



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

التطبيقية

الرياضيات

الميكانيكا



٢٠٢٦-٢٠٢٧

كتاب الطالب

الصف الثالث الثانوي

تأليف

أ.د. / عبد الشافي فهمى عبادة أ.د. / نبيل توفيق الضبع
أ.د. / أسامة جابر عبد الحافظ أ.د. / مجدى عبد الفتاح الصفتى

مراجعة وتعديل

أ.د. / ماجد محمد حسن أ.د. / شريف عاطف البرهامي
أ.د. / عثمان مصطفى عثمان د. / مدحت عطية شعراوي
أ.د. / جلال محروس معتمد أ.د. / عمرو فاروق محمود
د. / محمد محي عبد السلام

إشراف علمي

أ.د. / منال عزقول
مستشار الرياضيات

إشراف تربوي

د. / أكرم حسن
رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

الطبعة الأولى ٢٠١٦ / ٢٠١٧

رقم الإيداع ٨٧٠٧ / ٢٠١٦

الرقم الدولي 978 - 977 - 706 - 035 - 6

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوءها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

يشهد عالم اليوم تطوراً علمياً مستمراً ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقاً من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمي في التفكير؛ لتصبح العقول هي أدوات التفكير العلمي وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « التفاضل والتكامل » للصف الثالث الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمي، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى كتاب « الميكانيكا » ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمي لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التي تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهي كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهتدى إلى سواء السبيل

المحتويات

أولا : الاستاتيكا

متطلبات الاستاتيكا

٢

متطلب الوحدة الأولى: العزوم

١٠

١ - ١ عزم قوة بالنسبة لنقطة في نظام احداثى ثنائى الابعاد

الوحدة الثانية: القوى المستوية

٢٢

٢ - ١ محصلة القوى المتوازية المستوية

٣٢

٢ - ٢ ائزان مجموعة من القوى المستوية

الوحدة الثالثة: الازدواجات

٤٢

٣ - ١ الازدواجات

٥٠

٣ - ٢ الازدواج المحصل

ثانياً: الديناميكا

متطلبات الديناميكا

٦٠

الوحدة الأولى: الحركة فى خط مستقيم

٧٢

١ - ١ تفاضل وتكامل الدوال المتجهة

الوحدة الثانية: تطبيقات على قوانين نيوتن للحركة

٨٨

٢ - ١ حركة الأجسام متغيرة الكتلة أو العجلة

٩٥

٢ - ٢ حركة الأجسام المتصلة

١١٣

٢ - ٣ الدفع

الوحدة الثالثة: الشغل ، الطاقة ، القدرة

١٢٤

٣ - ١ الشغل

١٣٦

٣ - ٢ الطاقة

١٥٠

٣ - ٣ القدرة

متطلبات قبلية
فى

الإستاتيكَا



الصف الثالث الثانوي

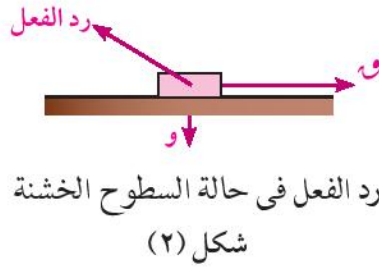
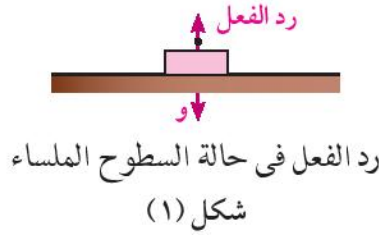
لا يمتحن فيها الطالب

١ السطوح الملساء والسطوح الخشنة :

Smooth Surfaces and Rough Surfaces

يفسر العلماء منشأ قوى الاحتكاك بين الأجسام إلى وجود نتوءات وتجويفات مجهرية في سطوح الأجسام مهما بلغت نعومتها وينتج عن تداخل هذه النتوءات والتجويفات لكل من السطحين المتلامسين ما يسمى بقوة الاحتكاك ، وبالتالي نجد مقاومة عند محاولة تحريك أحد السطحين على السطح الآخر ، ويعتبر معامل الاحتكاك مقياساً لدرجة خشونة الأسطح، فإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك ازدادت الخشونة والعكس صحيح ، وإذا ساوى معامل الاحتكاك الصفر انعدمت قوى الاحتكاك تماماً.

