

الرياضيات البحثية

كتاب الطالب

الصف الثالث الثانوى

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

٢٠٢٦-٢٠٢٧ م

الاسم :

الفصل :

المدرسة :

إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د / عفاف أبو الفتوح صالح

أ / سيرافيم إلياس اسكندر

أ.د / محمد حسين فهمي

أ / أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ إبراهيم عبد اللطيف الصغير

مراجعة وتعديل

أ / شريف عاطف البرهامي

د / محمد محي عبد السلام

د / مدحت عطية شعراوي

أ/ ماجد محمد حسن

أ/ سمير محمد سعداوي

د / محمد عبد العاطي حجاج

أ/ عثمان مصطفى عثمان

إشراف علمي

أ/ منال عزقول - مستشار الرياضيات

إشراف تربوي

د / أكرم حسن - رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

رقم الإبداع ٢٠١٦ / ٨٧٠٥

الرقم الدولي 978 - 977 - 706 - 033 - 2

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
- ٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
- ٣ تبني مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلي:
أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محباً للرياضيات ومبادراً بدراساتها - أن يكون المتعلم قادراً على العمل منفرداً أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطاً ومثابراً ومواظباً ومبتكراً - أن يكون المتعلم قادراً على التواصل بلغة الرياضيات.
- ٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
- ٥ اقتراح أنشطة متنوعة تناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
- ٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفي ضوء ما سبق روعي في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن كتاب الرياضيات البحتة: الجبر والهندسة الفراغية - التفاضل والتكامل، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمي لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعي عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

وأخيراً . نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولصبرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل

المحتويات

أولاً: الجبر و الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى: نظرية ذات الحدين

- ١ - ١ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب ٤
- ٢ - ١ إيجاد الحد المشترك على س ك من مفكوك ذات الحدين ١٣
- ٣ - ١ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين ١٨

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

- ١ - ٢ الصورة المثلثية للعدد المركب ٢٤
- ٢ - ٢ نظرية دي موافر ٣٦
- ٣ - ٢ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ٤١

الوحدة الثالثة: الهندسة والقياس في بعدين وثلاثة أبعاد

- ١ - ٣ النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد ٤٨
- ٢ - ٣ المتجهات في الفراغ ٥٤
- ٣ - ٣ ضرب المتجهات ٦٣

الوحدة الرابعة: الخطوط المستقيمة والمستويات في الفراغ

- ١ - ٤ معادلة المستقيم في الفراغ ٨٠
- ٢ - ٤ معادلة المستوى في الفراغ ٩٠

المحتويات

ثانياً: التفاضل والتكامل

١٠٤ متطلبات قبلية في التفاضل والتكامل

الوحدة الأولى: الاشتقاق وتطبيقاته

- ١ - ١ الاشتقاق الضمني والبارامترى ١٠٨
- ٢ - ١ المشتقات العليا للدالة ١١٣
- ٣ - ١ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية ١١٧
- ٤ - ١ المعدلات الزمنية المرتبطة ١٢٨

الوحدة الثانية: سلوك الدالة ورسم المنحنيات

- ١ - ٢ تزايد وتناقص الدوال ١٣٨
- ٢ - ٢ القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى). ١٤٢
- ٣ - ٢ دراسة المنحنيات ١٤٨
- ٤ - ٢ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى ١٥٨

الوحدة الثالثة: التكامل المحدد وتطبيقاته

- ١ - ٣ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية ١٦٦
- ٢ - ٣ طرق التكامل ١٧٢
- ٣ - ٣ التكامل المحدد ١٨٢
- ٤ - ٣ تطبيقات على التكامل المحدد ١٨٩

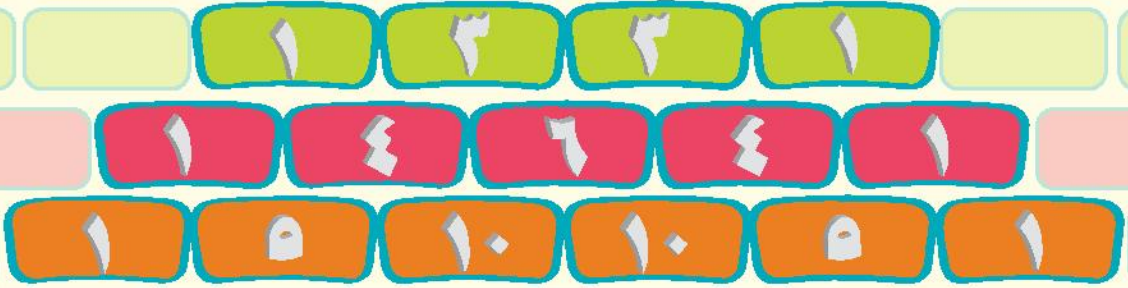
أولاً: الجبر والهندسة الفراغية

الجبر

الوحدة الأولى

نظرية ذات الحدين

Binomial theorem



مقدمة الوحدة

وُلد نصر الدين الطوسي (١٢٠١م - ١٢٧٤م) بجهرد، قُرب طوس الواقعة في إيران، من أسرة علم وفلسفة، تتلمذ على يدى كمال الدين الموصلى ومعين الدين المصرى، فدرس عليهما الحكمة والفلسفة وعلم الفلك والرياضيات، له باع طويل فى حساب عدد الإمكانات لحدوث الظواهر المختلفة، كما استخدم التباديل والتوافيق، وكان لكاردن (١٥٠١م - ١٥٧٦م) اهتمامات فى حساب عدد الإمكانات بطريقة مبدأ العد الأساسى، مما أتاح له مجالاً كبيراً فى معمارية الحاسوب (Computer Architecture) وهى عبارة عن تصميم وبنية العمليات الوظيفية للحاسوب، وتتناول هذه الوحدة مبدأ العد والعلاقة بين التباديل والتوافيق واستخداماتها فى حل بعض المشكلات الرياضية، وتعرف على نظرية ذات الحدين، وحل بعض التطبيقات الرياضية والحياتية عليها.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب.
- ✚ يستنتج الحد العام فى مفكوك ذات الحدين.
- ✚ يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكوك ذات الحدين.
- ✚ يوجد معامل أى حد فى مفكوك ذات الحدين وفقاً لرتبة هذا الحد.
- ✚ يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك (س + ص)ⁿ.
- ✚ يوجد الحد الخالى من س فى مفكوك (س + ص)ⁿ.
- ✚ يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذات الحدين.
- ✚ يوجد الحد الأوسط فى مفكوك ذات الحدين عندما ن عدد زوجى والحدان الأوسطان عندما ن عدد فردى.
- ✚ يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدماً مفكوك ذات الحدين
- ✚ يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذات الحدين، ويستنتج بعض الأنماط فى مثلث باسكال.
- ✚ يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعة على نظرية ذات الحدين.

مصطلحات أساسية

Binomial Theorem

نظرية ذات الحدين

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب
- الدرس (٢ - ١): إيجاد الحد المشتمل على x^k من مفكوك ذات الحدين
- الدرس (٣ - ١): النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

الأدوات والوسائل

Scientific calculator

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمي للوحدة



نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

Binomial theorem for positive integer power

فكر و ناقش



نعلم أن:

$$(1 + s)^1 = 1 + s$$

$$(1 + s)^2 = 1 + 2s + s^2$$

ويمكن استنتاج أن:

$$(1 + s)^3 = 1 + 3s + 3s^2 + s^3$$

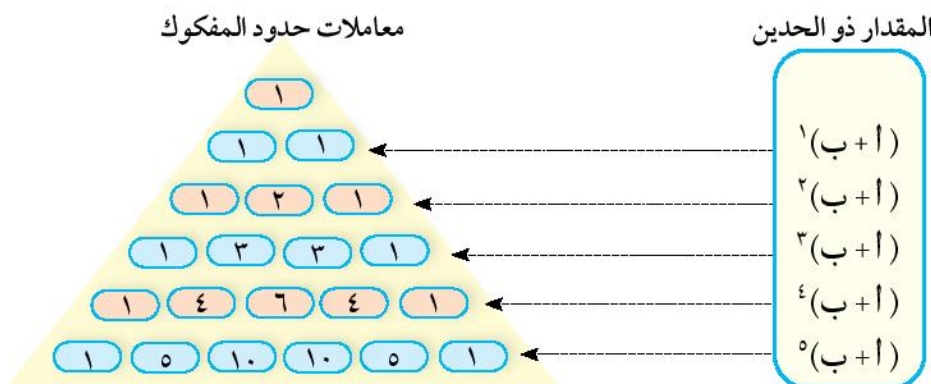
$$(1 + s)^4 = 1 + 4s + 6s^2 + 4s^3 + s^4$$

- ما العلاقة بين عدد الحدود وقيمة الأس؟
- ما العلاقة بين قوى المتغيرين s ، A في كل حد من حدود المفكوك؟
- ماذا تلاحظ عن معاملات الحدود في كل حدود المفكوك؟
- هل يمكن استخدام مثلث باسكال للتعبير عن المعاملات؟
- حاول استنتاج قاعدة إيجاد مفكوك $(1 + A)^n$

Pascal triangle

مثلث باسكال

لاحظ أن: معاملات المفكوك تتبع نمطاً يمثلها مثلث باسكال



ويمكن كتابة عناصر مثلث باسكال باستخدام التوافق كما في الشكل التالي:

سوف تتعلم

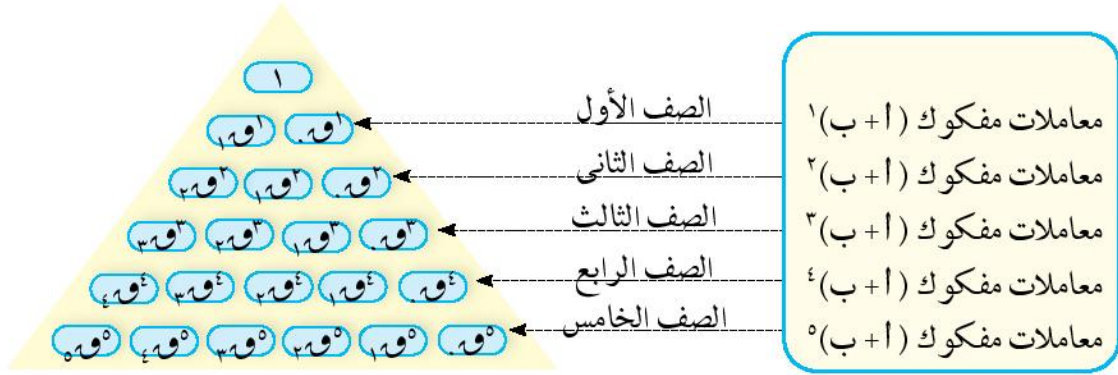
- الربط بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذي الحدين.
- الصورة العامة لمفكوك $(1 + A)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$
- الصورة العامة للحد العام r من مفكوك $(1 + A)^n$
- رتبة وقيمة الحد الأوسط والحد الأوسطين

مصطلحات أساسية

- المفكوك The expansion
- ذات حدين Binomial
- الحد العام The general term
- الحد الأوسط The middle term

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية Graphical programs



بملاحظة الصف الثاني مثلاً من مثلث باسكال نلاحظ أن ١، ٢، ١ تمثل $١و٢$ ،
 $١و٢$ ، $١و٢$ على الترتيب وأن مجموع هذه العناصر $١و٢$ ، $١و٢$ ، $١و٢$ تمثل عدد
 المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على عنصرين حيث
 $٢٢ = ٤ = ١و٢ + ١و٢ + ١و٢$

المجموعة {س، ص} مجموعات الجزئية ϕ ، {س}، {ص}، {س، ص}،
وبالمثل فإن: مجموع عناصر الصف الثالث
 $١و٣$ ، $١و٣$ ، $١و٣$ ، $١و٣$ تمثل عدد المجموعات الجزئية التي نحصل
 عليها من مجموعة تحتوي على ٣ عناصر وعدد هذه المجموعات $٣٢ = ٨$
 أي $٣٢ = ١و٣ + ١و٣ + ١و٣ + ١و٣$

وعلى وجه العموم إذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها ن فإن عدد المجموعات الجزئية التي يمكن الحصول
 عليها منها $ن٢ = ٢٠$ أي $ن٢ = ١و٢ + ١و٢ + ١و٢ + ١و٢ + ١و٢ + ١و٢ + ١و٢ + ١و٢$

تعبير شفهي: بالاستعانة بمثلث باسكال

(١) أوجد معاملات $(١ + ب)٦$ على صورة توافق. (٢) أوجد معاملات $(١ + ب)٥$ على صورة توافق.

تعلم



مفكوك ذي الحدين

إذا كان ١ ، $س$ ، $ع$ ، $ن$ $ص +$ يكون:

$$١ - (س + ١)ن = س١ + ١و٢س١-٢ + ١و٢س١-٢ + ١و٢س١-٢ + ... + ١و٢س١-٢ + ١و٢س١-٢$$

$$٢ - (س - ١)ن = س١ - ١و٢س١-٢ + ١و٢س١-٢ - ١و٢س١-٢ + ... - ١و٢س١-٢ + ١و٢س١-٢$$

ملاحظات على مفكوك ذي الحدين (س + ١)ن

(١) عدد حدود المفكوك $(١ + ن)$ حدًا

(٢) المفكوك مرتب حسب قوى س تنازليًا ومرتب حسب قوى ١ تصاعديًا.

(٣) مجموع قوى س وقوى ١ في أي حد يساوي ن.

(٤) دليل ١ في أي حد من حدود المفكوك يقل واحدًا صحيحًا عن رتبة ذلك الحد.



كتابة مفكوك ذات الحدين

١ اكتب مفكوك $(س + ص)^4$



$$(س + ص)^4 = (س + ص)(س + ص)(س + ص)(س + ص) = س^4 + ٤س^٣ص + ٦س^٢ص^٢ + ٤سص^٣ + ص^4$$

حاول أن تحل

١ اكتب مفكوك:

أ $(س + ص)^٥$

ب $(س - ص)^٦$

حالات خاصة من مفكوك ذات الحدين:

أ $(س + ص)^١ = س + ص$

ب $(س - ص)^١ = س - ص$



٢ اكتب مفكوك $(س + ص)^٦$ ، ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة عددية للمقدار: $٦س^٥ + ١٥س^٤ص + ٢٠س^٣ص^٢ + ١٥س^٢ص^٣ + ٦سص^٤ + ص^٦$



$$(س + ص)^٦ = س^٦ + ٦س^٥ص + ١٥س^٤ص^٢ + ٢٠س^٣ص^٣ + ١٥س^٢ص^٤ + ٦سص^٥ + ص^٦$$

بوضع س = ١ في الطرفين

$$١ + ٦ + ١٥ + ٢٠ + ١٥ + ٦ + ١ = (١ + ١)^٦$$

$$٦٢ = ١ + ٦ + ١٥ + ٢٠ + ١٥ + ٦ + ١$$

The general term of the expansion of binomial

الحد العام من مفكوك ذات الحدين

في مفكوك $(س + ص)^١$ = $س^١ + ١س^٠ص^١$ = $س + ص$

لاحظ أن $١س^٠ص^١ = ١س^١ص^٠$ ، $١س^٠ص^١ = ١س^١ص^٠$

وبالمثل يكون: $١س^٠ص^١ = ١س^١ص^٠$

وبفرض الحد العام $١س^٠ص^١$ حيث $٠ < س < ن$ فإن حيث $١س^٠ص^١$ يمكن كتابته على الصورة:

$$١س^٠ص^١ = ١س^٠ص^١$$

مثال

٣ من مفكوك (س + $\frac{2}{s}$)^٨ أوجد معامل الحد السادس

الحل

$${}^2\text{-س } 1792 = {}^2\text{-س } 2 \times 2^1 = 2\left(\frac{2}{2}\right)^2 (\text{س}) 2^1 = 2$$

ومعامل هذا الحد = ١٧٩٢

لاحظ معامل $\epsilon_{+} = \nu_{\mu}$ (معامل الحد الأول) - ν_{-} (معامل الحد الثاني)

٩ حاول أن تحل

٢ في مفكوك $(\frac{1}{p} + s)$ ، أوجد كل من e_3 ، e_7 حسب قوى s التنازلية، وإذا كان $e_3 = e_7$ ، أوجد قيمة s

مثال

٤) من مفكوك (٣س^٢ - $\frac{١}{٣٢}$)^{١٣}، أوجد الحد العاشر من النهاية.

الحل

الحد العاشر من النهاية في مفكوك $(س^3 - \frac{1}{س^2})^{13}$ هو الحد العاشر من البداية في مفكوك $(س^3 + \frac{1}{س^2})^{13}$

$${}^{14}_S \frac{{}^9_3 \times 710}{42} = {}^9_2 ({}^3_2 S) {}^4_2 ({}^1_2 S) {}^1_2 = 1.2$$

حل آخر

لاحظ أنه يمكن حساب رتبة الحد العاشر من النهاية في مفكوك $(٣س - \frac{١}{س})^{١٣}$ ، وتكون رتبته مساوية

$$0 = 1 + 1 \cdot -1 \text{€}$$

ويكون ع. ١ من النهاية هو ع. ٥ من البداية

٩ حاول أن تحل

٣ من مفكوك (٢س - $\frac{1}{٣س}$) " أوجد الحد الرابع من النهاية:

قاعدة

$$(\dots + {}_0x + {}_3x + {}_1x)^2 = {}^n(1-s) + {}^n(1+s) \quad (1)$$

$$(۲) \quad (۱+س)^n - (۱-س)^n = ۲(ع_۱ + ع_۳ + ع_۵ + \dots) \text{ من حدود } (۱+س)^n$$

مثال

٥ أوجد في أبسط صورة $(س + ٢)^6 + (س - ٢)^6$

الحل

$$(7x^2 + 5x + 3x + 1x)^2 = 6(2 - s) + 6(2 + s)$$

$$۲ = (س^۱ + س^۶ \times ۲ + س^۴ \times ۷ + س^۳ \times ۶) = ۲ = (س^۱ + س^۶ \times ۲ + س^۴ \times ۷ + س^۳ \times ۶)$$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد في أبسط صورة $(\sqrt{s} + 1)^5 - (\sqrt{s} - 1)^5$

مثال

٦ من مفكوك $(s+3)^{11} - (s+3)^{10} + (s+3)^9 - (s+3)^8 + \dots - (s+3)^2 + (s+3)^1 - (s+3)^0$ أوجد الحد الخامس حسب قوى s التصاعدية.

الحل

المقدار يمثل مفكوك $[(s+3) - (s+3)]^{11} = (s+3)^{11} - (s+3)^{10} + (s+3)^9 - (s+3)^8 + \dots - (s+3)^2 + (s+3)^1 - (s+3)^0$ ويكون:

$$C_{10}^{11} (s+3)^{10} = \frac{11!}{10!1!} (s+3)^{10} = 11 \times (s+3)^{10}$$

٤ حاول أن تحل

٥ من مفكوك $(s-1)^8 + (s-1)^7 + (s-1)^6 + \dots + (s-1)^2 + (s-1)^1 + (s-1)^0$ أوجد القيمة العددية للحد السادس حسب قوى s التصاعدية عندما $s=2$

مثال

٧ إذا كان $(1+j)^n = 1 + 20j + \dots + 168j^3 + \dots + j^n$ وكان $168 = 16 \times 3$ أوجد قيمة كل من n ، j حيث $j \neq 0$

الحل

$$(1+j)^n = 1 + 20j + \dots + 168j^3 + \dots + j^n$$

$$\text{١} \quad \therefore 20 = j \quad \therefore n = 20 \quad \therefore j = \frac{20}{n}$$

$$\text{٢} \quad \therefore 168 = 16 \times 3 = 16 \times j^3 \quad \therefore j^3 = \frac{168}{16} = 10.5 \quad \therefore j = \sqrt[3]{10.5}$$

$$\therefore \frac{20}{n} \times 16 \times 3 = 168 \quad \therefore \frac{20}{n} \times 48 = 168 \quad \therefore \frac{20}{n} = \frac{168}{48} = 3.5 \quad \therefore n = \frac{20}{3.5} = \frac{40}{7}$$

$$\therefore n = 10 \quad \therefore j = \frac{20}{10} = 2$$

$$\therefore j = \frac{2}{1} = 2$$

بالتعويض من ١ في ٢

$$168 = 16 \times n \times \frac{20}{n} \times 3 \quad \therefore 168 = 16 \times 20 \times 3 = 960$$

بالتعويض في المعادلة ١

٤ حاول أن تحل

٦ من مفكوك $(1+j)^{10}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوي ١٨٠، وكان الحد الخامس يساوي ٢١٠ أوجد قيمة كل من j ، s حيث j عدد صحيح موجب.

مثال

$$\frac{n}{r} = \frac{n - \text{نومر}}{\text{ن-اومر}} = \text{أثبت أن } \textcircled{8} \textcircled{9}$$

ب) إذا كانت النسبة بين ع من مفكوك (س + $\frac{1}{س}$)^{١٥}، ع من مفكوك (س - $\frac{1}{س}$)^{١٤} تساوى $\frac{٨}{٩}$ أوجد قيمة س

الحل 

$$\frac{n}{r} = \frac{\frac{1-r}{1} \frac{1-n}{1} n}{\frac{1-n}{1} \frac{1-r}{1} r} = \frac{1+r-1 \mid 1-r \mid 1}{1-n} \times \frac{n}{r \mid 1-n \mid r} = 1-r \div 1-r = 1$$

$$\frac{\Lambda}{9} = \frac{10 \text{ وه س } 10 \left(\frac{1}{s}\right)^0}{14 \text{ وه س } 10 \left(\frac{1}{s}\right)^4} = \frac{ع ٦ من (س + \frac{1}{s})^{10}}{ع ٥ من (س - \frac{1}{s})^{14}} =$$

$$\frac{\Lambda}{9} = \frac{2}{3} = s \therefore \quad \frac{\Lambda}{27} = 3 \therefore s = 3 \therefore \frac{\Lambda}{9} = 3$$

The middle term

الحد الأوسط في مفكوك (س + ا) ن

في مفكوك (س + ١)ⁿ نجد أن عدد حدود المفكوك = $n + ١$

أولاً: إذا كانت n عدداً زوجياً، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد فردي، ويوجد للمفكوك حد أوسط وحيد رتبته

$$\left(1 + \frac{\dot{u}}{u}\right) = \frac{2 + \dot{u}}{2}$$

ثانيًا: إذا كانت n عددًا فرديًا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد زوجي، ويوجد للمفكوك حدان أو سطران رتبتهما

$$\frac{3+n}{2}, \frac{1+n}{2}$$

مثال

٩ أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(\frac{1}{s^2} + s)^{12}$

الحل

$$٧ = ١ + \frac{١٢}{٢} = \text{رتبة الحد الأوسط}$$

$$٧ = ١ + \frac{١٢}{٢} = \text{رتبة الحد الأوسط}$$

٩ حاول أن تحل

٧ أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س^٣})١٠$ ، وإذا كانت قيمة هذا الحد $= \frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة س

مثال

١٠) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{3}{s} + \frac{s}{3})^{10}$

الحل

رتبة الحديد الأوسطين تساوى $\frac{1+10}{2}$ والذي يليه أى ٨ع ، ٩ع.

$${}^9س^{٢١٤٥} = {}^9س^{\frac{1}{3}} \times {}^٧س^{١٥} = {}^٧-١٦س^٧ \times {}^٧+٨-٣س^٧ \times {}^٧س^{١٥} = {}^٧\left(\frac{٣}{س}\right)^٨\left(\frac{س}{٣}\right)^٧ = {}^٨س^{١٥}$$

$${}^٦س^{١٩٣٠٥} = {}^٦س^٣ \times {}^٨س^{١٥} = {}^٨-١٤س^٧ \times {}^٧-٨٣س^٧ \times {}^٨س^{١٥} = {}^٨\left(\frac{س}{٣}\right)^٧\left(\frac{٣}{س}\right)^٨ = {}^٩س^{١٥}$$

٤ حاول أن تحل

٨ إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{ص}$

مثال

١١ أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(٣س + ٢ص)^٨ + (٣س - ٢ص)^٨$

الحل

المفكوك $(١س + ٣ص + ٥ص + ٣س + ١س)^٢ = ٢$
 $\therefore$ الحد الأوسط $= ٥ص٢$

$$٢ \times {}^٨س^٤ \times (٣)^٤ (٢س)^٤ = ١٨١٤٤٠ س^٤$$

٤ حاول أن تحل

٩ أوجد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين من مفكوك $(\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{٢}س) + {}^{١٠}\left(\frac{١}{س^{٢}} - \sqrt{٢}س\right)$

تمارين (١ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان رتبنا الحدان الأوسطان في مفكوك $(س + ص)^٨$ هما ٨، ٧ فإن ن تساوى:

ب ١٥

أ ١٣

د ٥٦

ج ١٦

٢ إذا كان $١ + ٥س + \frac{٤ \times ٥}{١ \times ٢} س^٢ + \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} س^٣ + \dots + س^٥ = ١٠٢٤$ فإن س تساوى:

ب ٢

أ ١

د ٣

ج ١٠

٣ مجموع معاملات حدود مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^٧$ يساوى:

ب ٥٢

أ ٧٢

د صفر

ج ٦٢

- ٤) معامل الحد الخامس من مفكوك $(١ + س^٢)^{١٠}$.
- أ) $١٦ \cdot ١٠$ ب) $\frac{١}{١٦} \cdot ١٠$
 ج) $١٦ \cdot ١٠$ د) $\frac{١}{١٦} \cdot ١٠$
- ٥) في مفكوك ذي الحدين إذا كان الحد العام هو $١٢س$ $٢٤س$ - $٤س$ يكون الحد المشتمل على $س^{١٢}$ هو:
- أ) $٢س$ ب) $٢س$
 ج) $٢س$ د) لا يوجد
- ٦) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(١ + س^٢)^{١٠}$ متساويين فإن:
- أ) $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$ ب) $١ = ٤س$
 ج) $٨ = ١س$ د) $٢ = ١س$
- ٧) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣})^{٨}$ هو الحد التاسع فإن ن تساوى:
- أ) ١ ب) ٢
 ج) ٢ د) ٤
- ٨) في مفكوك $(١ + س)^٩$ يكون معامل الحد السادس هو:
- أ) $٩س$ ب) $٩س$
 ج) $٩س$ د) $٩س$
- ٩) في مفكوك ذي الحدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة:
- أ) $(١ - س)^{١٢}$ ب) $(١ - س)^{١٣}$
 ج) $(١ + س)^{١٢}$ د) $(١ - س)^{١٣}$

ثانيًا : أجب عما يأتي:

- ١٠) إذا كان $١ + ٨س + ٨س + ٨س + + ٨س = ٢٥٦$ أوجد قيمة س
- ١١) أوجد قيمة س التي تحقق $(١ + ٣س) - (١ - ٣س) = ٤٨٠$ س
- ١٢) باستخدام المفكوك: $(١ + س)^{١٠} = ١ + ١٠س + ٤٥س^٢ + ١٢٠س^٣ + + س^{١٠}$ أثبت أن:
- أ) $١ + ١٠س + ٤٥س^٢ + ١٢٠س^٣ + + س^{١٠} = ١٠٢$ ب) $١ - ١٠س + ٤٥س^٢ - ١٢٠س^٣ + + س^{١٠} = ١٠٢$
- ١٣) اكتب مفكوك كلاً من:
- أ) $(\frac{س}{٢} + \frac{٢}{س})^٤$ ب) $(س - \frac{١}{س})^٤$
 ج) $(س + ٣س) + (س - ٣س)$ د) $(س + ٣س) - (س - ٣س)$

- ١٤) من مفكوك $(١ + س)^ن$ حسب قوى س التصاعديّة إذا كان $س٣ = ٢٨س٢$ ، $س٥ = ١١٢٠$ أوجد قيمة كل من: ن، س
- ١٥) من مفكوك $(١ + س)^ن$ إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد قيمة ن.
- ١٦) من مفكوك $(س + ب)^١٠$ حسب قوى س التنازليّة إذا كان معامل $س٦ = \frac{٦٣}{٨}$ أثبت ان $٢ أب = ١$
- ١٧) من مفكوك $(س٢ + \frac{١}{س})^{١٢}$ أوجد الحد الأوسط.
- ١٨) من مفكوك $(\frac{س}{٣} - \frac{٢}{س})^{١١}$ أوجد الحدين الأوسطين.
- ١٩) من مفكوك $س^٤ (س - \frac{١}{س})^٩$ حسب قوى س التنازليّة، أوجد الحد الرابع من النهاية.
- ٢٠) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س٢ + \frac{١}{س})^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٣٧}$ فأوجد قيمة س.
- ٢١) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $(\frac{س٢}{٣} + \frac{٣}{س})^{١٠}$ ، ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما $س = ٣$
- ٢٢) إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$ والحد الرابع من مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٤}$ تساوى -١٦ : ١٥ أوجد قيمة س

الوحدة الأولى

إيجاد الحد المشترك على س^ك من مضكوك ذات الحدين

Finding the term contain x^R in the expansion of binomial

فکر و ناقش



تعلمنا في الدرس السابق أن :

سوف تتعلم

- استخدام الحد العام في إيجاد الحد
المشتمل على s^k والحد التالي
من s .
- إيجاد معامل الحد المشتمل على s^k
من المفكوك.
- إيجاد معامل أكبر قوة لـ s .

$${}^2(s \frac{1}{3})^{18} {}^2\text{ف}^{20} + (\frac{1}{s3})^{19} {}^2\text{ف}^{20} - {}^{20}(s \frac{1}{3}) = {}^{20}(\frac{1}{s3} - {}^2(s \frac{1}{3}))$$

هل من السهل أن نوجد الحد المشتمل على س^{١٦} أو س^{٢٤} أو الحد الخالي من س أو بدون الاسترسال في كتابة حدود المفكوك؟

نجد أن طريقة البحث بإيجاد المفكوك تكون شاقة؛ ولهذا الإيجاد الحد المشتمل على S من المفكوك نتبع الآتى :

مصطلحات أساسية

- | | |
|----------------|--------------|
| General term | حد عام |
| term Free of x | حد خالی من x |
| Highest power | أكبر قوة |
| Coefficient | معامل حد |

١- نفترض أن هذا الحد هو الحد العام u_n ونوجد هذا الحد بدلالة n .

٢- نوجد مجموع قوى s في الحد العام بدلالة s ونضع هذا المجموع مساوياً للقوة المطلوبة k ، ومنها نوجد s التي تحقق احتواء هذا الحد على القوة المطلوبة k ولدينا:

١ $s \equiv 1 \pmod{a}$ ط يكون $s + 1$ هو الحد المطلوب.

ب) $\nabla \cdot \mathbf{F}$ لا يوجد حد يحتوى على القوة المطلوبة من المفكوك.

في حالة البحث عن الحد الخالي من س نضع مجموع قوى س من الحد العام = صفر

مثال

١ من مفكوك $\left(\frac{2}{s^3} + \frac{s^3}{2} \right)$ أوجد معامل s في هذا المفكوك .

الحل

و بمقارنة القوى s^{2-11} s^1

$$1 = \sqrt{2} - 11$$

$$0 = \infty$$

الحد المطلوب هو الحد السادس.

$$792 = {}^0\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{3}{7}\right) \cdot 1 = 7 \text{ معامل}$$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد معامل s^8 في مفكوك $(\frac{s^2}{3} - \frac{3}{s})^{12}$

مثال

٢ من مفكوك $(s^2 - \frac{1}{3s})^9$ أوجد :

أ معامل s^3 ب الحد الخالي من s

ج أثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على s^2

الحل

$$s^8 + s^7 = {}^9C_0 (s^2)^9 (\frac{1}{3s})^0 = {}^9C_1 (s^2)^8 (\frac{1}{3s})^1 = {}^9C_2 (s^2)^7 (\frac{1}{3s})^2 = {}^9C_3 (s^2)^6 (\frac{1}{3s})^3 = {}^9C_4 (s^2)^5 (\frac{1}{3s})^4 = {}^9C_5 (s^2)^4 (\frac{1}{3s})^5 = {}^9C_6 (s^2)^3 (\frac{1}{3s})^6 = {}^9C_7 (s^2)^2 (\frac{1}{3s})^7 = {}^9C_8 (s^2)^1 (\frac{1}{3s})^8 = {}^9C_9 (s^2)^0 (\frac{1}{3s})^9$$

أ لإيجاد معامل s^3

$$s^3 = s^{3-9} = s^{-6} \quad s^3 = s^{3-9} \quad s^3 = s^{-6}$$

الحد الثالث يحتوى على s^3

$$\text{معامل } s^3 = {}^9C_6 \times 2^6 \times 3^{-6} = 1102 = 32 \times 36 = 2^5 \times 3^2$$

ب لإيجاد الحد الخالي من s ب $s^0 = s^{3-9} = s^{-6}$ ب $s^0 = s^{-6}$

$$\text{الحد المطلوب هو } s^0 = {}^9C_6 \times 2^6 \times 3^{-6} = 672 = 3^2 \times 2^5$$

ج بوضع $s^3 = s^{3-9} = s^{-6}$ ب $s^3 = s^{-6}$ ب $s^3 = s^{-6}$

ب $s^3 = s^{-6}$ ب $s^3 = s^{-6}$ ب $s^3 = s^{-6}$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد الحد الخالي من s في مفكوك $(\frac{1}{s} - 2s^2)^{12}$

ب أوجد معامل s^{10} في مفكوك $(\frac{s^2}{3} - \frac{2}{s})^{10}$

ج من مفكوك $(\frac{1}{s} + s)^{10}$ حسب قوى s التنازلية إذا كان الحد الخالي من s يساوى معامل الحد السابع، أثبت أن $16 \mid 5$

مثال

٢ إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً أثبت أنه لا يوجد حد خالي من s من مفكوك $(s^0 + \frac{1}{s})^n$ إلا عندما n مضاعف للعدد ٧ ثم أوجد هذا الحد في حالة $n = 7$

الحل

$$\begin{aligned}
 \text{ع} + ١ &= \text{ن} \text{ (س)} = \left(\frac{١}{٣}\right) \text{س} = \text{ن} \text{ (س)} = ٧ - \text{ن} \\
 \text{س} &= ٧ - \text{ن} = \text{س} \text{ صفر} \quad \text{ن} = ٧ - \text{س} = \text{س} \text{ صفر} \\
 \frac{\text{ن}}{٧} &\Rightarrow \text{ط} \text{ عندما ن مضاعف للعدد } ٧ \\
 \text{ع} &= ٧ = \text{ن} \quad \therefore \text{س} = ٥ \quad \text{الحد الخالي من س هو ع} \\
 \text{ع} &= ٧ = ٧ \quad ٢١ = ٧
 \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

٣ من مفكوك (س + $\frac{١}{٣}$)^٣ أوجد:

- أ معامل الحد الذي يحتوى على س^٣
 ب إذا كانت ن = ٦، أوجد النسبة بين معامل الحد الذي يشتمل على س^٣ ومعامل الحد الأوسط

مثال

٤ من مفكوك $(\frac{٣}{٣} + ٢)^٩$ أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

الحل

$$\begin{aligned}
 \text{رتبة الحدين الأوسطين } \frac{١+٩}{٣} \text{ والذي يليه أى ع، ع} \\
 \therefore \text{ع} = \text{ع} \quad \therefore \text{ع} = ٦ \\
 \therefore \text{س} = ٦ \quad \frac{٣}{٣} = ٢
 \end{aligned}$$

تمارين الدرس (٢ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة:

- ١ الحد المشترك على س^٤ فى مفكوك (١ + ٢س)^{١٠} يساوى:
 أ ١٥^{١٠} ب $\frac{١}{١٦}$ ١٠^{١٠} ج ١٦^{١٠} د ٣٢ × ١٠^{١٠}
- ٢ فى مفكوك (س + $\frac{١}{٣}$)^{١٠} يكون الحد الخالي من س هو:
 أ ع ب ع ج ع د لا يوجد حد خال من س
- ٣ فى مفكوك س^٣ (١ + س)^٧ يكون معامل الحد المشترك على س^٤ هو:
 أ ٧^٧ ب ٣^٧ ج ٧^٧ د ٢١

- ٤) في مفكوك $(س^٢ + \frac{٢}{س})^٦$ يكون الحد الخالي من س هو الحد
 أ) الثالث. ب) الرابع. ج) الخامس. د) لا يوجد حد خال من س
- ٥) في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{١١}$ إذا كان معامل س^٧ متساويين فإن أ =
 أ) ١ ب) -١ ج) ١± د) ٢±
- ٦) إذا كان الحد الخال من س في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^٨$ هو س^٧ فإن ن =
 أ) ٦ ب) ١٠ ج) ١٢ د) ٨
- ٧) في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^٨$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوي معامل س^٧ فإن أ =
 أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{٤}{٥}$ ج) $\frac{٥}{٤}$ د) $\frac{٥}{٤}$
- ٨) في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع فإن:
 أ) $\frac{٦}{٥}$ = أ ب) $\frac{٥}{٦}$ = أ ج) $\frac{٣٦}{٢٥}$ = أ د) $\frac{٢٥}{٣٦}$ = أ
- ٩) الحد الخالي من س في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^٨$
 أ) ٣٥ ب) ١٤٠ ج) ٧٠ د) ٥٦
- ١٠) في مفكوك $(س + ١)^٧$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل س^٥ = ٥٦٠ فإن أ =
 أ) ٢ ب) ٤ ج) ٢± د) ٤±

اجب عن الاسئلة الآتية :

- ١١) في مفكوك $(س^٤ + \frac{١}{س^٣})^{١٢}$ أوجد الحد الخالي من س
- ١٢) أوجد معامل س^{١٢} في مفكوك $(س^٢ + \frac{٢}{س})^{١٥}$
- ١٣) إذا كان الحد السادس في مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^٨$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س، أوجد قيمة ن، ثم
 ابحث هل احد حدود هذا المفكوك يشتمل على س^{-٦} أم لا؟
- ١٤) في مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^٩$ أوجد :
 أولاً: معامل س^٣ ثانياً: الحد الخالي من س
 ثالثاً: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على س^٢
- ١٥) أثبت أن $س^{١٠} = س^{١٠}$ وإذا كانت النسبة بين معامل س^{١١} في مفكوك $(س + ١)^٢$ ومعامل س^{١٠} في
 مفكوك $(س - ١)^٢$ تساوى ٣ : ٢ أوجد قيمة ن.
- ١٦) أوجد معامل $(\frac{س}{ص})^٤$ من مفكوك $(\frac{س}{ص} + \frac{س^٢}{ص})^{١٠}$
- ١٧) أوجد معامل س^٨ في مفكوك $(س + ١)^{٢٠}$ ، ثم أثبت أنه يساوي ضعف معامل س^٨ من مفكوك $(س + ١)^{٢٠}$

١٨) في مفكوك $(س + \frac{1}{س})^٢$ أثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما $ن = ٨$

١٩) في مفكوك $(س^٦ + \frac{1}{س})^٦$ حيث ك عدد صحيح موجب. أوجد:

أولاً: قيمة ك التي تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س

ثانيًا: النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التي حصلت عليها من أولاً.

٢٠) في مفكوك $(س^٢ + \frac{1}{س})^{١٢}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل $س^٢$ من هذا المفكوك تساوى

٥ : ١٦ ، أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما $س = ٢$.

٢١) في مفكوك $(س^٢ + \frac{1}{س})^{١٠}$ إذا كان معامل س ٥ يساوى معامل س ١٥ أوجد قيمة أ.

٢٢) في مفكوك $(س^٢ + \frac{1}{س})^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية :

أولاً: أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س **ثانيًا:** إذا كان $ع = ١١$ أوجد قيمة س

٢٣) في مفكوك $(س + \frac{1}{س})^٩$ أوجد:

أولاً: رتبة وقيمة الحد الخالي من س

ثانيًا: قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين في المفكوك يساوى صفر.

٢٤) أوجد قيمة الحد الخالي من س في مفكوك $(س^٩ + \frac{1}{س})^٩$ ، ثم أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

٢٥) في مفكوك $(س^٢ + \frac{1}{س})^٣$ اثبت أن الحد الخالي من س يساوى معامل الحد الذي يحتوى على $س^٣$ ، وإذا كانت $ن = ٦$ فاوجد النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط.

18

$$\frac{\frac{\text{معامل } ٧\text{ع}}{\text{معامل } ٦\text{ع}}}{\frac{\text{معامل } ١٨\text{ع}}{\text{معامل } ٧\text{ع}}} = \frac{\text{معامل } ١٨\text{ع}}{\text{معامل } ٦\text{ع}} \quad \textcircled{د}$$

$$\frac{٢}{١} \times \frac{١+٦-١٢}{٦} \times \frac{٢}{١} \times \frac{١+٧-١٢}{٧} =$$

$$\varepsilon = \frac{٢}{١} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{٢}{١} \times \frac{٦}{٧} =$$

حاول أن تحل

① من مفكوك (س^٢ + $\frac{٢}{س}$)^٨

أولاً: أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس، وإذا كانت هذه النسبة تساوي ٨ : ٢٥ أوجد قيمة s

ثانيًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوي على حد خالٍ من س

مثال 

٢) من مفكوك (س + ص) إذا كان $٢ع = ع + ع$ ، أوجد $\frac{س}{ص}$ عددياً.

الحل

[illegible]

٩ **حاول أن تحل**

٢) من مفكوك $(\sqrt{s} + \frac{1}{s})^8$ إذا كان $ع، ع، ع، ع، ع، ع، ع، ع$ متناسبة أوجد قيمة $س$

مثال 

٣) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(١ + س)^ن$ هي ٣٥ ، ٢١ ، ٧ حسب قوى س التصاعدية، أوجد قيمة كل من ن و رتب الحدود الثلاثة.

الحل 

بفرض $c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+2}$ هي الحدود المطلوبة

$$\frac{2}{5} = \frac{1+r^{-n}}{r} \quad \frac{21}{30} = \frac{1+r^{-n}}{r} = \frac{\text{معامل } r}{\text{معامل } r}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{n - r}{1 + r} \quad \frac{7}{21} = \frac{1 + (1 + r) - n}{1 + r} = \frac{\text{معامل } r_+}{\text{معامل } r_+}$$

(٢)

$$١ = ٣ - ٤س$$

$$١ + س = ٣ - س$$

وبحل المعادلتين: (١)، (٢) $\therefore ن = ٧، س = ٥$

٢ حاول أن تحل

٢ إذا كانت الحدود: الثالث، الرابع، الخامس من مفكوك (س + ص)^{١٠} هي على الترتيب ١١٢، ٤٤٨، ١١٢٠، أوجد قيم كل من ن، ص، س

مثال

إيجاد أكبر حد

٤ أوجد أكبر حد في مفكوك (س + ص)^{١٠} عندما س = ٢، ص = ٣

الحل

$$\therefore \frac{٣}{٢} \times \frac{س - ١ + ١٠}{س} = \frac{١ + س}{س} \quad \therefore \frac{س^٣ - ٣٣}{س^٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{س - ١١}{س} = \frac{١ + س}{س}$$

$$\text{أولاً: } ١ \leq \frac{س^٣ - ٣٣}{س^٢} \therefore ٣ - ٣٣ \leq س^٢ \quad \therefore ٣٣ \geq س^٢ \quad \therefore ٦,٦ \geq س$$

من ذلك نستنتج أن $١٠ع < ٩ع < ٨ع < ٧ع < ٦ع < ٥ع < ٤ع < ٣ع < ٢ع < ١ع$

$$\text{ثانياً: } ١ > \frac{س^٣ - ٣٣}{س^٢} \therefore ٣ - ٣٣ > س^٢ \quad \therefore ٣٣ \leq س^٢ \quad \therefore ٦,٦ \leq س$$

من ذلك نستنتج أن $١١ع > ١٠ع > ٩ع > ٨ع > ٧ع$

$\therefore ٧ع$ هو أكبر حد في مفكوك (س + ص)^{١٠} ويساوي $١٠ \times ٧^٩ \times ٣ = ٢٤٤٩٤٤٠$

تمارين (١-٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ في مفكوك (س + ص)^{١٠} الحد التاسع : الحد الثامن تساوى

ب $\frac{س^٣}{ص^٨}$
د $\frac{س^٨}{ص^٣}$

أ $\frac{س^٣}{ص^٨}$
ج $\frac{س^٨}{ص^٣}$

٢ في مفكوك (١ - س)^{١٢} معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس

ب $\frac{٥}{٨}$
د $\frac{٥-}{٨}$

أ $(\frac{٨}{٥})$
ج $\frac{٨-}{٥}$

٣ في مفكوك (س + ص)^٨ تكون نسبة $\frac{٦ع}{٤ع} =$

ب $\frac{٢٥س}{١٦ص}$
د $\frac{٢٥ص}{١٦س}$

أ $\frac{٢٥ص}{١٦س}$
ج ١

- ٤) في مفكوك $(٢ - ١٣)ب$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{٣}{٢}$ فإن $ا : ب =$
 أ ٩ : ٤
 ب ٩ : ٤
 ج ١
 د ١ -

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٥) من مفكوك $(٢س + \frac{٣}{س})$ أوجد كلاً من:

- أ $\frac{٣س}{٢س}$
 ب $\frac{٤س}{٥س}$
 ج $\frac{٦س}{٨س}$
 د $\frac{\text{معامل } ع}{\text{معامل } ع}$

- ٦) في مفكوك $(١ + س)$ إذا كان $٣ع = ٢ع$ فأوجد قيمة س

- ٧) في مفكوك $(ا + ب)$ إذا كان $٢ع = ٢٤٠$ ، $٣ع = ٧٢٠$ ، $٤ع = ١٠٨٠$ فأوجد قيمة كلاً من $ا$ ، $ب$ ، $ن$

- ٨) إذا كانت $٢ع : ٣ع$ من مفكوك $(ا + ب)$ تساوى النسبة بين $٣ع : ٤ع$ من مفكوك $(ا + ب)$ $٣ + ن$ فأوجد قيمة $ن$

- ٩) في مفكوك $(١ + م س)$ إذا كانت $٤ع = ٧ع$ ، $\frac{٤ع}{٦ع} = \frac{١}{٤}$ ملاحظة وذلك عندما $س = ١$ فأوجد قيمة كل من $م$ ، $ن$

- ١٠) أوجد عددًا أكبر حد في مفكوك $(٣ - ٥س)$ عندما $س = \frac{١}{٥}$.

- ١١) في مفكوك $(س + ص)$ $ن$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول والحد الثالث عندما $س = ٢$ ص فأوجد قيمة $ن$.

الوحدة الثانية

الأعداد المركبة Complex numbers

مقدمة الوحدة

يعد (جان روبير أرجاند) من أعلام الرياضيين البارزين، وهو أول من درس الأعداد المركبة complex numbers تفصيليًا واستخدمها في إثبات أن لجميع المعادلات الجبرية جذورًا سواء حقيقية أم تخيلية، وتمثل الأعداد المركبة بالشكل أو المخطط المعروف بمخطط Argand Diagram تكريمًا للعالم الفرنسي أرجاند، إما بنقطة (س، ص) حيث س العدد الحقيقي على المحور السيني، وتمثل ص العدد التخيلي على المحور الصادي أو بكمية متجهه (Vector) مقدارها يساوي $\sqrt{s^2 + v^2}$ واتجاهها $\tan^{-1} \frac{v}{s}$. كما ستتعرف في هذه الوحدة على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وحل تطبيقات على الأعداد المركبة التي تدخل في حياتنا كالكهرباء والديناميكا والنظرية النسبية، وميادين الفيزياء المختلفة، وهذه الأعداد هي أعداد مرنة لها القدرة على الوصول إلى النتيجة النهائية بشكل مرض.

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- ✚ يمثل العدد المركب ومرافقه بيانيًا بنقاط (أزواج مرتبة) في مستوى إحداثي
- ✚ يحدد المقياس والسعة للعدد المركب.
- ✚ يتعرف المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما.
- ✚ يجرى العمليات الأساسية على العدد المركب في الصورة المثلثية.
- ✚ يحل تطبيقات على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- ✚ يستعمل الأعداد المركبة في حل المشكلات الرياضية.
- ✚ يستخدم بعض برامج الحاسوب في حل مشكلات رياضية تتضمن أعدادًا مركبة.
- ✚ يستنتج خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- ✚ يستنتج خواص العددين المترافقين.
- ✚ يستنتج خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح
- ✚ يعرف العدد المركب ومرافقه بيانيًا بنقاط (أزواج مرتبة) في مستوى إحداثي
- ✚ يحدد المقياس والسعة للعدد المركب.
- ✚ يتعرف السعة الأساسية للعدد المركب.
- ✚ يتعرف الصور المثلثية للعدد المركب.
- ✚ يتعرف نظرية ديموافر وتطبيقاتها.
- ✚ يستنتج الجذور النونية لأي عدد مركب.
- ✚ يعبر عن θ جان θ ، جتا θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية ومضاعفاتها.
- ✚ يتعرف مفعوك جا θ ، وجتا θ كمتسلسلات.
- ✚ يستنتج قانون أويلر من خلال المتسلسلات.
- ✚ يتعرف ويطبق طرق التحويل بين الصور المختلفة للعدد المركب.

مصطلحات أساسية

cubic root	جذر تكعيبي	Trigonometric form	صور مثلثة	Argand plane	مستوى أرجاند
Unitcircle	دائرة الوحدة	De Moivre's theorem	نظرية ديموافر	conjugate	مرافق
Polar	قطبي	root	جذر	Modulus	مقياس
		square root	جذر تربيعي	principle omplitude	سعة أساسية

دروس الوحدة

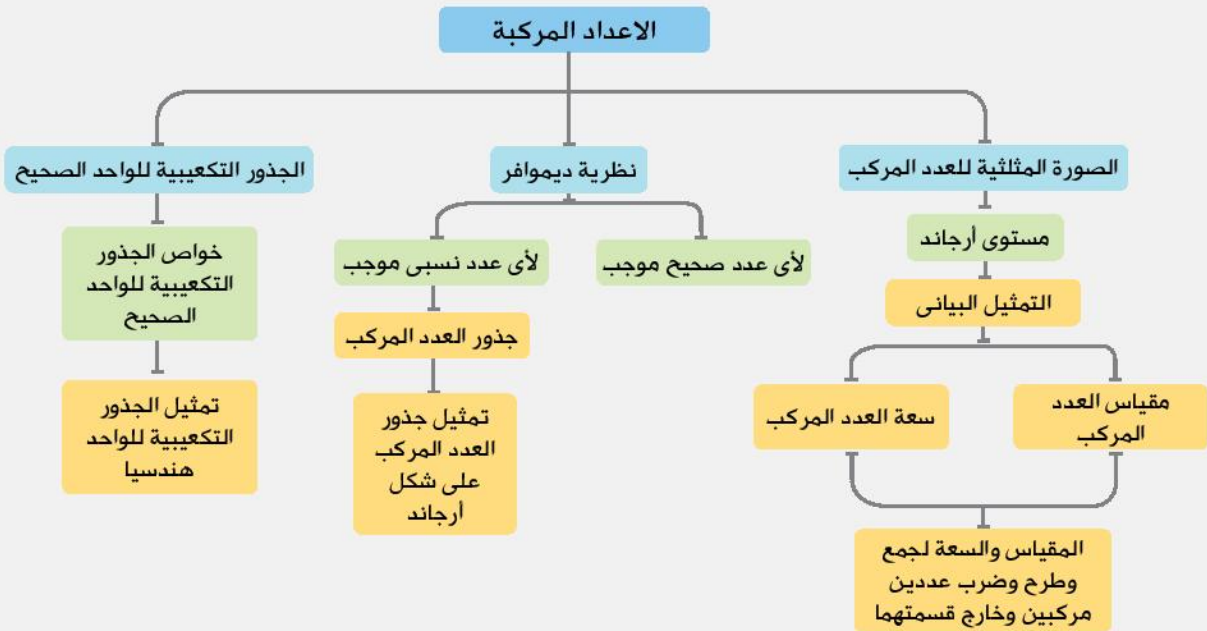
الصور المثلثية للعدد المركب
نظرية ديموافر
الجذور التكعيبة للواحد الصحيح

الدرس (١-٢):
الدرس (٢-٢):
الدرس (٣-٢):

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

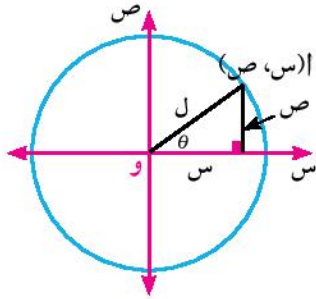
مخطط تنظيمي للوحدة



الصورة المثلثية للعدد المركب

Polar form of a complex number

سبق أن درست الأعداد المركبة، وعلمت أن العدد المركب يمكن كتابته على الصورة $z = s + jt$ حيث s ، t عدنان حقيقيان، $t^2 = -1$ وفي هذا الدرس سوف نتعرف على صورة أخرى لكتابة العدد المركب، وكيفية تمثيله بيانياً.



الإحداثيات القطبية والديكارتية:

الشكل المقابل يمثل دائرة طول نصف قطرها r ،

أ (s, t) تقع على الدائرة وتقابل زاوية θ .

$$\cos \theta = \frac{s}{r} \quad , \quad \sin \theta = \frac{t}{r}$$

$$s = r \cos \theta \quad , \quad t = r \sin \theta$$

حيث $r = \sqrt{s^2 + t^2}$ ، $\theta = \tan^{-1} \frac{t}{s}$ أى أن:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{t}{s} \quad \text{و إذا تأملنا المستوى الديكارتي}$$

على أنه مستوى قطبي بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب لمحور السينات فإنه يمكننا تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية والعكس.

تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية

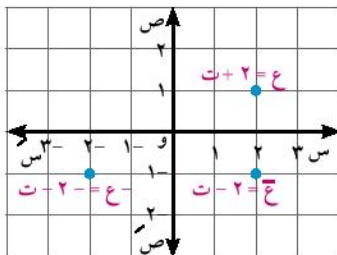
إذا كانت النقطة أ في الإحداثيات القطبية هي (r, θ) فإن الإحداثيات الديكارتية لنفس النقطة هي (s, t) حيث:

$$s = r \cos \theta \quad , \quad t = r \sin \theta$$

ويكون: $(s, t) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

مستوى أرجاند

قام العالم الرياضى "أرجاند" بتمثيل العدد المركب $z = s + jt$ بيانياً على مستوى إحداثيات متعامدة، وجعل المحور الأفقى s يمثل الجزء الحقيقى من العدد المركب وجعل المحور الرأسى j يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب. فتكون النقطة التى إحداثياتها (s, t) تمثل العدد المركب $z = s + jt$



مثال

① فى شكل أرجاند المجاور نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين $z = 2 + j2$ و $z = -2 - j2$ متماثلتان بالنسبة لنقطة الأصل (و).

سوف تتعلم

- التمثيل البياني للعدد المركب
- ومرافقة فى مستوى أرجاند.
- التمثيل البياني لمجموع عددين مركبين.
- مقياس العدد المركب.
- سعة العدد المركب.
- السعة الأساسية للعدد المركب.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين وخارج قسمتهما.

