{ء هـ} // \overline{أ ب}$ (وهو المطلوب أولاً)

، ء هـ $= \frac{١}{٢}$ أ ب (٣)

ثانيًا: من (١)، (٢)، (٣):

$\therefore$ محيط $\Delta$ جـ ء هـ = جـ ء + جـ هـ + هـ ء $= \frac{١}{٢}$ جـ ب $+ \frac{١}{٢}$ أ جـ $+ \frac{١}{٢}$ أ ب

$= \frac{١}{٢}$ (جـ ب + أ جـ + أ ب)

$= \frac{١}{٢}$ محيط $\Delta$ أ ب جـ

# ٤ – ٢

# أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

### سوف تتعلم

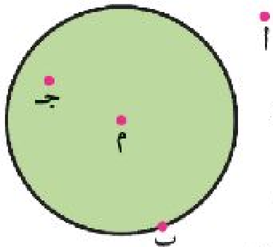
- ☆ تحديد وضع نقطة بالنسبة لدائرة .
- ☆ تحديد وضع مستقيم بالنسبة لدائرة .
- ☆ تحديد علاقة المماس بنصف قطر الدائرة.
- ☆ تحديد وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.
- ☆ علاقة خط المركزين بالوتر المشترك والمماس المشترك.

### مصطلحات أساسية

- ☆ نقطة تقع خارج دائرة
- ☆ نقطة تقع على دائرة
- ☆ نقطة تقع داخل دائرة
- ☆ دائرتان متباعدتان
- ☆ دائرتان متقاطعتان
- ☆ دائرتان متماستان
- ☆ مماس مشترك
- ☆ خط المركزين
- ☆ وتر مشترك

## أولا : وضع نقطة بالنسبة لدائرة .

### فكر وناقش

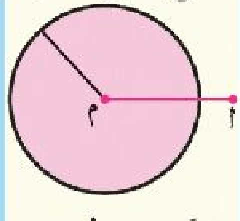
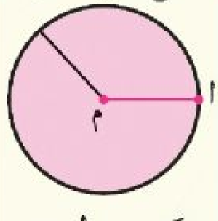
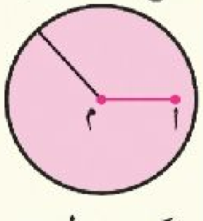



فى الشكل المقابل، الدائرة م تجزئ نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط.

١ كيف تحدد وضع النقاط : أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م؟

٢ ما العلاقة بين (م أ، نق)، (م ب، نق)، (م جـ، نق)؟

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، وكانت أ نقطة فى مستوى الدائرة، فإن:

| ١ أ تقع خارج الدائرة | ٢ أ تقع على الدائرة | ٣ أ تقع داخل الدائرة |
|---|---|---|
|  |  |  |
| ويكون: م أ $>$ نق والعكس صحيح | ويكون: م أ = نق والعكس صحيح | ويكون: م أ $<$ نق والعكس صحيح |

### لاحظ الآتي :

**إذا كانت م دائرة، طول نصف قطرها = ٤ سم، أ نقطة فى مستواها فإنه :**

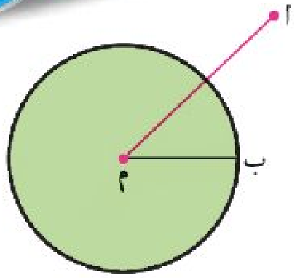
١ إذا كان: م أ = ٤سم، فأين تقع أ من الدائرة م، **مع ذكر السبب**

٢ إذا كان: م أ = $٢\sqrt{٣}$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، **مع ذكر السبب**

٣ إذا كان: م أ = $٣\sqrt{٢}$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، **مع ذكر السبب**

٤ إذا كان: م أ = صفرًا، فأين تقع أ من الدائرة م، **ماذا نلاحظ؟**

## مثال ١




إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، أ نقطة فى مستوى الدائرة، م أ = ٢س - ٣ من السنتيمترات. **أوجد** قيم س عندما تقع أ خارج الدائرة.

**الحل**

∵ نقطة أ تقع خارج الدائرة م ∴ م أ > ٥ فيكون: ٢س - ٣ > ٥ أى أن: ٢س > ٨ ∴ س > ٤

## تدرب

**فى المثال السابق، أوجد قيمة س فى الحالات التالية:**

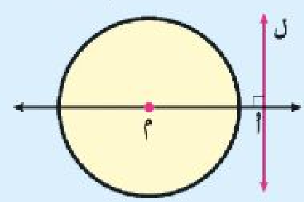
١ م أ = ٢س + ١، النقطة أ على الدائرة. ٢ م أ = ٨س - ٢٧، النقطة أ داخل الدائرة.

## ثانيًا: وضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، ل مستقيم فى مستويها، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل حيث $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ∩ ل = {أ}، فإن:

١ المستقيم ل يقع خارج الدائرة م

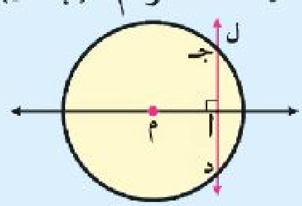
ل ∩ الدائرة م = ϕ




ويكون: م أ > نق
والعكس صحيح

٢ المستقيم ل قاطع للدائرة م

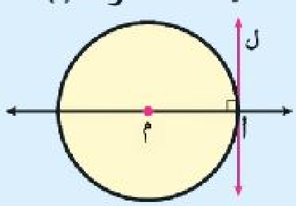
ل ∩ الدائرة م = {جـ، ء}




ويكون: م أ < نق
والعكس صحيح

٣ المستقيم ل مماس للدائرة م

ل ∩ الدائرة = {أ}




ويكون: م أ = نق
والعكس صحيح

**فكر** فى كل من الحالات السابقة، أوجد ل ∩ سطح الدائرة م.

### لاحظ الآتي:

**إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧سم، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل حيث أ ∈ ل؛** فإنه:

١ **إذا كان** م أ = ٤ $\sqrt{3}$ سم فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م

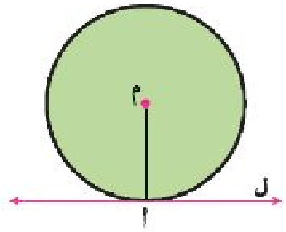
٢ **إذا كان** م أ = ٣ $\sqrt{7}$ سم فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م

٣ **إذا كان** ٢ م أ - ٥ = ٩ فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م

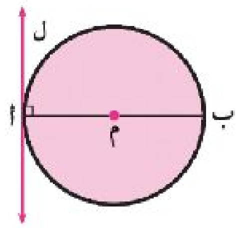
٤ **إذا كان** المستقيم ل يقطع الدائرة م، م أ = ٣س - ٥ فما قيمة س؟

٥ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م، م أ = س$^{2}$ - ٢ فما قيمة س؟

## حقائق هامة




١ المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.



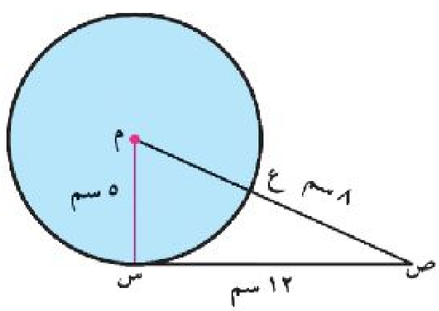

٢ المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًا للدائرة.

فكر

١ كم مماسًا يمكن رسمه للدائرة م؟
أولاً: من نقطة على الدائرة. ثانيًا: من نقطة خارج الدائرة.

٢ ما العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتى أى قطر فيها؟

### مثال ٢




**فى الشكل المقابل:** م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، س ص = ١٢سم، $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع}، ع ص = ٨سم.

**أثبت أن:** $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م عند س.

**الحل**

∵ $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع} ∴ م ص = م ع + ع ص

∵ م ع = م س = ٥سم (أنصاف أقطار) ∴ م ص = ٥ + ٨ = ١٣سم

∵ (م ص)$^{٢}$ = (١٣)$^{٢}$ = ١٦٩ ، (م س)$^{٢}$ = (٥)$^{٢}$ = ٢٥ ، (س ص)$^{٢}$ = (١٢)$^{٢}$ = ١٤٤

∴ (م س)$^{٢}$ + (س ص)$^{٢}$ = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ = (م ص)$^{٢}$

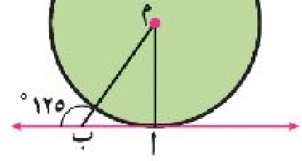
∴ ق (∠ م س ص) = ٩٠° **(عكس نظرية فيثاغورث)**

∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{م س}}$

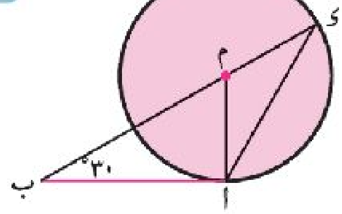
∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند س **(وهو المطلوب)**

**تدرب** أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل :

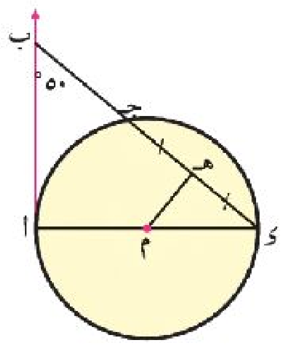
**١** في كل من الأشكال الآتية، م دائرة، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس :

أ


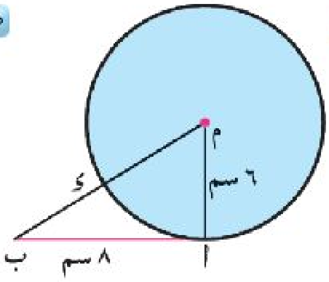

**أوجد** ق (∠ أ م ب)

ب


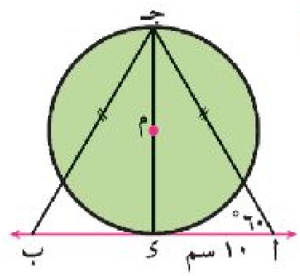

**أوجد** ق (∠ أ ى ب)

جـ


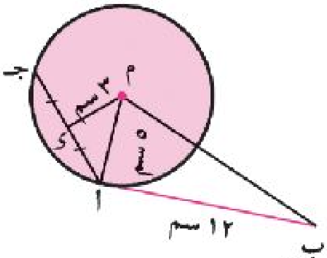

**أوجد** ق (∠ أ م هـ)

د



**أوجد** طول $\overline{ى ب}$

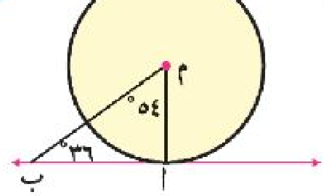
هـ


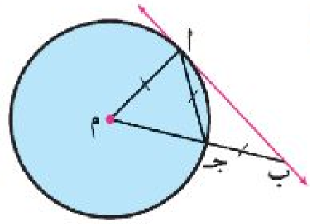

**أوجد** محيط Δ أ ب جـ

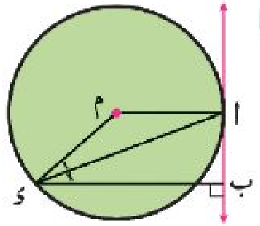
و



**أوجد** محيط الشكل أ ب م ى

**٢** في كل من الأشكال الآتية وضح لماذا يكون $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م:

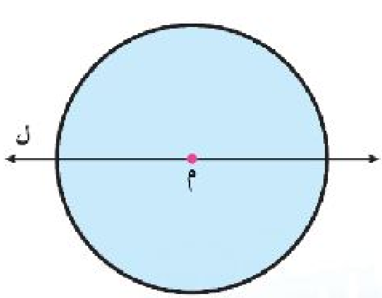
أ



ب



جـ



**ثالثًا : وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى**

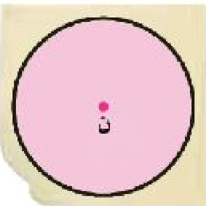
**تدرب**




**١** ارسم دائرة مركزها م بطول نصف قطر مناسب = نق سم.

**٢** ارسم أحد محاور تماثل الدائرة م وليكن المستقيم ل كما في الشكل المقابل.

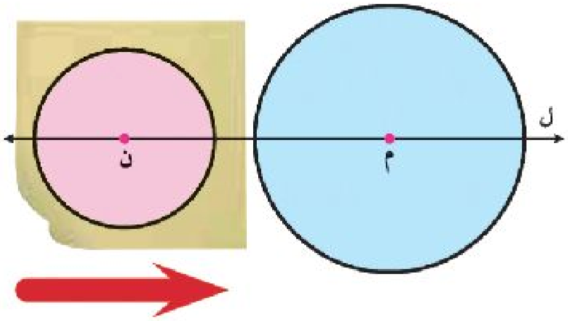
٣ على ورقة شفافة،
ارسم دائرة مركزها ن بطول نصف قطر مناسب = $نق_2$ سم حيث $نق_2 < نق_1$.




٤ ضع الورقة الشفافة بحيث تنتمى النقطة ن إلى المستقيم ل .

**لاحظ أن** المستقيم ل = $\overleftrightarrow{م ن}$ ويسمى $\overleftrightarrow{م ن}$ خط المركزين للدائرتين م، ن وهو محور تماثل لهما.

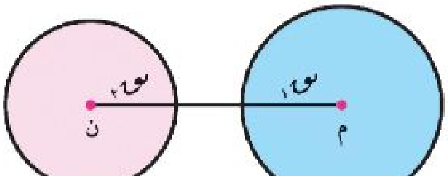
٥ حرك ورقة الشفاف نحو الدائرة م بحيث تظل ن $\in$ ل لتشاهد أوضاعًا مختلفة للدائرتين.
قس طول $\overline{م ن}$ فى كل حالة.
ما العلاقة بين طول $\overline{م ن}$ **(البعد بين مركزى الدائرتين م، ن)**، $نق_1 + نق_2$ أو $نق_1 - نق_2$ فى كل وضع.



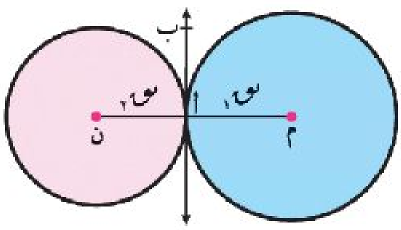

## لاحظ الآتى:

**إذا كان م، ن دائرتين فى المستوى، طولا نصفى قطريهما $نق_1$، $نق_2$ على الترتيب حيث $نق_1 > نق_2$ فإنه:**

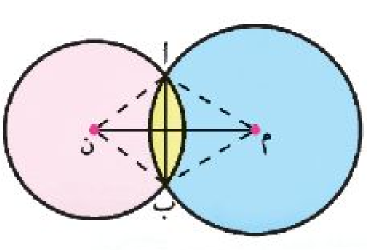
١ إذا كان: م ن $> نق_1 + نق_2$، فإن م $\cap$ ن = $\phi$ ،
سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = $\phi$
وتكون الدائرتان متباعدتين.

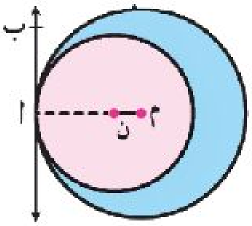



٢ إذا كان: م ن = $نق_1 + نق_2$، فإن م $\cap$ ن = { أ } ،
سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = { أ }
وتكون الدائرتان متماستين من الخارج.

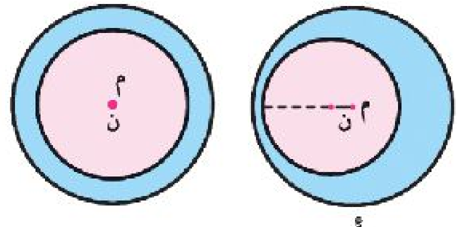



٣ إذا كان: $نق_1 - نق_2 <$ م ن $< نق_1 + نق_2$،
فإن م $\cap$ ن = { أ ، ب }
سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح المنطقة الصفراء
وتكون الدائرتان متقاطعتين.






٤ إذا كان: م ن = نق١ - نق٢، فإن م ∩ ن = {ا} ،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
وتكون الدائرتان متماستين من الداخل.




أ ب

٥ إذا كان: م ن < نق١ - نق٢، فإن م ∩ ن = $\phi$ ،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
وتكون الدائرتان متداخلتين كما فى شكل أ
وعندما م ن = صفر، تكون الدائرتان متحدتى المركز.
كما فى شكل ب

## نتائج

١ خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس، ويكون عموديًّا على المماس المشترك عند هذه النقطة.
٢ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك وينصفه.

## مثال ٣

**دائرتان م، ن طولا نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم على الترتيب، بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية:**

أ م ن = ١٣سم ب م ن = ٥سم جـ م ن = ٣سم
د م ن = صفر هـ م ن = ١٠سم و م ن = ١٥سم

### الحل

∵ نق١ = ٩سم، نق٢ = ٤سم ∴ نق١ + نق٢ = ١٣سم، نق١ - نق٢ = ٥سم

أ م ن = ١٣سم ∴ م ن = نق١ + نق٢ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج.

ب م ن = ٥سم ∴ م ن = نق١ - نق٢ ∴ الدائرتان متماستان من الداخل.

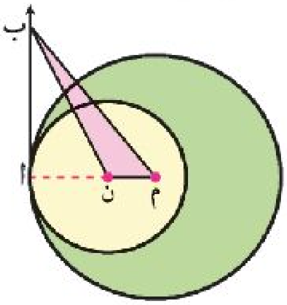
جـ م ن = ٣سم ∴ م ن < نق١ - نق٢، م ن ≠ ٠ ∴ الدائرة ن تقع داخل الدائرة م.

د م ن = صفر ∴ الدائرتان متحدتا المركز.

هـ م ن = ١٠سم ∴ نق١ - نق٢ < م ن < نق١ + نق٢ ∴ الدائرتان متقاطعتان.

و م ن = ١٥سم ∴ م ن > نق١ + نق٢ ∴ الدائرتان متباعدتان.

## مثال ٤




م، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠سم، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل فى أ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك لهما عند أ. إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤سم$^{٢}$، **أوجد** طول $\overline{\text{أ ب}}$ .

**الحل**

$\because$ الدائرتان متماستان من الداخل عند أ $\therefore$ أ $\in \overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فيكون طول $\overline{\text{أ ب}}$ ارتفاعًا للمثلث ب م ن الذى قاعدته $\overline{\text{م ن}}$ حيث: م ن = ١٠ - ٦ = ٤ سم (لماذا؟)

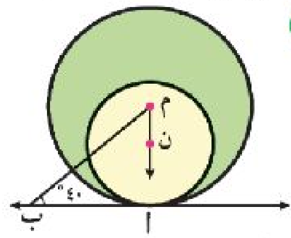
مساحة $\Delta$ ب م ن = $\frac{١}{٢}$ × م ن × أ ب $\therefore$ ٢٤ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × أ ب $\therefore$ أ ب = ١٢ سم

## تدرب

أجب عن الآتي في كراسة الفصل:

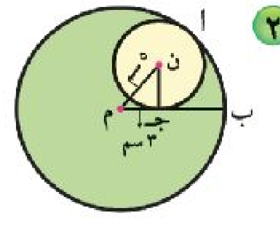
**فى كل من الأشكال الآتية الدوائر متماسة مَثْنَى مَثْنَى، باستخدام معلومات كل شكل**

١



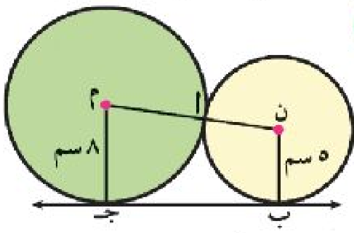

أوجد ق ($\measuredangle$ ب م ن)

٢



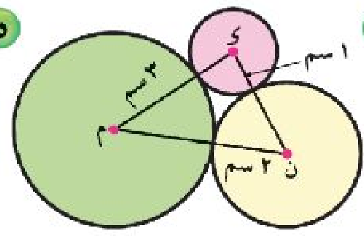

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$

٣



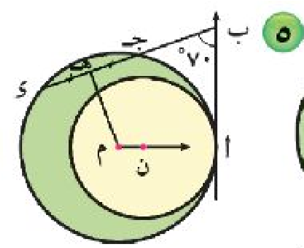

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$

٤



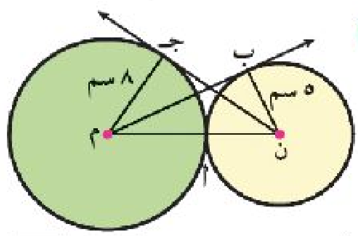

أوجد ق ($\measuredangle$ م ى ن)

٥



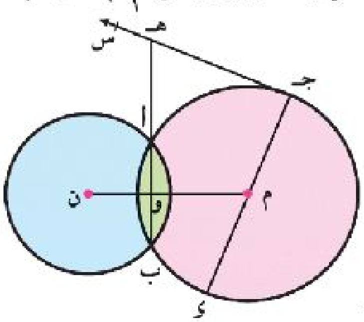

أوجد ق ($\measuredangle$ هـ م ن)

٦




أوجد طولى كل من $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{ن جـ}}$

## مثال ٥




م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، $\overline{\text{جـ ى}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ مماس للدائرة م عند جـ، $\overleftarrow{\text{جـ س}} \cap \overleftarrow{\text{ب أ}}$ = {هـ}، $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \cap \overline{\text{أ ب}}$ = {و}. **أثبت أن:** ق ($\measuredangle$ ى م ن) = ق ($\measuredangle$ جـ هـ ب).

**الحل**

**المعطيات:** الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ، ب}، $\overline{\text{جـ ى}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ مماس للدائرة م.

**المطلوب:** إثبات أن ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ ب).

**البرهان:** ∵ خط المركزين عمودى على الوتر المشترك.

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ أى ق (∠ أ و م) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{جـ ى}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ مماس عند جـ

∴ $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ى}}$ أى ق (∠ هـ جـ ى) = ٩٠°

∴ ق (∠ جـ هـ و) + ق (∠ جـ م و) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠°) = ١٨٠° **(لماذا؟)**

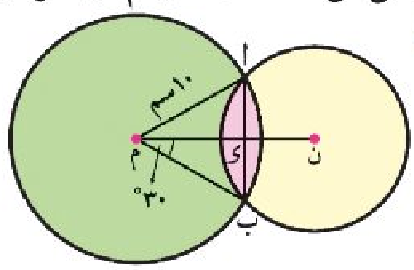
∵ ق (∠ ى م و) + ق (∠ جـ م و) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ و) **وهو المطلوب**

**تدرب** أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:

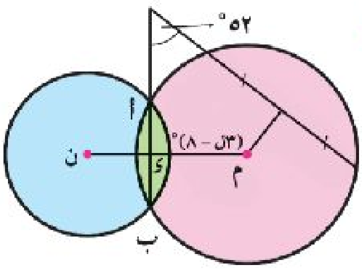
**١** فى كل من الأشكال الآتية م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب:

**أ**




أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

**ب**




أوجد قيمة ل

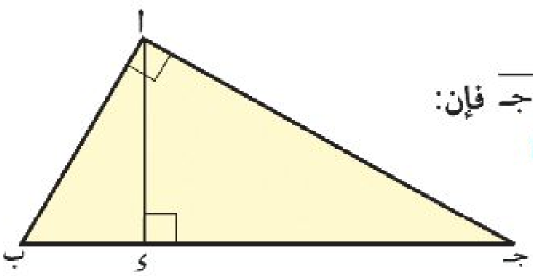
## لاحظ أن:

**فى المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى أ إذا رسم $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإن:**

(أ ب)$^2$ = ب ى × ب جـ **(نظرية إقليدس)**

، (أ ى)$^2$ = ى ب × ى جـ **(نتيجة)**

، أ ى × ب جـ = أ ب × أ جـ **لماذا؟**

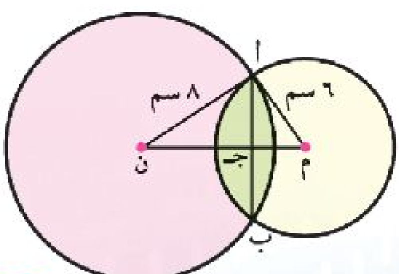



**٢** فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب

$\overline{\text{م ن}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {جـ}، أ م = ٦ سم، أ ن = ٨ سم،

$\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ن}}$.

**أوجد** طول $\overline{\text{أ ب}}$



# ٤ - ٣

# تعيين الدائرة

☆ كيفية رسم دائرة تمر بنقطة معلومة .

☆ كيفية رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين.

☆ كيفية رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة .

**مصطلحات أساسية**

☆ دائرة خارجة لمثلث.

## فكر وناقش

- لماذا يستخدم الفرجار فى رسم الدائرة؟
- ما محور القطعة المستقيمة.
- هل مركز الدائرة يقع على محور أى وتر فيها؟
- كيف يمكنك رسم (تعيين) دائرة فى المستوى؟

**يمكن رسم (تعيين) دائرة بشروط معطاة، مهما اختلفت، إذا علم:**

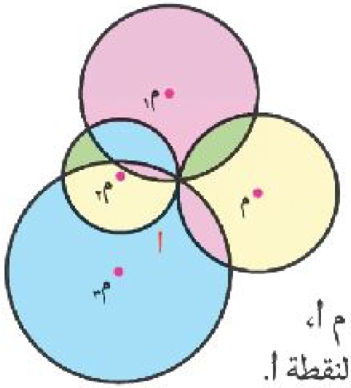
١ مركز الدائرة. ٢ طول نصف قطر الدائرة.

### أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:

**المعطيات:** أ نقطة معلومة فى المستوى.

**المطلوب:** رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

**الانشاء:**




١ خذ أى نقطة اختيارية مثل م فى نفس المستوى.

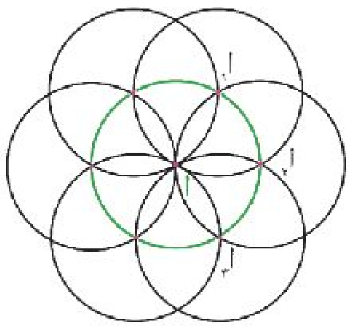
٢ ضع سن الفرجار عند م وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

٣ ضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م١ ، وبفتحة تعادل م١ أ ارسم الدائرة م١، نجد أن الدائرة م١ تمر بالنقطة أ.

٤ كرر العمل السابق

**لاحظ أن:** لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

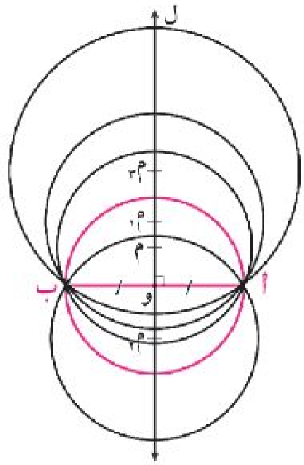
✍ كم عدد نقاط المستوى؟ كم عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالنقطة أ؟
✍ إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية في الطول، أين تقع مراكزها؟




مما سبق نستنتج أن:

١ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل أ.

٢ إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية في الطول، فإن مراكزها تقع على دائرة مطابقة لهم ومركزها النقطة أ.




**ثانيًا: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين:**

**المعطيات:** أ، ب نقطتان معلومتان في المستوى.

**المطلوب:** رسم دائرة م تمر بالنقطتين أ، ب أي أن $\overline{أب}$ وتر في الدائرة م.

**الإنشاء:**

١ ارسم القطعة المستقيمة $\overline{أب}$.

٢ ارسم المستقيم ل محور $\overline{أب}$ حيث ل $\cap$ $\overline{أب}$ = {و}
(مركز الدائرة يقع على محور الوتر $\overline{أب}$).

٣ خذ أي نقطة اختيارية م حيث م $\in$ ل، اركز بسن الفرجار في م وبفتحه تعادل م أ ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطة ب.

٤ ضع سن الفرجار في نقطة أخرى مثل م$_1$ حيث م$_1$ $\in$ ل، وبفتحة تعادل م$_1$أ ارسم الدائرة م$_1$ حيث تمر بالنقطة ب.

٥ كرر العمل السابق ولاحظ:

**لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين أ، ب**

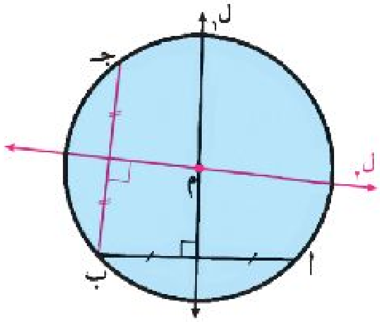
✍ كم عدد نقاط المستقيم ل؟ كم عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالنقطتين أ، ب؟
✍ ما طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ، ب؟
✍ هل يمكن أن تتقاطع دائرتان في أكثر من نقطتين؟

مما سبق نستنتج أن:

١ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين مثل أ، ب.

٢ طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لكي تمر بالنقطتين أ، ب يكون مساويًا $\frac{1}{2}$ أ ب.

٣ لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين.




**ثالثًا: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة:**

المعطيات: أ، ب، جـ ثلاث نقاط معلومة فى المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، جـ.

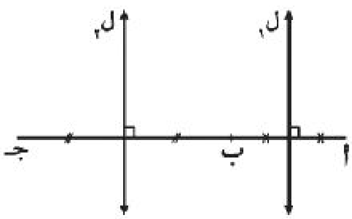
الإنشاء:

١ ارسم المستقيم $ل_1$ محور $\overline{أب}$ فيكون م $\in$ $ل_1$.

٢ ارسم المستقيم $ل_2$ محور ب جـ فيكون م $\in$ $ل_2$.

٣ إذا كان $ل_1 \cap ل_2$ = {م}، ضع سن الفرجار فى النقطة م وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطتين ب، جـ.

٤ إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \phi$؛ فهل يمكنك تعيين موضع النقطة م؟ فسر إجابتك.




**لاحظ أن:**

إذا كان أ، ب، جـ على استقامة واحدة فإن $ل_1$ // $ل_2$، $ل_1 \cap ل_2 = \phi$

ولا يمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، جـ.

مما سبق نستنتج أن:

أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها دائرة وحيدة

## نتائج

**نتيجة (١)** الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة للمثلث.

كما يقال إن المثلث مرسوم داخل دائرة إذا وقعت رؤوسه على الدائرة.

**نتيجة (٢)** الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث.

٤ - ٤

# علاقة أوتار الدائرة بمركزها

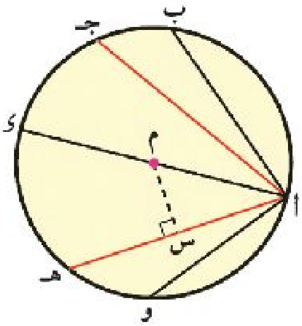
### سوف تتعلم

- ☆ استنتاج العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.
- ☆ كيفية حل مسائل على العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها

### مصطلحات أساسية

- ☆ أوتار متساوية
- ☆ دوائر متطابقة

## فكر وناقش




فى الشكل المقابل:

أ نقطة على الدائرة م، رسمت فيها الأوتار $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ى}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{أ و}}$ .

١ ما العلاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة؟

٢ إذا تساوت الأوتار فى الطول، ماذا تستنتج؟

٣ إذا تساوت أبعاد الأوتار عن مركز الدائرة ماذا تتوقع؟

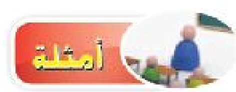
### لاحظ أن:

بُعدْ الوتر $\overline{\text{أ هـ}}$ ، عن مركز الدائرة م = م س حيث س منتصف الوتر $\overline{\text{أ هـ}}$ ، فى الدائرة م التى طول نصف قطرها نق.

فيكون: (م س)$^2$ + (أ س)$^2$ = (أ م)$^2$ = نق$^2$ (مقدار ثابت)

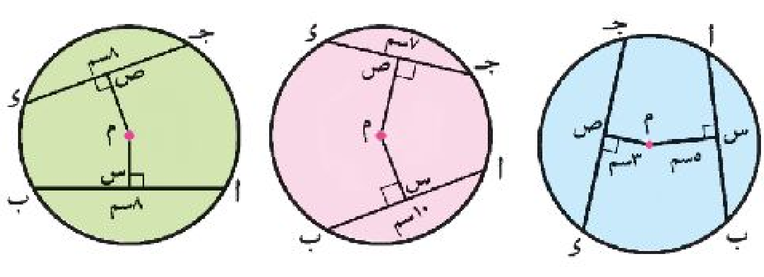
أى أن:

**كلما اقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله والعكس صحيح**



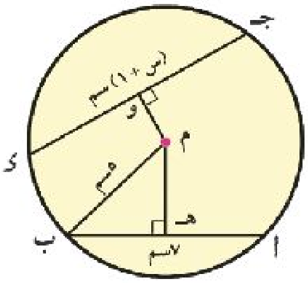
## أمثلة

١ أكمل باستخدام (> أ، < أ، =):




أ ب < جـ ى م س < م ص م س = م ص

٢ في الشكل المقابل م و < م هـ، أوجد الفترة التي تنتمي اليها س:




∵ م و < م هـ     ∴ جـ ى > أ ب

∴ س + ١ > ٧     س > ٦

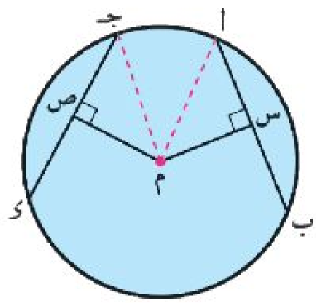
∵ جـ ى وتر في الدائرة م     ∴ جـ ى ≤ ١٠

∴ س ≤ ٩     ويكون ٦ < س ≤ ٩

أي أن: س ∈ ]٦، ٩]

## نظرية

**الأوتار المتساوية الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.**




**المعطيات:** أ ب = جـ ى، م س ⊥ أ ب، م ص ⊥ جـ ى.

**المطلوب:** إثبات أن م س = م ص.

**العمل:** نرسم م أ، م جـ.

**البرهان:** ∵ م س ⊥ أ ب     ∴ أ س = $\frac{1}{2}$ أ ب.

∵ م ص ⊥ جـ ى     ∴ جـ ص = $\frac{1}{2}$ جـ ى.