يتوقف رد الفعل على طبيعة الجسمين المتلامسين كما يتوقف على القوى المؤثرة الأخرى على الجسم، ففي حالة السطوح الملساء يكون رد الفعل عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين. أما إذا كان الجسمان خشنيين فيكون لرد الفعل مركبة في اتجاه سطح التماس تسمى بالاحتكاك السكوني ، كما يكون لرد الفعل مركبة عمودية على سطح التماس تسمى برد الفعل العمودي.



٢ خواص قوة الاحتكاك السكوني :

(١) تعمل قوة الاحتكاك السكوني (ع) على معاكسة الانزلاق فتكون في اتجاه مضاد للاتجاه الذي يميل الجسم إلى الانزلاق فيه.

(٢) تكون قوة الاحتكاك السكوني (ع) مساوية فقط للقوة المماسية التي تعمل على تحريك الجسم ولا يمكن ان تزيد عن هذه القوة وتظل مساوية لهذه القوة طالما الجسم متزنًا.

(٣) وتزايد قوة الاحتكاك السكوني (ع) كلما تزايدت القوة المماسية التي تعمل على إحداث الحركة حتى تصل إلى حد لا تتعداه وعند ذلك يكون الجسم على وشك الانزلاق ويسمى الاحتكاك في هذه الحالة بالاحتكاك السكوني النهائي ويرمز له بالرمز (ع_س).

(٤) النسبة بين الاحتكاك السكوني النهائي ورد الفعل العمودي ثابتة وتتوقف هذه النسبة على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتهما وتسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكوني ويرمز لها بالرمز م_س.
 أي أن م_س = $\frac{ع_{س}}{ر}$ حيث ع_س الاحتكاك السكوني النهائي.

Friction Kinetic

٣ قوة الاحتكاك الحركي

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركي (ع_ك) يكون اتجاهه عكس اتجاه حركته، وتعطى قيمتها بالعلاقة: ع_ك = م_ك ر حيث:

حيث م_ك هو معامل الاحتكاك الحركي Coefficient of Kinetic Friction ، ر رد الفعل العمودي
 أي أن: قوة الاحتكاك الحركي تساوي حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركي في قوة رد الفعل العمودية .
 ومن ذلك يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركي على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركي وقوة رد الفعل العمودي.

$$\text{أي أن: } م_{ك} = \frac{ع_{ك}}{ر} \text{ حيث } ع_{ك} \text{ قوة الاحتكاك الحركي}$$

Resultant Reaction

٤ رد الفعل المحصل (ر')

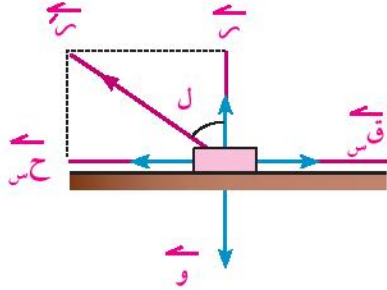
في حالة السطوح الخشنة فإن رد الفعل المحصل يكون مائلاً على سطح التماس حيث أنه يعتبر محصلة رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك السكوني . ويسمى رد الفعل المحصل أو رد الفعل الكلي.

رد الفعل المحصل (ر') هو محصلة رد الفعل العمودي ر' وقوة الاحتكاك السكوني ع'

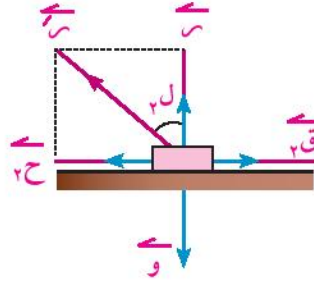
Angle of Friction

٥ زاوية الاحتكاك

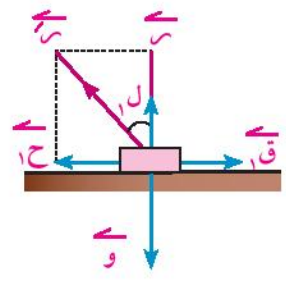
نلاحظ أن قياس الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل تتزايد كلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك (بفرض ثبوت مقدار قوة رد الفعل العمودي) وأن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى ل عندما يصبح الاحتكاك نهائياً. وتسمى الزاوية في هذه الحالة (زاوية الاحتكاك) والأشكال التالية توضح ذلك.