مصطلحات أساسية

- مستوى أرجاند Argand plane
- مرافق Conjugate
- مقياس Modulus
- سعة أساسية Principle amplitude
- صورة مثلثية Trigonometric form

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

كذلك نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين المترافقين $\bar{c}$ ، c متماثلتان بالنسبة للمحور $س$ $\rightarrow$

٩ حاول أن تحل

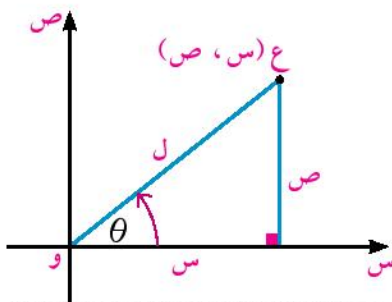
١ مَثِّلْ على شكل أرجاند كل من الأعداد:

$$c = 3 + 4i, \quad \bar{c}, \quad -c, \quad 1 + c$$

تفكير ناقده: ما الذي تمثله جميع الأعداد المركبة c التي جزءها الحقيقي يساوي ٢ على شكل أرجاند.

تعلم ا

The modulus and the amplitude (argument) of a complex number **المقياس والسعة للعدد المركب**



Polar form of a complex number

إذا كان $c = س + ص ت$ عددًا مركبًا تمثله نقطة $ع(س، ص)$ في مستوى أرجاند، فإن مقياس العدد c هو بُعد عن نقطة الأصل $و$. ويرمز لمقياس العدد c بالرمز $|c|$ أو $ل$ وتسمى $θ$ بسعة العدد المركب، ويكون:

$$ل = \sqrt{س^2 + ص^2}, \quad \frac{ص}{س} = \tan \theta \quad \text{أو} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{ص}{س} \right)$$

حيث $\frac{\pi}{2} > \theta > \frac{\pi}{4}$

الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

إذا كان $c = س + ص ت$ عددًا مركبًا مقياسه $ل$ وسعته الأساسية $θ$ حيث $θ \in [\pi, \pi]$ فإنه يكتب بالصورة $c = ل (جتا θ + ت جا θ)$ ويتحدد قياس $θ$ تبعًا للحالات الآتية:

أ $س < 0, ص < 0$ فإن $θ$ تقع في الربع الأول $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{ص}{س} \right)$

ب $س > 0, ص < 0$ فإن $θ$ تقع في الربع الثاني $\theta = \pi - \tan^{-1} \left(\frac{ص}{س} \right)$

ج $س > 0, ص > 0$ فإن $θ$ تقع في الربع الثالث $\theta = \pi + \tan^{-1} \left(\frac{ص}{س} \right)$

د $س < 0, ص > 0$ فإن $θ$ تقع في الربع الرابع $\theta = 2\pi - \tan^{-1} \left(\frac{ص}{س} \right)$

مثال

٢ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ $c = -3 - j$ ب $c = -1 - j$

الحل

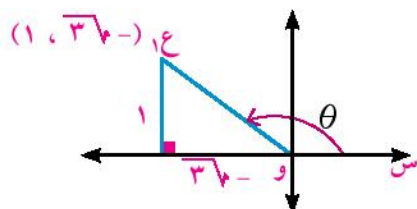
∴ صورة العدد المركب هي: $c = س + ص ت$ فإن:

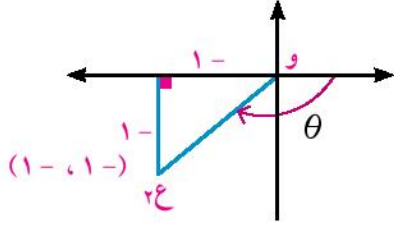
أ $س = -3, ص = -1$

∴ العدد c يقع في الربع الثاني

$$ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 2$$

$$\theta = \pi - \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$





ب) س = 1- ، ص = 1-

∴ العدد z يقع في الربع الثالث

$$\sqrt{2} = \sqrt{(1-)^2 + (1-)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} = 1$$

$$\frac{\pi -}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi - = \left(\frac{1-}{1-}\right)^{-1} \text{ ظا} + \pi - = \theta$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

ب) $z = 1 - \sqrt{3}i$

أ) $z = 1 + \sqrt{3}i$

د) $z = 5$

ج) $z = 3 - i$

تذكر أن

$$\frac{s\theta}{\pi} = \frac{\theta}{180}$$

ويستخدم هذا القانون للتحويل من قياس ستيني إلى قياس دائري والعكس.

خواص المقياس والسعة لعدد مركب

لكل عدد مركب $z = s + it$ وسعته θ يكون:

١) $|z| \geq 0$

٢) سعة العدد المركب تأخذ عددًا غير منتهٍ من القيم، وذلك بإضافة عدد صحيح من دورات 2π .

أي إن سعة العدد المركب تساوي $\theta + 2\pi n$ حيث n عدد صحيح.

٣) $|z| = |\bar{z}| = |z|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق العدد z

٤) $|z| = |\bar{z}| = |z|$

تفكير ناقدي: إذا كانت السعة الأساسية للعدد z هي θ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد $-z$ ، $\bar{z}$ ، $\frac{1}{z}$

مثال

٢ اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

د) $z = 2 - i$

أ) $z = 2 - \sqrt{3}i$

الحل

∴ صورة العدد المركب هي: $s + it$ لذلك فإن:

أ) $s = 2$ ، $t = -\sqrt{3}$

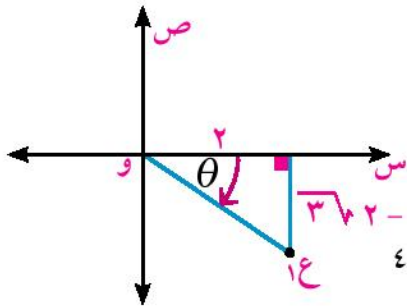
∴ z يقع في الربع الرابع

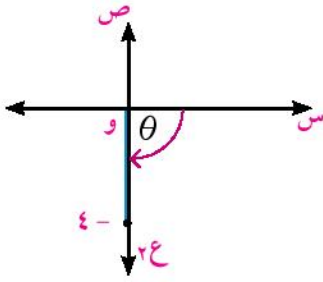
$$r = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} = 1$$

$$\theta = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \text{ ظا} = \frac{\pi -}{3}$$

∴ $z = 1 \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

$z = \left(\cos\left(\frac{\pi -}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi -}{3}\right)\right)$





ب) $\therefore \text{س} = 0, \text{ص} = -4$

$\therefore$ ع يقع على محور ص

$$4 = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16 + 0} = |4\text{ع}| = \text{ل}$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta \quad \text{ع} = 4 \quad \text{جنا} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{ت جا} \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

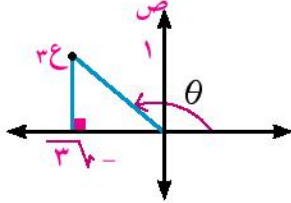
ج) $\text{ع} = 3 = \frac{\text{ت} - \sqrt{3}}{\text{ت} + \sqrt{3}} \times \frac{-4}{\text{ت} + \sqrt{3}} = \text{ع}$

س = $\sqrt{3}$ ، ص = 1 $\therefore$ ع تقع في الربع الثاني

$$2 = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = |2\text{ع}| = \text{ل}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pi + \text{ظا} = \theta$$

$$\text{ع} = 2 \quad \text{جنا} \left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{ت جا} \left(\frac{\pi}{6}\right)$$



تذكر أن

$1 = \text{جنا} 0 + \text{ت جا} 0$

$1 = \text{جنا} \pi + \text{ت جا} \pi$

$\text{ت} = \text{جنا} \frac{\pi}{2} + \text{ت جا} \frac{\pi}{2}$

$-\text{ت} = \text{جنا} \frac{3\pi}{2} + \text{ت جا} \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ ع يقع على محور س

د) $\therefore \text{س} = -3, \text{ص} = 0$

$$3 = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = |3\text{ع}| = \text{ل}$$

$$\pi = \theta \quad \text{ع} = 3 \quad \text{جنا} (\pi) + \text{ت جا} (\pi)$$

٦ حاول أن تحل

٣ اكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصورة المثلثية:

ج) $\text{ع} = 3 - 3j$

ب) $\text{ع} = 5j$

أ) $\text{ع} = 8$

مثال

٤ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد الآتية:

أ) $\text{ع} = 8 - j$ (جنا $45^\circ + \text{ت جا} 45^\circ$)

ب) $\text{ع} = 2 - j$ (جنا $\frac{\pi}{4} - \pi \frac{\pi}{4}$)

الحل

أ) $\text{ع} = 8 - j$ (جنا $45^\circ + \text{ت جا} 45^\circ$)

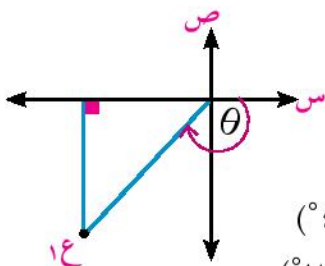
$8 = (\text{جنا} 45^\circ - \text{ت جا} 45^\circ)$

$\therefore$ س > صفر، ص > صفر $\therefore$ ع يقع في الربع الثالث

$\therefore \text{جنا} 45^\circ = \text{جنا} (45^\circ + 180^\circ)$ ، $\text{جا} 45^\circ = \text{جا} (45^\circ + 180^\circ)$

$\therefore \text{ع} = 8 - j = 8 (\text{جنا} 225^\circ + \text{ت جا} 225^\circ)$

$\therefore$ مقياس العدد $\text{ع} = 8$ ، السعة الأساسية $\theta = -135^\circ = \frac{3\pi}{4}$



تذكّر أن



$$\begin{aligned}\text{جا } \theta &= \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا} \\ \text{جا } -\theta &= \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا} \\ \text{جا } -\theta &= \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا} \\ \text{جا } \theta &= \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}\end{aligned}$$

ب) $2 = \left(\text{جا } \frac{\pi}{4} - \text{جتا } \frac{\pi}{4}\right)$

∴ $\theta < 0$ ، $\theta > 0$

$$\therefore \text{جا } \frac{\pi}{4} = \left(\text{جتا } \left(\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \text{جتا } \frac{\pi}{4}\right) = \left(\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{جتا } \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\text{جتا } \frac{\pi}{4} = \left(\text{جتا } \left(\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \text{جتا } \frac{\pi}{4}\right) = \left(\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{جتا } \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore 2 = \left(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{جتا } \frac{\pi}{4}\right)$$

∴ مقياس العدد $2 = \sqrt{2}$ ، السعة الأساسية $\frac{\pi}{4}$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $2 = \left(\text{جتا } \frac{\pi}{3} - \text{جتا } \frac{\pi}{3}\right)$ ب) $2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\text{جتا } 45^\circ - \text{جتا } 45^\circ\right)$

تعلم ٣



ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

multiplying and dividing complex numbers using the polar form

إذا كان $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$ فإن

(١) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$

(١) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2))$

أي إن $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ، $\angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2$

سعة $(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

(٢) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{\cos \theta_1 + j \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + j \sin \theta_2}\right)$

أي إن $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ، $\angle \frac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2$ ، سعة $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$

استعن بمعلمك لإثبات صحة العلاقات (١) ، (٢)

مثال

٥ عبّر عن $3(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12}) \times 4(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12})$ بالصورة $s + jt$

الحل

$$3(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12}) \times 4(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12})$$

$$= 12(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12}) = 12(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12})$$

$$= 12(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12}) = 12(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{جتا } \frac{\pi}{12})$$

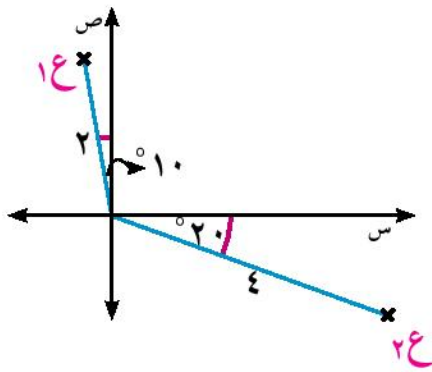
٤ حاول أن تحل

٥ عبر عن ٢ (جتا $\frac{\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{\pi}{٥}$) $\times$ (جتا $\frac{٢\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٥}$) بالصورة $س + ت ص$

مثال

٦ إذا كان $١ع$ ، $٢ع$ عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند كما بالشكل المقابل، أوجد على الصورة $س + ت ص$ العدد $\frac{٢ع}{١ع}$

الحل



من الرسم $١ع = ١$ ، $٢ع = ٢$ ، سعة $١ع = ١٠^\circ$ ، $٢ع = ٢٠^\circ$ ، $١٠٠^\circ = ١٠^\circ + ٩٠^\circ$

$$\therefore ١ع = ٢ (جتا ١٠٠^\circ + ت جا ١٠٠^\circ)$$

$$١ع = ٢ (جتا ٢٠^\circ + ت جا ٢٠^\circ)$$

$$\therefore ١ع = ٢ (جتا ٢٠^\circ + ت جا ٢٠^\circ)$$

$$\therefore \frac{١ع}{٢ع} = \frac{جتا ٢٠^\circ + ت جا ٢٠^\circ}{جتا ١٠٠^\circ + ت جا ١٠٠^\circ}$$

$$= \frac{جتا ٢٠^\circ + ت جا ٢٠^\circ}{جتا ١٠٠^\circ + ت جا ١٠٠^\circ}$$

$$= \frac{جتا ٢٠^\circ + ت جا ٢٠^\circ}{جتا ١٢٠^\circ + ت جا ١٢٠^\circ}$$

$$= \frac{جتا ٢٠^\circ + ت جا ٢٠^\circ}{-١ - ت}$$

٤ حاول أن تحل

٦ باستخدام مستوى أرجاند المقابل، أوجد $\frac{٢ع}{١ع}$ على الصورة $س + ت ص$

نتائج:

١ إذا كان $ع = ل (جتا θ + ت جا θ)$ فإن

$$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل} (جتا θ - ت جا θ)$$

$$(ب) ع^٢ = ل^٢ (جتا ٢θ + ت جا ٢θ)$$

٢ يمكن تعميم حاصل ضرب عدد محدود من الأعداد المركبة فإذا كان $١ع$ ، $٢ع$ ، ... عن أعداداً مركبة وكان:

$$١ع = ل (جتا $\theta_١$ + ت جا $\theta_١$) ، $٢ع = ل (جتا $\theta_٢$ + ت جا $\theta_٢$) ، ... ، $نع = ل (جتا θ_n + ت جا θ_n)$$$$

فإن: $١ع ٢ع ... نع = ل (جتا $(\theta_١ + \theta_٢ + \dots + \theta_n)$ + ت جا $(\theta_١ + \theta_٢ + \dots + \theta_n)$)$

وفي الحالة الخاصة عندما $١ع = ٢ع = \dots = نع = ل (جتا θ + ت جا θ)$ يكون:

$$عن = ل (جتا $n\theta$ + ت جا $n\theta$)$$

مثال

٧ ضع العدد $١ - ت$ على الصورة المثلثية، ثم أوجد $(١ - ت)^٨$

مثال

٨ اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية على الصورة الأسية (صورة أويلر):

أ) $١ + ت$ ب) $٢ - ١ - ٣٦$ ت ج) $٢ - ٣ + \frac{\pi}{٤} ت$ د) $٢ - ت$ ع) $٢ - ت$

الحل

∴ $١ = س$ ، $١ = ص$

أ) $١ + ت$

$٣٦ = \sqrt{١^2 + ١^2} = |١ + ت| = ل$

∴ $٠ < ص$ ، $٠ < س$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{١}{١}) = \frac{\pi}{٤}$

∴ $١ + ت$ يقع في الربع الأول

∴ $١ + ت = ل e^{i\theta} = ٣٦ e^{i\frac{\pi}{٤}}$

∴ $١ - ٣٦ = س$ ، $٣٦ = ص$

ب) $٢ - ١ - ٣٦$ ت

$٢ = \sqrt{(-٣٦)^2 + (-١)^2} = ل$

∴ $٠ < ص$ ، $٠ > س$

∴ $\theta = \tan^{-1}(\frac{-١}{-٣٦}) = \pi - \frac{\pi}{٣٦}$

∴ $٢ - ١ - ٣٦$ يقع في الربع الثاني

∴ $٢ - ١ - ٣٦ = ل e^{i\theta} = ٢ e^{i(\pi - \frac{\pi}{٣٦})}$

ويكون $ل = |٢ - ١ - ٣٦| = ٣٦$ ، $\frac{\pi}{٣٦} = سعة$

ج) $٢ - ٣ + \frac{\pi}{٤} ت$ هـ $٢ \times \frac{\pi}{٤} ت$

د) ∴ $٢ - ت$ هـ $٢ - ت$ ، $٠ = س$ ، $٢ - = ص$ ∴ $٢ = ل$ ، $٢ = \sqrt{(-٢)^2 + (٠)^2} = ل$

∴ $٢ - ت$ يقع على محور ص

∴ $٢ - = ص$ ، $٠ = س$

∴ $٢ - ت = ل e^{i\theta} = ٢ e^{i\frac{\pi}{٢}}$

∴ $\theta = \frac{\pi}{٢}$

٩ حاول أن تحل

٨ إذا كان $ع = \frac{٣٦ ت}{١ + ت}$ فاكتب العدد ع بالصورة الأسية.

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية.

إذا كان $ع١ = ل١ e^{i\theta١}$ ، $ع٢ = ل٢ e^{i\theta٢}$

فإن $ع١ ع٢ = ل١ ل٢ e^{i(\theta١ + \theta٢)}$ ، $ع١ ع٢ = ل١ ل٢ e^{i\theta١} e^{i\theta٢} = ل١ ل٢ e^{i(\theta١ + \theta٢)}$

$\frac{ع١}{ع٢} = \frac{ل١}{ل٢} e^{i(\theta١ - \theta٢)}$ ، $\frac{ع١}{ع٢} = \frac{ل١}{ل٢} e^{i(\theta١ - \theta٢)}$

مثال

٩ أوجد ناتج كل مما يأتي في الصورة الأسية:

أ) $٢ (جتا ٢٥ + ت جتا ٢٥) \times ٢ (جتا ١٥٨ - ت جتا ١٥٨)$ ب) $(\frac{١ + ت}{١ - ت})^٧$



الحل

أ) تحويل z إلى الصورة المثلثية القياسية كالآتي:

$$\therefore (\text{جا } ١٥٨^\circ - \text{ت جا } ١٥٨^\circ) = (\text{جا } (٩٠^\circ + ٦٨^\circ) - \text{ت جا } (٩٠^\circ + ٦٨^\circ)) = \text{جتا } ٦٨^\circ + \text{ت جا } ٦٨^\circ$$

$$\therefore ٣ (\text{جتا } ٢٥^\circ + \text{ت جا } ٢٥^\circ) \times ٢ (\text{جتا } ٦٨^\circ + \text{ت جا } ٦٨^\circ)$$

$$= ٦ (\text{جتا } (٢٥^\circ + ٦٨^\circ) + \text{ت جا } (٢٥^\circ + ٦٨^\circ))$$

$$= ٦ (\text{جتا } ٩٣^\circ + \text{ت جا } ٩٣^\circ) = ٦ \text{ هـ } ١,٦٢$$

ب) $١ + \text{ت} = \sqrt{٣} (\text{جتا } ٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ)$

$$١ - \text{ت} = \sqrt{٣} (\text{جتا } (-٤٥^\circ) + \text{ت جا } (-٤٥^\circ))$$

$$\therefore \left(\frac{١ + \text{ت}}{١ - \text{ت}} \right) = \left(\frac{\text{جتا } ٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ}{\text{جتا } (-٤٥^\circ) + \text{ت جا } (-٤٥^\circ)} \right)$$

$$= \frac{\text{جتا } ٩٠^\circ + \text{ت جا } ٩٠^\circ}{\text{جتا } ٩٠^\circ - \text{ت جا } ٩٠^\circ} = \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٢}$$

$$\therefore \left(\frac{١ + \text{ت}}{١ - \text{ت}} \right) = \left(\text{جتا } \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٢} \right) = \text{جتا } \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٢}$$

$$= \left(\frac{\pi}{٢} - \text{ت} \right) \text{ هـ } \frac{\pi}{٢}$$

٩) حاول أن تحل

٩) إذا كان $z = ١ - \sqrt{٣} \text{ت} + \text{ت} = ٢ \text{ع} + ١ + \text{ت}$ ، أوجد كلاً مما يأتي في الصورة المثلثية:

ج) $(٢ \text{ع})^٦$

ب) $\frac{٢ \text{ع}}{١ \text{ع}}$

أ) $٢ \text{ع} + ١ \text{ع}$

مثال

١٠) عبر عن $z = \sqrt{٣} \text{هـ} - \frac{\pi}{٤} \text{ت}$ بالصورة الجبرية $s + ص \text{ت حيث } s$ ، $ص \exists \text{ ح}$

الحل

$$\therefore z = \sqrt{٣} \text{هـ} - \frac{\pi}{٤} \text{ت} = |z| = \sqrt{٣} = |z| = \sqrt{٣} \text{هـ} - \frac{\pi}{٤} \text{ت} = \theta = \frac{\pi}{٤}$$

$$\therefore z = \sqrt{٣} (\text{جتا } \frac{\pi}{٤} - \text{ت جا } \frac{\pi}{٤})$$

$$= \sqrt{٣} \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \text{ت} \right)$$

$$= ١ + \text{ت}$$

٩) حاول أن تحل

١٠) عبر عن $z = ٨ \text{هـ} - \frac{\pi}{٦} \text{ت}$ بالصورة الجبرية $s + ص \text{ت حيث } s$ ، $ص \exists \text{ ح}$

لاحظ أن



$$\frac{s\theta}{\pi} = \frac{٩٣}{١٨٠}$$

أي أن: $s\theta = \frac{٩٣}{١٨٠} \times \pi$
 $\theta \approx ١,٦٢$

لاحظ أن



جتا $\frac{\pi}{٤} = ١٣٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$
 جا $\frac{\pi}{٤} = ١٣٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$



تمارين (١ - ٢)



اكمل ما يأتي

- ١ العدد $ع = ٣ - ٤$ يُمثَّل على شكل أرجاند بالنقطة أ حيث $أ = (.....,$)
- ٢ إذا كانت نقطة أ تمثل العدد $ع$ على مستوى أرجاند، ب تمثل العدد $\overline{ع}$ على مستوى أرجاند، فإن ب صورة أ بالانعكاس في
- ٣ مقياس العدد المركب $ع = ٥ - ٥$ ت يساوي
- ٤ إذا كان $ع = \frac{٢ - ٢}{ت + ٢}$ فإن $|ع| =$
- ٥ إذا كانت θ هي السعة الأساسية للعدد المركب $ع$ فإن سعة $\overline{ع}$ هي
- ٦ إذا كان $ع = \frac{١}{ع}$ فإن $|ع| =$
- ٧ الصورة الأسية للعدد $-١ + ت$ هي
- ٨ إذا كان $ع = ١ + ٣٦٠$ ت فإن السعة الأساسية للعدد $(١ + ٣٦٠ ت)^٨$ هي
- ٩ الصورة المثلثية للعدد $ع = ٢ - ٢٣٦٠$ ت هي
- ١٠ إذا كانت سعة العدد المركب $ع$ هي θ فإن سعة العدد المركب $ع^٢$ هي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١١ إذا كان $ع = ٣٦٠$ (جا $٣٠^\circ +$ ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد $ع$ تساوي

أ ٣٠°	ب ٦٠°	ج ٩٠°	د ١٢٠°
--------------	--------------	--------------	---------------
- ١٢ إذا كان $ع = (١ + ٣٦٠ ت)^٨$ و كان $|ع| = ٨$ فإن السعة الأساسية للعدد $ع$ تساوي

أ $\frac{\pi}{٤}$	ب $\frac{\pi}{٣}$	ج $\frac{\pi}{٦}$	د π
-------------------	-------------------	-------------------	---------
- ١٣ إذا كان $ع = ١$ ، $ل = (جتا $\theta +$ ت جا $\theta)$ ، $ع = ٢$ ، $ل = (جتا $\theta +$ ت جا $\theta)$ وكان $\theta = \pi$ فإن $ع = ٢$

أ $ل = ٢$	ب $ل = ٢$	ج $ل = ٢$	د $ل = ٢$
-----------	-----------	-----------	-----------
- ١٤ سعة العدد المركب $ع = ٣ - ٣$ تساوي

أ صفر	ب ٩٠°	ج ١٨٠°	د ٢٧٠°
-------	--------------	---------------	---------------
- ١٥ إذا كان $ع = ١ - ٣٦٠$ ت فإن $|ع| =$

أ $١ - ٣٦٠$	ب ٣٦٠	ج ٢	د $٢ -$
-------------	---------	-------	---------

١٦ إذا كان $z = 1 - i$ فإن الصورة الأسية للعدد z هي

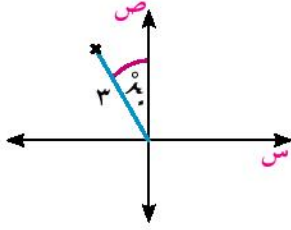
- أ $e^{-\frac{\pi i}{4}}$ ب $e^{-\frac{\pi i}{2}}$ ج $e^{-\frac{\pi i}{4}}$ د $e^{-\frac{\pi i}{2}}$

١٧ إذا كان $z = 1 + 2i$ فإن سعة العدد z هي

- أ 60° ب 240° ج 180° د 300°

١٨ إذا كان $z = 1 + i$ فإن $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i}$ هي

- أ $1 + i$ ب $1 - i$ ج $1 + 2i$ د $1 - 2i$



١٩ الشكل المقابل يمثل العدد المركب

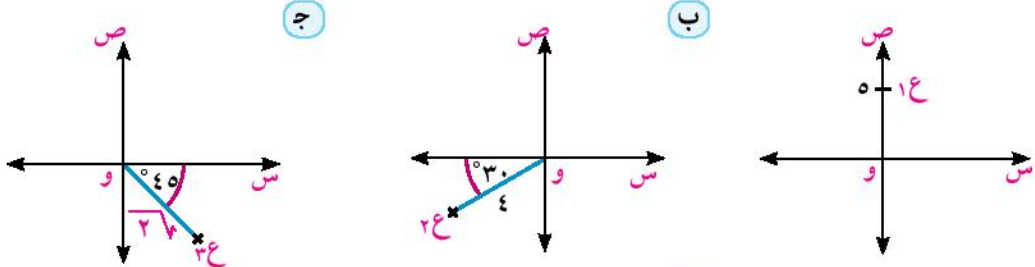
- أ $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
ب $2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
ج $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$
د $2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

٢٠ إذا كان z عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{1}{z}$ هي

- أ θ ب $\theta - \pi$ ج $\theta - \pi$ د $\theta + \pi$

أجب عما يأتي:

٢١ اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:



- أ $z = 1 + i$ ب $z = 1 - i$ ج $z = 1 + 2i$ د $z = 1 - 2i$

٢٢ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

- أ $z = 1 + i$ ب $z = 1 - i$ ج $z = 1 + 2i$ د $z = 1 - 2i$

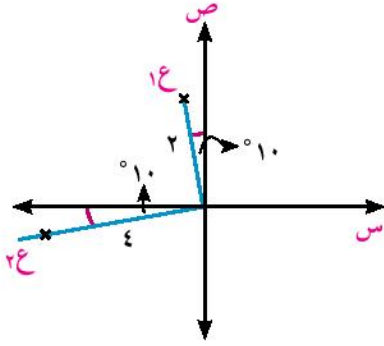
٢٣ إذا كان $z = 1 + j \cos 114^\circ + j \sin 114^\circ$ ، $z = 2 \cos 42^\circ + j \sin 42^\circ$ ، $z = 138^\circ$

$z = 24^\circ + j \cos 114^\circ$ ، أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{24}{2}$

٢٤ إذا كان $z = 1 + j \cos 70^\circ + j \sin 70^\circ$ ، $z = 4 \cos 10^\circ + j \sin 10^\circ$ ، أوجد على الصورة الأسية العدد:

$$\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

٢٥ في الشكل المقابل أوجد على الصورة الأسية العدد: $\frac{1}{2}$



٢٦ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية:

أ $z = 1 - j \frac{\pi}{3}$

ب $z = 2 - j \frac{\pi^2}{4}$

ج $z = 3 - j \frac{\pi}{6}$

٢٧ إذا كان $z = 2 \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}$ أثبت أن $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - j \frac{\pi}{3}$

٢٨ إذا كان $z = 3 - j \frac{\pi}{4}$ ، أوجد بالصورة الجبرية z^6

٢٩ إذا كان $z = \frac{(b+1) + j(b-1)}{(b-1) - j(b+1)}$ فأوجد العدد z في أبسط صورة ثم أوجد $|z|$ حيث $a, b \in \mathbb{C}$

٣٠ **تفكير إبداعي:** إذا كان $z = 1 + j \cos 70^\circ + j \sin 70^\circ$ ، $z = 2 \cos 10^\circ + j \sin 10^\circ$ ، أوجد بالصورة المثلثية للعدد: $z + z^2$

٣١ إذا كان سعة $z = 1$ ، $z = \frac{\pi}{4}$ ، وسعة $z = 2$ ، $z = \frac{\pi}{4}$ ، سعة $z = 3$ ، $z = \frac{\pi}{4}$ أوجد:

أ سعة $(z_1 z_2)$ ب سعة $(z_1 \cdot z_2)$ ج سعة $(\frac{z_1 z_2}{z_3})$ د سعة (z_1^2)

٣٢ **تفكير إبداعي:** أثبت أن $\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ ، $\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

De Moivre's theorem

فكر و ناقش



- أ إذا كان n عددًا مركبًا مقياسه n ، وسعته الأساسية θ فأوجد:
- (١) مقياس العدد n^3 (٢) سعة العدد n^3
- ب إذا كان n عددًا مركبًا، وكان السعة الأساسية للعدد n^3 هي θ فإن السعة الأساسية للعدد n هي

تعلم



سوف تتعلم

- نظرية ديموافر لأس صحيح موجب.
- نظرية ديموافر لأس نسبي موجب.
- جذور العدد المركب.
- تمثيل جذور العدد المركب على شكل أرجاند.

نظرية ديموافر بأس صحيح

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا

فإن $(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta$

مثال



١ عبر عن $\cos 3\theta$ بدلالة قوى $\cos \theta$

الحل

$$\therefore (\cos \theta + j \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + j \sin 3\theta \quad (1) \text{ نظرية ديموافر}$$

$$\text{أيضاً } (\cos \theta + j \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3j \cos^2 \theta \sin \theta + 3j^2 \cos \theta \sin^2 \theta + j^3 \sin^3 \theta$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + j(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \quad (2) \text{ نظرية ذات الحدين}$$

$$\therefore \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad (3)$$

من (١)، (٢) بمساواة الجزء الحقيقي

$$\therefore \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \therefore 1 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\therefore \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

٤ حاول أن تحل

١ عبر عن $\cos 3\theta$ بدلالة قوى $\cos \theta$

مصطلحات أساسية

- نظرية ديموافر $\cos \theta + j \sin \theta$
- جذر $\cos \theta + j \sin \theta$

نظرية ديموافر بأس نسبي موجب

نعلم أن جتا θ + ت جا θ = جتا $(\pi ر^2 + \theta)$ + ت جا $(\pi ر^2 + \theta)$ ؛ حيث $ر$ عدد صحيح.

فإذا كان $ك$ عددًا موجبًا فإن (جتا θ + ت جا θ) $\neq$ جتا $\frac{\pi ر^2 + \theta}{ك}$ + ت جا $\frac{\pi ر^2 + \theta}{ك}$

أي إن مقدار (جتا θ + ت جا θ) $\neq$ يأخذ قيمًا متعددة تبعًا لقيم $ر$ ، ويكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي $ك$ من القيم، التي نحصل عليها بوضع قيم $ر = ٠, ١, ٢, \dots$ التي تجعل السعة $\frac{\pi ر^2 + \theta}{ك}$ محصورة بين $-\pi, \pi$.

مثال

٢ أوجد بالصورة المثلثية وبالصورة الأسية جذور المعادلة الآتية في $ك$ ع $٨ = (١ - \sqrt{٣})$ ثم اكتب مجموعة حل المعادلة.

الحل

$$\therefore ع^٤ = ٨ - \sqrt{٣} \quad \therefore س = ٨, ص = -٨ - \sqrt{٣}$$

$$ل = \sqrt[٤]{٨ - \sqrt{٣}} = \sqrt[٤]{٢(٨ - \sqrt{٣})} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢, \quad \theta = \frac{٨ - \sqrt{٣}}{٢} = \frac{٨ - \sqrt{٣}}{٢}$$

$$\therefore س < ٠, ص > ٠ \quad \therefore ع^٤ \text{ تقع في الربع الرابع}$$

$$\theta = \frac{\pi}{٣} = (٨ - \sqrt{٣})$$

$$\therefore ع^٤ = ١٦ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$$

$$\therefore ع = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}) \quad \therefore ع = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$$

$$\text{عندما } ر = ٠ \quad \text{فإن } ع = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}) \quad \text{ع} = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$$

$$\text{عندما } ر = ١ \quad \text{فإن } ع = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}) \quad \text{ع} = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$$

$$\text{عندما } ر = -١ \quad \text{فإن } ع = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}) \quad \text{ع} = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$$

$$\text{عندما } ر = ٢ \quad \text{فإن } ع = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}) \quad \text{ع} = ٢ = (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{٢هـ \frac{\pi}{٣} ت, ٢هـ \frac{\pi}{٣} ت, ٢هـ \frac{\pi}{٣} ت, ٢هـ \frac{\pi}{٣} ت\}$$

٦ حاول أن تحل

٢ أوجد في $ك$ مجموعة حل المعادلة $ع^٤ = ٢ + ٢\sqrt{٣}$

مثال

٣ أوجد جذور المعادلة $ع^٣ = ١$ ، ومثل الجذور على مستوى أرجاند.

الحل

$$ع^٣ = ١$$

$$= \text{جتا } ٠^\circ + ت جا ٠^\circ$$

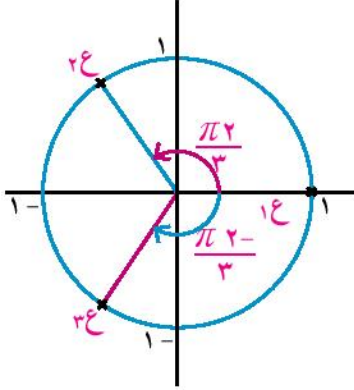
$$\therefore ع = (جتا ٠^\circ + ت جا ٠^\circ)$$

$$= \text{جتا } \frac{1}{3} (\pi/2) + \text{ت جا } \frac{1}{3} (\pi/2)$$

$$\text{عندما } r = 0 \text{ فإن } 1 = \text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0$$

$$\text{عندما } r = 1 \text{ فإن } 2 = \text{جتا } \frac{\pi/2}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi/2}{3}$$

$$\text{عندما } r = -1 \text{ فإن } -2 = \text{جتا } \frac{\pi/2}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi/2}{3}$$



نلاحظ أن الجذور تقسم الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها الوحدة إلى 3 أقواس متساوية، وقياس كل منها 120° (إحداثيات النقط تكون رؤوس مثلث متساوي الأضلاع).

٣ حاول أن تحل

٣ أوجد جذور المعادلة $z^3 = 1$ ومثل الجذور على مستوى أرجاند.

الجذور النونية

المعادلة $z^n = 1$ حيث n عدد مركب يكون لها n من الجذور على الصورة $z = e^{i\theta}$.

يمكن حسابها بإيجاد الصورة المثلثية للعدد 1 ثم تطبيق نظرية دي موافر، وتقع الجذور جميعاً في مستوى أرجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 1 . وتكون رؤوس مضلعاً منتظماً، عدد أضلاعه n .

مثال

(الجذور الخماسية للعدد - 32)

٤ مثل على شكل أرجاند الجذور الخماسية للعدد - 32

الحل

الجذور الخماسية للعدد - 32 هي حلول المعادلة $z^5 = -32$

وبتحويل العدد - 32 إلى الصورة المثلثية.

$$\therefore -32 = 32 (\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi)$$

$$\therefore z^5 = 32 (\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi)$$

$$2 = (\text{جتا } \frac{\pi}{5} + \text{ت جا } \frac{\pi}{5}) (\pi/2 + \pi)$$

نوجد الجذر الأول وذلك بوضع $r = \text{صفر}$

$$\therefore z = 2 (\text{جتا } \frac{\pi}{5} + \text{ت جا } \frac{\pi}{5}) = 2 (\text{جتا } 36^\circ + \text{ت جا } 36^\circ)$$

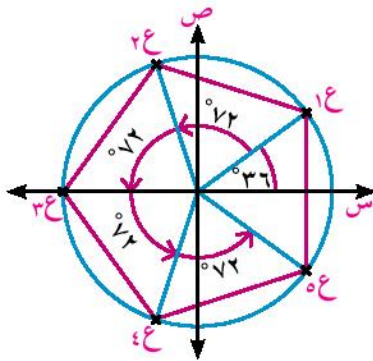
وتكون قياس الزاوية بين كل جذر والآخر يليه هي $\frac{360}{5} = 72^\circ$

$$z^5 = 2 (\text{جتا } (36^\circ + 72^\circ) + \text{ت جا } (36^\circ + 72^\circ)) = 2 (\text{جتا } 108^\circ + \text{ت جا } 108^\circ)$$

$$z^5 = 2 (\text{جتا } (36^\circ + 72^\circ \times 2) + \text{ت جا } (36^\circ + 72^\circ \times 2)) = 2 (\text{جتا } 180^\circ + \text{ت جا } 180^\circ)$$

$$z^5 = 2 (\text{جتا } (36^\circ + 72^\circ \times 3) + \text{ت جا } (36^\circ + 72^\circ \times 3)) = 2 (\text{جتا } 252^\circ + \text{ت جا } 252^\circ)$$

$$z^5 = 2 (\text{جتا } (-108^\circ) + \text{ت جا } (-108^\circ))$$



$$\begin{aligned} ٥ع. ٢ = (جتا ٣٦^\circ \times ٤ + ٧٢^\circ) + ت جا (٣٦^\circ \times ٤ + ٧٢^\circ) &= ٢ (جتا ٣٢٤^\circ + ت جا ٣٢٤^\circ) \\ ٢ = (جتا ٣٦^\circ - ت جا ٣٦^\circ) &= \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٤ مثل على شكل أركان الجذور السداسية للعدد ١

مثال

٥ أوجد الجذور التربيعية للعدد ٤ + ٣ ت

الحل

نفرض أن $(٣ + ٤ت) = \sqrt[٢]{٣ + ٤ت}$ = س + ص ت بتربيع الطرفين

$$\therefore ٣ + ٤ت = س^٢ - ٢س ص + ٤ص ت$$

بمساواة الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالجزء التخيلي

بتربيع (١)، (٢) والجمع

$$\therefore س^٢ - ٢س ص + ٤ص ت = ٣ - ٢س ص + ٤ص ت \quad \therefore ١٦ + ٩ = ٢س^٢ \quad \therefore س^٢ = ١٢.٥$$

$$\therefore (س + ٢ص) = ٢٥ \quad \therefore (س + ٢ص) = ٥ \quad (٣)$$

بجمع (١)، (٣) $٢س^٢ = ٨$ ومنها ٢ ± ٢ عند س = ٢ بالتعويض في (٢) $١ = ص$

عند س = ٢ بالتعويض في (٢) $١ = ص$

$\therefore$ الجذر الأول = ٢ + ت $\therefore$ الجذر الثاني = ٢ - ت

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد الجذور التربيعين للعدد ٧ - ٢٤ ت

مثال

٦ أوجد في ك مجموعة حل المعادلة $(١ - ت) س^٢ - (٦ - ٤ت) س + ٧ - ٩ت = ٠$

الحل

يمكن وضع المعادلة على الصورة:

$$س^٢ - \frac{٤-٦}{١-٢} س + \frac{٧-٩}{١-٢} ت = ٠$$

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$س = \frac{-(٣-٢ت) \pm \sqrt{(٣-٢ت)^٢ - ٤(١-٢)(٧-٩ت)}}{٢}$$

$$س = \frac{-(٣-٢ت) \pm \sqrt{٩-١٢ت+٤ت^٢-٤(١-٢)(٧-٩ت)}}{٢}$$

$$س = \frac{-(٣-٢ت) \pm \sqrt{٦+٨-٢٤ت+٣٦-٣٢ت+١٠+٢٤ت}}{٢}$$

نفرض أن $١ + ب ت = \sqrt{٦+٨-٢٤ت+٣٦-٣٢ت+١٠+٢٤ت}$ بتربيع الطرفين

$$١ - ب^٢ + ٢ = ب ت - ٦ + ٨ =$$

$$١ - ب^٢ = ٨ - (١) \quad ٢ = ب^٢ - ٦ (٢)$$

$$١٠ = ب^٢ + ٢ (٣) \quad \text{من (١)، (٣)} \quad ١ = ٢ \quad ١ \pm ١ = ٠ \quad \therefore ب = \pm ٣$$

$$\therefore ب + ب ت = \pm (١ + ٣ ت)$$

$$\therefore س = \frac{٥ ت + \pm (٣ + ١ ت)}{٢} \quad س = ٣ + ٢ ت \quad \text{أو} \quad س = -٢ - ت$$

٤ حاول أن تحل

٦ أوجد في ك مجموعة حل المعادلة $س^٢ + (١ + ت) س - ٦ + ٣ = ٠$

تمارين (٢ - ٢)

١ باستخدام نظرية ديموافر أثبت صحة المتطابقات الآتية:

$$\text{أ} \quad \text{جتا } ٨ = \theta \quad \text{جتا } ٨ - \theta = \text{جتا } ٨ + \theta^٢ \quad \text{ب} \quad \text{جا } ١٦ = \theta \quad \text{جا } ٢٠ - \theta = \text{جا } ٢٠ + \theta^٣ \quad \text{جا } ٥ = \theta$$

٢ أوجد في ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية: اكتب الجذور على صورة $س + ص ت$:

$$\text{أ} \quad ١٦ = ع^٤ \quad \text{ب} \quad ٠ = ٨ + ع^٣ \quad \text{ج} \quad ٠ = ٨ + ت^٣$$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^٥ + ٢٤٣ = ٠$ حيث $ع \in \mathbb{C}$

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^٤ = ٢ + ٣\sqrt{٢} ت$. اكتب الحل على الصورة الأسية.

٥ أوجد الجذور التريعية لكل من:

$$\text{أ} \quad ٢ - ٢\sqrt{٣} ت \quad \text{ب} \quad ١ - ت \quad \text{ج} \quad ٨ ت$$

$$\text{د} \quad ٤ + ٣ ت \quad \text{هـ} \quad ١٢ - ٥ ت$$

٦ أوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

٧ أوجد الجذور الرابعة للعدد -١ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

٨ إذا كان $\frac{١١ - ٧ ت}{٤ + ت} = ١ + ب ت$ ، أوجد قيم المقدار $(١ + \sqrt{٢} ب + ت)^{\frac{٢}{٣}}$

٩ ضع العدد $٢\sqrt{٢} (١ + ت)$ على الصورة المثلثية، ثم أوجد جذوره التريعية على الصورة الأسية.

١٠ إذا كان $ع = ٨ - ٦ ت$ أوجد $ع^{\frac{٢}{٣}}$ على الصورة الجبرية.

١١ **تفكير إبداعي:** أثبت أن $\text{جتا } \theta = \frac{١}{٨} (\text{جتا } ٤ + \theta + \text{جتا } ٢ + \theta^٣)$

Cubic roots of unity

عمل تعاوني :

باستخدام نظرية ديموافر أوجد مجموعة حل المعادلة $x^3 = 1$
أوجد الجذور السابقة بالصورة الجبرية.
أوجد مجموع الجذور الثلاثة . ماذا تلاحظ ؟

تعلم



سوف تتعلم

- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- تمثيل الجذور التكعيبية للواحد هندسيًا
- مرافق الأعداد ω ، ω^2

Cubic roots of unity

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

باستخدام نظرية ديموافر نجد أن: مجموعة حل المعادلة $x^3 = 1$ هي:
 $1, \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ونلاحظ أن مربع أحد الجذرين المركبين يساوي الجذر الآخر؛

ولذلك يمكن أن نفرض الجذور التكعيبية على الصورة $1, \omega, \omega^2$

حيث $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

تفكير ناقدي :

هل يمكنك إيجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح باستخدام الصورة الجبرية للعدد المركب؟

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

إذا كانت $1, \omega, \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

$$1 - \omega + \omega^2 = 0 \quad (\text{مجموع الجذور} = \text{صفر})$$

$$(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega) = 0, (1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) = 0$$

$$1 - \omega + \omega^2 = 0$$

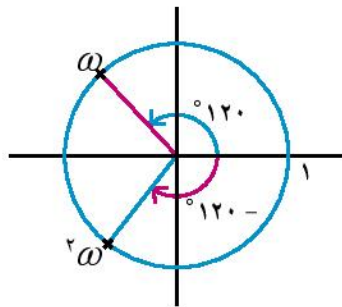
$$\left(\omega = \frac{1}{\omega^2}, \omega^2 = \frac{1}{\omega} \right)$$

٣- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع

على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول

نصف قطرها ١ وتكوّن رؤوس مثلث

متساوي الأضلاع.



$$-4 \quad \omega^3 = 1, \omega^6 = 1, \omega^9 = 1, \dots$$

مصطلحات أساسية

Root	جذر
Square root	جذر تربيعي
Cubic root	جذر تكعيبي
Unit circle	دائرة الوحدة
Conjugate	مرافق

الأدوات المستخدمة

Scientific calculator	آلة حاسبة علمية
Graphical programs	برامج رسومية

مثال

- ١ إذا كانت $1, \omega, \omega^2$ ، هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة كل من:
- أ $\omega^5 + \omega + 5$ ب $(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega} - 1)(\omega^5 + \omega + 3)$

الحل

أ المقدار $5 = (\omega^2 + \omega + 1)$ بأخذ العدد 5 عامل مشترك

$$= 5 \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

ب المقدار $(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega} - 1)(\omega^5 + \omega + 3)$ بالتعويض عن $\omega = \frac{1}{\omega^2}, \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

$$((\omega^2 + \omega) + 3)((\omega + \omega^2) - 1) = (\omega^5 + \omega + 3)(\omega^2 - \omega - 1) =$$

$$6 = (5 - 3)(2 + 1) = ((1 - 5) + 3)((1 - 2) - 1) =$$

حاول أن تحل

- ١ إذا كانت $1, \omega, \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة:
- أ $(\omega^2 + \omega + 2)^5$ ب $(\frac{1}{\omega} + \omega)^2(\frac{1}{\omega} + \omega)$

مثال

٢ أثبت أن $9 = \left[\frac{\omega^7 - 2}{7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - 5}{3 - \omega} \right]$

الحل

$$\text{المقدار} = \left[\frac{\omega^7 - 2}{7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - 5}{3 - \omega} \right] = \left[\frac{\omega^7 - 2}{7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - 5}{3 - \omega} \right]$$

$$9 = \left[\frac{\omega^7 - 2}{7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - 5}{3 - \omega} \right] = \left[\frac{(\omega^7 - 2)\omega}{7 - \omega^2} - \frac{(\omega^3 - 5)\omega}{3 - \omega} \right] =$$

حاول أن تحل

٢ أثبت أن $81 = \left[\frac{\omega^2 + \omega + 1}{1 + \omega^2 + \omega} - \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2 + \omega + 1} \right]$

مثال

٢ أثبت أن $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو أحد حلول المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$ س

الحل

$$\therefore \text{س} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

أي إن س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح

$$\text{عندما س} = \omega \quad \text{فإن } \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \text{عندما س} = \omega^2 \quad \text{فإن } \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

٤ حاول أن تحل

٣ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(\omega - \omega + 1)$ ، $(\omega + \omega - 1)$

تمارين (٢ - ٣)

إذا كان ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

أكمل ما يأتي :

١ $\dots\dots\dots = (\omega^2 + \omega + 1)$

٢ $\dots\dots\dots = (\omega^2 - \omega)$

٣ $\dots\dots\dots = (\frac{1}{\omega} + \omega)(\frac{1}{\omega} + \omega)$

٤ إذا كان $\omega^3 = 1$ فإن $\omega^2 + \omega + 1 = \dots\dots\dots$

٥ $\dots\dots\dots = (\frac{1}{\omega} - \omega + 1)(\frac{1}{\omega} - \omega + 1)$

٦ $\dots\dots\dots = \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$

٧ إذا كان $\omega^3 = 1$ ، $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ فإن $\omega^2 + \omega + 1 = \dots\dots\dots$

٨ $\dots\dots\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٩ مرافق العدد ω يساوي

ب ω^2

أ ω

د $\omega - 1$

ج ١

١٠ $\dots\dots\dots = (\frac{1}{\omega} + 1)(\frac{1}{\omega} + \omega)$

ب صفر

أ ٢

د ٥

ج ٣

١١ $\dots\dots\dots = (\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)$

ب ١ - ب

أ ١

د $\omega^2 - 1$

ج $(\omega - 1)^2$

$$12) = \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 1\right) \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 1\right)$$

ب ١

أ صفر

د ٢

ج ١ -

$$13) = \omega^2 - \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - \omega}$$

ب $\pm \sqrt{3} \omega$ ت

أ ٣ ت

د ٢

ج ٢ -

$$14) \text{ إذا كان } (1 + \omega)^3 = 1 + \omega + \omega^2 \text{ حيث } \omega \text{ عددان حقيقيان فإن } (1, \omega) =$$

ب (١, ١)

أ (١, ٠)

د (١, ١ -)

ج (١, ٠)

$$15) \text{ إذا كان } (1 + \omega)^3 = 1 + \omega + \omega^2 \text{ فإن أقل قيمة لـ } n \text{ الصحيحة الموجبة هي}$$

ب ٣

أ ٢

د ٦

ج ٥

$$16) = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{11}$$

ب ١

أ صفر

د ω^2

ج ω

$$17) \text{ إذا كان } \omega^3 = 1 \text{ فإن } |1 + \omega + \omega^2| = \dots \text{ حيث } \omega \text{ عدد صحيح موجب}$$

ب ω

أ ١

د ω^2

ج ٣

$$18) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$$

ب ٦

أ صفر

د $\omega + 1$

ج ١

$$19) \text{ أثبت صحة المتطابقات الآتية:}$$

$$1) (1 + \omega + \omega^2)(1 + \omega^2 + \omega^4)(1 + \omega^4 + \omega^8)(1 + \omega^8 + \omega^{16}) = 1$$

$$2) \frac{1}{\omega^3} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2 + 1}{\omega} \right) + \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$$

$$3) 16 = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{\omega + 1}{\omega^2 + 1} - \frac{1}{\omega + 1} \right]$$

$$4) 3 = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{\omega^7 - 2}{\omega^7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - 5}{\omega^3 - 5} \right]$$

$$\text{هـ) } {}^2\omega = {}^1({}^2\omega + 1)$$

$$\text{و) } \omega\epsilon = {}^2({}^4\omega + {}^2\omega + 1) + {}^2({}^4\omega + {}^2\omega - 1)$$

٢٠) أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$\text{أ) } {}^2\omega^3 + \omega^3 + ٥$$

$$\text{ب) } {}^2({}^2\omega + \omega^2 + 1) + {}^2({}^2\omega^2 + \omega + 1)$$

$$\text{ج) } \frac{(1 - {}^2\omega)(1 - \omega){}^2\omega}{(2 + {}^2\omega)(1 + \omega^2)}$$

$$\text{د) } {}^2\left[\frac{1}{\omega^3 + 1} - \frac{1}{{}^2\omega^3 + 1}\right]$$

$$\text{هـ) } (ت + \frac{1}{{}^2\omega} + 1)(ت + \frac{1}{\omega} + 1)$$

$$\text{٢١) إذا كان س = } \frac{{}^3\sqrt{١-ت}}{٢} \text{ أثبت أن س}^٦ + \text{س}^٥ + ١٥\text{س}^٤ + ٢٠\text{س}^٣ + ١٥\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١ = ٠.$$

$$\text{٢٢) إذا كان } \frac{1}{\omega + 1}, \frac{1}{{}^2\omega + 1} \text{ هما جذرا معادلة تربيعية، فأوجد المعادلة.}$$

$$\text{٢٣) إذا كان ع = } (٢ + \omega)(ت + {}^2\omega) \text{ أوجد الصور المختلفة للعدد ع، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد}$$

ع في الصورة المثلثية.

$$\text{٢٤) تفكير ابداعى: أوجد قيم ن التى تجعل } (٢ + \omega^٥ + \omega^٢ + {}^2\omega) = (٢ + \omega^٢ + \omega^٥ + {}^2\omega) \text{ ن}$$

$$\text{ب) } \sum_{\text{صفر}} ({}^2\omega + \omega + 1)$$

$$\text{٢٥) أوجد: أ) } \sum_{\text{صفر}} {}^2\omega$$

الهندسة الفراغية

الوحدة الثالثة

الهندسة والقياس في بعدين وثلاثة أبعاد

Geometry Measurement in two and three dimensions

مقدمة الوحدة

الهندسة هي علم دراسة مختلف أنواع الأشكال وصفاتها، كما أنها دراسة علاقة الأشكال والزوايا والمسافات ببعضها وتنقسم إلى جزأين: الهندسة المستوية: وتختص بدراسة الأشكال الهندسية التي لها بعدين فقط، الهندسة الفراغية (الفضاء): وتختص بدراسة المجسمات التي لها ثلاثة أبعاد (طول، عرض، ارتفاع) وتتعامل مع فراغات مثل متوازي المستطيلات، والمجسمات الأسطوانية، والأجسام المخروطية والكروية. وأول من استخدم الهندسة هم الأغريق واكتشف طاليس اثباتات لبعض النظريات ثم جمع أقليدس بعد ذلك كل النتائج الهندسية ونظمها في كتاب أطلق عليه المبادئ ثم تطورت بعد ذلك إلى الهندسة التحليلية وهندسة المثلثات وهندسة منكوفسكي (ذات الأربعة أبعاد) والهندسة اللا إقليدية، وغيرها وفي هذه الوحدة سوف نتناول استخدام المتجهات في دراسة المستقيمت والمستويات والعلاقة بينهما في ثلاثة أبعاد.

أهداف الوحدة

في نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:

- ✚ يتعرف النظام الإحداثي ذي الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه في الفراغ.
- ✚ يوجد المسافة بين نقطتين في الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفراغ.
- ✚ يتعرف على المتجهات في الفراغ من خلال:
 - ◀ تمثيل المتجه بثلاثي مرتب.
 - ◀ متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ، $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ، $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$
 - ◀ التعبير عن أي متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ ، $\vec{e}_3$
- ✚ يتعرف خواص حاصل الضرب القياسي والاتجاهي لمتجهين في المستوى والفراغ.
- ✚ يتعرف الزاوية بين متجهين في الفراغ.
- ✚ يتعرف تعامد متجهين فالفراغ.
- ✚ يحدد زوايا الاتجاه وجيوب تمامالاتجاه لمتجه في الفراغ.
- ✚ يستخدم حاصل الضرب القياسي لإيجاد المركبة الجبرية والاتجاهية لمتجه في اتجاه متجه آخر
- ✚ يتعرف المعنى الهندسي لمعيار الضرب الاتجاهي.
- ✚ يتعرف حاصل ضرب الثلاثي القياسي والمعنى الهندسي له.
- ✚ يتعرف حاصل الضرب القياسي وحاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين في المستوى والفراغ.