∵ أ ب = جـ ى     ∴ أ س = جـ ص.

∵ المثلثين أ س م، جـ ص م، فيهما:

أ م = جـ م

ق (∠ أ س م) = ق (∠ جـ ص م) = ٩٠°

أ س = جـ ص     (برهاناً)

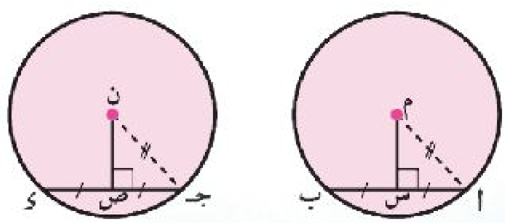
∴ Δ أ س م ≡ Δ جـ ص م     وينتج أن: م س = م ص     (وهو المطلوب)

## نتيجة

**الأوتار المتساوية الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مراكزها**

**في الشكل المقابل:**

الدائرتان م، ن متطابقتان، أ ب = جـ ى، م س ⊥ أ ب، ن ص ⊥ جـ ى، فإن: م س = ن ص.



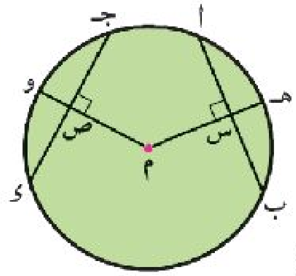
## مثال (٣)

ادرس الشكل ثم أوجد المطلوب:

**أ إذا كان:**

أ ب = جـ ى

اثبت أن: هـ س = و ص




**الحل**

∵ م س = م ص (١)

∵ م هـ = م و (٢) بطرح معادلة (١) من (٢)

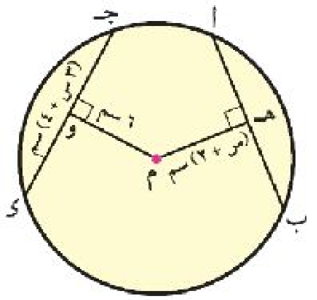
∴ هـ س = و ص

**ب إذا كان:**

أ ب = جـ ى

فأوجد كل من:

قيمة س، طول جـ ى




**الحل**

∵ م هـ = م و

∴ س + ٢ = ٦

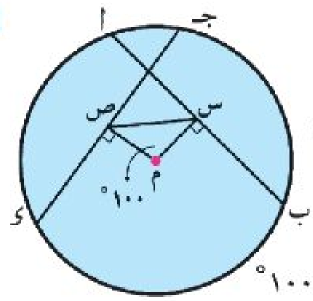
∴ س = ٤ سم ،

جـ ى = ٣س + ٤ = ٣ × ٤ + ٤ = ١٦ سم

**جـ إذا كان:**

أ ب = جـ ى

فأوجد : ق (∠ م س ص)




**الحل :** م س = م ص

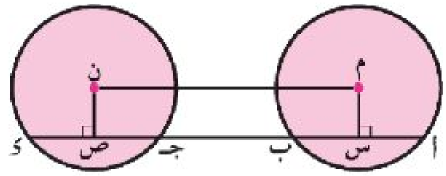
في Δ م س ص

∵ ق (∠ س م ص) = ١٠٠°

∴ ق (∠ م س ص) + ق (∠ م ص س) = ٨٠°

∴ ق (∠ م س ص) = ٨٠ ÷ ٢ = ٤٠°

**د**




**إذا كان:** م ، ن دائرتين متطابقتين، أ ب = جـ ى

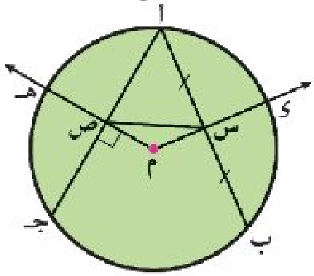
فأثبت الشكل م س ص ن مستطيل

**الحل :** $\overline{\text{م س}}$ // $\overline{\text{ن ص}}$ ، $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

، م س = ن ص

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

## مثال ٤




$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{م س}}$ يقطع الدائرة في ى، $\overrightarrow{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ يقطعه في ص ويقطع الدائرة في هـ.

**أثبت أن: أولاً:** س ى = ص هـ.

**ثانيًا:** ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ)

**المعطيات:** أ ب = أ جـ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

**المطلوب:** إثبات أن:

**أولاً:** س ى = ص هـ

**ثانيًا:** ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ)

**البرهان:** ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overrightarrow{م س} \perp \overline{أب}$.

∵ أب = أجـ، $\overrightarrow{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overrightarrow{م ص} \perp \overline{أجـ}$ ∴ م س = م ص ، ∵ م ى = م هـ = نق

∴ م ى - م س = م هـ - م ص ∴ س ى = ص هـ **(المطلوب أولاً)**

في $\Delta$ م س ص: ∵ م س = م ص ∴ ق (∠ ص س م) = ق (∠ س ص م) (١)

∵ $\overrightarrow{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overrightarrow{م ص} \perp \overline{أجـ}$ ∴ ق (∠ م س ب) = ق (∠ م ص جـ) = ٩٠° (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ) **(وهو المطلوب ثانيًا)**

**عكس النظرية**

**فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول.**

**تدرب** أجب عن الآتى في كراسة الفصل:

**ادرس الشكل ثم أكمل:**

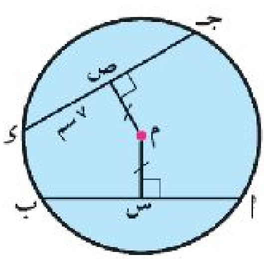
١ **إذا كان:**

م س = م ص،

ص ى = ٧سم

**فأوجد :**

طول $\overline{أب}$

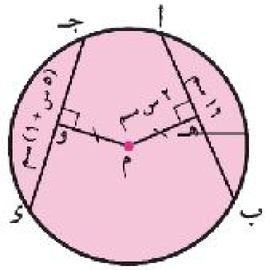


٢ **إذا كان:**

م هـ = م و

**فأوجد :**

طول $\overline{أب}$



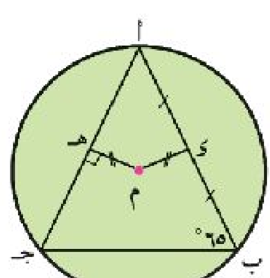
٣ **إذا كان:**

م ى = م هـ

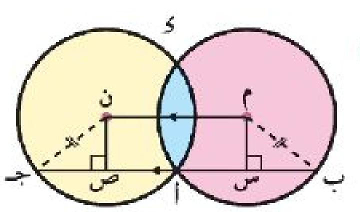
ق (∠ ب) = ٦٥°

**فأوجد :**

ق (∠ أ)



٤



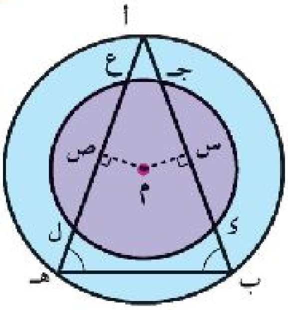
الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = {أ ، ى} ،

م ب = ن جـ ،

$\overleftrightarrow{م ن} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}$

أثبت أن: أب = أجـ

## أمثلة




٥ دائرتان متحدتا المركز م، رسم $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى فى جـ، ى، ورسم $\overline{أهـ}$ وترًا فى الدائرة الكبرى أيضًا فقطع الدائرة الصغرى فى ع، ل.
إذا كان ق ($\angle$ أ ب هـ) = ق ($\angle$ أ هـ ب)، **فأثبت أن:** جـ ى = ع ل.

**الحل**

**المعطيات:** ق ($\angle$ أ ب هـ) = ق ($\angle$ أ هـ ب)

**المطلوب:** إثبات أن جـ ى = ع ل

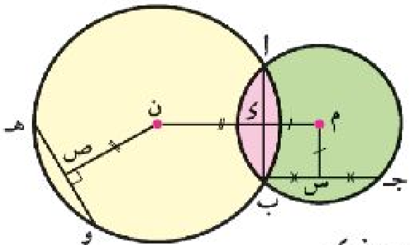
**العمل:** نرسم $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$، $\overline{م ص} \perp \overline{أ هـ}$

**البرهان:** فى $\Delta$ أ ب جـ: $\because$ ق ($\angle$ أ ب هـ) = ق ($\angle$ أ هـ ب) $\therefore$ أ ب = أ هـ.

فى الدائرة الكبرى: $\because$ أ ب = أ هـ (برهانًا) $\therefore$ م س = م ص (نظرية)

فى الدائرة الصغرى: $\because$ م س = م ص (برهانًا)

$\therefore$ جـ ى = ع ل (عكس النظرية) (وهو المطلوب)




٦ **فى الشكل المقابل:** م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب،
$\overleftrightarrow{م ن} \cap \overleftrightarrow{أ ب} = \{ى\}$، س منتصف $\overline{ب جـ}$، $\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$،
م س = م ى، ن ص = ن ى. **أثبت أن:** ب جـ = هـ و.

**الحل**

**المعطيات:** س منتصف $\overline{ب جـ}$، $\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$، م س = م ى، ن ص = ن ى.

**المطلوب:** إثبات أن: ب جـ = هـ و

**البرهان:** $\because$ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط المركزين، $\overline{أ ب}$ وتر مشترك للدائرتين م، ن. $\therefore$ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$

فى الدائرة م: $\because$ س منتصف $\overline{ب جـ}$ $\therefore$ $\overline{م س} \perp \overline{ب جـ}$

$\because$ $\overline{م س} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{م ى} \perp \overline{أ ب}$ ، م س = م ى

$\therefore$ ب جـ = أ ب (عكس النظرية) (١)

فى الدائرة ن: $\because$ $\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$ ، $\overline{ن ى} \perp \overline{أ ب}$ ، ن ص = ن ى

$\therefore$ هـ و = أ ب (عكس النظرية) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ب جـ = هـ و (وهو المطلوب)

**فكر** إذا كانت م، ن دائرتين متطابقتين ومتقاطعتين فى أ، ب؛ فهل $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور $\overline{م ن}$؟ فسر إجابتك.

الهندسة

# الوحدة الخامسة: الزوايا والأقواس فى الدائرة

# ٥ - ١

# الزاوية المركزية وقياس الأقواس

## سوف تتعلم

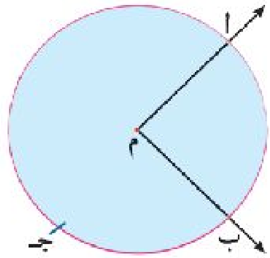
- ☆ مفهوم طول القوس
- ☆ مفهوم قياس القوس
- ☆ كيفية إيجاد العلاقة بين أوتار في الدائرة وأقواسها

## مصطلحات أساسية

- ☆ زاوية مركزية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ قوس.
- ☆ قوسان متجاوران.
- ☆ قياس قوس.
- ☆ وتر.
- ☆ مماس.

## فكر وناقش

فى الشكلِ المقابل:




ضلعا ∠ أ م ب يقسمان الدائرة م إلى قوسين :

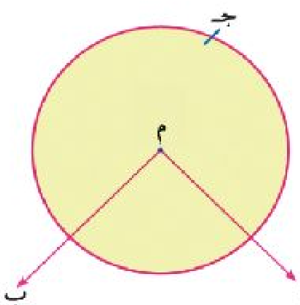
١ القوسُ الأصغر أ ب، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$.

٢ القوسُ الأكبرُ أ جـ ب، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$.

- ♦ ما موقعُ نقط $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ بالنسبة إلى ∠ أ م ب؟
- ♦ ما موقعُ نقط $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ بالنسبة إلى ∠ أ م ب المنعكسة؟
- ♦ إذا كانت ∠ أ م ب زاوية مستقيمة **ماذا تلاحظ ؟**

| | |
|---|---|
| **الزاوية المركزية** | **هى الزاويةُ التى رأسها مركزُ الدائرة، ويحملُ كلٌّ من ضلعيها نصفَ قطر فى الدائرة.** |

فى الشكلِ المقابلِ لاحظ أن:



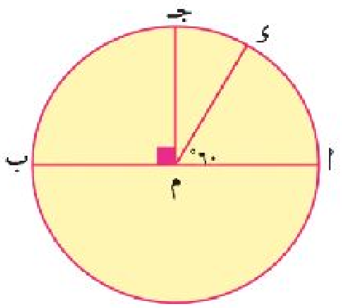

١ ∠ أ م ب المركزية يقابلها $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$، $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ يقابل ∠ أ م ب المركزية المنعكسة .

٢ إذا كانت ∠ أ م ب زاوية مستقيمة ( أ ب قطر فى الدائرة م) فإن $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ يطابق $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ ويسمى كل منهما "نصف دائرة"

| | |
|---|---|
| **قياسُ القوس** | **هو قياسُ الزاوية المركزية المقابلة له.** |

فى الشكلِ المقابلِ :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ ، ق ($\angle$ أ م ى) = ٦٠°




**لاحظ أن :**

١ ق ($\overset{\frown}{أى}$) = ق ($\angle$ أ م ى) = ٦٠°

٢ ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) = ق ($\angle$ جـ م ب) = ٩٠°

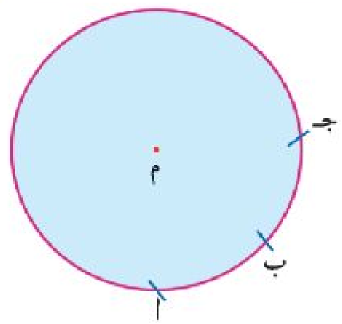
٣ ق ($\overset{\frown}{ى جـ}$) = ق ($\angle$ ى م جـ) = ٣٠° (لماذا)

٤ ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\angle$ أ م ب) = ١٨٠°

أى أن قياس نصف الدائرة = ١٨٠° **ويكون** قياس الدائرة = ٣٦٠°

**القوسان المتجاوران** **هما قوسان من دائرةٍ يشتركان فى نقطةٍ واحدةٍ فقط.**

مثل $\overset{\frown}{أب}$، $\overset{\frown}{ب جـ}$ بالشكل المقابل:



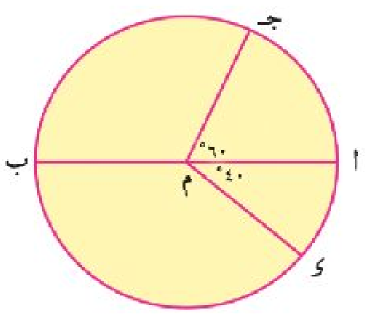

**ويكون :**

ق ($\overset{\frown}{أب}$) + ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{أ ب جـ}$)

، ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{أ ب جـ}$) - ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)

فى الشكلِ المقابل:

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، ق ($\angle$ أ م جـ) = ٦٠°، ق ($\angle$ أ م ى) = ٤٠°.




**لاحظ أن :**

١ ق ($\overset{\frown}{أى}$) = ٤٠°، ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) =

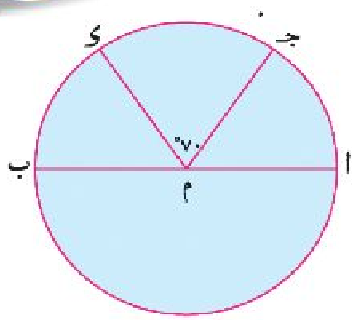
٢ ق ($\overset{\frown}{جـ أ ى}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ أ}$) + ق ($\overset{\frown}{أ \quad}$)

= ٦٠° + ٤٠° = ١٠٠°

٣ ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{أ جـ ب}$) - ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠° (لماذا؟)

٤ ق ($\overset{\frown}{ى جـ ب}$) = قياس الدائرة - ق ($\overset{\frown}{ى ب}$) = ٣٦٠° - ١٤٠° = ٢٢٠°

## مثال (١)




أ ب قطر فى الدائرة م، ق (∠ جـ م ى) = ٧٠°،

ق (⌢أ جـ) : ق (⌢ى ب) = ٥ : ٦ **أوجد** ق (⌢أ جـ ى).

**الحل**

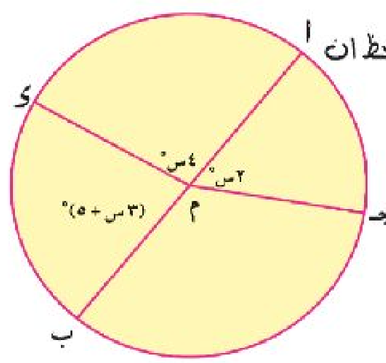
بفرض أن ق (⌢أ جـ) = ٥س ∴ ق (⌢ى ب) = ٦س

∵ ق (⌢أ ى ب) = ق (⌢أ جـ) + ق (⌢جـ ى) + ق (⌢ى ب) = ١٨٠°

∴ ٥س + ٧٠ + ٦س = ١٨٠ ١١س = ١١٠ ∴ س = ١٠° ، ق (⌢أ جـ) = ٥٠°

∴ ق (⌢أ جـ ى) = ق (⌢أ جـ) + ق (⌢جـ ى) = ٥٠° + ٧٠° = ١٢٠°

## تدرب



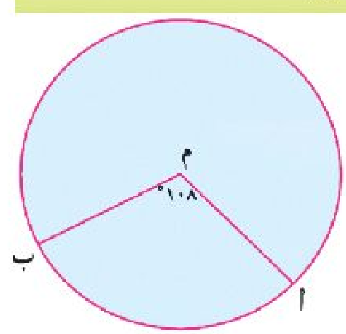

فى الشكلِ المقابلِ: أ ب قطرٌ فى الدائرةِ م ، ادرس الشكلَ ثم لاحظ ان

١ س = ٢٥°
٢ ق (⌢أ جـ) = ٥٠°
٣ ق (⌢أ ى) = ١٠٠°
٤ ق (⌢ب جـ) = ١٣٠°
٥ ق (⌢جـ أ ى) = ١٥٠°
٦ ق (⌢جـ ب ى) = ٢١٠°
٧ ق (⌢أ جـ ى) = ٢٦٠°
٨ ق (⌢أ ى جـ) = ٣١٠°

**طولُ القوسِ**: هو جزءٌ من محيطِ دائرته يتناسبُ مع قياسه حيث:

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيطُ الدائرةِ.

## مثال (٢)




فى الشكلِ المقابِل:

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، ق (⌢أ ب) = ١٠٨°.

**أوجد** طول ⌢أ ب (π = ٣,١٤)

**الحل**

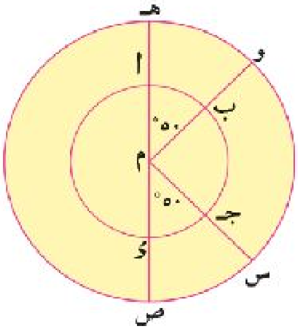
طولُ القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيطُ الدائرة.

= $\frac{\cancel{١٠٨}^{٣}}{\cancel{٣٦٠}_{١٠}}$ × ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٩,٤٢سم.

**تدرب** أجب عن الآتى في كراسة الفصل:

فى الشكلِ المقابلِ: دائرتان متحدتا المركز طول نصف قطر الدائرة الصغرى ٧سم وطول نصف قطر الدائرة الكبرى ١٤سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

أثبت أن: $(\overset{\frown}{أ ب}) \equiv (\overset{\frown}{جـ ء})$ ، $\overset{\frown}{هـ و} \equiv \overset{\frown}{س ص}$




الحل:

**فى الدائرة الصغرى:**

ق $(\overset{\frown}{أ ب})$ = ق $(\overset{\frown}{جـ ء})$ = ٥٠°

طول $\overset{\frown}{أ ب} = \frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = \frac{٥٥}{٩}$ سم

طول $\overset{\frown}{جـ ء} = \frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = \frac{٥٥}{٩}$ سم $\therefore$ $\overset{\frown}{أ ب}$ **يطابق** $\overset{\frown}{جـ ء}$

**فى الدائرة الكبرى:**

ق $(\overset{\frown}{هـ و})$ = ق $(\overset{\frown}{س ص})$ = ٥٠° ، طول $\overset{\frown}{هـ و} = \frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = \frac{١١٠}{٩}$ سم

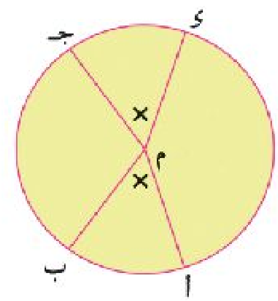
طول $\overset{\frown}{س ص} = \frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = \frac{١١٠}{٩}$ سم $\therefore$ $\overset{\frown}{هـ و}$ **يطابق** $\overset{\frown}{س ص}$

- هل $\overset{\frown}{أ ب}$ يطابق $\overset{\frown}{هـ و}$؟ ماذا تستنتج؟

## نتائج هامة:

**نتيجة (١)** فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة)، الأقواسُ المتساويةُ فى القياس متساويةُ فى الطول، والعكسُ صحيحٌ.

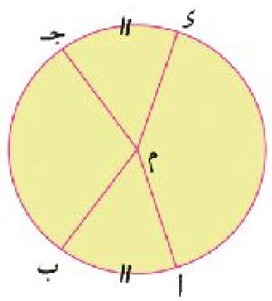
فى الدائرة م




إذا كان: ق $(\overset{\frown}{أ ب})$ = ق $(\overset{\frown}{جـ ء})$

فإن: طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = طول $\overset{\frown}{جـ ء}$

والعكس

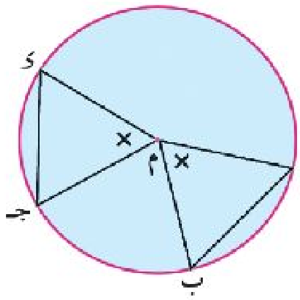



إذا كان: طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = طول $\overset{\frown}{جـ ء}$

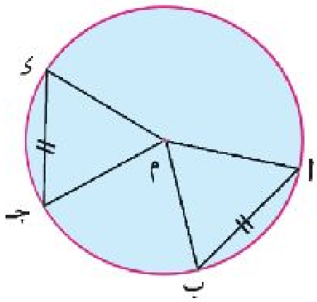
فإن: ق $(\overset{\frown}{أ ب})$ = ق $(\overset{\frown}{جـ ء})$

**نتيجة (٢)** فى الدائرة الواحدة (أو الدوائر المتطابقة) ، الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول. والعكس صحيح

فى الدائرة م




والعكس



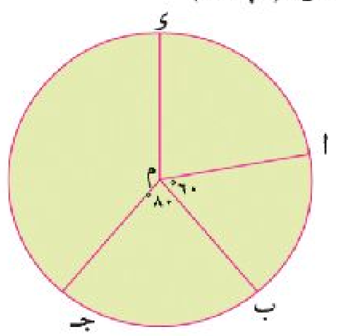

**إذا كان:** ق ( ⌒أ ب ) = ق ( ⌒جـ ى )

**فإن:** طول $\overline{\text{أ ب}}$ = طول $\overline{\text{جـ ى}}$

**إذا كان :** أ ب = جـ ى

**فإن:** ق ( ⌒أ ب ) = ق ( ⌒جـ ى )

**تدرب** أجب فى كراسة الفصل




فى الشكلِ المقابلِ إذا كان :

ق ( ⌒أ ب ) = °٦٠ ، ق ( ⌒ب جـ ) = °٨٠ ،

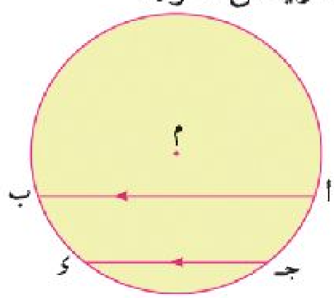
ق ( ⌒أ ى ) : ق ( ⌒ى جـ ) = ٤ : ٧

(١) اذكر الأقواسَ المتساويةَ فى القياسِ.

(٢) اذكر الأقواسَ المتساوية فى الطول.

(٣) ارسم الأوتارَ المتساويةَ فى الطول.

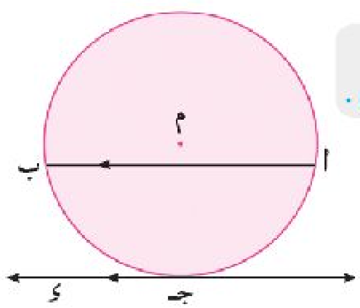
**نتيجة (٣)** الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.




**إذا كان** $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ وترين فى الدائرة م، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$

**فإن** ق ( ⌒أ جـ ) = ق ( ⌒ب ى ).

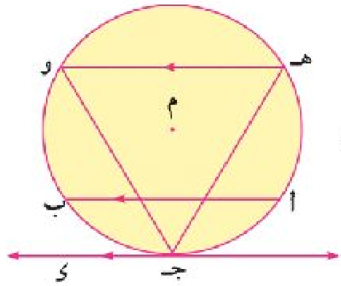
**نتيجة (٤)** القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.




**إذا كان** $\overline{\text{أ ب}}$ وترًا فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماسًا عند جـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$

**فإن** ق ( ⌒أ جـ ) = ق ( ⌒ب ى ).

## مثال (٣)




**فى الشكلِ المقابل:**

م دائرة، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة عند جـ، $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{هـ و}}$ وتران فى الدائرة حيث:

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

**أثبت أن:** جـ هـ = جـ و

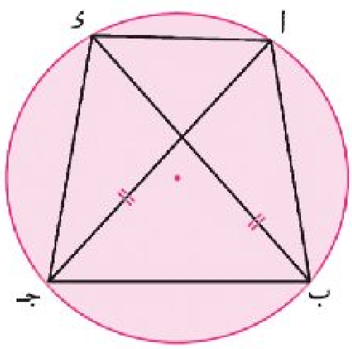
**الحل**

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{أ هـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{ب و}})$ (١)

∵ المماس $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{جـ أ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{جـ ب}})$ (٢)

بجمع طرفى (١)، (٢) ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{هـ جـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{و جـ}})$ ∴ جـ هـ = جـ و

## مثال ٤




**فى الشكلِ المقابل:**

أ ب جـ ء شكلٌ رباعىٌّ مرسومٌ داخل دائرةٍ فيه أ جـ = ب ء،

أ ب = (٣س - ٥)سم، $\overline{\text{جـ ء}}$ = (س + ٣)سم.

**أوجد** بالبرهان طول $\overline{\text{أ ب}}$.

**الحل**

**المعطيات:** أ ب جـ ء شكلٌ رباعىٌّ مرسومٌ داخل دائرة،

أ جـ = ب ء، $\overline{\text{أ ب}}$ = (٣س - ٥)سم، جـ ء = (س + ٣)سم

**المطلوب:** إيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

**البرهان:** ∵ أ جـ = ب ء معطى ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{ب جـ ء}})$

∴ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}})$ - ق $(\overset{\frown}{\text{ب جـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{ب جـ ء}})$ - ق $(\overset{\frown}{\text{ب جـ}})$

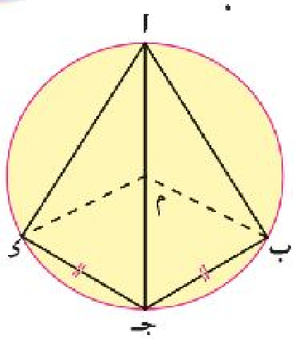
∴ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{ء جـ}})$ ∴ أ ب = جـ ء

∵ أ ب = جـ ء ∴ ٣س - ٥ = س + ٣

٢س = ٨ ∴ س = ٤

∵ أ ب = ٣س - ٥ ∴ أ ب = ٣ × ٤ - ٥ = ٧سم

**مثال (٥)**




في الشكلِ المقابلِ:

أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرة م، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في الدائرة،
جـ ب = جـ ى **أثبت أن:** ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أى}}$)

**الحل**

**المعطيات:** $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في الدائرة، جـ ب = جـ ى

**المطلوب:** ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أى}}$)

**البرهان:** ∵ جـ ب = جـ ى

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ى}}$) ——— (١)

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في الدائرة

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ١٨٠ - ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$)

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أى}}$) = ١٨٠ - ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ى}}$) ——— (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أى}}$)

٥ - ٢

# العَلاقةُ بين الزاويتينِ المحيطيَّة والمركزيَّة المشتركتينَ فى القوسِ

## سوف تتعلم

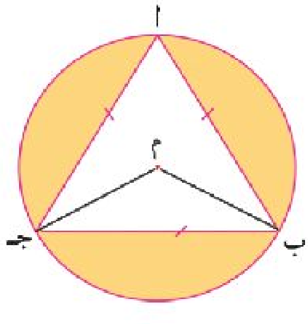
☆ كيفية استنتاج العلاقة بين قياس الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركين في القوس.

## مصطلحات أساسية

☆ زاوية مركزية.

☆ زاوية محيطية

## فكر وناقش




فى الشكلِ المقابل:

الدائرة م تمر برؤوسِ المثلث ا ب جـ المتساوى الأضلاع

◆ ما قياس ∠ ب م جـ المركزية؟

فسِّر إجابتك

◆ ما رأس ∠ ب ا جـ ؟

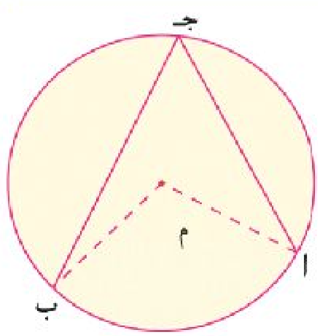
هل ينتمى رأسُ الزاوية إلى مجموعة نقط الدائرة م؟

◆ ما ضلعا ∠ ب ا جـ ؟

◆ إذا كانت ∠ ب م جـ مركزيه قوسها $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ .فكيف تصف ∠ ب ا جـ؟

◆ قارن بين ق (∠ب ا جـ) ، ق (∠ب م جـ) . ماذا تلاحظ ؟

| | |
|---|---|
| **الزاوية المحيطية** | **هى الزاويةُ التى رأسها على الدائرة، ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا فى الدائرة.** |

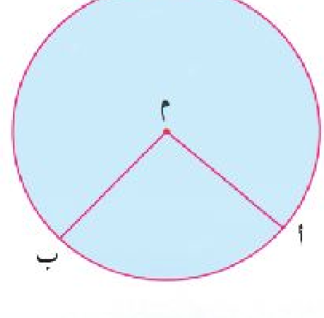



فى الشكلِ المقابلِ: لاحظ أن:

١ ∠ ا جـ ب زاوية محيطية ويكون $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ هو القوس المقابل لها .

٢ لكل زاويـة محيطية توجد زاويـة مركزية واحدة تشترك معها فى القوس.

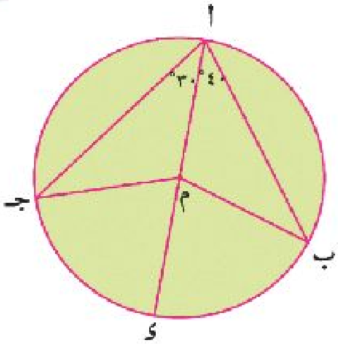
فكر




### فى الشكل المقابل

ما عدد الزوايا المحيطية التى تشترك مع ∠ ا م ب المركزيه فى $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ ؟

(وضِّح إجابتك بالرسم)




**نشاط** في الشكلِ المقابلِ:

$\overline{\text{أ ء}}$ قطر في الدائرة م . ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلةِ الآتية :

١ اذكر زوجين من الزوايا المتساوية في القياسِ.

٢ إذا كان ق (∠ ب أ ء) = ٤٠°، أوجد ق (∠ ب م ء).

٣ إذا كان ق (∠ جـ أ ء) = ٣٠°، أوجد ق (∠ جـ م ء).

٤ قارن بين ق (∠ ب أ جـ)، ق (∠ ب م جـ). **ماذا تستنتج ؟**

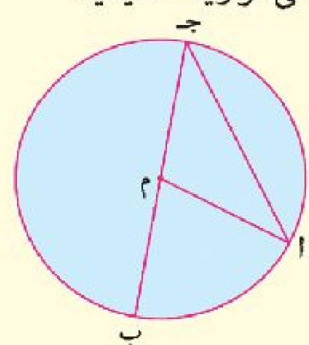
**نظرية** قياسُ الزاويةِ المحيطيّة يساوي نصفَ قياسِ الزاوية المركزيّة المشتركة معها في القوس.

**المعطيات:** ∠ أ جـ ب زاوية محيطية، ∠ أ م ب زاوية مركزية .

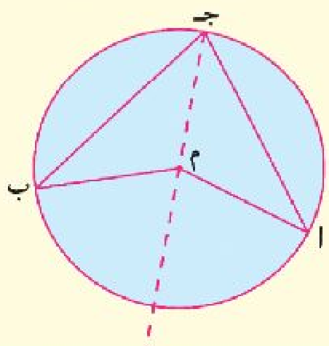
**المطلوب :** إثبات أن ق (∠ أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب) .

**البرهان :** توجد ثلاثُ حالاتٍ لإثبات صحة النظرية .

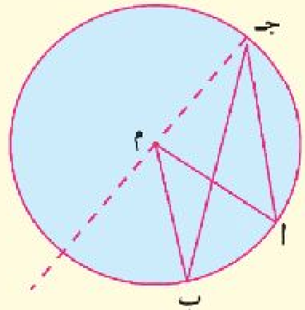
١ إذا كانت م تنتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية.