شكل (٥)



شكل (٤)



شكل (٣)

من شكل (٣)، شكل (٤) نجد أن: متجه رد الفعل المحصل R هو محصلة رد الفعل العمودي R_v وقوة الاحتكاك R_h أي أن: $R = \sqrt{R_v^2 + R_h^2}$

ومن شكل (٥) عندما يكون الاحتكاك نهائياً:

$$\begin{aligned} \therefore R &= \sqrt{R_v^2 + R_h^2} \quad \because R_h = R_v \tan \alpha \\ \therefore R &= \sqrt{R_v^2 + R_v^2 \tan^2 \alpha} \\ \therefore R &= R_v \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

٦ العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك :

في حالة الاحتكاك النهائي من شكل (٨) :

$$\text{أي أن : } \mu_s = \tan \alpha$$

$$\text{نجد أن : } \tan \alpha = \frac{R_h}{R_v} \text{ ولكن } \frac{R_h}{R_v} = \mu_s$$

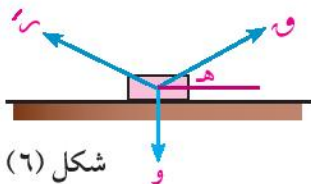
أي أنه عندما يكون الاحتكاك نهائياً فإن معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك

تفكير ناقد: قارن بين قياسى زاويتي الاحتكاك السكوني والاحتكاك الحركي.

Equilibrium of a body on a rough horizontal plane

٧ اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

إذا وضع جسم وزنه W على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه قوة مقدارها P تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها θ فإن الجسم في وضع التوازن يكون متزاناً تحت تأثير القوى :

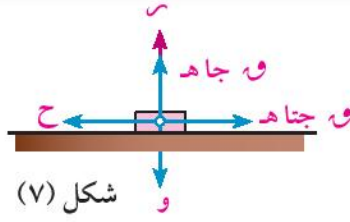


شكل (٦)

(١) قوة الوزن W رأسياً لأسفل ومقدارها و

(٢) قوة رد الفعل المحصل R ومقدارها R

(٣) القوة P ومقدارها P والشكل (٦) يوضح ذلك .



وبتحليل القوة $\vec{W}$ إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه فإن مقدارهما يكون $W \cos \theta$ و $W \sin \theta$.

وبتحليل $\vec{N}$ إلى مركبتين متعامدين هما رد الفعل العمودى $N \cos \theta$ ومقداره $N \sin \theta$ ، وقوة الاحتكاك F ومقدارها $F \cos \theta$ والشكل (٧) يوضح ذلك .

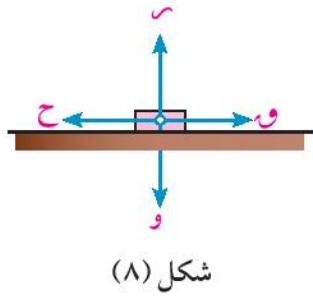
فتكون معادلتا اتزان الجسم هما : $F \cos \theta = N \sin \theta$ ، $N \cos \theta + W \sin \theta = 0$

مثال

القوة المؤثرة على جسم

١ يدفع كريم صندوقاً ممتلئاً بالكتب إلى سيارته على طريق أفقى ، فإذا كان وزن الصندوق والكتب ١٢٤ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكونى بين الطريق والصندوق ٠,٤٥ ، فما مقدار القوة الأفقية التى يدفع بها كريم الصندوق حتى يكون على وشك الحركة.

الحل



باعتبار أن $W = 124$ نيوتن ، $\mu_s = 0,45$ ،
من شروط اتزان جسم على مستوى أفقى فإن :

$N = W$ أى أن : $N = 124$ (١)

ومن (١) تكون : $W \sin \theta = 124 \times 0,45 = 55,8$ نيوتن $W \cos \theta = 124$

٢ حاول أن تحل

١ وضعت كتله وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى افقى خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها W حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة

أ إذا كانت $W = 8$ نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والمستوى

ب إذا كان $\mu_s = 0,4$ فأوجد W

زاوية الاحتكاك

مثال

٢ وضع جسم وزنه ١٢ ث كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٤ ، ٤ ث كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين واقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم، فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك.