مصطلحات أساسية

فراغ	space	مستوى	plane	الضرب الثلاثي القياسي	scalar triple product
ثلاثي الأبعاد	3D	ضرب قياسي	scalar product	متجه الوضع	position vector
مسقط	projection	ضرب اتجاهي	vector product	متجه الوحدة	unit vector
قاعدة اليد اليمنى	right hand Rule	مركبة المتجه	component	معياري المتجه	the norm of vector
متجه ثلاثي الرتب	3D-vector				

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد.
- الدرس (١ - ٢): المتجهات في الفراغ.
- الدرس (١ - ٣): ضرب المتجهات.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمي للوحدة



النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد

The three- dimensional orthogonal coordinate system

فكر وناقش

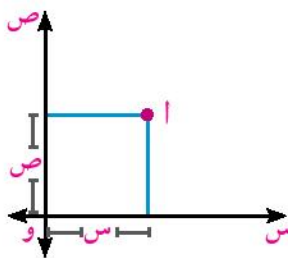


لتحديد موضع جسم على خط مستقيم يلزم معرفة بُعد هذا الجسم عن نقطة ثابتة (اختيارية) عليه، وتسمى نقطة الأصل (و).



$$أ = س \Rightarrow ح$$

لتحديد موضع جسم في مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسم على كل من محوري إحداثيات متعامدة.



$$أ = (س، ص) \Rightarrow ح^2$$

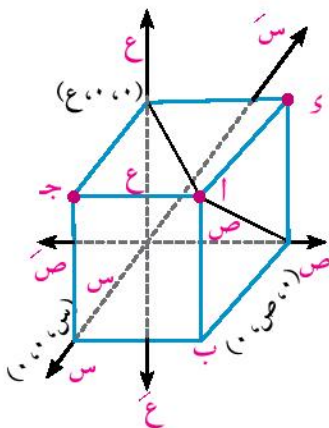
كيف يمكنك تحديد موضع جسم في الفراغ؟

تعلم



النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد (ح³)

the three- dimensional orthogonal coordinate system (R^3)



تعيين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بالنسبة إلى ثلاثة محاور متقاطعة في نقطة واحدة ومتعامدة مشى مشى، وذلك بإيجاد مسقط هذه النقطة على كل محور.

فكر: في النظام ثلاثي الأبعاد الإحداثي السابق، أوجد إحداثيات كل من النقط ب، ج، د

سوف تتعلم

- تحديد موقع نقطة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.
- تعيين إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين في الفراغ.
- إيجاد البعد بين نقطتين في الفراغ.

مصطلحات أساسية

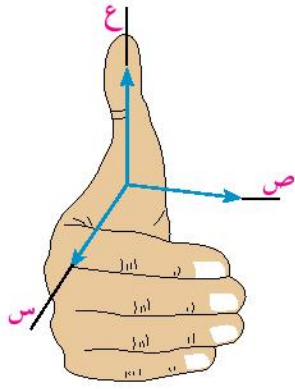
- space فراغ
- 3d ثلاثي الأبعاد
- projection مسقط
- right hand rule قاعدة اليد اليمنى
- plane مستوى

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- Scientific calculator

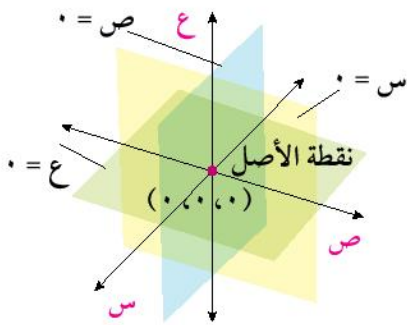
مفاهيم أساسية:

١ - قاعدة اليد اليمنى



عند تكوين النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد يجب اتباع قاعدة اليد اليمنى؛ حيث تشير أصابع اليد المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلى الاتجاه الموجب لمحور ص، ويشير إبهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع.

٢ - مستويات الإحداثيات



جميع النقط في الفراغ التي إحداثياتها (س، ص، ع) تقع في

المستوى الإحداثي س ص وتكون معادلته $ع = صفر$

جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س، ع، ص) تقع في المستوى

الإحداثي س ع وتكون معادلته $ص = صفر$

جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (ع، ص، س) تقع في

المستوى الإحداثي ص ع وتكون معادلته $س = صفر$

مثال

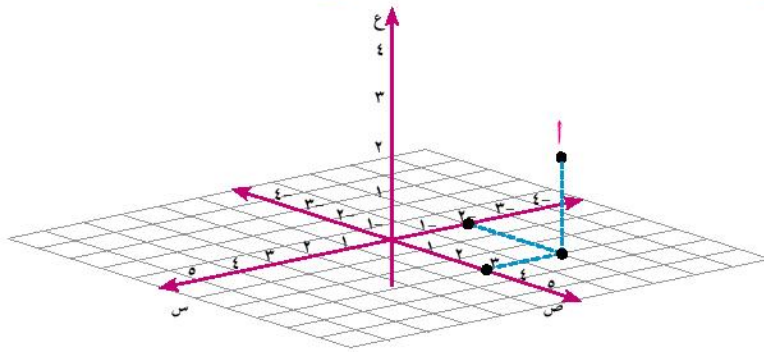
(تعيين موضع نقطة في الفراغ)

١ عین موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

ج (٤، ٠، ١)

ب (٣، ١، ٥)

أ (٢، ٣، ٢-)



الحل

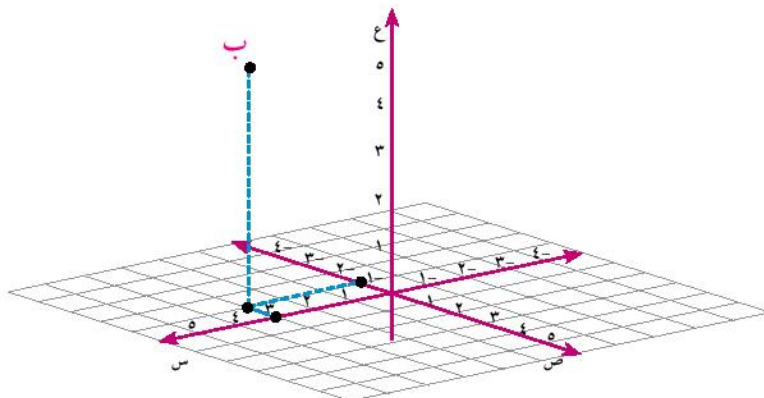
أ لتعيين النقطة أ (٢، ٣، ٢-) نحدد

النقطة (٣، ٢-) في المستوى س ص،

ثم نتحرك في الاتجاه الموجب

لمحور ع وحدتين، فنحصل على

النقطة أ (٢، ٣، ٢-)



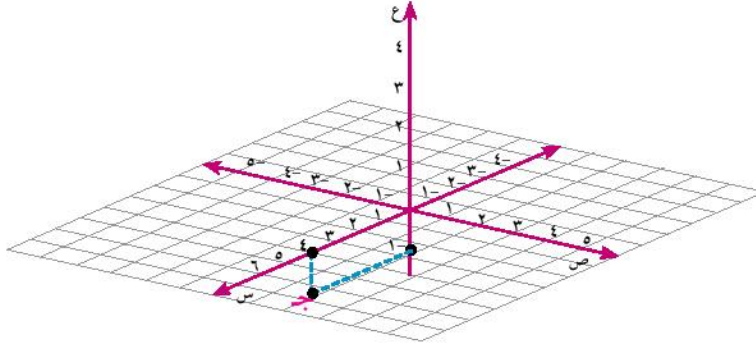
ب لتعيين النقطة ب (٣، ١، ٥) نحدد

النقطة (٣، ١) في المستوى

س ص، ثم نتحرك في الاتجاه

الموجب لمحور ع ٥ وحدات،

فنحصل على النقطة ب.



ج لتعيين إحداثيات النقطة

جـ (٤، ٠، ١) نحدد النقطة (٤، ٠، ١)
على محور س، ثم نتحرك في
الاتجاه السالب لمحور ع وحدة
واحدة.

٩ حاول أن تحل

١ أ عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

أ (٣، ٢، ٣) ب (٣، ٤، ١) جـ (٤، ٠، ٠)

ب أكمل:

١- بُعد النقطة أ (٣، ٢، ١) عن المستوى الإحداثي س ص = وحدة طول.

٢- بُعد النقطة ب (٤، ٢، ١) عن المستوى الإحداثي ص ع = وحدة طول.

تعلم

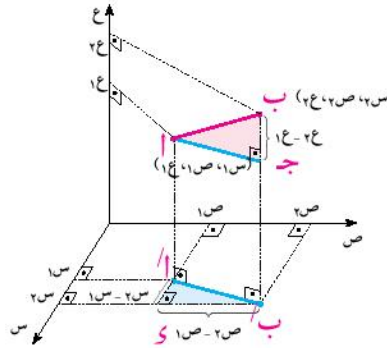


the distance between two points in space

تعلم: البعد بين نقطتين في الفراغ

إذا كانت أ (س_١، ص_١، ع_١)، ب (س_٢، ص_٢، ع_٢) نقطتين في الفراغ، فإن البعد بين النقطتين أ، ب يعطى بالعلاقة

$$أب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2 + (ع_١ - ع_٢)^2}$$



مثال

٢ أثبت أن المثلث أ ب ج حيث أ (٣، ١، ٢)، ب (٤، ٤، ٢)، جـ (٢، ٠، ١) قائم الزاوية في جـ.

الحل

قانون البعد بين نقطتين

$$أب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2 + (ع_١ - ع_٢)^2}$$

$$أب = \sqrt{(٣ - ٤)^2 + (١ - ٤)^2 + (٢ - ٢)^2} = \sqrt{١ + ٩ + ٠} = \sqrt{١٠}$$

$$أج = \sqrt{(٣ - ٢)^2 + (١ - ٠)^2 + (٢ - ١)^2} = \sqrt{١ + ١ + ١} = \sqrt{٣}$$

$$أج = \sqrt{(٣ - ٢)^2 + (١ - ٠)^2 + (٢ - ١)^2} = \sqrt{١ + ١ + ١} = \sqrt{٣}$$

$$\therefore (أ ب)^2 = \sqrt{(63)^2} = \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \quad \therefore (أ ب)^2 = 72 = 36 + 36 = 6^2 + 6^2 = 6^2(1+1) = 6^2(2) = 72$$

$$\therefore (أ ب)^2 = 72 \quad \therefore (أ ب) = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \quad \therefore (أ ب) = 6\sqrt{2}$$

٩ حاول أن تحل

٢ أثبت أن النقط أ (٠، ٤، ٤)، ب (٤، ٠، ٤)، ج (٤، ٤، ٠) هي رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع، وأوجد مساحته.

تعلم

The coordinates of midpoint of a line segment

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت أ (١س، ١ص، ١ع)، ب (٢س، ٢ص، ٢ع) نقطتان فى الفراغ، فإن إحداثيات نقطة جـ التى تقع منتصف $\overline{أ ب}$ هي:

$$ج = \left(\frac{١س + ٢س}{٢}, \frac{١ص + ٢ص}{٢}, \frac{١ع + ٢ع}{٢} \right)$$

مثال

٣ إذا كانت أ (١، ٣، ٢)، ب (٤، ١، ٤)، أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أ ب}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{إحداثيات نقطة المنتصف} &= \left(\frac{١س + ٢س}{٢}, \frac{١ص + ٢ص}{٢}, \frac{١ع + ٢ع}{٢} \right) \\ &= \left(\frac{١ + ٤}{٢}, \frac{٣ + ١}{٢}, \frac{٢ + ٤}{٢} \right) \\ &= \left(\frac{٥}{٢}, ٢, ٣ \right) \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{ج د}$ حيث ج (٠، ٤، ٢)، د (٦، ٢، ٤)

تفكير ناقده: إذا كانت ج (٢، ٢، ٦) هي نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (١، ٤، ٠) أوجد إحداثيات نقطة ب

تمارين (١-٣)

أكمل ما يأتي:

١ إذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ص فإن ع =

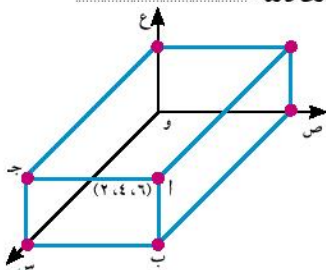
٢ المستقيمان $\overleftrightarrow{س س}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع}$ يكونان المستوى الإحداثى الذى معادلته

٣ الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات فى نظام إحداثى متعامد.

أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠)

فإن إحداثيات النقطة ب هي

وإحداثيات النقطة ج هي



٤ إذا كانت $A(1, -1, 4)$ ، $B(0, -3, 2)$ فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٥ بُعد النقطة $(3, -1, 2)$ عن المستوى الإحداثى S ع يساوي وحدة طول

أ ٣

ب ١

ج ٢

د ١

٦ طول العمود المرسوم من النقطة $(-2, 3, 4)$ على محور S يساوي وحدة طول.

أ ٢

ب ٣

ج ٥

د ٤

٧ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(-3, 2, 4)$ ، $(5, 1, 8)$ هي

أ $(1, \frac{3}{2}, 6)$

ب $(2, -1, 4)$

ج $(8, -1, 4)$

د $(1, -\frac{3}{2}, 2)$

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨ أوجد البعد بين النقطتين A ، B فى كل مما يأتى:

أ $(7, 0, 4)$ ، $B(1, 0, 0)$

ب $(2, 1, 6)$ ، $B(4, 1, 9)$

ج $(1, 1, -7)$ ، $B(-2, -3, -7)$

٩ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط الآتية هو مثلث قائم الزاوية، وأوجد مساحته:

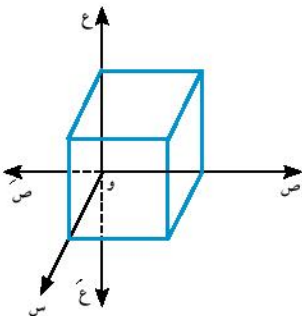
أ $(-2, 5, 2)$ ، $(0, 0, 2)$ ، $(0, 4, 0)$

ب $(-4, 4, 1)$ ، $(2, -1, 2)$ ، $(-2, 5, 0)$

١٠ الشكل المقابل يمثل مكعباً حجمه ٢٧ وحدة مكعبة

أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل

أوجد إحداثيات باقى الرؤوس .



١١ أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط (٣، ١، ٧)، (٣، ٥، ٣)، (٣، ٥، ٣) هو مثلث متساوي الساقين، ثم أوجد قيمة (قيم) ك التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع.

١٢ أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في كل مما يأتي:

أ (٣، ١، ٤)، ب (٢، ٠، ١) ب (٣، ٥، ٥)، ب (٦، ٤، ٨)

١٣ إذا كانت جـ (١، ٤، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ حيث ب (٤، ٢، ١) أوجد إحداثيات النقطة أ.

١٤ **تفكير إبداعي:**

إذا كانت أ $\exists$ محور س، ب $\exists$ محور ص، جـ $\exists$ محور ع وكانت النقطة (١، ١، ٠) منتصف $\overline{AB}$ ، والنقطة (٠، ١، ٢) منتصف $\overline{BC}$. أوجد إحداثيات منتصف $\overline{AC}$.

١٥ **الكتابة في الرياضيات:** إذا كانت جميع النقط في الفراغ التي على الصورة (س، ص، ع) تقع في المستوى الديكارتي س ص ومعادلته $E = 0$ ، فأوجد معادلة المستوى الذي تقع فيه جميع النقط في الفراغ الذي على الصورة (س، ص، ع) (٢، ص، ع).

١٦ **اكتشف الخطأ:** إذا كانت النقطة ب (١، ٤، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ حيث أ (١، ٠، ٢) أوجد إحداثيات النقطة جـ.

حل زياد

نفرض جـ (س، ص، ع)

$$\therefore 1 = \frac{s+1}{2} \leftarrow s = 3$$

$$4 = \frac{v+0}{2} \leftarrow v = 8$$

$$2 = \frac{e+2}{2} \leftarrow e = 2$$

$$\therefore \text{جـ} (2, 8, 3)$$

حل أشرف

$$\text{جـ} = \left(\frac{s+1}{2}, \frac{v+0}{2}, \frac{e+2}{2} \right) =$$

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{2+2}{2} \right) =$$

$$(2, 2, 0)$$

أي الحلين صواباً؟ ولماذا؟

Vectors in space

مقدمة:

درست سابقاً الكميات القياسية والكميات المتجهة، وعلمت أن المتجه يُمثَّل بقطعة مستقيمة موجهة تحدد بمقدار (مقياس المتجه)، واتجاه، وفي هذا الدرس نتناول المتجهات في الفراغ، وهو (نظام إحداثي ذو ثلاثة أبعاد).

تعلم



position vector in space

متجه الموضع في الفراغ

يعرف متجه الموضع للنقطة A (أ، ص، ع) بالنسبة لنقطة الأصل و $(0, 0, 0)$ على أنه القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة A .

✓ ويرمز لمتجه موضع النقطة A بالرمز $\vec{A}$ أي أن $\vec{A} = (أ، ص، ع)$

✓ أ، ص تسمى مركبة المتجه $\vec{A}$ في اتجاه محور س.

✓ ص تسمى مركبة المتجه $\vec{A}$ في اتجاه محور ص.

✓ ع تسمى مركبة المتجه $\vec{A}$ في اتجاه محور ع.

the norm of vector

مقياس المتجه

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

فإذا كان $\vec{A} = (أ، ص، ع)$ فإن من قانون البعد بين نقطتين يكون

$$||\vec{A}|| = \sqrt{أ^2 + ص^2 + ع^2}$$

مثال

① إذا كان $\vec{A} = (2, -1, 3)$ ، $\vec{B} = (0, 4, -3)$ فإن

✓ مركبة المتجه $\vec{A}$ في اتجاه محور س هي ٢

✓ مركبة المتجه $\vec{B}$ في اتجاه محور ع هي -٣

$$||\vec{A}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$||\vec{B}|| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5$$

المتجه $\vec{B}$ يقع في المستوى الإحداثي ص ع (تتعدم مركبة $\vec{B}$ في اتجاه محور س

سوف تتعلم

- ▶ تمثيل المتجه بثلاث رتب.
- ▶ متجه الموضع في الفراغ.
- ▶ متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ.
- ▶ التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- ▶ التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة في الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.
- ▶ تساوي متجهين في الفراغ.
- ▶ مقياس المتجه في الفراغ.
- ▶ متجه الوحدة في اتجاه متجه في الفراغ.
- ▶ جمع المتجهات في الفراغ.
- ▶ ضرب المتجهات في عدد حقيقي.

مصطلحات أساسية

▶ متجه الموضع في الفراغ

Position vector in space

▶ مقياس المتجه

the norm vector

▶ متجه الوحدة

Unit vector

▶ الضرب القياسي

Scalar product

▶ الضرب الاتجاهي

Vector product

٤ حاول أن تحل

١ إذا كان $\vec{A} = (-1, 4, 2)$ ، $\vec{B} = (3, 1, 0)$ أوجد

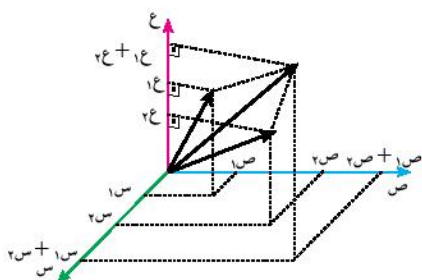
١ أس + ب ص $\vec{B} + \vec{A}$

Adding 3 D vectors

جمع المتجهات فى الفراغ

إذا كان $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ، $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ فإن:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) = (C_x, C_y, C_z)$$



مثال

٢ إذا كان $\vec{A} = (-2, 3, 1)$ ، $\vec{B} = (0, 2, 4)$ فإن:

$$\vec{A} + \vec{B} = (1, 5, 4) = (1, 5, 4)$$

٤ حاول أن تحل

٢ إذا كان $\vec{A} = (-4, 4, 0)$ ، $\vec{B} = (-1, 5, 2)$ أوجد $\vec{A} + \vec{B}$

خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ

لأي متجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ فإن:

١ خاصية الانغلاق: $\vec{A} + \vec{B} \in \mathbb{R}^3$

٢ خاصية الإبدال: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

٣ خاصية التجميع: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

٤ - العنصر المحايد الجمعي المتجه الصفري: $\vec{0} = (0, 0, 0)$ هو العنصر المحايد الجمعي فى $\mathbb{R}^3$

أي أن: $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A} = \vec{0} + \vec{A}$

٥ - المعكوس الجمعي: لكل متجه $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ يوجد

$$-\vec{A} = (-A_x, -A_y, -A_z) \in \mathbb{R}^3 \text{ بحيث: } \vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}$$

Multiplying a vector by a scalar

ضرب المتجه فى عدد حقيقى

إذا كان $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن:

$$k\vec{A} = (kA_x, kA_y, kA_z) = (A_x, A_y, A_z)$$

فمثلاً: ${}^3(٢، ١-، ٤) = (١٢، ٣-، ٦)$

${}^{\frac{1}{4}}(٢، \frac{9}{4}، ٦) = (٤، ٩، ٦)$

${}^{2-}(١، ٣-، ٤) = (٨، ٦، ٢-)$

خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى

إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن

١- خاصية التوزيع

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} \quad \checkmark$

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \checkmark$

٢- خاصية الدمج

$k(\vec{a}) = (\vec{a})k = k\vec{a} \quad \checkmark$

مثال

٢) إذا كان $\vec{a} = (١-، ٥، ٢)$ ، $\vec{b} = (٤، ١-، ٣)$ فإن

١- $\vec{a} - \vec{b} = (٢، ٥، ٢) - (٤، ١-، ٣) = (٢، ٥، ٢) - (٣، ١-، ٤)$

$= (٢، ٥، ٢) + (٤، ١٠، ٢-) =$

$(٥-، ١٣، ١٤-) =$

٢- أوجد المتجه $\vec{c}$ حيث $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$

بإضافة $\vec{a}$ للطرفين

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c} - \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{a} = \vec{b}$

$\vec{c} - \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (٢، ٥، ٢) + (٤، ١٠، ٢-) =$

$(٦-، ١٥-، ٣) + (٦، ٢-، ٨) =$

$(٠، ١٧-، ١١) =$

بالضرب فى $\frac{1}{4}$

$\vec{c} = \frac{1}{4}(٠، ١٧-، ١١) = (٠، \frac{17-}{4}، \frac{11}{4}) = (٠، \frac{17-}{4}، \frac{11}{4})$

٥ حاول أن تحل

٣) إذا كان $\vec{a} = (٢، ٣-، ١)$ ، $\vec{b} = (٠، ٢، ٢-)$

أ) أوجد $\vec{a} - \vec{b}$

ب) إذا كان $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ فأوجد $\vec{c}$

تساوى المتجهات فى الفراغ

إذا كان $\vec{a} = (\text{ا، ص، ع})$ ، $\vec{b} = (\text{ب، ص، ع})$ فإن:

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ إذا وفقط إذا كان: } \text{ا} = \text{ب، ص} = \text{ص، ع} = \text{ع}$$

مثال

٤ أوجد قيمة ل، م، ن التى تجعل المتجهين $\vec{a} = (\text{ل، ٤، ٣-٢م})$ ، $\vec{b} = (\text{٥، ١، ٢ن})$ متساويين

الحل

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} = \vec{b} & \therefore & \\ \text{ا} = \text{ب} & \therefore & \text{ل} = ٥ \\ \text{ص} = \text{ص} & & \text{٣-٢م} = ١ \\ \text{ع} = \text{ع} & & \text{٢ن} = ١ \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ل} = ٥ & \leftarrow & \\ \text{٣-٢م} = ١ & \leftarrow & \text{م} = ١ \\ \text{٢ن} = ١ & \leftarrow & \text{ن} = ١/٢ \end{array}$$

٦ حاول أن تحل

٤ إذا كان $(\text{٢س+١، ٥، ٤+ك}) = (\text{١-ص، ٤-٢، س+١})$ فما قيمة س، ص، ك؟

متجه الوحدة

يعرف متجه الوحدة بأنه المتجه الذى معياره يساوى وحدة الأطوال

فمثلاً:

$$\vec{a} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}} \right) \text{ متجه وحدة لأن: } \|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{13}} \right)^2} = 1$$

٦ حاول أن تحل

٥ بين أى المتجهات الآتية يمثل متجه وحدة

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad \vec{b} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5} \right)$$

متجهات الوحدة الأساسية ($\vec{e}$, $\vec{e}$, $\vec{e}$)

هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل، ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س، ص، ع على الترتيب **أى إن**:

$$\vec{e} = (0, 0, 1), \vec{e} = (0, 1, 0), \vec{e} = (1, 0, 0)$$

وتسمى مجموعات المتجهات $\vec{e}$, $\vec{e}$, $\vec{e}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة الأساسية

تفكير ناقده

عبر عن المتجهات $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

التعبير عن متجه في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

إذا كان $\vec{A} = (a, b, c)$ فإن المتجه $\vec{A}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (a, b, c) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \\ &= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3\end{aligned}$$

مثال

٥ إذا كان $\vec{A} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ، $\vec{B} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ أوجد

١ $\vec{A} - \vec{B}$ ٢ $\|\vec{A} + \vec{B}\|$ ٣ $\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$ ماذا تستنتج؟

الحل

$$\begin{aligned}\vec{A} - \vec{B} &= (2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3) - (-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \\ &= 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ &= 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + (-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27}$$

$$\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} + \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} + \sqrt{5}$$

$$\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\| \neq \|\vec{A} + \vec{B}\| \quad \text{نلاحظ أن}$$

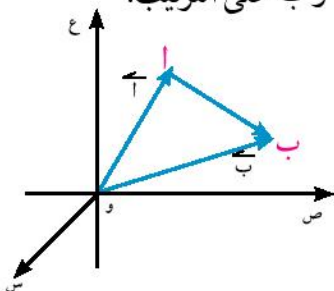
٦ حاول أن تحل

٦ إذا كان $\vec{A} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ، $\vec{B} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ أوجد

١ $\vec{A} - \vec{B}$ ٢ $\|\vec{A} - \vec{B}\|$

التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة في الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها

فرض أن A ، B نقطتان في الفراغ، متجهما موضعهما بالنسبة لنقطة الأصل هما $\vec{OA}$ ، $\vec{OB}$ على الترتيب.



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

مثال

٦ إذا كان $\vec{a} = (1, 3, 2)$ ، $\vec{b} = (2, 0, 4)$ فإن

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$(1, 3, 2) = (1, 3, 2) - (2, 0, 4) =$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{d}$$

$$(1, 3, 2) = (2, 0, 4) - (1, 3, 2) =$$

نلاحظ أن: $\vec{a} - \vec{b}$

٧ حاول أن تحل

٧ أ إذا كان $\vec{a} = (2, 3, 0)$ ، $\vec{b} = (1, 4, 1)$ أوجد $\vec{a} - \vec{b}$ ب إذا كان $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ، $\vec{b} = (4, 1, 2)$ أوجد إحداثيات نقطة ب

The unit vector in the direction of a given vector

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم

إذا كان $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ فإن متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\vec{a}$ يرمز له بالرمز $\hat{a}$ يعطى بالعلاقة:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

مثال

٧ إذا كان $\vec{a} = (2, 2, 1)$ ، $\vec{b} = (3, 1, 2)$ أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{a} - \vec{b}$

الحل

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{(3, 1, 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$(2, 2, 1) = (3, 1, 2) - (2, 2, 1) =$$

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} =$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} =$$

٤ حاول أن تحل

٨ أوجد متجه الوحدة في اتجاه كل من المتجهات الآتية:

ج $\vec{a} = 3\vec{e} - \vec{e}$

ب $\vec{b} = 2\vec{e} - \vec{e}$

أ $\vec{a} = (8, -4, -8)$

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه في الفراغ

إذا كان $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ متجه في الفراغ وكانت $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور x, y, z على الترتيب فإن:

$$a_x = \|\vec{a}\| \cos \theta_x, \quad a_y = \|\vec{a}\| \cos \theta_y, \quad a_z = \|\vec{a}\| \cos \theta_z$$

$$\therefore \vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos \theta_x \vec{e}_x + \cos \theta_y \vec{e}_y + \cos \theta_z \vec{e}_z)$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{a}$ $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$

حيث $\theta_x, \theta_y, \theta_z \in [0, \pi]$

تسمى جيب تمام الاتجاه للمتجه $\vec{a}$ $\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z$

لاحظ أن: $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{a}$ أي إن

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

مثال

٨ الشكل المقابل يمثل متجه $\vec{a}$ معياره ١٠ وحدات

أ عبر عن المتجه $\vec{a}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

ب أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{a}$

الحل

أولاً نحلل $\vec{a}$ إلى مركبتين: الأولى في اتجاه $\vec{e}_x$ ومقدارها

$$a_x = \|\vec{a}\| \cos \theta_x = 10 \cos 40^\circ = 7.66$$

والثانية تقع في المستوى الإحداثي xy

$$a_y = \|\vec{a}\| \cos \theta_y = 10 \cos 70^\circ = 3.42$$

الآن نحلل المركبة a_y إلى مركبتين: الأولى في اتجاه $\vec{e}_y$ ومقدارها

$$a_z = a_y \cos \theta_z = 3.42 \cos 70^\circ = 1.19$$

والثانية في اتجاه $\vec{e}_z$ ومقدارها

$$a_z = a_y \sin \theta_z = 3.42 \sin 70^\circ = 3.2$$

وبذلك تكون الصورة الكارتيزية للمتجه $\vec{A}$ هي

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = 2,199\vec{e}_x + 6,04\vec{e}_y + 7,66\vec{e}_z$$

ثانيًا: ولإيجاد قياسات زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{A}$

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{||\vec{A}||} = \frac{2,199\vec{e}_x + 6,04\vec{e}_y + 7,66\vec{e}_z}{\sqrt{2,199^2 + 6,04^2 + 7,66^2}}$$

$$= 0,2199\vec{e}_x + 0,604\vec{e}_y + 0,766\vec{e}_z$$

$$\therefore \cos \theta_x = 0,2199 \quad \text{ومنها} \quad \theta_x = \cos^{-1}(0,2199) = 77,3^\circ$$

$$\cos \theta_y = 0,604 \quad \text{ومنها} \quad \theta_y = \cos^{-1}(0,604) = 52,84^\circ$$

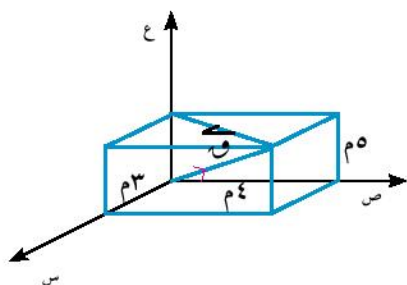
$$\cos \theta_z = 0,766 \quad \text{ومنها} \quad \theta_z = \cos^{-1}(0,766) = 40^\circ$$

٩ حاول أن تحل

٩ الشكل المقابل يمثل قوة $\vec{Q}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن

أ عبر عن القوة $\vec{Q}$ بالصورة الجبرية.

ب أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\vec{Q}$.



تمارين (٢-٣)



أكمل ما يأتى:

١ إذا كان $\vec{A} = (-2, 4, 3)$ فإن $||\vec{A}|| = \dots$

٢ إذا كان $\vec{A} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ، $\vec{B} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ فإن $\vec{A} - \vec{B} = \dots$

٣ متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{AB}$ حيث $A(1, 2, 0)$ ، $B(3, 1, 2)$ هو $\dots$

٤ المتجه $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ يصنع زاوية قياسها $\dots$ مع الاتجاه الموجب لمحور س.

٥ المتجه $\vec{B} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ يصنع زاوية قياسها $\dots$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦ إذا كان $\vec{A} = (-2, 1, 3)$ وكان $||\vec{A}|| = 3$ وحدات فإن $\vec{A}$ = $\dots$

أ $\frac{1}{3}\vec{A}$

ب $2 \pm \vec{A}$

ج $-\vec{A}$

د $\vec{A}$

- ٧ إذا كان $30^\circ, 70^\circ, \theta$ هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن احدى قيم $\theta =$
 أ 100° ب 80° ج 260° د $68, 61^\circ$

- ٨ إذا كان $\vec{a} = (-1, 5, 2)$ ، $\vec{b} = (1, 1, 3)$ وكان $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ فإن $\vec{c} =$
 أ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{d}$ ب $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{d}$ ج $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{d}$ د $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{d}$

- ٩ جيب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{a} = (-2, 1, 2)$ هي
 أ $(2, 1, 2)$ ب $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ج $(\frac{0}{3}, \frac{0}{3}, \frac{0}{3})$ د $(1, 1, 1)$

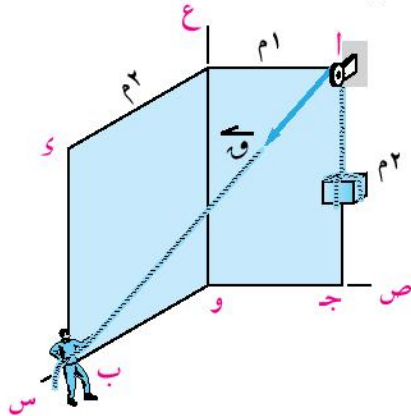
أجب عما يأتي:

- ١٠ إذا كان $\vec{a} = (2, 3, 1)$ ، $\vec{b} = (4, 2, 0)$ ، $\vec{c} = (6, 0, 3)$ أوجد كلاً من المتجهات الآتية:
 أ $\vec{a} + \vec{b}$ ب $3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ ج $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ د $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

- ١١ إذا كان $\vec{a} = 2\vec{s} - 3\vec{v} + 5\vec{w}$ ، $\vec{b} = 4\vec{v} - 2\vec{w}$ ، $\vec{c} = 4\vec{s} + 5\vec{v} - 6\vec{w}$ أوجد كلاً من المتجهات الآتية:
 أ $2\vec{a} + \vec{b}$ ب $\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ ج $3\vec{a} - \vec{b}$ د $\vec{c} - \vec{s} = 4\vec{v}$

- ١٢ أوجد معيار كل من المتجهات الآتية:
 أ $\vec{a} = (2, 1, 0)$ ب $\vec{b} = (1, 2, 2)$ ج $\vec{c} = \vec{a}$ د $\vec{s} = \vec{s} - 4\vec{v}$

- ١٣ إذا كان $\vec{a} = (0, 0, 1)$ ، $\vec{s} = (1, 0, 0)$ أثبت أن $\|\vec{a}\| = \|\vec{s}\| = \|\vec{k}\| = \|\vec{s}\|$



- ١٤ إذا كانت قوة الشد في الخيط تساوي ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية $\vec{a}$ للقوة $\vec{w}$ في اتجاهات محاور الإحداثيات.

- ١٥ سؤال مفتوح: إذا كان المتجه $\vec{a}$ يوازي المستوى الإحداثي ص ع. ماذا يمكن أن نقول عن إحداثيات المتجه $\vec{a}$ ؟

- ١٦ سؤال مفتوح: إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهين في ح^٣. هل $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ إذا كان الطرفان غير متساويين. أي الطرفين هو الأكبر؟

- ١٧ تفكير إبداعي: أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\vec{a}$ الذي معياره ٥ وحدات، ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية في القياس.

Vectors multiplication

سوف تتعلم

- الضرب القياسي لمتجهين في المستوى وفي الفراغ.
- توازي وتعاضد متجهين.
- الزاوية بين متجهين.
- مركبة متجه في اتجاه متجه آخر.
- مسقط متجه في اتجاه متجه آخر.
- الضرب الاتجاهي لمتجهين في المستوى وفي الفراغ.
- المعنى الهندسي لحاصل الضرب الاتجاهي.
- المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة.
- حاصل الضرب الثلاثي القياسي.
- المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي.

مصطلحات أساسية

- الضرب قياسي scalar product
- الضرب اتجاهي vector product
- مركبة component
- متجه الوحدة unit vector
- الشغل work
- قاعدة اليد اليمنى right hand rule
- الضرب الثلاثي القياسي scalar triple product

تعلمت سابقاً إجراء بعض العمليات على المتجهات، مثل الجمع وضرب المتجه في عدد حقيقي، ولكنك قد تكون قد تساءلت: هل يمكن إجراء عملية الضرب في حقل المتجهات؟ والجواب: نعم. هناك نوعان من ضرب المتجهات، هما الضرب القياسي لمتجهين والضرب الاتجاهي لمتجهين. وفي هذا الدرس نتناول هذين النوعين من الضرب بالشرح والتحليل، وخواصهما الجبرية والهندسية، وتطبيقاتهما الفيزيائية؛ ليكون ذلك معيناً لك في دراسة الميكانيكا.

Scalar product of two vectors (Dot product)

الضرب القياسي لمتجهين

فكر و ناقش



إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فأوجد:

- المركبة الجبرية للمتجه $\vec{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{b}$.
- حاصل ضرب معيار المتجه $\vec{b}$ ومركبة المتجه $\vec{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{b}$.

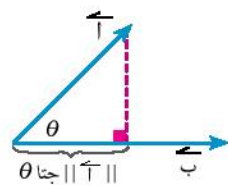
من بند فكر وناقش نستنتج أن:

١- المركبة الجبرية للمتجه $\vec{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{b}$ تساوي $\|\vec{a}\| \cos \theta$

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\vec{b}$ والمركبة الجبرية

للمتجه $\vec{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{b}$ يساوي $\|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \theta$

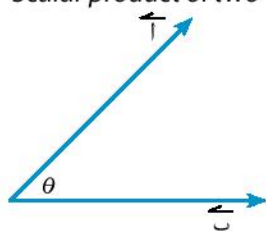
والقيمة المطلقة لهذا المقدار تعبر عن مساحة المستطيل الذي بعدها معيار المتجه $\vec{b}$ ومعيار مركبة المتجه $\vec{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{b}$.



Scalar product of two vectors

الضرب القياسي لمتجهين

إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن مساحة المستطيل الذي بعدها معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه تعرف بالضرب القياسي للمتجهين ويرمز لهما بالرمزين $\vec{a} \cdot \vec{b}$



تعلم



أى إن

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos \theta$$

مثال

١ إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهين، قياس الزاوية 60° وكان $||\vec{a}|| = 2$ ، $||\vec{b}|| = 8$ أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$

الحل

$$||\vec{a}|| = 2 ، ||\vec{b}|| = 8 \quad \leftarrow \quad ||\vec{a}|| = 2 ، ||\vec{b}|| = 8 ، \angle = 60^\circ$$

من تعريف الضرب القياسى

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos \theta$$

$$= 2 \times 8 \times \cos 60^\circ = 8$$

٢ حاول أن تحل

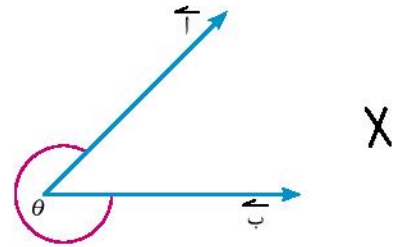
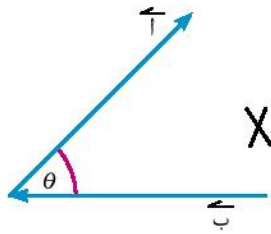
١ إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما 135° وكان $||\vec{a}|| = 6$ ، $||\vec{b}|| = 10$ أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$

تفكير ناقده: ما الحالات التى يكون فيها حاصل الضرب القياسى يساوى الصفر؟

ملحوظات مهمة

١- لتحديد الزاوية بين المتجهين يجب أن يكون المتجهان خارجيين (أو داخليين) لنفس النقطة.

٢- قياس الزاوية بين المتجهين $\in [0, \pi]$



مثال

٢ إذا كانت $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ متجهات الوحدة لمجموعة يمينية، فأوجد كل من $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ، $\vec{c} \cdot \vec{a}$

الحل

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}||^2 = 1$$

$$1 = 1 \times 1 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 ، \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 ، \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

بالمثل

٢ حاول أن تحل

٢ إذا كانت $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ متجهات الوحدة لمجموعة يمينية، فأوجد كل من $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ، $\vec{c} \cdot \vec{a}$

تذكر أن

معيار متجه الوحدة يساوى الواحد الصحيح.

خواص الضرب القياسي

من الأمثلة السابقة يمكننا استنتاج خواص الضرب القياسي كما يلي:

١- خاصية الإبدال $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

٢- $||\vec{a}||^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

٣- إذا وفقط إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متعامدين (شرط تعامد متجهين) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

٤- خاصية التوزيع $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

٥- حيث k عددًا حقيقيًا $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

مثال

٣) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مربع طول ضلعه ١٠ سم. أوجد كلاً من
 أ) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ب) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ج) $\vec{a} \cdot \vec{a}$

الحل

أ) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيان وفي نفس الاتجاه

∴ قياس الزاوية بينهما = صفر°

∴ $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos 0^\circ = 10 \times 10 \times 1 = 100$

$$100 = 1 \times 10 \times 10 =$$

ب) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{a}$ متعامدان قياس الزاوية بينهما ٩٠°

∴ $\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}|| ||\vec{a}|| \cos 90^\circ = 0$

ج) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ، $\vec{a}$ لا يبدآن من نفس النقطة

∴ نمد $\vec{a}$ على امتداده فتصبح قياس الزاوية بينهما ١٣٥°

$\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}|| ||\vec{a}|| \cos 135^\circ = 10 \times 10 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -50\sqrt{2}$

$$100 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10 \times 10 =$$

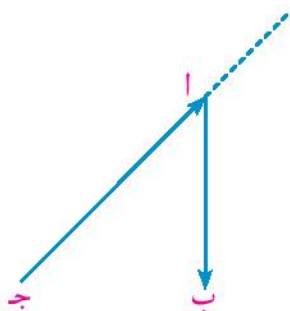
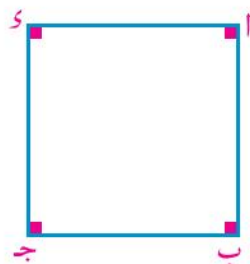
حل آخر الفقرة ج

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$$

$$100 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10 \times 10 =$$



٤ حاول أن تحل

٣) أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سم. أوجد كلاً من:

ج) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c})$

ب) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

أ) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

تعلم

الضرب القياسي لمتجهين في النظام الإحداثي المتعامد

The scalar product of two vectors in orthogonal coordinate system

إذا كان $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ فإن

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ باستخدام خاصية التوزيع

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$+ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$+ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

وحيث إن $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ملاحظة إذا كان $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ في المستوى الإحداثي فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

مثال

٤) إذا كان $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ و $\vec{b} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$

الحل

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 3, 4) \cdot (-1, -2, 1)$$

$$= 2 \times (-1) + 3 \times (-2) + 4 \times 1$$

$$= -2 - 6 + 4 = -4$$

٤ حاول أن تحل

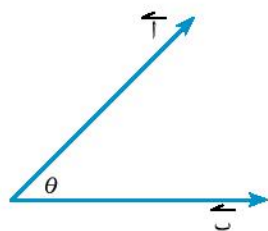
٤) أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ ماذا نستنتج؟

ب) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ و $\vec{b} = 3\vec{e}_3 - \vec{e}_2$



the angle between two vectors



الزاوية بين متجهين

تعلم أن $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta$

حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $0^\circ < \theta < 180^\circ$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

حالات خاصة:

١- إذا كان $\cos \theta = 1$ فإن $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متوازيان، وفي نفس الاتجاه.

٢- إذا كان $\cos \theta = -1$ فإن $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متوازيان، وفي عكس الاتجاه.

٣- إذا كان $\cos \theta = 0$ فإن $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متعامدان.

مثال

٥ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{A} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ ، $\vec{B} = 7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

الحل

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{54}$$

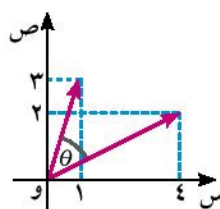
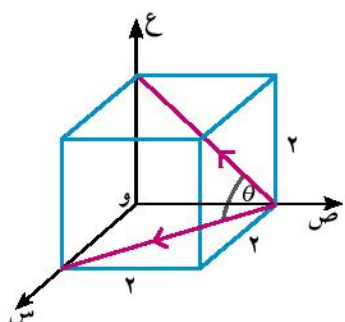
$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

$$\frac{51}{\sqrt{50} \sqrt{54}} = \frac{28 + 10 + 8}{\sqrt{50} \sqrt{54}} = \frac{(4, 3, 5) \cdot (7, 2, 1)}{\sqrt{50} \sqrt{54}}$$

$$\therefore \cos^{-1} \left(\frac{51}{\sqrt{50} \sqrt{54}} \right) = \cos^{-1} (0.8181) = 27.9^\circ$$

٦ حاول أن تحل

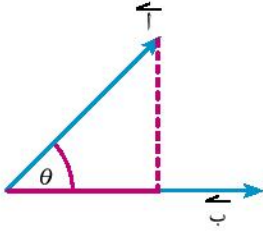
٥ أوجد θ في كل مما يأتي:





مركبة متجه في اتجاه متجه آخر.

إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهين، فإن مركبة المتجه $\vec{a}$ في اتجاه $\vec{b}$ (ويرمز لها a_b) هي



$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} = \cos \theta$$

ملحوظة: المركبة الاتجاهية للمتجه $\vec{a}$ في اتجاه $\vec{b}$ يرمز لها بالرمز a_b حيث $a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

مثال

٦ أوجد مركبة القوة $\vec{F} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ في اتجاه $\vec{AB}$ حيث $A(1, 4, 0)$ ، $B(-1, 2, 3)$

الحل

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$= (-1, 2, 3) - (1, 4, 0) = (-2, -2, 3)$$

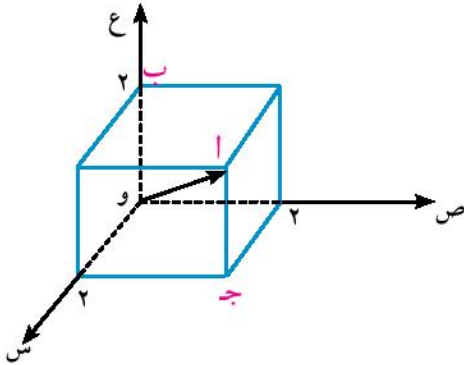
$$\text{مركبة القوة } \vec{F} \text{ في اتجاه } \vec{AB} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$$

$$= \frac{17}{17} = 1$$

٦ حاول أن تحل

٦ الشكل المقابل يمثل مكعباً طول ضلعه ٢ وحدة طول أوجد

مركبة المتجه $\vec{OA}$ على المتجه $\vec{CB}$

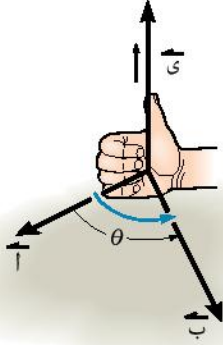


تفكير ناقذ: متى تنعدم مركبة متجه في اتجاه متجه آخر؟



Vector product of two vectors (cross product)

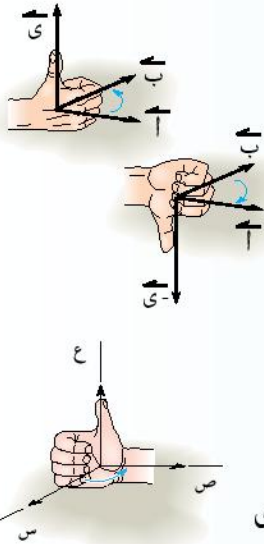
الضرب الاتجاهي لمتجهين



إذا كان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهين في مستوى، يحصران بينهما زاوية قياسها θ وكان $\vec{C}$ متجه وحدة عمودياً على المستوى الذي يحوي $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ فإن حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ يُعطى بالعلاقة

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\theta)$$

ويحدد اتجاه متجه الوحدة $\vec{C}$ (لأعلى أم أسفل) طبقاً لقاعدة اليد اليمنى، حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\vec{A}$ إلى المتجه $\vec{B}$ فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\vec{C}$



ملحوظات هامة

١- إذا كان $\vec{A} \times \vec{B}$ في اتجاه المتجه $\vec{C}$ فإن $\vec{A} \times \vec{B}$ تكون في اتجاه المتجه $\vec{C}$ أي أن $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$

٢- بتطبيق قاعدة اليد اليمنى على مجموعة يمينية من متجهات الوحدة المتعامدة فإن

$$\vec{s} = \vec{v} \times \vec{w}, \quad \vec{v} = \vec{w} \times \vec{s}, \quad \vec{w} = \vec{s} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{s} \times \vec{w}, \quad \vec{w} = \vec{v} \times \vec{s}, \quad \vec{s} = \vec{w} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{s} \times \vec{w}, \quad \vec{w} = \vec{v} \times \vec{s}, \quad \vec{s} = \vec{w} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{s} \times \vec{w}, \quad \vec{w} = \vec{v} \times \vec{s}, \quad \vec{s} = \vec{w} \times \vec{v}$$

٣- لأي متجه $\vec{A}$ يكون $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

حيث $\vec{0}$ المتجه الصفري

مثال

٧ $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهان في مستوى، قياس الزاوية بينهما 70° فإذا كان $\|\vec{A}\| = 10$ ، $\|\vec{B}\| = 17.5$ أوجد معيار $\vec{A} \times \vec{B}$

الحل

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\theta)$$

$$\therefore \|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\theta) = 10 \times 17.5 \times \sin(70^\circ) = 166.27$$

٤ حاول أن تحل

٧ إذا كان $\vec{a} \times \vec{b} = -6\vec{c}$ وكان $||\vec{a}|| = 5$ ، $||\vec{b}|| = 26$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

الضرب الاتجاهي في الإحداثيات الكارتيزية

إذا كان $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ، $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ متجهين فإن

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

وحيث إن

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

والصورة الأخيرة يمكن كتابتها على شكل محدد على النظم 3×3 كالآتي:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

حالة خاصة

إذا كان $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ، $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ في المستوى الإحداثي xy فإن

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix}$$

مثال

٨ إذا كان $\vec{A} = (-2, 3, 1)$ ، $\vec{B} = (1, 2, 4)$ أوجد $\vec{A} \times \vec{B}$ ثم استنتج متجه الوحدة العمودي على المستوى الذى يحوى المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

الحل

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1(1 \times 3 - 2 \times 2) + \vec{e}_2(1 \times 1 - 4 \times 2) - \vec{e}_3(1 \times 2 - 4 \times 3)$$

$$= 10\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$$

$$\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\|\vec{A} \times \vec{B}\|} = \vec{C} \text{ متجه الوحدة العمودي على مستوى } \vec{A}, \vec{B}$$

$$\therefore \vec{C} = \frac{10\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3}{\sqrt{10^2 + 9^2 + 7^2}} = \frac{10\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3}{\sqrt{230}}$$

٩ حاول أن تحل

٨ إذا كان $\|\vec{A}\| = 6$ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{A}$ هى على الترتيب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ وكان المتجه $\vec{B} = (-2, 3, 5)$ أوجد $\vec{A} \times \vec{B}$

خواص حاصل ضرب الاتجاهى لمتجهين

إذا كان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن:

(الضرب الاتجاهى عملية غير إبدالية)

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad -1$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = \vec{0} \quad -2$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \text{ فيما } \vec{A} // \vec{B} \text{ أو أحد المتجهين أو كلاهما يساوى } \vec{0} \quad -3$$

خاصية التوزيع

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}) \quad -4$$

حيث ك عدد حقيقى

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \quad -5$$

توازى متجهين

رأينا فى خواص ضرب الاتجاهى أن المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ يكونان متوازيين إذا وفقط إذا كان: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

$$\text{أى } (\text{اص ب ع} - \text{اع ب ص})\vec{e}_1 + (\text{اع ب س} - \text{اص ب ع})\vec{e}_2 + (\text{اص ب ص} - \text{اص ب س})\vec{e}_3 = \vec{0}$$

أى $\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$ ، $\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{س}$ ، $\vec{ا} \vec{ب} \vec{ص} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{س}$

أى $\frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{ص}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{س}}$ ، $\frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{ص}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{س}}$ ، $\frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{ص}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{س}}$

أى $\frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{ص}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{س}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{س}}$

وبفرض أى من النسب = ك يكون

$\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$ ، $\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{س}$ ، $\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$

$\therefore \vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص} + \vec{ا} \vec{ب} \vec{س} + \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$
 $\therefore \vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$

عندما تكون ك < ٠ يكون المتجهان متوازيين وفي نفس الاتجاه، وعندما تكون ك > ٠ يكون المتجهان متوازيين وفي عكس الاتجاه.

مثال

٩ إذا كان المتجه $\vec{ا} = (٢ - \vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع})$ يوازي المتجه $\vec{ب} = (\vec{س} + \vec{ك} + \vec{ع})$ أوجد قيمة كل من م، ك

الحل

$\therefore \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{ص}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{س}} = \frac{\vec{ا} \vec{ب}}{\vec{ب} \vec{ص}}$

$\therefore \vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$ ، $\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{س}$ ، $\vec{ا} \vec{ب} = \vec{ا} \vec{ب} \vec{ص}$

حاول أن تحل

٩ إذا كان $\vec{ا} = (٢ - \vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع})$ وكان $\vec{ا} \parallel \vec{ب}$ فإذا كان $\vec{ا} \vec{ب} = ١٣٦٣$ أوجد $\vec{ب}$.

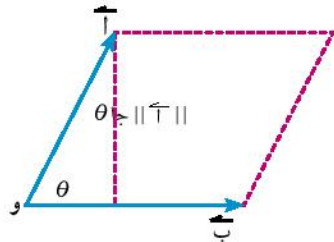
المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى لمتجهين

نعلم أن $\vec{ا} \times \vec{ب} = \|\vec{ا}\| \|\vec{ب}\| \sin \theta$

$\|\vec{ا} \times \vec{ب}\| = \|\vec{ا}\| \|\vec{ب}\| \sin \theta$ حيث θ زاوية بين $\vec{ا}$ و $\vec{ب}$

= مساحة متوازي الأضلاع الذى فيه $\vec{ا}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران فيه

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\vec{ا}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران فيه



مثال

١٠ إذا كان $\vec{A} = (2, 1, 3)$ ، $\vec{B} = (1, 4, 3)$ أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ضلعان متجاوران فيه.

الحل

$$\vec{A} \times \vec{B} = (1, 4, 3) \times (2, 1, 3) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{w} \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{e}(10 - 3) + \vec{v}(9 - 2) + \vec{w}(3 - 8)$$

$$= 7\vec{e} + 7\vec{v} - 5\vec{w} \quad ||\vec{A} \times \vec{B}|| = \sqrt{7^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{109}$$

∴ مساحة متوازي الضلع = $\sqrt{109}$ وحدة مساحة.