٢ إذا كانت م نقطة داخل الزاوية المحيطية.




٣ إذا كانت م نقطة خارج الزاوية المحيطية.




**الحالة الأولى: إذا كانت م تنتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية .**

∵ ∠ أ م ب خارجه عن Δ أ م جـ

∴ ق (∠ أ م ب) = ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) ١

∵ أ م = جـ م (أطوال أنصاف أقطار) ∴ ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) ٢

من ١، ٢ ينتج أن : ق (∠ أ م ب) = ٢ ق (∠ جـ)

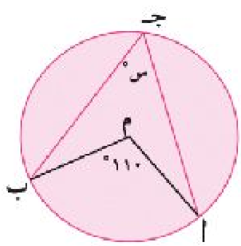
∴ ق (∠ أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب) (وهو المطلوب)

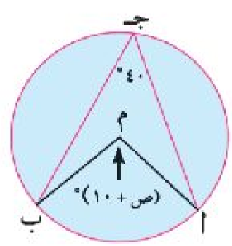
**نشاط**

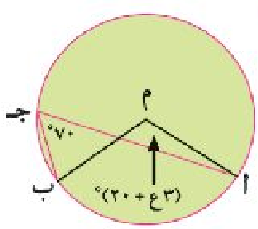
برهِن صحةَ النَّظرية فى الحالتين الأخريين .

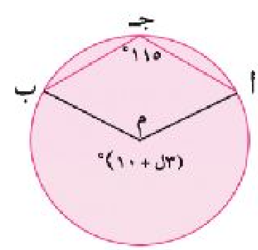
**تدرب**

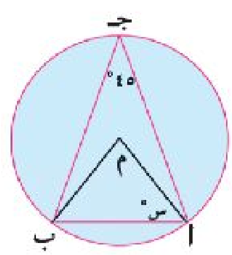
فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية، م دائرة ، أوجد قيمةَ الرمز المجهول المستخدم فى القياسِ :
(س، ص، ع، ل ) .

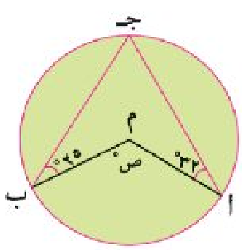
١


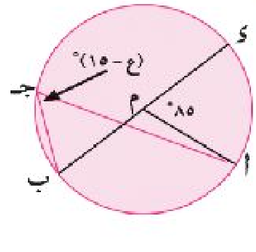

٢


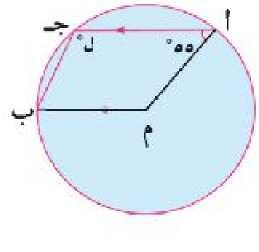

٣


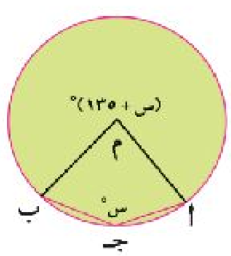

٤


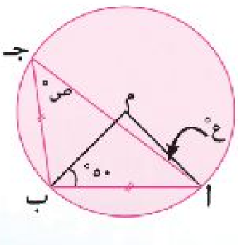

٥


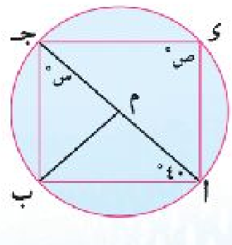

٦


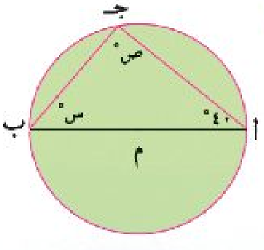

٧



٨



٩



١٠



١١



١٢


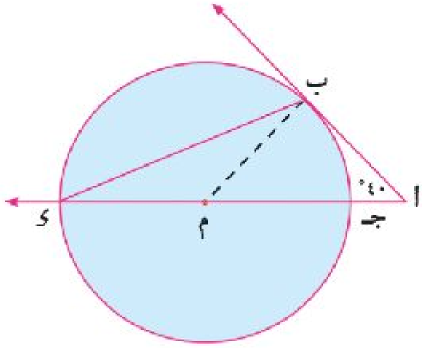
## مثال (١)

ا نقطة خارج الدائرة م، $\overleftarrow{اب}$ مماس للدائرة عند ب، $\overleftarrow{ام}$ قطع الدائرة م فى جـ، ء على التّرتيب، ق($\angle$ا) = ٤٠°. أوجد بالبرهان ق ($\angle$ ب ء جـ)

**الحل**

**المعطيات:** $\overleftarrow{اب}$ مماسّ للدائرةِ عند ب، ق ($\angle$ا) = ٤٠°، $\overleftarrow{ام}$ قطع الدائرة م فى جـ، ء.

**المطلوب:** ق ($\angle$ ب ء جـ)




**العمل:** نرسم نصف القطر $\overline{ب م}$

**البرهان:** ∵ $\overleftarrow{اب}$ مماسّ للدائرةِ عند ب، $\overline{ب م}$ نصف قطر.

∴ ق ($\angle$ ا ب م) = ٩٠°

فى $\Delta$ ا ب م:

∵ ق ($\angle$ا) = ٤٠°، ق ($\angle$ ا ب م) = ٩٠°

∴ ق ($\angle$ ب م جـ) = ١٨٠° - (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

∵ $\angle$ ب ء جـ المحيطية، $\angle$ ب م جـ المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب جـ}$.

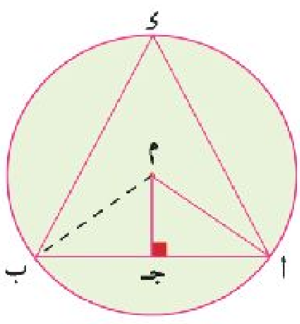
∴ ق ($\angle$ ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\angle$ ب م جـ)

∴ ق ($\angle$ ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٥٠ = ٢٥°   (وهو المطلوب)

## مثال (٢)

فى الشكلِ المقابلِ: $\overline{اب}$ وتر فى الدائرة م، $\overline{م جـ} \perp \overline{اب}$.

أثبت أن: ق ($\angle$ ا م جـ) = ق ($\angle$ ا ء ب)




**الحل**

نرسم $\overline{ب م}$، فى $\Delta$ م ا ب:

∵ م ا = م ب، $\overline{م جـ} \perp \overline{اب}$

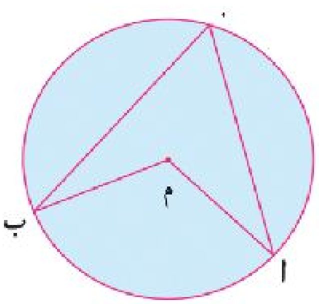
∴ ق ($\angle$ ا م جـ) = ق ($\angle$ ب م جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\angle$ ا م ب)   (١)

∵ $\angle$ ا ء ب المحيطية، $\angle$ ا م ب المركزيه مشتركتان فى $\overset{\frown}{اب}$

∴ ق ($\angle$ ا ء ب) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\angle$ ا م ب)   (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ق ($\angle$ ا م جـ) = ق ($\angle$ ا ء ب).

**نتيجة (١)** قياسُ الزاويةِ المحيطيةِ يساوى نصفَ قياسِ القوسِ المقابلِ لها

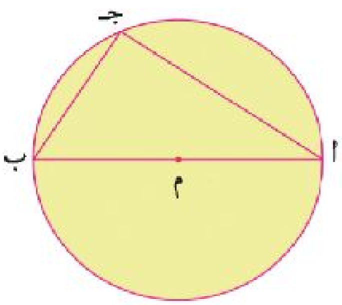



فى الشكلِ المقابلِ:

ق (∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا م ب)، ق (∠ ا م ب) = ق ( $\overset{\frown}{اب}$ )

∴ ق (∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق ( $\overset{\frown}{اب}$ )

**نتيجة (٢)** الزاويةُ المحيطيةُ المرسومةُ فى نصفِ دائرة قائمة




أى أن:

إذا كان القوسُ المقابلُ للزاويةِ المحيطيَّةِ يساوى نصفَ الدائرة

فإن: ق (∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق ( $\overset{\frown}{اب}$ )

∵ ق ( $\overset{\frown}{اب}$ ) = ١٨٠° ∴ ق (∠ جـ) = ٩٠°

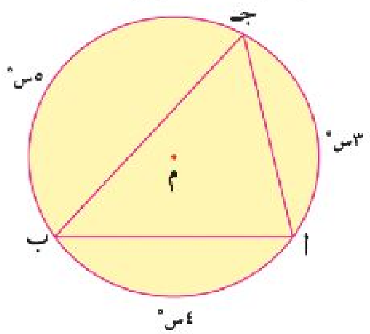
فكر

- ما نوعُ الزاويةِ المحيطيةِ التى تقابلُ قوساً أصغر من نصفِ دائرة ؟ لماذا ؟
- ما نوعُ الزاويةِ المحيطيةِ التى تقابلُ قوساً أكبر من نصفِ دائرة ؟ لماذا ؟
- هل الزاويةُ المحيطيةُ القائمةُ تكونُ مرسومةً فى نصفِ دائرة ؟ فسر إجابتك.

**مثال (٣)**

فى الشكلِ المقابلِ: ا ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م، ق ( $\overset{\frown}{اب}$ ) : ق ( $\overset{\frown}{ب جـ}$ ) : ق ( $\overset{\frown}{ا جـ}$ ) = ٤ : ٥ : ٣

أوجد ق (∠ ا جـ ب) :




**الحل**

نفرض أن :

ق ( $\overset{\frown}{اب}$ ) = ٤س°، ق ( $\overset{\frown}{ب جـ}$ ) = ٥س°، ق ( $\overset{\frown}{ا جـ}$ ) = ٣س°

∴ ٤س + ٥س + ٣س = ٣٦٠

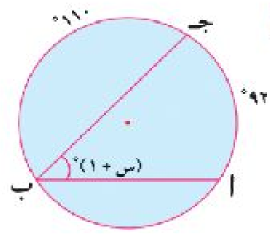
١٢س = ٣٦٠ ∴ س = ٣٠

∴ ق ( $\overset{\frown}{اب}$ ) = ٤ × ٣٠ = ١٢٠° ويقابل ∠ ا جـ ب المحيطية .

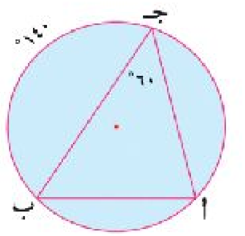
∵ ق (∠ ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ( $\overset{\frown}{اب}$ ) ∴ ق (∠ ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

**تدرب**

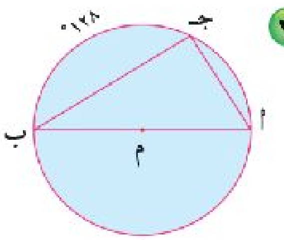
**ادرس كلاً من الأشكالِ الآتية ثم أوجد قياس الزاوية أو القوس المطلوب فى كل شكل:**

١


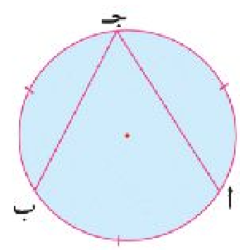

**أوجد:** س، ق (⌒أ ب)

٢


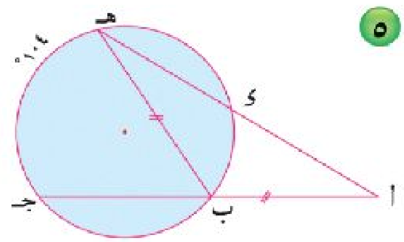

**أوجد:** ق (∠أ)، ق (⌒أ جـ)

٣


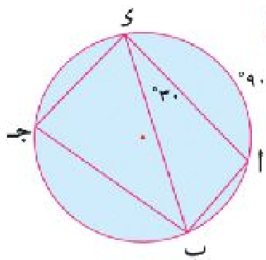

**أوجد:** ق (∠جـ)، ق (∠ب)

٤



**أوجد:** ق (∠جـ)

٥



**أوجد:** ق (∠هـ أ جـ)

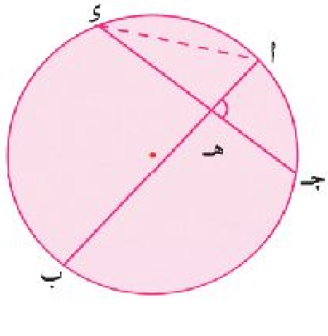
٦



**أوجد:** ق (∠ى جـ ب)

## مثال ٤

### تمرين مشهور (١)

إذا تقاطع وتران فى نقطةٍ داخل الدائرةِ، فإن قياس زاويةِ تقاطعهما يساوى نصفَ مجموع قياسى القوسين المقابلين لها .




**الحل**

**المعطيات:** $\overline{أب} \cap \overline{جـى} = \{هـ\}$

**المطلوب :** ق (∠أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒أ جـ) + ق (⌒ب ى)]

**العمل :** نرسم $\overline{أى}$

**البرهان :** ∵ ∠أ هـ جـ خارجة عن Δ أ هـ ى .

∵ ق (∠أ هـ جـ) = ق (∠ى) + ق (∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ جـ) + $\frac{1}{2}$ ق (⌒ب ى)

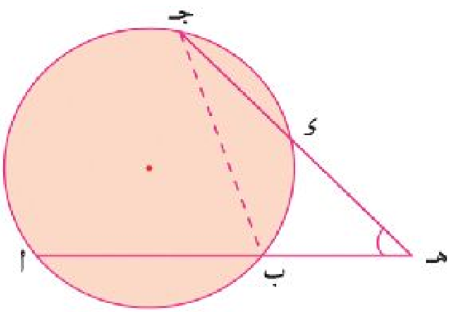
= $\frac{1}{2}$ [ق (⌒أ جـ) + ق (⌒ب ى)] .

مثال (٥)

**تمرين مشهور (٢)**

إذا تقاطع شعاعانِ حاملانِ لوترين في دائرةٍ خارجها، فإن قياسَ زاوية تقاطعهما يساوي نصفَ قياس القوسِ الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية .

**الحل**




**المعطيات:** $\overrightarrow{أب} \cap \overrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$

**المطلوب:** ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{أجـ}$) - ق ($\overset{\frown}{ب د}$)]

**العمل:** نرسم $\overline{ب جـ}$ .

**البرهان:** ∵ ∠ أ ب جـ خارجة عن Δ ب هـ جـ .

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ هـ) + ق (∠ ب جـ د)

∴ ق (∠ هـ) = ق (∠ أ ب جـ) - ق (∠ ب جـ د)

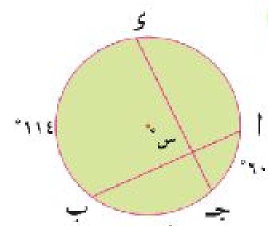
= $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أجـ}$) - $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{ب د}$)

= $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{أجـ}$) - ق ($\overset{\frown}{ب د}$)] **وهو المطلوب**

**تدرب**

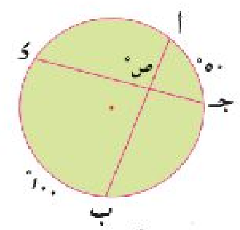
**فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية.**

١



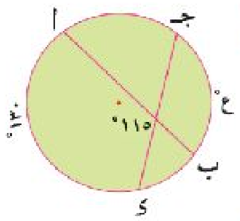

أوجد قيمةَ س

٢



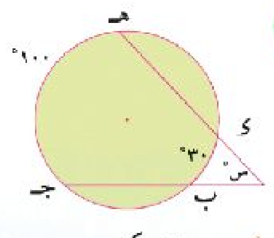

أوجد قيمةَ ص

٣



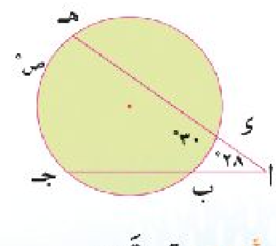

أوجد قيمةَ ع

٤



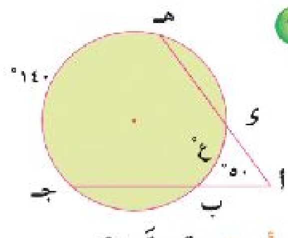

أوجد قيمةَ س

٥




أوجد قيمةَ ص

٦




أوجد قيمةَ ع

## مثال (٦)

فى الشكلِ المقابلِ:

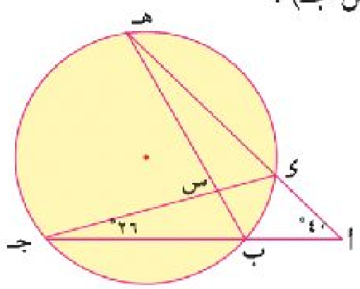
جـب ∩ هـى = {أ}، ق(∠أ) = ٤٠° ، ى جـ ∩ ب هـ = {س}، ق(∠ب جـ ى) = ٢٦°

أوجد: أ ق(جـ هـ)   ب ق(∠هـ س جـ) .

**الحل**

المعطيات: جـب ∩ هـى = {أ}، ق(∠أ) = ٤٠° ، ى جـ ∩ ب هـ = {س}، ق(∠ب جـ ى) = ٢٦°

المطلوب: أ ق(جـ هـ)   ب ق(∠هـ س جـ) .




البرهان: ∵ ق(∠ب جـ ى) = ٢٦°

∴ ق(ب ى) = ٢ق(∠ب جـ ى) = ٥٢°

∵ جـب ∩ هـى = {أ}

∴ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(جـ هـ) - ق(ب ى)]

∴ ٤٠ = $\frac{١}{٢}$ [ق(جـ هـ) - ٥٢]

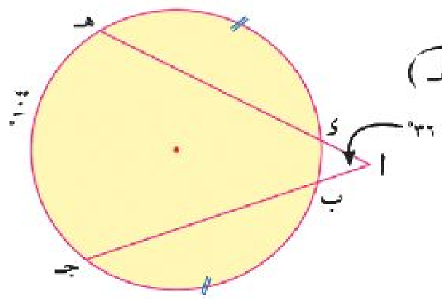
ق(جـ هـ) = ٨٠ + ٥٢ = ١٣٢°   (وهو المطلوب أولاً)

∵ ى جـ ∩ ب هـ = {س}   ∴ ق(∠هـ س جـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(جـ هـ) + ق(ب ى)]

ق(∠هـ س جـ) = $\frac{١}{٢}$ [١٣٢ + ٥٢] = $\frac{١}{٢}$ × ١٨٤ = ٩٢°   (وهو المطلوب ثانيًا)

## مثال (٧)

فى الشكلِ المقابلِ:




ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(هـ جـ) = ١٠٤° ، ق(ب جـ) = ق(ى هـ)

أوجد: أ ق(ب ى)   ب ق(ى هـ) .

**الحل**

أكمل: ∵ جـب ∩ هـى = {أ}

∴ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ ق(جـ هـ) - ق(ب ى) ]

∴ ٣٦ = $\frac{١}{٢}$ [ ١٠٤° - ق(ب ى) ]   ∴ ق(ب ى) = ٣٢°   (المطلوب أولاً)

∵ ق(ى هـ) + ق(ب جـ) = ٣٦٠° - (١٠٤° + ٣٢°) = ٢٢٤°

∵ ق(ى هـ) = ق(ب جـ)

∴ ٢ ق(ى هـ) = ٢٢٤°   ∴ ق(ى هـ) = ١١٢°   (المطلوب ثانيًا)

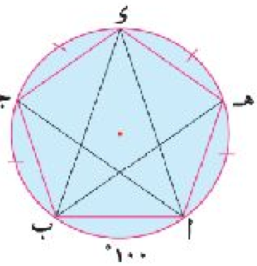
# ٥ - ٣

# الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

**سوف تتعلم**

☆ كيفية استنتاج العلاقة بين الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسًا متساوية في القياس.

**فكر وناقش**




فى الشكلِ المقابلِ : ق (⌒أ ب) = ١٠٠°

◆ هل تحصر الزوايا المحيطية ∠ أ هـ ب ، ∠ أ ء ب ، ∠ أ جـ ب نفس القوس؟

◆ أوجد ق (∠ أ هـ ب)، ق (∠ أ ء ب)، ق (∠ أ جـ ب).

ماذا تلاحظ ؟

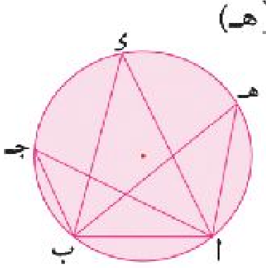
◆ هل الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسًا متساويةً فى القياسِ، تكون متساويةً فى القياسِ ؟ فسِّر إجابتك؟

**نظرية ٢**

الزوايا المحيطية التى تحصرُ نفسَ القوس فى الدائرة الواحدة متساويةٌ فى القياس.

**المعطيات:** ∠ جـ ، ∠ ء ، ∠ هـ زوايا محيطيَّة مشتركة فى ⌒أ ب.

**المطلوب:** ق (∠ جـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ هـ)




**البرهان:** ∵ ق (∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ ب)

، ق (∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ ب)

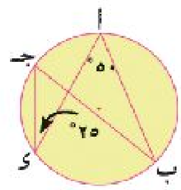
، ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ ب)

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ هـ)

وهو المطلوب.

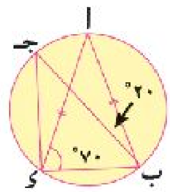
**تدرب** ادرس كلاًّ من الأشكالِ الآتية ثم أوجد قياسات الزوايا المبينة أسفل كل شكل:

١



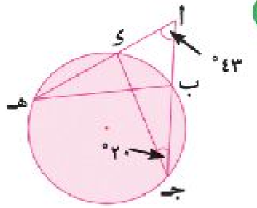

ق ( ∠ جـ ) ، ق ( ∠ ب )

٢



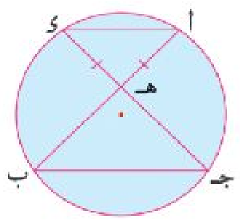

ق ( ∠ جـ ) ، ق ( ∠ ب ى جـ )

٣




ق ( ∠ ب هـ ى ) ، ق ( ∠ أ ب هـ )

**مثال (١)**




فى الشكلِ المقابلِ :

$\overline{أب} \cap \overline{جـى}$ = {هـ}، هـ أ = هـ ى

أثبت أن : هـ ب = هـ جـ .

**الحل**

فى $\Delta$ أ هـ ى ∵ هـ أ = هـ ى ∴ ق ( ∠ ى ) = ق ( ∠ أ ) (١)

∵ ∠ أ ب جـ ، ∠ أ ى جـ محيطيتان تحصران $\frown$أجـ ∴ ق ( ∠ ب ) = ق ( ∠ ى ) (٢)

∵ ∠ ى جـ ب ، ∠ ى أ ب محيطيتان تحصران $\frown$ب ى ∴ ق ( ∠ جـ ) = ق ( ∠ أ ) (٣)

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن: ق ( ∠ ب ) = ق ( ∠ جـ )

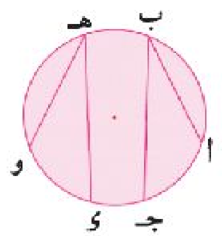
فى $\Delta$ هـ ب جـ: ∵ ق ( ∠ ب ) = ق ( ∠ جـ ) ∴ هـ ب = هـ جـ (وهو المطلوب)

**نتيجة** الزوايا المحيطية التى تحصرُ أقواساً متساويةً فى القياسِ فى الدائرةِ الواحدةِ (أو فى عدة دوائر) متساويةٌ فى القياسِ

**لاحظ أن :**

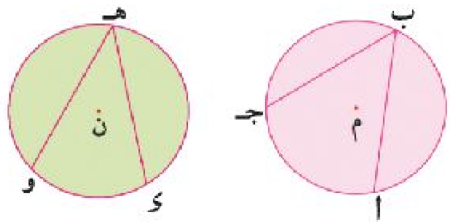
❶ فى الدائرة م إذا كان : ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ى و)

**فإن :** ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)




❷ لأى دائرتينِ م، ن إذا كان : ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ى و)

**فإن :** ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)




❸ **عكسُ النتيجة السابقة صحيحٌ ، أى أن :**

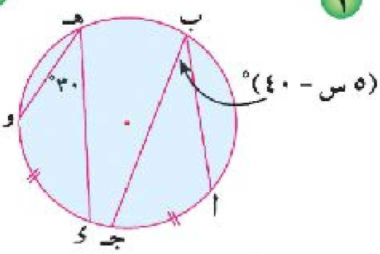
الزوايا المحيطية المتساويةُ فى القياسِ فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) تحصر أقواسًا متساويةً فى القياسِ .

**فكر** هل كلُّ وترين لا يتقاطعان داخل الدائرة ، ويحصران قوسين متطابقين، متوازيين ؟ فسر إجابتك

**تدرب**

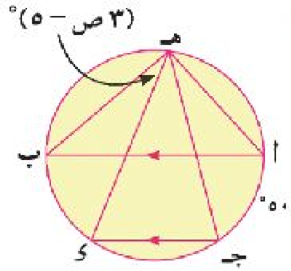
في كلٍّ من الأشكالِ الآتية، أوجد قيمةَ الرمز المستخدم في القياسِ :

١



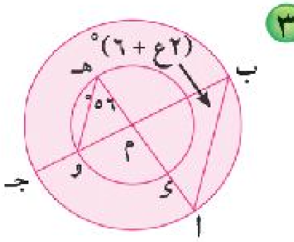

أوجد قيمة س

٢



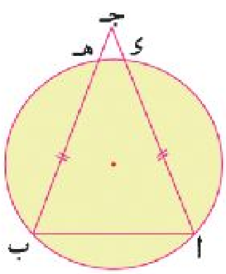

أوجد قيمة ص

٣




أوجد قيمة ع

**مثال (٢)**



في الشكلِ المقابلِ:

أ ى ، ب هـ وتران متساويان في الطول في الدائرة ، $\overleftarrow{\text{أ ى}} \cap \overleftarrow{\text{ب هـ}}$ = {جـ}.

أثبت أن : جـ ى = جـ هـ .

**الحل**

**المعطيات:** أ ى = ب هـ

**المطلوب:** إثبات أن : جـ ى = جـ هـ

**البرهان:** ∵ أ ى = ب هـ ∴ ق (⌢ أ ى) = ق (⌢ ب هـ)

بإضافة ق (⌢ ى هـ) لكلٍّ من الطرفين ينتج أن : ق (⌢ أ ى هـ) = ق (⌢ ب هـ ى)

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ أ) (نتيجة)

في △ أ ب جـ ∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ب) ∴ أ جـ = ب جـ (١)

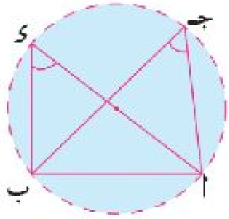
∵ أ ى = ب هـ (٢)

بطرح طرفي (٢) من (١) ينتج أن : جـ ى = جـ هـ (وهو المطلوب)


دار النصر للطباعة (هدلاين)

**عكس نظرية ٢**

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها .




**فى الشكلِ المقابلِ لاحظ أن :**

∠ جـ ، ∠ ء مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{أ ب}}$ ، وفى جهة واحدة منها ،

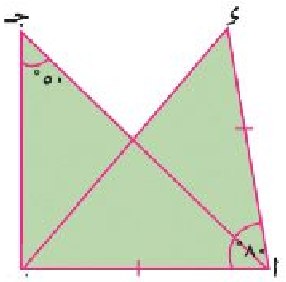
ق (∠ جـ) = ق (∠ ء)

**فتكون :** النقط أ، ب، جـ، ء تمر بها دائرة واحدة، و يكون $\overline{\text{أ ب}}$ وترًا فيها .

**مثال (٤)**

**فى الشكلِ المقابلِ :** أ ب = أ ء ، ق (∠ أ) = ٨٠° ، ق (∠ جـ) = ٥٠°

**أثبت أن :** النقط أ، ب، جـ، ء تمر بها دائرة واحدة .




**الحل**

فى △ أ ب ء

∵ أ ب = أ ء ، ق (∠ أ) = ٨٠°

∴ ق (∠ ء) = ق (∠ أ ب ء) = $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢}$ = ٥٠°

∵ ق (∠ ء) = ق (∠ جـ) = ٥٠°

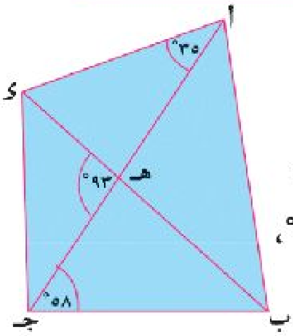
وهما زاويتان مرسومتان على القاعدةِ $\overline{\text{أ ب}}$ وفى جهةٍ واحدة منها .

∴ النقط أ، ب، جـ، ء تمر بها دائرة واحدة

٥ - ٤

# الشكلُ الرباعىُّ الدائرىُّ

**فكر و ناقش**




فى الشكلِ المقابلِ :

أ ب جـ ى شكلٌ رباعىٌّ تقاطع قطراه فى هـ ،

ق (∠ أ جـ ب) = ٥٨°، ق (∠ جـ أ ى) = ٣٥°،

ق (∠ جـ هـ ى) = ٩٣° .

هل يمكنُ رسمُ دائرةٍ تمر برؤوس الشكلِ الرباعى أ ب جـ ى ؟ **فسر إجابتك .**

☆ مفهوم الشكل الرباعي الدائري

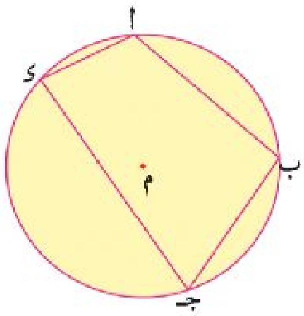
☆ تحديد متى يكون الشكل الرباعي دائريًا

## مصطلحات أساسية

☆ شكل رباعي دائري.

| | |
|---|---|
| **الشكل الرباعى الدائرى** | **هو شكلٌ رباعىٌّ تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.** |

**لاحظ :**



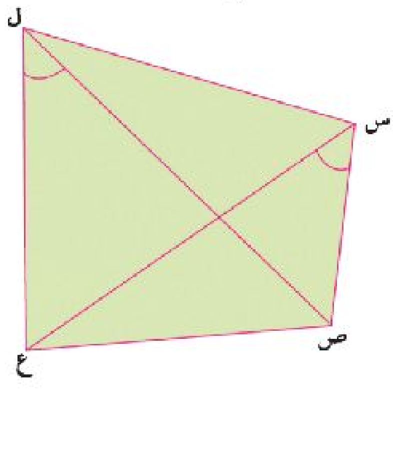

(١) الشكل أ ب جـ ى رباعيًّا دائريًّا ، لأن رؤوسه أ، ب، جـ، ى تنتمى للدائرة م .

(٢) الشكل س ص ع ل رباعيًّا دائريًّا لأن :

ق (∠ ص س ع) = ق (∠ ص ل ع)

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ص ع}}$ وفى جهةٍ واحدة منها ،

فيمكن رسمُ دائرة تمرُّ بالنقط س، ص، ع، ل .



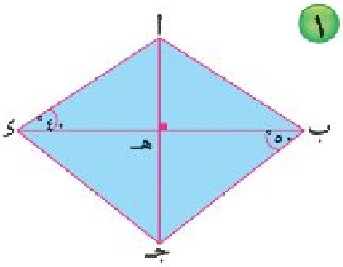

أى أن رؤوس الشكل س ص ع ل تنتمى لدائرة واحدة.

تدرب

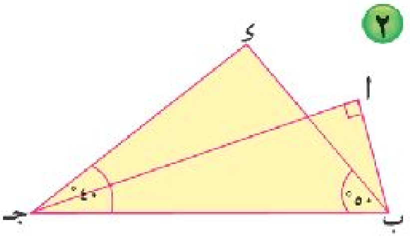
أجب عن السؤال الآتى في كراسة الفصل:

**بيِّن أى من الأشكالِ الأتيه رباعيًّا دائريًّا، فسر إجابتك.**

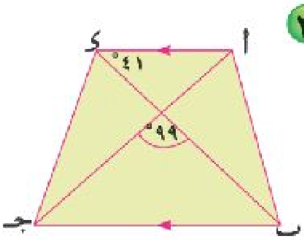
١



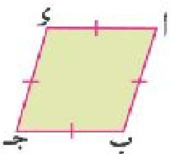

٢



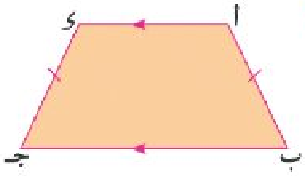

٣



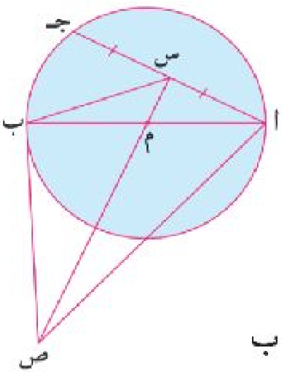

٤




٥




## مثال (١)




**فى الشكلِ المقابلِ :**

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، س منتصف $\overline{أجـ}$، $\overleftarrow{سم}$ يقطع مماس الدائرة عند ب فى ص . **أثبت أن** : الشكل أ س ب ص رباعى دائرى .