الجسم فى حالة اتزان نهائى

$\omega = \nu \therefore$

$\therefore r = 12$ ث كجم

محصلة القوتين ٤، ٤ ث كجم = قوة الاحتكاك النهائي

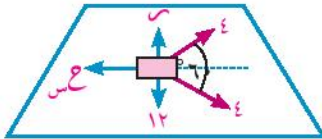
$$\therefore \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} = n$$

$$\therefore \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \times 4 \times 4 \times 2 + 2(4) + 2(4)} = 2 \text{ كجم}$$

$$\therefore \text{مس} = 9 \quad \therefore 12 \text{ مس} = \sqrt[3]{4}$$

$$\therefore \text{مس} = \frac{\sqrt[3]{4}}{12} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \therefore \text{ظال} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

شکل (۹)



شکل (۱۰)

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{ظل } 30^\circ \therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$$

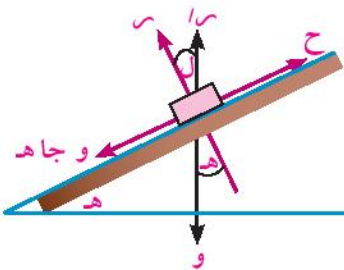
Equilibrium of a body on an inclined horizontal plane

نعتبر أن جسماً متزناً على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ .

يتزن الجسم على المستوى تحت تأثير قوتين :

(١١) قوة وزنه ^و وتعمل رأسياً لأسفل وليكن مقدارها (و)

(٢) قوة رد الفعل المحصل وليكن مقدارها (ر)



شکل (۱۱)

ومن شروط الاتزان نجد أن :

قوة رد الفعل المحصل تعمل رأسياً لأعلى . ويكون: $r = 0$ و (١)

يمكن الآن تعيين قوتي الاحتكاك ورد الفعل العمودي باعتبارهما مركبتي قوة رد الفعل المحصل في اتجاهين أحدهما يوازي المستوى والآخر عمودي عليه كما في الشكل المقابل.

قوة الاحتكاك . ح = و جا هـ (٢)

وتعمل هذه القوة عكس اتجاه الحركة المحتملة ، أى أنها توازى خط أكبر ميل وتكون موجهة لأعلى المستوى .

س = و جتا هـ (٣)

قوة رد الفعل العمودى .

العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك السكونى وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .
إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

البرهان :

∴ الاحتكاك نهائى

∴ قوة رد الفعل المحصل تصنع مع العمودى على المستوى زاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك السكونى وليكن قياسها (ل) .

ومن الشكل السابق نجد أن : هـ = ل

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك كالآتى :

$$\mu_s = \tan \theta$$

أو

$$\mu_s = \tan \theta$$

العزوم

Moments



الوحدة



مقدمة الوحدة

اعتمد الإنسان منذ القدم على فكرة الروافع لتمكنه من حمل ونقل الأشياء من مكان لآخر. والجهاز الحركي للإنسان يشبه إلى حد كبير الفكرة التي تقوم عليها الروافع. فالعظام هي الأجسام الصلبة المادية التي تؤثر عليها القوة العضلية المرتبطة بها لتدور حول نقطة ثابتة (مركز). وهذا يحتم علينا فهم التأثير الدوراني للقوة (عزم القوة). وفي هذه الوحدة سوف نلقى الضوء على مفهوم عزم قوة بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثنائي.

أهداف الوحدة

- بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:
 - يوجد معيار واتجاه عزم قوة بالنسبة لنقطة.
 - يوجد عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة واقعه في مستويها.
 - يتعرف النظرية العامة للعزوم «إذا كانت لمجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم متماسك محصلة فإن المجموع
- الجبري لعزوم القوى حول نقطة يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.
- يحل تطبيقات متنوعة على العزوم.

المصطلحات الأساسية

Moment component	مركبة العزم	Moment	عزم
Anti clockwise	عكس اتجاه دوران عقارب الساعة	Moment centre	مركز العزم
Clockwise	في اتجاه دوران عقارب الساعة	Moment axis	محور العزم
Algebraic measure of the moment	القياس الجبري للعزم	Moment arm	ذراع العزم
Norm of the moment	مقياس العزم	Rotation	دوران
		Resultant	محصلة