٦ حاول أن تحل

١٠ إذا كان $\vec{A} = (1, 2, 4)$ ، $\vec{B} = (0, 5, 1)$ أوجد مساحة المثلث الذي فيه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ضلعان.

تعلم



Scalar triple product

الضرب الثلاثي القياسي

إذا كان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ متجهات فإن المقدار $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثي القياسي. الذي له كثير من التمثيلات في مجال الاستاتيكا (لاحظ عدم وجود أقواس حيث لا معنى لإجراء الضرب القياسي أولاً)

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \vec{B} = (B_x, B_y, B_z), \vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

وبفرض

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

فإن

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y) - (A_z B_y C_x + A_y B_x C_z + A_x B_z C_y)$$

$$= (A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y) - (A_z B_y C_x + A_y B_x C_z + A_x B_z C_y)$$

$$+ (B_x C_y A_z - B_y C_x A_z - B_z C_y A_x)$$

$$= (A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y) - (A_z B_y C_x + A_y B_x C_z + A_x B_z C_y)$$

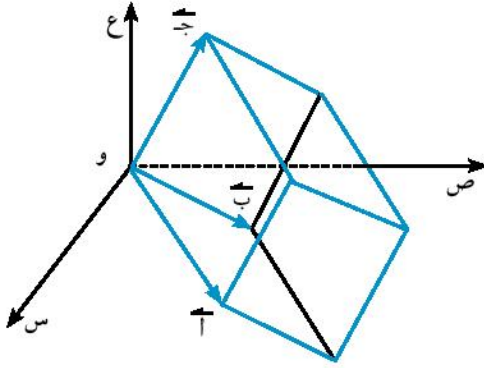
$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثي القياسي

١- الضرب الثلاثي القياسي قيمته لا تتغير إذا كانت ترتيب المتجهات في ترتيب دورى واحد.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad \text{لاحظ الترتيب الدورى } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

٢- إذا كانت المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ فى مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي ينعدم أى إن $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$



المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثي القياسي

إذا كان $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ثلاثة متجهات، تكون ثلاثة أحرف غير متوازية فى متوازي سطوح، فإن حجم متوازي السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثي القياسي.

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \text{حجم متوازي السطوح}$$

مثال

١١ أوجد حجم متوازي السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات $\vec{a} = (2, 1, 3)$ ، $\vec{b} = (1, 1, 2)$ ، $\vec{c} = (1, 1, 2)$

الحل

$$(1) \quad \text{حجم متوازي السطوح} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{أى أن حجم متوازي السطوح} = |28| = 28 \text{ وحدة حجم}$$

٢ حاول أن تحل

١١ أوجد حجم متوازي السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية، يمثلها المتجهات $\vec{a} = (3, -4, 1)$ ، $\vec{b} = (0, 2, 3)$ ، $\vec{c} = (2, 2, 3)$



تمارين (٣-٣)



أكمل ما يأتي: إذا كانت $\vec{s}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{e}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة:

- ١ $\vec{s} \cdot \vec{v} = \dots$
- ٢ $\vec{v} \times \vec{e} = \dots$
- ٣ إذا كان $\vec{a} = (1, -2)$ ، $\vec{b} = (3, -4)$ فإن مركبة $\vec{a}$ في اتجاه $\vec{b}$ تساوي $\dots$
- ٤ إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهان غير صفريان وكان $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ فإن $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ يكونان $\dots$
- ٥ إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهان غير صفريان وكان $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ فإن $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ يكونان $\dots$
- ٦ قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{s}_3 - \vec{v}$ ، $\vec{e} - \vec{s}_4 + \vec{v}$ يساوي $\dots$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٧ $\vec{s} \times \vec{v} = \dots$
 - أ $\vec{e}$
 - ب $\vec{0}$
 - ج $\vec{1}$
 - د $\vec{e}$
- ٨ إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهي وحدة متعامدين فإن $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \dots$
 - أ -8
 - ب -7
 - ج 24
 - د 0
- ٩ إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهي وحدة فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} \ni \dots$
 - أ $[0, 1]$
 - ب $[-1, 1]$
 - ج $[1, 1]$
 - د $+$
- ١٠ قياس الزاوية بين المتجهين $(2, -2, 2)$ ، $(1, 1, 4)$ يساوي $\dots$
 - أ $57,02^\circ$
 - ب $35,26^\circ$
 - ج $134,37^\circ$
 - د 0°
- ١١ إذا كان المتجهان $(2, 3, -4)$ ، $(4, 6, -7)$ متوازيين فإن $k = \dots$
 - أ 6
 - ب 3
 - ج -3
 - د 1

أجب عما يأتى:

١٢) أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ فى كل من الحالات الآتية:

- أ) $\vec{a} = (2, 1, 5), \vec{b} = (3, 4, -4)$
 ب) $\vec{a} = (2, -3, -3), \vec{b} = (4, 6, 2)$
 ج) $\vec{a} = (2, -3, -3), \vec{b} = (4, 6, 2)$

١٣) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية:

- أ) $(1, 1, 1), (2, 1, 5)$
 ب) $(4, 6, 2), (10, 2, 7)$
 ج) $(0, 2, 1), (4, 1, 2)$

١٤) أوجد $\vec{a} \times \vec{b}$ فى كل من الحالات الآتية:

- أ) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (4, 3, 1)$
 ب) $\vec{a} = (2, -3, -3), \vec{b} = (4, 6, 2)$
 ج) $||\vec{a}|| = 6, ||\vec{b}|| = 8$ وقياس الزاوية بينهما 60°

١٥) أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٢ سم. $\vec{a}$ متجه وحدة عمودى على مستواه. أوجد:

- أ) $\vec{a} \cdot \vec{a}$
 ب) $\vec{a} \times \vec{a}$
 ج) $\vec{a} \cdot \vec{a}$
 د) $\vec{a} \times \vec{a}$
 هـ) $\vec{a} \cdot \vec{a}$
 و) $\vec{a} \times \vec{a}$

١٦) أوجد متجه وحدة عمودياً على المستوى الذى يحوى المتجهين.

$$\vec{a} = (2, -3, -3), \vec{b} = (4, 6, 2)$$

١٧) احسب مساحة المثلث $\triangle$ هو فى كل مما يأتى:

- أ) $(2, 1, 5), (3, 4, -4), (0, 4, 2)$ و $(1, -1, 0)$
 ب) $(2, 0, 4), (5, 1, 2), (0, 1, -1)$

١٨ احسب مساحة متوازي الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى:

أ ل (١ ، ١) ، م (٣ ، ٢) ، ن (٤ ، ٥)

ب ل (٣ ، ١ ، ٢) ، م (٣ ، ١ ، ٢) ، ن (٣ ، ٥ ، ٢)

١٩ أوجد حجم متوازي السطوح الذى فيه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فيما يلى:

$\vec{A} = (٣ ، ١ ، ١)$ ، $\vec{B} = (٤ ، ١ ، ٢)$ ، $\vec{C} = (٢ ، ١ ، ٥)$

٢٠ فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك:

أ $\vec{A} = (٢ ، ٢ ، ٠)$ ، $\vec{B} = (٤ ، ٠ ، ٣)$

ب $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ، $\vec{B} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

ج $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ، $\vec{B} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

الوحدة الرابعة

الخطوط المستقيمة والمستويات في الفراغ Straight Lines and planes in space

مقدمة الوحدة

درست في الوحدة السابقة تحديد نقطة في الفراغ، كذلك متجهات الموضع وكيفية إيجاد معيارها وهذه تعتبر من أساسيات هذه الوحدة حيث إنها تعتبر استكمالاً لما درس في الوحدة السابقة ومكملاً لما درس في العام السابق. وفي هذه الوحدة سوف يدرس الطالب معادلة المستقيم في الفراغ كذلك معادلة المستوى بصورها المختلفة، وقد تنوعت الأمثلة وطرق الحل تحقيقاً للأهداف المعرفية والمهارية التي تساعد الطالب على دراسة المعارف والمفاهيم الأخرى المرتبطة بهندسة الفراغ في المراحل التعليمية التالية.

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم في الفراغ.
- ✚ يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم في الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم في الفراغ.
- ✚ يوجد المعادلة الاحداثية للمستقيم في الفراغ.
- ✚ يوجد المعادلة العامة للمستوى في الفراغ.
- ✚ يوجد المعادلة القياسية للمستوى في الفراغ.
- ✚ يتعرف الزاوية بين مستويين في الفراغ.
- ✚ يستنتج شرط تعامد مستويين في الفراغ.
- ✚ يستنتج شرط توازي مستويين في الفراغ.
- ✚ يوجد معادلة خط تقاطع مستويين في الفراغ.
- ✚ يعين المسافة بين نقطة ومستقيم في الفراغ.
- ✚ يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسي وباستخدام الصورة الكارتيزية.
- ✚ يعين المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية

plane	مستوى	Proportional	يتناسب	Direction vector	متجه اتجاه
Standard form	صورة قياسية	Parallel straight Lines	مستقيمان متوازيان	Direction angles	زوايا اتجاه
Parallel planes	مستويان متوازيان		مستقيمان متعامدان	Direction cosines	جيوب تمام الاتجاه
Perpendicular planes	مستويان متعامدان	Perpendicular straight Lines		Direction ratios	نسب الاتجاه
Intersecting planes	مستويان متقاطعان		مستقيمان متقاطعان	Vector equation	معادلة متجهة
Angle	زاوية	Intersecting straight Lines		Parametric equations	معادلات بارامترية
		Skew straight Lines	مستقيمان متخالفان	Cartesian equation	معادلة احداثية
		Perpendicular distance	بعد عمودي	General equation	معادلة عامة

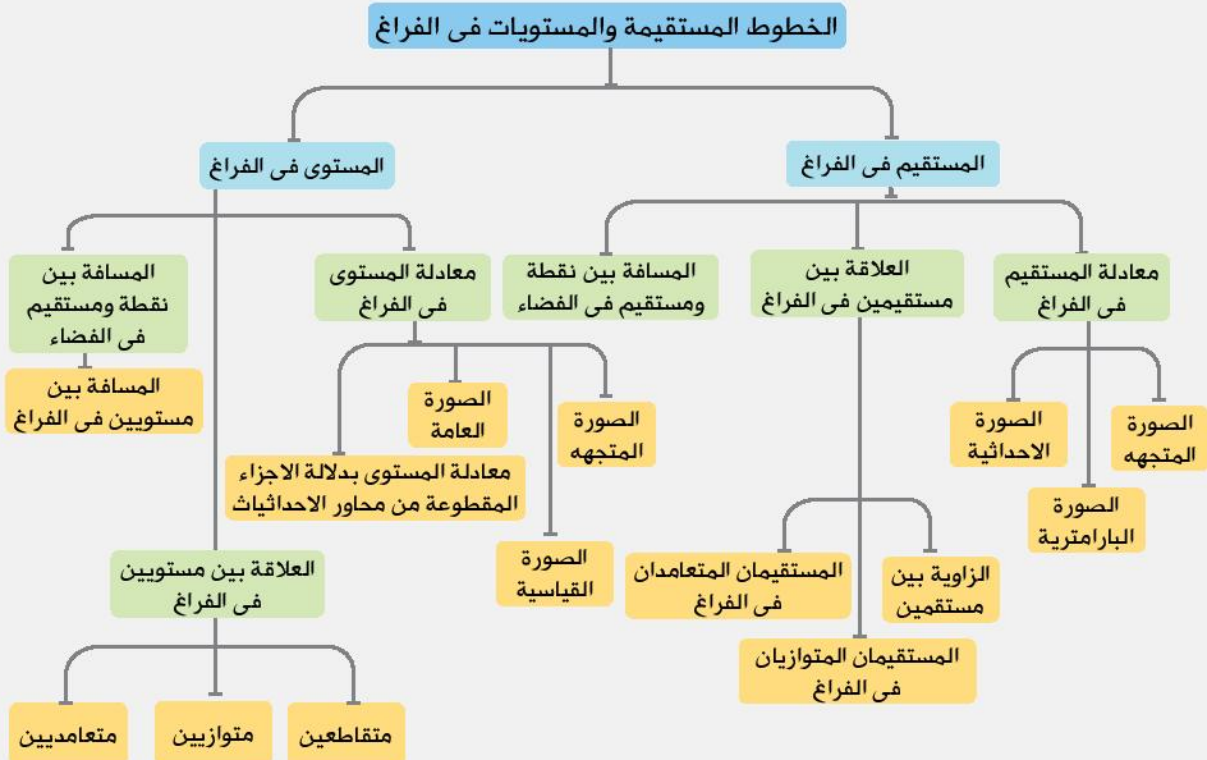
دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): معادلة المستقيم في الفراغ.
- الدرس (٢ - ٢): معادلة المستوى في الفراغ.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة بيانية.
- برامج رسومية ثلاثية الأبعاد.

مخطط تنظيمي للوحدة



معادلة المستقيم في الفراغ

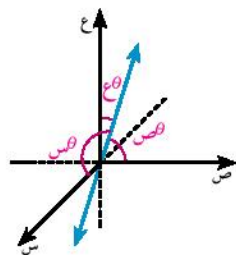
Equation of a straight Line in space

تعلمت في السنوات السابقة الخط المستقيم في المستوى وكيفية إيجاد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم في المستوى (الصورة المتجهة- الصورة البارامترية- الصورة العامة) وفي هذا الدرس نتعلم المستقيم في الفراغ وكيفية إيجاد معادلة المستقيم في الفراغ في صورها المختلفة لما في ذلك من أهمية كبيرة في مجالات الهندسة والتصميم المعماري وتطبيقات علوم الفضاء.

تعلم



Direction vector of a straight Line in space متجه اتجاه المستقيم في الفراغ



إذا كانت $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ هي زوايا اتجاه مستقيم في الفراغ فإن $\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z$ هي جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم وعادة يرمز لها بالرمز $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$.

$$\vec{l} = \cos \theta_x, \vec{m} = \cos \theta_y, \vec{n} = \cos \theta_z$$

ويكون $\vec{l}^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 = 1$

ويكون المتجه $\vec{r} = \vec{l}\vec{x} + \vec{m}\vec{y} + \vec{n}\vec{z}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المستقيم. ويكون أي متجه موازاً لمتجه الوحدة $\vec{r}$ يسمى متجه اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\vec{h}$

$$\vec{h} = k(\vec{l}\vec{x} + \vec{m}\vec{y} + \vec{n}\vec{z}) = (k\vec{l}, k\vec{m}, k\vec{n})$$

حيث k ، $\vec{l}$ ، $\vec{m}$ ، $\vec{n}$ تتناسب مع $\vec{l}$ ، $\vec{m}$ ، $\vec{n}$ ، $k \neq 0$
 $\vec{l}$ ، $\vec{m}$ ، $\vec{n}$ ، k تسمى نسب اتجاه المستقيم

فمثلاً: إذا كان $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ هي جيوب تمام الاتجاه المستقيم.

فإن المتجه $\vec{h} = k(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ يمثل متجه اتجاه المستقيم حيث $k \neq 0$ صفر

$$\text{بوضع } k = 3 \rightarrow \vec{h} = (2, 1, 2)$$

$$\text{وبوضع } k = -6 \rightarrow \vec{h} = (-4, -2, -4)$$

أي أن الخط المستقيم له عدد لا نهائي من متجهات الاتجاه المتوازية، وكل منها يوازي هذا المستقيم.

سوف تتعلم

- متجه اتجاه الخط المستقيم.
- الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.
- الزاوية بين مستقيمين.
- المسافة بين نقطة ومستقيم.
- المستقيمت المتوازية.
- المستقيمت المتعامدة.

مصطلحات أساسية

- Direction vector متجه اتجاه
- Parametric equations المعادلة البارامترية
- Cartesian equation المعادلة الاحداثية
- Direction angles زوايا الاتجاه
- Direction ratios نسب الاتجاه

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

مثال

١ أوجد متجه الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين أ (٢، ٣، ١) ، ب (٠، ٤، ٢)

الحل

$$\text{متجه اتجاه المستقيم} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (0, 4, 2) - (2, 3, 1) = (-2, 1, 1) = \overrightarrow{H} \therefore$$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمات الآتية:

أ) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (١، ٢، ٢)

ب) المستقيم المار بالنقطتين ج (٠، ٢، ٣) ، د (١، ١، ١)

تفكير ناقد:

١- ماذا يمكن أن تقول عن المستقيم الذي متجه اتجاهه $\overrightarrow{H} = (1, 0, 0)$ (أ، ب، صفر)

٢- أوجد متجه اتجاه لكل من محاور الإحداثيات.

تعلم



الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم في الفراغ Vector form of the equation of a straight Line in space

إذا كان ل مستقيم في الفراغ متجه اتجاهه $\overrightarrow{H} = (1, 0, 0)$ (أ، ب، ج) ويمر بالنقطة أ متجه موضعها $\overrightarrow{A} = (1, 1, 1)$ (أ، ص، ع) فإذا كانت النقطة ب أي نقطة على المستقيم متجه موضعها $\overrightarrow{B} = (1, 1, 1)$ (أ، ص، ع) فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ من الشكل يكون:

ولكن $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{H} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{H}$

$$\therefore \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + k \overrightarrow{H} \leftarrow \text{الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم.}$$

مثال

٢ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ١، ٠) والمتجه (٢، ٤، ٣) متجه اتجاه له.

الحل

$$(0, 1, 3) \text{ تمثل نقطة على المستقيم} \therefore \overrightarrow{A} = (0, 1, 3)$$

$$(2, 4, 3) \text{ يمثل متجه اتجاه المستقيم} \therefore \overrightarrow{H} = (2, 4, 3)$$

$$\text{معادلة المستقيم هي } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + k \overrightarrow{H}$$

$$\therefore \overrightarrow{B} = (0, 1, 3) + k(2, 4, 3) \leftarrow \text{الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم.}$$

ملحوظة: ك عدد حقيقي لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيمًا حقيقية مختلفة، ويسمى في هذه الحالة بارامتر. وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

فمثلاً عند $ك = ١$ فإن $\vec{r} = (١, ٣, ٣)$ تمثل متجه موضع نقطة على المستقيم.

وعند $ك = ٢$ فإن $\vec{r} = (-١, ٧, ٦)$ تمثل متجه موضع نقطة أخرى على المستقيم.

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(٤, -٢, ٥)$ والمتجه $(١, -٢, ٢)$ متجه اتجاه له. ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم.

تعلم

Parametric equations of a straight Line in space

المعادلات البارامترية للمستقيم في الفراغ

من المعادلة المتجهة للمستقيم $\vec{r} = \vec{a} + ك\vec{b}$ وبالتعويض عن $\vec{r} = (س, ص, ع)$ ، $\vec{a} = (س١, ص١, ع١)$ ، $\vec{b} = (ا, ب, ج)$ فإن $(س, ص, ع) = (س١, ص١, ع١) + ك(ا, ب, ج)$

∴ $(س = س١ + ك ا, ص = ص١ + ك ب, ع = ع١ + ك ج)$ ← المعادلات البارامترية للخط المستقيم

مثال

٢ أوجد المعادلات البارامترية للخط المستقيم المار بالنقطة $(٢, -١, ٣)$ والمتجه $(٤, -٢, ٥)$ متجه اتجاه له.

الحل

$\vec{r} = (٢, -١, ٣) + ك(٤, -٢, ٥)$ ← الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم
∴ $(س, ص, ع) = (٢, -١, ٣) + ك(٤, -٢, ٥)$
∴ $س = ٢ + ٤ك, ص = -١ - ٢ك, ع = ٣ + ٥ك$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل، والمتجه $(٢, -٣, ١)$ متجه اتجاه له.

تعلم

cartesian equation of a straight Line in space

المعادلة الاحداثية للخط المستقيم

من المعادلات البارامترية للخط المستقيم

$س = س١ + ك ا, ص = ص١ + ك ب, ع = ع١ + ك ج$ ∴ $\frac{س - س١}{ا} = \frac{ص - ص١}{ب} = \frac{ع - ع١}{ج}$ ← الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم

حيث كل من ا، ب، ج لا يساوى الصفر

ملحوظة:

١- في حالة $A = 0$ صفر مثلاً فإن الصورة الاحداثية للمستقيم تأخذ الصورة $S = S_1$ ، $\frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{ج}$

٢- تعلمت في السنوات السابقة أن معادلة المستقيم في المستوى هي $Ax + By + C = 0$ ويظن البعض أن معادلة المستقيم في الفراغ ستكون $Ax + By + Cz + D = 0$ وهذا خطأ شائع حيث إن المعادلة الأخيرة تمثل معادلة مستوى في الفراغ كما سيتضح ذلك في الدروس الآتية.

٣- حيث إن نسب الاتجاه A, B, C ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه L, M, N ، فإنها يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم على الصورة

$$\frac{س - س_1}{ل} = \frac{ص - ص_1}{م} = \frac{ع - ع_1}{ن}$$

مثال

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2, -1, 5)$ ، $(-3, 1, 4)$.

الحل

متجه اتجاه المستقيم $\vec{H} = (-3, 1, 4) - (2, -1, 5) = (-5, 2, -1)$

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $\vec{r} = (2, -1, 5) + \lambda(-5, 2, -1)$

المعادلات البارامترية $S = 2 - 5\lambda$ ، $C = -1 + 2\lambda$ ، $E = 5 - \lambda$

$$\frac{س - 2}{-5} = \frac{ص + 1}{2} = \frac{ع - 5}{-1}$$

الصورة الاحداثية

٥ حاول أن تحل

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين $(3, 2, 0)$ ، $(-1, 3, 4)$

مثال

٥ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{س^3 + 1}{2} = \frac{ص - 1}{2} = \frac{ع - 5}{3}$

الحل

$$\text{نفرض } K = \frac{س^3 + 1}{2} = \frac{ص - 1}{2} = \frac{ع - 5}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{س^3 + 1}{2} + \frac{1}{2} = س \\ \frac{ص - 1}{2} + 1 = ص \\ \frac{ع - 5}{3} + 5 = ع \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ومن هنا} \\ \text{ومن هنا} \\ \text{ومن هنا} \end{array} \quad \begin{array}{l} K = \frac{س^3 + 1}{2} \\ K = \frac{ص - 1}{2} \\ K = \frac{ع - 5}{3} \end{array}$$

ومن المعادلات البارامترية يمكن كتابة المعادلة

$$(س، ص، ع) = (1, 1, 5) + K(1, 1, 3)$$

أي $\vec{r} = (1, 1, 5) + K(1, 1, 3)$ الصورة المتجهة

لاحظ أن: نسب اتجاه المستقيم هي $(\frac{1}{3}, 2, 3)$ أو $(2, 3, 9)$

٤ حاول أن تحل

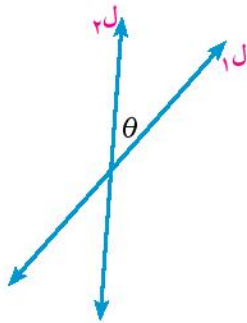
٥ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{x-4}{4} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم.

تعلم



The angle between two straight Lines in space

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ



إذا كان l_1 ، l_2 مستقيمين في الفراغ متجهي اتجاهيهما $\vec{h_1} = (a_1, b_1, c_1)$ ، $\vec{h_2} = (a_2, b_2, c_2)$ فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين l_1 ، l_2 تعطى بالعلاقة

$$\cos \theta = \frac{|\vec{h_1} \cdot \vec{h_2}|}{\|\vec{h_1}\| \|\vec{h_2}\|}$$

وإذا كان (l_1, m_1, n_1) ، (l_2, m_2, n_2) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن:

$$\cos \theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

مثال

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\vec{h_1} = (2, -1, 3)$ ، $\vec{h_2} = (-2, 0, 2)$ ، $s = 1$ ، $\frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{3}$

الحل

$$\vec{h_1} = (2, -1, 3)$$

من معادلة المستقيم الأول

$$\vec{h_2} = (-2, 0, 2)$$

من المعادلات البارامترية للمستقيم الثاني

$$\cos \theta = \frac{|\vec{h_1} \cdot \vec{h_2}|}{\|\vec{h_1}\| \|\vec{h_2}\|} = \frac{|(2, -1, 3) \cdot (-2, 0, 2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{14} \sqrt{8}}$$

٤ حاول أن تحل

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

$$l: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+5}{3}, m: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+5}{3}$$

مثال

٧ أوجد قياس الزاوية بين مستقيمين الذين جيوب تمام اتجاهيهما هي

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{12}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$$



الحل

$$\left(\frac{1}{26}, \frac{4}{260}, \frac{3}{260}\right) = (2, 4, 3) \quad \left(\frac{1}{26}, \frac{12}{2613}, \frac{5}{2613}\right) = (1, 12, 5)$$

$$\therefore \theta = |2n_1 + 4m_1 + 3l_1| =$$

$$= \left| \frac{1}{26} \times \frac{1}{26} + \frac{4}{260} \times \frac{12}{2613} + \frac{3}{260} \times \frac{5}{2613} \right| =$$

$$\frac{1}{60} = \left| \frac{1}{6} + \frac{48}{130} + \frac{15}{130} \right| =$$

$$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{1}{60}\right) = 89^\circ 6' 6''$$

٦ حاول أن تحل

٧ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاههما هي $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

تعلم



Parallel Lines in space

المستقيمان المتوازيان في الفراغ

إذا كان $\vec{r}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{r}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ هما متجهتا اتجاه المستقيمين L_1, L_2 فإن $L_1 \parallel L_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$ وهذا الشرط يمكن تحقيقه بعدة صور مختلفة

$$1- \vec{r}_1 = k \vec{r}_2 \quad 2- \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad 3- \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{0}$$

ملحوظة

١- إذا كان المستقيمان متوازيين وكانت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

٢- إذا كان $\vec{r}_1$ لا يوازي $\vec{r}_2$ فإن L_1, L_2 إما متقاطعان أو متخالفتان.

مثال

$$8 \text{ أثبت أن المستقيمين } \vec{r}_1 = (x-2, y+3, z-1) \text{ و } \vec{r}_2 = (x+1, y-2, z+3) \text{ متوازيين}$$

متقاطعان في نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما.



الحل

$$\vec{r}_1 = (1, 2, 1), \vec{r}_2 = (2, 2, -1)$$

$$\therefore \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{1}{-1} \quad \therefore \frac{1}{1} \neq \frac{2}{2} \quad \therefore \frac{1}{1} \neq \frac{2}{2}$$

$\therefore$ المستقيمان غير متوازيين لإثبات أن المستقيمين متقاطعان في نقطة نبحث عن قيمة L_1 وقيمة L_2 تجعلان $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

$$\therefore \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x-2, y+3, z-1) + (x+1, y-2, z+3) = (2x-1, y+1, 2z+2)$$

$$\therefore \vec{K} = \vec{K}_1 - \vec{K}_2 = 1 - 2 = -1 \quad \text{ومنها} \quad \vec{K} = 1 - 2 = -1 \quad (1)$$

$$\vec{K} = 1 - 2 = -1 \quad \text{ومنها} \quad \vec{K} = 1 - 2 = -1 \quad (2)$$

$$\vec{K} = 1 - 2 = -1 \quad \text{ومنها} \quad \vec{K} = 1 - 2 = -1 \quad (3)$$

$$\vec{K} = 1 - 2 = -1 \quad \text{ومنها} \quad \vec{K} = 1 - 2 = -1$$

بالتعويض من (3) في (1)

وهذه القيم تحقق المعادلة (2)

المستقيمان متقاطعان في نقطة، ويكون متجه موضع نقطة تقاطعهما هو
 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (1, 1, 1) - (2, 1, 1) = (-1, 0, 0)$ أي $(-1, 0, 0)$

حاول أن تحل

$$8 \quad \text{أثبت أن المستقيمين } \vec{r} = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1) \text{ و } \vec{r} = (2, 1, 1) + \mu(1, 1, 1) \text{ متعامدان}$$

$$\vec{r} = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1) \text{ و } \vec{r} = (2, 1, 1) + \mu(1, 1, 1)$$

متعامدان ومتقاطعان في نقطة، وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

تعلم

Perpendicular Lines in space

المستقيمان المتعامدان في الفراغ

إذا كان $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ هما متجهان اتجاه المستقيمين L_1 و L_2 فإن
 $L_1 \perp L_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

مثال

9 أثبت أن المستقيمين $\vec{r} = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1)$ و $\vec{r} = (2, 1, 1) + \mu(1, 1, 1)$ متعامدان
 ثم بين أن المستقيمين متخالفان.

الحل

$$\vec{r}_1 = (1, 1, 1) \quad \text{متجه اتجاه المستقيم الأول}$$

$$\vec{r}_2 = (1, 1, 1) \quad \text{متجه اتجاه المستقيم الثاني}$$

$$\therefore \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$$

$$11 \times 1 + 7 \times (-1) + (-2) \times 2 =$$

$$11 + 7 - 4 =$$

$$= 14 \quad \therefore \text{المستقيمان متعامدان}$$

لإثبات أن المستقيمين متخالفان نثبت أنه لا توجد أي قيم لـ λ و μ تجعل $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

أي $(1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1) = (2, 1, 1) + \mu(1, 1, 1)$ بمساواة المعاملات

$$(1) \quad 1 + \lambda = 2 + \mu \quad \text{ومنها} \quad \lambda = 1 + \mu$$

$$(2) \quad 1 + \lambda = 1 + \mu \quad \text{ومنها} \quad \lambda = \mu$$

$$(3) \quad 1 + \lambda = 1 + \mu \quad \text{ومنها} \quad \lambda = \mu$$

بحل المعادلتين ١، ٢ نحصل على $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ وهذه القيم لا تحقق المعادلة الثالثة
 $\therefore$ المستقيمان متخالفان

٩ حاول أن تحل

٩ أثبت أن المستقيمين $\overleftrightarrow{r_1} = (2, 1, 3)$ و $\overleftrightarrow{r_2} = (3, 1, 4)$ متخالفان.

مثال

١٠ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, 1, 2)$ ويقطع المستقيم $\overleftrightarrow{r_1} = (2, 1, 3)$ و $\overleftrightarrow{r_2} = (1, 2, 2)$ على التعامد.

الحل

نفرض أن المستقيمين متقاطعان في نقطة جـ

$\therefore$ جـ $\in$ المستقيم ل_١ (المستقيم المعلوم)

$\therefore$ جـ يمكن كتابتها على الصورة

$$\text{جـ} = (2 + 1, 1 + 2, 3 + 2)$$

متجه اتجاه ل_٢ (المستقيم المطلوب) هو $\overrightarrow{h_2} = \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}$

$$\therefore \overrightarrow{h_2} = (1 - 2, 2 - 1, 2 - 3) = (-1, 1, -1)$$

$$\therefore \overrightarrow{h_2} = (1, 2, 2)$$

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

$$\therefore 0 = (1 - 2, 2 - 1, 2 - 3) \cdot (1, 2, 2)$$

$$\therefore 0 = 1 + 2 + 2 - 2 - 1 - 3$$

$$\therefore 1 = 2 - 1 \text{ ومنها } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{h_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$\therefore \text{معادلة لـ } \overleftrightarrow{r_2} \text{ هي } (3, 1, 2) + \overrightarrow{h_2} = (3, 1, 2) + \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

٩ حاول أن تحل

١٠ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم $\overleftrightarrow{r_1} = (4, 1, 3)$ و $\overleftrightarrow{r_2} = (3, 1, 2)$ على التعامد

مثال

(المسافة بين نقطة ومستقيم في الفراغ)

١١ أوجد البعد العمودي من النقطة $(7, 1, 3)$ للمستقيم المار بالنقطتين $(1, 2, 2)$ و $(5, 3, 0)$

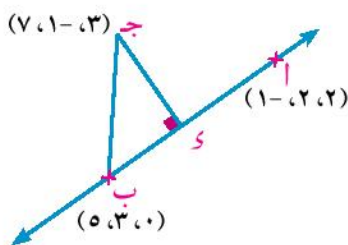
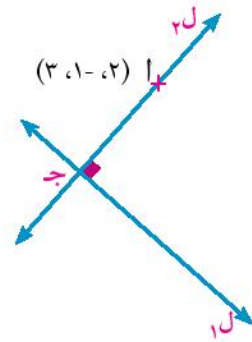
الحل

بفرض أ $(1, 2, 2)$ ب $(5, 3, 0)$ جـ $(7, 1, 3)$

$$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$$

متجه اتجاه المستقيم هو $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$

$$\therefore \overrightarrow{h} = (4, 1, 2)$$



$$B \text{ هي مقياس مسقط } \overrightarrow{B \cdot J} \text{ على المستقيم } \overleftrightarrow{AB} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B \cdot J}|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\therefore B = \frac{2}{\sqrt{41}} = \frac{|(6, -1, 2) \cdot (2, 4, -3)|}{\sqrt{(6-)^2 + (-1-)^2 + 2^2}} =$$

$$\text{لكن } \|\overrightarrow{B \cdot J}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \text{البعد العمودي جـ د} = \sqrt{(B \cdot J)^2 - (B \cdot D)^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1180}{41}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{41} - 29} = \sqrt{\frac{1180}{41} - 29} \approx 0,3 \text{ وحدة طول}$$

٤ حاول أن تحل

١١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ١، ٤) على المستقيم $\overleftrightarrow{R} = (2, 1, -1) + \lambda(2, 3, 2) + \mu(2, 1, -1)$

تفكير ناقد: هل يمكنك اثبات الصيغة التالية التي تعين بعد النقطة ب عن المستقيم $\overleftrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \lambda \overrightarrow{K} + \mu \overrightarrow{H}$

$$\text{البعد العمودي} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{HK}\|}{\|\overrightarrow{HK}\|}$$

تمارين (٤ - ١)

أكمل:

- ١ المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢، ١، ٣) والمتجه (١، ٤، ٢) متجه اتجاه له هي
- ٢ قياس الزاوية بين المستقيمين $s = 3$ و $s = 2$ و $s = 6$ و $s = 4$ ع يساوي
- ٣ قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هي (١، ١، ٢)، (٢، ١، ٣) و (١، ٣، ٤) يساوي
- ٤ إذا كانت θ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣، ١، ١) ونقطة الأصل والاتجاه الموجب لمحور ع فإن $\cos \theta =$
- ٥ متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٥، ٤)، (٥، ٣، ٣) هو

اجب عن الاسئلة الآتية:

- ٦ أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذي نسب اتجاهه
 أ - ١، ٢، ٣ ب - ١، ١، ١
- ٧ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.
 أ - المار بالنقطة (٤، ٢، ٥) والمتجه $\overrightarrow{H} = (2, 1, -1)$ متجه اتجاه له.
 ب - المار بالنقطة (٣، ١، ٥) ويوازي المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 2)$
 ج - المار بالنقطتين (٣، ٢، ٠)، (٠، ٤، ١)
 د - المار بالنقطة (٣، ٢، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

٨ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم س-٣ = $\frac{ص+٢}{٤} = \frac{ع-٢}{٣}$

٩ إذا كان $\vec{OA} = \vec{OS} - ٢\vec{ص} + \vec{ع}$ ، $\vec{OB} = -\vec{س} - ٣\vec{ع}$ ، $\vec{OC} = ٣\vec{س} + \vec{ص} - ٢\vec{ع}$ ، $\vec{OD} = ٨\vec{س} + \vec{ص} + ٤\vec{ع}$.

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات

- أ) المار بالنقطتين أ، ب
ب) المار بالنقطة و موازيًا ب ج
ج) المار بالنقطة ج قاطعًا أب على التعامد

١٠ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

أ) ل: يمر بالنقطتين (٣-، ٢، ٤) ، (٢، ٥، ٢-)

م: يمر بالنقطتين (١، ٢-، ٢) ، (٢، ٤، ٢)

ب) ل: $\vec{ر} = (٢، ١-، ٣) + \vec{ك} (١-، ٤، ٢)$

م: $\vec{ر} = (١-، ٢، ٠) + ٢\vec{ك} (١، ١، ٣)$

ج) ل: $٢س = ٣ص = ٤ع$

م: $\frac{ع}{٥-} = \frac{ص+٢}{٢-} = \frac{س-١}{٣}$

١١ اذكر الشرط (أو الشروط) اللازم لكي يكون المستقيمان

ل: $س = س١ + ا١ك$ ، $ص = ص١ + ب١ك$ ، $ع = ع١ + ج١ك$

م: $س = س٢ + ا٢ك$ ، $ص = ص٢ + ب٢ك$ ، $ع = ع٢ + ج٢ك$

- أ) متوازيان
ب) متعامدان
ج) متقاطعان في نقطة

١٢ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ (١-، ١، ٠) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين ب (٣-، ٢، ١)، ج (٢، ١، ٠) ثم بين أن النقطة و (١٤-، ٢، ٣) تقع على المستقيم.

١٣ أوجد قيمة ن التي تجعل المستقيمين ل: $\vec{ر} = (٣، ١-، ن) + \vec{ك} (٤، ١، ٣)$

م: $س = \frac{ص-٤}{١-} = \frac{ع+١}{٢}$ متقاطعان في نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما

١٤ اكتشاف الخطأ:

أ) مجموع مربعات نسب الاتجاه لأي مستقيم يساوي ١

ب) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١، ع١)، (س٢، ص٢، ع٢) هي

(س٢-س١، ص٢-ص١، ع٢-ع١)

ج) إذا كان (أ١، ب١، ج١)، (أ٢، ب٢، ج٢) هي نسب الاتجاه للمستقيمين ل١، ل٢ فإن قياس الزاوية بينهما

تعطى بالعلاقة $\cos \theta = \frac{||\vec{A}_1|| \cdot ||\vec{A}_2||}{||\vec{A}_1 + \vec{A}_2||}$

The equation of a plane in space

فكر و ناقش



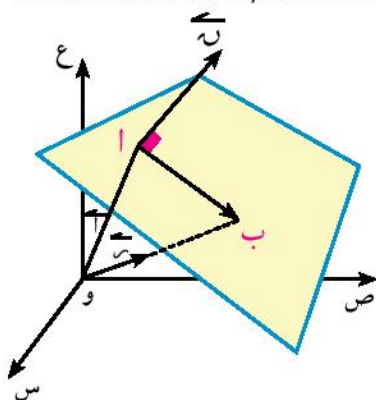
- ١- إذا كان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهين متعامدين فإن $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
- ٢- متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١، ع١)، (س٢، ص٢، ع٢) هو
- ٣- الإحداثي ع لجميع النقط التي تقع في المستوى الإحداثي س ص يساوي

تعلم



الصورة المتجهة لمعادلة المستوى في الفراغ

Vector form of the equation of a plane in space



إذا كانت النقطة أ (س١، ص١، ع١) تقع على المستوى متجه موضعها $\vec{A}$ ، وكان المتجه $\vec{n} = (أ، ب، ج)$ متجه اتجاه عمودي على المستوى وكانت ب (س، ص، ع) أي نقطة على المستوى متجه موضعها $\vec{r}$ فإن:

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{A}) = 0 \quad (\vec{r} = \vec{A})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{A} \quad \leftarrow \text{الصورة المتجهة لمعادلة المستوى.}$$

أي أن: لإيجاد المعادلة المتجهة للمستوى يجب معرفة نقطة على المستوى ومتجه الاتجاه العمودي على المستوى.

مثال



- ١ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٠، ١، ١) والمتجه $\vec{n} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{e}$ عمودي على المستوى.

سوف تتعلم

- المعادلة المتجهة للمستوى في الفراغ.
- المعادلة القياسية للمستوى في الفراغ.
- المعادلة العامة للمستوى في الفراغ.
- الزاوية بين مستويين.
- شرط توازي مستويين.
- شرط تعامد مستويين.
- معادلة خط تقاطع مستويين في الفراغ.
- المسافة بين نقطة ومستوى.
- المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية

- plane مستوى
- Standard form صورة قياسية
- Parallel planes مستويان متوازيان
- Perpendicular planes مستويان متعامدان
- Intersecting planes مستويان متقاطعان
- Angle زاوية

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

الحل

$$\begin{aligned} \text{المعادلة المتجه } \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r} \text{ حيث } \vec{r} = (1, 1, 0) \\ \therefore (1, 1, 0) \cdot (1, 1, 1) = \vec{r} \cdot \vec{r} = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) \\ 2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

٦ حاول أن تحل

١ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢، ٣، ١) والمتجه $\vec{n} = (1, 2, 3)$ عمودى على المستوى.

تعلم



الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى في الفراغ

Standard form and general form of the equation of a plane in space

من الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \text{ صفر}$$

$$\vec{r} = (x, y, z), \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \vec{n} = (a, b, c) = \vec{r} - \vec{r}_0$$

حيث

$$\therefore (x, y, z) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \text{ صفر}$$

$$\therefore (x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = 0 \text{ الصورة القياسية لمعادلة المستوى}$$

وبفك الأقواس

$$\therefore x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 = 0$$

وبفرض $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3$ فإن

$$x - 1 + y - 2 + z - 3 = 0 \text{ الصورة العامة لمعادلة المستوى}$$

مثال

٢ أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٣، ٥، ٢) والمتجه $\vec{n} = (1, 1, 2)$ عمودى على المستوى.

الحل

$$\text{الصورة القياسية } (x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\therefore (x - 3) + (y - 5) + (z - 2) = 0 \text{ الصورة القياسية}$$

وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة

$$\therefore x + y + z - 10 = 0 \text{ الصورة العامة}$$

٦ حاول أن تحل

٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٣، ٤، ٢) والمتجه $\vec{n} = (1, -1, 3)$ عمودى على المستوى.

مثال

(معادلة المستوى المار بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة)

٢ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط $(0, 1, -3)$ ، $(2, 1, 4)$ ، $(0, 3, 3)$.

الحل

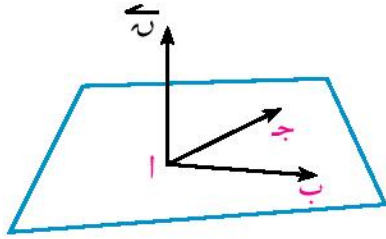
أولاً يجب التأكد من أن النقط ليست على استقامة واحدة

بفرض $A(0, 1, -3)$ ، $B(2, 1, 4)$ ، $C(0, 3, 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \therefore \overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$. $\therefore$ النقط ليست على استقامة واحدة

لإيجاد معادلة المستوى نحتاج متجه اتجاه العمودي على المستوى. وذلك بإيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e} & \overrightarrow{v} & \overrightarrow{s} \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e}(2 \cdot 6 - 0 \cdot 8) - \overrightarrow{v}(12 - 0) + \overrightarrow{s}(4 - 0) = 12\overrightarrow{e} - 12\overrightarrow{v} + 4\overrightarrow{s}$$

$\therefore$ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{n}$$

$$\therefore (x, y, z) \cdot (12, -12, 4) = (0, 1, -3) \cdot (12, -12, 4)$$

$$\therefore 12x - 12y + 4z = 21$$

الصورة القياسية لمعادلة المستوى

$$12(x - 0) - 12(y - 1) + 4(z + 3) = 0$$

$$\therefore 12(x - 0) - 12(y - 1) + 4(z + 3) = 0$$

الصورة العامة لمعادلة المستوى

$$12x - 12y + 4z - 21 = 0$$

$$\therefore 12x - 12y + 4z - 21 = 0$$

حاول أن تحل

٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط $(0, 2, 0)$ ، $(0, 0, 1)$ ، $(3, 0, 0)$.

مثال

(مستوى يحوى مستقيمين)

٤ أثبت أن المستقيمين $r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ متقاطعان، وأوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

$$r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

متقاطعان، وأوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

أضف إلى معلوماتك

معادلة المستوى المار بثلاث

نقط (س، ص، ع) $(1, 2, 3)$ ،
 (س، ص، ع) $(2, 1, 4)$ ،
 (س، ص، ع) $(0, 3, 3)$ هي:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

إذا تقاطع المستقيمان فإن $r_1 = r_2$
 $\therefore (3\vec{s} - \vec{v} + \vec{e}) + (2\vec{s} - \vec{v} + \vec{e}) = (3\vec{s} + 2\vec{v} + \vec{e}) + (2\vec{s} - \vec{v} + \vec{e})$

بمساواة المعاملات نجد أن

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 &= 2 - 1 \quad \text{ومنها} \quad 1 = 2 - 1 \\ (2) \quad 4 &= 2 + 2 \quad \text{ومنها} \quad 2 = 2 \\ (3) \quad 1 &= 3 - 1 \quad \text{ومنها} \quad 1 = 3 - 1 \end{aligned}$$

بحل المعادلتين ١، ٢ ، $1 = 1$ ، $2 = 2$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٣) نجد أنها تحققها
 $\therefore$ المستقيمان متقاطعان.

متجه الاتجاه العمودي على المستوى هو $\vec{n}$ حيث

$$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e} - \vec{v} + \vec{s}$$

المعادلة المتجهة للمستوى $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$

$$\begin{aligned} \therefore (1, 1, 3) \cdot (3, 2, 1) &= \vec{r} \cdot (\vec{e} - \vec{v} + \vec{s}) \\ \therefore 20 &= \vec{r} \cdot (\vec{e} - \vec{v} + \vec{s}) \end{aligned}$$

الصورة العامة

$$\begin{aligned} 20 &= (3, 2, 1) \cdot (x, y, z) \\ \therefore 20 &= 3x - y + z \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

٤ أثبت أن المستقيمين $l_1: 2x = 3y = 4z$ ، $l_2: 3x = 2y = 5z$ متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذي يحويهما .

مثال

٥ أوجد نقطة تقاطع المستقيم $2x = 3y = 4z - 1$ مع المستوى $3x + 2y - z = 5$

الحل

من معادلة المستوى $3x + 2y - z = 5$

بالتعويض في معادلة المستقيم

$$2x = 3y = 4z - 1 \quad \Rightarrow \quad 4z - 1 = 3y \quad \Rightarrow \quad 4z = 3y + 1$$

$$(1) \quad 14 = 6 - x \quad (2) \quad 18 = 9 + x$$

بحل المعادلتين (١)، (٢) نحصل على

$$س = ٢٨، ع = ٧٢$$

$$\therefore ص = ٢٥$$

بالتعويض في معادلة المستوى

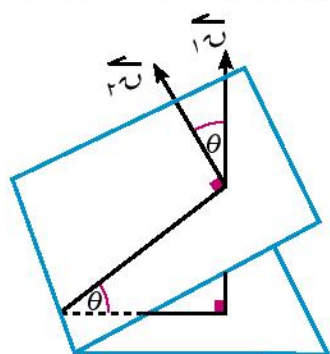
$\therefore$ نقطة التقاطع هي $(٢٨، ٢٥، ٧٢)$

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد نقطة تقاطع المستقيم $س = (٢، ٤، ١) + ك(٢، ٢، ٣)$ مع المستوى $س = (٢، ٢، ٣) \cdot س = ٢$

تعلم

the angle between two planes



الزاوية بين مستويين هو قياس الزاوية بين متجهي الاتجاه العموديين عليهما. فإذا كان $س_١، س_٢$ هما المتجهين العموديين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطى بالعلاقة

$$\cos \theta = \frac{||س_١ \cdot س_٢||}{||س_١|| ||س_٢||} \text{ حيث } ٩٠^\circ > \theta > ٠$$

مثال

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستويين $س = (٢، ١، ٤) \cdot س = ٥، س = ٣ - ص + ع٢، ع = ٤$

الحل

متجه الاتجاه العمودي على المستوى الأول $س_١ = (٢، ١، ٤)$

متجه الاتجاه العمودي على المستوى الثاني $س_٢ = (٢، ١، ٣)$

$\therefore$ قياس الزاوية بين المستويين هي θ حيث

$$\cos \theta = \frac{||س_١ \cdot س_٢||}{||س_١|| ||س_٢||} = \frac{|(٢، ١، ٤) \cdot (٢، ١، ٣)|}{\sqrt{٢^2 + ١^2 + ٤^2} \sqrt{٢^2 + ١^2 + ٣^2}} = \frac{١٥}{\sqrt{٢١} \sqrt{١٤}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{١٥}{\sqrt{٢١} \sqrt{١٤}} \right) = ٢٨^\circ ٥٨'$$

٤ حاول أن تحل

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستويين $س = ٣ - ص + ع٢، ع = ٠، س = ٢ + ص - ع٣$

Parallel planes and perpendicular planes

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان

إذا كان $س_١، س_٢$ هما متجهي الاتجاه العموديين على المستويين فإن

$$\left(\frac{١}{س_١} = \frac{١}{س_٢} = \frac{١}{س_٣} \right)$$

أي إذا كان

١- المستويين متوازيان إذا كان $س_١ // س_٢$

$$٠ = (١، ١، ٢) + (٢، ١، ٢) + (٣، ١، ٢)$$

أي إذا كان

٢- المستويين متعامدان إذا كان $س_١ \cdot س_٢ = ٠$

مثال

٧ إذا كان المستوى 2 س - ص + ك = 5 يوازي المستوى س + ل + ص + ع = 1 فما قيمة كل من ك ، ل.

الحل

$$\therefore \text{المستويان متوازيان} \quad \therefore \frac{\frac{1}{-1}}{\frac{1}{-1}} = \frac{\frac{1}{-1}}{\frac{1}{-1}} = \frac{\frac{1}{-1}}{\frac{1}{-1}} \quad \therefore \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1}$$

$$\therefore \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \quad \therefore \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1}$$

٦ حاول أن تحل

٧ إذا كان المستوى س - ص + ع = 4 عمودى على المستوى أس + ص + ع = 2 فما قيمة أ

مثال

(معادلة خط تقاطع مستويين)

٨ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين س + ص - ع = 2 ، س + ص - ع = 5

الحل

بحذف س من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الأولى فى -٢ والجمع مع الثانية

$$\therefore \begin{aligned} & 3 - ص + ع = 2 \\ & 3 - ص + ع = 2 \end{aligned} \quad \text{ومنها} \quad 3 - ص + ع = 2$$

بحذف ص من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الثانية فى -٢ والجمع

$$\therefore \begin{aligned} & 3 - ص + ع = 2 \\ & 3 - ص + ع = 2 \end{aligned} \quad \text{ومنها} \quad 3 - ص + ع = 2$$

معادلة خط التقاطع

$$\therefore \frac{3 - ص + ع}{1} = \frac{3 - ص + ع}{1} = \frac{3 - ص + ع}{1}$$

حل آخر:

$$(1) \quad 3 - ص + ع = 2$$

$$(2) \quad 3 - ص + ع = 5$$

بحذف س

$$(3) \quad 3 - ص + ع = 2$$

بفرض ع = ك

$$(2) \quad 3 - ص + ك = 5 \quad (3) \quad 3 - ص + ك = 5$$

المعادلات البارامترية لخط التقاطع هي

$$\text{س} = 3 - \frac{2}{3} \text{ك} \quad \text{ص} = 1 - \frac{1}{3} \text{ك} \quad \text{ع} = \text{ك}$$

حل ثالث:

خط التقاطع عمودى على المتجهين $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ العمودين على المستويين.

متجه اتجاه خط التقاطع $\vec{h}$ يمكن حسابه من الضرب الاتجاهى للمتجهين $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$

$$\vec{h} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{h} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(مثلاً) $س = ١$

(١) $ص٢ - ع٢ = صفر$

(٢) $ص٣ - ع٣ = ٣$

$ع = -\frac{٣}{٢}$ ، $ص = -\frac{٣}{٢}$

لإيجاد نقطة على خط التقاطع نضع

بالتعويض معادلة المستوى الأول

بالتعويض معادلة المستوى الثاني

بحل المعادلتين (١)، (٢) نحصل على

∴ النقطة (١، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) تقع على خط التقاطع.

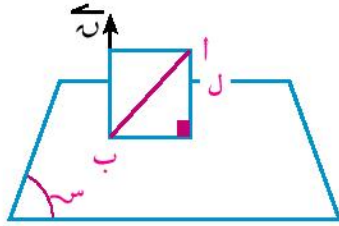
معادلة خط التقاطع $\vec{r} = (١، -\frac{٣}{٢}، -\frac{٣}{٢}) + ك(٣، -١، -٤)$

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين $س٣ = ص٣ + ع٢ = ٢$ ، $س - ص٢ + ع٥ = ٢$

تعلم

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى the length of the perpendicular from a point to a plane



إذا كانت $أ(س١، ص١، ع١)$ نقطة خارج المستوى $س$ وكانت $ب$ نقطة على المستوى، $\vec{n}$ متجه الاتجاه العمودي على المستوى فإن بعد النقطة $أ$ عن المستوى يساوي طول مسقط $\vec{b}$ على $\vec{n}$

$$l = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{n}\|}$$

مثال

٩ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١، -١، ٣) على المستوى الذي معادلته $\vec{r} \cdot (٢، ٢، -١) = ٥$

الحل

يجب إيجاد نقطة على المستوى ومتجه اتجاه العمودي على المستوى من معادلة المستوى $\vec{r} \cdot (٢، ٢، -١) = ٥$ نجد أن $\vec{n} = (٢، ٢، -١)$

ولإيجاد نقطة على المستوى نفرض أن المستوى يقطع محور $ع$ في النقطة (٠، ٠، ع)

∴ $(٠، ٠، ع) \cdot (٢، ٢، -١) = ٥$ ومنها $ع = -٥$

∴ النقطة $ب(٠، ٠، -٥)$ تقع على المستوى

حيث $أ(١، -١، ٣)$ $\vec{b} = \vec{a} - \vec{n} = (٨، -١، ١)$

$$\text{طول العمود (ل)} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(٢، ٢، -١) \cdot (٨، -١، ١)|}{\sqrt{٢^2 + ٢^2 + (-١)^2}} = \frac{٨}{٣} \text{ وحدة}$$

٩ حاول أن تحل

٩ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(-2, 1, 4)$ على المستوى الذي معادلته $\vec{r} = (2, 3, 1)$.

الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة على مستوى

علمت أن طول العمود المرسوم من نقطة $A(1, 1, 2)$ على المستوى المار بالنقطة $B(2, 3, 1)$ والمتجه $\vec{n} = (1, 2, 3)$ عمودي على المستوى يعطى بالعلاقة

$$L = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\therefore L = \frac{|(1, 1, 2) \cdot (2, 3, 1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 3 + 2|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$\therefore$ النقطة $B(2, 3, 1)$ تقع على المستوى $2x + 3y + z = 0$

$$\therefore 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 = 0$$

$$\therefore L = \frac{|2 + 3 + 2|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \quad \leftarrow \text{الصورة الإحداثية لطول العمود}$$

مثال

١٠ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(1, 5, -4)$ على المستوى الذي معادلته $3x - 2y + z = 6$

الحل

$$L = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|3 - 10 - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

٩ حاول أن تحل

١٠ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(-1, 4, 0)$ على المستوى الذي معادلته $3x - 2y + z = 6$

مثال (المسافة بين مستويين متوازيين)

١١ أثبت أن المستويين $3x - 2y + z = 4$ و $3x - 2y + z = 8$ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

الحل

لإثبات أن المستويين متوازيان نثبت أن متجهي الاتجاه العموديين عليهما متوازيان.

$$\vec{n}_1 = (3, -2, 1), \vec{n}_2 = (3, -2, 1)$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \frac{1}{-2} = \frac{1}{-2}, \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \frac{1}{-2} = \frac{1}{-2}, \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$\therefore$ المستويان متوازيان

لإيجاد المسافة بينهما نوجد نقطة على إحداهما، ثم نوجد طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.
لإيجاد نقطة على المستوى الأول نفرض $s = 0$ ، $v = 0$

بالتعويض في معادلة المستوى الأول $\therefore \frac{3}{4} = e$

$\therefore$ النقطة $(0, 0, \frac{3}{4})$ تقع على المستوى الأول

ويكون طول العمود المرسوم منها للمستوى الثاني هو l حيث

$$l = \frac{1}{\sqrt{(-\frac{3}{4})^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{33}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{33}}$$

٩ حاول أن تحل

١١ أثبت أن المستويين $s = 3 + v + 6e$ ، $s = 4 + v + 2e$ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

تعلم

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات في النقط $(s, 0, 0)$ ، $(0, v, 0)$ ، $(0, 0, e)$ فإن معادلة المستوى تكون على الصورة

$$\frac{s}{s} + \frac{v}{v} + \frac{e}{e} = 1 \quad \leftarrow \text{معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات}$$

استعن بمدرسك لإثبات الصورة السابقة لمعادلة المستوى.