**الحل**

**المعطيات:** $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، أ س = جـ س، $\overleftarrow{بص}$ مماس للدائرة عند ب

**المطلوب:** **إثبات أن :** أ س ب ص رباعيًّا دائريًّا .

**البرهان:** ∵ س منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أجـ}$، ق (∠ أ س ص) = ٩٠°

∵ $\overline{أب}$ قطر، $\overleftarrow{بص}$ مماس عند ب ∴ $\overleftarrow{بص} \perp \overline{أب}$، ق (∠ أ ب ص) = ٩٠°

∵ ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ب ص) = ٩٠°

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{أص}$ وفى جهة واحدة منها .

∴ الشكل أ س ب ص رباعى دائرى .

**فكر** فى المثالِ السابق، أين يقعُ مركزُ الدائرةِ المارة برؤوس الشكلِ أ س ب ص؟ فسر إجابتك.

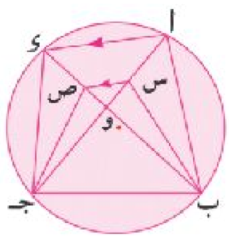
**مثال (٢)**

أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ تقاطع قطراه فى و، س ∈ أو ، ص ∈ ى و حيث س ص // أ ى .

**أثبت أن :** **أولاً:** الشكل ب س ص جـ رباعيٌّ دائرى .

**ثانيًا:** ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س جـ ص)

**الحل**




**المعطيات:** أ ب جـ ى شكلٌ رباعى مرسوم داخل دائرة س ص // أ ى

**المطلوب:** إثبات أن : **أولاً:** الشكلُ ب س ص جـ رباعى دائرى .

**ثانيًا:** ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س جـ ص)

**البرهان:** ∵ س ص // أ ى

∴ ق (∠ جـ أ ى) = ق (∠ جـ س ص) بالتناظر

∵ ق (∠ جـ أ ى) = ق (∠ جـ ب ى) محيطيتان مشتركتان فى جـ ى⌒

∴ ق (∠ جـ س ص) = ق (∠ جـ ب ص)

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة جـ ص وفى جهةٍ واحدةٍ منها .

∴ الشكل ب س ص جـ رباعى دائرى (وهو المطلوب أولاً)

∵ الشكل ب س ص جـ رباعى دائرى (إثباتاً)

∴ ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س جـ ص)

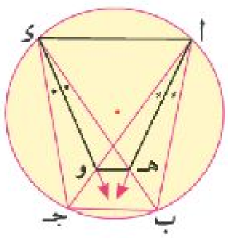
لأنهما زاويتانِ محيطيتان مشتركتانِ فى س ص⌒. (وهو المطلوب ثانيًا)

## مثال (٣)

فى الشكلِ المقابلِ :

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ ب ء جـ،




أثبت أن : **أولاً:** أ هـ و ء رباعى دائرى .

**ثانيًا:** $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

المعطيات: أب جـ د شكل رباعى دائرى

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ ب ء جـ

المطلوب إثبات أن:

أولا : أ هـ و ء رباعى دائرى

ثانيا : $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان

ق(∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب ء جـ) ( ١ ) محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق (∠ هـ أ و) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب أ جـ)

بالمثل ق (∠ هـ ء و)= $\frac{١}{٢}$ق (∠ ب ء جـ) } (٢

من ١) ، ٢)

∴ ق (∠ هـ أ و) = ق (∠ هـ ء و)

∴ الشكل أ هـ و ء رباعى دائرى (وهو المطلوب أولا)

∴ ق (∠ و هـ ء) = ق (∠ جـ أ ء)

∵ (∠ جـ ب ء) = ق (∠ جـ أ ء)

∴ ق (∠ و هـ ء) = ق (∠ جـ ب ء) وهما متناظرتان

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (وهو المطلوب ثانيا)

# ٥ - ٥

# خواصُّ الشكْل الرباعىّ الدائرى

### سوف تتعلم

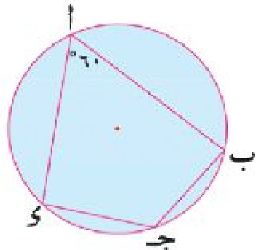
- ☆ خواص الشكل الرباعي الدائري.
- ☆ كيفية حل مسائل على خواص الشكل الرباعي الدائري.

### مصطلحات أساسية

- ☆ شكل رباعي دائري.

## فكر وناقش

في الشكلِ المقابلِ :





ق (∠ أ) = ٦٠° ، فإن ق (⌢ب جـ ى) = ........°

- ♦ إذا كان ق (⌢ب أ ى) = ........°
- ♦ إذا كان ق (∠ ب جـ ى) = ........°
- ♦ إذا كان ق (∠ ب) = ٨٠° فإن ق (∠ ى) = ........
- ♦ **ماذا تلاحظ** على مجموعِ الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري.

**نظرية ٣**

**إذا كان الشكلُ الرباعىُّ دائريًا فإن كلَّ زاويتينِ متقابلتين فيه متكاملتان .**

**المعطيات:** أ ب جـ ى شكل رباعي دائري .

**المطلوب:** إثبات أن : (١) ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

(٢) ق (∠ ب) + ق (∠ ى) = ١٨٠°

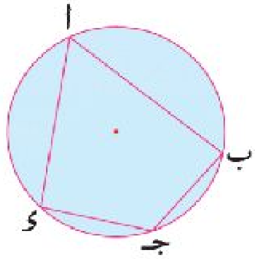
**البرهان:** ∵ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌢ب جـ ى)

، ق (∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌢ب أ ى)

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ جـ)

= $\frac{1}{2}$ [ق (⌢ب جـ ى) + ق (⌢ب أ ى)]

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

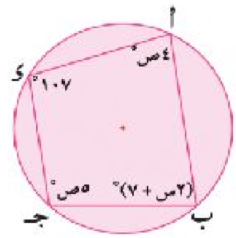




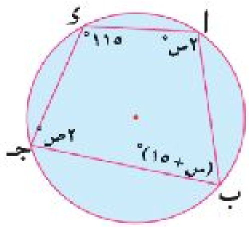
**بالمثل:** ق (∠ ب) + ق (∠ ى) = ١٨٠° (وهو المطلوب)

**تدرب** في كلٍ من الأشكالِ الآتيةِ أوجد قيمةَ س، ص

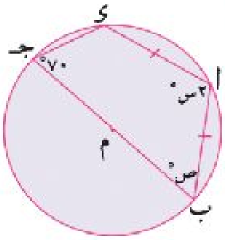
١




٢




٣

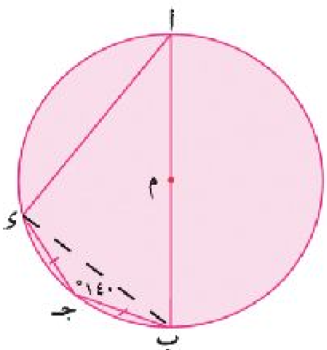



## مثال (١)

أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ الدائرة م، م ∈ $\overline{أب}$ ، جـ ب = جـ ى ، ق (∠ ب جـ ى) = ١٤٠°

**أوجد : أولاً:** ق (∠ أ) **ثانيًا:** ق (∠ ى)

**الحل**




∵ أ ب جـ ى شكل رباعي دائري

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ١٨٠° (نظرية)

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠° (المطلوب أولاً)

نرسم $\overline{ب ى}$ ، في △ ب جـ ى ∵ جـ ب = جـ ى

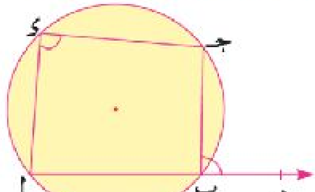
∴ ق (∠ جـ ى ب) = ق (∠ جـ ب ى) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = ٢٠°

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق (∠ أ ى ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ ى جـ) = ٩٠° + ٢٠° = ١١٠° (وهو المطلوب ثانيًا)

**نتيجة** قياسُ الزاوية الخارجة عند أيِّ رأس من رؤوس الشكلِ الرباعيِّ الدائري يساوى قياسَ الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

في الشكلِ المقابلِ :




أ ب جـ ى رباعي دائري ، هـ ∈ $\overrightarrow{أب}$ ، هـ ∉ $\overline{أب}$

∴ ∠ هـ ب جـ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ ى

، ∠ ى هي الزاوية الداخلة المقابلة لها .

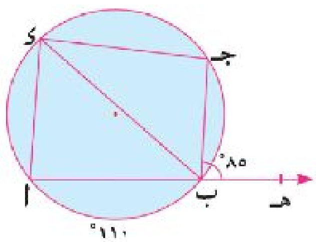
فيكون : ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ى) (مكملاتُ الزاوية الواحدة متساويةٌ في القياس)

## مثال (٢)

فى الشكلِ المقابلِ:

هـ ∈ $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{اب}}$ ، ق ($\overset{\frown}{\text{اب}}$) = ١١٠°، ق (∠ جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد ق (∠ ب ى جـ) .




الحل

∵ ق ($\overset{\frown}{\text{اب}}$) = ١١٠°، ∠ ا ى ب زاوية محيطية قوسها $\overset{\frown}{\text{اب}}$

∴ ق (∠ ا ى ب) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{اب}}$) = ٥٥° .

∵ ∠ جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى ا ب جـ ى

∴ ق (∠ جـ ب هـ) = ق (∠ جـ ى ا) = ٨٥° (نتيجة)

∠ ب ى جـ) = ٨٥° - ٥٥° = ٣٠° (وهو المطلوب)

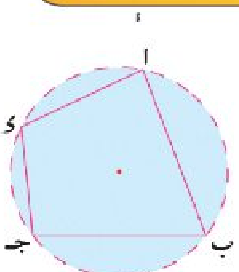
**عكس نظرية ٣** إذا وجدت زاويتانِ متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعىٍّ كان هذا الشكلُ رباعيًا دائريًا

فى الشكلِ المقابلِ :

إذا كان ق (∠ ا) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

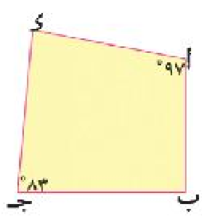
أو: ق (∠ ب) + ق (∠ ى) = ١٨٠°

فيكون الشكل ا ب جـ ى رباعيًّا دائريًّا .

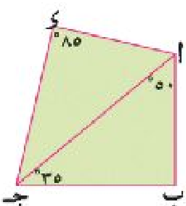



**تدرب** فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أثبت أن الشكل ا ب جـ ى رباعى دائرى :

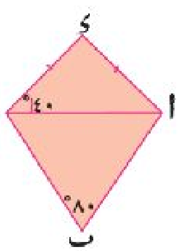
١



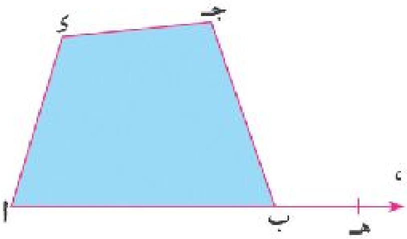

٢




٣



**نتيجة** إذا وجدت زاويةٌ خارجةٌ عن رأسٍ من رؤوس شكل رباعىٍّ قياسها يساوى قياسَ الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيًا دائريًا




فى الشكلِ المقابلِ :

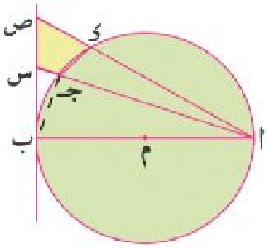
أ ب جـ ء شكل رباعي، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ∠ هـ ب جـ زاوية خارجة عن الشكل الرباعى أ ب جـ ء ،

∠ ء هي الزاوية الداخلة المقابلة لها .

**فإذا كان** ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ء) يكون الشكل أ ب جـ ء رباعيًّا دائريًّا .

## مثال (٣)




فى الشكلِ المقابلِ :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ وتران فيها وفى جهة واحدة من $\overline{\text{أ ب}}$

رسم من ب مماس للدائرة قطع $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ فى س ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ فى ص .

**أثبت أن** : الشكل س ص ء جـ رباعى دائرى .

**الحل**

نرسم $\overline{\text{ب جـ}}$ ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° ، ∠ أ ب جـ تتم ∠ ب أ س (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ مماس للدائرة عند ب .

∴ ق (∠ أ ب س) = ٩٠° ، ∠ أ س ب تتم ∠ ب أ س (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ س ب)

∵ ∠ ص ء جـ خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ ء

∴ ق (∠ ص ء جـ) = ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ س ب)

∵ ∠ أ س ب خارجة عن الشكل الرباعي س ص ء جـ ، ∠ ص ء جـ مقابلة لها .

∴ الشكل س ص ء جـ رباعي دائرى .

**فكر** متى يكون الشكلُ الرباعىُ دائريًا ؟ اذكر جميعَ الحالاتِ الممكنة؟

# العَلاقةُ بين مماسّات الدائرة

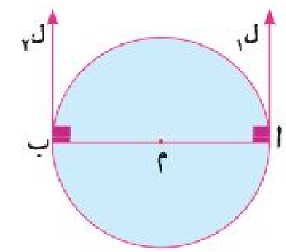
## سوف تتعلم

- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج دائرة.
- ☆ مفهوم الدائرة الداخلة لمضلع.
- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين.
- ☆ كيفية حل مسائل على العلاقة بين مماسات الدائرة.

## مصطلحات أساسية

- ☆ وتر التماس.
- ☆ دائرة داخلة لمضلع.
- ☆ مماسات مشتركة.

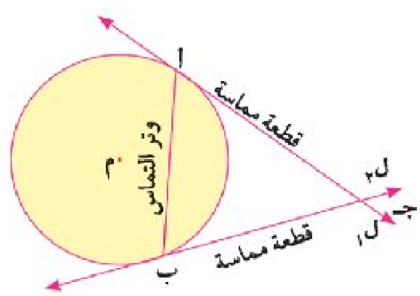
## فكر وناقش




**علمت أن المماسانِ المرسومان عند نهايتى قطر فى الدائرة متوازيين .**

ما العَلاقةُ بين المماسينِ المرسومينِ عند نهايتى وتر فى الدائرة لا يمر بمركزها ؟

**فى الشكلِ المقابلِ :**




**لاحظ أن :**

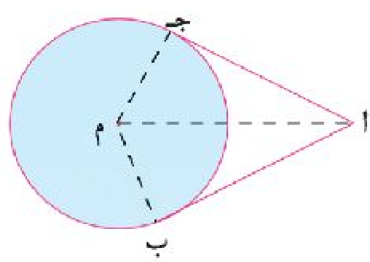
**إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ وترًا فى الدائرة م ،**

فإن المماسين $ل_1$، $ل_2$ يتقاطعان فى نقطة جـ .

وتسمى كلٌّ من $\overline{\text{جـ أ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ قطعةً مستقيمةً مماسةً، كما تسمى $\overline{\text{أ ب}}$ وتر التماس.

**نظرية ٤**

**القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.**




**المعطيات:** أ نقطة خارج الدائرة م،

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب، جـ .

**المطلوب:** إثبات أن : أ ب = أ جـ

**العمل:** نرسم $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$، $\overline{\text{م أ}}$

**البرهان:** ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة م ∴ ق (∠ أ ب م) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعة مماسة للدائرة م ∴ ق (∠ أ جـ م) = ٩٠°

∵ المثلثان أ ب م ، أ جـ م فيهما :

ق ($\angle$ ب) = ق ($\angle$ جـ) = ٩٠° (اثباتاً)

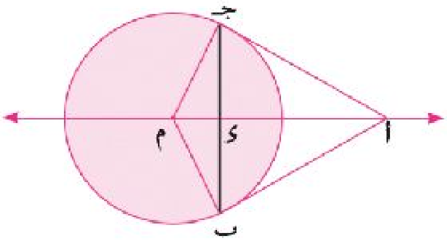
م ب = م جـ (أطوال أنصاف أقطار)

$\overline{\text{ا م}}$ ضلع مشترك . ∴ △ ا ب م ≡ △ ا جـ م

وينتج أن : $\overline{\text{ا ب}}$ ≡ $\overline{\text{ا جـ}}$ ∴ ا ب = ا جـ (وهو المطلوب)

فكر

في الشكلِ المقابلِ :

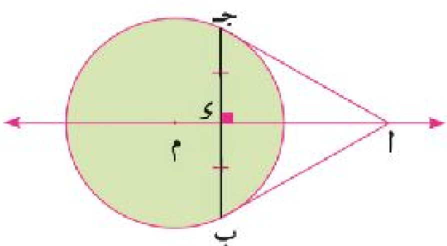



- لماذا يكون $\overleftrightarrow{\text{م ا}}$ محور $\overline{\text{ب جـ}}$؟
- لماذا ينصف $\overrightarrow{\text{ا م}}$ $\angle$ ب ا جـ؟
- لماذا ينصف $\overrightarrow{\text{م ا}}$ $\angle$ ب م جـ؟

**نتائج النظرية:**

**نتيجة ١** المستقيمُ المارُّ بمركزِ الدائرةِ، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محورًا لوتر التماسّ لهذين المماسين.

في الشكلِ المقابلِ :



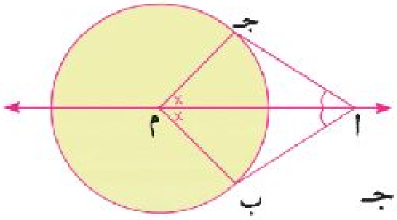

$\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ مماسين للدائرة م عند ب، جـ .

فإن : $\overleftrightarrow{\text{ا م}}$ محور $\overline{\text{ب جـ}}$

ويكون: $\overleftrightarrow{\text{ا م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب ى = جـ ى

**نتيجة ٢** المستقيمُ المارُّ بمركزِ الدائرةِ، ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاويةَ بين هذين المماسين. كما ينصف الزاويةَ بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس.

في الشكلِ المقابلِ :

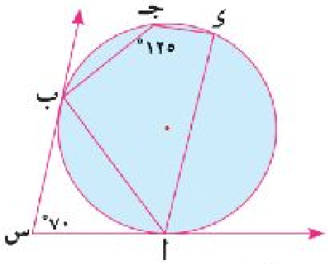



$\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ مماستان للدائرة م عند ب، جـ .

فإن : $\overrightarrow{\text{ا م}}$ ينصف $\angle$ ا

∴ ق ($\angle$ ب ا م) = ق ($\angle$ جـ ا م)، $\overrightarrow{\text{م ا}}$ ينصف $\angle$ ب م جـ

∴ ق ($\angle$ ا م ب) = ق ($\angle$ ا م جـ)




### مثال (١)

فى الشكلِ المقابلِ:

س ا ، س ب مماسان للدائرة عند ا، ب .

ق (∠ ا س ب) = ٧٠° ، ق (∠ ى جـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن : **أولاً:** ا ب ينصف ∠ ى ا س . **ثانيًا:** ا ى // س ب .

**الحل**

**المعطيات:** س ا ، س ب مماسان للدائرة، ق (∠ ا س ب) = ٧٠° ، ق (∠ ى جـ ب) = ١٢٥° .

**المطلوب:** **أولاً:** ا ب ينصف ∠ ى ا س **ثانيًا:** ا ى // س ب .

**البرهان:** ∵ س ا ، س ب قطعتان مماستان. ∴ س ا = س ب

فى △ س ا ب ∵ ق (∠ س ا ب) = ق (∠ س ب ا)، ق (∠ س) = ٧٠°

∴ ق (∠ س ا ب) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥° (١)

∵ الشكل ا ب جـ ى رباعى دائرى، ق (∠ جـ) = ١٢٥°

∴ ق (∠ ى ا ب) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (نظرية) (٢)

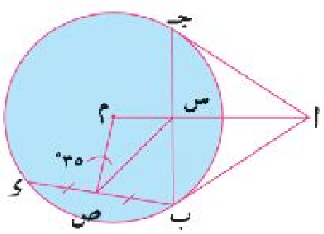
من (١)، (٢) ينتج أن : ق (∠ س ا ب) = ق (∠ ى ا ب) = ٥٥°

∴ ا ب ينصف ∠ ى ا س (المطلوب أولاً)

∵ ق (∠ س ب ا) = ق (∠ ى ا ب) = ٥٥° وهما متبادلتان

∴ ا ى // س ب (المطلوب ثانيًا)

### مثال (٢)




فى الشكلِ المقابلِ :

ا ب ، ا جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب، جـ

ا م ∩ ب جـ = {س}، ص منتصف الوتر ب ى

ق (∠ س ص م) = ٣٥° .

أ أثبت أن : الشكل س ب ص م رباعى دائرى . ب أوجد ق (∠ ا) .

**الحل**

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب، جـ

∴ $\overleftrightarrow{أم}$ محور $\overline{ب جـ}$ ، ق (∠ ب س م) = ٩٠° (١)

∵ ص منتصف الوتر $\overline{ب ى}$ ∴ ق (∠ ب ص م) = ٩٠° (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري . (وهو المطلوب أولاً)

نرسم $\overline{ب م}$

∵ الشكل س ب ص م رباعى دائرى ، ق (∠ س ص م) = ٣٥° .

∴ ق (∠ س ب م) = ق (∠ س ص م) = ٣٥°

∵ $\overline{أب}$ قطعة مماسة ، $\overline{م ب}$ نصف قطر

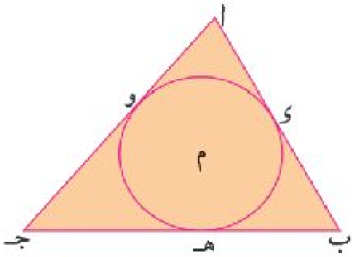
∴ ق (∠ أ ب م) = ٩٠° ∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° - ٣٥° = ٥٥°

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) = ٥٥°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠° (وهو المطلوب ثانيًا)

**تعريف** **الدائرةُ الداخلةُ لمضلعٍ هى الدائرة التى تمسُّ جميعَ أضلاعه من الداخل.**

فى الشكلِ المقابلِ :

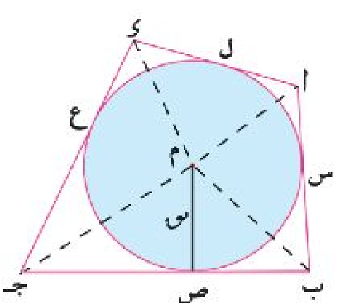



م هى الدائرةُ الداخلةُ للمثلث أ ب جـ لأنها تمسُّ أضلاعَه من الداخل فى ى ، هـ ، و .

أى أن : المثلث أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م.

**فكر** هل مركزُ الدائرة الداخلة لأى مثلثٍ هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ؟ فسر إجابتك.

**مثال (٣)**




فى الشكلِ المقابلِ:

م دائرةٌ داخلةٌ للشكل الرباعى أ ب جـ ى ،

طول نصف قطرها ٥سم، أ ب = ٩سم جـ ى = ١٢سم.

أوجد محيط الشكل أ ب جـ ى ثم احسب مساحته.

**الحل**

∵ الدائرةُ م دائرة داخلة للشكل الرباعى ا ب جـ ى

∴ الدائرة م تمس أضلاع الشكل ا ب جـ ى فى س، ص، ع، ل

∵ ا س، ا ل قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ا س = ا ل

∵ ب س، ب ص قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ب س = ب ص

**بالمثل** يكون جـ ع = جـ ص ∴ ى ع = ى ل

**بالجمع ينتج أن :** (ا س + ب س) + (جـ ع + ى ع) = ا ل + ب ص + جـ ص + ى ل

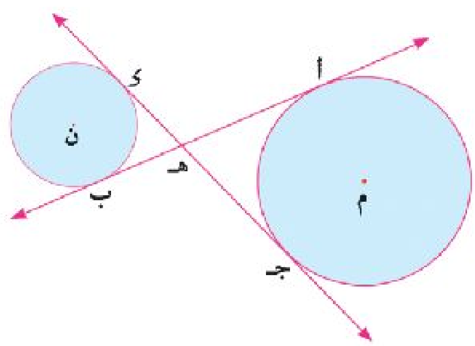
∴ ا ب + جـ ى = ا ى + ب جـ = $\frac{١}{٢}$ محيط الشكل ا ب جـ ى

محيطُ الشكل ا ب جـ ى = ٢(٩ + ١٢) = ٤٢سم ،

مساحة الشكل ا ب جـ ى = $\frac{١}{٢}$ ا ب × نق + $\frac{١}{٢}$ ب جـ × نق + $\frac{١}{٢}$ جـ ى × نق + $\frac{١}{٢}$ ا ى × نق

= $\frac{١}{٢}$ محيط الشكل × نق = $\frac{١}{٢}$ × ٤٢ × ٥ = ١٠٥سم$^{٢}$

## المماساتُ المشتركةُ لدائرتين متباعدتين :



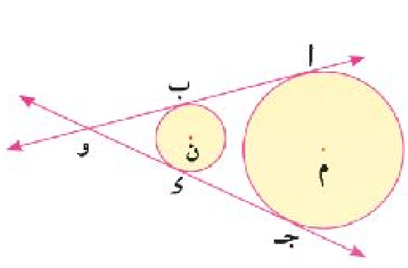

ا يسمى ا ب مماسٌ مشتركٌ داخليٌ للدائرتين م، ن

لأن الدائرتين م، ن تقعان فى جهتين مختلفتين

من ا ب ، **كما أن** جـ ى مماسٌ داخليٌ للدائرتين .

**لاحظ أن :** ا ب ∩ جـ ى = {هـ}

**فى الشكلِ المقابلِ : أثبت أن :** ا ب = جـ ى




ب يسمى ا ب مماسٌ مشتركٌ خارجيٌ للدائرتين م، ن ،

لأن الدائرتين م، ن تقعان فى جهة واحدة من ا ب ،

**كما أن** جـ ى مماس خارجي للدائرتين .

**لاحظ أن :** ا ب ∩ جـ ى = {و}

**فى الشكلِ المقابلِ : أثبت أن :** ا ب = جـ ى .

# ٥ - ٣

# الزاويـةُ المـماسيَّـة

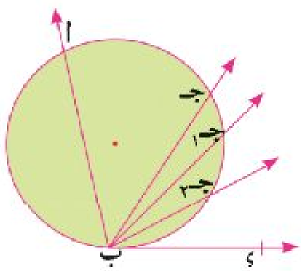
## سوف تتعلم

- ☆ مفهوم الزاوية المماسية.
- ☆ كيفية استنتاج علاقة الزاوية المماسية بالزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.
- ☆ علاقة الزاوية المماسية بالزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .
- ☆ كيفية حل المسائل على الزاوية المماسية.

## مصطلحات أساسية

- ☆ زاوية مماسية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ زاوية مركزية.

## فكر وناقش




فى الشكلِ المقابلِ :

∠ أ ب جـ زاوية محيطية ضلعاها $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ وقوسها $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب .إذا تصورنا دوران أحد ضلعى الزاوية المحيطية، وليكن $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ مبتعداً عن $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ فيأخذ أحد الأوضاع $\overrightarrow{\text{ب جـ}_١}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}_٢}$ ، .........

- ♦ هل يزدادُ قياسُ الزاوية المحيطية الناشئة مثل ∠ أ ب جـ١ ، ∠ أ ب جـ٢ ، ......
- ♦ هل يزداد ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}_١}$) ، ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}_٢}$) ، ......... ؟
- ♦ إذا انطبق $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ على $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ماذا تلاحظ ؟

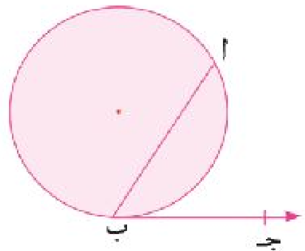
**لاحظ** أننا نحصل على أكبرِ زاوية محيطية فى القياس حينما يكاد ينطبقُ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ على $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ وتسمى ∠ أ ب ء عندئذٍ بالزاوية المماسية، وهى حالةٌ خاصةٌ من الزاوية المحيطية وعندها يكون :

ق (∠ أ ب ء) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$)

| | |
|---|---|
| **الزاويةُ المماسيةُ** | **هى الزاويةُ المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماسٌ للدائرة، والآخر يحمل وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس.** |

ويكون :

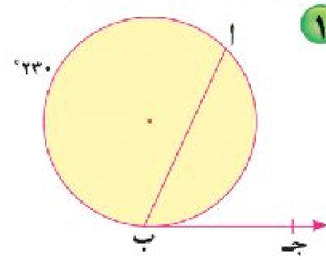
قياسُ الزاوية المماسية نصفَ قياس القوس المحصور بين ضلعيهما .

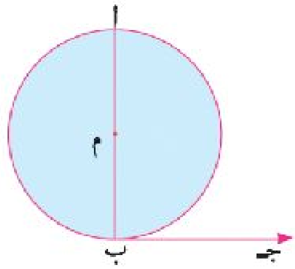


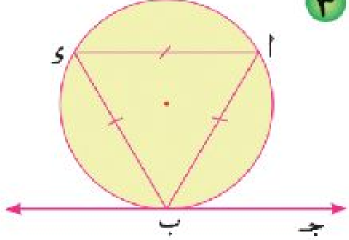

أى أن : ق (∠ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

**تدرب**

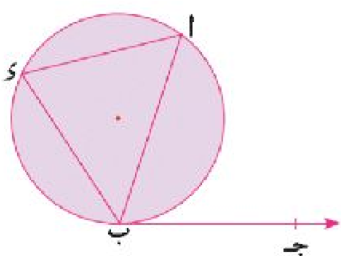
في كلٍّ من الأشكال الآتية احسب ق (∠ ا ب جـ) .

١ 


٢ 


٣ 


**نظرية ٥**
قياسُ الزاويةِ المماسيَّة يساوى قياسَ الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.




**المعطيات:** ∠ ا ب جـ زاوية مماسية، ∠ ء زاوية محيطية .

**المطلوب:** إثبات أن : ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ء)

**البرهان:** ∵ ∠ ا ب جـ زاوية مماسية

∴ ق (∠ ا ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (⌒ا ب) (١)

∵ ∠ ء زاوية محيطية

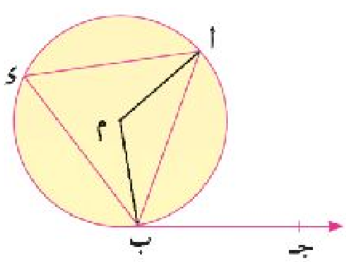
∴ ق (∠ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (⌒ا ب) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن :

ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ء) وهو المطلوب

**نتيجة**
قياسَ الزاوية المماسيَّة يساوى نصفَ قياس الزاوية المركزيَّة المشتركه معها فى القوس.

فى الشكلِ المقابلِ :




$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة م، $\overline{\text{ا ب}}$ وتر التماس

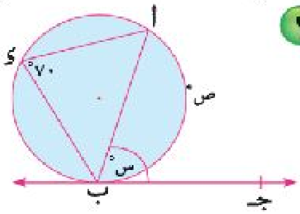
∴ ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ء) (نظرية)

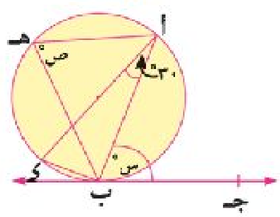
∵ ق (∠ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ا م ب) (نظرية)

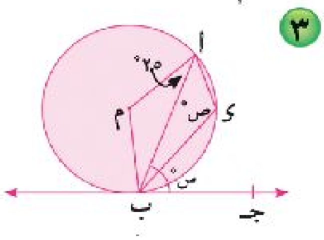
∴ ق (∠ ا ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ا م ب)

**تدرب**

**في كل من الأشكال الآتية:** $\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس للدائرة، **أوجد** قيمة الرمز المستخدم فى القياس .



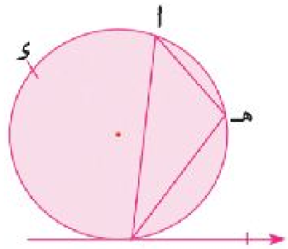




**ملاحظة هامة :**

الزاويةُ المماسيةُ تكمل الزاويةَ المحيطيةَ المرسومةَ على وترِ الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منه .

**أى أن :** ∠ أ ب جـ تكمل ∠ أ هـ ب .

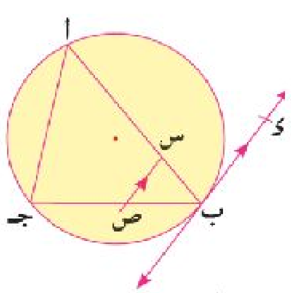



**مثال (١)**

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{بء}$ مماس للدائرة عند ب ،

س ∈ $\overline{أب}$ ، ص ∈ $\overline{بجـ}$ حيث $\overline{سص}$ // $\overleftrightarrow{بء}$ .

**أثبت أن :** الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى .




**البرهان:** ∵ $\overleftrightarrow{بء}$ مماس للدائرة عند ب، $\overline{أب}$ وتر التماس . ∴ ق (∠ ء ب أ) = ق (∠ جـ)

∵ $\overline{سص}$ // $\overleftrightarrow{ءب}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ قاطع لهما ∴ ق (∠ ء ب أ) = ق (∠ ب س ص)

∴ ق (∠ ب س ص) = ق (∠ جـ)

∵ ∠ ب س ص خارجة عن الشكل الرباعى س ص جـ أ .

∴ الشكل س ص جـ أ رباعى دائرى (وهو المطلوب)

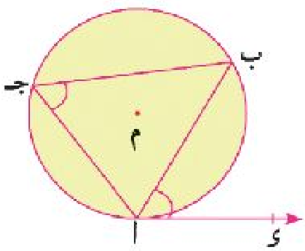
**عكس نظرية ٥**

إذا رُسم شعاعٌ من أحد طرفى وتر فى دائرةٍ بحيث كان قياسُ الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسًا للدائرة .