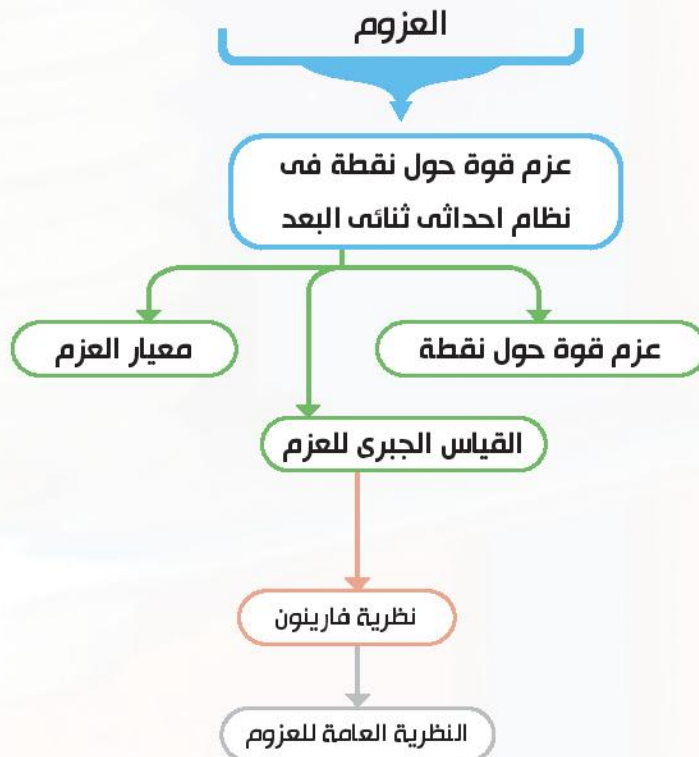
الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

دروس الوحدة

(١-١): عزم قوة بالنسبة لنقطة في نظام احداثى ثنائى الابعاد.

مخطط تنظيمى للوحدة



عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الأبعاد

Moment of a force about a point in 2D-coordinate system

الوحدة الأولى

١ - ١

تعلمت سابقاً أن القوة قد تنتج من تأثير جسم طبيعي على جسم طبيعي آخر. وهذا التأثير ينتج عنه صور مختلفة (تأثير حركي - تأثير شكلي ...). فإذا تحرك الجسم من موضع إلى آخر فإن تأثير القوة هنا يكون تأثيراً حركياً انتقالياً. وإذا تحرك الجسم حركة دورانية حول نقطة فإن تأثير القوة فى هذه الحالة يكون تأثير حركياً دورانياً. وهنا نقول أن القوة قادرة على إحداث دوران للجسم حول نقطة وهو ما يعرف بعزم القوة حول نقطة. ويعتمد هذا التأثير الدورانى للقوة (العزم) على مقدار القوة وعلى بُعد خط عمل القوة عن هذه النقطة.

سوف نتعلم

عزم قوة بالنسبة لنقطة.

عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة فى مستوياتها.



فكر و ناقش

(١) الشكل المقابل يوضح طفلان على أرجوحة متزنة فى وضع أفقى. أى الطفلين (الأثقل - الأخف) يكون أقرب إلى مركز الدوران.

إذا أراد الطفل الأثقل أن يجعل الأرجوحة تدور حيث يرتفع الطفل الأخف لأعلى. فما الذى يفعله؟



(٢) الشكل المقابل ليد شخص يحاول أن يربط ماسورة. فإن انصب موضع للقوة ولاحكام الربط هو .. (أ، ب، ج)

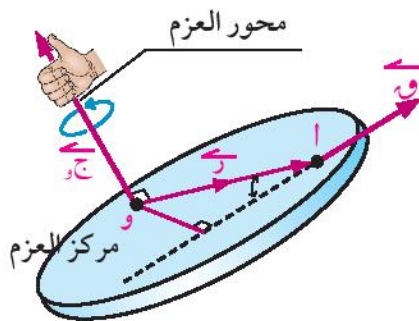
تعلم

المصطلحات الأساسية

عزم Moment
مركز العزم Moment centre
محور العزم Moment axis
ذراع العزم

عزم قوة حول نقطة فى نظام احداثى متعامد ثنائى الابعاد

Moment of a force about a point in 2D-coordinates system



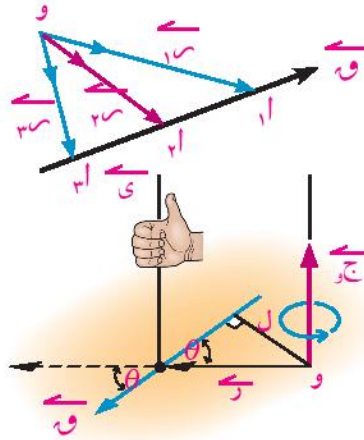
يعرف عزم القوة $\vec{M}$ حول نقطة و بأنه مقدره القوة على إحداث دوران للجسم حول النقطة و. ويمكن حساب هذا التأثير الدورانى من العلاقة $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

حيث $\vec{r}$ متجه موضع نقطة أ على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة و. تسمى النقطة (و) مركز العزوم. ويسمى المستقيم المار بالنقطة (و) وعمودياً على المستوى الذى يحوى القوة $\vec{F}$ ، بمحور العزم ونلاحظ أن عزم

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

القوة هو كمية متجهه. وطبقاً لقاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهى يكون اتجاه عزم القوة بالنسبة لنقطة و عمودياً على المستوى الذى يحوى القوة $\vec{r}$ والنقطة و.