مثال

١٢ أوجد معادلة المستوى الذي يقطع من محاور الإحداثيات s ، v ، e الأجزاء 2 ، 3 ، 5 على الترتيب.

الحل

$$\text{معادلة المستوى هي } 1 = \frac{s}{s} + \frac{v}{v} + \frac{e}{e}$$

$$\text{أي } 1 = \frac{s}{5} + \frac{v}{3} + \frac{e}{2}$$

٩ حاول أن تحل

١٢ أوجد الأجزاء التي يقطعها المستوى $s = 3 + v + 6e$ من محاور الإحداثيات.

تفكير ناقده

إذا قطع المستوى $s = 3 + v + 6e$ محاور الإحداثيات s ، v ، e في النقط a ، b ، c على الترتيب. احسب مساحة المثلث abc



تمارين (٤ - ٢)



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) أي من النقط تقع في المستوى $2س + 3ص - ع = 0$

أ) (١، ١، ١)

ب) (١، ٢، ٠)

ج) (١، ٢، ٣)

د) (٠، ٢، ١)

٢) المستوى $3س - 2ص + 4ع = 12$ يقطع من محور $س$ جزء طوله

أ) ٣

ب) ٤

ج) ٤

د) ٦

٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى $س + ٥ص - 6ع = 30$ هي $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، فإن $أ + ب + ج =$

أ) صفر

ب) ٣٠

ج) ٣١

د) ٤١

٤) معادلة المستوى المار بالنقط (١، ٢، ٣) ويوازي محوري الإحداثيات $س$ ، $ص$ هي

أ) $س + ٣ص = ٣$

ب) $ع = ٣$

ج) $س = ١$

د) $ص = ٢$

٥) معادلة المستوى المار بالنقط (٢، ٣، ٥)، (١، ٣، ٤)، (٢، ٣، ٤) هي

أ) $س + ٣ص - ع = ٠$

ب) $س = ١$

ج) $ص = ٣$

د) $ع = ٢$

٦) معادلة المستوى المار بالنقطة (١، ٢، ٥) والمتجه $(٢، ١، ٣)$ عمودي عليه هي

أ) $٢س + ٣ص + ع = ١٥$

ب) $٢س + ٣ص + ع = ١$

ج) $س - ٢ص + ٥ع = ١٥$

د) $س + ٣ص + ع = ٤$

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١، ١، ٤) والمتجه $\vec{u} = (٢، ٣، ٤)$ عمودي عليه ثم بين:

أ) هل النقطة (٢، ٢، ١) تقع في المستوى؟

ب) هل المتجه $\vec{v} = (٣، ٥، ٢)$ يوازي المستوى؟

٨) أوجد ثلاث نقط في الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية:

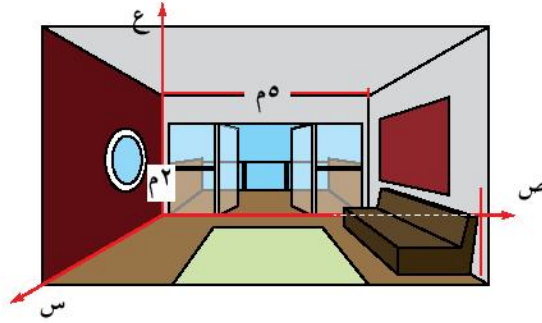
أ) $س = ٣$

ب) $ص = ٢$

ج) $س + ٣ص = ٥$

د) $٢س - ٣ص + ع = ٤$

- ٩ أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه $\vec{u} = \vec{s} + 2\vec{v} - 3\vec{e}$ عمودى عليه.
- ١٠ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة $(2, -1, 0)$ والمتجه $\vec{u} = 4\vec{s} + 10\vec{v} - 7\vec{e}$ عمودى عليه.
- ١١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط $A(2, -1, 0)$ ب $(-1, 3, 4)$ ج $(3, 0, 2)$
- ١٢ أثبت أن المستقيم $\vec{r} = \vec{e} + \vec{k}(2\vec{s} + 3\vec{v} + 4\vec{e})$ عمودى على المستوى $\vec{s} + \frac{3}{4}\vec{v} + 2\vec{e} = 0$
- ١٣ أثبت أن النقطة $A(2, 3, 1)$ والمستقيم $\vec{r} = (3\vec{s} + \vec{v} + 2\vec{e}) + \vec{k}(2\vec{s} - \vec{v} + 2\vec{e})$ يقعان فى المستوى الذى معادلته $\vec{r} \cdot (2\vec{s} - \vec{e}) = 3$
- ١٤ أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $(2, 1, 4)$ ويحقق كلاً من الشروط الآتية:
- أ يوازي المستوى $2\vec{s} + 3\vec{v} + 5\vec{e} = 1$
- ب عمودى على المستقيم المار بالنقطتين $(3, 2, 5)$ ، $(1, 6, 4)$
- ج عمودى على كل من المستويين $7\vec{s} + \vec{v} + 2\vec{e} = 6$ ، $3\vec{s} + 5\vec{v} - 6\vec{e} = 8$
- ١٥ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\vec{r} = \vec{e} + \vec{k}(2\vec{s} + \vec{v} + \vec{e})$ مع المستوى $\vec{s} \cdot \vec{e} = 4$
- ١٦ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات $\vec{s}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{e}$ الأجزاء 2 ، 4 ، 5 على الترتيب.
- ١٧ **الربط بالبيئة:** فى الشكل المقابل. أوجد معادلة كل من



- أ مستوى أرضية الحجرة.
- ب مستوى سقف الحجرة.
- ج مستويات الحوائط الجانبية.
- ١٨ أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم $\vec{r} = (0, 3, -5) + \vec{k}(6, -2, 1)$ ويوازي المستقيم $\vec{r} = (1, 7, -4) + \vec{k}(1, 3, -3)$
- ١٩ أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:
- أ $\vec{r}_1: 2\vec{s} - \vec{v} + \vec{e} = 0$ ، $\vec{r}_2: 3\vec{s} + 2\vec{v} - \vec{e} = 1$
- ب $\vec{r}_1: \vec{s} \cdot (2, 1, -1) = 4$ ، $\vec{r}_2: \vec{s} \cdot (3, 2, 0) = 7$
- ج $\vec{r}_1: \vec{v} = 4$ ، $\vec{r}_2: 3\vec{s} - \vec{v} + 5\vec{e} = 1$

أسئلة متعددة المطالب

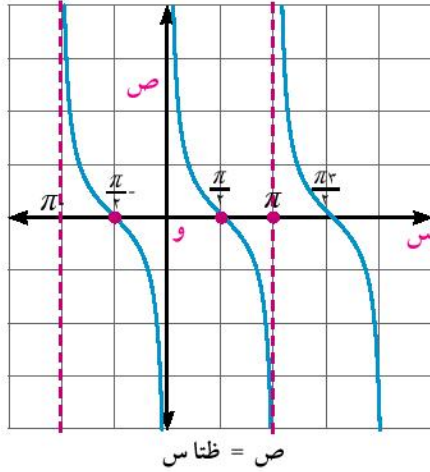
- ٢٠ إذا كانت النقط أ ، ب ، ج ، د في الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هي
 $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $\vec{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ،
 أوجد متجه الاتجاه العمودي على المستوى أ ب ح .
- ب بين طول العمود المرسوم من د على مستوى أ ب ج يساوي $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- ج بين أن المستويين أ ب ج ، د ب ج متعامدان .
- د أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب ح ، د ب ج .
- ٢١ إذا كان المستوى س يحوي النقط أ (١ ، ٤ ، ٢) ب (١ ، ٠ ، ٥) ، ج (٠ ، ٨ ، ١) وكان المستوى ص يحوي
 النقطة د (٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ عمودي عليه أوجد:
- أ المعادلة الإحداثية للمستوى س .
- ب المعادلة الإحداثية للمستوى ص .
- ج إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع في كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف .
- د أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص .
- هـ إذا كانت النقطة (١ ، ١ ، ق) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم ق الممكنة .

ثانيًا: التفاضل والتكامل



متطلبات قبلية في التفاضل والتكامل

اشتقاق مقلوبات الدوال المثلثية



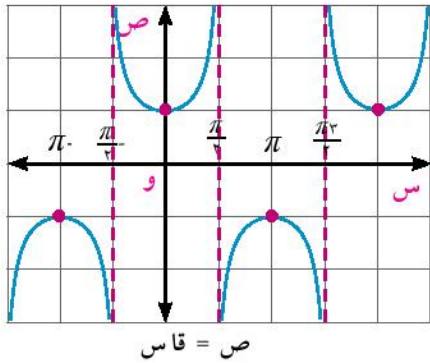
١ - مشتقة دالة ظل التمام

إذا كانت $y = \cot x$ حيث $x \in \mathbb{R}$ ، $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

فإن: $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$

لاحظ أن:

$$\left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' \cos x + \frac{1}{\sin x} (\cos x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{-\sin x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x - \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$



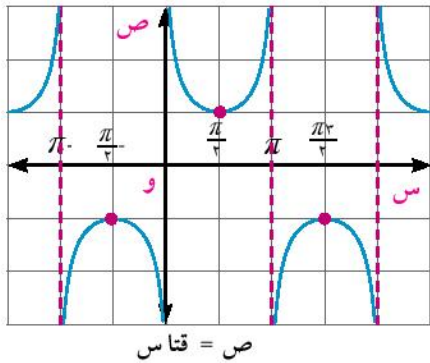
٢ - مشتقة دالة القاطع

إذا كانت $y = \sec x$ حيث $x \in \mathbb{R}$ ، $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

فإن: $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

تحقق من ذلك

$$\left[\frac{1}{\cos x} \right]' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$



٣ - مشتقة دالة قاطع التمام

إذا كانت $y = \csc x$ حيث $x \in \mathbb{R}$ ، $x \neq k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

فإن: $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

تحقق من ذلك

$$\left[\frac{1}{\sin x} \right]' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$$

مثال

١ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

ب) $ص = ٣ قاس - ٥ ظاس$

أ) $ص = ٣ س + ٤ ظتاس$

ج) $ص = ٣ قتاس$

الحل

أ) $\frac{ص}{س} = \frac{٣ \times ٥ س + ٤}{٣ س} = \frac{١٥ س + ٤}{٣ س}$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{٣ (قاس ظاس) - ٥ قاس}{٣ قاس - ٥ قاس}$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{٣ س^٢ قتاس + س^٣ (- قتاس ظتاس)}{٣ س^٢ قتاس - ٣ س ظتاس}$

تكمال الدوال المثلثية

جدول التكمالات المثلثية الأساسية	
$\{ جاس س = - جتاس + ث \}$	
$\{ جتاس س = جاس + ث \}$	
$\{ قاس س = طاس + ث \}$	
$\{ قاس س \neq \pi \frac{١+٢}{٢}, ن \ni ص \}$	
$\{ قتاس س = - ظتاس + ث \}$	
$\{ قتاس س \neq \pi, ن \ni ص \}$	
$\{ قاس طاس س = قاس + ث \}$	
$\{ قاس س \neq \pi \frac{١+٢}{٢}, ن \ni ص \}$	
$\{ قتاس ظتاس س = - قتاس + ث \}$	
$\{ قتاس س \neq \pi, ن \ni ص \}$	

الوحدة الأولى

الاشتقاق وتطبيقاته

Differentiation and it's Applications

مقدمة الوحدة

فى دراستك السابقة للدوال، تعرّفْتَ على دوال صريحة فى متغير واحد على الصورة $y = f(x)$ والعمليات على هذه الدوال وتركيبها، كما بحثتَ قابلية اشتقاق الدالة المتصلة على مجال ما، وأمكنك إيجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية و الدوال المثلثية.

فى هذه الوحدة سنتعرف دوال أخرى لا يمكن فصل متغيراتها، حيث ترتبط المتغيرات بعلاقة ضمنية أو بتعريفها من خلال متغير وسيط يعرف بالمتغير البارامترى؛ مما يتطلب دراسة أنماط أخرى للاشتقاق، مثل الاشتقاق الضمنى، والاشتقاق البارامترى الذى يعتمد على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) فى اشتقاق الدوال، كما نبحث وجود مشتقة مشتقة الدالة (المشتقة الثانية للدالة) فى إطار دراسة المشتقات العليا للدالة والتي تفسح المجال لدراسة تطبيقات حياتية متعددة.

كما تهتم هذه الوحدة ببعض التطبيقات المهمة للاشتقاق فى مجالات متعددة للرياضيات والفيزياء والاقتصاد والعلوم البيولوجية من خلال دراسة المعدلات الزمنية المرتبطة لتساعدك على نمذجة وحل بعض المشكلات الحياتية التى قد تصادفك.

مخرجات التعلم

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة، ضمنية، بارامترية...).
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها.
- يوجد مشتقة الدالة الأسية $y = e^x$ ، $y = a^x$ ، $y = \ln x$.
- يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية $y = \ln x$ ، $y = \log_a x$.
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية.

المصطلحات الأساسية

Higher Derivatives	مشتقات عليا	Differentiation	الاشتقاق (التفاضل)
Rate	معدل	First Derivative	المشتقة الأولى
Related Rates	معدلات مرتبطة	Explicit Function	دالة صريحة
		Implicit function	دالة ضمنية
		Parameter	وسيط (بارامتر)
		Implicit Differentiation	اشتقاق ضمني
		Parametric Differentiation	اشتقاق بارامترى

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Geogebra, Graph)

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): الاشتقاق الضمني والبارامترى
- الدرس (٢ - ١): المشتقات العليا للدالة
- الدرس (٣ - ١): مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية
- الدرس (٤ - ١): المعدلات الزمنية المرتبطة

مخطط تنظيمي للوحدة



الاشتقاق الضمني والبارامترى

Implicit and Parametric Defferentiation

الاشتقاق الضمني Implicit Defferentiation

سبق لك إيجاد مشتقة دالة معرفة بالصورة $ص = د(س)$ وهي دالة صريحة explicit function للمتغير المستقل $س$ حيث تحدد قيمة $ص$ مباشرة متى علم قيمة $س$ مثل:

$$ص = ٤س^٣ - ٥س + ٢ ، ص = جا(٢س + ٣) ، ص = \frac{١ + س}{١ - س} ، ...$$

ويكون $ص' = ١٢س^٢ - ٥$ ، $ص' = ٢جتا(٢س + ٣)$ ، $ص' = \frac{١ + س}{(١ - س)^2}$...

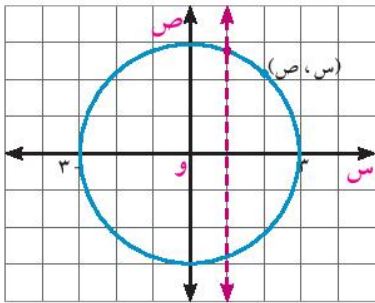
أما إذا كانت $ص$ مرتبطة بالمتغير $س$ بمعادلة تحوى $س$ ، $ص$ معاً مثل:

$$ص + ص - ٤ = ٠ ، (١) ، ص^٢ + ص - ٩ = ٠ ، (٢)$$

فكل معادلة تعرف علاقة ضمنية implicit relation بين $س$ ، $ص$ ؛ تعبر عن العلاقة بين إحداثيي نقطة $(س ، ص)$ واقعة على منحنائها البياني.

لاحظ أن :

- ١- يمكن كتابة المعادلة $ص + ص - ٤ = ٠$ بالصورة:
 $ص(١ + س) = ٤$ ، $\therefore ص = \frac{٤}{١ + س}$ حيث $س \neq -١$
 وفي هذه الحالة تعرف العلاقة الضمنية دالة واحدة صريحة.



٢- مجموعة النقط $(س ، ص)$ التي

تحقق المعادلة $ص^٢ + ص - ٩ = ٠$ ترسم دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات، ومن اختبار الخط الرأسى نلاحظ أن العلاقة $ص^٢ + ص - ٩ = ٠$ لا تمثل دالة غير أن $ص^٢ - ٩ = ٠$

$$\therefore ص = \pm \sqrt{٩ - ص^٢}$$

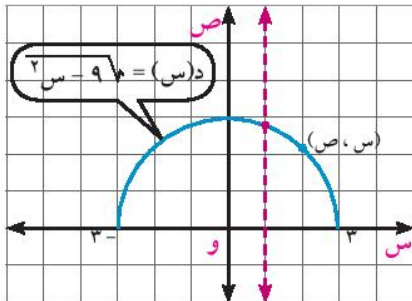
فيمكن أن تعرف العلاقة الضمنية

$$ص^٢ + ص - ٩ = ٠$$

$$ص = \sqrt{٩ - ص^٢}$$

مجالها $[-٣ ، ٣]$ ومداها $[٠ ، ٣]$ وقابلة

للاشتقاق لكل $س \in [-٣ ، ٣]$



سوف تتعلم

الاشتقاق الضمني

الاشتقاق البارامترى

المصطلحات الأساسية

Relation علاقة

Explicit function دالة صريحة

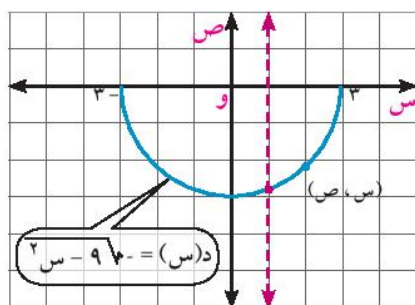
Implicit function دالة ضمنية

Parameter وسيط

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

Scientific calculator



والثانية : ص = $\sqrt{-9 - س^2}$

مجالاتها $[-3, 3]$ ومداهما $[-3, 0]$

وقابلة للاشتقاق لكل $س \in [-3, 3]$

فى كثير من المعادلات على الصورة $د(س, ص) = 0$ يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة؛ لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى س، تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية implicit function عملية اشتقاق الدالة الضمنية (الاشتقاق الضمنى) يتطلب اشتقاق

كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقاً لقاعدة السلسلة لتحصل على $\frac{ص}{س}$ أو $\frac{س}{ص}$ على الترتيب.

مثال

١ أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا كان:

ب $٣س + ص^٢ = ٧ - س^٢$

أ $٨ = ٥ص + ٧س - ص^٢ + س^٣$

الحل

أ

تذكران

إذا كانت ص دالة فى س وقابلة للاشتقاق فإن:
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ص} = ١$

$\frac{ص}{س} = ١ - \frac{ص}{س}$

لاحظ أن المعادلة لا تعطى ص صراحة بدلالة س، لإيجاد $\frac{ص}{س}$ نشتق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س مع مراعاة أن ص دالة للمتغير س وقابلة للاشتقاق فيكون:

$$٠ = \frac{ص}{س} \cdot ٥ + ٧ - \frac{ص}{س} \cdot ٢ص + ٣س^٢ + \frac{ص}{س} \cdot ٢ص$$

$$\frac{٢س^٣ - ٧}{٥ + ص^٢} = \frac{ص}{س} \therefore \frac{٢س^٣ - ٧}{٥ + ص^٢} = \frac{ص}{س}$$

ب $٣٠ : ٣س + ص = ٧ - س^٢$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س.

$$\therefore \frac{ص}{س} (٣س + ص) + (٣س + ص) = \frac{ص}{س} (٧ - س^٢)$$

$$٣س + \frac{ص}{س} (٣س + ص) + ٣س + ص = \frac{ص}{س} (٧ - س^٢)$$

$$\frac{٣س - س^٢}{٣س + ص} = \frac{ص}{س} \therefore \frac{٣س - س^٢}{٣س + ص} = \frac{ص}{س}$$

٩ حاول أن تحل

١ أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا كان:

ب $٢٥ = ٢ص + ص^٢ + س^٢$

أ $٤س = ٣س + ص + ٥س$

مثال

٢ أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا كان:

أ $٢ص = ص + ٣س$

ب $٢س + ٣ص = ص$

كتاب الطالب - الصف الثالث الثانوى



الحل

أ) باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{y}{s} (\text{جا } 2 \text{ ص}) = \frac{y}{s} (\text{ص جتا } 3 \text{ س})$$

$$\text{جتا } 2 \text{ ص} \times \frac{y}{s} = \frac{y}{s} (\text{جا } 3 \text{ س} \times 3) + [\text{جتا } 3 \text{ س} \times \frac{y}{s}]$$

$$\frac{y}{s} [\text{جتا } 2 \text{ ص} - \text{جتا } 3 \text{ س}] = -3 \text{ ص جتا } 3 \text{ س} \therefore \frac{y}{s} = \frac{3 \text{ ص جتا } 3 \text{ س}}{\text{جتا } 2 \text{ ص} - \text{جتا } 3 \text{ س}}$$

ب) باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س

$$\frac{y}{s} (\text{طا } 2 \text{ س}) = \frac{y}{s} (\text{ظنا ص}) + \frac{y}{s} (\text{س ص})$$

$$2 \text{ قا } 2 \text{ س} - \text{قتا } 2 \text{ ص} = \frac{y}{s} \text{ ص} + \text{ص}$$

$$\frac{y}{s} [\text{س} + \text{قتا } 2 \text{ ص}] = 2 \text{ قا } 2 \text{ س} - \text{ص} \therefore \frac{y}{s} = \frac{2 \text{ قا } 2 \text{ س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{قتا } 2 \text{ ص}}$$

٤ حاول أن تحل

٢) أوجد $\frac{y}{s}$ إذا كان:

أ) $\text{س جتا ص} + \text{ص جتا س} = 1$ ب) $3 \text{ ص} = \text{جا س جتا } 2 \text{ ص}$

لاحظ أن: الصيغة النهائية للمشتقة $\frac{y}{s}$ في الاشتقاق الضمني تحوى كلاً من س ، ص مما يجعل حسابها شاقاً عند إحدى قيم س لحاجتنا أولاً لمعرفة قيمة ص المناظرة لها والتي يصعب تحديدها من العلاقة الضمنية.

Parametric Defferentiation

الاشتقاق البارامترى

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى ، والإحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) كدالة فى متغير ثالث ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين:

$$\text{س} = \text{د(ن)} ، \text{ص} = \text{ر(ن)} \quad \text{حيث د ، ر لهما مجال مشترك}$$

فإن المعادلتين معاً تمثلان معادلة لمنحنى واحد معبراً عنه بالصورة البارامترية

تعلم

للمنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن) ، ص = ر(ن)

$$\text{يكون } \frac{y}{s} = \frac{y}{n} \times \frac{n}{s} = \frac{y}{n} \div \frac{s}{n} = \frac{y}{n} \div \text{حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن.}$$

مثال

٣) أوجد $\frac{y}{s}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

أ) س = 5 ، ن = 3 ، ص = 16 ن² + 9 ، ن = 5 ب) س = 3 جتا 2θ ، ص = 4 جا 3θ ، θ = π/4

الحل

$$\text{أ) } 3 + 5 = \text{س} \quad \frac{5}{\text{س}} = 5, \quad \text{ص} = 16 \text{ ن}^2 + 9, \quad \frac{\text{ص}}{\text{ن}} = 32 \text{ ن}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}}{\text{س}} = \frac{32}{5} = \frac{\text{ن}}{\text{س}} \quad \text{ويكون } \left[\frac{\text{ص}}{\text{س}} \right]_{\text{ن}=5} = 32$$

$$\text{ب) } 3 = \text{س} \quad \frac{3}{\theta_2} = \frac{3}{\theta_2} \times 2 = \frac{6}{\theta_2} = 2 \times \theta_2 \quad \text{جا } \theta_2 = 3$$

$$\text{ص} = 4 \quad \frac{4}{\theta_2} = \frac{4}{\theta_2} \times 3 = \frac{12}{\theta_2} = 3 \times \theta_2 \quad \text{جا } \theta_2 = 4$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\theta_2} \times \frac{\theta_2}{\text{س}} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{عند } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{فإن } \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 1 \quad \text{جا } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}$$

٩ حاول أن تحل

٣ أوجد $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة

$$\text{أ) } \text{س} = (7 + \text{ن}) (2 - \text{ن}), \quad \text{ص} = (\text{ن}^2 + 1) (2 - \text{ن}), \quad \text{ن} = 1$$

$$\text{ب) } \text{س} = 1 - \theta^2, \quad \text{ص} = \theta^3, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{س} = 3 - \text{ن}^2, \quad \text{ص} = 1 + \text{ن}^2, \quad \text{ن} = 2$$

تفكير ناقد: أوجد قيمة البارامترع التي يكون عندها للمنحنى

$$\text{س} = 2\text{ع}^3 - 5\text{ع}^2 + 12\text{ع}, \quad \text{ص} = 2\text{ع}^2 + \text{ع} - 4 \quad \text{مماس أفقى وآخر رأسى.}$$

مثال

$$\text{٤) أوجد مشتقة (ع س}^3 - 9\text{س}^2 + 5) \text{ بالنسبة إلى (س}^3 + 7)$$

الحل

$$\text{بوضع } \text{ص} = 5\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 5, \quad \text{ع} = 7 + \text{س}^3 \quad \text{فتكون } \text{ص} = \text{د(س)}, \quad \text{ع} = \text{ر(س)}$$

الدالتان د، ر قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى س باعتبار س بارامتر لكل من المتغيرين ص، ع
 $\therefore$ من الاشتقاق البارامترى نجد أن:

$$\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ص}'}{\text{ع}'} = \frac{12\text{س}^2 - 18\text{س}}{6\text{س}^2} = \frac{2\text{س} - 3}{\text{س}} \quad \text{أى أن } \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{2\text{س}^3 - 9\text{س}^2 + 5}{7 + \text{س}^3} \quad \text{س}^3 = 2 - \text{س}^2$$

٩ حاول أن تحل

٤ باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد:

$$\text{أ) } \text{مشتقة س}^2 + 1$$

$$\text{بالنسبة إلى } \sqrt{1 - \text{س}^2}$$

$$\text{ب) } \text{مشتقة } \sqrt{8 + \text{س}^3}$$

$$\text{بالنسبة إلى } \frac{\text{س}}{1 + \text{س}} \text{ عند } \text{س} = 1$$

$$\text{ج) } \text{مشتقة س} - \text{جاس}$$

$$\text{بالنسبة إلى } 1 - \text{جتا س عند } \text{س} = \frac{\pi}{3}$$

تمارين الدرس (١ - ١)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ① إذا كانت $s^2 + v^2 = 1$ فإن $\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$ يساوي:
- أ s ب $\frac{1}{s}$ ج $-\frac{s}{v}$ د $-\frac{v}{s}$
- ② إذا كانت $s^2 + v^2 = 2$ فإن $\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$ يساوي:
- أ $1 - s$ ب صفر ج 1 د 2
- ③ إذا كانت $v^2 - 2\sqrt{s} = 0$ فإن $\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$ يساوي:
- أ $\frac{2v}{\sqrt{s}}$ ب $\sqrt{s}$ ج $-\frac{s}{v}$ د $-\frac{1}{v}$
- ④ إذا كان $s = 2t^2 + 3$ ، $v = \sqrt{3t}$ ، $n = 1$ فإن $\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$ يساوي:
- أ $\frac{3}{8}$ ب $\frac{3}{4}$ ج 2 د 6
- ⑤ ميل المماس للمنحنى $s = v^2 = 3$ عند النقطة $(2, 1)$ يساوي:
- أ $3 -$ ب $-\frac{1}{6}$ ج $\frac{1}{3}$ د $\frac{3}{2}$

ثانياً: أوجد $\frac{ds}{dt}$ في كل مما يأتي:

- ⑥ $s^2 - 4v^2 = 7$ ⑦ $s^3 + v^4 = 2$ ⑧ $s^2 - 2s = v^2 - 5$
- ⑨ $s^3 + 6s = v^4 + 3$ ⑩ $\frac{1}{s} = \frac{v}{s} + \frac{s}{v}$ ⑪ $s^2 + v^2 = 5$
- ⑫ $s^2 + v^2 = 9$ ⑬ $s^2 + v^2 = 9$ ⑭ $s^2 + v^2 = 9$
- ⑮ $s^2 + v^2 = 9$

ثالثاً: أوجد $\frac{ds}{dt}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

- ⑯ $s^2 - 13t^2 = 4$ ، $v = 2$ ، $n = 4$
- ⑰ $s = 2\pi t$ ، $v = 2\pi t$ ، $\theta = \frac{1}{4}$
- ⑱ $s = 5 + 3t^2$ ، $v = 1 - 3t$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$
- ⑲ أوجد ميل المماس للمنحنى $s^2 + 3s = \pi$ عند النقطة $(-\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4})$
- ⑳ أوجد مشتقة $\frac{1+s}{1-s}$ بالنسبة إلى s عند $s = 4$
- ㉑ أوجد قيمة البارامتر n التي عندها يكون للمنحنى $s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 9$ ، $v = 2t^2 + n - 5$ مماس رأسي.
- أ s ب v ج n د t

Higher Derivatives of a Function

سوف تتعلم

إيجاد مشتقات ذات رتب أعلى لدالة.

فكر و ناقش



إذا كانت $v = d(s)$ حيث $v = s^4 + s^3 - 2s + 3$ أوجد مشتقة الدالة d ، هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة إلى s ؟ لماذا؟ هل تتوقف عملية الاشتقاق؟ فسر إجابتك.

تعلم



المصطلحات الأساسية

Order	رتبة
Derivative	مشتقة

(Higher - Order Derivative)

المشتقات ذات الرتب العليا

إذا كانت $v = d(s)$ حيث d دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى s فإن مشتقتها الأولى (First derivative) هي $v' = \frac{dv}{ds} = d'(s)$ وتمثل دالة جديدة.

وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى s فإن مشتقتها $\left(\frac{dv}{ds}\right)$ تسمى المشتقة الثانية (Second Derivative) للدالة d وتمثل دالة أخرى

$$\text{ويُرمز لها بالرمز } v'' = \frac{d^2v}{ds^2} = d''(s)$$

بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة (Third Derivative) للدالة d ونرمز لها بالرمز $\frac{d^3v}{ds^3}$ ، ... وهكذا

تسمى المشتقات لدالة بدءاً من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا، وتكتب المشتقة من الرتبة n كما يلي :

$$v^{(n)} = \frac{d^nv}{ds^n} = d^{(n)}(s) \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح موجب}$$

لاحظ أن :

$$1 - \frac{d^2v}{ds^2} \quad \text{تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين}$$

٢ - يوجد اختلاف بين $\frac{d^2v}{ds^2}$ ، $\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$ فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

مثال

١ أوجد المشتقة الثانية لكل من:

$$\text{أ} \quad v = s^2 + 3s - 5 \quad \text{ب} \quad v = \frac{s+1}{s-1}$$

$$\text{ج} \quad v = (3s - 2) \quad \text{د} \quad v = \sqrt[3]{3s - 2}$$



الحل

أ: $\therefore \text{ص} = 2\text{س} + 3\text{س} - 5\text{س} \Rightarrow \text{ع}$ $\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3+3}{3} = 2$ ، $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = 2^2 = 4$ س $\neq 1$

ب: $\therefore \text{ص} = \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}$ ، س $\neq 1$ $\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{(1+\text{س}) - 1 - \text{س}}{(1-\text{س})} = \frac{2-}{2(1-\text{س})}$ ، س $\neq 1$

ج: $\therefore \text{ص} = \text{جا} (2-\text{س})$ ، س $\in \mathbb{C}$ $\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2} = \text{جتا} (2-\text{س})$ ، $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = \frac{9}{4} = [2-(1-\text{س})]^2 = \frac{4}{(1-\text{س})^2}$ ، س $\neq 1$

د: $\therefore \text{ص} = \sqrt{2-\text{س}}$ ، س $\leq \frac{2}{3}$ $\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2-\text{س}}$ ، س $< \frac{2}{3}$

هـ: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = \frac{9}{4} = \left[\frac{3}{4} (2-\text{س}) \right]^2 = \frac{9}{4(2-\text{س})^2}$ ، س $< \frac{2}{3}$

٩ حاول أن تحل

١ أوجد المشتقة الثالثة لكل من:

أ: $\text{ص} = \text{س}^2 - 2\text{س} + 5$ ب: $\text{ع} = (2-1)^4$

ج: $\text{د(س)} = \text{جتا} (2\text{س} + \pi)$ د: $\frac{\text{س}}{1-\text{س}} = \text{د(س)}$

تفكير ناقداً: إذا كانت $\text{ص} = \text{جا أ س}$ استكشف نمط الاشتقاق المتتالي، أوجد $\text{ص}^{(25)}$

مثال

٢ إذا كانت $\text{ص}^2 + 2\text{س ص} = 8$ أثبت أن: $(\text{س} + \text{ص}) \left(\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}^2} + 2 \right) = \text{صفر}$

الحل

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

أ: $\therefore \text{ص}^2 + 2\text{س ص} = 8$ ،

$\therefore 2\text{ص} \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} + 2\text{ص} = 0$ بالقسمة على ٢

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$0 = (\text{س} + \text{ص}) \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} \right)$

$\therefore 0 = \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}} + 1 \right) \frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}$

ويكون $(\text{س} + \text{ص}) \left(\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}^2} + 2 \right) = \text{صفر}$

٩ حاول أن تحل

٢ أ إذا كانت $\text{ص}^2 + 2\text{س ص} = 9$ أثبت أن: $\text{ص} \left(\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}^2} + 2 \right) = 1$

ب إذا كانت $\text{ص} = \text{طاس}$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = 2\text{ص} (1 + \text{ص}^2)$

معادلات بارامترية

مثال

٣ إذا كانت $s = 2n^3 - 5$ ، $v = 6n^2 + 1$ أوجد $\frac{dv}{ds}$ عند $n = 1$

الحل

باشتقاق كل من s ، v بالنسبة للبارامتر n

$$\therefore \frac{ds}{dn} = 6n^2 \quad , \quad \frac{dv}{dn} = 12n$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{\frac{dv}{dn}}{\frac{ds}{dn}} = \frac{12n}{6n^2} \times \frac{dn}{dn}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{12}{6n} = \frac{2}{n} \quad , \quad n \neq 0$$

$$\text{ويكون } \frac{dv}{ds} = \frac{2}{n} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{عند } n = 1$$

$$= \frac{2}{n} \times \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3n^3} \quad , \quad n \neq 0$$

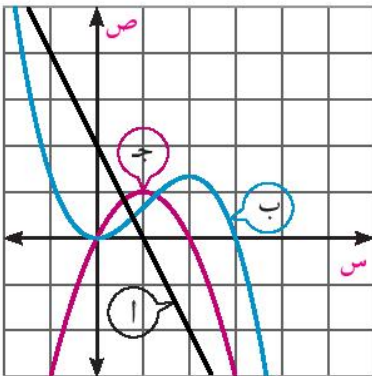
$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{2}{3} \quad \text{عند } n = 1$$

٤ حاول أن تحل

٣ إذا كانت $s = 2e^2 - 5$ ، $v = e^2$ أوجد $\frac{dv}{ds}$ عند $e = 2$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e} \quad \text{عند } e = 2$$

تفكير ناقد: يبين الشكل المقابل تمثيلًا بيانيًا لمنحنيات الدوال (s) ، (v) ، (e) ، حيث (s) ، (v) ، (e) كثيرة حدود، حدد منحنى كل دالة.



نشاط



باستخدام البرنامج الرسومي geogebra أو أى برنامج آخر ارسم الدوال التالية ومشتقاتها الأولى والثانية وسجل ملاحظاتك.

١ (د) $s = 2e^3 - 5$ ، $v = e^2$ عند $e = 2$ أوجد $\frac{dv}{ds}$

٢ (ب) $s = \frac{1}{4}e^2 + 1$ ، $v = e^2$ عند $e = 2$ أوجد $\frac{dv}{ds}$

هل تتوافق ملاحظاتك مع قرارك في بند تفكير ناقد؟

تمارين ١ - ٢

أوجد المشتقة الثالثة لكلاً مما يأتي:

- ١) $\text{ص} = \text{س}^0 - \text{س}^4 + 3$
- ٢) $\text{ص} = \frac{\text{س}^2}{1 + \text{س}}$
- ٣) $\text{ص} = \text{جا} (2 - \text{س} - 7)$
- ٤) $\text{ص} = \text{جتا} (\pi - 3 - \text{س})$
- ٥) $\text{ص} = \text{جاس جتاس}$
- ٦) $\sqrt[3]{\text{س}^2 - 5} = \text{ص}$

أجب عما يأتي:

- ٧) إذا كان $\text{س}^3 = 5 + 2\text{س}$ $\text{ص} = 3$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3$
- ٨) إذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$ $\text{ص} = 4$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^3}{\text{س}^3} + 4 = \text{صفر}$
- ٩) إذا كان $\text{ص} = 3 - \text{جتا} (2 - \text{س} + 1)$ $\text{ص} = 0$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} + 4\text{ص} = 0$
- ١٠) إذا كان $\text{س} \text{ ص} = \text{جاس جتاس}$ $\text{ص} = 0$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} + 2\frac{\text{ص}}{\text{س}} + 4\text{ص} = 0$
- ١١) إذا كان $\text{ص} = \text{س جاس}$ $\text{ص} = 0$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^3}{\text{س}^3} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} + 2\text{ص} = 0$
- ١٢) إذا كان $\text{ص} = \text{قاس}$ $\text{ص} = 0$ أثبت أن: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2(3\text{ص}^2 - 2)$
- ١٣) إذا كان $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2 - \text{س} - 3$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{س}} = 1 - 2$ $\text{عند س} = 2$ أوجد: $\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}^2}$
- ١٤) إذا كان $\text{س} = 3 - 2$ ، $\text{ص} = 2 + 3$ $\text{عند ن} = 4$ أوجد: $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}$
- ١٥) إذا كان $\text{س} = \frac{1 + \text{ع}}{1 - \text{ع}}$ ، $\text{ص} = \frac{1 - \text{ع}}{1 + \text{ع}}$ $\text{عند ع} = 2$ أوجد: $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$
- ١٦) إذا كان $\text{س} = \text{قاع}$ ، $\sqrt[3]{\text{ص}} = \text{ظاع}$ $\text{أثبت أن: } \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = 2$

Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

سوف تتعلم

- مشتقات الدوال الأسية.
- مشتقات الدوال اللوغاريتمية.
- التفاضل اللوغاريتمي.
- المشتقات العليا للدوال الأسية واللوغاريتمية.
- نمذجة المشكلات.

تعريف

يعرف العدد هـ من العلاقة :

$$هـ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

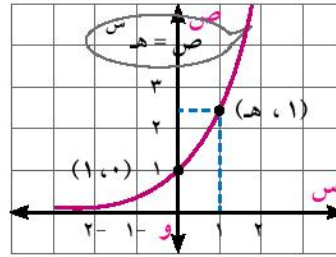
$$هـ = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

تعلم

Natural Exponential Function

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

هي دالة أسية أساسها هـ ، د(س) = هـ س ، س ∈ ℝ

نها هـ س = ∞ ،
س ← ∞نها هـ س = صفر ،
س ← -∞

لاحظ أن

- مجال الدالة د حيث د(س) = هـ س هو ℝ ومداها [0, ∞)
- منحنى الدالة يمر بالنقطة (0, 1) ، (1, هـ)
- د(س) = هـ س دالة احادية (One-to-One)
- تقبل وجود دالة عكسية تعرف بدالة اللوغاريتم الطبيعي
- نستخدم الرمز $\exp(x)$ عند رسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومي

$$هـ س = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{س}{n} \right)^n$$

$$= 1 + \frac{س}{1} + \frac{س^2}{2} + \frac{س^3}{3} + \dots + \frac{س^n}{n} + \dots$$

المصطلحات الأساسية

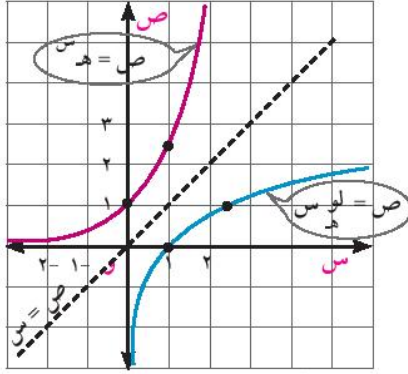
- مشتقة Derivative
- قاعدة السلسلة Chain Rule
- المشتقة الأولى First Derivative
- الاشتقاق اللوغاريتمي
- Logarithmic Differentiation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية



هي لوغاريتمية أساسها هـ ، د(س) = لو_{هـ} س ، س ∈ ع⁺



نها لو_{هـ} س = ∞ ،
س ← ∞

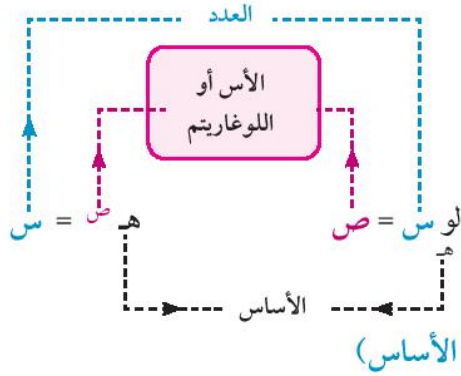
نها لو_{هـ} س = -∞ ،
س ← 0

لاحظ أن:

- (١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو_{هـ} س هو ع⁺ ومداها ع
- (٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)
- (٣) هي دالة عكسية للدالة ص = هـ^س
- (٤) يستخدم الرمز ln(x) لرسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومي للحاسب الآلي.
- (٥) لإيجاد قيمة لو_{هـ} ١٠ مثلاً اضغط على المفاتيح التالية:
ابداً → **ln** **1** **0** **=**
نجد أن لو_{هـ} ١٠ = ٢,٣٠٢٥٨٥٠٩٣ ≈ ٢ لأقرب ٩ أرقام عشرية.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي

اللوغاريتم الطبيعي له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها.
إذا كان س ∈ ع⁺ ، ص ∈ ع⁺ ، ا ∈ ع⁺ - {١} فإن:



- (١) الصورة لو_{هـ} س = ص تكافئ الصورة هـ^ص = س
- (٢) هـ^{لو_{هـ} س} = س
- (٣) لو_{هـ} هـ = ١
- (٤) لو_{هـ} ١ = صفر
- (٥) لو_{هـ} س = لو_ا س / لو_ا هـ (خاصية تغيير الأساس)

لكل س ، ص ∈ ع⁺ ، ن ∈ ع

- (٦) لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص = لو_{هـ} (س × ص)
- (٧) لو_{هـ} س - لو_{هـ} ص = لو_{هـ} (س / ص)
- (٨) لو_{هـ} س^ن = ن × لو_{هـ} س
- (٩) لو_{هـ} س × لو_س هـ = ١

مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

Derivative of Natural Exponential Function

إذا كانت $y = e^x$ فإن $y' = e^x$

$$\therefore e^x = \frac{e^x}{1} + \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{3} + \dots + \frac{e^x}{n} + \dots$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{1} + \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{3} + \dots + \frac{e^x}{n} + \dots \right) \\ &= \frac{d}{dx} e^x + \frac{d}{dx} \frac{e^x}{2} + \frac{d}{dx} \frac{e^x}{3} + \dots + \frac{d}{dx} \frac{e^x}{n} + \dots \\ &= e^x + \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{3} + \dots + \frac{e^x}{n} + \dots \\ &= e^x \end{aligned}$$

مثال

مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

١ أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ $y = e^{2x} + e^{3x}$ ب $y = e^{3x}$ ج $y = \frac{e^{2x}}{1+x}$

الحل

أ $\therefore y = e^{2x} + e^{3x} \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} e^{2x} + \frac{d}{dx} e^{3x} = 2e^{2x} + 3e^{3x}$

ب $\therefore y = e^{3x} \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$

ج $\therefore y = \frac{e^{2x}}{1+x} \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{\frac{d}{dx} e^{2x} \cdot (1+x) - e^{2x} \cdot \frac{d}{dx} (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{2e^{2x}(1+x) - e^{2x}}{(1+x)^2} = \frac{e^{2x}(2+2x-1)}{(1+x)^2} = \frac{e^{2x}(1+2x)}{(1+x)^2}$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد $\frac{d}{dx} \frac{e^x}{x}$ لكل مما يأتي:

أ $y = e^{2x} + \ln x$ ب $y = e^{x^2} \ln x$ ج $y = \frac{e^x}{x^2}$

تفكير ناقداً: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى $y = e^x$ عند أي نقطة عليه والإحداثي الصادي لهذه النقطة؟

فسر إجابتك



قاعدة السلسلة

فإن: $\frac{d}{dx} (h \circ g) = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x ، $h = h(u)$

مثال

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل من:

ج $\frac{d}{dx} (x^2 - x^3) = 2x - 3x^2$

ب $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

أ $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

الحل

∴ $\frac{d}{dx} x^3 = \frac{d}{dx} (x^2 + x^2) = \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} x^2 = 2x + 2x = 4x$

أ ∴ $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

∴ $\frac{d}{dx} x^3 = \frac{d}{dx} (x^2 + x^2) = \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} x^2 = 2x + 2x = 4x$

ب ∴ $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

ج ∴ $\frac{d}{dx} (x^2 - x^3) = \frac{d}{dx} x^2 - \frac{d}{dx} x^3 = 2x - 3x^2$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد $\frac{d}{dx} x^3$ لكل مما يأتي:

ج $\frac{d}{dx} (x^2 + x^2) = 2x + 2x = 4x$

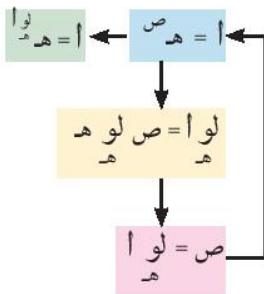
ب $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

أ $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

تعلم

Derivative of Exponential Function to the Base a

مشتقة الدالة الأسية للأساس a



إذا كانت $y = a^x$ فإن $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

لاحظ أن $a = e$ (من خواص اللوغاريتمات) ∴ $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

ويكون $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

وبوجه عام فإن: $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

مثال

مشتقة الدالة الأسية

٣ أوجد $\frac{d}{dx} x^3$ لكل مما يأتي:

ج $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

ب $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

أ $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

الحل

∴ $\frac{d}{dx} x^3 = \frac{d}{dx} (x^2 + x^2) = \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} x^2 = 2x + 2x = 4x$

أ ∴ $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{ص}{كس} &= (٥ - ٦س) \times (٣س^٢ - ٢س + ٢) \times \frac{كس}{كس} \\ \therefore \frac{ص}{كس} &= \frac{كس}{كس} \text{ جاس } \frac{كس}{كس} (٢ - ٥س) + (٢س - ٢) \times \frac{كس}{كس} \text{ جاس } \frac{كس}{كس} (٢س^٢ - ٢س + ٢) \\ &= \text{جاس } \frac{كس}{كس} (٢س^٢ - ٢س + ٢) + [٥ - ٢س] \times \frac{كس}{كس} \text{ جاس } \frac{كس}{كس} \\ &= \text{جاس } \frac{كس}{كس} (٢س^٢ - ٢س + ٢) + [٥ - ٢س] \times \frac{كس}{كس} \text{ جاس } \frac{كس}{كس} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \therefore \text{ص} = ٣س^٢ - ٢س + ٢$$

$$\text{ج) } \therefore \text{ص} = \text{جاس } \frac{كس}{كس} \times ٢س^٢ - ٢س$$

٩ حاول أن تحل

٣) أوجد $\frac{ص}{كس}$ لكل مما يأتي:

$$\text{أ) } \text{ص} = ٥س^٢ + ٢س$$

$$\text{ب) } \text{ص} = ٢س^٢$$

$$\text{ج) } \text{ص} = ٢س^٢ - ٢س + ٥$$

تعلم



Derivative of Natural Logarithm Function

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

إذا كانت د(س) = لو س، س > ٠ فإن د'(س) = $\frac{١}{س}$

لاحظ أن الدالة اللوغاريتمية هي دالة عكسية للدالة الأسية

إذا كان ص = لو س فإن س = هـ ص (١)

بإشتقاق طرفي العلاقة (١) بالنسبة إلى س $\therefore \frac{ص}{كس} = ١$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{ص}{كس} = \frac{١}{س}$ أي أن: $\frac{ص}{كس} = \frac{١}{س}$ (لو س)

مثال

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

٤) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$\text{أ) } \text{ص} = ٣س + لو س$$

$$\text{ب) } \text{ص} = (٣س^٢ - ٢س + ٢) لو س$$

$$\text{ج) } \text{ص} = \frac{لو س - ١}{١ + لو س}$$

الحل

$$\text{أ) } \therefore \text{ص} = ٣س + لو س$$

$$\therefore \frac{ص}{كس} = \frac{٣س}{كس} + \frac{١}{س} = ٣ + \frac{١}{س}$$

$$\text{ب) } \therefore \text{ص} = (٣س^٢ - ٢س + ٢) لو س$$

$$\therefore \frac{ص}{كس} = \frac{٣س^٢ - ٢س + ٢}{كس} \times (لو س) + (٣س^٢ - ٢س + ٢) \times \frac{كس}{كس} \times \frac{١}{س}$$

$$= \frac{١}{س} \times (٣س^٢ - ٢س + ٢) + (٣س^٢ - ٢س + ٢) \times \frac{١}{س}$$

$$= \frac{١}{س} [٣س^٢ - ٢س + ٢ + ٣س^٢ - ٢س + ٢]$$

$$\therefore \frac{ص}{كس} = \frac{\frac{١}{س} \times (٣س^٢ - ٢س + ٢) + \frac{١}{س} \times (٣س^٢ - ٢س + ٢)}{\frac{١}{س} \times (٣س^٢ - ٢س + ٢) + \frac{١}{س} \times (٣س^٢ - ٢س + ٢)} = \frac{٢}{س(١ + لو س)}$$

$$\text{ج) } \therefore \text{ص} = \frac{لو س - ١}{١ + لو س}$$



٦ حاول أن تحل

٤ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

ج $\frac{ص}{س} = \frac{١ - ٢ لو س}{لو س}$

ب $ص = س^٢ لو س$

أ $ص = ٥ - ٣ لو س$

تفكير ناقد: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى $ص = لو س$ عند أى نقطة عليه والإحداثى السينى لنقطة المماس؟
فسر إجابتك.

قاعدة السلسلة

فإن: $\frac{ص}{س} \cdot \frac{١}{ع} = \left[\frac{لو ع}{س} \right]$

ع إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س، د(ع) = لو ع

ع إذا كانت $س > ٠$ فإن: $\frac{ص}{س} = \frac{١}{س} \times (١ - س) = \frac{١}{س} - ١$

ع وبوجه عام $\frac{ص}{س} = \left[\frac{لو |س|}{س} \right] = \frac{١}{س}$ لكل $س \neq ٠$

ع $\frac{ص}{س} = \left[\frac{لو |ع|}{ع} \right]$ حيث ع دالة قابلة للاشتقاق فى س.