**أى أن :**

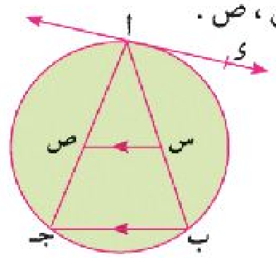
إذا رسم $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ من أحد طرفى الوتر $\overline{\text{ا ب}}$ فى الدائرة م وكان :

ق (∠ ى ا ب) = ق (∠ جـ) **فإن :** $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس للدائرة م .




**مثال (٢)**

ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس للدائرة عند ا، س ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ا جـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ **أثبت أن :** $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص .




**الحل**

**المعطيات:** $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس للدائرة ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

**المطلوب:** إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص .

**البرهان:** ∵ $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس، $\overline{\text{ا ب}}$ وتر التماس ∴ ق (∠ ى ا ب) = ق (∠ جـ) (١)

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ قاطع لهما ∴ ق (∠ ا ص س) = ق (∠ جـ) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن : ق (∠ ى ا ب) = ق (∠ ا ص س)

**أى أن :** ق (∠ ى ا س) = ق (∠ ا ص س)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص .

# الأنشطة والتدريبات

# الوحدة الأولى: المعادلات

## تمارين (١ ـ ١)

### على حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبريا و بيانيا

**أولاً أكمل ما يأتي:**

(أ) مجموعة حل المعادلتين س + ص = ٠ ، ص - ٥ = ٠ هي ......

(ب) مجموعة حل المعادلتين س + ٣ ص = ٤ ، ٣ ص + س = ١ هي .......

(جـ) مجموعة حل المعادلتين ٤ س + ص = ٦ ، ٨ س + ٢ ص = ١٢ هي .......

(د) إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٣ ص = ٤، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن أ = .......

(هـ) إذا كان للمعادلتين س + ٢ ص = ١، ٢ س + ك ص = ٢ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوي ........

**ثانياً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) المستقيمان: ٣ س + ٥ ص = ٠ ، ٥ س - ٣ ص = ٠ يتقاطعان في:

(أ) نقطة الأصل (ب) الربع الأول (جـ) الربع الثاني (د) الربع الرابع

(٢) مجموعة حل المعادلتين: س -٢ ص = ١ ، ٣ س + ص = ١٠ هي:

(أ) {(٥، ٢)} (ب) {(٢، ٤)} (جـ) {(١، ٣)} (د) {(٣، ١)}

(٣) إذا كان للمعادلتين س + ٤ ص = ٧، ٣ س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائي من الحلول فإن ك = ........

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١

**ثالثاً**

(١) **أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية جبريًّا وبيانيًّا:**

(أ) ص = س + ٤ ، س + ص = ٤ (ب) س - ص = ٤ ، ٣ س + ٢ ص = ٧

(جـ) ٣ س + ٤ ص = ١١ ، ٢ س + ص - ٤ = ٠ (د) ٣س - ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢ س + ٣

(هـ) ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٥ (و) س + ٢ ص = ٨ ، ٣ س + ص = ٩

(٢) إذا كان عدد الفرق الرياضية المشاركة في بطولة كأس الأمم الأفريقية ١٦ فريقًا، وكان عدد الفرق غير العربية يزيد على ثلاثة أمثال عدد الفرق العربية بمقدار ٤، أوجد عدد الفرق العربية المشاركة في البطولة.

(٣) زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠. أوجد قياس كل زاوية.

(٤) زاويتان متكاملتان ضعف قياس الكبرى يساوي سبعة أمثال قياس الصغرى. أوجد قياس كل زاوية.

(٥) إذا كان مجموع عمري أحمد وأسامة الآن ٤٣ سنة، وبعد ٥ سنوات يكون الفرق بين عمريهما ٣ سنوات. أوجد عمر كل منهما بعد ٧ سنوات.

(٦) مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٤ سم، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم. أوجد مساحة المستطيل.

## تمارين ( ١ ـ ٢ )

### على حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيا و جبريا

(١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

(أ) س$^{٢}$ - ٢ س - ٦ = ٠ (ب) س$^{٢}$ + ٣ س - ٣ = ٠ (جـ) ٢ س$^{٢}$ - ٤ س + ١ = ٠

(د) ٣ س$^{٢}$ - ٦ س + ١ = ٠ (هـ) س (س - ١) = ٤ (و) (س - ٣)$^{٢}$ - ٥ س = ٠

(ز) س + $\frac{٤}{س}$ = ٦ (ح) $\frac{٨}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{س}$ = ١ (ط) $\frac{س}{٣}$ = $\frac{١}{س - ٥}$

(٢) ارسم الشكل البياني للدالة د في الفترة المعطاة ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

مقربًا الناتج لرقم عشري واحد في كل مما يأتي:

(أ) د (س) = س$^{٢}$ - ٢ س - ٤ في الفترة [-٢، ٤]

(ب) د (س) = ٢ س$^{٢}$ + ٥ س في الفترة [-٤، ٢]

(جـ) د (س) = ٣ س - س$^{٢}$ + ٢ في الفترة [-١، ٤]

(د) د (س) = س (س - ٥) + ٣ في الفترة [٠، ٥]

(هـ) د (س) = ٢ س$^{٢}$ - ٣ (٢ - س) في الفترة [-٣، ٢]

(و) د (س) = ٢ س (س - ١) - ٣ (س +٢) + ٥ في الفترة [-١، ٣]

(ز) د (س) = (س - ٣)$^{٢}$ - (س - ٣) - ٤ في الفترة [٧، ١]

(٣) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = ٦ س - س$^{٢}$ - ٩ في الفترة [٠، ٥] ومن الرسم أوجد:

(أ) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

(ب) مجموعة حل المعادلة ٦ س - س$^{٢}$ - ٩ = ٠

(٤) يرش رجل حديقته بخرطوم مياه يندفع فيه الماء في مسار يتحدد بالعلاقة:
ص =-٠,٠٦ س$^{٢}$ + ١,٢ س + ٠,٨ حيث س المسافة الأفقية التي يصل إليها الماء بالمتر، ص ارتفاع الماء عن سطح الأرض بالمتر، أوجد لأقرب سنتيمتر أقصى مسافة أفقية يصل إليها الماء.

(٥) رأى ثعبان على الأرض صقرًا على ارتفاع ١٦٠ مترًا منه، وهو ينطلق إليه بسرعة ٢٤ مترًا/ دقيقة لكي ينقض عليه، فإذا كان الصقر ينطلق رأسيًا لأسفل حسب العلاقة ف = ع. ن + ٤,٩ ن$^{٢}$ حيث ف المسافة بالمتر، ع. سرعة الانطلاق بالمتر / دقيقة، ن الزمن بالدقائق. أوجد الزمن الذي يأخذه الثعبان لكي يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر.

# تمارين (١ ـ ٣)

## على حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

**أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) مجموعة الحل للمعادلتين س - ص = ٠، س ص = ٩ هي:

(أ) {(٠، ٠)} (ب) {(-٣، -٣)} (ج) {(٣، ٣)} (د) {(-٣، -٣)، (٣، ٣)}

(٢) أحد حلول المعادلتين: س - ص = ٢، س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٠ هو:

(أ) (-٤، ٢) (ب) (٢، -٤) (ج) (٣، ١) (د) (٤، ٢)

(٣) عددان موجبان مجموعهما ٧، حاصل ضربها ١٢ فإن العددين هما:

(أ) ٢، ٥ (ب) ٢، ٦ (ج) ٣، ٤ (د) ١، ٦

**ثانياً :** (١) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) ص - س = ٢ ، س$^{٢}$ + س ص - ٤ = ٠

(ب) س + ٢ ص = ٤ ، س$^{٢}$ + س ص + ص$^{٢}$ = ٧

(ج) س - ٢ ص - ١ = ٠ ، س$^{٢}$ - س ص = ٠

(د) ص + ٢ س = ٧ ، ٢ س$^{٢}$ + س + ٣ ص = ١٩

(هـ) س - ص = ١٠ ، س$^{٢}$ - ٤ س ص + ص$^{٢}$ = ٥٢

(و) س + ص = ٢ ، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص}$ = ٢ حيث (س، ص $\neq$ ٠)

(٢) عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته، فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوي نصف العدد الأصلي، فما هو العدد؟

(٣) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم$^{٢}$. أوجد محيطه.

(٤) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم، محيطه يساوي ٣٠ سم. أوجد طول ضلعي القائمة.

(٥) معين الفرق بين طولي قطريه ٤ سم، ومحيطه يساوي ٤٠ سم. أوجد طول كل من قطريه.

(٦) تتحرك نقطة على المستقيم ٥ س - ٢ ص = ١ بحيث كان إحداثيها الصادي ضعف مربع إحداثيها السيني. أوجد إحداثي هذه النقطة.


**نشاط (١) :**

## ❶ حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى من مجهولين:

للتأكد من صحة حل المعادلتين : س + ٢ ص = ٨، ٣ س + ص = ٩

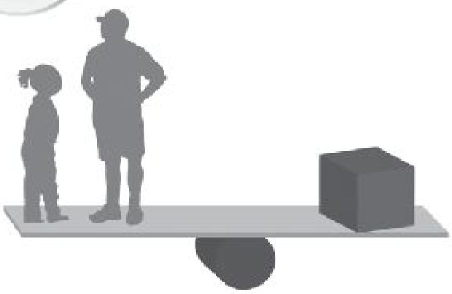
(على سبيل المثال) باستخدام الحاسبة العلمية نتبع الخطوات التالية:

نضغط على مفتاح العمليات (MODE) ونختار من القائمة (EQN) وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها أو بضغط على المفتاح (EXE) في بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية: (an X + bn Y = cn) ندخل معاملات (X)،(Y)، والحد المطلق (cn) بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية، مع ملاحظة ضغط مفتاح الإدخال (=) يعطي قيمة (X)،(Y) وهو حل المعادلة.

## ❷ حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد:

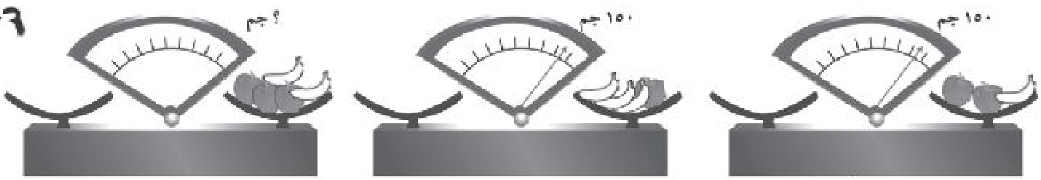
نكرر نفس الخطوات السابقة في السطور الثلاثة الأولى ثم نختار المفتاح ($ax^2 + b\,x + c = 0$) ثم ندخل المعاملات (a)، (b)، (c) والضغط على مفتاح الإدخال (=) أو (EXE) بعد كل رقم وباستمرار الضغط على مفتاح الإدخال تعطي الحاسبة مباشرة قيمتي (X).

## نشاط (٢) :



١ **الشكل المقابل:** يمثل أرجوحة يقف على أحد طرفيها رجل وابنته، فإذا كان وزن الرجل ٨٠ كجم، وعلى الطرف الآخر وضع حجر وزنه ٣ أمثال وزن البنت، فإذا كانت الأرجوحة متزنة تمامًا فأوجد وزن البنت؟

٢ **الأشكال التالية:** توضح وزن التفاح والموز - بفرض أن التفاح متماثل الوزن، والموز أيضًا أوجد قراءة الميزان شكل (جـ). وحدد وضع المؤشر على الرسم.




شكل (أ) شكل (ب) شكل (جـ)

# اختبار الوحدة الأولى

١) أكمل ما يأتي:

(أ) إذا كان (٥، س - ٧) = (ص + ١، - ٥) فإن س + ص = ..............

(ب) الدالة د حيث د (س) = $س^{٦}$ + ٢ $س^{٤}$ - ٣ كثيرة حدود من الدرجة ..............

(جـ) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ - أ يمر بالنقطة (١، ٠) فإن أ = ..............

٢) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

(أ) س + ٣ ص = ٧، ٥ س - ص = ٣ بيانيًا وجبريًا.

(ب) $س^{٢}$ - ٤ س + ١ = ٠ باستخدام القانون مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

(جـ) ص - س = ٣، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ - س ص = ١٣

٣) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ - ٢ س -١ في الفترة [-٢، ٤]

ومن الرسم أوجد:

(أ) معادلة محور التماثل (ب) مجموعة حل المعادلة $س^{٢}$ - ٢ س - ١ = ٠

٤) عددان مجموعهما ٩٠، وحاصل ضربهما يساوي ٢٠٠٠ أوجد العددين.

٥) تحرك راكب دراجة من مدينة أ شرقًا قاصدًا المدينة ب ثم تحرك من المدينة ب شمالاً قاصدًا المدينة جـ، فقطع مسافة ١٤ كم. فإذا كان مجموع مربعي المسافتين المقطوعة ١٠٠ $كم^{٢}$، فأوجد أقصر مسافة بين المدينتين أ، جـ.

٦) عند قفز الدولفين فوق سطح الماء فإنه يرسم مسارًا يتبع العلاقة : ص= - ٠,٢ $س^{٢}$ + ٢ س حيث ص ارتفاع الدولفين فوق سطح الماء، س المسافة الأفقية بالقدم. أوجد المسافة الأفقية التي يقطعها الدولفين عند قفزه من الماء.

## تمارين (٢ ــ ١)

### على مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

**أولاً: اختر الإجابةَ الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:**

١ مجموعةُ أصفار الدالة د: حيث د(س) = -٣س هى:

أ {٠} ‏ ب {-٣} ‏ جـ {-٣ ، ٠} ‏ د ح

٢ مجموعةُ أصفارِ الدالة د : حيث د(س) = س (س$^{٢}$ - ٢س + ١) هى :

أ {٠ ، ١} ‏ ب {٠ ، -١} ‏ جـ {-١ ، ٠} ‏ د {١}

٣ إذا كانت ص(د) = {٢} ، د(س) = س$^{٣}$ - م ، فإن م تساوى :

أ $\sqrt[٣]{٢}$ ‏ ب ٢ ‏ جـ ٤ ‏ د ٨

٤ إذا كانت ص(د) = {٥} ، د(س) = س$^{٣}$ -٣س$^{٢}$ + أ فإن أ تساوى :

أ -٥٠ ‏ ب -٥ ‏ جـ ٥ ‏ د ٥٠

٥ إذا كانت ص(د) = {١ ، -٢} ، د(س) = س$^{٢}$ + س + أ فإن أ تساوى :

أ ٢٨ ‏ ب ١ ‏ جـ -١ ‏ د -٢

**ثانيًا: ١ أوجد مجموعةَ أصفارِ دوال كثيراتِ الحدود المعرفة بالقواعد الآتية فى ح .**

أ د(س) = (س - ١) (س - ٢) ‏ ب د(س) = س$^{٢}$ - ٢س

جـ د(س) = س$^{٢}$ - ١٦ ‏ د د(س) = ٢٥ - ٩س$^{٢}$

هـ د(س) = ٢س$^{٣}$ - ١٨ س ‏ و د(س) = ٥س$^{٣}$ - ٢٠س

ز د(س) = س$^{٣}$ - ١٢٥ ‏ ح د(س) = ٢س$^{٣}$ + ١٦

ط د(س) = ٢س$^{٤}$ + ٥٤ س ‏ ى د(س) = ٦س$^{٢}$ + س - ١٢

ك س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ - ١٥س ‏ ل د(س) = ٢س$^{٤}$ + س$^{٣}$ - ٦س$^{٢}$

م د(س) = س(س - ٥) - ١٤ ‏ ن د(س) = (س - ٢) (س + ٣) + ٤

س د(س) = س$^{٣}$ + س$^{٢}$ - ٢س - ٨ ‏ ع د(س) = س$^{٣}$ - ٣س$^{٢}$ - ٤س + ١٢

٢ إذا كانت د(س) = س$^{٣}$ - ٢س$^{٢}$ - ٧٥ **فأثبت أن العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة .**

٣ إذا كانت {-٣ ، ٣} هى مجموعة أصفار الدالة د حيث : د(س) = س$^{٢}$ + أ **فأوجد قيمة أ .**

٤ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د(س) = أ س$^{٢}$ + ب س + ١٥ هى {٣ ، ٥}.

**أوجد قيمة كل من أ ، ب.**

## تمارين (٢ ـ ٢)

### على الدالة الكسرية الجبرية

**أولا :** ① عيّن مجالَ كلٍّ من الدوالِّ الكسريةِ الجبرية الآتية ثم أوجد ن (٠) ، ن (٢) ، ن (−٢): إن أمكن

أ $ن(س) = \frac{س + ٣}{٤}$  ب $ن(س) = \frac{س - ٢}{٢س}$  جـ $ن(س) = \frac{١}{س + ٢}$

د $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٩}{س^{٢} - ١٦}$  هـ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - س}$  و $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

② إذا كان مجال الدالة ن: $ن(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - أ س + ٩}$ هو ح - {٣} **فأوجد** قيمة أ .

**ثانيا :** أوجد المجالَ المشتركَ لكلٍّ من :

① $ن_{١}(س) = \frac{١}{س}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢}{س + ١}$

② $ن_{١}(س) = \frac{٣}{س^{٢} - س}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢س - ٣}{س^{٢} - ١}$

③ $ن_{١}(س) = \frac{٣}{س - ٢}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٥}{س + ٢}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س}{س^{٢} - ٤س}$

④ $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - س}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} + س - ٢}$

**ثالثا :** أوجد المجالَ المشتركَ لكل مما يأتى :

① $\frac{س}{٣}$ ، $\frac{٣}{س}$

② $\frac{١}{٢س}$ ، $\frac{س - ١}{٥}$

③ $\frac{س + ٢}{س + ٥}$ ، $\frac{س - ٤}{س - ٧}$

④ $\frac{٤}{س - ٤}$ ، $\frac{س - ٥}{٥ س}$

⑤ $\frac{س}{س^{٢} - ٤}$ ، $\frac{٣}{٢ - س}$

⑥ $\frac{٥}{س - ٢}$ ، $\frac{س + ١}{س^{٢} - ٢س}$

⑦ $\frac{١}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{س}{١ - س^{٢}}$

⑧ $\frac{س^{٢} + ٤}{س^{٢} - ٤}$ ، $\frac{٧}{س^{٢} + ٤س + ٤}$

⑨ $\frac{س - ٢}{س + ٤}$ ، $\frac{٧}{س - ٣}$ ، $\frac{س}{س^{٢} + ٤}$

⑩ $\frac{س + ٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{س^{٢} - ٩}$ ، $\frac{٣س}{س^{٢} - ٣س}$

⑪ $\frac{س^{٢}}{س - ٣}$ ، $\frac{٧}{س + ٣}$ ، $\frac{-٢س}{س^{٣} + ٢٧}$

⑫ $\frac{٤س - ٣}{س^{٢} - س}$ ، $\frac{س - ١}{س^{٢} + ١٦}$ ، $\frac{٥س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$

⑬ $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ، $\frac{٧}{س^{٢} - ٩}$ ، $\frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} + س - ٢}$

## تمارين (٢ – ٣)

### على تساوى كسرين جبريين

**أولا : أكمل ما يأتى:**

١ أبسط صورةٍ للدالة ن حيث ن(س) = $\frac{\text{٤س}^{٢} - \text{٢س}}{\text{٢س}}$ ، س $\neq$ ٠ هى ..........

٢ المجالُ المشتركُ للدالتين $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ حيث $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{١}{\text{س} + ١}$ هو ..........

٣ إذا كان $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{\text{أ} + ١}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{٤}{\text{س} - ٢}$ وكان $\text{ن}_{١}$(س) = $\text{ن}_{٢}$(س) فإن أ = ..........

٤ إذا كان أبسطُ صورةٍ للكسر الجبرىِّ ن(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{٤س} + ٤}{\text{س}^{٢} - \text{أ}}$ هى ن(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$ فإن أ = ..........

٥ إذا كان $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{-٧}{\text{س} + ٢}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ك}}$ وكان المجال المشترك للدالتين $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$
هو ح - {-٢ ، ٧} فإن ك = ..........

**ثانيا : ١ اختصر كلاًّ من الكسورِ الآتيةِ إلى أبسطِ صورةٍ مبينًا مجالها :**

أ $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٣} - ٨}$ ب $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + \text{٣س} + ٢}$ جـ $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦}$

د $\frac{\text{س}^{٣} - ١}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٥)}$ هـ $\frac{\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ٩}{\text{٢س}^{٣} - \text{١٨س}}$ و $\frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{س}}$

ز $\frac{\text{٢س}^{٢} + \text{٧س} + ٦}{\text{٤س}^{٢} + \text{٤س} - ٣}$ ح $\frac{(\text{س} - ٢)^{٢} - ١}{\text{س}(\text{س} - ٣)}$ ط $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} - ١}$

**٢ فى كلٍّ مما يأتى بيِّن ما إذا كان $\text{ن}_{١}$ = $\text{ن}_{٢}$ أم لا مع ذكر السبب:**

أ $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ١)}{\text{س}(\text{س}^{٢} + ١)}$

ب $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٩}$

جـ $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{\text{٢س}^{٣} + \text{٦س}}{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ٣)}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{\text{٢س}}{\text{س} - ١}$

د $\text{ن}_{١}$(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{س}}$ ، $\text{ن}_{٢}$(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + \text{س}}$

**٣ فى كلٍّ مما يأتى أثبت أن : $ن_١ = ن_٢$**

أ $ن_١(س) = \frac{١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤}{س^٣ + ٤س}$

ب $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢س + ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤س}{س^٢ + ٨س + ١٦}$

جـ $ن_١(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٣ + س^٢ + س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{(س - ١)\ (س^٢ + ١)}{س^٣ + س}$

د $ن_١(س) = \frac{س^٣ + س}{س^٣ + س^٢ + س + ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س + ١}$

**٤ أوجد المجالَ المشتركَ للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ لكلٍّ مما يأتى:**

أ $ن_١(س) = \frac{س + ٢}{٣}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٣}{س}$

ب $ن_١(س) = \frac{-٥}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{س}$

جـ $ن_١(س) = \frac{س - ٥}{٣ - س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣س}{س^٢ + ١}$

د $ن_١(س) = \frac{س}{س^٣ - ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١١}{س^٢ - ٤}$

هـ $ن_١(س) = \frac{٣س + ١}{٧س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٤ - ٨١}$

و $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٩س + ٢٠}{س^٢ - ١٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٤س}$

# تمارين (٢ ـ ٤)

## على العمليات على الكسور الجبرية

**أولا : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث:**

❶ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}} + \frac{\text{س} + ٣}{٢\text{س}}$

❷ $\text{ن(س)} = \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ٢} + \frac{٤}{\text{س} + ٢}$

❸ $\text{ن(س)} = \frac{٢}{\text{س} + ٣} + \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٣\text{س}}$

❹ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٤} - \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ١٦}$

❺ $\text{ن(س)} = \frac{٣}{\text{س} - ١} - \frac{٢}{\text{س} - ١}$

❻ $\text{ن(س)} = \frac{٥}{\text{س} - ٣} + \frac{٤}{٣ - \text{س}}$

❼ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$

❽ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$

❾ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س} + ٣}{٢\text{س}} - \frac{\text{س}}{٢\text{س} - ١}$

❿ $\text{ن(س)} = \frac{٣}{\text{س} + ١} + \frac{٢\text{س} + ١}{١ - \text{س}^٢}$

**ثانيا : أوجد ن(س) فى أبسطِ صورةٍ محددًا مجال ن فى كل مما يأتى :**

❶ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}^٣ - ١}$

❷ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - \text{س}} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}$

❸ $\text{ن(س)} = \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س} + ٣} \div \frac{٥\text{س} - ٢٥}{٤\text{س} + ١٢}$

❹ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} \div \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ١}$

**ثالثا : أوجد ن(س) فى أبسطِ صورةٍ مبينًا مجال ن :**

❶ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٦}{٢\text{س}^٢ - ١٥\text{س} + ١٨} + \frac{\text{س} - ٥}{١٥ - ١٣\text{س} + ٢\text{س}^٢}$

❷ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٢}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤} + \frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}$

❸ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٣ - ٨} - \frac{٩ - \text{س}^٢}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$

❹ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢} - \frac{\text{س} - ٣}{٣ - \text{س}}$

❺ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٥}{٢\text{س}^٢ - ١٣\text{س} + ١٥} + \frac{\text{س} + ٣}{١٥\text{س} - ١٨ - ٢\text{س}^٢}$

❻ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{٢\text{س}^٢ - \text{س} - ٦} \div \frac{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{٤\text{س}^٢ - ٩}$

❼ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٣٦}{\text{س}^٢ - ٦\text{س}} \times \frac{٤\text{س} + ٢٤}{٣٦ - \text{س}^٢}$

❽ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^٣ - ١} \div \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}$

❾ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$

❿ $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{١ - \text{س}^٢} \div \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}$

## نشاط الوحدة الثانية

إذا كان $ن_١(س) = س + \frac{١}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = ٤س + \frac{٤}{س - ٢}$

وكانت $ن(س) = ن_١(س) \div ن_٢(س)$ أوجد:

١ مجال ن (س) ٢ ن (س) في أبسط صورة ٣ ن (١)، ن (٥) إن أمكن ذلك

# اختبار الوحدة الثانية

**أولاً: أكمل ما يأتى:**

١ أبسط صورة للدالة ن حيث $ن(س) = \frac{٣س}{س + ١} \div \frac{س}{س + ١}$ هى ........ ومجالها ................

٢ إذا كان للكسرِ الجبرى $\frac{س - أ}{س - ٣}$ معكوس ضربى هو $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن أ = ..........

٣ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + س}{س^٢ - ٢س}$ فإن المجالَ المشترَكَ الذى تتساوى فيه $ن_١$، $ن_٢$ هو ........

**ثانيًا:**

١ أوجد المجالَ المشترَكَ الذى تتساوى فيه $ن_١(س)$، $ن_٢(س)$ حيث:

$$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤} \text{ ، } ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١}$$

٢ إذا كان: $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$ فأوجد ن (س) فى أبسط صورةٍ مبينًا مجالها، واحسب قيمة ن(١).

٣ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ أثبت ان $ن_١ = ن_٢$

٤ إذا كان مجالُ الدالة ن حيث $ن(س) = \frac{ب}{س} + \frac{٩}{س + أ}$ هو ح - {٠، ٤}، ن (٥) = ٢ أوجد قيمتى أ، ب

٥ أوجد الدالةَ ن فى أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

**أولاً:** $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١} + \frac{س - ٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$ **ثانيًا:** $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^٢ + س + ١}$

٦ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{(س - ٢)(س^٢ + ٢)}$

**أولاً:** أوجد $ن^{-١}(س)$ وعين مجاله. **ثانيًا:** إذا كان $ن^{-١}(س) = ٣$ فما قيمة س.

## تمارين (٣ ـ ١)

### على العمليات على الأحداث
### (التقاطع والاتحاد)

**أولا :**

أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة.

١ اكتب فضاءَ العينةِ.

٢ اكتب الأحداث الآتية:

أ) أ = حدث الحصول على عدد زوجي.     ب) ب = حدث الحصولِ على عدد فردي.

ج) جـ = حدث الحصول على عدد أولي زوجي.

٣ أوجد كلاًّ من الاحتمالاتِ الآتية:

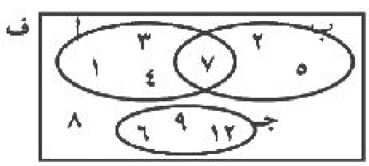
أ) وقوع الحدثين أ و ب معًا.     ب) وقوعُ الحدثين أ و جـ معًا.

**ثانيا :**

١ إذا كان أ، ب حدثين فى فضاءِ العينة لتجربة عشوائية، أكمل:

| أ | ب | جـ |
|---|---|---|
| ل (أ) = ٠,٣ | ل (أ) = ٠,٥٥ | ل (أ) = .......... |
| ل (ب) = ٠,٦ | ل (ب) = $\frac{٣}{١٠}$ | ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ |
| ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ | ل (أ ∩ ب) = .... | ل (أ ∩ ب) = صفر |
| ل (أ ∪ ب) = ..... | ل (أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$ | ل (أ ∪ ب) = ٠,٩ |

٢ باستخدام شكلِ فِن المقابل أوجد:




أ) ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

ب) ل (أ ∩ جـ) ، ل (أ ∪ جـ)

ج) ل (ب ∩ جـ) ، ل (ب ∪ جـ)

**ثالثا :**

إذا كان أ، ب حدثين فى فضاءِ العينة لتجربة عشوائية، أجب عن الآتى:

١ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ ∪ ب)

٢ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد ل (أ ∩ ب)

٣ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ ∪ ب) في الحالات الآتية:

أ) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$     ب) أ، ب حدثان متنافيان.

**رابعا: اختر الإجابةَ الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:**

١ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين فإن ل (أ ∩ ب) تساوي

(أ) $\phi$ (ب) صفر (جـ) ٠,٥٦ (د) ١

٢ إذا كانت أ ⊂ ب، فإن ل (أ ∪ ب) تساوي:

(أ) صفر (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) ل (أ ∩ ب)

٣ إذا أُلقيت قطعةُ نقودٍ منتظمةٍ مرة واحدة فإن احتمالَ ظهور صورة أو كتابة يساوي:

(أ) صفر ٪ (ب) ٢٥ ٪ (جـ) ٥٠٪ (د) ١٠٠٪

٤ إذا أُلقي حجر نرد مرةً واحدةً فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردي معًا يساوي:

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

**خامسا:**

١ صندوق يحتوي على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء، ٤ كرات حمراء، وباقي الكرات بيضاء. سحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. أوجد احتمالَ أن تكون الكرةُ المسحوبةُ:

(أ) زرقاء (ب) ليست حمراء (جـ) زرقاء أو حمراء

٢ كيس به ٢٠ بطاقةً متماثلةً ومرقمة من ١ إلى ٢٠، سحبت منه بطاقةٌ واحدة عشوائيًا. أوجد احتمالَ أن يكون العددُ المكتوب على البطاقة المسحوبة:

(أ) يقبل القسمة على ٥. (ب) فرديًا و يقبل القسمة على ٥

٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربةٍ عشوائية، وكان ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

فأوجد ل (أ) إذا كان:

(أ) أ، ب حدثان متنافيان. (ب) ب ⊂ أ

٤ سحبت بطاقةٌ عشوائيةٌ من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٢٠ احسب احتمالَ أن تكون البطاقةُ المختارة تحمل عددًا:

(أ) يقبل القسمة على ٣

(ب) يقبل القسمة على ٥

(جـ) يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥

(د) يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

## تمارين (٣ ـ ٢)

### تمارين متنوعة على العمليات على الأحداث

١ مجموعةُ بطاقاتٍ مرقمة من ١ إلى ٣٠ خُلطت جيدًا، فإذا سحبت منها بطاقةٌ واحدةٌ عشوائيًا. احسب احتمال أن تكون البطاقةُ المسحوبةُ تحمل:

(أ) عددًا مضاعفًا للعدد ٦. (ب) عددًا مضاعفًا للعدد ٨.

(جـ) عددًا مضاعفًا للعدد ٦، ٨ معًا. (د) عددًا مضاعفًا للعدد ٦ أو ٨.

٢ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية بحيث كان احتمال وقوع الحدث ب يساوي ثلاثةَ أمثال وقوع الحدث أ ، واحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل يساوي ٠,٦٤ أوجد احتمال وقوع كلٍّ من الحدث أ واحتمال وقوع الحدث ب.

٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٥، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨، ل (ب) = س. فأوجد قيمة س إذا كان:

(أ) الحدثين أ، ب متنافيين. (ب) ل (أ ∩ ب) = ٠,١

٤ حجر نرد غير منتظم، احتمال ظهور كل من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ متساوي واحتمال ظهور العدد ٦ يساوي ٣ مرات احتمال العدد ١، فإن ألقي هذا الحجر مرة واحدة. احسب احتمال:

(أ) ظهور العدد ٦ (ب) ظهور عدد فردي أولي

٥ اشترك ثلاثةُ لاعبين أ، ب، جـ في مسابقة لرفع الأثقال، فإذا كان احتمالُ فوز اللاعب أ يساوي ضعف احتمال فوز ب، واحتمال فوز اللاعب ب يساوي احتمال فوز اللاعب جـ ، فأوجد احتمال فوز اللاعب ب أو جـ علمًا بأن لاعبًا واحدًا سيفوز في المسابقة.

٦ ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات، وكان أ، ب حدثين من ف، فإذا كان عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع الحدث أ يساوي ١٣ ، وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوي ٢٤ وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ فأوجد:

(أ) احتمال وقوع الحدث أ. (ب) احتمال وقوع الحدثين أ، ب معًا.

٧ اشترك ٤٥ تلميذًا في إحدى المدارس في الأنشطة الرياضية منهم ٢٧ تلميذًا في فريق كرة القدم، ١٥ تلميذًا في فريق كرة السلة، ٩ تلاميذ في كرة القدم وكرة السلة، اختير تلميذٌ من هذه المدرسة عشوائيًا. مثِّل ذلك بشكلِ ڤن، ثم أوجد احتمالَ أن يكون التلميذُ المختار:

(أ) مشترك في فريق كرة القدم. (ب) مشترك في فريق كرة السلة.

(جـ) مشترك في فريق كرة القدم وفريق كرة السلة.

(د) غير مشترك فى أى من الفرق السابقة.