مثال

٥ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

ج $لو \frac{س^٢}{٧+س}$

ب $ص = س^٤ لو س^٣$

أ $ص = لو (٩ + ٣س^٢)$

الحل

أ: $ص = لو (٩ + ٣س^٢) \therefore \frac{ص}{س} = \frac{١}{س} \times \frac{١}{٩+٣س^٢} \times \frac{ص}{س} = \frac{١}{٩+٣س^٢} \times \frac{١}{س} \times \frac{ص}{س}$

ب: $ص = س^٤ لو س^٣ \therefore \frac{ص}{س} = \frac{١}{س} \times \frac{ص}{س} = \frac{١}{س} \times \frac{٤س^٣ لو س^٣ + ٣س^٢ (لو س)^٣}{س^٤} = \frac{٤س^٣ لو س^٣ + ٩س^٢ (لو س)^٣}{س^٥}$

$= \frac{٤س^٣ لو س^٣ + ٩س^٢ (لو س)^٣}{س^٥}$

$= \frac{٤س^٣ لو س^٣ + ٩س^٢ (لو س)^٣}{س^٥}$

ج $\frac{ص}{س} = \left(\frac{لو \frac{س^٢}{٧+س}}{\frac{س^٢}{٧+س}} \right) = \frac{١}{س} \times \frac{١}{٧+س} \times \frac{ص}{س} = \frac{١}{س} \times \frac{١}{٧+س} \times \frac{ص}{س}$

٦ حاول أن تحل

٥ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

ج $\frac{ص}{س} = \frac{س}{لو س}$

ب $ص = س^٢ لو س^٣$

أ $ص = لو (٣ - ٧س)$



Derivative of Logarithmic Function to the Base a

مشتقة الدالة اللوغاريتمية للأساس a

$$\frac{1}{\log_a a} = 1 \quad \text{فإن } \log_a a = 1 \quad \text{إذا كانت د(س) = لو س}$$

تذكر أن



من خواص اللوغاريتمات

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a \times \log_a a = 1$$

$$\frac{1}{\log_a a} \cdot \frac{1}{\log_a a} = \left[\log_a a \right] \frac{1}{\log_a a} = \left[\frac{\log_a a}{\log_a a} \right] \frac{1}{\log_a a} = \frac{1}{\log_a a} \quad \text{لاحظ}$$

$$\frac{1}{\log_a a} = \frac{1}{\log_a a} \quad \text{ويكون}$$

$$\frac{1}{\log_a a} \cdot \frac{1}{\log_a a} = \frac{1}{\log_a a} \quad \text{وبوجه عام}$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية

مثال

٦ أوجد $\frac{d}{dx} \log_a x$ لكل مما يأتي:

$$\text{أ} \quad \text{ص} = \log_3 x \quad \text{ب} \quad \text{ص} = \log_3 (x-2) \quad \text{ج} \quad \text{ص} = \log_3 (x^2 - 2x)$$

الحل

$$\text{أ} \quad \therefore \text{ص} = \log_3 x \quad \therefore \frac{d}{dx} \log_3 x = \frac{1}{x \log_3 e} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\log_3 e} = \frac{1}{x \log_3 e}$$

$$\text{ب} \quad \therefore \text{ص} = \log_3 (x-2) \quad \therefore \frac{d}{dx} \log_3 (x-2) = \frac{1}{(x-2) \log_3 e} = \frac{1}{(x-2)} \times \frac{1}{\log_3 e} = \frac{1}{(x-2) \log_3 e}$$

$$\text{ج} \quad \therefore \text{ص} = \log_3 (x^2 - 2x) \quad \therefore \frac{d}{dx} \log_3 (x^2 - 2x) = \frac{1}{(x^2 - 2x) \log_3 e} = \frac{1}{(x^2 - 2x)} \times \frac{1}{\log_3 e} = \frac{1}{(x^2 - 2x) \log_3 e}$$

٦ حاول أن تحل

٦ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند قيم س المعطاة:

$$\text{أ} \quad \text{ص} = \log_3 5 \quad \text{س} = 2 \quad \text{ب} \quad \text{ص} = \log_3 (x+1) \quad \text{س} = 1$$

$$\text{ج} \quad \text{ص} = \log_3 (x^2 - 2x) \quad \text{س} = 1 \quad \text{د} \quad \text{ص} = \log_3 (x) \quad \text{س} = 3$$

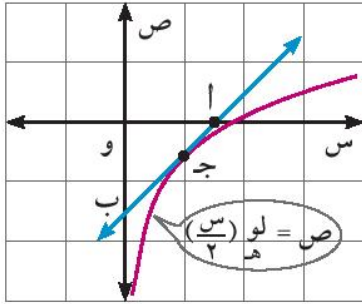
مثال

٧ تطبيقات هندسية: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للمنحنى $\text{ص} = \log_3 x$ في النقطة ج (١، ص) ويقطع محورالسينات في النقطة أ، ومحور الصادات في النقطة ب أوجد طول $\overline{AB}$



الحل

لإيجاد طول $\overline{AB}$ نتبع المخطط المقابل



$$\frac{1}{س} = \frac{1}{4} \times \frac{2 \times 1}{س} = \frac{ص}{س}$$

∴ $\overline{AB}$ يمس المنحنى في النقطة جـ (١، ص)

$$\text{فإن } ص = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \text{ أي أن جـ (١، -١/٤)، وعندها}$$

$$\frac{ص}{س} = ١، وتكون معادلة المماس $\overline{AB}$ عند جـ هي:$$

$$ص + \frac{1}{2}س = ١$$

∴ $\overline{AB}$ يقطع محور السينات في النقطة أ

ويقطع محور الصادات في النقطة ب

$$\therefore \text{أ (١، ١/٢ + ١) = (١، ٣/٢)}$$

$$\therefore \text{ب (٠، ١ - ١/٢) = (٠، ١/٢)}$$

$$\text{ويكون (أب)}^2 = (١ - ٠)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = ١ + ١ = ٢ \therefore \text{أب} = \sqrt{٢}$$

٤ حاول أن تحل

٧ إذا كان العمودى للمنحنى $ص = \frac{1}{2}س$ عند النقطة أ (١، ١) يقطع محور السينات في النقطة ب أوجد طول $\overline{AB}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

تطبيقات رياضية

Logarithmic Differentiation

الاشتقاق اللوغاريتمي

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات في تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

مثال

٨ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

ب $ص = [جاس]$ طاس

ا $ص = (س^٣ + ٥)^س$

الحل

ا ∴ $ص = (س^٣ + ٥)^س$

∴ $لو ص = س لو (س^٣ + ٥)$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى س

$$\frac{1}{ص} \frac{ص}{س} = لو (س^٣ + ٥) + س \times \frac{٣س^٢}{س^٣ + ٥}$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = (س^٣ + ٥) \left[\frac{٣س^٢}{س^٣ + ٥} + ١ \right]$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

ب ∴ $ص = [جاس]$ طاس

لو ص = طاس لو جاس

$$\frac{1}{ص} \frac{ص}{ص} = طاس \times \frac{ص}{ص} (لو جاس) + لو جاس \times \frac{ص}{ص} (طاس)$$

$$جاس \times \frac{1}{جاس} \times جتاس + لو جاس \times قاس =$$

$$1 + قاس لو جاس$$

بضرب الطرفين $\times ص = [جاس] طاس$

$$\therefore \frac{ص}{ص} = [جاس] طاس (1 + قاس لو جاس)$$

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد $\frac{ص}{ص}$ لكل مما يأتي

أ $ص = ص^٢$

ب $ص = (جاس) ص$

ج $ص^٢ = ص^٣ \times ص^٢$

مثال

٩ تحقيق علاقة: إذا كانت $ص = هـ - س$ حيث $١ > س > ١ - \frac{س+١}{س-١}$ أثبت أن: $(١ - س) ص' = ص^٢$

الحل

بأخذ لوغارتم الطرفين للأساس هـ

$$\therefore ص = هـ - س \Rightarrow \frac{س+١}{س-١}$$

$$\text{لو } ص = \text{لو } هـ - س \Rightarrow \frac{1}{٣} + \frac{1}{٣} \text{ لو } \frac{س+١}{س-١}$$

$$\text{لو } ص = -س + \frac{1}{٣} [\text{لو } (س+١) - \text{لو } (س-١)]$$

بتفاضل طرفي العلاقة بالنسبة إلى س

$$\frac{1}{ص} \times ص' = -١ + \frac{1}{٣} \left[\frac{1}{س+١} - \frac{1}{س-١} \right]$$

$$\frac{ص'}{ص} = -١ + \frac{1}{٣} \left[\frac{س-١+س+١}{س^٢-١} \right]$$

$$\frac{ص'}{ص} = -١ + \frac{1}{٣} \frac{١+٢س+١}{س^٢-١} = \frac{1}{٣} \frac{٢س+٢}{س^٢-١}$$

$$\frac{ص'}{ص} = \frac{٢س}{٣(س^٢-١)} \Rightarrow (١-س) ص' = ص^٢$$

٩ حاول أن تحل

٩ إذا كانت $ص = هـ - س$ أثبت أن: $ص ص'' + ٢ ص' - س ص' = ٠$



تمارين ١ - ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ١ إذا كانت د(س) = هـ^٣ فإن د(س) تساوي:
 - أ هـ^٣
 - ب ٣هـ^٣
 - ج ٩هـ^٣
 - د ٣هـ^٢
- ٢ إذا كان د(س) = أهـ^٣ فإن د(٢) تساوي:
 - أ د(٢) - ٢
 - ب ٢ - د(٢)
 - ج د(٢) - ٢
 - د ٢ - د(٢)
- ٣ منحنى الدالة د: د(س) = ١ + لو (س - ٢) هو نفس منحنى الدالة س: س(س) = لو س بالانتقال:
 - أ (١ ، ٢)
 - ب (١ ، ٢ -)
 - ج (٢ - ، ١)
 - د (٢ ، ١)
- ٤ النسبة بين ميل مماس المنحنى ص = لو^٣ + ١ وميل مماس المنحنى ص = لو^٥ + ١ عند س = أ كنسبة
 - أ ٥ : ٣
 - ب ٣ : ٥
 - ج ١ : ١
 - د لو^٣ : ٣ لو^٥

أوجد المشتقة الأولى لكل من:

- ٥ ص = هـ^٣
- ٦ ص = هـ^٣ - ٢س
- ٧ ص = (١ - ٣س)^٢
- ٨ ص^٢ = هـ^٥ - ٢س
- ٩ ص = لو (٢س - ٧)
- ١٠ ص = لو (١/٣ س^٢ + س)
- ١١ ص = لو^٢ / (٧ + س)
- ١٢ ص = س^٢ لو س
- ١٣ ص = لو (٩ + س^٢)
- ١٤ ص = هـ^٣ / لو س
- ١٥ ص = قاه س
- ١٦ ص = ٢هـ^٣ - ٥ لو^٣ / ٥

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

- ١٧ ص = لو^٣ - ٢هـ^٣ ، س = ١/٤
- ١٨ ص = س^٢ - ٣ لو س ، س = ٢
- ١٩ ص = ١/٤ هـ^٢ - ٢ لو س ، س = ١/٣

أوجد $\frac{z}{s}$ لكل مما يأتي:

٢٢) $s = \text{ص} = \text{س جاس}$

٢١) $٥٨ = \text{س لو} \text{ص} \text{هـ}$

٢٠) $\text{ص هـ} \text{س} = \text{هـ}^٢$

٢٥) $\text{ص} = \text{س} \text{س}^{\frac{1}{s}}$

٢٤) $\text{ص} = \text{هـ} \text{س} \text{هـ}$

٢٣) $\text{ص} = \text{هـ} \text{هـ} \text{س}$

أوجد $\frac{z}{s}$ ، $\frac{z^2}{s}$ لكل مما يأتي:

٢٦) $\text{س} = \text{هـ}^٢ \text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^٣$

٢٧) $\text{س} = ٦ \text{لون} \text{هـ}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^٢$

أجب عن كل ما يأتي:

٢٨) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^٢ \text{لو} \text{س} \text{هـ}$ فأوجد $\frac{z^2}{s}$ عند $\text{س} = ٤$

٢٩) إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{\frac{١ + \text{س}^٢}{١ - \text{س}^٢}}$ أثبت أن $(\text{س}^٤ - ١) \text{ص} + ٢ \text{س}^٢ \text{ص} = ٠$

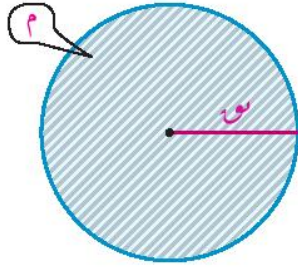
٣٠) أوجد قيم س التي يكون عندها مماس المنحنى $\text{ص} = ٩ \text{س}^٣ - ٨ \text{لو} \text{س} \text{هـ}$ موازياً لمحور السينات.

٣١) أوجد معادلة العمودي للمنحنى $\text{ص} = ٣ \text{هـ} \text{س}^٣$ عند نقطة واقعه عليه وإحداثيها السيني يساوي ١-

المعدلات الزمنية المرتبطة

Related Time Rates

فكر و ناقش



- عند تعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى زمنًا قدره (ن) ثانية
- هل يتغير طول نصف قطرها (ن) بتغير الزمن (ن)؟
 - هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير الزمن (ن)؟
 - هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير طول نصف قطرها (ن)؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن :

- ١ - المتغيرين م ، ن كلاهما يتغير بتغير الزمن (دالة في الزمن) وتربطهما العلاقة $\pi r^2 = \text{مساحة}$ أى أن : $\frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dt}(\text{مساحة})$
- ٢ - اشتقاق طرفى العلاقة السابقة بالنسبة للزمن يؤدي إلى معادلة جديدة تربط بين المعدل الزمنى لتغير كل منهما وتعرف بمعادلة المعدلات المرتبطة
- ٣ - المعدل الزمنى يكون موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن، ويكون سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تعبير شفهي : أى المعدلات التالية يكون موجبًا؟

(تمدد - انكماش - اقتراب - تباعد - صب - تسرب - انصهار - تراكم - تناقص - تزايد)

نفخ البالون

مثال

- ١ بالون كُرى عند ملئه بالغاز كان معدل الزيادة فى حجمه $\pi 8$ سم^٣/ث عندما كان طول نصف القطر ٤ سم. أوجد فى هذه اللحظة:
 - أ معدل زيادة طول نصف القطر.
 - ب معدل الزيادة فى المساحة السطحية.

الحل

بفرض أن حجم البالون (ح) وطول نصف القطر (ن)، ومساحة سطح البالون (م) دوال قابلة للاشتقاق فى ن.

سوف تتعلم

- مفهوم المعدلات الزمنية المرتبطة
- طرق حل معادلات المعدلات الزمنية المرتبطة
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية

المصطلحات الأساسية

- Rate معدل
- Related Rates معدلات مرتبطة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب



(1)

$$\frac{\frac{10}{15} \times 2}{15} \times \pi \times 4 = \frac{\frac{10}{15} \times 2}{15} \times 3 \times \pi \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore \frac{C}{N} = \pi \wedge \text{سم}^3 / \text{ث} ، \text{م} = \text{سم بالتعويض في المعادلة}$$

$$\frac{1}{8} \text{ سم/ث} = \frac{5 \text{ م/ث}}{5 \text{ ن}} \text{ ای} \quad \pi \varepsilon (4) = \pi \wedge \therefore$$

ب) $m = \pi \epsilon^2$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

(۲)

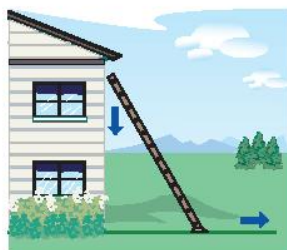
$$\frac{5 \text{ سو}}{1 \text{ سو}} \pi 8 = \frac{5 \text{ سو}}{1 \text{ سو}} 2 \times \pi 4 = \frac{2 \text{ سو}}{1 \text{ سو}}$$

$$\therefore \frac{S_{\text{نوع 1}}}{S_{\text{نوع 2}}} = \frac{1}{8} \text{ سم/ث} ، \text{ نوع 2} = \text{سم بالتعويض في المعادلة}$$

$$\pi \varepsilon \text{ سم}^2 = \frac{1}{\lambda} \times \varepsilon \times \pi \lambda = \frac{\mu s}{\lambda} \therefore$$

حاول أن تحل

١ **الحجم:** مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل 0.2 سم/د ، وتزداد مساحة سطحه في لحظة ما بمعدل $0.72 \text{ سم}^2/\text{د}$ ، أوجد طول حرف المكعب في هذه اللحظة ومعدل الزيادة في حجمه حينئذ.



حركة السلم

مثال 

٢) يستند سلم طوله ٢٥٠سم على حائط رأسى، فإذا انزلق الطرف العلوى للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠سم/ث عندما يكون الطرف السفلى للسلم على بعد ٧٠سم من الحائط. أوجد:

أ معدل انزلاق الطرف السفلي للسلم.

ب) معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض.

الحل 

أ نفرض أن : ص المسافة بين الطرف العلوى للسلم والأرض،

س المسافة بين الطرف السفلى للسلم والحائط الرأسى.

من نظرية فيثاغورث $s^2 + v^2 = (250)^2$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$$(2) \quad \frac{\frac{1}{\text{ص}}}{\frac{1}{\text{ن}}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{ن}}} \therefore \cdot = \frac{1}{\text{ن}} \text{ص} + \frac{1}{\text{ن}} \text{س}$$

∴ الطرف العلوى ينزلق أسفل الحائط فإن ص تتناقص

$$\therefore \frac{5 \text{ ص}}{4 \text{ ن}} = 10 - \text{سم} / \text{ث}$$

عند س = ٧٠ سم ومن المعادلة (١) نجد أن: ص = ٢٤٠ سم

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أن: $\frac{S}{V_0} = 10 - \frac{240}{V_0} = \frac{240}{V} \text{ سم}^3/\text{سم}^3$

أى إن الطرف السفلى للسلم ينزلق مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{240}{v}$ سم/ث



ب) نفرض أن: θ قياس زاوية ميل السلم على الأرض

جا $\theta = \frac{ص}{٢٥٠}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ جتا $\theta = \frac{\theta}{\frac{ص}{ن}} = \frac{١}{٢٥٠} \frac{ص}{ن}$ لكن $\frac{ص}{ن} = \frac{١٠}{١٠٠} = ١٠\%$ عند $ص = ٧٠$ سم

∴ $\frac{\theta}{\frac{ص}{ن}} = \frac{١}{٢٥٠} \times \frac{٧٠}{١٠} = \frac{\theta}{١٠} \times \frac{٧٠}{١٠٠}$

أي إن قياس الزاوية يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧}$ زاوية نصف قطريه / ث

٤ حاول أن تحل

٢) **حركة سلم:** يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسى. إذا انزلق الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/ث، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوى $\frac{\pi}{٣}$

تفكير ناقد: انطلق صاروخ كتلته ١٥ طنًا وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت ٢٠٠ كجم/ث، ما كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه؟

ملاحظة مهمة: إذا كانت س القيمة الابتدائية للمتغير س (عند ن = ٠)، معدل تغير س بالنسبة للزمن ثابت،

س قيمة المتغير بعد زمن ن **فإن:** س = س. + $\frac{ص}{ن} \times ن$

فى بند تفكير ناقد السابق استخدم العلاقة $ك = ك. + \frac{ص}{ن} \times ن$ لتتحقق من صحة إجابتك.

المساحة

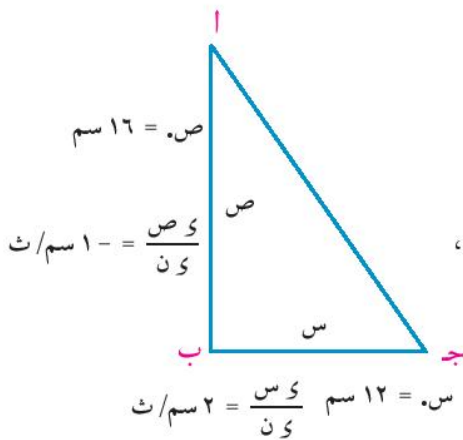
مثال

٣) مثلث قائم الزاوية طولاً ضلعى القائمة ١٢ سم، ١٦ سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم/ث وكان طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/ث.

أ) أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٢ ث

ب) متى يصبح هذا المثلث مثلثاً متساوى الساقين؟

الحل



أ) نفرض أن س، ص طولاً ضلعى القائمة بعد زمن قدره ن ثانية،

م مساحة المثلث حينئذ حيث س، ص، م دوال فى الزمن:

∴ $س = ١٢ + ٢ ن$ ، $ص = ١٦ - ن$

م $= \frac{١}{٢} س \times ص = \frac{١}{٢} (١٢ + ٢ ن) (١٦ - ن)$

م $= (٦ + ن) (١٦ - ن)$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

∴ $\frac{م}{ن} = (٦ + ن) (١ - ١) + (١٦ - ن) \times ١ = ١٠ - ن$ سم^٢/ث

عند ن = ٢ ث ∴ معدل تغير مساحة المثلث = $١٠ - ٢ = ٨$ سم^٢/ث

ب) عندما $s =$ ص يكون $١٢ + ن = ١٦ - ن$. $\therefore ن = \frac{٤}{٣}$ ث
 أى أن بعد $\frac{٤}{٣}$ ث يصبح المثلث القائم مثلثًا متساوي الساقين

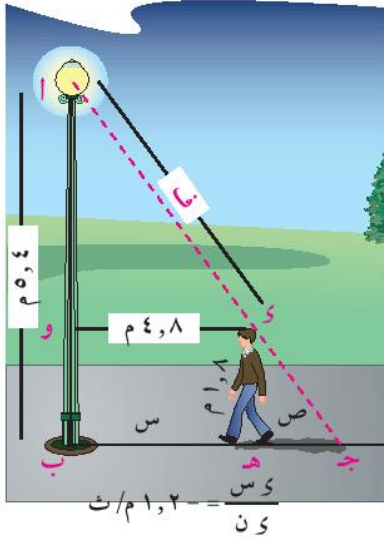
٤ حاول أن تحل

٣) الحجم: جسم معدني على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١ سم/د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢ سم/د . أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازي المستطيلات عن الزيادة.

مثال طول الظل

٤) يسير رجل طوله ١,٨ متر في خط مستقيم مقتربًا من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ٢,١ متر/ث، فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٥,٤ مترًا عن سطح الأرض أوجد:
 أ) معدل تغير طول ظل الرجل.
 ب) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤,٨ مترًا من عمود الإضاءة.

الحل



نمذجة المشكلة: في الشكل المقابل تمثل $\overline{AB}$ عمود الإضاءة، النقطة أ المصباح وتمثل $\overline{OH}$ الرجل، والنقطة ج نهاية ظل الرجل فيكون:

س = هـ ب بعد الرجل عن قاعدة عمود الإضاءة.
 ص = هـ ج طول ظل الرجل.
 ف = أ و بُعد رأس الرجل عن المصباح.

أولاً: $\therefore \triangle ABG \sim \triangle OHG$ و هـ ج

$$\therefore \frac{AB}{OH} = \frac{BG}{HG} = \frac{5,4}{1,8} = \frac{s + v}{v}$$

ويكون $v = ٢$ س باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$$\therefore ٢ \frac{v}{s} = \frac{v}{s} \quad \text{أى} \quad \frac{v}{s} = \frac{١,٢}{٢} = -٠,٦ \text{ متر/ث}$$

ثانيًا: في $\triangle A و$ القائم الزاوية في (و)

$$f^2 = s^2 + (٣,٦)^2 \quad \text{باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن}$$

$$٢ \frac{f}{s} = \frac{v}{s} = ٢ \text{ س} \quad \text{عند } s = ٤,٨ \text{ م} \quad f = ٦ \text{ متر}$$

$$٦ \frac{f}{s} = \frac{v}{s} = ١,٢ \times ٤,٨ \quad \text{أى} \quad \frac{f}{s} = -٠,٩٦ \text{ متر/ث}$$

٤ حاول أن تحل

٤) انشاءات: ماسورة مياه طرفها أ، ب، وطولها ٥ أمتار، تستند بطرفها أ على أرض أفقية ويأخذى نقطتها و على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار. فإذا انزلق الطرف أ مبتعدًا عن السور بمعدل $\frac{٥}{٢}$ متر/د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور.

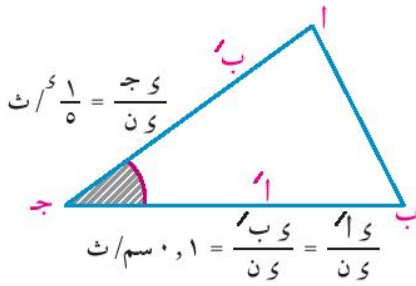


المساحة

مثال

٥ ضلعان في مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ١ سم/ث، و يتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{1}{5}$ راديان/ث. بأي معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم.

الحل



نمذجة المشكلة: نفرض أن عند لحظة زمنية t يكون طول أحد ضلعي المثلث a وطول الآخر b وقياس الزاوية المحصورة بينهما C ، M مساحة المثلث ABC جـ دوال قابلة للاشتقاق في t حيث $M = \frac{1}{2} ab \sin C$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى t

$$\therefore \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[a \frac{db}{dt} \sin C + b \frac{da}{dt} \sin C + ab \cos C \frac{dC}{dt} \right] \quad (1)$$

$$\text{لكن } \frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 1, \frac{dC}{dt} = \frac{1}{5} \text{ راديان/ث}$$

وعندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم يكون المثلث متساوي الأضلاع

$$\text{فإن } C = \frac{\pi}{3}, \text{ جتا } C = \frac{1}{2} \text{ بالتعويض في المعادلة (1)}$$

$$\therefore \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \left[10 \times 10 \times \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{3} + 10 \times 10 \times \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{3} + 10 \times 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10 = 10.866 \text{ سم}^2/\text{ث}$$

أي مساحة المثلث تتزايد عند هذه اللحظة بمعدل ١٠,٨٦٦ سم^٢/ث

٦ حاول أن تحل

٥ **المساحة:** ABC جـ مثلث قائم الزاوية في جـ، مساحته ثابتة وتساوي ٢٤ سم^٢، إذا كان معدل تغير b يساوي ١ سم/ث فأوجد معدل تغير a من أ، و C عند اللحظة التي يكون فيها b يساوي ٨ سم.

تفكير ناقد: إذا كان S (قياس زاوية بالتقدير الدائري) يتزايد بمعدل زمني ثابت، فسر لماذا:

أ يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل عند $S = 0$

ب يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب عند $S = \frac{\pi}{3}$

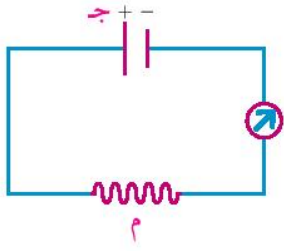
ج يتناقص جيب تمام بمعدل $\frac{3}{8}$ مرة قدر تزايد الظل عند $S = \frac{\pi}{4}$

الربط بالفيزياء

مثال

٦ في دائرة كهربائية مغلقة، إذا كان جـ فرق الجهد (فولت)، I شدة التيار (أمبير)، R المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ فولت/ث، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{1}{4}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة في اللحظة التي يكون فيها جـ = ١٢ فولت، $I = 2$ أمبير.

الحل



تعلم أن ج = ت × م باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$$\therefore \frac{ج}{ن} = \frac{ت}{ن} \times م + \frac{م}{ن} \times ت$$

$$\therefore \frac{ج}{ن} = \frac{ت}{ن} \times ١ + \frac{١}{ن} \times م$$

$$\therefore \text{عند ج} = ١٢ \text{ فولت، ت} = ٢ \text{ أمبير فإن: م} = \frac{ج}{ت} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ أوم}$$

$$\text{ويكون ١} = ٢ \times \frac{م}{ن} + \frac{١}{ن} \times ٦ \therefore ٢ \text{ أوم} = \frac{م}{ن}$$

أي إن معدل تغير المقاومة في هذه اللحظة ٢ أوم / ث

٦ حاول أن تحل

٦ في المثال السابق احسب معدل تغير المقاومة إذا كان التيار يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ أمبير / ث.



تمارين الدرس (١ - ٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{4}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:
 - أ $\frac{4}{\pi}$ سم/ث
 - ب $\frac{\pi}{4}$ سم/ث
 - ج $\frac{1}{8}$ سم/ث
 - د 8 سم/ث
- ٢ ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل 1 سم^٣/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه 8 سم^٣ هو:
 - أ $\frac{1}{12}$
 - ب $\frac{1}{12}$
 - ج $\frac{1}{6}$
 - د $\frac{1}{6}$
- ٣ جسم يتحرك على المنحنى $y = x^2$ ، إذا كان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$ وحدة / ث عند $x = 1$ فإن $\frac{dy}{dt}$ عند هذه اللحظة يساوي
 - أ $\frac{3}{4}$
 - ب $\frac{3}{8}$
 - ج $\frac{3}{4}$
 - د $\frac{3}{2}$
- ٤ إذا كان ميل المماس للمنحنى $y = x^3$ عند نقطة ما $\frac{1}{4}$ وكان الإحداثي السيني لهذه النقطة يتناقص بمعدل 3 وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادي يساوي
 - أ $\frac{1}{4}$
 - ب $\frac{3}{4}$
 - ج $\frac{1}{4}$
 - د $\frac{3}{2}$

أجب عما يأتي:

- ٥ تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y^2 + x^2 = 6$ ، فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة $(1, 3)$ يساوي 4 وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن.
- ٦ سقط حجر في بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل 4 سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة في نهاية 5 ثوانٍ.
- ٧ صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها 1 سم/ث، أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها 10 سم.
- ٨ كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره 2 سم^٣/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم وأن الضغط يعادل 1000 ث جم/سم^٢ عندما يكون الحجم 250 سم^٣. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز 100 سم^٣.

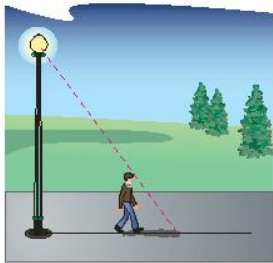


- ٩ يتسرب غاز من بالون كرى بمعدل 20 سم^٣/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره 10 سم، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجي للبالون في نفس اللحظة.

١٠ سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ سم/د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة.



١١ يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{4}$ وتزايد بمعدل $\frac{12}{5}$ ، أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة.



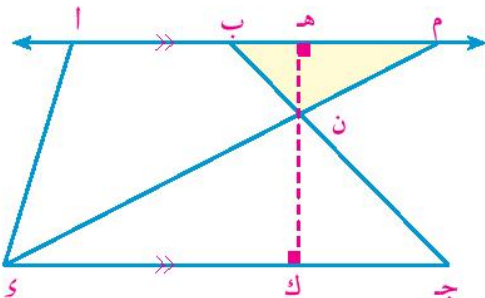
١٢ يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ٢ م/ث، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θ عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن $\frac{1}{S} = \tan \theta$ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح.

١٣ مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $3\sqrt{2}$. إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة.

١٤ **الربط بالصناعة:** إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يوماً) يتعين بالعلاقة $ص = ٤٠٠(١ - ٣^{-٠.٠٣}ن)$ وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر.



١٥ **تطبيقات حياتية:** إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطى بالعلاقة: $ص = (١٠٠ + ن) لو$ (ن + ٥) جرام بدلالة عدد الأيام ن. أوجد معدل تغير انتاج الخلية عند $ن = ٥$ ، $ن = ١٥$ ، $ن = ٢٠$. هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص؟



١٦ أ ب ج د شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، ارتفاعه يساوي ٣ سم، $CD = ٥$ سم، تتحرك النقطة م على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بسرعة ٤,٨ سم/ث مبتدئاً من النقطة ب. أوجد معدل تغير مساحة المثلث م ن ب فى اللحظة التى يكون فيها م ب = ١ سم

الوحدة الثانية

سلوك الدالة ودراسة المنحنيات

Behavior of the Function and Investigating curves

مقدمة الوحدة

يمكنك من خلال قراءة الشكل البياني لمنحنى دالة أن تحدد فترات اطراد (تزايد - تناقص - ثبات) كما يمكن معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة والتعرف على بعض خواص الدالة، كما تستطيع باستخدام البرامج الرسومية للحاسب الآلي رسم الدالة ودراسة سلوكها... إلا أن هذا ليس متاحًا دائمًا، لذلك ستعرف في هذه الوحدة تقنيات أكبر لرسم منحنى الدالة من خلال حساب التفاضل باستخدام مشتقات الدالة (المشتقة الأولى والمشتقة الثانية) لتحديد فترات تزايد أو تناقص الدالة، وتعيين القيم العظمى والقيم الصغرى المرتبطة بقيم s (القيم العظمى والصغرى المحلية)، والقيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة متصلة على فترة محددة $[a, b]$ واتجاه تحذب منحنى الدالة (لأعلى أو لأسفل) كما تدرس بعض التطبيقات لإيجاد القيم العظمى والصغرى لتساعدك في نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية أخرى.

مخرجات التعلم

- في نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.
- يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.
- يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة في فترة مغلقة.
- يوجد النقط الحرجة والتحذب لأعلى والتحذب لأسفل ونقط الانقلاب لدالة.
- يوجد العلاقة بين منحنى الدالة والمشتقة الأولى.
- يدرس سلوك دالة من حيث اطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.
- يدرس منحنيات الدالة ومشتقاتها.

المصطلحات الأساسية

Convexity	التحدب	Local Minimum	قيمة صغرى محلية	Increasing Function	دالة متزايدة
Convex Upward	تحدب لأعلى	Local Maximum	قيمة عظمى محلية	Dereasing Function	دالة متناقصة
Convex Downward	تحدب لأسفل	Local Extrema	قيمة قصوى محلية	Maxima and Minima	القيم العظمى والصغرى
Inflection Point	نقطة انقلاب	Absalute Extrema	قيمة قصوى مطلقة	Extrema	القيم القصوى
				Critical Point	نقطة حرجة

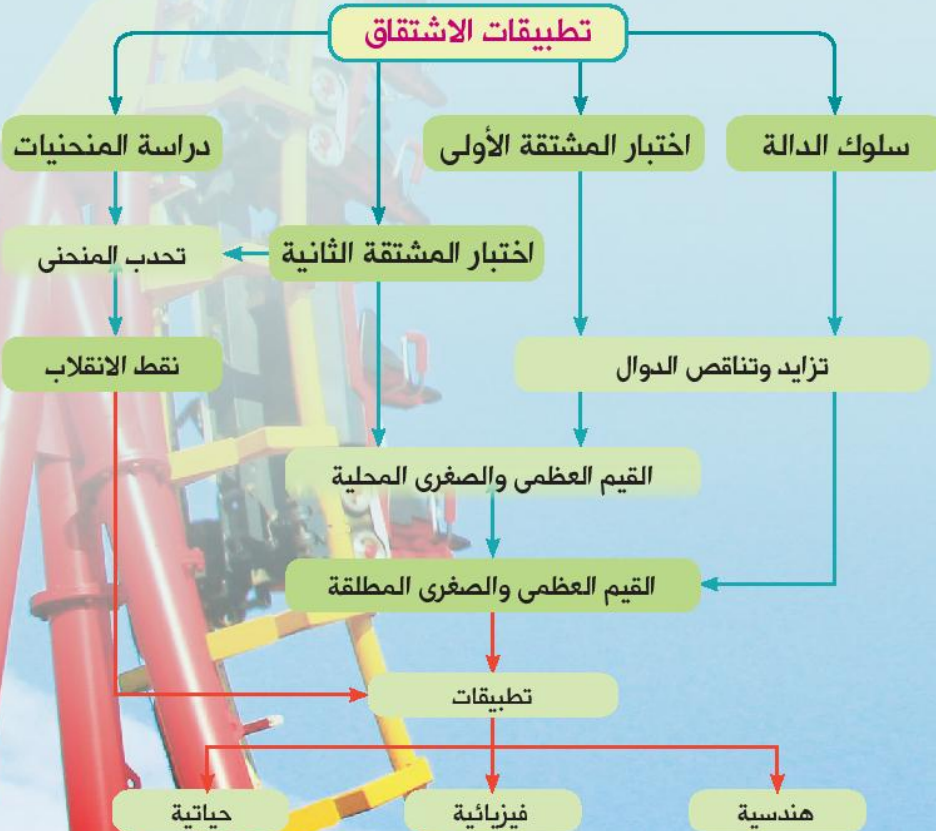
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى

دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): تزايد وتنقص الدوال.
- الدرس (٢ - ٢): القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)
- الدرس (٢ - ٣): دراسة المنحنيات
- الدرس (٢ - ٤): تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

مخطط تنظيى للوحدة



تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

سوف تتعلم

- استخدام المشتقة الأولى في تحديد فترات تزايد أو تناقص دالة.
- تطبيقات حياتية على فترات تزايد وتناقص الدالة.

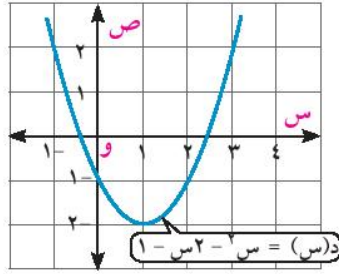
فكر و ناقش



توضح الأشكال المقابلة منحنى الدالتين د ، ر حيث

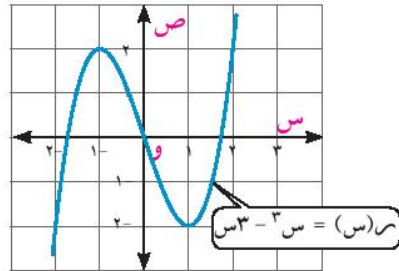
$$\begin{aligned} \text{د (س)} &= \text{س}^2 - 2\text{س} - 1 \\ \text{ر (س)} &= \text{س}^3 - 3\text{س} \end{aligned}$$

حدد فترات تزايد أو تناقص الدالة د



أوجد مشتقة الدالة د وابحث إشارة د (س) لقيم س المختلفة التي تنتمي لفترة التزايد

إبحث إشارة د (س) لقيم س المختلفة التي تنتمي لفترة التناقص



كرر ما سبق من خطوات لتحديد إشارة ر (س) في فترات التزايد وفترات التناقص للدالة ر، ماذا تستنتج؟ وما نوع الزاوية التي يصنعها مماس المنحنى عند قيم س المختلفة في فترات التزايد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟

تعلم



اختبار المشتقة الأولى للدوال المطردة

First Derivative Test for Monotonic Functions

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$:

١- إذا كان د (س) < 0 لجميع قيم س $\in [a, b]$

فإن د متزايدة على الفترة $[a, b]$

٢- إذا كان د (س) > 0 لجميع قيم س $\in [a, b]$

فإن د متناقصة على الفترة $[a, b]$

بحث اطراد دالة

أوجد د (س)

حل المعادلة د (س) = 0

إبحث إشارة د (س)

د (س) > 0

د متناقصة

د (س) < 0

د متزايدة

مثال

تحديد فترات التزايد والتناقص

١ حدد فترات التزايد وفترات التناقص الدالة د حيث د (س) = س^٣ - س^٢ + ٢

الحل

∴ د (س) = س^٣ - س^٢ + ٢ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على ع

$$\therefore د (س) = س^3 - س^2 + 2 \Rightarrow د (س) = 3س^2 - 2س = س(3س - 2)$$

بوضع د (س) = ٠ فيكون: ٣(س - ٢/٣) = ٠ ⇒ س = ٢/٣ ، س = ٠

$$\therefore د (س) = ٠ \text{ عندما } س = ١- ، س = ١$$

نبحث إشارة د (س) في كل من هذه الفترات كما في جدول التغيرات المقابل فنجد:

س	∞ -	١ -	١	∞
إشارة د (س)	+	+	-	+
سلوك د (س)	↗	↗	↘	↗

د متزايدة على الفترة [-∞ ، ١ -]

د متناقصة على الفترة [١ - ، ١]

د متزايدة على الفترة [١ ، ∞]

لاحظ أن:

١ عند رسم منحنى الدالة د بأحد البرامج الرسومية (الشكل المقابل)

نجد أن سلوك منحنى الدالة يطابق ما تم استنتاجه بجدول التغيرات.

٢ المماس للمنحنى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات في فترات التزايد وزاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب

لمحور السينات في فترات التناقص.

٣ قيم س التي تفصل بين فترات التزايد والتناقص للدالة هي القيم التي تكون عندها المشتقة الأولى للدالة تساوي صفرًا أو غير موجودة

٤ حاول أن تحل

١ حدد فترات التزايد وفترات التناقص لكل مما يأتي:

أ د (س) = س^٣ - ٩س^٢ + ١٥س

ب د (س) = $\frac{س}{س^2 + ١}$

مثال

دوال مثلثية

٢ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س + ٢ جاس ، ٠ < س < π٢

الحل

د متصلة وقابلة للاشتقاق على [٠ ، π٢]

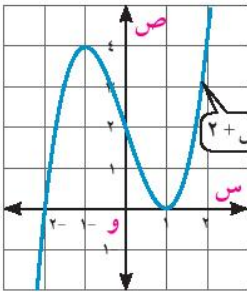
$$\therefore د (س) = س + ٢ جاس$$

نبحث إشارة د (س)

$$\text{عندما } س + ٢ جاس = ٠$$

$$\therefore جاس = -\frac{١}{٢}$$

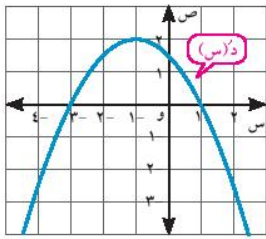
$$\therefore س \in [٠ ، \pi/2] \Rightarrow س = \frac{\pi/2}{٣} \text{ أو } س = \frac{\pi/4}{٣}$$



لاحظ أن:

$$\begin{aligned} \text{عند } s = \frac{\pi}{4} & \quad d(s) = 1 > 0 \quad \therefore \text{د تزايدية على } \left[\frac{\pi}{4}, 0 \right] \\ \text{عند } s = \frac{\pi}{2} & \quad d(s) = 1 > 0 \quad \therefore \text{د متناقصة على } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \\ \text{عند } s = \frac{3\pi}{4} & \quad d(s) = 1 > 0 \quad \therefore \text{د تزايدية على } \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٢ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = س - ٢ جتا س ، ٠ < س < $\frac{\pi}{2}$ 

تفكير ناقداً: يوضح الشكل المقابل منحنى د(س) للدالة د حيث د(س) كثيرة الحدود.

أ عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د

ب أوجد مجموعة حل المتباينة د(س) < ٠

مثال

٣ حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة م حيث م(س) = ٢ لو س - س^٢

الحل

س	٠	∞
إشارة د'(س)	+	-
سلوك د(س)	↗	↘

م(س) قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ℝ⁺

$$م'(س) = \frac{2}{س} - ٢س = \frac{٢(١ - س^٢)}{س}$$

بحث إشارة م'(س)

عندما م'(س) = ٠ ، ∴ س = ١ أو س = -١ ∉ ℝ⁺

عند س > ١ ، ∴ م'(س) < ٠ وتكون م تزايدية على [١ ، ∞)

عند س < ١ ، ∴ م'(س) > ٠ وتكون م تناقصية على [٠ ، ١]

٤ حاول أن تحل

٣ حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د حيث د(س) = س - هـ س ، وباستخدام برنامج GeoGebra ارسم منحنى الدالة د وتحقق من إجابتك.



تمارين ١ - ٢



حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د في كل مما يأتي:

- ① د (س) = س^٢ - ٤س
 ② د (س) = (س - ٣)^٢
 ③ د (س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٥
 ④ د (س) = ٩س - س^٣
 ⑤ د (س) = س^٤ + ٤س
 ⑥ د (س) = ٣ - ٢(س - ٢)^٤
 ⑦ د (س) = ١ - $\frac{١}{س}$
 ⑧ د (س) = $\frac{٢ - س}{٢ + س}$
 ⑨ د (س) = $\frac{١ - \sqrt{١ - س}}{س}$
 ⑩ د (س) = س + لو س
 ⑪ د (س) = ٣ - لو س^٢
 ⑫ د (س) = ٥ - ٢س^٢

أجب عما يأتي:

- ⑬ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = ظا س - س متزايدة على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$
- ⑭ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = ١ - جاس، ٠ < س < ٢π
- ⑮ إذا كانت د، ر دالتين قابلتين للاشتقاق، د (س) > ر (س) لكل س ∈ ع، فأثبت أن الدالة ع حيث ع (س) = د (س) - ر (س) متناقصة لكل س ∈ ع.

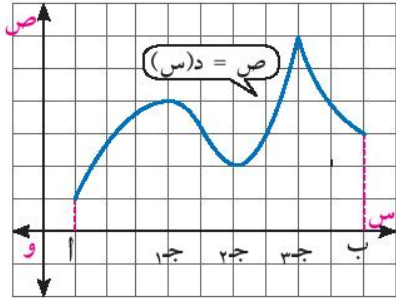
القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

Maxima and Minima (Extrema)

فكر و ناقش



يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة d المتصلة على $[a, b]$



- ١- حدد فترات تزايد وتناقص الدالة d
 - ٢- عند $s = 1$ ما قيمة $d(1)$ ؟ صف تغير d على الفترة $[a, 1]$ ، $d(1)$ هل $d(1)$ أكبر قيم d في هذه الفترة؟
 - ٣- عند $s = 2$ ما قيمة $d(2)$ ؟ صف تغير d على الفترة $[1, 2]$ ، $d(2)$ هل $d(2)$ أصغر قيم d في هذه الفترة؟
 - ٤- هل يمكن إيجاد قيمة $d(3)$ ؟ فسر إجابتك.
- صف تغير d على الفترة $[2, 4]$ ، $d(4)$ هل $d(4)$ أكبر قيم d في هذه الفترة؟

النقطة الحرجة Critical Point

للدالة d المتصلة على الفترة $[a, b]$ نقطة حرجة $(c, d(c))$ إذا كانت $c \in [a, b]$ ، $d'(c) = 0$ أو $d'(c)$ غير معرفة أو الدالة d غير قابلة للاشتقاق عند $s = c$.

في الشكل السابق نستنتج أن:

توجد نقط حرجة عند $s = 1$ ، $s = 2$ لأن $d'(1) = d'(2) = 0$ ويطلق عليها أحيانا نقطة التوقف stationary point، كما توجد نقطة أخرى حرجة عند $s = 4$ لأن d متصلة عند $s = 4$ وغير قابلة للاشتقاق (المشتقة اليمنى $\neq$ المشتقة اليسرى).

القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية

Local Maximum and Local Minimum

إذا كانت d دالة متصلة، مجالها F ، $c \in F$ فإنه يوجد للدالة d :
قيمة عظمى محلية عند $s = c$ إذا وجدت فترة مفتوحة $[a, b]$ $c \in [a, b]$ تحوي c بحيث يكون $d(s) < d(c)$ لكل $s \in [a, b]$ ، a, b **قيمة صغرى محلية عند $s = c$** إذا وجدت فترة مفتوحة $[a, b]$ $c \in [a, b]$ تحوي c بحيث يكون $d(s) \geq d(c)$ لكل $s \in [a, b]$ ، a, b

سوف تتعلم

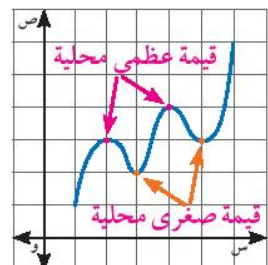
- مفهوم النقطة الحرجة.
- مفهوم القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة.

المصطلحات الأساسية

- نقطة حرجة Critical point
- قيمة عظمى محلية
- Relative Maximum
- قيمة صغرى محلية
- Relative Minimum
- قيم قصوى مطلقة Absolute Extrema

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية



لاحظ أن :

في بند فكر وناقش: توجد قيم عظمى محلية عند $s = ج١$ ، $s = ج٣$ ، بينما توجد قيمة صغرى محلية عند $s = ج٢$

اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية

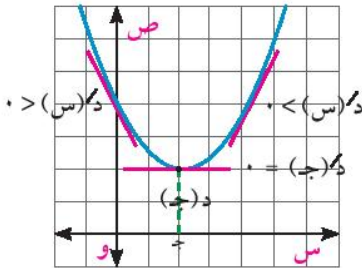
First Derivative Test for relative maximum and relative minimum

تعلم

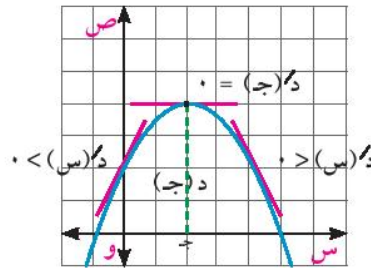


إذا كانت (ج ، د (ج)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند ج ، ووجدت فترة مفتوحة حول ج بحيث:

- ١- $د'(س) < ٠$ عندما $س > ج$ ، $د'(س) > ٠$ عندما $س < ج$ ، فإن د (ج) قيمة عظمى محلية
- ٢- $د'(س) > ٠$ عندما $س > ج$ ، $د'(س) < ٠$ عندما $س < ج$ ، فإن د (ج) قيمة صغرى محلية



د (ج) قيمة صغرى محلية عند ج



د (ج) قيمة عظمى محلية عند ج

٣- إذا لم يحدث تغير في إشارة $د'(س)$ على جانبي ج ، فإنه لا يوجد للدالة د فقط عظمى أو صغرى محلية عند ج.

لنتذكر:

إذا كانت د دالة متصلة على $[ا، ب]$ وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند ج $ج \in [ا، ب]$ فإن $د'(ج) = ٠$

اختبار المشتقة الأولى

مثال



١) إذا كان د (س) = $س^٣ + ٣س^٢ - ٩س - ٧$ أوجد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة د

الحل

١) تحديد النقاط الحرجة: د متصلة وقابلة للاشتقاق

$$\therefore د'(س) = ٣س^٢ + ٦س - ٩$$

$$٣ = ٣(س^٢ + ٢س - ٣) = ٣(س + ٣)(س - ١)$$

$$\text{عندما } د'(س) = ٠ \therefore س = -٣ \text{ أو } س = ١$$

لدينا نقطتان حرجتان (-٣ ، د(-٣)) ، (١ ، د(١))

أى النقطتان: (-٣ ، ٢٠) ، (١ ، -١٢)

حدد النقط الحرجة	إبحث إشارة د'(س)	← + ← عظمى محلية ← - ← صغرى محلية
------------------------	------------------------	--------------------------------------

س	∞	3^-	1^-	1^+	∞
إشارة د(س)	+	+	-	-	+
سلوك د(س)	↗	↘	↗	↘	↗

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة ويوضحه

جدول التغيرات المقابل

٣) في جوار س = ٣- تتغير إشارة د(س) من موجبة

(قبل س = ٣-) إلى سالبة (بعد س = ٣-)

∴ د(٣-) = ٢٠ قيمة عظمى محلية.

وفي جوار س = ١ تتغير إشارة د(س) من سالبة (قبل س = ١) إلى موجبة (بعد س = ١)

∴ د(١) = ١٢- قيمة صغرى محلية.

٤) حاول أن تحل

١) إذا كان د(س) = $\frac{1}{3}س^3 - ٩س + ٣$ ، أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د

مثال

المشتقة الأولى غير موجودة

٢) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د إذا كان د(س) = $\frac{2}{3}س^3 - ٥س + ١٠$

الحل

الدالة د مجالها $\mathbb{R}$ ومتصلة لكل $س \in \mathbb{R}$

١) تحديد النقاط الحرجة:

$$د(س) = \frac{2}{3}س^3 - ٥س + ١٠ \Rightarrow د'(س) = ٢س^2 - ٥ = 0 \Rightarrow س = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

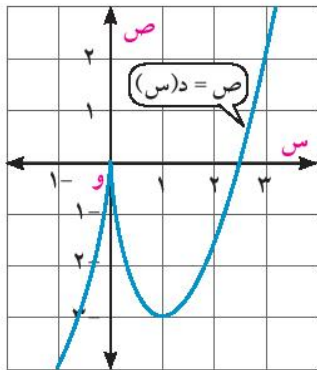
$$= \frac{2[س^3 - ٥س + ١٠]}{٣س^2} = \frac{٢(س^3 - ٥س + ١٠)}{٣س^2} \quad \text{حيث } س \neq 0$$

∴ د متصلة عند س = ٠، د(٠) غير موجودة

∴ توجد نقطة حرجة هي (٠، د(٠)) أي (٠، ١٠)

عندما د(س) = ٠ ∴ س = ١ ويوجد عندئذ نقطة حرجة

هي (١، د(١)) أي (١، ٣-) كما يوضحها الشكل المقابل.



س	∞	صغرى	1^-	1^+	∞
إشارة د(س)	+	غير موجودة	-	-	+
سلوك د(س)	↗	↘	↗	↘	↗

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه

جدول تغيرات الدالة المقابل.

٣) عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية = ١٠

عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية = ٣-

٤) حاول أن تحل

٢) أثبت أن للدالة د حيث د(س) = $\sqrt[3]{س}$ قيمة صغرى محلية.

تفكير ناقداً: هل للدالة د حيث د(س) = $س^3 + ٣س - ٤$ قيم عظمى وصغرى محلية؟ فسر إجابتك.

مثال

دوال كسرية

٣ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة d حيث $d(s) = s + \frac{4}{s}$ مبيّنًا نوعها

الحل

مجال $d = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

١ تحديد النقط الحرجة: $d'(s) = 1 - \frac{4}{s^2} = 0 \Rightarrow s^2 = 4 \Rightarrow s = \pm 2$ للدالة نقطتان حرجتان هما $(2, d(2))$ و $(-2, d(-2))$.

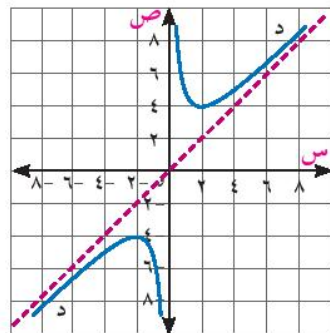
س	$-\infty$	-2	0	2	∞
إشارة $d'(s)$		+	-	-	+
سلوك $d(s)$		↗	↘	↗	↘

٢ اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة

يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل (لاحظ استبعاد $s = 0$ من مجال d).

٣ عند $s = 2$ توجد قيمة عظمى محلية $d = 4$

وعند $s = -2$ توجد قيمة صغرى محلية $d = 4$



لاحظ أن: قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية للدالة

تكنولوجيا: يبين الشكل المقابل منحنى الدالة d باستخدام أحد البرامج الرسومية، قارن بين جدول تغيرات الدالة ومنحنائها. ماذا تلاحظ؟

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة d حيث $d(s) = \frac{s^2}{s-1}$ مبيّنًا نوعها

تعلم

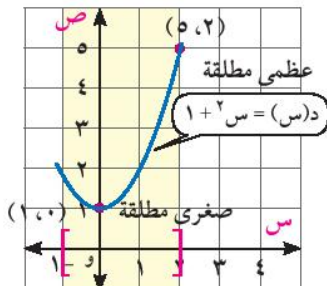
The Absolute Extrema of a Function on a Closed Interval

القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة

تعريف القيم القصوى : إذا كانت دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت $J \subseteq [a, b]$

١ $d(J)$ هي قيمة صغرى على الفترة $[a, b]$ عندما يكون $d(J) \geq d(s)$ لكل $s \in [a, b]$

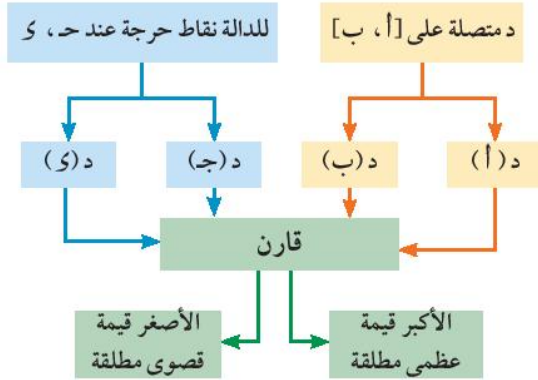
٢ $d(J)$ هي قيمة عظمى على الفترة $[a, b]$ عندما يكون $d(J) \leq d(s)$ لكل $s \in [a, b]$



القيمة الصغرى والقيمة العظمى لدالة على فترة تسمى القيم القصوى للدالة على هذه الفترة.

القيمة القصوى يمكن أن تحدث عند أي نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة وعندما تحدث عند حدود الفترة تسمى نقطة حدية قصوى

إذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإن للدالة قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة $[a, b]$.



لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f على الفترة المغلقة $[a, b]$ نتبع المخطط المقابل كما يلي:

1. احسب $f(a)$ ، $f(b)$ ، وقيمة الدالة عند كل نقطة حرجية.

2. قارن بين القيم السابقة: أكبر هذه القيم هو قيمة عظمى مطلقة وأصغرها هو قيمة صغرى مطلقة.