## نشاط الوحدة الثالثة

في إحدى الدّراسات التي اشتملت على اختيار ٦٠٠٠ حالة ولادة في إحدى المحافظات اختيرت عشوائيًّا، اهتم الباحثون ببحثِ العلاقة بين عُمر الأمّ عند الإنجاب، ومكان إقامتها، وكان أعدادُ المواليد في الحضر والريف كما هو مدون في الجدول التالي:

| عمر الأم | مكان إقامة الأم | |
|---|---|---|
| | الحضر | الريف |
| أقل من ٢٠ عامًا | ١٢٠ | ٢٤٠ |
| من ٢٠ عامًا إلى أقل من ٢٢ عامًا | ٢٤٠ | ٣٦٠ |
| من ٢٢ عامًا إلى أقل من ٣٠ عامًا | ١٧٤٠ | ١٤٤٠ |
| من ٣٠ عامًا فأكثر | ١٥٠٠ | ٣٦٠ |

١ ماذا تستنتج من بيانات هذا الجدول؟

٢ إذا كان الحدث أ يعبر عن الأم التي أنجبت وتقيم في الحضر، الحدث ب يعبر عن الأم التي أنجبت لا يزيد عمرها على ٢٢عامًا. أوجد:

(أ) ل(أ) (ب) ل (ب)

٣ مثّل المجموعتين أ، ب بشكل ڤن ثم أوجد كلاًّ من:

(أ) ل (أ ∩ ب) (ب) ل (أ ∪ ب) (ج) ل (أ - ب) (د) ل (أ ∪ ب)َ

٤ تنبأ بعدد المواليد إذا كانت الأمُّ تقيم في الحضر، وعمرها ٣٠ عامًا فأكثر، علمًا بأن عدد حالات الولادة ٩٠٠٠ حالة في المحافظة.

٥ اكتب تقريرًا عن معدلِ الزيادةِ السكانية وآثارها السّلبية على الدخلِ القومي، والدورُ الذي ينبغي أن تقوم به وسائلُ الإعلام للحد من هذه الظاهرة.

# اختبار الوحدة الثالثة

**أولاً أكمل ما يأتي:**

١ إذا كان احتمالُ وقوعِ الحدث أ هو ٦٥٪ فإن احتمالَ عدم وقوعه يساوى ..............

٢ إذا كان ل (أ) = ل (أَ)، فإن ل (أ) = ..............

٣ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن ل (ب) = .......

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٧ ، ل (أ - ب) = ٠,٥ ،
فإن ل (أ ∩ ب) = ..............

**ثانيًا**

١ صندوق به ٢٠ كرة، لها نفس الشكل والحجم والوزن، ومخلوطة جيدًا، منها ٨ كرات حمراء، ٧ كرات بيضاء، وباقي الكرات خضراء. سحبت كرة واحدة عشوائيًا. أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ حمراء  ب بيضاء أو خضراء  جـ ليست بيضاء

٢ كيس به ٣٠ بطاقة متماثلة مخلوطة جيدًا، سحبت بطاقةٌ واحدةٌ عشوائيًا من الكيس، أوجد احتمالَ أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة يقبل:

أ القسمة على ٣
ب القسمة على ٥
جـ القسمة على ٣ و ٥
د القسمة على ٣ أو ٥

٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاءِ عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧
ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ فأوجد:

أ احتمال عدم وقوع الحدث أ.
ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقلّ.


دار النصر للطباعة (هدلاين)

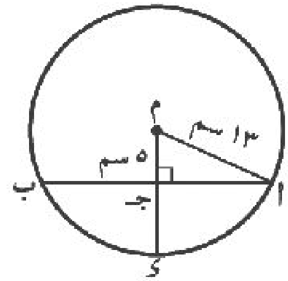
# الوحدة الرابعة : الدائرة

## تمارين ( ٤ ـ ١ )

### على تعاريف و مفاهيم اساسية

**١ في كل من الأشكال الآتية، م دائرة، أكمل:**

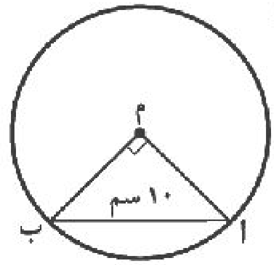
(أ)




أب = ............

جـ ء = ............

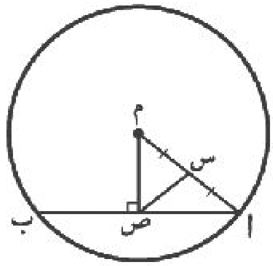
(ب)




ق (∠ أ) = ............

م أ = ............

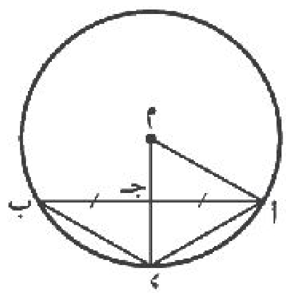
(جـ)



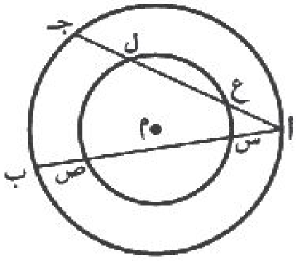

س ص = ٧سم، $\pi = \frac{22}{7}$

مساحة الدائرة = ............ سم$^2$

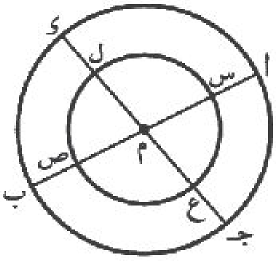
**٢ في الشكل المقابل:** م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم، أب وتر فيها طوله ٢٤سم، جـ منتصف أب، م جـ ∩ الدائرة م = {ء}
**أوجد** مساحة المثلث أ ء ب.




**٣ في الأشكال المقابلة:** اذكر القطع المستقيمة المتساوية في الطول؟ فسر إجابتك.

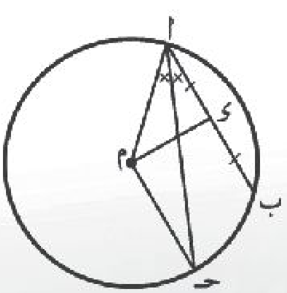



شكل (١)

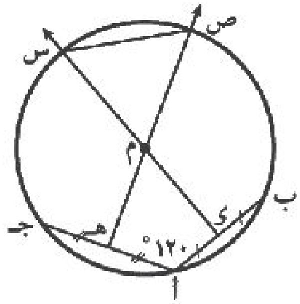



شكل (٢)

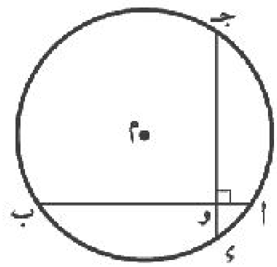
**٤ في الشكل المقابل:** أب وتر في الدائرة م،
أجـ ينصف ∠ ب أ م ويقطع الدائرة م في جـ.
إذا كان ء منتصف أب
**فأثبت أن** ء م ⊥ جـ م.



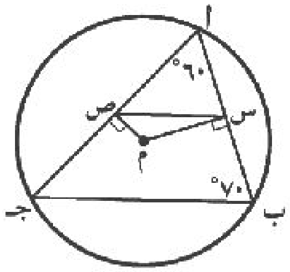
٥ **في الشكل المقابل:** $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران في الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠°،
ى، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب. رسم $\overrightarrow{\text{ى م}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ م}}$
فقطعا الدائرة في س، ص على الترتيب.
**أثبت أن** المثلث س ص م متساوي الأضلاع.




٦ **في الشكل المقابل:** دائرة م طول نصف قطرها ٧سم،
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ وتران متعامدان ومتقاطعان في النقطة و.
فإذا كان أ ب = ١٢سم، جـ ى = ١٠سم، **أوجد** طول $\overline{\text{م و}}$




٧ **في الشكل المقابل:** في الدائرة م، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ،
ق (∠ أ) = ٦٠°، ق (∠ ب) = ٧٠°
**أوجد** قياسات زوايا المثلث م س ص




٨ $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{جـ ى}}$ وتران متوازيان في الدائرة م، أ ب = ١٢سم، جـ ى = ١٦سم. أوجد البعد بين هذين الوترين إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠سم. هل توجد إجابات أخرى؟ فسر إجابتك.

فكر إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{جـ ى}}$ وترين في دائرة حيث أ ب > جـ ى، أي الوترين أقرب إلى مركز الدائرة؟ فسر إجابتك.

## على أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

**١ أكمل ما يأتى:**

(أ) إذا كان طول قطر الدائرة ٨سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤سم، فإن ل يكون ..........

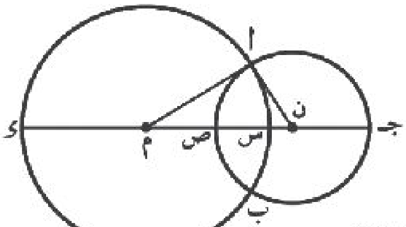
(ب) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} فإن الدائرتين م، ن تكونان ..........

(جـ) م، ن دائرتان متقاطعتان، طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٤سم على الترتيب، فإن : م ن ∈ ..........

(د) إذا كانت مساحة الدائرة م = ١٦ $\pi$ سم$^2$، أ نقطة فى مستويها حيث م أ = ٨سم، فإن أ تقع .......... الدائرة م.

(هـ) دائرة م طول قطرها ٦سم، فإذا كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة، فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم ل ∈ ..........

(و) دائرة طول قطرها (٢س + ٥)سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢)سم فإن المستقيم ل يكون ..........



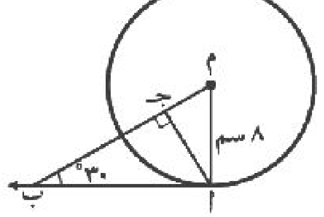
**٢ فى الشكل المقابل:** م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب
طولا نصفى قطريهما ٨سم، ٦سم على الترتيب،
س ص = ٤سم. ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) **أكمل:** ص م = ........ سم ، جـ س = ........ سم ، جـ ى = ........ سم

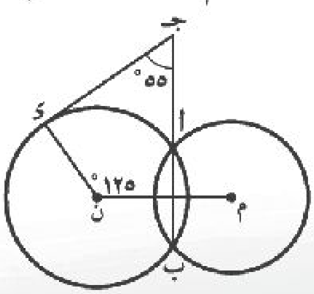
(ب) هل محيط المثلث أ ن م = طول جـ ى ؟ فسر إجابتك.

(جـ) ما قياس زاوية ن أ م؟ (د) أوجد مساحة المثلث ن أ م.

(هـ) ما طول الوتر المشترك أ ب ؟



**٣ فى الشكل المقابل:** $\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م عند أ،
م أ = ٨سم، ق (∠ أ ب م) = ٣٠°. **أوجد** طول كل من: $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$



**٤ فى الشكل المقابل:** م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب،
جـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$ ، ى ∈ الدائرة ن، ق (∠ م ن ى) = ١٢٥°،
ق (∠ ب جـ ى) = ٥٥° **أثبت أن** $\overleftrightarrow{جـ ى}$ مماس للدائرة ن عند ى.

**٥** $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ى}$ مماسان للدائرة م، $\overleftarrow{جـ م}$ قطع الدائرة م فى س، ص ويقطع $\overleftrightarrow{ب ى}$ فى هـ. **أثبت أن:** جـ س = ص هـ.

**٦** م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب،
م أ = ١٢سم، ن أ = ٩سم، م ن = ١٥سم. **أوجد** طول $\overline{أ ب}$ .

## تمارين ( ٤ ـ ٣ )

### على تعيين الدائرة

١ إذا كان ل مستقيمًا فى المستوى، أ نقطة معلومة حيث أ ∋ ل، باستخدام الأدوات الهندسية، ارسم دائرة تمر بالنقطة أ، وطول نصف قطرها ٢سم. كم دائرة يمكن رسمها؟ (لا تمحُ الأقواس).

٢ **باستخدام أدواتك الهندسية ارسم $\overline{\text{أ ب}}$ طولها ٤سم ثم ارسم على شكل واحد:**

أ) دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول قطرها ٥سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

ب) دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول نصف قطرها ٢سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

جـ) دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول قطرها ٣سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

٣ **ارسم المثلث س ص ع الذى فيه س ص = ٥ سم، ص ع = ٣ سم، ع س = ٧ سم، ثم ارسم الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع.**

أ) ما نوع المثلث س ص ع بالنسبة لقياسات زواياه؟

ب) أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لهذا المثلث؟

٤ ارسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٤سم، ب جـ = ٣سم، ثم ارسم الدائرة الخارجة لهذا المثلث. أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لأضلاع هذا المثلث؟

٥ **ارسم المثلث أ ب جـ المتساوى الأضلاع والذى طول ضلعه ٤ سم، ارسم الدائرة الخارجة للمثلث أ، ب، جـ.**

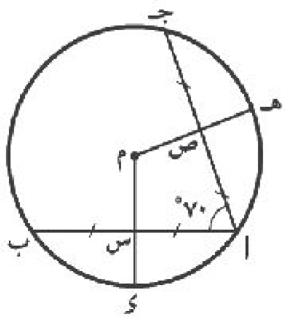
أ) حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة إلى: ارتفاعات المثلث - متوسطات المثلث - منصفات زوايا رؤوس المثلث.

ب) كم عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الأضلاع؟

٦ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٤سم، ب جـ = ٥سم، جـ أ = ٦سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقاط أ، ب، جـ. ما نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لقياسات زواياه؟ وأين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث؟

## تمارين (٤ - ٤)

### على علاقة أوتار الدائرة بمركزها




**١ فى الشكل المقابل:** أب ، أجـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م، س منتصف أب ، ص منتصف أجـ، ق (∠ جـ أ ب) = ٧٠°.

(أ) **احسب** ق (∠ ء م هـ).

(ب) **أثبت أن:** س ء = ص هـ.

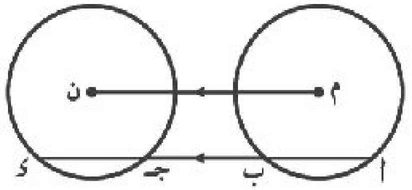
**٢** أب ، أجـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، س ، ص منتصفا أب ، أجـ، ق (∠ م س ص) = ٣٠°.

**أثبت أن: أولاً:** المثلث م س ص متساوى الساقين. **ثانيًا:** المثلث أ س ص متساوى الأضلاع.

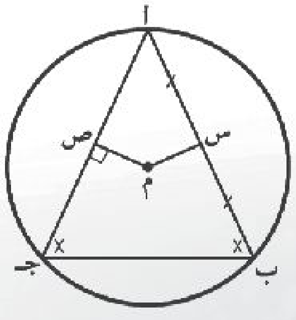
**٣** أب ، أجـ وتران فى الدائرة م، م س ⊥ أب ، ص منتصف أجـ ، ق (∠ أ ب جـ) = ٧٥°، م س = م ص.

(أ) **أوجد** ق (∠ ب أ جـ). (ب) **أثبت أن:** محيط Δ أ س ص = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب جـ.

**٤** دائرتان متحدتا المركز م، أب ، جـ ء وتران فى الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى فى س، ص على الترتيب. **أثبت أن** أب = أجـ.



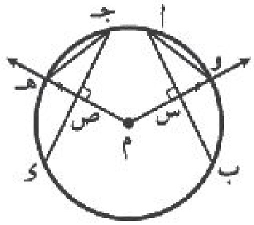

**٥ فى الشكل المقابل:** م، ن دائرتان متطابقتان، رسم أب // م ن فقطع الدائرة م فى أ، ب وقطع الدائرة ن فى جـ، ء. **أثبت أن:** أجـ = ب ء.



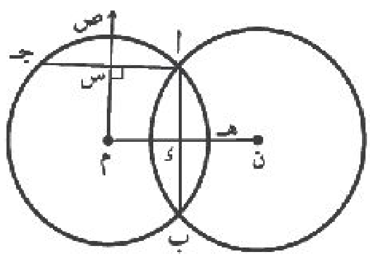

**٦ فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م، فيه: ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)، س منتصف أب ، م ص ⊥ أجـ.

**أثبت أن:** م س = م ص

٧ أب ، جـ ى وتران فى الدائرة م، م س ⊥ أب ويقطع الدائرة فى ى،
م ص ⊥ جـ ى ويقطع الدائرة فى هـ، ى س = هـ ص.
**أثبت أن:** **أولاً:** أ ب = جـ ى **ثانيًا:** أ و = جـ هـ




٨ **فى الشكل المقابل:** م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب،
رسم م س ⊥ أ جـ يقطع أ جـ فى س ويقطع الدائرة م فى ص.
ورسم م ن يقطع أ ب فى ى والدائرة م فى هـ. إذا كان أ جـ = أ ب.
**أثبت أن:** س ص = ى هـ.




٩ م، ن دائرتان متماستان من الداخل فى أ، رسم أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى فقطعا الدائرة الصغرى فى ى ، هـ على الترتيب.

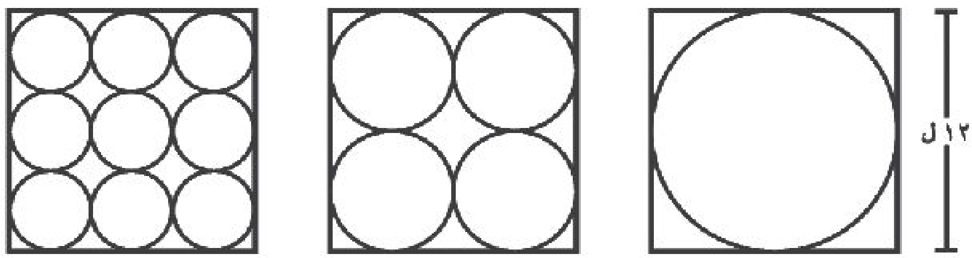
**أثبت أن:** أ ى = أ هـ


دار النصر للطباعة (هدلاين)

# نشاط الوحدة الرابعة

## الأنماط الهندسية

❶ يقوم مخبز بإنتاج فطائر دائرية الشكل ثم وضعها فى علب مربعة طول ضلع كل منها ١٢ ل سم، كما فى النمط التالى.



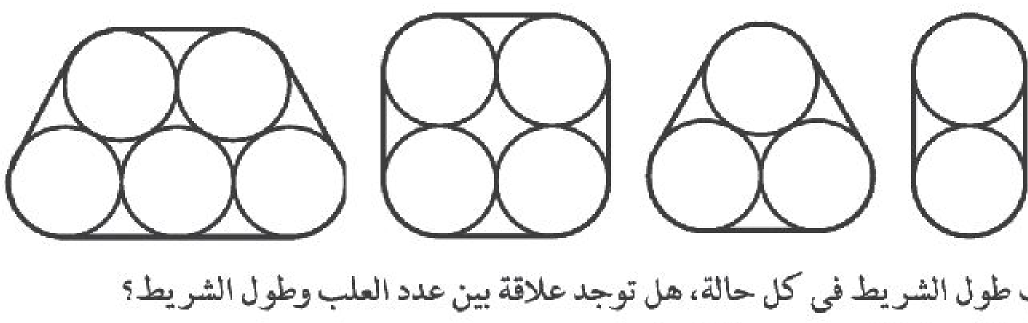

(أ) احسب المساحة التى تشغلها الفطائر فى كل علبة وسجل ملاحظاتك.

(ب) ما المساحة التى تشغلها فطائر العلبة الرابعة وفطائر العلبة العاشرة من هذا النمط؟

(جـ) إذا كانت جميع الفطائر من نفس النوع ومتساوية فى الارتفاع. فهل تكون أثمان العلب متساوية أم مختلفة. فسر إجابتك.

❷ مصنع لإنتاج المربى يعبأ إنتاجه فى عبوات أسطوانية الشكل طول نصف قطر قاعدتها نق سم، تم تغليفها بالبلاستيك ولصق شريط من الورق حولها كما فى النمط التالى.

عدد العلب ← ١ ٢ ٣ ٤

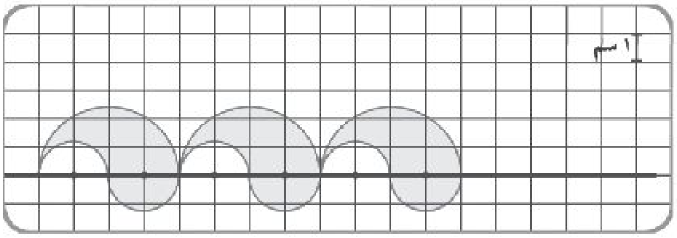


(أ) احسب طول الشريط فى كل حالة، هل توجد علاقة بين عدد العلب وطول الشريط؟

(ب) ما طول الشريط الذى يدور حول ٦ علب؟

(جـ) ما طول الشريط الذى يدور حول ٧ علب؟ ناقش الأوضاع الممكنة لضم العلب واستنتج شرط استمرار نفس النمط لحساب طول الشريط.

٣ ادرس النمط المقابل ثم ارسم الوحدة التالية لهذا النمط.

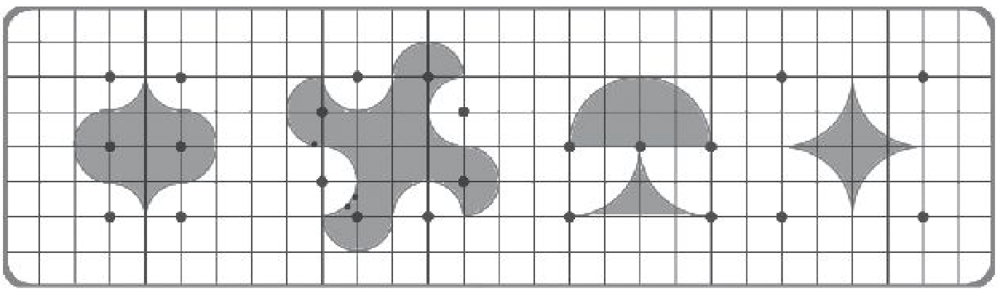



(أ) ما مساحة ١٠ وحدات من نفس النمط؟

(ب) ما محيط ٧ وحـدات من هذا النمط؟

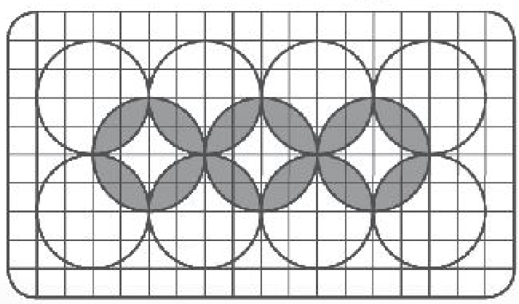
(جـ) كم عدد الوحدات التى يمكن استخدامها فى تصميم إطار حول صورة على شكل مستطيل بعداه ٢٤سم، ٣٦سم؟


٤ ادرس كلاً من الوحدات التالية، ثم أوجد مساحة ومحيط كل وحدة.

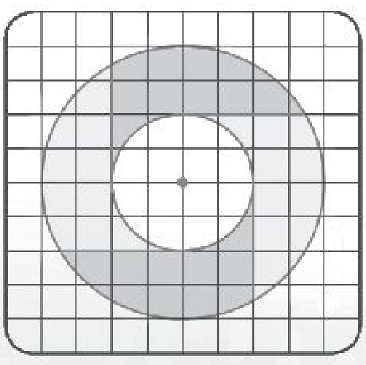


٥ **تكنولوجيا:** استخدم برامج الحاسب الآلى فى رسم التشكيلات الفنيه التالية:

(أ) تماس وتقاطع الدوائر المتطابقة.



(ب) التماس والدوائر المتحدة المحور.



ابتكر نماذج أخرى واستخدمها فى دراستك لمادة التربية الفنية.

## تمارين متنوعة على الوحدة الرابعة

**١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:**

(أ) وتر الدائرة هو القطعة المستقيمة المرسومة بين ..........

(ب) المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ..........

(جـ) خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل يمر ..........

(د) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع ..........

(هـ) الأوتار المتساوية الطول فى دائرة ..........

**٢ اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:**

(أ) المماس لدائرة طول قطرها ٦سم يكون على بعد .......... سم من مركزها.
(٦ أو ١٢ أو ٣ أو ٢)

(ب) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ..........
(معين أو مستطيل أو شبه منحرف أو متوازى أضلاع)

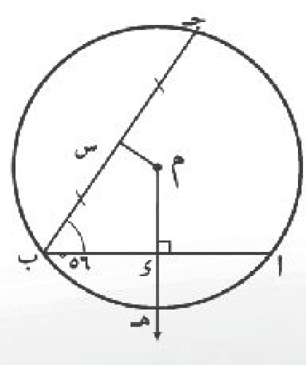
(جـ) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$ مماسان للدائرة، فإن $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ .......... $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$.
(يقطع أو يوازى أو عمودى على أو ينطبق على)

(د) دائرة محيطها ٦ ط سم، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم، فإن المستقيم ل يكون ..........
(مماس للدائرة أو قاطع للدائرة أو خارج الدائرة أو قطر للدائرة)

(هـ) م، ن دائرتان متقاطعتان، طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٥سم، فإن: م ن $\in$ ..........
(]٨ ، $\infty$[ أو ]٢ ، $\infty$[ أو ]٠ ، ٢[ أو ]٢ ، ٨[)

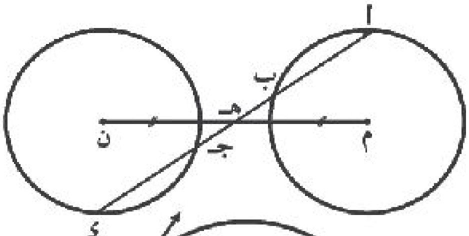
**٣ فى الشكل المقابل:** $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ وتران فى الدائرة م
التى طول نصف قطرها ٥سم، $\overrightarrow{\text{م ى}} \perp \overline{\text{أ ب}}$
يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى ى ويقطع الدائرة م فى هـ،
س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ . أ ب = ٨سم، ق (∠ أ ب جـ) = ٥٦°

**أوجد:** (أ) ق (∠ ى م س) (ب) طول ى هـ



**٤ في الشكل المقابل:** م، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان، هـ منتصف م ن ، رسم أ هـ يقطع الدائرة م في أ، ب ويقطع الدائرة ن في جـ، ى.

**أثبت أن:** (أ) أ ب = جـ ى (ب) هـ منتصف أ ى .

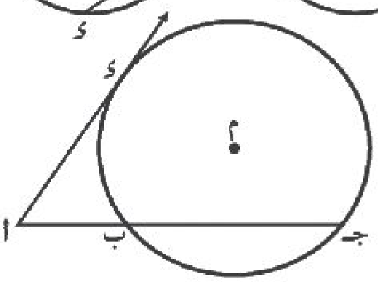



**٥ في الشكل المقابل:**

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، أ نقطة خارج الدائرة، أ ى مماس للدائرة م عند ى، أ ب يقطع الدائرة في ب، جـ على الترتيب حيث أ ب = ٤سم، أ جـ = ١٢سم.

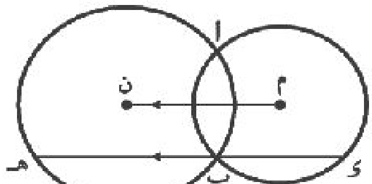
(أ) أوجد بعد الوتر ب جـ عن مركز الدائرة.

(ب) احسب طول أ ى .




**٦ في الشكل المقابل:**

م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، رسم ب ى // م ن ويقطع الدائرتين في ى، هـ على الترتيب. **أثبت أن:** ى هـ = ٢ م ن.

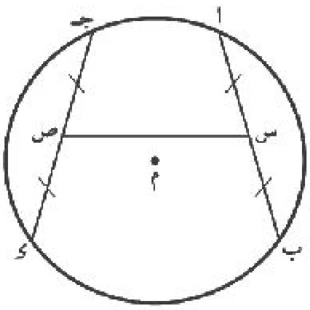



**٧ في الشكل المقابل:**

أ ب ، جـ ى وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س، ص منتصفا أ ب ، جـ ى بحيث يكون ب، ى في جهة واحدة من س ص .

**أثبت أن:** ق (∠ ب س ص) = ق (∠ ى ص س).

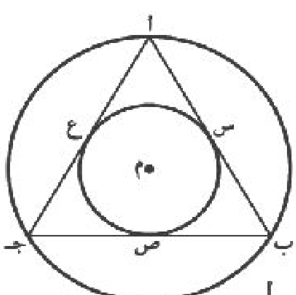
**فكر:** هل أ جـ // ب ى ؟ فسر إجابتك.




**٨ في الشكل المقابل:**

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفي قطريهما ٤سم، ٢سم، رسم المثلث أ ب جـ بحيث تقع رؤوسه على الدائرة الكبرى وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى في س، ص، ع.

**أثبت أن:** المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع وأوجد مساحته.




**٩ في الشكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، رسمت دائرة م قطرها ب جـ قطعت أ ب في ى، أ جـ في هـ، م س ⊥ ب ى ، م ص ⊥ جـ هـ.

**أثبت أن:** ب ى = جـ هـ.

# اختبار الوحدة الرابعة

**١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:**

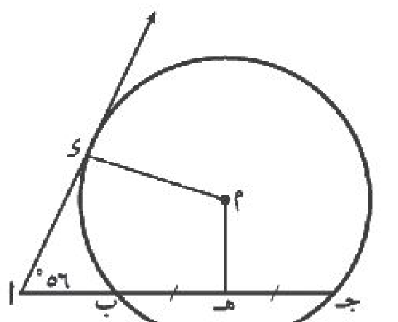
(أ) أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها ..........

(ب) محور تماثل الدائرتين م، ن المتقاطعتين فى أ، ب هو ..........

(جـ) إذا كان أ ب = ٧سم فإن مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ، ب = .......... سم٢.

(د) إذا كانت م دائرة محيطها ٨ π سم، أ نقطة على الدائرة، فإن م أ = ..........

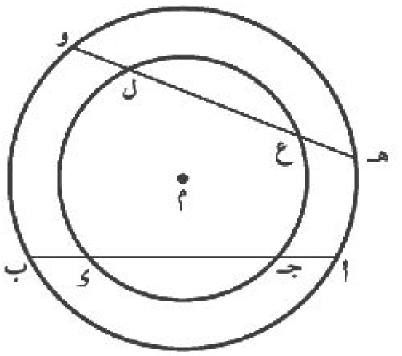
(هـ) وتر طوله ٨سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥سم فإنه يبعد عن مركزها .......... سم.




**٢ فى الشكل المقابل:**

$\overleftarrow{\text{أ ى}}$ مماس للدائرة م، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ يقطع الدائرة م فى ب، جـ، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ أ) = ٥٦°.

**أوجد** ق (∠ ى م هـ).

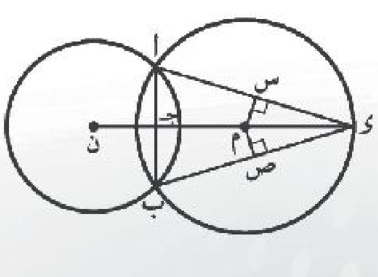



**٣ فى الشكل المقابل:**

دائرتان متحدتا المركز م، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى، ويقطع الصغرى فى جـ، ى، هـ و وتر فى الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى ع، ل حيث أ ب = هـ و.

**أثبت أن:** (أ) جـ ى = ع ل

(ب) أ ى = ع و




**٤ فى الشكل المقابل:**

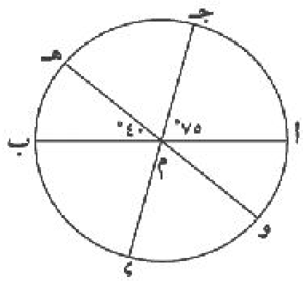
الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ، ب}، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ = {جـ}، ى ∈ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$، $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ى}}$، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ى}}$.

**أثبت أن:** م س = م ص.

## تمارين (٥ ـ ١)

### على الزاوية المركزية و قياس الأقواس

**١ فى الشكلِ المقابلِ:**




$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ أقطار فى الدائرة م **أكمل:**

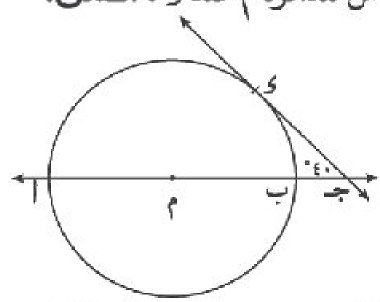
أ ق (أ جـ⌒) = .......... ب ق (أ جـ هـ⌒) = ..........

جـ ق (أ جـ ى⌒) = .......... د ق (أ و هـ⌒) = ..........

**٢ في كلٍّ من الأشكالِ الآتية :**

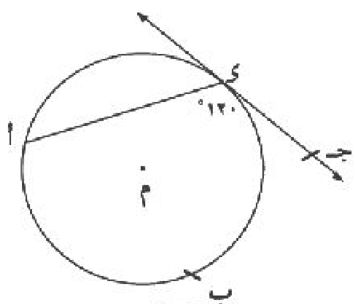
$\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماس للدائرة م عند ى ، **أكمل:**

أ



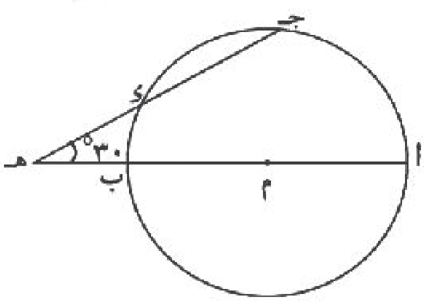

ق (ى ب⌒) = .......... ق (أ ى⌒) = ..........

ب




ق (أ ب ى⌒) = ..........

**٣ فى الشكلِ المقابلِ:**

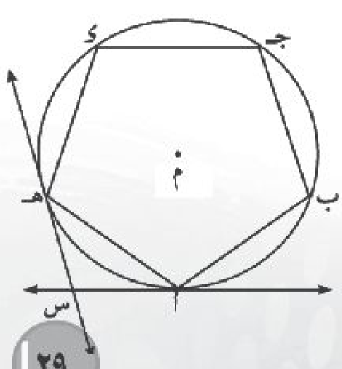



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ = {هـ} .

ق (∠ أ هـ جـ) = ٣٠° ، ق (أ جـ⌒) = ٨٠° .

أوجد ق (جـ ى⌒)

**٤ فى الشكلِ المقابلِ:**




أ ب جـ ى هـ خماسى منتظمٌ مرسومٌ داخل الدائرة م،

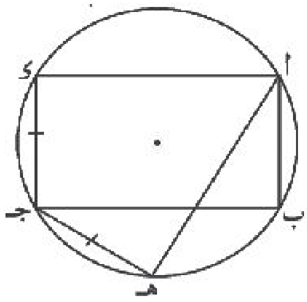
$\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ = {س} .

أوجد: أ ق (أ هـ⌒)

ب ق (∠ أ س هـ).

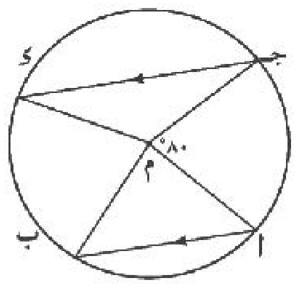
**٥ فى الشكلِ المقابلِ:**




$\overline{أ ب جـ ء}$ مستطيلٌ مرسومٌ داخل دائرة، رسم الوتر $\overline{جـ هـ}$ بحيث جـ هـ = جـ ء.

**أثبت أن:** أ هـ = ب جـ.

**٦ فى الشكلِ المقابلِ:**

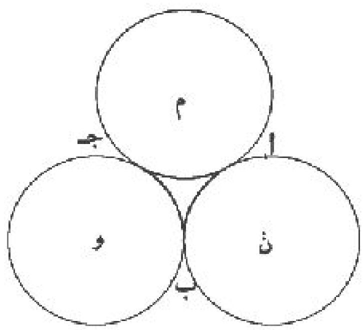



م دائرة طول نصف قطرها ١٥سم، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان فى الدائرة، ق $(\overset{\frown}{أ جـ})$ = ٨٠°، طول $\overset{\frown}{أ جـ}$ = طول $\overset{\frown}{أ ب}$.

**أوجد:**

(أ) ق (∠ م أ ب) (ب) ق $(\overset{\frown}{جـ ء})$ (جـ) طول $\overset{\frown}{جـ ء}$

**٧ فى الشكلِ المقابلِ:**




م، ن، و ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة فى أ، ب، جـ، طول نصف قطر كل منها ١٠سم.

(أ) **أثبت أن:** طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = طول $\overset{\frown}{ب جـ}$ = طول $\overset{\frown}{أ جـ}$.

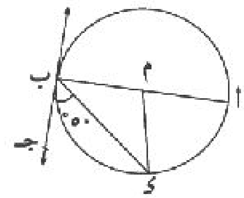
(ب) محيط الشكل أ ب جـ.

## تمارين (٥ – ٢)

### على العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

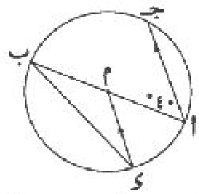
**١** فى كلٍّ من الأشكالِ التاليةِ، م دائرة، ادرس الشكل ثم أكمل:

(أ)



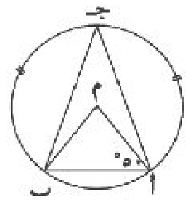
ق (∠ أ م ى) = ............°

(ب)



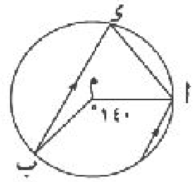
ق (∠ ب ى م) = ............°

(ج)



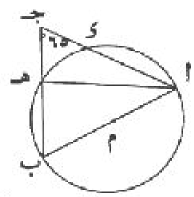
ق (∠ جـ أ م) = ............°

(د)



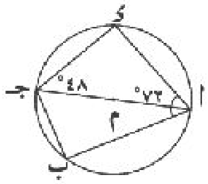
ق (∠ جـ أ ى) = ............°

(هـ)



ق (∠ جـ أ هـ) = ............°

(و)

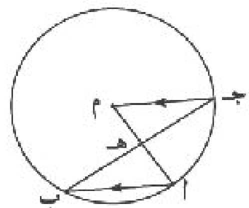


ق (∠ ب أ جـ) = ............°

**٢** فى الشكلِ المقابلِ :

أ ب وتر فى الدائرة م، جـ م // أ ب ، ب جـ ∩ أ م = {هـ}،

**أثبت أن :** ب هـ > أ هـ.

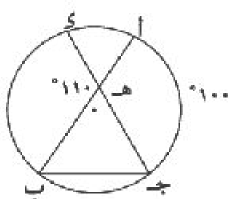


**٣** فى الشكلِ المقابلِ:

أ ب ، جـ ى وتران فى الدائرة، أ ب ∩ جـ ى = {هـ}

ق (∠ ى هـ ب) = ١١٠° ، ق (أ جـ) = ١٠٠°.

**أوجد:** ق (∠ ى جـ ب)

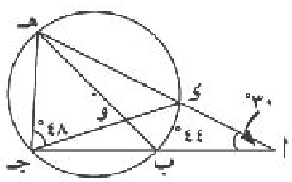


**٤** فى الشكلِ المقابلِ :

جـ ب ∩ هـ ى = {أ}، ب هـ ∩ جـ ى = {و}، **فإذا كان:**

ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (ب ى) = ٤٤° ، ق (∠ ى جـ هـ) = ٤٨°

**أوجد:** (أ) ق (جـ هـ) (ب) ق (ب جـ)



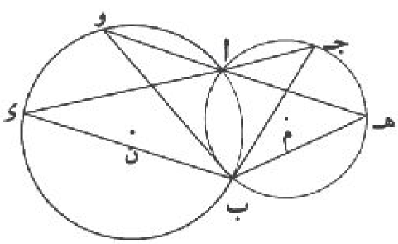
**٥** أ ب ، أ جـ وتران فى دائرة، س، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على التَّرتيب ، رسمت س ص فقطعت أ ب فى ى ، أ جـ فى هـ

**أثبت أن :** أ ى = أ هـ

## على الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس

أولا :

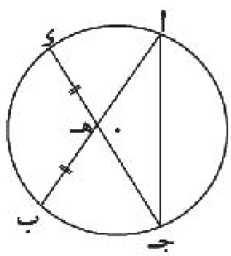
❶ فى الشكلِ المقابلِ :



م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، ⟷أ جـ يقطع الدائرةَ م فى جـ ويقطع الدائرةَ ن فى ى ، ⟷أ هـ يقطع الدائرة م فى هـ ، ويقطع الدائرة ن فى و.

أثبت أن : ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ و ب ى)

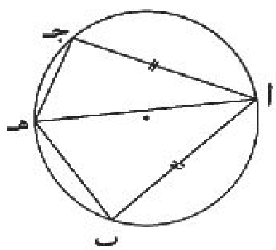
❷ فى الشكلِ المقابلِ :



أ ب ، جـ ى وتران متساويان فى الطول فى الدائرة ، أ ب ∩ جـ ى = {هـ} .

أثبت أن : المثلث أ جـ هـ متساوى الساقين .

❸ فى الشكلِ المقابلِ :

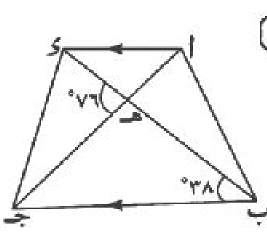


أ ب = أ جـ ، هـ ∈ ⌒ب جـ

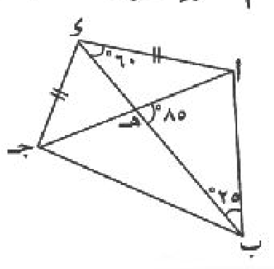
أثبت أن : ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ هـ جـ)

❹ بين فى أيٍّ من الأشكالِ الآتية يمكن رسمُ دائرةٍ تمرُّ بالنقط أ، ب، جـ، ى ؟ اذكر السببَ .

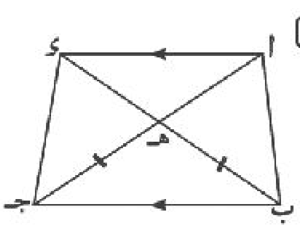
(أ)



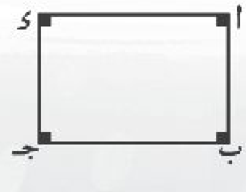
(ب)



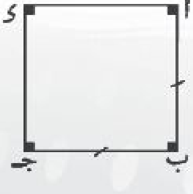
(جـ)



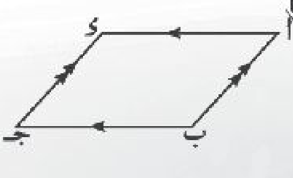
(د)



(هـ)



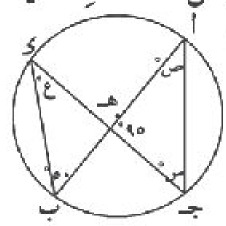
(و)



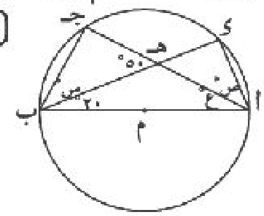
**ثانيا :**

❶ **فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية، أوجد قيمةَ الرمز المستخدم فى القياسِ :**

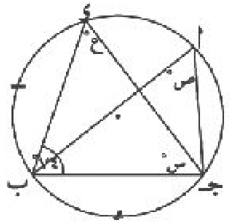
(أ)



(ب)

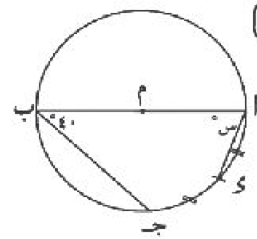


(ج)

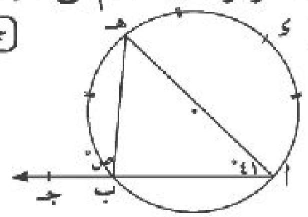


❷ **فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية، أوجدَ قيمةَ الرمزِ المستخدم فى القياسِ .**

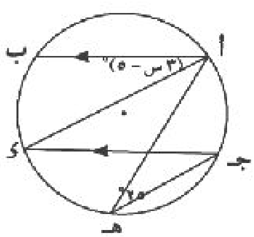
(أ)



(ب)



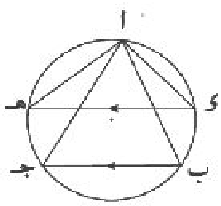
(ج)



❸ **فى الشكلِ المقابلِ :**

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ء هـ // ب جـ .

**أثبت أن :** ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ب أ هـ) .

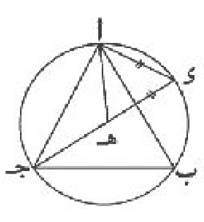


❹ أ ب قطر فى الدائرة م، ق (∠ أ ب جـ) = ٤٠° ، ء ∈ ب جـ . **أوجد** ق (∠ جـ ء ب)

❺ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة،

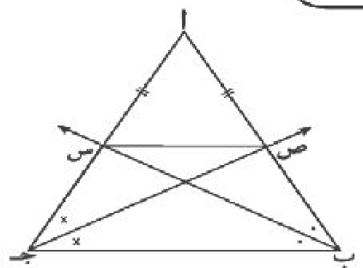
ء ∈ أ ب ، هـ ∈ ء جـ بحيث أ ء = ء هـ .

**أثبت أن :** المثلث أ ء هـ متساوى الأضلاع .



❻ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه، أ ب = أ جـ، ء منتصف ب جـ ، رسم ب هـ ⊥ أ جـ حيث ب هـ ∩ أ جـ = {هـ} .**أثبت أن :** النقط أ، ب، ء، هـ يمر بها دائرة واحدة .

## على الشكل الرباعي الدائري

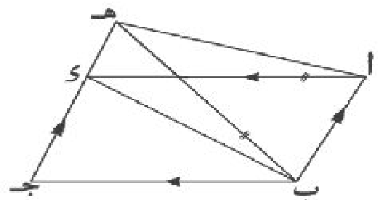



❶ فى الشكلِ المقابلِ :

ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ا جـ ، $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ب ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى س ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ ينصف ∠جـ ويقطع $\overline{\text{ا ب}}$ فى ص

أثبت أن : **أولاً:** ب جـ س ص رباعى دائرى .

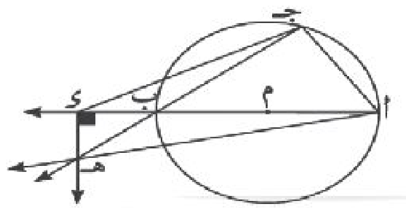
**ثانيًا:** $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ .




❷ فى الشكلِ المقابلِ :

ا ب جـ ى متوازى أضلاع، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ حيث ب هـ = ا ى

أثبت أن : الشكل ا ب ى هـ رباعى دائرى .

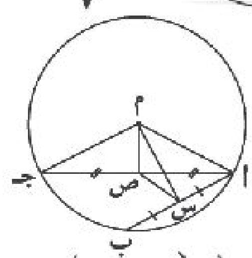



❸ فى الشكلِ المقابلِ :

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م، ى ∈ $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، ى ∉ $\overline{\text{ا ب}}$ ،

رسم $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، جـ ∈ $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$ = {هـ}

أثبت أن : الشكل ا جـ ى هـ رباعى دائرى .




❹ فى الشكلِ المقابلِ:

دائرةٌ مركزها م، س، ص منتصفا $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ على التّرتيب .

**أثبت أن : أولاً:** الشّكل ا س ص م رباعىٌّ دائرىٌّ .     **ثانيًا:** ق (∠م س ص) = ق (∠م جـ ص)

**ثالثاً:** $\overline{\text{ا م}}$ قطرٌ فى الدائرة المارة بالنقط ا، س، ص، م .

❺ ا ب جـ ى مربع ، $\overleftarrow{\text{ا س}}$ ينصف ∠ب ا جـ ويقطع $\overline{\text{ب ى}}$ فى س،

$\overleftarrow{\text{ى ص}}$ ينصف ∠جـ ى ب ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى ص .

أثبت أن : **أولاً:** الشكل ا س ص ى رباعى دائرى

**ثانيًا:** ق ∠(ا ص س) = ٤٥°

❻ ا ب جـ مثلثٌ مرسومٌ داخل دائرة ، س ∈ $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ ، ص ∈ $\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$ حيث ق ($\overset{\frown}{\text{ا س}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ا ص}}$)،

$\overline{\text{جـ س}}$ ∩ $\overline{\text{ا ب}}$ = {ى}، $\overline{\text{ب ص}}$ ∩ $\overline{\text{ا جـ}}$ = {هـ} .

أثبت أن : **أولاً:** الشكل ب جـ هـ ى رباعى دائرى

**ثانيًا:** ق (∠ى هـ ب) = ق (∠س ا ب) .

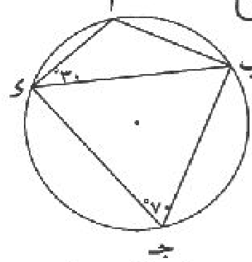
# تمارين ( ٥ ــ ٥ )

## على خواص الشكل الرباعى الدائرى

**أولاً :**

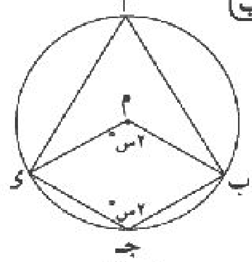
**١** مستعيناً بمعطياتِ الشَّكل ، أوجد بالبرهان :

(أ)



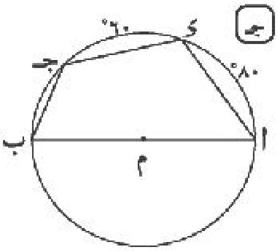
ق ( ∠ أ ب ى )

(ب)



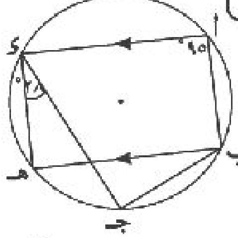
ق ( ∠ أ )

(جـ)



قياسات زوايا الشكل
أ ب جـ ى

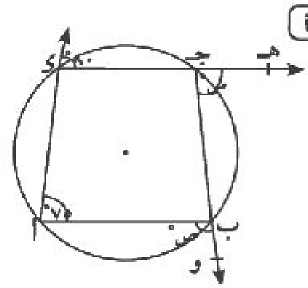
(د)



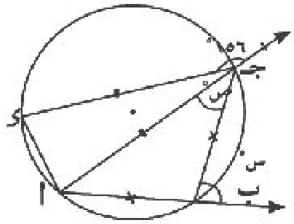
قياسات زوايا الشكل
أ ب جـ ى

**٢** فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية ، أوجد قيمةَ الرمزِ المستخدم فى القياسِ .

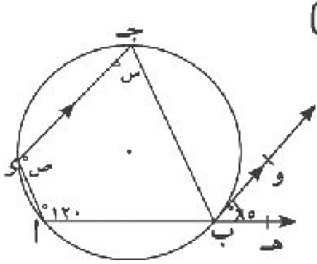
(أ)



(ب)

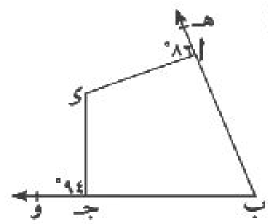


(جـ)

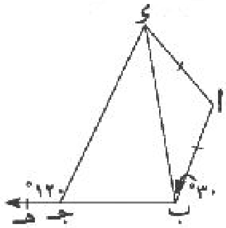


**٣** أثبت أن كلاً من الأشكالِ الآتية رباعى دائرى :

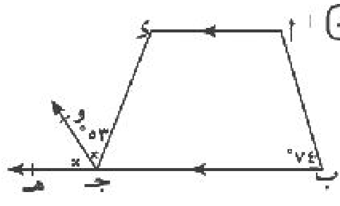
(أ)



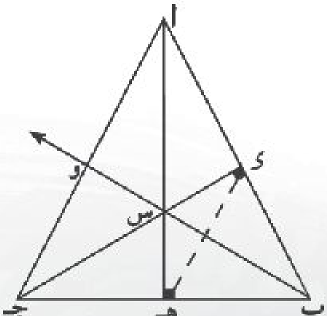
(ب)



(جـ)



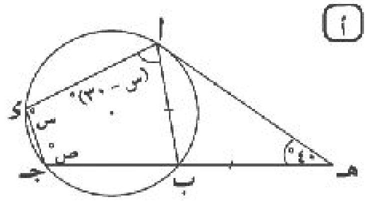
**٤** فى الشكلِ المقابلِ أثبت أن :
القطعَ المستقيمةَ العموديةَ على أضلاعِ المثلث من الرؤوس المقابله تتقاطعُ فى نقطةٍ واحدةٍ .
ما عددُ الأشكالِ الرباعية الدائرية فى الشكلِ المقابلِ ؟
وما هى ؟



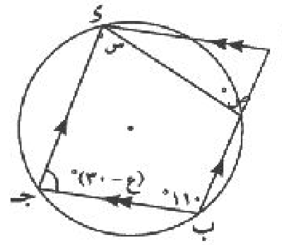
## ثانيا :

❶ في كلٍّ من الأشكالِ الآتية : أوجد قيمةَ الرمز المستخدم في القياسِ .

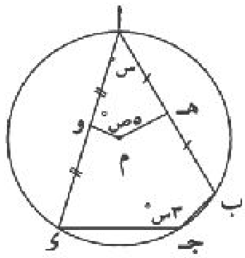
(أ)




(ب)



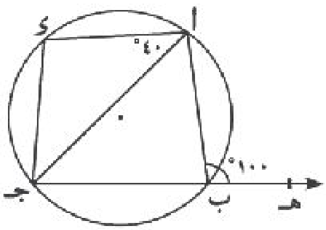

(جـ)




❷ في الشكلِ المقابلِ :

ق (∠ أ ب هـ) = ١٠٠° ، ق (∠ جـ أ ء) = ٤٠°

أثبت أن : ق (جـ ء⌒) = ق (أ ء⌒) .



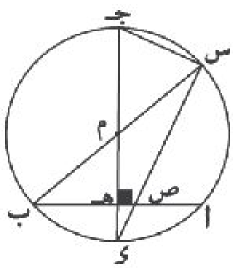

❸ في الشكلِ المقابلِ :

أ ب وتر في الدائرة م ، جـ ء قطر عمودي على أ ب ويقطعه في هـ ،

ب م يقطع الدائرة في س ، س ء ∩ أ ب = {ص}

أثبت أن : **أولاً:** الشكل س ص هـ جـ رباعي دائري .

**ثانياً:** ق (∠ ء ص ب) = ق (∠ ء ب س)

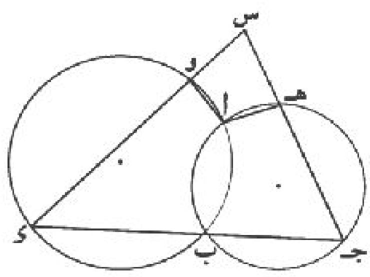



❹ في الشكلِ المقابلِ :

دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، جـ ء يمرُّ بالنقطة ب

ويقطعُ الدائرتين في جـ ، د ، جـ هـ ∩ ء و = {س} .

أثبت أن : الشكل أ و س هـ رباعي دائري .




❺ أ ب جـ مثلثٌ مرسومٌ داخل دائرة فيه أ ب > أ جـ ، ء ∈ أ ب بحيث أ جـ = أ ء ، أ هـ نصف ∠ أ

وقطع ب جـ في هـ وقطع الدائرة في و .

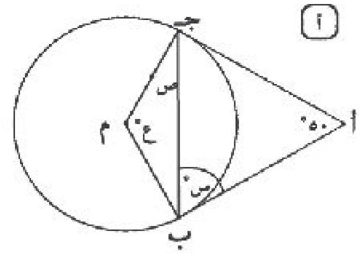
أثبت أن : الشكلَ ب ء هـ و رباعي دائري .

## على العلاقة بين مماسات الدائرة

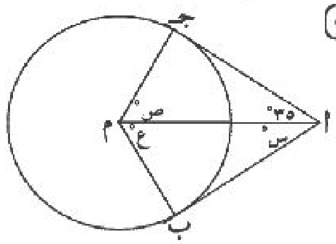
**أولاً :**

**١** في كلٍّ من الأشكالِ الآتيةِ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م.
أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياسِ:

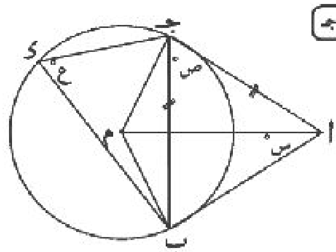
(أ)



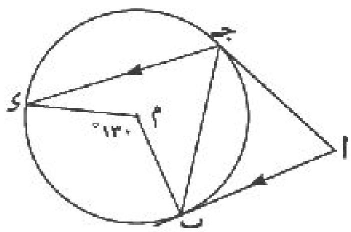

(ب)




(جـ)



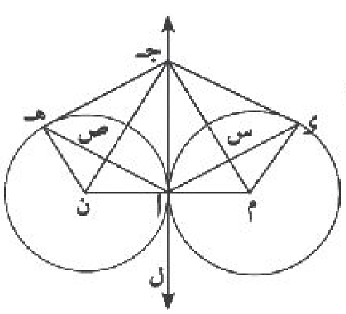

**٢** في الشكلِ المقابلِ:




$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م،
$\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$ ، ق ( ∠ ب م ء ) = ١٣٠° .

(أ) أثبت أن : $\overrightarrow{جـب}$ ينصف ∠ أ جـ ء (ب) أوجد ق ( ∠ أ ) .

في الشكلِ المقابلِ :



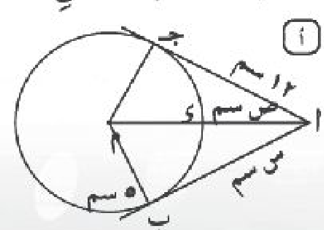

م، ن دائرتان متماستان من الخارج في أ، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ، جـ ∈ ل، رسم من جـ مماسان آخران للدائرتين م، ن يمسانهما في ء، هـ على الترتيب ، $\overline{جـم}$ ∩ $\overline{ءأ}$ = {س} ، $\overline{جـن}$ ∩ $\overline{أهـ}$ = {ص}

(أ) ما عددُ الأشكالِ الرباعية الدائرية في الشكلِ المقابلِ؟ وما هي؟

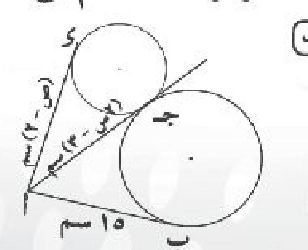
(ب) أثبت أن : جـ ء = جـ أ = جـ هـ، وفسر ذلك هندسياً .

**٤** مستعيناً بمعطياتِ الشكلِ. أوجد قيمةَ الرمز المستخدم في القياس :

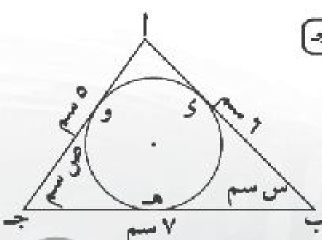
(أ)




(ب)

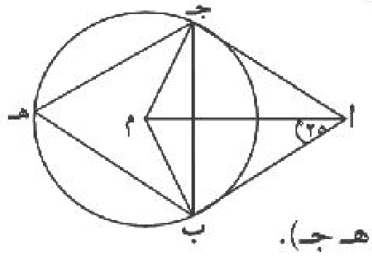



(جـ)



ثانيا :

**❶ في الشكلِ المقابلِ :**



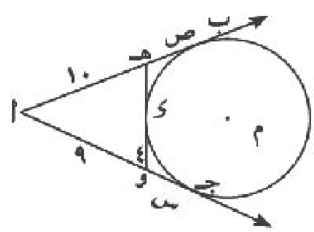

أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م .

ق (∠ ب أ م) = ٢٥° ، هـ ∈ ب جـ الأكبر .

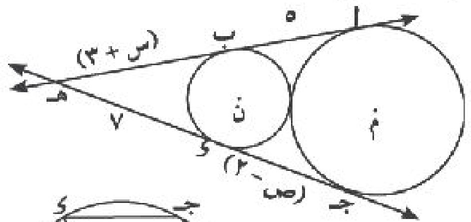
**أوجد : أولاً:** ق (∠ أ جـ ب) **ثانياً:** ق (∠ ب هـ جـ).

**❷ في كلٍّ من الأشكال الآتية : أوجدْ قيمة كلٍّ من س، ص بالسنتيمترات .**

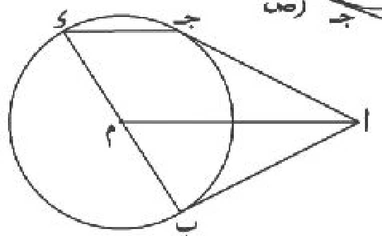
(أ)




(ب)



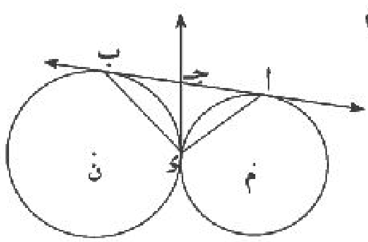

**❸ في الشكلِ المقابلِ :**




أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م، .

ب ى قطر في الدائرة . **أثبت أن :** أم // جـ ى

**❹** م، ن دائرتان متماستان من الخارج في ى، أب مماس مشترك لهما عند أ، ب، ى جـ مماس مشترك للدائرتين عند ى.



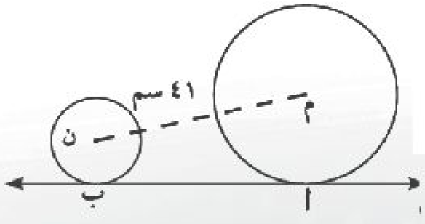

حيث ى جـ ∩ أب = {جـ} .

**أثبت أن : أولاً:** جـ منتصف أب . **ثانياً:** أى ⊥ ب ى .

**❺** أب قطر في الدائرة م، أب = ١٠سم، جـ ∈ الدائرة م، رسم مماس للدائرةِ عند جـ فقطع المماسين المرسومين لها عند أ، ب في س، ص على الترتيب **حيث** س ص = ١٣سم

(أ) **أثبت أن:** س م ⊥ ص م (ب) مساحة الشكل أ س ص ب .

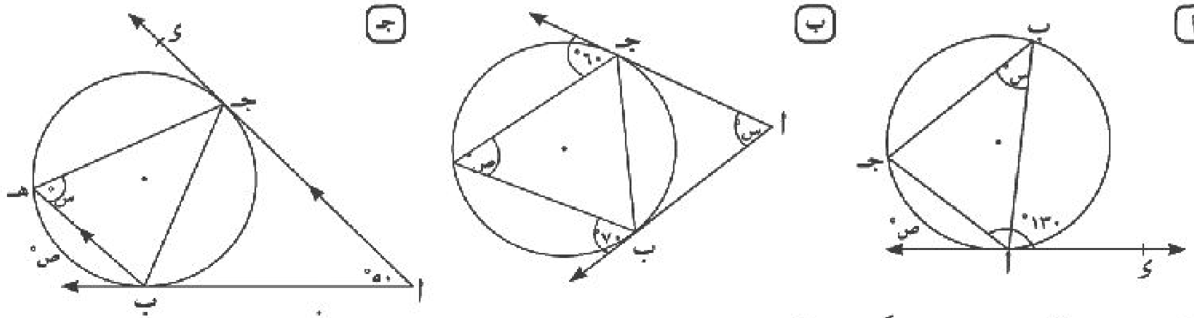
**❻ الشكلِ المقابلِ :**



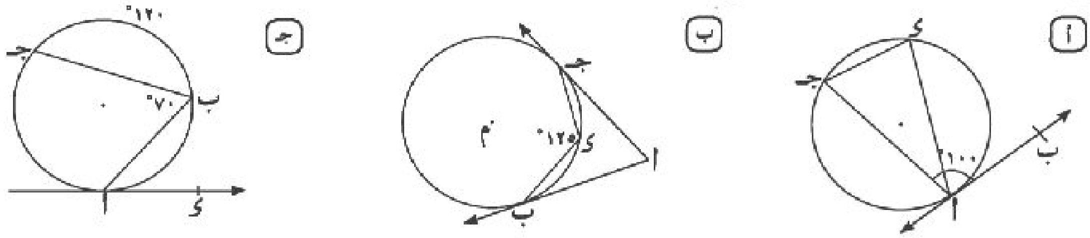

أب مماس مشترك للدائرتين م، ن من الخارج عند أ، ب على الترتيب ، طولا نصفي قطريهما ١٧سم، ٨سم على الترتيب وكان م ن = ٤١سم . **أوجد** طول أب

## على الزاوية المماسية

**١** مستعيناً بمعطيات الشَّكل أوجد قيمةَ الرمز المستخدم فى القياس .

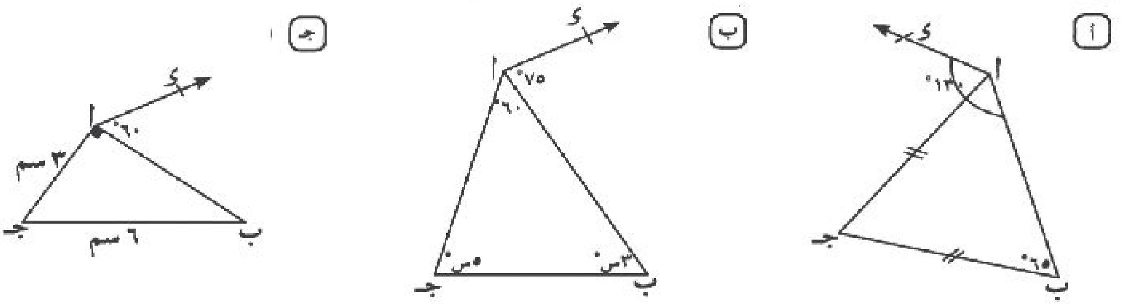


**٢** مستعينًا بمعطيات الشَّكل، أوجد :



ق (∠ ا ى جـ) = ............ °　　ق (∠ ب ا جـ) = ............ °　　ق (∠ ب ا ى) = ............ °

**٣** فى كل من الأشكال الآتية بين أن $\overleftrightarrow{اى}$ مماسًا للدائرة التى تمر برؤوس △ ا ب جـ .



**٤** ا ب جـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة، هـ نقطة خارجها، $\overleftarrow{هـ ا}$ ، $\overleftarrow{هـ ب}$ مماسان للدائرة عند ا، ب فإذا كان ق (∠ ا هـ ب) = ٧٠° ، ق (∠ ا ى جـ) = ١٢٥°

أثبت أن : **أولاً:** ا ب = ا جـ　　**ثانياً:** $\overleftrightarrow{اجـ}$ مماسّ للدائرة المارة بالنقط ا، ب، هـ

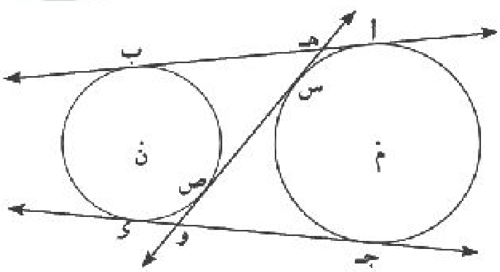
**٥** ا ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخل دائرةٍ تقاطع قطراه فى هـ، رسم $\overleftrightarrow{س ص}$ مماساً للدائرة عند جـ حيث $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{ب ى}$ .