مثال

4. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f حيث $f(x) = x^3 - 12x + 12$ ، $x \in [-3, 3]$

الحل

$$\therefore f(x) = x^3 - 12x + 12 \text{، } x \in [-3, 3]$$

$$(1) \quad \therefore f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 12 = 21$$

$$(2) \quad f(3) = 3^3 - 12(3) + 12 = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

لتحديد النقط الحرجة نضع $f'(x) = 0$

$$\therefore x = -2 \text{ أو } x = 2 \in [-3, 3]$$

$$(3) \quad \text{عند } x = 2 \text{ توجد نقطة حرجية ويكون: } f(2) = -4$$

$$(4) \quad \text{عند } x = -2 \text{ توجد نقطة حرجية ويكون: } f(-2) = 28$$

بمقارنة قيم $1, 2, 3, 4$ نجد أن:

للدالة f قيمة عظمى مطلقة $= 28$ ، قيمة صغرى مطلقة $= -4$

9 حاول أن تحل

4. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f

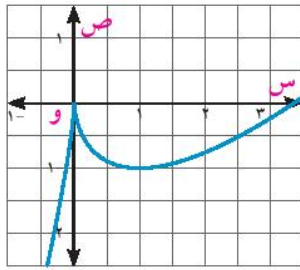
$$(أ) \quad f(x) = x^3 - 10x^2 + 10x \text{، } x \in [0, 4] \quad (ب) \quad f(x) = \frac{x^4}{1+x^3} \text{، } x \in [-1, 3]$$



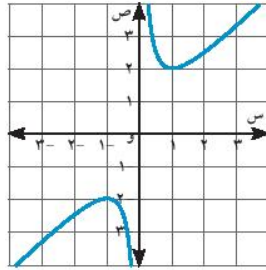
تمارين ٢ - ٢



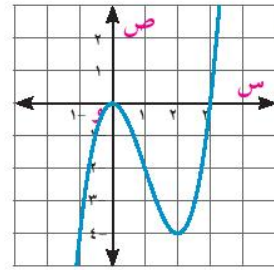
حدد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د في الأشكال التالية وبين نوعها:



٢



٢



١

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د في كل مما يأتي مبيناً نوعها:

٥ د (س) = س^٢ - س^٤

٤ د (س) = س^٣ + س^٢ + ٢

٧ د (س) = س^٣ - س^٥

٦ د (س) = س^٤ - س^٣

٩ د (س) = (س + ٢)^{٢/٣}

٨ د (س) = ٣ - س^{٢/٣}

١١ د (س) = س + س^{٤/٣}

١٠ د (س) = س + س^{٤/٣}

١٣ د (س) = ٤ - س^٢

١٢ د (س) = س^٣ - ٢

١٥ د (س) = س^٣ + س^٣ - س

١٤ د (س) = س^٣ (٣ - س)

١٧ د (س) = ٨ لو س - س^٢

١٦ د (س) = س - لو س

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة:

١٨ د (س) = س^٣ - ٣س + ١، س ∈ [-٢، ١]

١٩ د (س) = √(١ - س)، س ∈ [٢، ٥]

٢٠ د (س) = جاس + جتاس، س ∈ [٠، π/٢]

٢١ د (س) = س - س^٣، س ∈ [٠، ٢]

أجب عما يلي:

٢٢ **تفكير ابداعى:** أوجد قيم أ، ب، ح، و بحيث يحقق المنحنى د (س) = أس^٣ + ب س^٢ + ج س + و الشروط

التالية معاً:

ب له نقطة حرجة عند س = ١

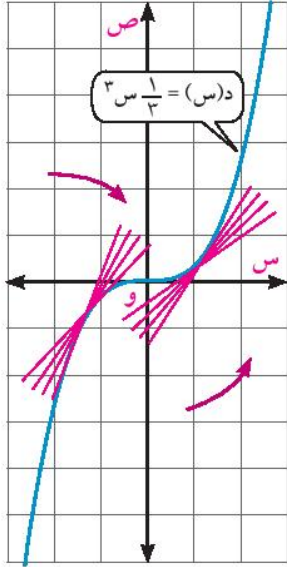
أ يمر بنقطة الأصل.

ج معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢، د(٢)) عليه هي ٩س + ص = ٢٠

دراسة المنحنيات

Investigating , Sketching Curves

استكشف



يبين الشكل المقابل منحني الدالة د حيث:

$$د(س) = \frac{1}{3} س^3, س \in \mathbb{R}$$

لاحظ أن الدالة د متزايدة على $\mathbb{R}$ لماذا؟

هل يختلف اتجاه تقوس (تحدب) المنحنى في الفترة

$[-\infty, 0]$ عن اتجاه تحدبه في الفترة $[0, \infty]$ ؟

في الفترة $[-\infty, 0]$ ، ما موقع منحني الدالة بالنسبة

إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس د(س) أم

يتناقص بزيادة قيم س؟

في الفترة $[0, \infty]$ ، ما موقع منحني الدالة بالنسبة إلى

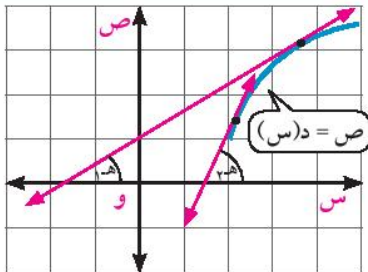
جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس د(س) أم

يتناقص بزيادة قيم س؟ ماذا تستنتج؟

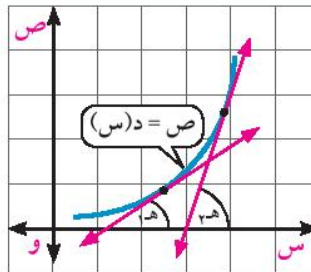
Convexity of a curves

تحدب المنحنيات

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ ، يكون منحني الدالة د محدباً لأسفل إذا كانت د' متزايدة على هذه الفترة ، ومحدباً لأعلى إذا كانت د' متناقصة على هذه الفترة.



المنحنى محدب لأعلى
د' متناقصة وتكون مشتقتها سالبة
أي د''(س) < 0



المنحنى محدب لأسفل
د' متزايدة وتكون مشتقتها موجبة
أي د''(س) > 0

إذا كان للدالة د مشتقة ثانية غير صفيرية فيمكن من خلالها دراسة تزايد وتناقص المشتقة الأولى د' وتحديد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحني الدالة د.

سوف تتعلم

- تحديد فترات تحدب منحني دالة لأعلى ولأسفل.
- إيجاد نقط الانقلاب لمنحني دالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية.
- دراسة المنحنيات.

المصطلحات الأساسية

- التحدب Convexity
- تحدب لأعلى Convex upward
- تحدب لأسفل Convex downward
- نقطة انقلاب Inflection point

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

The Second Derivative Test for Convexity

اختبار المشتقة الثانية لتحديد المنحنيات

نظريّة

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة I ، ب

١- إذا كان $D''(s) < 0$ لجميع قيم $s \in I$ ، ب فإن منحنى د يكون محدباً لأسفل على الفترة I ، ب

٢- إذا كان $D''(s) > 0$ لجميع قيم $s \in I$ ، ب فإن منحنى د يكون محدباً لأعلى على الفترة I ، ب

مثال

تحديد فترات تحدب كثيرات الحدود

١ إذا كان $D = 3 - 2s - 3s^2$ عيّن الفترات التي يكون فيها منحنى الدالة د محدباً لأعلى، والفترات التي يكون فيها محدباً لأسفل.

الحل

د متصلة وقابلة للاشتقاق لكل $s \in \mathbb{R}$ حيث:

$$D'(s) = 3 - 2s - 6s^2, \quad D''(s) = -2 - 12s$$

$$\text{عندما } D''(s) = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{6}$$

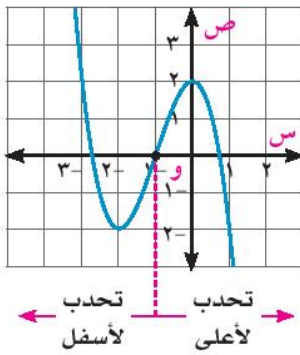
فترات التحجب: يبين الجدول

المقابل إشارة D'' وفترات تحدب

منحنى الدالة د لأعلى ولأسفل،

أي إن: منحنى الدالة محدب

لأسفل في الفترة $[-\infty, -\frac{1}{6}]$ ، ومحدب لأعلى في الفترة $[-\frac{1}{6}, \infty]$



s	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	∞
إشارة D''	+	0	-
تحدب منحنى د	تحدب لأسفل		تحدب لأعلى

٤ حاول أن تحل

١ حدد فترات التحجب لأعلى والتحدب لأسفل لكل من المنحنيات التالية:

أ $D(s) = 2 - 4s + s^2$

ب $D(s) = s^3 - 4s^2 + 3s$

تكنولوجيا: باستخدام أحد البرامج الرسومية يرسم منحنى الدالتين د، ر حيث $r(s) = \frac{1}{s}$ ، $D(s) = \frac{1}{s^2}$ وحدد فترات التحجب لأعلى والتحدب لأسفل وحقق إجابتك باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

لاحظ أن: قد يتغير اتجاه تحدب منحنى الدالة المتصلة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى عند نقطة تنعدم عندها المشتقة الثانية للدالة أو تكون غير موجودة.

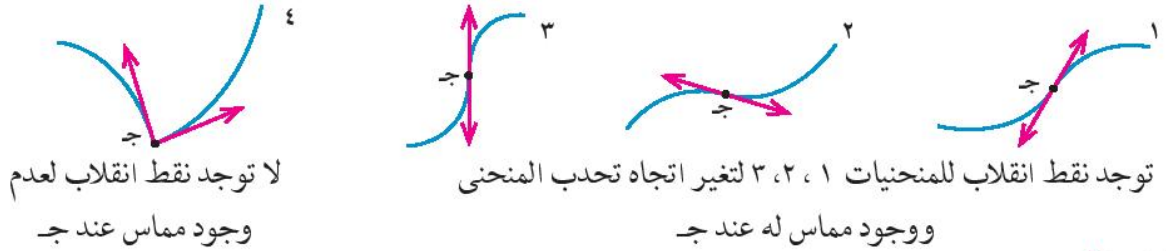
نقطة الانقلاب Inflection point

نظريّة

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة I ، ب، ج $\in I$ ، ب وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة

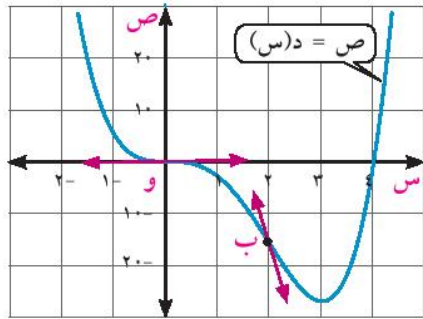
(ج، د (ج)). فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه

النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.



لاحظ أن:

١- المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة، لأن المنحنى في إحدى جهتي هذه النقطة يقع تحت المماس ، وفي الجهة الأخرى يقع فوق المماس.



٢- في الشكل المقابل يوجد لمنحنى الدالة د نقطتي انقلاب الأولى عند نقطة الأصل و (٠، ٠) والأخرى عند النقطة ب (٢، ٢).

مثال

التحذب ونقط الانقلاب

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - ٤ \\ \text{عندما } \text{س} > ٢- \\ \text{س}^3 - ٣\text{س}^2 + ٢\text{س} \\ \text{عندما } \text{س} \leq ٢- \end{array} \right\} = \text{إذا كانت د(س)}$$

حدد فترات تحذب منحنى د لأعلى ولأسفل ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة المماس عندها إن وجد.

الحل

الدالة د متعددة التعريف مجالها ح ، ومتصلة عند س = ٢- لأن $\text{د}^-(٢-) = \text{د}^+(٢-) = \text{د}(٢-) = ٠$

$$\text{د}^-(٢-) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - \text{د}^-(٢-)}{\text{ه} - ٢-} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢-}$$

$$= \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢-} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢-} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢-} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢-}$$

$$\text{د}^+(٢-) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - \text{د}^+(٢-)}{\text{ه} - ٢+} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢+}$$

$$= \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢+} = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٢+} \frac{\text{د} - (\text{ه} + ٢-) - ٠}{\text{ه} - ٢+}$$

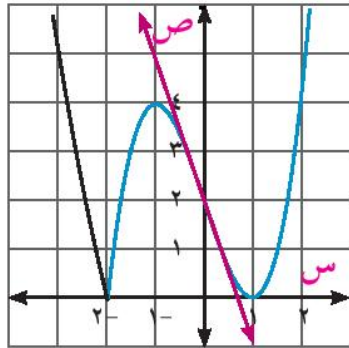
$$\therefore \text{د}^-(٢-) \neq \text{د}^+(٢-) \therefore \text{الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س} = ٢-$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \\ \text{عندما } \text{س} > ٢- \\ \text{س}^3 - ٣\text{س}^2 + ٢\text{س} \\ \text{عندما } \text{س} < ٢- \\ \text{غير موجودة عندما } \text{س} = ٢- \end{array} \right\} = \text{د}^-(٢-)$$

$$[\text{د}^-(٢-) \neq \text{د}^+(٢-)]$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \\ \text{عندما } \text{س} > ٢- \\ \text{س}^6 \\ \text{عندما } \text{س} < ٢- \end{array} \right\} = \text{د}^+(٢-)$$

يبين الجدول التالي إشارة d وفترات تحذب منحني الدالة لأعلى ولأسفل.



س	$\infty -$	$2 -$	$1 -$	∞
إشارة d	+	غير موجودة	-	+
تحذب منحني d	↖	↗	↘	↗

فترات التحذب: منحني d محدب لأسفل في الفترة $[-\infty, 2]$ ،
الفترة $[0, \infty]$ ومحدب لأعلى في الفترة $[2, 0]$

نقط الانقلاب

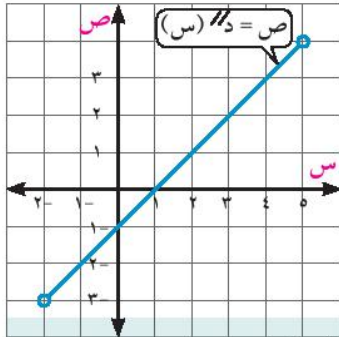
النقطة $(2, 0)$ ، $(-\infty, 2)$ أي $(-\infty, 2)$ ليست نقطة انقلاب لمنحني d رغم تغير اتجاه تحديه حولها، لعدم وجود مماس لمنحني الدالة عند هذه النقطة (d غير موجودة)

النقطة $(0, 0)$ ، $(0, \infty)$ أي $(0, \infty)$ هي نقطة انقلاب لمنحني d لتغير اتجاه تحديه حولها، ويوجد عندها مماس للمنحني يقطعه في هذه النقطة، ميله $d(0) = 3$ ، ومعادلته هي: $ص - 2 = 3(س - 0)$ (كما في الرسم)

٩ حاول أن تحل

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } س > 1 \\ \text{عندما } س \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (س + 3)^2 \\ 3س^2 - 3س \end{array} = (س) \text{ إذا كانت } d(س)$$

حدد فترات التحذب لأعلى والتحذب لأسفل لمنحني الدالة d ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحني عندها.



تفكير ناقذ: يمثل الشكل المقابل منحني $d(س)$ على الفترة $[2, 5]$ للدالة المتصلة d .

وضح فترات التحذب لأعلى والتحذب لأسفل لمنحني الدالة d إن وجدت.

هل توجد نقط انقلاب لمنحني d في هذه الفترة؟ فسر إجابتك.

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى أو الصغرى المحلية

نقطة

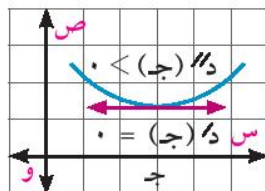
لتكن الدالة d قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوي $ج$ حيث $d(ج) = 0$

١) إذا كانت $d(ج) > 0$ فإن $d(ج)$ قيمة عظمى محلية.

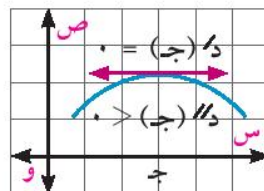
٢) إذا كانت $d(ج) < 0$ فإن $d(ج)$ قيمة صغرى محلية.

٣) إذا كانت $d(ج) = 0$ فإن اختبار المشتقة الثانية لا يستطيع تحديد نوع النقطة ($ج$ ، $d(ج)$) من

حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية.



$d(ج)$ قيمة صغرى محلية

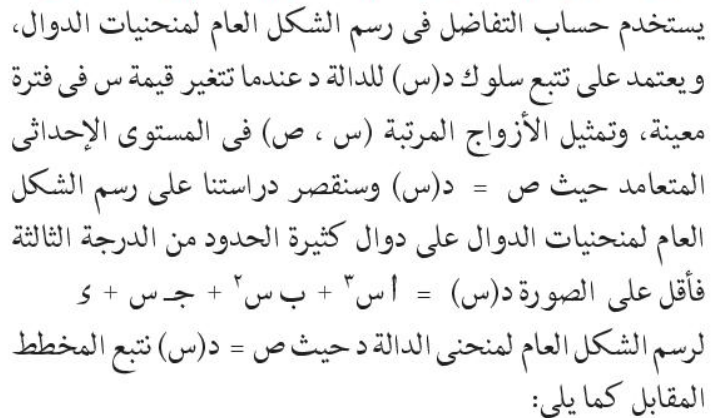


$d(ج)$ قيمة عظمى محلية

٢



دراسة ورسم الشكل العام لمنحنيات كثيرات الحدود



-1

-۲

-۳-

-3-

-5

مثال

رسم منحنى دالة

٤) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث $v = d(s) = s^3 - 3s^2 + 4$

الحل 

١- الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، والدالة ليست زوجية وليست فردية.

۲- $s^2 = s^2 - s = s(s-1)$ ، $s = s - s + 1 = (s-1) + 1$

للدالة نقط حرجة عند $d(s) = 0$ أى عند $s = 0$ ، $s = 2$

وتكون د متزايدة في الفترة $[-\infty, 0]$ والفترة $[2, \infty]$ ومتناقصة في الفترة $[0, 2]$

د# (س) = ۰ عند س = ۱

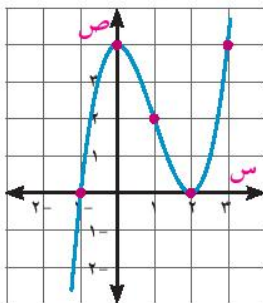
د) (س) $\in (0, \infty)$ في الفترة $[-\infty, \infty)$ ، α ويكون المنحنى محدباً لأعلى في هذه الفترة،

د) (س) < 0 في الفترة $[1, \infty)$ ويكون المنحني محدبًا لأسفل في هذه الفترة

النقطة (١ ، د(١)) أي (١ ، ٢) نقطة انقلاب.

٣- جدول التزايد والتناقص والتحدب

٥- الشكل العام لمنحنى الدالة د



س	$\infty -$	$\cdot$	$\downarrow$	$\uparrow$	∞
إشارة د	+	$\cdot$	-	$\cdot$	+
سلوك د					
إشارة د'					
تحديد د					
ص	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

قيمة صغرى محلية نقطة قيمة عظمى محلية

نقط إضافة: (١-، د(١-)) أي (١-، ٠) (٣، د(٣)) أي (٣، ٤)

حاول أن تحل

٤ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث $v = d(s) = 12s - s^3$

مثال

الشكل العام لمنحنى دالة

٥ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة d حيث $v = d(s)$ إذا علمت مايلي:

١- دالة متصلة مجالها $[1, 7]$ ، $D(1) = 2$ ، $D(5) = 4$

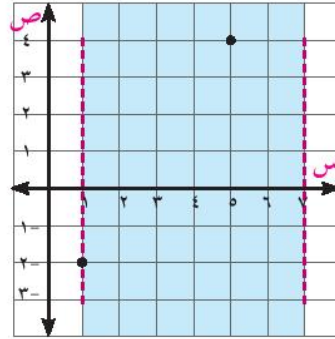
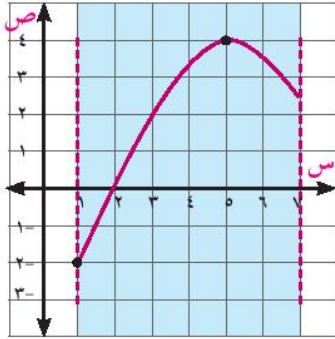
۲- $\delta(0) = 0$ ، $\delta(s) < 0$ عندما $s > 0$ ، $\delta(s) > 0$ عندما $s < 0$

۳- د (س) > ۰ . عندما $۱ > s > ۷$

الحل

من (٢): عند $s = 5$ المماس // محور السينات، ودمتزايدة
على الفترة $[1, 5]$ ومنتاقصة على الفترة $[5, 7]$
من (٣): المنحنى محدب لأعلى على $[1, 7]$

من (١): نرسم محوري الإحداثيات المتعامدة
النقطتين $(1, -2)$ ، $(5, 4)$ في المجال $[1, 7]$.



٥ حاول أن تحل

٥ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت ما يلي :

١- د متصلة مجالها $]0, \infty[$ ، د(٤) = ٣، د(٠) = ١ ، ٢- د(س) < ٠ عندما س < ٠

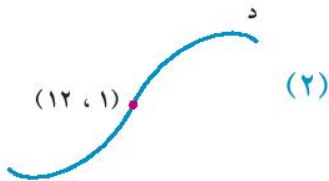
٣- د(س) < ٠ عندما س > ٤، د(٤) = ٠، د(س) > ٠ عندما س < ٤

مثال

حل معادلات

٦ إذا كانت النقطة (١٢، ١) هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^٣ + ب س^٢ فأوجد قيم أ، ب الحقيقية.

الحل



∴ النقطة (١٢، ١) نقطة انقلاب لمنحنى د

$$\therefore د(١) = ٠ ، د(١) = ١٢$$

$$د(س) = أس^٣ + ب س^٢ ، د'(س) = ٣أس^٢ + ٢بس = ١٢$$

$$\therefore ب = ١٢ - ٣أ ، من (١): ١ = ٢ + ١٢أ$$

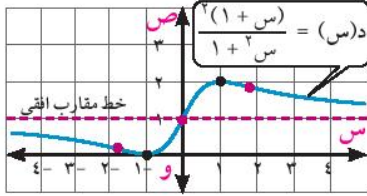
$$\therefore ب = ١٢ - ٣أ ، من (٢): ١ = ٢ + ١٢أ$$

$$\therefore ١٢ = ١٣ - ١٢أ ، ويكون أ = -٦ ، ب = ١٨$$

٦ حاول أن تحل

٦ إذا كانت النقطة (٢، ٢) هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^٣ + ب س^٢ فأوجد قيم أ، ب الحقيقية.

تكنولوجيا: بعض الدوال يصعب رسم منحناها البياني. يمكنك باستخدام برنامج geogebra أو أى برنامج رسومي آخر رسم منحنى الدالة ودراسة خواصه.



يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3}$ حيث $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3}$.

لاحظ:

(١) **النقط الحرجة:** للمنحنى نقط حرجة عند $x = -1$ ، $x = 1$ عند $x = 1$ قيمة صغرى محلية، عند $x = -1$ قيمة عظمى محلية.

(٢) **فترات التحدب:** إلى أعلى: $[-\infty, -\sqrt[3]{-1}]$ ، $[\sqrt[3]{-1}, 0]$ ، إلى أسفل: $[0, \sqrt[3]{-1}]$ ، $[\sqrt[3]{-1}, \infty]$.

(٣) **نقطة الانقلاب:** عند $x = \sqrt[3]{-1}$ يوجد مماس يقطع منحنى f ، عند $x = \sqrt[3]{-1}$ يوجد مماس يقطع منحنى f .

(٤) **الشكل العام للمنحنى:** منحنى الدالة يقترب بطرفيه من المستقيم $y = 1$ ويعرف بخط التقارب الأفقي.

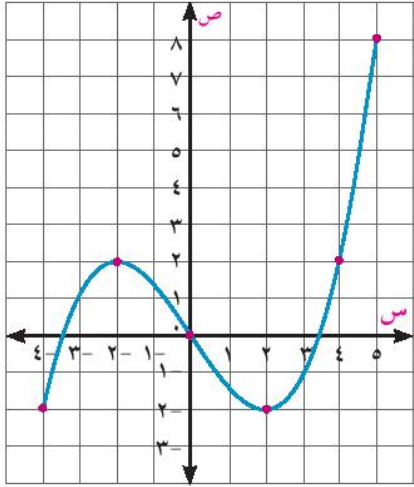
$$\text{للمنحنى الدالة ومعادلته } y = 1 \text{ حيث: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

تطبيق: ارسم منحنى الدالتين بأحد البرامج الرسومية ثم ادرس خواص كل منهما:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 2x - 3}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 2x - 3}$$

تمارين ٢ - ٣



١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة f حيث $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$ ، اكمل:

- مجالات f =
- $f'(x) = 0$ عندما $x \in$
- $f''(x) < 0$ عندما $x \in$
- المنحنى محدب لأعلى عندما $x \in$
- للمنحنى نقطة انقلاب هي
- للدالة قيمة صغرى محلية عند $x =$
- للدالة قيمة عظمى مطلقة تساوي

ابحث فترات تحذب الدالة f ثم أوجد إحداثيات نقط الانقلاب (إن وجدت) لكل مما يأتي:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ د(س) =
- $f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 3$ د(س) =
- $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ د(س) =
- $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$ د(س) =
- $f(x) = \frac{6}{x^3 + 2x^2}$ د(س) =
- $f(x) = (x^2 - 2)^2$ عندما $x > 4$ د(س) =
- $f(x) = x^2 - 20$ عندما $x \leq 4$ د(س) =

١٠) أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ يساوي $\frac{\pi}{4}$

١١) إذا كان لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = (x^3 - 3)^2$ قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ ، وقيمة صغرى محلية عند

$$x = \frac{2x + 1}{x^2} \text{ فثبت أن الإحداثي السيني لنقطة الانقلاب } = \frac{2x + 1}{x^2}$$

١٢) أوجد a ، b بحيث يكون للمنحنى $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ نقطة انقلاب عند النقطة $(1, -1)$.

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:

١٣) د(٠) = ٤ = د(٣) ، ٤ < د(س) > لكل س > ٢ ، ٢ < د(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د(س) < ٠

١٤) د(١) = د(٥) = ٠ ، د(س) > ٠ لكل س > ٣ ، د(س) < ٠ لكل س < ٣ ، د(س) > ٠ لكل س ≠ ٣

١٥) د(١-) = د(١) = ٢ = د(٠) ، ٤ = د(١) ، د(٠) = د(١-) = ٠ ، د(س) > ٠ لكل س > ٠ ، د(س) < ٠ لكل س < ٠

١٦) د(٣) = ٤ ، عند س > ٣ فإن د(س) < ٠ ، د(س) < ٠ عند س < ٣ فإن د(س) > ٠ ، د(س) < ٠

ادرس تغيرات الدالة د وارسم الشكل العام لمنحنائها فى كل مما يأتى:

١٧) د(س) = س^٢ - ٦س + ٥

١٨) د(س) = س^٢ - ٣

٢٠) د(س) = $\frac{1}{3}س^٣ - س^٢ + ٢$

١٩) د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٣

٢٢) د(س) = س(س - ٣)^٢

٢١) د(س) = $\frac{1}{٨}س^٣ - \frac{٣}{٤}س + ١$

٢٤) د(س) = $\frac{1}{٨}(س + ٤)(س - ٢)^٢$

٢٣) د(س) = (س - ٢)(س + ١)^٢

٢٦) د(س) = س |س - ٤|

٢٥) د(س) = $\left. \begin{array}{l} س^٣ - ٣س^٢ \text{ عندما } س < ٠ \\ س^٢ - ٢س \text{ عندما } س > ٠ \end{array} \right\}$

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

٢ - ٤

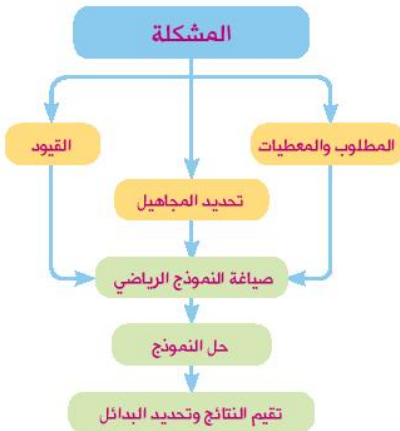
Applications of Maxima and Minima

Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

إن عملية اتخاذ قرار علمي في حل أى مشكلة تمر بعدة مراحل تتلخص في:

- ١- تحديد المشكلة (الهدف والإمكانات).
- ٢- وضع نموذج فكري أو تصور لأبعاد المشكلة.
- ٣- إيجاد نموذج علمي مناسب.
- ٤- حل النموذج واتخاذ القرار.



والنمذجة الرياضية هي صياغة مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها النموذج الرياضي، ويتلخص في المخطط المقابل حيث يتضمن:

- ١- تحديد المشكلة المطروحة غايتها ومكوناتها (ربح أعظم - تكلفة أقل - مساحة أكبر ...)

- ٢- تحديد مجاهيل المسألة التي يجب إيجاد قيمها للوصول إلى الغاية المطلوبة.
 - ٣- بيان العلاقات بين المجاهيل (معادلات - متباينات).
 - ٤- صياغة النموذج الرياضي وهو تمثيل للمشكلة بصورة رياضية قابلة للحل.
 - ٥- حل النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة.
 - ٦- تحديد البدائل المتاحة إذا كان للمسألة أكثر من حل واحد.
- ويسهم حساب التفاضل في حل النموذج الرياضي لمعظم مشكلات الحياة العملية حين يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما في إطار القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة كما في الأمثلة التالية.

مثال

اختبار المشتقة الأولى

١ أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث، طول قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث.

الحل

- ١- لحساب أكبر مساحة نرسم المسألة تبعاً للمعطيات والقيود.
- ٢- تحديد المتغيرات (المجاهيل)

بفرض أن عرض المستطيل = س سم وطوله ص سم ومساحته = م سم^٢

سوف تتعلم

النمذجة الرياضية

المصطلحات الأساسية

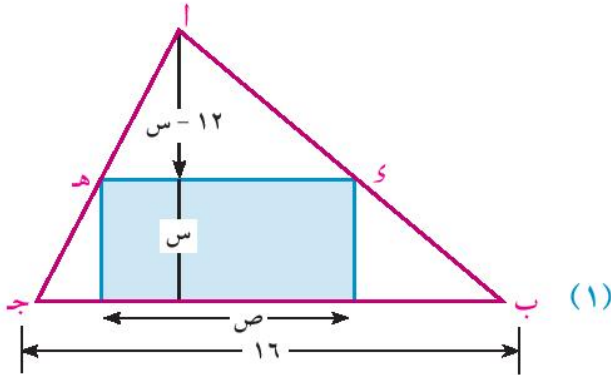
نمذجة رياضية

Mathematical Modeling

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

برامج رسومية



٣- العلاقات بين المتغيرات (النموذج الرياضي)

$$\text{مساحة المستطيل م} = \text{س} \times \text{ص}$$

٤- وضع النموذج الرياضي في متغير واحد إن أمكن

$$\frac{\text{ص}}{16} = \frac{\text{س}}{12} \quad (\text{من التشابه})$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{4}{3}(\text{س} - 12), \text{س} \in [0, 12]$$

$$\text{مساحة المستطيل م} = \frac{4}{3}\text{س}(\text{س} - 12)$$

$$\text{أى إن: م} = \text{د(س)} = 16\text{س} - \frac{4}{3}\text{س}^2$$

٥- حل النموذج الرياضي: باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى س

$$\therefore \text{د'(س)} = 16 - \frac{8}{3}\text{س} = 0 \quad \text{د''(س)} = -\frac{8}{3}$$

$$\text{عند د'(س)} = 0 \quad \therefore \text{س} = \frac{3 \times 16}{8} = 6 \text{ ويكون عندها د''(س)} < 0$$

$\therefore$ م لها نقطة حرجة وحيدة عند $\text{س} = 6$ ، والمشتقة الثانية سالبة دائماً، فإن هذه النقطة الحرجة تعطي القيمة العظمى المطلقة.

$$\therefore \text{للدالة م قيمة عظمى مطلقة عند س} = 6, \text{ص} = \frac{16}{3} = 5.33$$

أى إن: للمستطيل أكبر مساحة عندما يكون بعدها 6سم ، 8سم

٦- حاول أن تحل

١- أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى ساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها 12سم .

مثال

حساب أقل تكلفة

٢- يراد بناء صومعة حبوب على شكل أسطوانة رأسية ذات سقف نصف كروي بحيث تتسع لتخزين $108\pi\text{م}^3$ من الحبوب (بفرض أن تخزين الحبوب يتم في الجزء الأسطواني فقط دون السقف)، إذا كانت تكلفة وحدة المساحة من السقف ضعف تكلفة وحدة المساحة من الجدار الجانبي. ما أبعاد الصومعة التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن؟

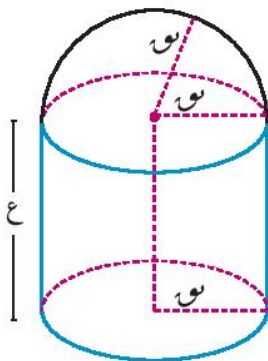
الحل

١- لحساب أقل تكلفة نرسم المسألة تبعاً للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات: نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ع مترًا، طول نصف قطر قاعدتها = ر مترًا وأن تكلفة وحدة المساحة من الجدار = ج جنيهاً فتكون تكلفة وحدة المساحة من السقف = ٢ ج جنيهاً والتكاليف الكلية = ك جنيهاً.

٣- العلاقات بين المتغيرات (النمذجة):

$$\text{مساحة السطح الأسطواني} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع} = 2\pi\text{ر} \times \text{ع وحدة مساحة}$$



مساحة السطح النصف كرى $\frac{1}{2} =$ مساحة الكرة πr^2 وحدة مساحة
التكاليف الكلية ك $\pi r^2 \times \text{ع} + \pi r^2 \times 2 \times \text{ج} = \pi r^2 (\text{ع} + 2\text{ج})$

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد:

∴ حجم الجزء الأسطوانى $\pi 10.8 =$
التكاليف الكلية ك $\pi r^2 (\text{ع} + 2\text{ج}) = \pi 10.8$ أى إن $\text{ع} = \frac{10.8}{r^2}$
ك = د (ن) $\pi 216 \text{ج} - \pi 4 \text{ج} =$

٥- حل النموذج: د (ن) $\pi 216 \text{ج} - \pi 4 \text{ج} = 0$

النقط الحرجة = عند د (ن) $0 =$ ∴ $\frac{216}{8} = 27$ أى إن $\text{ج} = 3$ (نقطة وحيدة)
اختبار المشتقة الثانية:

∴ د (ن) $\pi 432 = \pi 8 + 3 = 0$ ∴ $0 < (3)$

أى إن: عندما يكون طول نصف قطر الأسطوانة الرأسية ٣ أمتار يكون للصومعة أقل تكاليف، ويكون ارتفاعها عندئذ $\frac{10.8}{9} = 1.2$ مترًا.

٦ حاول أن تحل

٢ خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترًا مكعبًا، وقاعدته مربعة. يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة، يتكلف القاع ٥٠ جنيهًا لكل متر مربع، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهًا لكل متر مربع، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهًا لكل متر مربع، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

مثال تطبيقات حياتية

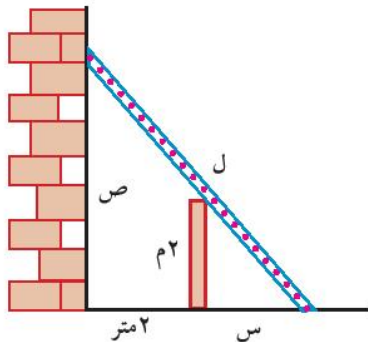
٣ جدار ارتفاعه ٢ متر ويبعد مترين عن أحد المنازل، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.

الحل

١- لحساب أقصر طول للسلم نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات: نفرض أن:

٣- نمذجة المسألة: طول السلم = ل مترًا، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص مترًا، بعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س مترًا.



(١) من فيثاغورث: $ل^2 = (س + 2)^2 + ص^2$

من التشابه: $\frac{ص}{س} = \frac{س+2}{س}$

(٢) ∴ $ص = \frac{س^2 + 4س + 4}{س}$

لإيجاد أقصر طول للسلم يكفى أن تكون ل قيمة صغرى

٤- حل النموذج باشتقاق طرفى العلاقة (١)، (٢) بالنسبة إلى س.

∴ $\frac{د}{دس} (ل) = 2(س + 2) \times 1 + 2 \times \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{4-}{س}$

$$\therefore \frac{s}{s} (2) = (2 + s)^2 = \frac{4-s}{s} \times \left(\frac{4+s}{s} \right)^2 + (2 + s)^2 = \left(\frac{8}{s} - 1 \right) (2 + s)^2$$

س	٢	
إشارة $\frac{s}{s} (2)$	-	+
٢ل	→	→

عند النقطة الحرجة: $\frac{s}{s} (2) = \text{صفر}$

$$\therefore s = 2 - \text{مرفوض أو } \frac{8}{s} = 1$$

$$\therefore s = 2$$

من اختبار المشتقة الأولى للتزايد والتناقص نلاحظ تغير إشارة $\frac{s}{s} (2)$ من - إلى +

$\therefore$ عند $s = 2$ تكون ل أصغر ما يمكن

$$\text{بالتعويض في (٢)} \therefore \text{ص} = \frac{4+2 \times 2}{2} = 4$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore 4 = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore 2\sqrt{2} = 2(2+2) = 8$$

أي إن: طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل يساوي $2\sqrt{2}$ مترًا

٥ حاول أن تحل

٣ في مستوى إحداثي متعامد رسم $\overleftrightarrow{AB}$ يمر بالنقطة ج (٢، ٢) ويقطع محوري الإحداثيات في النقطة أ والنقطة ب، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ ب تساوي ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠، ٠).

مثال

القطاع الدائري

٤ قطعة معدنية على شكل قطاع دائري مساحته ١٦ سم^٢ أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن، وما قياس زاويته عندئذ؟

الحل

نفرض أن طول قوس القطاع ل سم، طول نصف قطر دائرة القطاع = r سم

(١)

$$\therefore \text{محيط القطاع} = 2r + l$$

$$\therefore \frac{32}{r} = l$$

(٢)

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} l r = 16$$

$$\text{بالتعويض في (١)} \therefore 2r + \frac{32}{r} = 2r + \frac{32}{r}$$

باشتقاق طرفي العلاقة (٢) بالنسبة إلى r

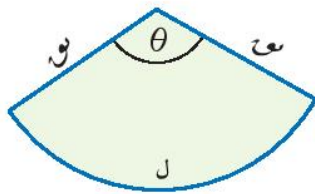
$$\frac{32}{r^2} = \frac{2r}{r^2}, \quad \frac{32}{r^2} - 2 = \frac{2r}{r^2}$$

$$\text{عندما } \frac{2r}{r^2} = 0, \quad \frac{32}{r^2} = 2, \quad \therefore r = 4$$

$\therefore$ عند $r = 4$ يكون محيط القطاع أقل ما يمكن

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} \theta r^2$$

$$\therefore \theta = \frac{2 \times 16}{4 \times 4} = 2$$



٥ حاول أن تحل

٤ إذا كان محيط قطاع دائري = ١٢ سم، أوجد قياس زاوية القطاع الذي يجعل مساحته أكبر ما يمكن.

تمارين ٢ - ٤

- ١ عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن، أوجد العددين.
- ٢ عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن، أوجد العددين.
- ٣ أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن.
- ٤ أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تحاط بسيّاح طوله ١٢٠ مترًا.
- ٥ قطاع دائري محيطه ٣٠ سم، ومساحته أكبر ما يمكن، أوجد طول نصف قطر دائرته.
- ٦ علبة على هيئة متوازي مستطيلات، قاعدتها مربعة الشكل. إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوى ٢٤٠ سم، فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن.
- ٧ إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠ سم، فأوجد طول كل من ضلعي القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.
- ٨ حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم. حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج، وما مساحة هذه الأرض حينئذ؟
- ٩ تُصنع علب أسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات، سعة كل منهما ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (م).
- ١٠ ملعب على شكل مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ مترًا، فأوجد أكبر مساحة له.
- ١١ مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ سم، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.
- ١٢ قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل، بعده ١٥ سم، قُطع من أركانها الأربعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها س سم، ثم تُنبت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء. احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.
- ١٣ خزان مفتوح، قاعدته مربعة، وجوانبه رأسية، يسع كمية معينة من الماء. أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته.
- ١٤ أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٥، ٠) وتقع على المنحنى $y = \frac{1}{x} - ٤$.
- ١٥ أوجد أقصر بعد بين المستقيم $y = ٢x + ١٠$ والمنحنى $y = ٤x^2$.

- ١٦) أ ب ج مثلث حيث A ، B ثابتان . أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما والتي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.
- ١٧) تُعطى شدة التيار I (بالأمبير) في دائرة للتيار المتردد عند أي لحظة t (ثانية) بالعلاقة $I = 2 \sin t + 2 \cos t$ ، ما أقصى قيمة للتيار في هذه الدائرة.
- ١٨) ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة في وسط غذائي طبقاً للعلاقة $V(t) = 2000 + \frac{5000}{t+100}$ ، حيث t الزمن مقيس بالساعات ، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة.
- ١٩) أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، $M \in \overline{AB}$ بحيث $BM = s$ سم ، $N \in \overline{CD}$ بحيث $DN = \frac{3}{4}s$. أوجد قيمة s التي تجعل مساحة $\triangle AMN$ أصغر ما يمكن.
- ٢٠) أ ب قطر في دائرة طول نصف قطرها ١٠ . رُسم مماسان للدائرة عند كل من A ، B من النقطة H على الدائرة رُسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين من H ، جـ على الترتيب . أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب جـ د تساوي $2\sqrt{2}$ وحدة مربعة.

الوحدة الثالثة

التكامل المحدد وتطبيقاته

The Definite Integral and its Applications

مقدمة الوحدة

هل رأيت صانع السلال وهو يصنع إحدى سلاله؟ إن عملية تجميع الشرائح المتوازية جنبًا إلى جنب يؤدي إلى تكامل سلتة. ساعد ذلك إلى محاولة العلماء اكتشاف طرق عامة لتقدير مساحة أى منطقة مستوية بتقسيم أى منطقة مستوية إلى مناطق صغيرة جدًا ثم جمع مساحات هذه المناطق الصغيرة لتقدير المساحة المطلوبة مما ساهم في اكتشاف علم التكامل ورمز لعملية التكامل بالرمز $\int$ وهو الحرف الأول من كلمة Sum والتي تعني عملية التجميع، في هذه الوحدة ستتعرف طرق مختلفة لحساب التكامل غير المحدد مثل التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ لإيجاد مجموعة المشتقات العكسية لدالة متصلة على فترة معطاة ثم التعرف على التكامل المحدد من خلال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل التي تربط بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد واستخدام التكامل المحدد في إيجاد مساحة منطقة مستوية أو حجم جسم دوراني كما نتعرف على بعض التطبيقات الاقتصادية للتكامل المحدد واستخدام النمذجة الرياضية في حل المشكلات الرياضية والحياتية.

مخرجات التعلم

- بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:
- يتعرف تكامل الدالة الآسية، $\int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) dx$ و $\int_a^b \frac{d}{dx} \left(\ln x \right) dx$
- يتعرف بعض طرق التكامل مثل: التعويض غير المثلثي، التكامل بالتجزئ $\int u \cdot v' dx = uv - \int u'v dx$
- يتعرف التكامل المحدد (النظرية الأساسية في التفاضل) ويستنتج بعض خواصه.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

- ♦ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ حيث u دالة زوجية.
- ♦ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ حيث u دالة فردية.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية بين منحنى ومحور السينات.
- يستخدم التكامل المحدد في حل مشكلات تتضمن إيجاد حجم سطح دوراني حول محور السينات.

المصطلحات الأساسية

حجوم الأجسام الدورانية	Rule	قاعدة	Antiderivative	مشتقة عكسية
Volumes of Revolution solids	Definite Integral	تكامل محدد	Indefinite Integral	تكامل غير المحدد
		النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل	Differential	تفاضلي
	Fundamental theorem of calculus		Integration by Substitution	تكامل بالتعويض
	Areas in the plane	المساحات في المستوى	Integration by Parts	تكامل بالتجزئ

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

دروس الوحدة

- الدرس (٣ - ١): تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- الدرس (٣ - ٢): طرق التكامل.
- الدرس (٣ - ٣): التكامل المحدد.
- الدرس (٣ - ٤): تطبيقات على التكامل المحدد.

مخطط تنظيمي للوحدة

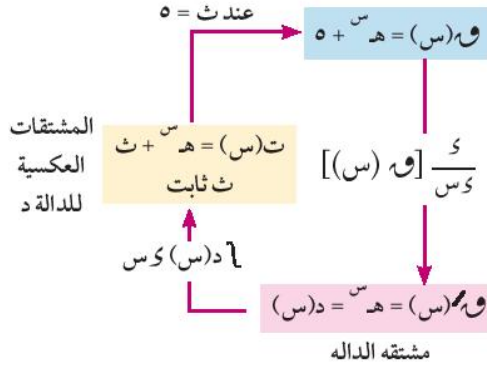


تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

١ - ٣

Integrals of Exponential and Logarithmic Function

استكشف



من دراستك السابقة في التفاضل تعلم أن مشتقة الدالة e^s بالنسبة إلى s هي e^s حيث $\ln(s) = e^s$

إذا رمزنا للدالة e^s بالرمز (s) فإننا نستطيع بعملية

عكسية (التكامل غير المحدد) إيجاد عدد غير محدد من الدوال الأخرى $(s) = \ln(s)$ مشتقة كل منها يساوي (s) تسمى بمجموعة المشتقات العكسية للدالة e^s حيث:

$\ln(s) = \ln(e^s) = s$ حيث $\ln(s) = \ln(e^s) = s$

استكشف مجموعة المشتقات العكسية لكل من:

$(s) = \ln(s)$ ، $(s) = \ln(s)$ ، $(s) = \ln(s)$

تعلم

التكامل غير المحدد للدالة الأسية

Indefinite Integrals of Exponential Function

إذا كان k عددًا حقيقيًا حيث $k \neq 0$

فإن: $\int e^{ks} ds = \frac{1}{k} e^{ks} + C$

حيث C ثابت اختياري

مثال

أوجد:

أ $\int e^{7s} ds$

ب $\int e^{-\frac{3}{4}s} ds$

ج $\int 8e^{2s} ds$

الحل

أ $\int e^{7s} ds = \frac{1}{7} e^{7s} + C$

سوف تتعلم

- تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تطبيقات هندسية.
- تطبيقات فيزيائية.

المصطلحات الأساسية

- Antiderivative مشتقة عكسية
- Integration تكامل
- Indefinite integral تكامل غير محدد
- Arbitrary constant ثابت اختياري

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي.

$$\lambda a d(s) = \lambda a d(s) = \lambda a d(s)$$

حاول أن تحل

١ أوجد

مثال 

٢) أوجد كل من التكاملات التالية:

الحل

$$= \frac{4}{2} \text{ س} - \text{ه س} + \text{ث}$$



$$[d(s) \pm r(s)] \pm r(s) = d(s)$$

حاول أن تحل

٢ أوجد:

ا. $1 \frac{h_{\text{س}} + h_{\text{ه}}}{h_{\text{س}}}$ ب. $1 \frac{h_{\text{س}} + h_{\text{ه}}}{h_{\text{س}}}$ ج. $1 \frac{h_{\text{س}} + h_{\text{ه}}}{h_{\text{س}}}$

لاحظ أن: إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن:

$$\text{ل هـ}^{(س)} \cdot \text{د}^{(س)} \text{س} = \text{هـ}^{(س)} + \text{ث}$$

مثال 

٢

ا) جا س ه جتاس وس ب) ۱۴ س ه س^{۱+۲} وس

الحل 

۱) بوضع د (س) = جتا س ∴ د (س) = - جا س

جاس ه جاس رس = ل ه جاس (- جاس) رس = ه جاس + ث

ب) بوضع د (س) = $s^2 + 1$ $\therefore$ د (س) = s^2

$$١٢ هـ س + ١٢ س = ٢٤ هـ س \quad ٢٣ هـ س + ١٢ س = ٣٥ هـ س$$

٦ حاول أن تحل

٣ أوجد التكاملات التالية:

١ (ج) $\int (3x^2 + 5x) dx$

ب (د) $\int (x^3 - 2x^2 + 5x) dx$

Indefinite Integral of Logarithmic Functions التكامل غير المحدد لدوال تؤول لدوال لوغاريتمية

تعلم أن $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ حيث $x > 0$ ، $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ حيث $x < 0$ ، $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ حيث $x \neq 0$ وبوجه عام فإن $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ حيث $x \neq 0$ أي إن الدالة $\ln|x|$ حيث $x \neq 0$ إحدى المشتقات العكسية للدالة $\frac{1}{x}$ وعلى ذلك فإن: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ حيث $x \neq 0$

مضاعفات الدالة

مثال

٤ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

ب (أ) $\int \frac{1}{x^2} dx$

ب (ب) $\int \frac{1}{x^3} dx$

الحل

أ $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$ حيث $x \neq 0$

ب $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$ حيث $x \neq 0$

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ (أ) $\int \frac{1}{x^3} dx$

ب (ب) $\int \frac{1}{x^4} dx$

ج (ج) $\int \frac{1}{x^5} dx$

مثال

٥ أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ $\int \left(\frac{0}{s} + \frac{2}{s^3} \right) ds$ ب $\int \left(\frac{s}{h} + \frac{2}{s} \right) ds$ ج $\int \frac{(1-s^3)^2}{s^3} ds$

الحل

أ $\int \left(\frac{0}{s} + \frac{2}{s^3} \right) ds = \int \frac{2}{s^3} ds = \frac{2}{-2} s^{-2} = -\frac{1}{s^2} + C$

ب $\int \left(\frac{s}{h} + \frac{2}{s} \right) ds = \int \frac{s}{h} ds + \int \frac{2}{s} ds = \frac{1}{2h} s^2 + 2 \ln|s| + C$

ج $\int \frac{(1-s^3)^2}{s^3} ds = \int \frac{1 - 2s^3 + s^6}{s^3} ds = \int \left(\frac{1}{s^3} - 2 + s^3 \right) ds = -\frac{1}{2s^2} - 2s + \frac{1}{4}s^4 + C$

حيث $s \neq 0$ $-\frac{1}{2s^2} - 2s + \frac{1}{4}s^4 + C$

٦ حاول أن تحل

٥ أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{s^6 - 2}{s^3} ds$ ب $\int \frac{s^4 - 2}{s^2 - 3} ds$ ج $\int \left(\frac{3}{s^4} - \sqrt{s} \right) ds$

لاحظ أن: إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق، $(f(s))' \neq 0$ فإن $\int \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \ln|f(s)| + C$

مثال

٦ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

أ $\int \frac{4}{s^2 + 1} ds$ ب $\int \frac{s^2 + 3}{s^2 - 3s + 2} ds$ ج $\int \frac{1}{s^2} ds$

الحل

أ $\int \frac{4}{s^2 + 1} ds = 4 \int \frac{1}{s^2 + 1} ds = 4 \arctan(s) + C$

ب $\int \frac{s^2 + 3}{s^2 - 3s + 2} ds = \int \frac{s^2 + 3}{(s-1)(s-2)} ds$

$\therefore \int \frac{s^2 + 3}{(s-1)(s-2)} ds = \int \left(\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} \right) ds$

ج $\int \frac{1}{s^2} ds = \int s^{-2} ds = -\frac{1}{s} + C$

٦ حاول أن تحل

٦ أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{1}{s^2 + 1} ds$ ب $\int \frac{s^4 - 2}{s^2 + 3} ds$ ج $\int \frac{(s^2 + 2)s}{s^3 + 1} ds$

مثال

٧ **تطبيقات هندسية:** منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{2+3س}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥)

الحل

بفرض معادلة المنحنى ص = د(س)

$$\therefore \text{ميل المماس عند أى نقطة} = \frac{د(ص)}{د(س)} = \frac{2+3س}{س}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{د(ص)}{د(س)} \cdot س = (2 + \frac{3}{س}) \cdot س$$

$$\therefore \text{ص} = 2س + ٣ \quad \text{حيث ث ثابت إختياري}$$

$\therefore$ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥) فهي تحقق معادلته أى إن:

$$٣هـ + ٥ = ٣(هـ) + ٢(٣هـ + ٥) \quad \therefore ٣ = ٣$$

و تكون معادلة المنحنى هي: ص = ٢س + ٣

٩ حاول أن تحل

٧ ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{١}{س-٣هـ}$ وكان د(هـ) = $\frac{١}{٣}$ أوجد د(٢هـ)

مثال

٨ **تطبيقات فيزيائية:** إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتبعين بالعلاقة $\frac{د(م)}{د(ن)} = ٢هـ - ١٠ن$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠ سم^٢، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ.

الحل

$$\text{مساحة سطح الصفيحة م} = \frac{د(م)}{د(ن)} \cdot ن = ٢هـ - ١٠ن$$

$$\therefore م = ١٠٠هـ - ١٠ن + ث$$

$$\text{عند بداية التغير ن} = ٠ ، م = ٨٠ \quad \therefore ٩٠ = ث$$

$$\text{ويكون مساحة سطح الصفيحة فى أى لحظة م} = ١٠٠هـ - ٩٠ - ١٠ن$$

$$\text{بعد ١٠ ثوانٍ} \quad \therefore \text{مساحة سطح الصفيحة} = ١٠٠هـ - ٩٠ - ١٠سم^٢$$

٩ حاول أن تحل

٨ إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسياً مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠، ٣٠٠ وحدة. أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع.