أثبت أن : **أولاً:** $\overrightarrow{ا جـ}$ ينصف ∠ ب ا ى　　**ثانياً:** $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يمس الدائرة المارة برؤوس △ ا ب هـ

**٦** ا ب جـ ى متوازى أضلاع فيه ا جـ = ب جـ .

أثبت أن : $\overleftrightarrow{جـ ى}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث ا ب جـ .

**❶ في الشكل المقابل:**




كلُّ نقطةٍ فى الدائرة ن تقع خارج الدائرة م.
النقطتان هـ ، و هما نقطتا تقاطع أحد المماسين المشتركين الداخليين $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مع المماسين المشتركين الخارجيين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ على الترتيب:

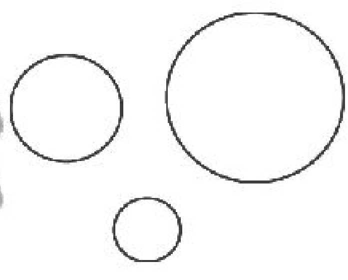
(أ) ما العلاقةُ بين طول $\overline{\text{هـ و}}$ ، طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟ فسر إجابتك.

(ب) **ناقش:** هل تتغيرُ العلاقةُ بين طول $\overline{\text{هـ و}}$ ، طول $\overline{\text{أ ب}}$ في الحالات الآتية:

**أولاً:** إذا كان م ، ن دائرتين متطابقتين.

**ثانيًا:** إذا كان سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = {ع}

**❷ مسألة أبولونيوس:**



في الشكلِ المقابِل ثلاثةُ دوائر أطوال أقطارها غير متساوية.
- كم دائرة يمكن رسمُها لتكون مماسةً للدوائر الثلاث.

تعرف هذه المسألة بدوائر أبولونيوس وهو فلكيٌّ ومهندس وعالم رياضيات يونانى مشهور (وُلد عام ٢٦٢ ق.م فى بيرغ وتوفى فى عام ١٩٠ ق.م في الإسكندرية).

**للتحقق من إجابتك يمكنك استخدام الإنترنت.**

# تمارين متنوعة على الوحدة الخامسة

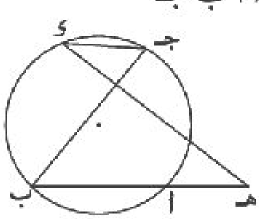
١ أب قطر فى الدائرة م، ق (∠ب أ جـ) = ٦٥°، ء ∈ ⌒ب جـ

أوجد ق (∠أ جـ ب)، ق (∠جـ ء ب)

٢ م أ ، م ب نصفا قطرين متعامدين فى الدائرة م، أ جـ ، ب ء وتران متعامدان ومتقاطعان فى هـ .

(أ) أوجد ق (∠جـ ب ء) (ب) أثبت أن : ↔أ ء // ↔ب جـ

٣ فى الشكلِ المقابلِ :

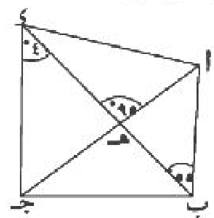



هـ نقطة خارج الدائرة .

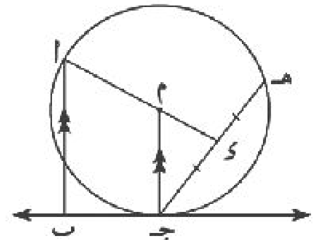
أثبت أن : ق (∠هـ) < ق (∠ب جـ ء)

٤ فى كلٍّ من الأشكال الآتية أثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى:

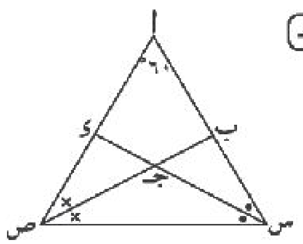
(أ)




(ب)

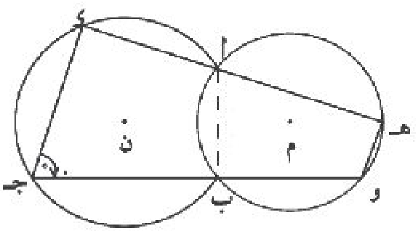



(جـ)




٥ أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء تقطع ب جـ فى هـ

أثبت أن: جـ ء = هـ ء

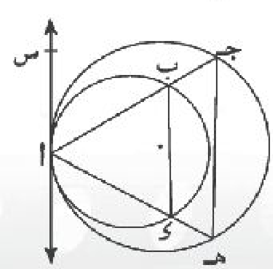



٦ م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، رسم ↔أ ء يقطع الدائرة م فى هـ والدائرة ن فى ء ، رسم ↔ب جـ يقطع الدائرة م فى و والدائرة ن فى جـ، ق (∠جـ) = ٧٠° .

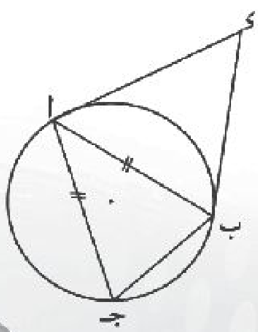
(أ) أوجد ق (∠و) (ب) أثبت أن ↔جـ ء // ↔هـ و .

٧ مستعيناً بمعطيات الشكل : أثبت أن :

(أ) ب ء // جـ هـ




(ب) أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ء



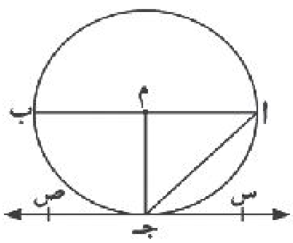
# اختبار الوحدة الخامسة

**١ أولاً: أكمل:**

(أ) في الشكل الرباعي الدائري كلُّ زاويتين متقابلتين ..........

(ب) مركزُ الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطةُ تقاطع ..........

**ثانيًا: في الشكلِ المقابل:**




م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم،

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند جـ،

$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ .

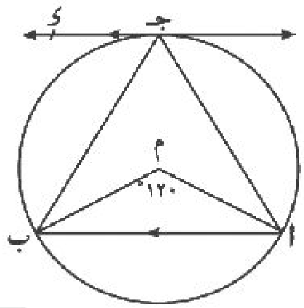
**٢ اختر الإجابةَ الصحيحة من بين الإجاباتِ المعطاة:** (اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

١ ق (ب جـ) = ....... (أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

٢ طول (أ جـ) = ....... (أ) ١١ سم (ب) ٢٢ سم (جـ) ٣٣ سم (د) ٤٤ سم

٣ مساحة المنطقة الحمراء = ....... (أ) ١٥٤ سم$^٢$ (ب) ٧٧ سم$^٢$ (جـ) ٣٨,٥ سم$^٢$ (د) ١٤ سم$^٢$

**٣ في الشكلِ المقابلِ:**




$\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماس للدائرة عند جـ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ،

ق (∠ أ م ب) = ١٢٠°

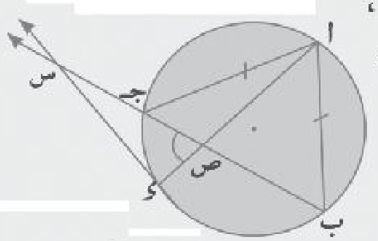
اثبت أن: المثلث جـ أ ب متساوي الأضلاع.

**٤** أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرية فيه: أ ب = أ جـ ، ى ∈ ب جـ ،

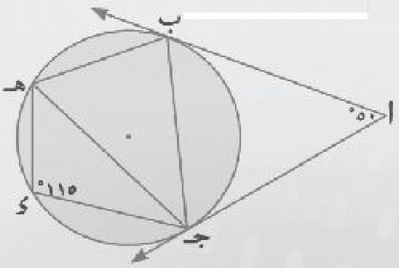
رسم ى س مماس للدائرة عند د حيث ى س ∩ ب جـ = {س}،

أ د ∩ ب جـ = {ص}.

**أثبت أن:** س ص = س ى




**٥ في الشكلِ المقابل:**




$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ.

ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ جـ د هـ) = ١١٥°

**أثبت أن: أولاً:** $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ أ ب هـ

**ثانيًا:** جـ ب = جـ هـ

# نماذج اختبارات الجبر والهندسة

## نماذج اختبارات الجبر (النموذج الأول)

**أجب عن الأسئلة الآتية:** **(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)**

**السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) مجال الدالة ن (س)= $\frac{س}{س-١}$ هو ..........

(أ) ح-{صفر} (ب) ح-{١} (جـ) ح-{صفر، ١} (د) ح- {-١}

٢) عدد حلول المعادلتين: س+ص= ٢، ص+س=٣ معا هو........

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣) إذا كان س ≠ صفر فإن $\frac{٥س}{س^٢+١} \div \frac{س}{س^٢+١}$ =........

(أ) -٥ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٥

٤) إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢

فإن النسبة بين مساحتيهما= ........

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٥) معادلة محور تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) =س$^٢$- ٤ هى .......

(أ) س=-٤ (ب) س=صفر (جـ) ص=صفر (د) ص=-٤

٦ إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أَ) = ٢ ل (أ)

فإن ل (أ)=..........

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

**السؤال الثاني:**

أ) باستخدام القانون العام: أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح.

٢س$^٢$- ٥س + ١ = صفر «مقربا الناتج لرقم عشرى واحد»

ب- أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢} - \frac{٤}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}$$

**السؤال الثالث:**

أ- أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:

س- ص=صفر $\qquad\qquad$ $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٢٧$

ب- أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٢٧} \div \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢)، ن (-٣) إن أمكن.

**السؤال الرابع:**

أ) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحة المستطيل

ب) إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$ فأوجد:

(١) $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ فى أبسط صورة وعين مجالها

(٢) قيمة س إذا كان $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = ٣$

**السؤال الخامس:**

أ) إذا كان $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٤} - \text{س}}$

فأثبت أن : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \text{ن}_{٢}(\text{س})$

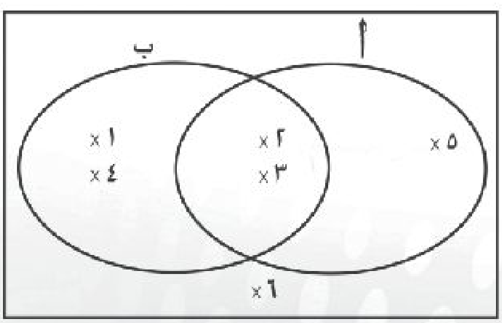
ب) فى الشكل المقابل:

إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف

لتجربة عشوائية فأوجد:

(١) ل (أ $\cap$ ب) $\qquad$ (٢) ل (أ-ب)

(٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ



## النموذج الثاني

**«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»**

### أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

**السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابة المعطاة:**

(١) مجموعة حل المعادلتين س=٣، ص=٤ هى .........

[ {(٤،٣)} ، {(٣،٤)} ، ع ، ∅ ]

(٢) مجموعة أصفار الدالة د (س) = س$^{٢}$+٤ فى ح هى ........

[ {٢} ، {٢،−٢} ، ع ، ∅ ]

(٣) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل (أ ∩ ب )=.....

[صفر ، ١ ، ٠,٥ ، ∅ ]

(٤) مجال المعكوس الضربى للدالة د (س) = $\frac{\text{س}+٢}{\text{س}-٣}$ هو .........

[{٣} ، ح − {−٢،٣} ، ح − {٣}، ح ]

(٥) المستقيمان ٣س+٥ص= صفر ، ٥س−٣ص = صفر يتقاطعان فى .....

[ الربع الأول ، الربع الثاني ، نقطة الأصل ، الربع الثالث ].

**السؤال الثاني:**

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلة ٣س$^{٢}$− ٥س+١= صفر باستخدام القانون العام

مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

(ب) اختصر لأبسط صورة مبينا المجال

ن (س)= $\frac{\text{س}^{٣}-٨}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٦} \times \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}$

**السؤال الثالث:**

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معا:

س- ص= ١ ، س$^{٢}$+ص$^{٢}$=٢٥

(ب) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (أ) =٠,٣ ، ل (ب)= ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) =٠,٢

أوجد ل (أ ∪ ب) ، ل(أ-ب)

**السؤال الرابع:**

أ) حل المعادلتين فى ح × ح

٢س-ص=٣ ، س+٢ص=٤

ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينا مجالها

ن (س) $\frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-٩} \div \frac{٢\text{س}}{\text{س}+٣}$

**السؤال الخامس:**

أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينا مجالها

ن (س)= $\frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-٤} + \frac{\text{س}-٣}{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٦}$

(ب) ارسم الشكل البيانى للدالة د(س) = س$^{٢}$-١ فى الفترة [-٣،٣]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$-١= صفر

## نموذج اختبار للطلاب المدمجين

**السؤال الأول: أكمل ما يأتي:** **«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»**

١) احتمال الحدث المستحيل = ..................

٢) أبسط صورة للكسر الجبرى $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$ هي......

٣) إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية وما كان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ فإن ل (أَ) =............

٤) المعادلة ٣ س – $س^٢$ +١ = صفر من الدرجة............

٥) نقطة تقاطع المستقمين س = –١، ص = ١ تقع فى الربع.......

٦) مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س –٥ هي........

**السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) مجموعة حل المعادلتين س = ٢، س ص = ٦ هي...........

(أ) {(٢،٣)} (ب) {٢،٣} (ج) {(٣،٢)} (د) {٣}

٢ ) يكون للدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٢}{س - ٥}$ معكوسا جمعيا فى المجال....

(أ) ح-{٢} (ب) ح-{٥} (ج) ح-{٢،٥} (د) {٢،٥}

٣) المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{٣}{س^٢ + ١}$ هو.......

(أ) – $\frac{-٣}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{س^٢ + ١}{-٣}$ (ج) $\frac{س^٢ + ١}{٣}$ (د) $\frac{س^٢ - ١}{٣}$

٤) مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو

(أ) ح-{—٢} (ب) ح-{١} (جـ) ح- {١،–٢} (د) ح-{٢}

٥) إذا كان ص= ٢، $س^٢$–$ص^٢$=٥ فإن س= .........

(أ) –٣ (ب) ٣ (ج) ± ٣ (د) ٩

٦) المستقيمان س+٢ص=١، ٢س+٤ص=٦ يكونا.......

(أ) متوازيان (ب) متقاطعان (ج) متعامدان (د) منطبقان

**السؤال الثالث: ضع علامة ( ✓ ) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة**

١) فى المعادلة ٢ س $^{٢}$ − ٥ س − ٤= صفر

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٤ ( )

٢) أبسط صورة للدالة ن (س)

ن (س) $\frac{س}{س+١} + \frac{١}{س+١}$ هى س+١ ( )

٣) $\frac{س-١}{٥} \times \frac{س+١}{س^{٢}-١} = \frac{١}{٥}$ ( )

، س $\neq \pm$ ١

٤) إذا كان عددان مجموعهما ٣، مجموع مربعيهما ٥،

فإن العددين هما ١، ٢ ( )

٥) إذا كان أ، ب حدثين متنافيتين من فضاء العينة

فإن ل (أ $\cap$ ب)= ١

٦) إذا كان احتمال فوز إحدى الفرق = ٠,٧

فإن احتمال عدم فوزه هو ٠,٣ ( )

**س ٤: صل من العمود أ بما يناسبه من العمود ب**

**(أ)**

(١) مجموعة حل المعادلتين س = ٢، ص - ١ = ٠

هى = .................. •

(٢) مجموعة حل المعادلة أ س ٢ + ب س + جـ = ...

هى س = ............ حيث أ ≠ صفر أ، ب، جـ ∈ ح •

(٣) إذا كان ن (س) = $\frac{س-١}{س+١}$ فإن

مجال $ن^{-١}$ (س) هو = ..... •

(٤) إذا كان $ن_١ = ن_٢$ كان

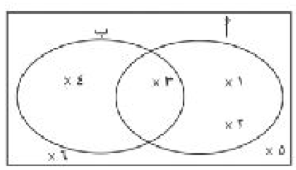
$ن_١ = \frac{٥ س}{٥س^٢+٢٠}$ فإن $ن_٢$ = ............ •

(٥) مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{س-٥}{س}$

هى ........................ •

(٦) فى الشكل المقابل

ل (أ - ب)=........... •




**(ب)**

- $\{(٢،١)\}$
- $\frac{س}{س^٢+٤}$
- $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢-٤ أ جـ}}{٢ أ}$
- ح - $\{١، -١\}$
- $\frac{١}{٣}$
- $\{٥\}$

# نماذج اختبارات الهندسة

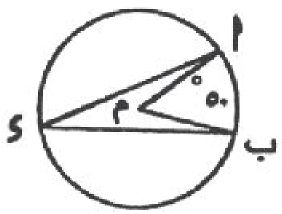
## النموذج الأول

**أجب عن الأسئلة الآتية:** **«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»**

**السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة

(أ) حادة (ب) منفرجة (جـ) مستقيمة (د) قائمة



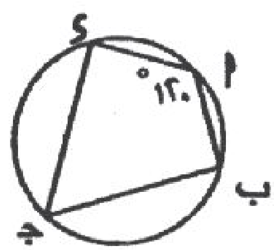

٢) فى الشكل المقابل: دائرة مركزها م.

إذا كانت ق (أ⌒ب) = ٥٠° فإن ق (∠ أ ى ب) = .....°

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

٣) عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي




٤) فى الشكل المقابل:

إذا كان ق (∠ أ) = ١٢٠° فإن ق (∠ جـ) = ......°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

٥) إذا كان المستقيم مماسا للدائرة التى قطرها ٨ سم

فإنه يبعد عن مركزها بمقدار يساوى ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

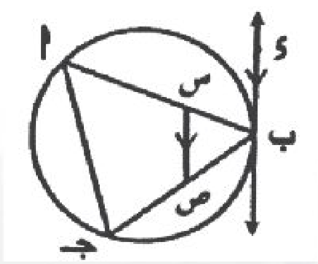
٦) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم،

م ن = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ..... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١١ (د) ١٦

**السؤال الثاني:**

أ ) أكمل مع البرهان: إذا كان الشكل الرباعى دائريا فإن كل زاويتين متقابلتين ....




ب ) فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

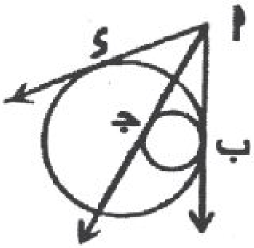
$\overleftrightarrow{ب ى}$ مماس للدائرة عند ب، س ∈ $\overline{أ ب}$

ص ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث $\overline{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب ى}$

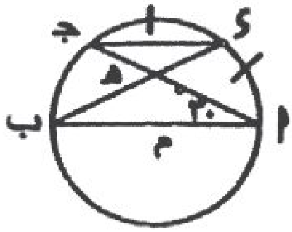
أثبت أن: الشكل أ س ص جـ رباعى دائري.

## السؤال الثالث:

أ ) فى الشكل المقابل: دائرتان متماستان فى نقطة ب، أ ب مماس مشترك للدائرتين، أ جـ مماس للصغري، أ ء مماس للكبري، أ جـ = ١٥ سم، أ ب = (٢ س − ٣) سم أ ء = (ص − ٢) سم أوجد كلا من: س، ص



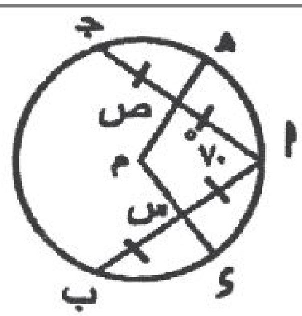

ب ) فى الشكل المقابل: أ ب قطر في دائرة م، جـ ∈ للدائرة.
ق(∠ جـ أ ب) = ٣٠°، ء منتصف أ جـ،
ء ب ∩ أ جـ = {هـ}
(١) أوجد: ق (∠ ب ء جـ)، ق (أ ء)
(٢) أثبت أن: أ ب // جـ ء



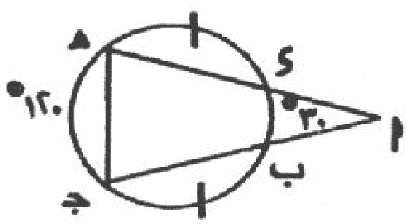

---

## السؤال الرابع:

أ ) فى الشكل المقابل:
أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م
س منتصف أ ب، ص منتصف أ جـ، ق (∠ جـ أ ب) = ٧٠°
(١) أوجد ق (∠ ء م هـ) (٢) أثبت أن س ء = ص هـ



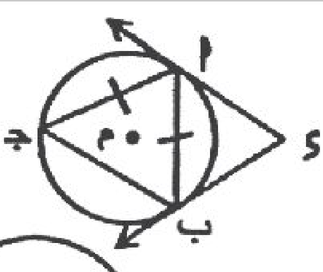

ب ) فى الشكل المقابل: ق (∠ أ) = ٣٠°
ق (هـ جـ) = ١٢٠°، ق (ب جـ) = ق (ء هـ)
(١) أوجد ق (ب ء) الأصغر
(٢) أثبت أن: أ ب = أ ء




---

## السؤال الخامس:

أ ) فى الشكل المقابل:
ء أ ، ء ب مماسان للدائرة م، أ ب = أ جـ
أثبت أن: أ جـ مماس للدائرة المارة. برءوس المثلث أ ب ء




ب ) فى الشكل المقابل: جـ منتصف أ ب
م جـ ∩ الدائرة م = {ء}، ق (∠ م أ ب) = ٢٠°
أوجد: ق (∠ ب هـ ء)، ق (أ ء ب)

## النموذج الثاني

**أجب عن جميع الأسئلة التالية:** **«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»**

**السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١) قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة = ....

( ٣٦٠° ، ١٨٠° ، ١٢٠° ، ٩٠° )

(٢) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج = .....

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ )

(٣) قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة - .....

(٤٥° ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°)

(٤) الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين....

(وتران ، مماسان ، وتر ومماس ، وتر وقطر )

(٥) أ ب جـ ى شكل رباعى دائرى فيه ق ( ∠ أ ) = ٦٠° فإن ق ( ∠ جـ) = ....

( ٦٠ ، ٣٠° ، ٩٠° ، ١٢٠° )

(٦) دائرتان م، ن متماستان من الداخل أنصاف أقطار هم ٥ سم، ٩ سم فإن م ن = .... سم

( ١٤ ، ٤ ، ٥ ، ٩ )

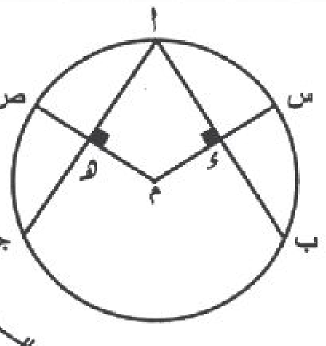
---

**السؤال الثاني:**

(أ) فى الشكل المقابل:

أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

أثبت أن س ى = ص هـ

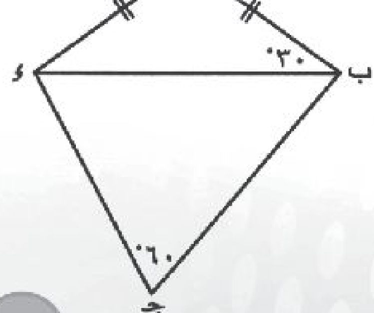



(ب) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه

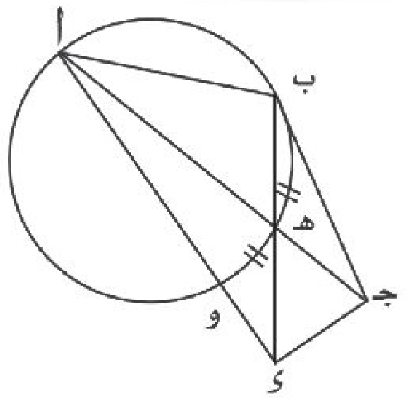
أ ب = أ ى، ق (∠ أ ب ى) = ٣٠°

، ق (∠ جـ) = ٦٠°

أثبت أن الشكل أ ب جـ ى رباعى دائري



**السؤال الثالث:**




**(أ) اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعى دائريا؟**

(ب) فى الشكل المقابل:

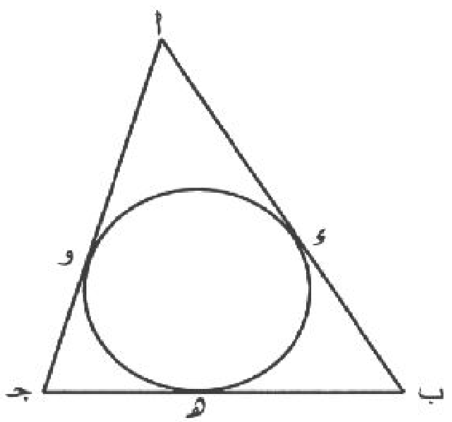
ب جـ مماس للدائرة عند ب

، هـ منتصف القوس ب و

أثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائري.

---

**السؤال الرابع:**



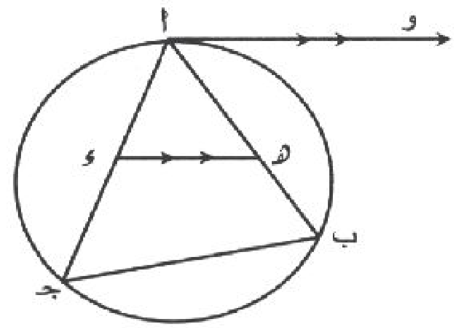

(أ) فى الشكل المقابل:

المثلث أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م تمس أضلاعه

أ ب، ب جـ، أ جـ فى ء، هـ، و على الترتيب

أ ء = ٥ سم، ب هـ = ٤ سم، جـ و = ٣ سم

أوجد محيط المثلث أ ب جـ



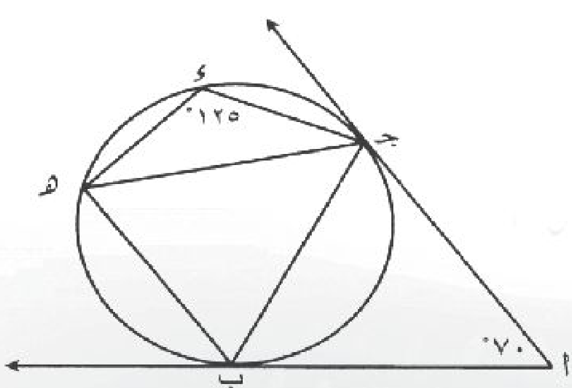

(ب) فى الشكل المقابل:

أ و مماس للدائرة عند أ ، أ و // ء هـ

برهن أن ء هـ ب جـ شكل رباعى دائري

---

**السؤال الخامس:**




فى الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ مماس للدائرة عند ب، جـ

ق ( ∠ أ ) = ٧٠°، ق ( ∠ جـ ء هـ) = ١٢٥°

أثبت أن

جـ ب = جـ هـ

أ جـ // ب هـ

## نموذج طلاب الدمج

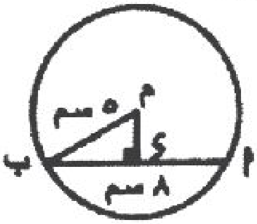
**أجب عن الأسئلة الآتية فى نفس الورقة** **«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»**

**السؤال الأول: أكمل العبارات الآتية:**

١) أكبر الأوتار طولا فى الدائرة يسمى ...

٢) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون .....

٣) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة..... فى الطول




٤) فى الشكل المقابل:

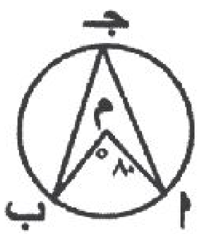
طول م ء = .... سم

٥) يوجد للدائرة عدد .... من محاور التماثل

٦) إذا كان أ جـ قطر فى الدائرة م فإن ق (⌒أ جـ) = .....°

---

**السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

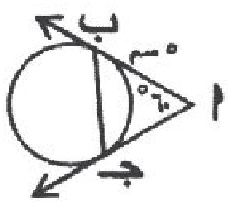



١) إذا كانت النقطة أ ∈ للدائرة م التى قطرها ٦ سم، فإن م أ = .... سم

( ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ )

٢) فى الشكل المقابل: ق (∠ أ جـ ب) = ....°

( ٤٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ )



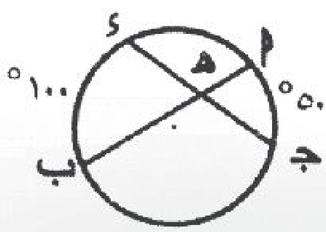

٣) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ....

( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ )

٤) فى الشكل المقابل:

طول ب جـ = .... سم

( ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ )




٥) عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة أ ب يساوي...

( ١ ، ٢ ، ٣ ، عدد لا نهائي )

٦) فى الشكل المقابل:

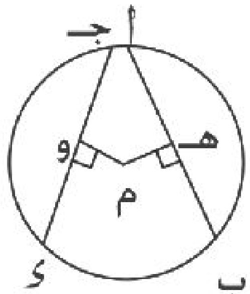
ق (∠ أ هـ جـ) = ....° ( ٢٥ ، ٥٠ ، ٧٥ ، ١٠٠ )

**السؤال الثالث:**

**ضع علامة ( ✓ ) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة.**

١) م، ن دائرتان متماستان من الخارج

أطوال أنصاف قطريهما بالترتيب نق$_1$ = ٥ سم، نق$_2$ =٣ سم فإن م ن = ١٥ سم ( )



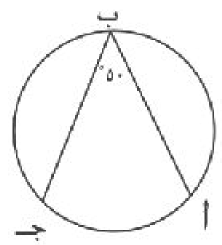

٢) أ ب = جـ ء

فإذا كان م هـ = ٣ سم

فإن م و = ٣ سم ( )

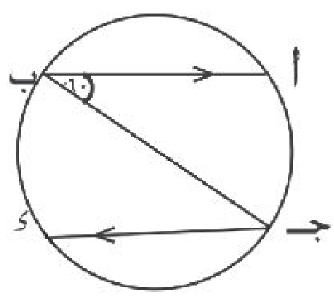
٣) الشكل أ ب جـ ء يكون رباعيا دائريا إذا كان

ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ٩٠° ( )



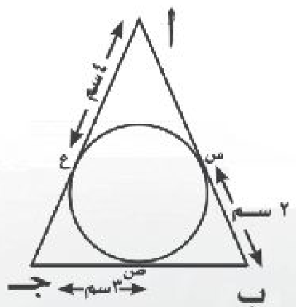

٤) فى الشكل المقابل:

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ١٠٠° ( )




٥) فى الشكل المقابل:

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) + ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ٣٠٠° ( )



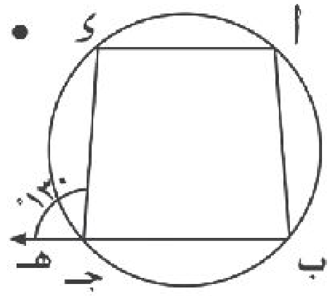

٦) فى الشكل المقابل: ( )

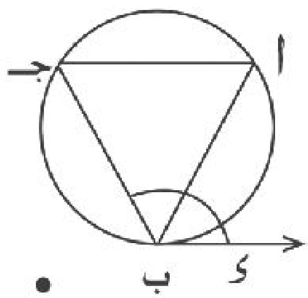
محيط △ أ ب جـ =٩ سم

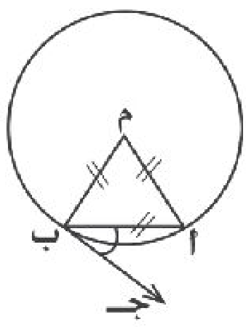
**السؤال الرابع:**

**صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب)**

| (أ) | (ب) |
|---|---|
| ١) قياس الزاوية المحيطية المرسوم فى نصف دائرة = ..... | ١٣٠° |
| ٢) فى الشكل المقابل<br>ق ( ∠ أ) = .... | ٩٠° |
| ٣) فى الشكل المقابل<br>ب ء مماس للدائرة عند ب<br>ق ( ∠ ء ب جـ ) = ١٤٠° فإن ق ( ∠ أ) = .. | ٣٠° |
| ٤) طول نصف قطر الدائرة<br>المارة برءوس مثلث قائم الزاوية<br>طول وتره ١٠ سم يساوى = .... سم | ٥ |
| ٥) فى الشكل المقابل:<br>△ م أ ب متساوى الأضلاع<br>$\overline{ب جـ}$ مماس للدائرة عند ب<br>فإن ق ( ∠ أ ب جـ) = .... | ٤٠° |
| ٦) النسبة بين قياس الزاوية المركزية والمحيطية المشتركتان فى نفس القوس فى دائرة واحدة هي.......... | ١:٢ |



## المواصفات الفنية :

| | |
|---|---|
| مقاس الكتاب : | $\frac{1}{8}$ (٥٧ × ٨٢) سم |
| طبع المتن : | ٤ لون |
| طبع الغلاف : | ٤ لون |
| ورق المتن : | ٧٠ جم أبيض |
| ورق الغلاف : | ١٨٠ جم كوشيه |
| عدد الصفحات : | ١٦٤ صفحة |
| التجليد : | بشر |
| رقم الكتاب | ٢٤٩/١٠/٢/٢٢/٣/٣٤ |

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم داخل جمهورية مصر العربية

Headline
PRINTING, PACKAGING & DESIGN
04/0077
دار النصر للطباعة (هدلاين)

http://elearning.moe.gov.eg