تمارين ٣ - ١



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) إذا كان $\frac{1}{p} = (س)$ $[\frac{1}{p} = (س) = (س) + (س) + (س)]$ ، $د(٠) = ١$ ، $د(٠) = ٠$ فإن د(س) تساوي:
- أ) $د(س) - ١$ ب) $د(س)$ ج) $د(س) - ١$ د) $د(س)$
- ٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $٤هـ٢$ ، $د(٠) = ٢$ فإن د(٢) تساوي:
- أ) ٤ ب) $٤هـ٤$ ج) $٢هـ٢$ د) $٢هـ٢$

- ٣) $\ln \theta$ و θ تساوي
- أ) $١ - \ln | \theta | + \theta$ ب) $١ - \ln | \theta | + \theta$ ج) $١ - \ln | \theta | + \theta$ د) $١ - \ln | \theta | + \theta$
- ٤) $\ln ٤س$ و $٢س$ تساوي
- أ) $\frac{1}{p}هـ٢ + \theta$ ب) $٢س + \theta$ ج) $٢هـ٢ + \theta$ د) $٤هـ٢ + \theta$

أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

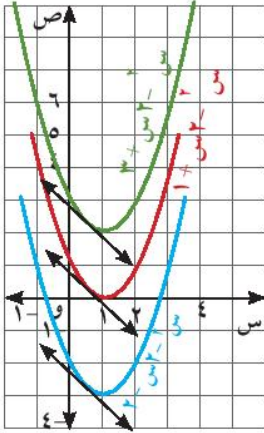
- ٥) $\ln ٤س$ و $س$ ٦) $\ln (٢س٣ + ٢هـ٢)س$ و $س$ ٧) $\ln (س - ٤هـ٢)س$ و $س$
- ٨) $\ln ١ - ٣س$ و $س$ ٩) $\ln \frac{٧}{٣}هـ٣ - ٣س$ و $س$ ١٠) $\ln ٢هـ٢س(١ + س)$ و $س$
- ١١) $\ln \frac{٤هـ٣ + ٢هـ٢ + ٤س + ٣س}{س}$ و $س$ ١٢) $\ln ٢س٣هـ١ + ٣س$ و $س$ ١٣) $\ln \frac{٢هـ٢س}{١ + س}$ و $س$
- ١٤) $\ln \frac{س}{١ - ٤س}$ و $س$ ١٥) $\ln \frac{س}{١ + ٢س}$ و $س$ ١٦) $\ln \frac{٢س}{٢س}$ و $س$
- ١٧) $\ln \frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس}$ و $س$ ١٨) $\ln \frac{جتاس}{١ + جاس}$ و $س$ ١٩) $\ln \frac{قاس ظاس}{١ - قاس}$ و $س$
- ٢٠) $\ln \frac{١}{(س) لو س}$ و $س$ ٢١) $\ln \frac{٢س}{٢(١ + س)}$ و $س$ ٢٢) $\ln \frac{(لوس)٢}{س}$ و $س$
- ٢٣) $\ln \frac{٢س٣}{١ - ٢س}$ و $س$ ٢٤) $\ln \frac{٥ - ٢س٣}{١ + س - ٢س}$ و $س$ ٢٥) $\ln \frac{٤هـ٢س + س - ٢س}{س}$ و $س$
- ٢٦) $\ln \frac{٤}{س لو س}$ و $س$ ٢٧) $\ln \frac{(١ + لو س)٢}{س}$ و $س$

- ٢٨) **تطبيقات هندسية:** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س ، ص) يساوي $٢هـ٢ - \frac{1}{٣}س$ ، $د(٠) = ١$ أوجد د(٣)

طرق التكامل

Methods of Inegration

مقدمة



سبق وتعرفت على المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد، وهو عملية عكسية لعملية الاشتقاق، فيقال للدالة f أنها مشتقة عكسية للدالة f' في فترة I إذا كان: $f'(x) = f(x)$ لكل $x \in I$

عند إضافة أي ثابت للمشتقة العكسية f' ، (يعرف بالثابت الاختياري) تُمثل المشتقة العكسية عندئذ بمجموعة المنحنيات $y = f(x) + C$ التي تختلف عن بعضها في الثابت C وميل المماس لأي منها متساوي لذلك فهي منحنيات متوازية كما في الشكل المقابل، وقد اصطلح على تسمية مجموعة المشتقات العكسية هذه بالتكامل غير المحدد ويرمز له بالرمز: $\int f(x) dx$ و C و يكون:

$$\int f(x) dx = f(x) + C$$

للتكامل غير المحدد الخواص التالية:

إذا كانت f, g دالتين لهما مشتقتان عكسيتان في الفترة I فإن:

$$1- \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$2- \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي ثابت}$$

لاحظ أن:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \quad \text{حيث } f(x) \neq 0, \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

وعلى ذلك

$$\int (3x^2 + 4x + 5) dx = x^3 + 2x^2 + 5x + C$$

عملية إيجاد المشتقات العكسية تتطلب معرفة صور التكاملات القياسية لبعض الدوال، إلا أن التكاملات المطلوب إيجادها قد تظهر بعيدة عن التكاملات القياسية وهو أمر يتطلب التعرف على طرق أخرى للتكامل منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ اعتماداً على تفاضلي الدالة.

سوف تتعلم

- إيجاد الدالة الأصلية لدالة معطاة.
- إيجاد تفاضلي دالة.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكامل بالتجزئ.

المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسية Antiderivative
- التكامل غير المحدد
- تفاضلي Differential
- Indefinite Integral

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

Differentials

التفاضلات

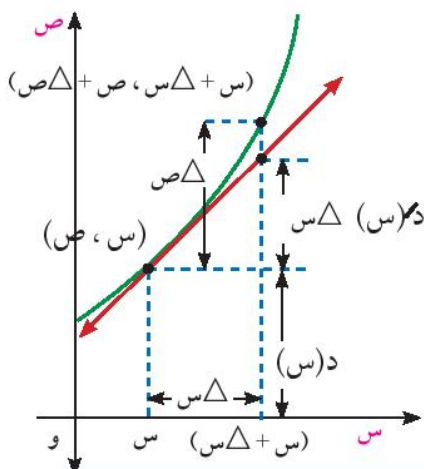
إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق، حيث $v = d(s)$ من تعريف المشتقة:

$$\frac{dv}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$$

$$\therefore \text{عندما } \Delta s \rightarrow 0 \quad \frac{dv}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$$

$$\text{أي أن: } \frac{dv}{ds} \approx d(s) \quad \text{عندما } \Delta s \approx 0, \Delta s \neq 0$$

$$\therefore \Delta v \approx d(s) \Delta s \quad (\text{بالضرب } \Delta s)$$



لتكن دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى s ، Δs يرمز للتغير في s حيث $\Delta s \neq 0$ فإن

١- تفاضلى v (ويرمز له بالرمز v) $d(s) \Delta s$

٢- تفاضلى s (ويرمز بالرمز s) Δs

على ذلك فإن:

وهو دالة في متغيرين s ، v $v = d(s)$

إذا كانت $v = s^3$ فإن: $v = s^3$ $v = s^3$

مثال

تفاضلى الدالة

١ أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

$$\text{أ} \quad v = \frac{s}{1-s} \quad \text{ب} \quad v = \frac{\pi}{3} \quad \text{ج} \quad v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

حيث كل من v ، s دالة في s

الحل

$$\text{أ} \quad \therefore v = \frac{s}{1-s} \quad v = \frac{s}{1-s} \quad v = \frac{s}{1-s} \quad v = \frac{s}{1-s}$$

$$\therefore v = \frac{s}{1-s} \quad v = \frac{s}{1-s}$$

$$\text{ب} \quad \therefore v = \frac{\pi}{3} \quad v = \frac{\pi}{3} \quad v = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ج} \quad \therefore v = \pi \times \frac{\pi}{3} \quad v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

$$v = \pi \times \frac{\pi}{3} \quad v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

$$v = \pi \times \frac{\pi}{3} \quad v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

$$v = \pi \times \frac{\pi}{3} \quad v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن

$$v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

$$v = \pi \times \frac{\pi}{3}$$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد تفاضلي كل من:

ب) $\text{ص} = \text{هـ}^2 - \text{س}^3$

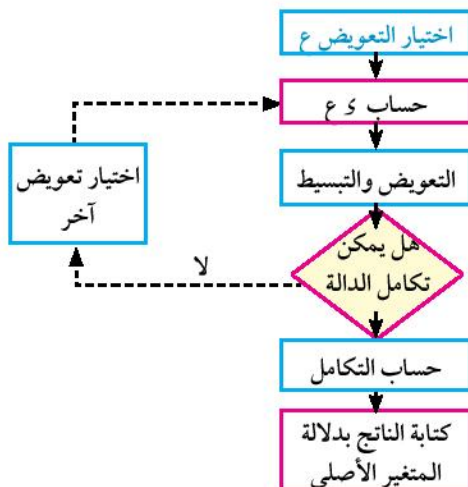
أ) $\text{ص} = (2\text{س} + 5)^4$

أوجد: و ص بدلالة س ، ص ، و و و تفكير ناقد: إذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$

التكاملات الأساسية (القياسية)

لا توجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة تماثل طرق إيجاد مشتقات هذه الدوال، إذ ينحصر إيجاد تكامل أي دالة د في البحث عن دالة تكون مشتقاتها هي الدالة د وهذا يتوقف على مدى استيعابك لمشتقات الدوال الأساسية السابق دراستها، والتي نلخصها في الجدول التالي:

جدول مشتقات الدوال الأساسية والتكاملات القياسية المناظرة	
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{س}^{\text{ن}})' = \text{ن} \text{س}^{\text{ن}-1}$	$\int \text{س}^{\text{ن}} \text{و} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ $\text{ن} \neq -1$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{جاس})' = \text{جتاس}$	$\int \text{جتاس و} = \text{جاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{جتاس})' = -\text{جاس}$	$\int -\text{جاس و} = \text{جتاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{طاس})' = \text{قاس}$ ، $\text{س} \neq \frac{1+\text{ن}^2}{4}$ ، $\text{ن} \in \mathbb{R}$	$\int \text{قاس و} = \text{طاس}$ ، $\text{س} \neq \frac{1+\text{ن}^2}{4}$ ، $\text{ن} \in \mathbb{R}$ $\int \text{قاس و} = \text{س} - \frac{1}{2} \ln \text{س} + \text{ث}$ ، $\text{ن} \in \mathbb{R}$ $\int \text{قاس و} = \text{س} - \frac{1}{2} \ln \text{س} + \text{ث}$ ، $\text{ن} \in \mathbb{R}$ $\int \text{قاس و} = \text{س} - \frac{1}{2} \ln \text{س} + \text{ث}$ ، $\text{ن} \in \mathbb{R}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{هـس})' = \text{هـس}$	$\int \text{هـس و} = \text{هـس} + \text{ث}$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{اس})' = \text{اس لو}$ ، $0 < \text{ا} \neq 1$	$\int \text{اس لو و} = \frac{\text{اس}^{\text{ا}}}{\text{ا}}$ ، $0 < \text{ا} \neq 1$
$\frac{\text{و}}{\text{س}} = (\text{لو هـس})' = \frac{1}{\text{س}}$	$\int \frac{1}{\text{س}} \text{و} = \ln \text{س} + \text{ث}$ ، $\text{س} \neq 0$



Integration by Substitution

التكامل بالتعويض

من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

على الصورة: $\text{و} = \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ع}(\text{س})$

فإذا كانت $\text{ع} = \text{د}(\text{س})$ دالة قابلة للاشتقاق

فإن $\text{و} = \text{ع} \cdot \text{د}(\text{س})$ ويكون:

$$\int \text{و} \text{و} = \int \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ع}(\text{س}) \text{و} = \int \text{د}(\text{ع}) \text{و}$$

لإجراء عملية التكامل بالتعويض نتبع المخطط المقابل:

مثال

التكامل بالتعويض

٢ أوجد

$$١ \text{ أ } \int \frac{1}{(2s^2 - 7)^3} ds$$

الحل

$$١ \text{ أ } \text{بوضع } u = 2s^2 - 7$$

$$\therefore u = 2s^2 - 7 \Rightarrow 2s = \frac{1}{2} \frac{du}{ds}$$

$$\int \frac{1}{(2s^2 - 7)^3} ds = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} \frac{du}{ds} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) + C = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$$

$$١ \text{ ب } \text{بوضع } u = 2s^2 - 7 \Rightarrow 2s = \frac{1}{2} \frac{du}{ds}$$

$$\int \frac{1}{(2s^2 - 7)^3} ds = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} \frac{du}{ds} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) + C = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$$

٢ حاول أن تحل

٢ أوجد :

$$١ \text{ أ } \int \frac{1}{(3s^2 + 4)^3} ds$$

$$١ \text{ ب } \int \frac{1}{(4 - 3s^2)^3} ds$$

مثال

التكامل بالتعويض

٣ أوجد

$$١ \text{ أ } \int \frac{1}{(4 + s^2)^3} ds$$

الحل

$$١ \text{ أ } \text{بوضع } u = 4 + s^2$$

$$\therefore u = 4 + s^2 \Rightarrow 2s = \frac{1}{2} \frac{du}{ds}$$

$$\int \frac{1}{(4 + s^2)^3} ds = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} \frac{du}{ds} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) + C = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{4} (4 + s^2)^{-2} + C = -\frac{1}{4(4 + s^2)^2} + C$$

$$\text{(تعويض عن } u \text{)} \quad \int \frac{1}{(4 + s^2)^3} ds = -\frac{1}{4(4 + s^2)^2} + C$$

ب) بوضع $ع^2 = س - ١$ لتبسيط صورة التكامل $\therefore س = ع^2 + ١, دس = ع^2 = ع د$

$$ل(س^2 + ٥) = ل(س - ١ + ٥) = ل(س + ٤) = ل(ع^2 + ٥) = ل(ع^2 + ٤ + ١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

$$ل(ع^2 + ٤) = ل(ع^2 + ٤ + ٤ - ٤) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

$$ل(ع^2 + ٤) = ل(ع^2 + ٤ + ٤ - ٤) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

$$ل(ع^2 + ٤) = ل(ع^2 + ٤ + ٤ - ٤) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

$$ل(ع^2 + ٤) = ل(ع^2 + ٤ + ٤ - ٤) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

$$ل(ع^2 + ٤) = ل(ع^2 + ٤ + ٤ - ٤) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

$$ل(ع^2 + ٤) = ل(ع^2 + ٤ + ٤ - ٤) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١) = ل(ع^2 + ٤) + ل(١)$$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد التكاملات الآتية:

$$ب) ل(س^2 + ١) دس$$

$$أ) ل(س^2 - ٣) دس$$

مثال

التكامل بالتعويض

٤ أوجد:

$$ب) ل(س^2 + ١) دس$$

$$أ) ل(س^2 + ١) دس$$

الحل

$$أ) بوضع $ع = س + ١$ $\therefore س = ع - ١, دس = د(ع - ١) = دع - د$$$

$$ل(ع - ١) = ل(ع) - ل(١)$$

$$ب) ل(س^2 + ١) دس = ل(ع^2 - ٢ع + ٢) د(ع - ١) = ل(ع^2 - ٢ع + ٢) د(ع - ١)$$

$$ل(ع^2 - ٢ع + ٢) د(ع - ١) = ل(ع^2 - ٢ع + ٢) د(ع - ١)$$

$$ل(ع^2 - ٢ع + ٢) د(ع - ١) = ل(ع^2 - ٢ع + ٢) د(ع - ١)$$

$$ب) بوضع $ع = س^2$ $\therefore دس = ٢س دس$$$

$$ل(س^2 + ١) دس = ل(ع + ١) د(٢س) = ٢ ل(ع + ١) دس$$

$$ل(ع + ١) دس = ل(ع) دس + ل(١) دس = ل(ع) دس + ل(١) دس$$

$$ل(ع + ١) دس = ل(ع) دس + ل(١) دس = ل(ع) دس + ل(١) دس$$

٤ حاول أن تحل

أوجد :

أ $\int \frac{س}{\sqrt{س^3 - ١}} دس$

ب $\int (٣ - س) هـ - س^٦ - س^٢ دس$

مثال

التكامل بالتعويض

أوجد

أ $\int \frac{س^٥}{١ - س^٣} دس$

ب $\int \frac{\sqrt{لوس}}{س} دس$

الحل

أ - بوضع $ع = س^٣ - ١$ $دع = ٣س^٢ دس$

(التعويض) $\int \frac{س^٥}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس$

(التكامل والتعويض) $\int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس$

(بالتعويض) $\int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس$

(بالتكامل والتعويض) $\int \frac{س^٤}{١ - س^٣} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس = \int \frac{س^٤}{١ - ع} دس$

٥ حاول أن تحل

أوجد :

أ $\int \frac{س^٢ هـ}{س^٣ + ٣} دس$

ب $\int \frac{١}{س(لوس)^٢} دس$

تفكير ناقد: باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

١- $\int [د(س)]^١ دس = \frac{[د(س)]^٢}{٢} + ث$ حيث $د(س) \neq ٠$

٢- $\int \frac{د(س)}{[د(س)]^٢} دس = \frac{١}{د(س)} + ث$ حيث $د(س) \neq ٠$

التكامل بالتجزئ Integration by Parts

إذا كانت ص ، ع دالتين في المتغير س وقابلتين للاشتقاق، فإن:

$$\int \frac{د(س)}{س} دس = \frac{د(س)}{س} + \int \frac{د(س)}{س^٢} دس$$

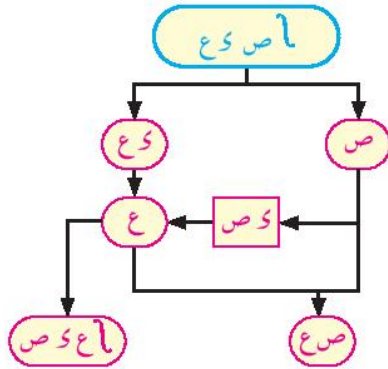
بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

$$\int \frac{د(س)}{س} دس = \frac{د(س)}{س} + \int \frac{د(س)}{س^٢} دس$$

تذكرا

$$\int \frac{د(س)}{س} دس = \frac{د(س)}{س} + \int \frac{د(س)}{س^٢} دس$$

$$\int \frac{د(س)}{س} دس = \frac{د(س)}{س} + \int \frac{د(س)}{س^٢} دس$$



$$\text{ص ع} = \text{ل ص و ع} + \text{ل ع و ص}$$

$$\text{أى أن: ل ص و ع} = \text{ص ع} - \text{ل ع و ص}$$

تسمى المعادلة السابقة بقاعدة التكامل بالتجزئ ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، ذلك باختيار مناسب لكل من ص ، ع بحيث يمكن حساب التكامل بالطرف الأيسر بطريقة أسهل من حساب التكامل بالطرف الأيمن، وتتبع المخطط المقابل كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال التكامل بالتجزئ

٦ أوجد:

$$\text{أ} \quad \text{ل س ه س و س}$$

الحل

$$\text{أ} \quad \text{لايجاد ل س ه س و س:}$$

$$\text{نفرض أن: ص} = \text{س} , \quad \therefore \text{و} = \text{ص و س}$$

$$\text{و} = \text{ع} = \text{ل ه س و س} = \text{ه س و س}$$

$$\therefore \text{ل ص و ع} = \text{ص ع} - \text{ل ع و ص}$$

$$\therefore \text{ل س ه س و س} = \text{س ه س} - \text{ل ه س و س} = \text{س ه س} - \text{ه س} + \text{ث} = \text{س ه س} - (\text{س} - ١) + \text{ث}$$

ملاحظة هامة: إضافة ثابت إلى الدالة ع لا يغير من النتيجة (أثبت ذلك)

$$\text{ب} \quad \text{لايجاد ل س ه س و س:}$$

$$\text{نفرض أن: ص} = \text{س}^٢ , \quad \text{و} = \text{ص}^٢ = \text{س}^٤$$

$$\text{و} = \text{ع} = \text{ل ه س و س} = \text{ه س و س}$$

$$\text{ل س ه س و س} = \text{س ه س}^٢ - \text{ل س ه س و س} = \text{س ه س}^٢ - \text{ل س ه س و س}$$

$$\text{ل س ه س و س} = \text{س ه س}^٢ - (\text{س} - ١) + \text{ث}$$

$$\text{س ه س}^٢ - \text{ه س}^٢ - (\text{س} - ١) + \text{ث} = \text{ه س}^٢ - [\text{س}^٢ - ٢ + \text{ث}]$$

٩ حاول أن تحل

٦ أوجد:

$$\text{ب} \quad \text{ل س ه س}^٢ + \text{س}^٣$$

$$\text{أ} \quad \text{ل س ه س}^٢ - \text{س}^٣$$

لاحظ أن:

إختيار ص، ع يتوقف على:

١- ص أبسط من ص

٢- ع أسهل في التكامل

مثال

تكامل بالتجزئ

٧ أوجد

أ $\int \frac{1}{x^2} dx$

الحل

ب $\int \frac{1}{x^2} dx$ ب $\int \frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} \text{ص} &= \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \\ \text{ع} &= \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx$$

$$\text{ص} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \quad \text{ع} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx$$

٩ حاول أن تحل

٧ أوجد:

أ $\int \frac{1}{x^2} dx$ ب $\int \frac{1}{x^2} dx$

مثال

تكامل بالتجزئ

٨ أوجد:

أ $\int \frac{1}{x^2} dx$ ب $\int \frac{1}{x^2} dx$

الحل

أ $\int \frac{1}{x^2} dx$ بوضع ص = $\frac{1}{x^2}$ ع = $\frac{1}{x^2}$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx$$

$$- = \frac{س هـ س}{١+س} + ل هـ س س$$

$$ث + \frac{س هـ س}{١+س} = ث + \frac{س هـ س + س(١+س)}{١+س} =$$

$$ي ع = (١+س)^{\frac{١}{٣}} - (١+س)^{\frac{١}{٣}}$$

$$ع = \frac{٣}{٢ \times ٢} (١+س)^{\frac{٢}{٣}}$$

$$ل هـ س س = (١+س)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣}{٤} (١+س)^{\frac{٢}{٣}} \times ٤ ي س$$

$$ث + \frac{٣ \times ٣}{٢ \times ٥} (١+س)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣}{٤} (١+س)^{\frac{٢}{٣}} =$$

$$\frac{٣}{١٠} (١+س)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣}{٤} (١+س)^{\frac{٢}{٣}} + [(١+س)^{\frac{٢}{٣}} - ٣]$$

$$= \frac{٣}{١٠} (١+س)^{\frac{٢}{٣}} - (٣-٤) + ث$$

ب) بوضع ص = ٤ س

ي ص = ٤ ي س

$$ل هـ س س = \frac{٤ س}{١+س^{\frac{١}{٣}}}$$

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد:

$$ب) ل هـ س س = \frac{س}{٣+س^{\frac{١}{٣}}}$$

$$ا) ل هـ س س = \frac{٥+س^{\frac{١}{٣}}}{س^{\frac{١}{٣}}}$$

تفكير ناقد: هل يمكنك إيجاد $ل هـ س س = \frac{٤ س}{١+س^{\frac{١}{٣}}}$ و س بطريقة التكامل بالتعويض؟ فسر إجابتك.

بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

إذا علمنا أن الدالة $ل هـ س س$ تعطى ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الدالة فإنه يمكن أن نعرف الدالة $ل هـ س س$ من عملية التكامل غير المحدد للدالة $ل هـ س س$: **د(س) = ل(س) + س** يلاحظ أن هذا التكامل لا يعطى دالة وحيدة إذ يحتوى على ثابت اختياري يمكن تحديده من البيانات المعطاة.

مثال

معادلة منحنى دالة

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $ل هـ س س$ عند أي نقطة $ل هـ س س$ واقعة عليه يعطى بالعلاقة $ل هـ س س = \frac{س هـ س}{١+س}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة $(١، ٢ هـ)$.

الحل

بفرض أن معادلة منحنى الدالة هي $ل هـ س س = د(س)$.

$$\therefore د(س) = ل هـ س س = \frac{س هـ س}{١+س} + ث$$

[من حل مثال ٨ (أ)]

منحنى ديمر بالنقطة $(١، ٢ هـ)$ فهي تحقق معادلة

$$\therefore ٢ هـ = \frac{س هـ س}{(١+١)} + ث$$

$$\therefore ث = \frac{٣}{٢} هـ \text{ وتكون د(س) = } \frac{س هـ س}{١+س} + \frac{٣}{٢} هـ$$

٩ حاول أن تحل

٩ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠، ١) والذي ميل المماس له عند أى نقطة (س، ص) واقعة عليه يساوى $\sqrt{s^2 + 1}$

تمارين ٣ - ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ١ لـ (س) $(s^2 + 3)^0$ و س يساوى
 أ $\frac{1}{4}(s^2 + 3)^6 + ث$ ب $\frac{1}{12}(s^2 + 3)^6 + ث$ ج $\frac{1}{4}(s^2 + 3)^4 + ث$ د $\frac{1}{8}(s^2 + 3)^4 + ث$
- ٢ إذا كان لـ (س) $(s^2 + 3)$ لو س و س = ص ع - ل ع و ص فإن ص ع يساوى
 أ $2س$ لو س ب $(س^2 + 3)$ لو س ج $\frac{1}{4}(س^2 + 3)$ لو س د $س(س^2 + 3)$ لو س
- ٣ إذا كان لـ (س) $(1 - s^2)$ هـ $s^2 + 3$ و س = ص ع - ل ع و ص فإن ل ع و ص
 أ هـ $s^2 + 3 + ث$ ب هـ $s^2 + 3 + ث$ ج هـ $s^2 + 3 + ث$ د هـ $s^2 + 3 + ث$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

- ٤ لـ (س) $(2 - s)^4$ و س ٥ لـ (س) $(2 - s)^2$ و س ٦ لـ (س) $(s^2 - 1)^0$ و س
 ٧ لـ $s^4 + ٤$ و س ٨ لـ $(s^2 - 1)\sqrt{s + 1}$ و س ٩ لـ $(s^2 + 3)^4$ و س
 ١٠ لـ $\frac{s}{s^2 + 3}$ و س ١١ لـ $\frac{s}{1 + s}$ و س ١٢ لـ $\frac{1 + s}{1 - s}$ و س
 ١٣ لـ $\frac{s^2}{1 - s^2}$ و س ١٤ لـ $s - s^2$ و س ١٥ لـ $\frac{1 - s}{s + s}$ و س
 ١٦ لـ $\frac{س}{س}$ و س ١٧ لـ $(لو س)^3$ و س ١٨ لـ $\frac{1}{س لو س}$ و س

باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الآتية:

- ١٩ لـ $s^4 - s^2$ و س ٢٠ لـ $s^2 - s^2$ و س ٢١ لـ $\frac{s}{s^2}$ و س
 ٢٢ لـ $s^3 لو س$ و س ٢٣ لـ $لو س^2$ و س ٢٤ لـ $(لو س)^2$ و س
 ٢٥ لـ $لو س \frac{س}{س}$ و س ٢٦ لـ $(س + 1)^2 - s^2$ و س ٢٧ لـ $س(لو س)^2$ و س

أجب عن ما يأتى:

- ٢٨ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (٢، ٣)، وميل العمودى عليه عند أى نقطة (س، ص) هو ٣ - س.
 ٢٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س، ص) واقعة عليه هو $\sqrt{s + 1}$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{11}{10}, 0)$
 ٣٠ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{س}{س} = ا + س + ب$ حيث ا، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٢، ٠) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.

التكامل المحدد



The Definite Integral

فكر و ناقش



إذا كانت $v = d(s)$ ، وميل المماس عند أي نقطة (s, v) على منحنى الدالة d هو:

$$\frac{v}{s} = d'(s) = \frac{v}{s} \quad 2 + 3$$

هل يمكنك تعيين قيمة محددة لكل من $d(3)$ ، $d(5)$ ، $d(5) - d(3)$ ؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

١ من تعريف التكامل غير المحدد:

$$v = \int_a^b d'(s) ds = d(s) + C$$

حيث C مقدار ثابت إختياري لا يتوقف على s ومن الضروري الاحتفاظ به في التكامل حتى يكون شاملاً لجميع الدوال التي معدل تغيرها هو $d'(s)$ وعلى ذلك فإن التكامل غير المحدد لا ينتج قيمة محددة تناظر قيمة معينة للمتغير s .

٢ إذا كانت قيمة التكامل عند $s = a$ هي $d(a) + C$

وقيمته عند $s = b$ هي $d(b) + C$

∴ الفرق بين قيمتي التكامل عند $s = a$ ، $s = b$

يساوي $d(b) - d(a)$ وهو قيمة معينة (مهما كانت قيمة المقدار الثابت C)

ويرمز له بالرمز $\int_a^b d'(s) ds$ حيث :

$$\int_a^b d'(s) ds = d(b) - d(a)$$

وتعرف هذه الصورة بالتكامل المحدد.

سوف تتعلم

- مفهوم التكامل المحدد.
- استخدام النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.
- بعض خواص التكامل المحدد.

المصطلحات الأساسية

Definite Integral تكامل محدد

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية



Fundamental Theorem of Calculus

النظرية الأساسية في التفاضل

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ، وكانت F أي مشتقة عكسية للدالة f على نفس الفترة، فإن:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

ملاحظات:

١ يسمى $F(b) - F(a)$ بالنتيجة المحددة، ويقرأ تكامل f (س) بالنسبة إلى x من a إلى b ، وهو عدد حقيقي تتوقف قيمته على:

أ) الحدان السفلي والعلوي للتكامل المحدد أي على العددين a, b على الترتيب.

ب) قاعدة الدالة f

أما رمز المتغير x فيمكن استبداله بأي رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل، أي أن:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

ولذلك نكتب أحياناً

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

٢ يعبر عن $F(b) - F(a)$ بالصورة $F(b) - F(a)$ أو $F(b) - F(a)$

٣ يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل (لماذا)؟ ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل.

٤ تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد وجدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة، فإذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b]$

فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

حساب قيمة تكامل محدد

مثال

١ أوجد التكامل المحدد للدالة $f(x) = x^2 - 2$ من $x = -2$ إلى $x = 4$ حيث $f(x) = x^3 - 2x^2$

الحل

الدالة د كثيرة الحدود متصلة على $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^4 (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x \right]_{-2}^4 \\ &= \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2 \cdot 4^3}{3} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{2 \cdot (-2)^3}{3} + \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} - 4 \cdot (-2) \right) \\ &= 64 - 106 + 24 - 16 - 4 + 16 - 6 = 6 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$\text{أ} \int_{-2}^4 (x^3 + 3x^2) dx \quad \text{ب} \int_{-2}^4 \frac{3}{x^2 + 4} dx \quad \text{ج} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

نظرية

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

تفكير ناقد

ما الفرق بين التكامل المحدد والمتكامل غير المحدد؟ فسر إجابتك.

Properties of Definite Integral

خواص التكامل المحدد

إذا كانت د دالة متصلة على $[a, b]$ ، ج $\exists [c, d] \subset [a, b]$ ، فإن:

$$\begin{aligned} \text{١-} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ \text{٢-} \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ \text{٣-} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

مثال

حساب قيمة تكامل محدد

٢ إذا كانت د دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ، $\int_0^6 f(x) dx = 6$ ، $\int_6^{14} f(x) dx = 14$ أوجد $\int_0^{14} f(x) dx$

الحل

 $\therefore$ د متصلة على $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}$ تجزىء الفترة $[0, 14]$

$$\therefore \int_0^{14} f(x) dx = \int_0^6 f(x) dx + \int_6^{14} f(x) dx$$

$$\text{خاصية (١)} \quad \int_0^6 f(x) dx = 6$$

$$20 = (14) - 6 =$$

حاول أن تحل

٢ إذا كانت د دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ، $\int_0^{200} f(x) dx = 200$ ، $\int_0^{150} f(x) dx = 150$ فأوجد: $\int_{150}^{200} f(x) dx$

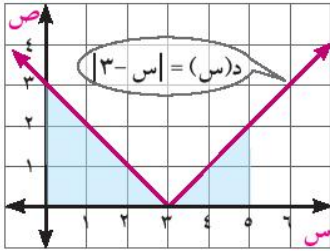
حساب قيمة تكامل محدد

مثال

٢ أوجد $\int_{-3}^3 |x-3| dx$

الحل

من تعريف دالة المقياس نجد أن $|x-3| = \begin{cases} -(x-3) & \text{عندما } x > 3 \\ x-3 & \text{عندما } x \leq 3 \end{cases}$ ، د متصلة عند $x=3$



لاحظ أن المساحة الملونة
تساوي $\frac{13}{2}$ وحدة مربعة

$$\int_{-3}^3 |x-3| dx = \int_{-3}^3 -(x-3) dx + \int_3^3 (x-3) dx =$$

$$= \int_{-3}^3 (-x+3) dx + \int_3^3 (x-3) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-3}^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^3 =$$

$$= \left(-\frac{9}{2} + 9 \right) - \left(-\frac{9}{2} - 9 \right) + \left(\frac{9}{2} - 9 \right) - \left(\frac{9}{2} - 9 \right) =$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد:

أ $\int_{-1}^1 |x+1| dx$ ب $\int_{-4}^2 |x-2| dx$

حساب قيمة تكامل محدد بالتعويض

مثال

٤ أوجد قيمة $\int_{-3}^3 \sqrt{3+x^2} dx$

الحل

يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد أولاً، ثم التعويض عن المتغير x بحدى التكامل:

أولاً:

لإيجاد $\int \sqrt{3+x^2} dx$ نضع $u = 3+x^2$ $du = 2x dx$ $x dx = \frac{1}{2} du$

∴ $\int \sqrt{3+x^2} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (تعويض)

= $\frac{1}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (تكامل)

= $\frac{1}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (تعويض عن x)

ثانياً:

$$\int_{-3}^3 \sqrt{3+x^2} dx = \left[\frac{1}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-3}^3 =$$

$$= \frac{1}{3} [(3+9)^{\frac{3}{2}} - (3+9)^{\frac{3}{2}}] = \frac{1}{3} [12\sqrt{3} - 12\sqrt{3}] = 0$$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

۱. $\sqrt{25 - 2} = 5 - 2$ س

ب) $\sqrt[3]{s^2 + s^3}$ و s^2

لاحظ أن

١- يمكن حل مثال ٤ مباشرة بإيجاد قيم c المناظرة لقيم h المتكامل ($s=0$ ، $s=3$)
عند $s=0$: $c=3$ ، عند $s=3$: $c=12$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[r]{V} = [\sqrt[r]{r(r)} - \sqrt[r]{(1r)}] \frac{1}{r} =$$

٢- في بند حاول أن تحل ٤ ب: د(س) = $\sqrt[3]{س^٢ + ٣}$

وفي بند **حاول أن تحل** ٣ب: د(س) = $|س - ٤|$

للدوال الفردية والدوال الزوجية في التكامل المحدد الخواص التالية:

١- إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة $[-a, a]$ فإن:

۱. د (س) ی س = صفرًا

٢- إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة $[-a, a]$ فإن:

$$h_1 \text{ د (س) ی س} = h_2 \text{ د (س) ی س}$$

باستخدام الخواص السابقة تحقق من صحة إجابتك في حاول أن تحل ٣، ٤

مثال التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية

مثال 

٥ أوجد:

$$I_2 = \frac{s^2 - s^3}{s^2 + 1} \quad (s)$$

ب) $\sqrt[3]{(1-s)^2}$ ی س

الحل

أ دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$$\therefore d(-s) = \frac{(-s)^3 - 2}{1 + (-s)} = \frac{s^3 - 2}{1 + s} = d(s)$$

∴ دالة فردية ويكون: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{s^{3-2}}{1+s^2} = \text{صفر}$

ب) دالة كثيرة الحدود متصلة على $\mathbb{C}$

$$\therefore d(-s) = (-s)^2 - 1 = 1 - s^2 = d(s)$$

$\therefore$ دالة زوجية ويكون: $\mathcal{L}_{-}^2(s) = \mathcal{L}_{+}^2(s)$

$$2 = \left[\frac{1}{3} s^2 - s \right]_{-3}^3 = 6 \times 2 = 12$$

٩) حاول أن تحل

٥) أوجد

أ) $\mathcal{L}_{-}^2 \frac{s}{s^2 + 1}$

ب) $\mathcal{L}_{-}^n (\pi + 4 \text{ جتا } 2s)$

تفكير ناقد

١ إذا كانت دالة فردية متصلة على الفترة $[-3, 5]$ ، $\mathcal{L}_{+}^0 d(s) = 9$ ما قيمة $\mathcal{L}_{-}^0 d(s)$ ؟

٢ إذا كانت دالة زوجية متصلة على الفترة $[-4, 4]$ ، $\mathcal{L}_{-}^4 d(s) = 20$

$\mathcal{L}_{-}^2 d(s) = 6$ ، ما قيمة $\mathcal{L}_{-}^2 d(s)$ ؟

تمارين ٣-٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 12$ ، $\int_2^3 f(x) dx = 16$ فإن $\int_1^3 f(x) dx$ (س) يساوي:

أ) ٢٨ ب) ٤- ج) ٤ د) ٢٨

٢) إذا كانت $f(x) = |x|$ فإن $\int_1^2 f(x) dx$ (س) يساوي:

أ) ١- ب) صفر ج) ٢ د) ٤

أوجد قيمة كل مما يأتي:

٣) $\int_1^2 x^2 dx$ ٤) $\int_1^2 (x^2 - 2) dx$ ٥) $\int_1^2 (1 + x^2) dx$

٦) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ٧) $\int_1^2 (x^2 - 3) dx$ ٨) $\int_1^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$

٩) $\int_1^2 |x - 1| dx$ ١٠) $\int_1^2 (x + 4) dx$ ١١) $\int_1^2 \sqrt{x + 1} dx$

١٢) $\int_1^2 x \sin x dx$ ١٣) $\int_1^2 x \cos x dx$ ١٤) $\int_1^2 (x^2 - 7x) dx$

أجب عن ما يأتي:

١٥) إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 10$ ، $\int_2^3 f(x) dx = 2$ احسب قيمة

أ) $\int_1^3 f(x) dx$ ب) $\int_1^3 [f(x) - (x)] dx$ ج) $\int_1^3 x f(x) dx$

١٦) إذا كان دالة متصلة على الفترة $[-4, 4]$ ، $\int_1^2 f(x) dx = 3$ ، احسب قيمة

أ) $\int_1^2 [f(x) + 2] dx$ ب) $\int_1^2 f(x) dx$ ، فردية ج) $\int_1^2 f(x) dx$ ، زوجية

١٧) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{عندما } x > 2 \\ 2 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$ أوجد $\int_1^2 f(x) dx$



سوف تتعلم

- التعرف على المساحة كتكامل محدد.
- إيجاد المساحة المحددة بمنحنى دالة ومحور السينات على فترة مغلقة.
- إيجاد حجم دوراني ناتج عند دوران منطقة محددة بمنحنيين حول محور السينات.

المصطلحات الأساسية

- Area مساحة
- Unit Squared وحدة مربعة
- Axis of Revolution محور الدوران
- Solid of Revolution مجسم دوراني

الأدوات المستخدمة

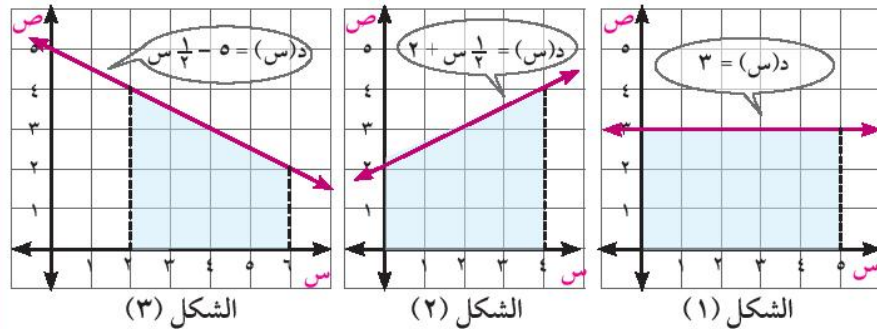
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي

أولاً: المساحات في المستوى

فكر و ناقش



١. احسب المساحة الملونة في كل من الأشكال التالية هندسياً.



٢. لكل من الأشكال السابقة احسب $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b g(x) dx$ حيث $f(x)$ معادلة المنحنى، والمستقيمان $y = a$ ، $y = b$ يحددان المنطقة الملونة.

٣. قارن بين مساحة كل شكل وناتج التكامل المحدد له، ماذا تستنتج؟

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة $y = f(x)$ ومحور السينات في الفترة $[a, b]$

نظرية

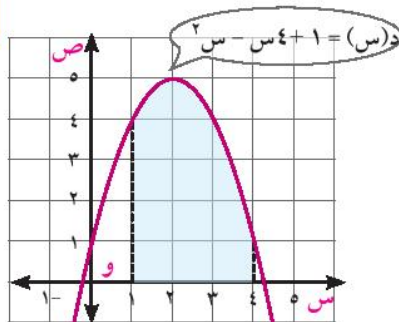
إذا كانت $y = f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، M مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $y = a$ ، $y = b$ فإن:

$$M = \int_a^b f(x) dx$$

المساحة تحت المنحنى

مثال

١. يبين الشكل المقابل منحنى الدالة $y = f(x)$ حيث $f(x) = 1 + 4x - x^2$ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $y = 1$ ، $y = 4$



الحل

د متصلة على الفترة $[1, 4]$ ، د(س) < 0 لكل س $\in [1, 4]$

$$\therefore \int_1^4 \text{د(س)} \, ds = \int_1^4 (1 - 4s + s^2) \, ds$$

$$= \left[\frac{1}{3} - 2s + \frac{1}{3}s^3 \right]_1^4 = \left[\frac{1}{3} - 8 + \frac{64}{3} \right] - \left[\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{3} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} - 8 + \frac{64}{3} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 12 \text{ وحدة مربعة}$$

٩ حاول أن تحل

١ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = 1، س = 2 حيث د(س) = $s^3 + 1$

مثال

المساحة فوق محور السينات ومنحنى دالة

٢ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د: د(س) = $\sqrt{s^2 + 2}$ والمستقيم س = 3 وفوق محور السينات.

الحل

نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = 0

$$\therefore \sqrt{s^2 + 2} = 0 \Rightarrow \text{أى أن: س} = -1$$

$\therefore$ المساحة المطلوبة م $= \int_{-1}^3 \text{د(س)} \, ds$

$$= \int_{-1}^3 \sqrt{s^2 + 2} \, ds = \int_{-1}^3 \frac{1}{2} (s^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \, ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (s^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^3 = \frac{1}{3} (3^2 + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (1 + 2)^{\frac{3}{2}} = 6 \text{ وحدات مربعة}$$

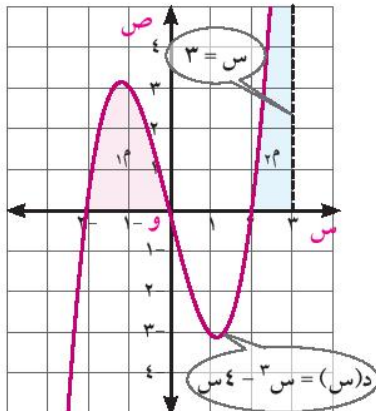
٩ حاول أن تحل

٢ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د: د(س) = $\frac{s^4}{1+s^2}$ والمستقيم س = 4 وتقع فوق محور السينات.

مثال

المساحة بين منحنى ومحور السينات

٢ إذا كانت د: $[-3, \infty)$ ← ح حيث د(س) = $s^3 - 4s$ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات.



الحل

نوجد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (أصفار الدالة)

$$د(س) = س^3 - 4س = س(س^2 - 4) = س(س - 2)(س + 2)$$

عندما د (س) = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ٢ أو س = -٢



بدراسة إشارة الدالة ونجد

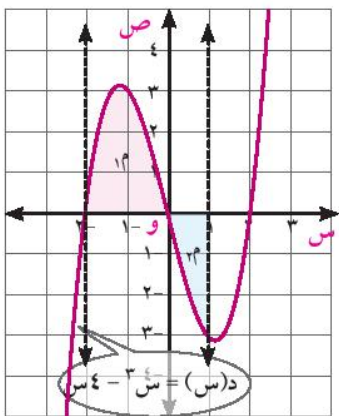
د(س) ≤ 0 على الفترة $[-2, 0]$ وعلى الفترة $[2, 3]$

∴ المساحة $M = M_1 + M_2 = I_{x-} (س + ٤س) + I_{x+} (س - ٣س)$

$$r_+ [2s^2 - \frac{1}{\epsilon}s] + r_- [2s^2 - \frac{1}{\epsilon}s] =$$

$$((\xi-) - \wedge - \frac{\wedge \wedge}{\xi}) + ((\xi-) - \cdot) =$$

$$= \frac{121}{4} \text{ وحدة مربعة}$$



ملاحظة هامة

لتعيين المساحة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $s = 2$ ،
 $s = 1$ كما في الرسم المقابل.

نجد أن:

د(س) ≤ 0 عندما $s \in [-2, 0]$ ، د(س) ≥ 0 عندما $s \in [0, 1]$

∴ المساحة م = م₁ + م₂

$$| \psi_{\pm} \rangle = | (\text{س}^3 - \text{س}^4) \rangle + | (\text{س}^3 - \text{س}^4) \rangle$$

$$|{}^1_+[\frac{1}{\epsilon} s^2 - \frac{1}{\epsilon} s] + {}^1_+[\frac{1}{\epsilon} s^2 - \frac{1}{\epsilon} s] =$$

$$\frac{23}{\epsilon} = \left| \frac{7}{\epsilon} - 1 \right| + \epsilon = \left| 0 - \left(2 - \frac{1}{\epsilon} \right) \right| + \epsilon =$$

٩ حاول أن تحل

٣ أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى $v = 3 + 2s - s^2$ ومحور السينات.

تفكير ناقد

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى $v = 3 + 2s - s^2$ والمستقيمات $s = -1$ ، $s = 4$ ، $v = 0$.

تطبيقات معمارية للمساحة

الحل 

تكاليف زجاج مدخل الفندق = مساحة الزجاج بالأمتار المربعة $\times$ تكلفة المتر المربع الواحد

إيجاد مساحة الزجاج:

$$د(س) = \frac{1}{۲} - (س - ۱)(س - ۷)$$

فتكون د(س) ≤ 0 لكل س $\in [1, \gamma]$

$$\text{المساحة م} = \sqrt[7]{\frac{1}{4} - (س - ١)(٧ - س)} = \sqrt[7]{\frac{1}{4} - س + ٧س - ٧} = \sqrt[7]{٦س - \frac{27}{4}}$$

$$\textcircled{2} \quad 18 = \left(\frac{0}{3} - \right) - \frac{49}{3} = \frac{1}{3} \left[3 \frac{7}{2} - 2 \text{س} + 3 \frac{1}{6} - \right] =$$

$$27 \dots = 18 \times 15 \dots = 3 \therefore$$

أى أن: تكلفة تغطية مدخل الفندق بالزجاج تساوى ٢٧٠٠٠ جنيه

٩ حاول أن تحل

٤ إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠ جنيه وتم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د، والمستقيمين س = ٠، ص = ٠. حيث $D(s) = 12 - \frac{1}{3}s^2$. أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.

ثانيًا: حجوم الأجسام الدورانية

فكر و ناقش



هل شاهدت صانع الفواخير وهو يحول التراب إلى تحف وأواني طهي طعام بخلط الطين الأسواني بالماء وتقطيعه ووضعه حول محور يدور؛ فيشكله بأصابعه وأدواته؛ لينتج أجسامًا ذات أشكال جذابة. بما تسمى هذه الأجسام؟

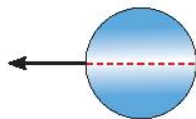
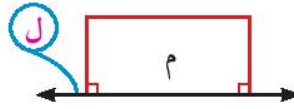
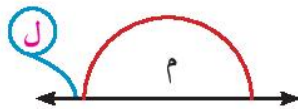
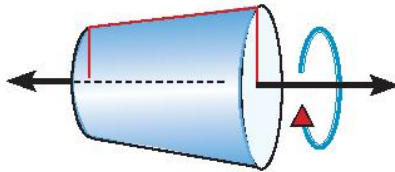
تصمم العبوات البلاستيكية لتعبئة المياه الغازية والعصائر والزيوت بأحجام مختلفة وسعات متعددة. كيف يمكن حساب حجمها أو سعتها عند تصميمها؟

Solid of Revolution

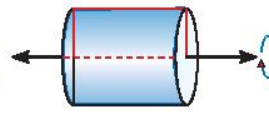
المجسم الدوراني

ينشأ المجسم الدوراني من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها يسمى «محور الدوران».

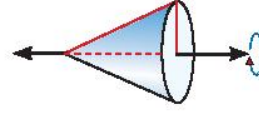
توضح الأشكال التالية أمثلة لمجسمات دورانية ترسمها المساحة M عند دورانها دورة كاملة حول المستقيم L .



كرة



أسطوانة قائمة



مخروط قائم

حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور السينات.

نقطة:

إذا كانت دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، $d(s) \geq 0$ لكل $s \in [a, b]$ فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى $d(s)$ ومحور السينات والمستقيمين $s = a$ ، $s = b$ دورة كاملة حول محور السينات هو: $H = \pi \int_a^b [d(s)]^2 ds$

مثال

دوران حول محور السينات

٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة

بمنحنى الدالة d ومحور السينات والمستقيمين $s = -1$ ، $s = 1$

دورة كاملة حول محور السينات علماً بأن $d(s) = s^2 + 1$

الحل:

الدالة d كثيرة الحدود متصلة على الفترة $[-1, 1]$ ،

$d(s) \geq 0$ لكل $s \in [a, b]$

بفرض أن حجم الجسم الناشئ من الدوران $H =$

$$H = \pi \int_{-1}^1 (s^2 + 1)^2 ds$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (s^4 + 2s^2 + 1) ds$$

$$= \pi \left[\frac{s^5}{5} + \frac{2s^3}{3} + s \right]_{-1}^1 = \pi \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 \right) = \frac{56\pi}{15}$$
 وحدة مكعبة

٦ حاول أن تحل

٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة d ومحور السينات والمستقيمين

$s = 0$ ، $s = 3$ دورة كاملة حول محور السينات علماً بأن $d(s) = s$ ما اسم الجسم الناشئ؟ بين كيف

نتحقق هندسياً من صحة إجابتك.

مثال

تطبيقات الحجوم

٦ باستخدام التكامل أثبت أن حجم المخروط الدائري القائم يساوي $\frac{\pi}{3} r^2 h$ حيث r طول نصف قطر

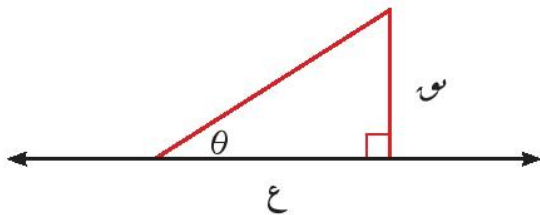
قاعدته، h ارتفاعه.

الحل:

ينتج المخروط الدائري القائم عن دوران مثلث قائم

الزاوية بحيث يقع أحد ضلعي القائمة على محور السينات

دورة كاملة حول محور السينات.



نوجد العلاقة بين s ، $v = d(s)$

$$\frac{v}{s} = \theta \text{ طا } (۱) \therefore v = s \theta \text{ ظا } (۲)$$

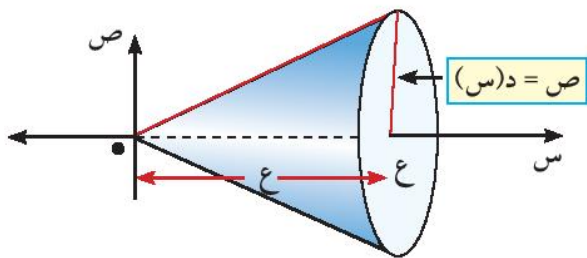
$$\therefore \pi = \text{ح} \quad \pi_1 = [\text{د(س)}] \text{ و } \pi = \text{س} \quad \pi_2 = \text{س} \quad \pi_3 = \text{ط} \quad \pi_4 = \theta \quad \pi_5 = \text{س}$$

$$(2) \theta^2 \text{ طا}^2 \text{ع} \frac{\pi}{3} = \text{ع} \cdot [\theta^2 \text{ طا}^2 \text{س} \frac{\pi}{3}] =$$

$$\frac{\text{مؤ}}{\text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \theta \text{ (1) طا}$$

$$\frac{\mu_2}{\epsilon} = \theta^2 \therefore$$

بالتعويض في (٢) $\therefore \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$



حاول أن تحل

٦ باستخدام التكامل أثبت أن:

١ حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r طول نصف قطر الكرة)

ب) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة $= \pi r^2 h$

(ب) طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها)

مثال

دوران حول محور السينات

٧) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ومحور السينات، حيث أ، ب ثابتان، دورة كاملة حول محور السينات.

 الحل:

∴ الدوران حول محور السينات

حدود التكامل:

ص = ۰ ∴ س^۲ = ۲۱ **ای** اُن س = -۱، س = ۱

$$ح = \pi_{1-} \cdot \left(\frac{س}{س_1} - 1 \right) \cdot \pi_{2-} = \pi_{2-} \cdot \left(\frac{س}{س_1} - 1 \right) \cdot \pi_{1-} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$[\frac{1}{3} - 1] \pi \text{ ب} = [\frac{3}{4} - 1] \pi \text{ ب} =$$

$\frac{4}{3}\pi$ ب^{١٢} وحدة مكعبة.

حاول أن تحل

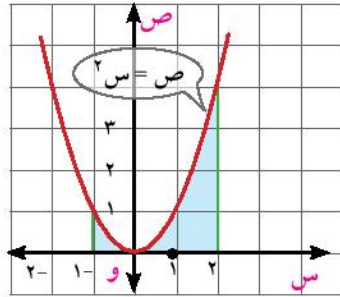
٧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $v = 2 - s^2$ ومحور السينات، دورة كاملة حول محور السنات.



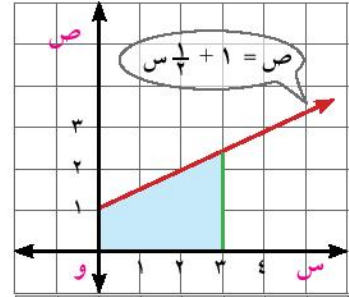
تمارين ٣ - ٤



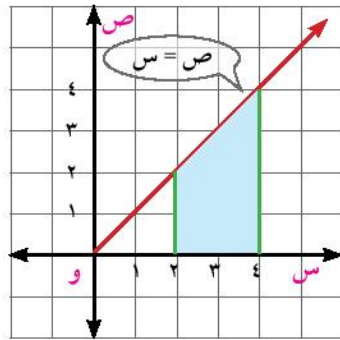
اكتب التكامل المحدد الذي يعطى المساحة الملونة في كل مما يأتي واحسب قيمته.



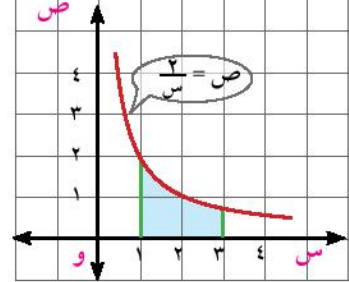
٢



١



٤



٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

٥ مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات $ص = س$ ، $ص = ٢$ ، $ص = ٠$ ؛ تساوى:

ب ١

أ 1/2

د ٤

ج ٢

٦ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٣$ والمستقيمات $ص = ٠$ ، $ص = ٢$ تساوى

د ١

ج ٢

ب ٤

أ ٨

٧ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \sqrt{٢س}$ ، $ص = ٠$ ، $س = ١$ دورة كاملة حول

محور السينات يساوى

د ٢π

ج π

ب ٠

أ π -

٨ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \sqrt{١+س}$ والمستقيمات $ص = ٠$ ،

$س = ١$ ، $س = ٠$ دورة كاملة حول محور السينات يساوى

د ٢π

ج π

ب ٥π/٢

أ ٣π/٢

فى كل مما يأتى إحسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

٩ المنحنى $ص = ٥ - س^٢$ ومحور السينات والمستقيمين $ص = ٢$ ، $ص = ١$

$$١٠) \text{ المستقيمات: } س + ٢ص = ٩, س = ١, س = ٣, ص = ٠$$

$$١١) \text{ المنحنى } ص = \sqrt{س + ٤} \text{ والمستقيمات } س = ٠, س = ٥, ص = ٠$$

$$١٢) \text{ المنحنى } ص = ٣ - ٢س - س^٢ \text{ ومحور السينات}$$

$$١٣) \text{ المنحنى } ص = \frac{٤}{س} \text{ والمستقيمات } س = ١, س = ٤, ص = ٠$$

$$١٤) \text{ منحنى الدالة د: د(س) = (س - ٣)(س - ١) ومحورى الاحداثيات حيث د(س) \leq ٠}$$

$$١٥) \text{ منحنى الدالة د: د(س) = (س - ١)(س - ٢)(س - ٣) والمستقيمين } س = ٤, ص = ٠ \text{ حيث د(س) \leq ٠}$$

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة
دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى:

$$١٧) \text{ ص = ٣ - س, س = ٠, ص = ٠}$$

$$١٦) \text{ ص = س, س = ٣, ص = ٠}$$

$$١٩) \text{ ص = |س|, س = -٢, س = ٤, ص = ٠}$$

$$١٨) \text{ ص = } \frac{١}{س}, س = ١, س = ٤, ص = ٠$$