تفكير ناقذ: هل يتوقف عزم القوة $\vec{r}$ بالنسبة لنقطة و على موضع النقطة أ على خط عمل القوة؟

(١) عزم قوة بالنسبة لنقطة

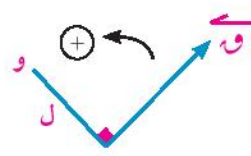
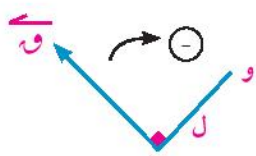
من تعريف الضرب الاتجاهى لمتجهين فإن

$$\vec{r} \times \vec{r} = 0 \quad \text{حيث } \theta = 0$$

حيث $\vec{r}$ متجه وحدة عمودى على مستوى $\vec{r}$ ، بحيث يكون الدوران من $\vec{r}$ إلى $\vec{r}$ فى اتجاه المتجه $\vec{r}$ هى قياس الزاوية بين $\vec{r}$ و $\vec{r}$ وبفرض $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ ، $\vec{r} \times \vec{r} = \theta$

حيث L طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة $\vec{r}$ (ل يسمى ذراع العزم) فإن عزم $\vec{r}$ حول نقطة و هو $\vec{r} \times \vec{r} = L \vec{r}$ (١)

(٢) القياس الجبرى للعزم



وإذا كانت القوة $\vec{r}$ تعمل على الدوران حول و فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم موجباً (متجه العزم فى اتجاه المتجه $\vec{r}$) وإذا كانت القوة $\vec{r}$ تعمل على الدوران حول و فى اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم سالباً (متجه العزم فى اتجاه المتجه - $\vec{r}$)

(٣) معيار العزم ويكون معيار العزم هو $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ (٢)

(٤) عزم قوة حول نقطة تقع على خط عملها = صفر

(٥) وحدة قياس مقدار العزم

وحدة قياس مقدار العزم = وحدة قياس مقدار القوة $\times$ وحدة قياس الطول

ومن هنا نيوتن.متر ، داي.ن.سم ، ث كجم.متر ...

مثال

١ إذا كانت $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$ تؤثر فى النقطة أ (٣، ١-) من جسم أوجد:

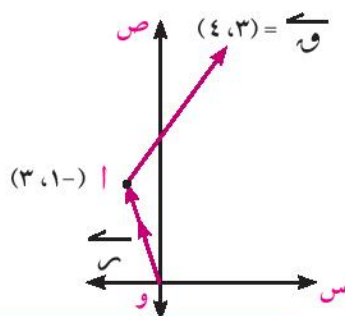
أ عزم القوة $\vec{r}$ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠)

ب طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة $\vec{r}$

الحل

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$(3, -1) = (0, 0) - (3, 1) =$$



$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{e} (3 \times 3 - 4 \times 1) = (4, 3) \times (3, 1) =$$

$$13 = \vec{e}$$

مقياس العزم = 13 وحدة عزم، القياس الجبرى لمتجه العزم = 13 وحدة عزم

تفسير الناتج: أى أن القوة $\vec{v}$ تحدث دوراناً للجسم حول نقطة و فى اتجاه دوران عقارب الساعة (اتجاه العزم فى اتجاه $-\vec{e}$)

ب) لايجاد طول العمود المرسوم من و على خط عمل القوة $\vec{v}$

$$\therefore \|\vec{J}\| = \|\vec{v}\| \cdot l \quad \therefore l = \frac{\|\vec{J}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{13}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{13}{5} \text{ وحدة طول.}$$

٩ حاول أن تحل

١) إذا كانت $\vec{s}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{e}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\vec{v} = \vec{s} - 2\vec{v}$ تؤثر فى النقطة (٣، ٢) أوجد:

أ) عزم القوة $\vec{v}$ بالنسبة للنقطة ب (١، ٢)

ب) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة.

تفكير ناقد: إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة. فماذا يعنى ذلك؟

تعلم

Principle of moments (Varignons theorem)

مبدأ العزم (نظرية فارينون)

عزم القوة $\vec{v}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة $\vec{v} = \vec{v}_s + \vec{v}_v$ تؤثر فى نقطة أ

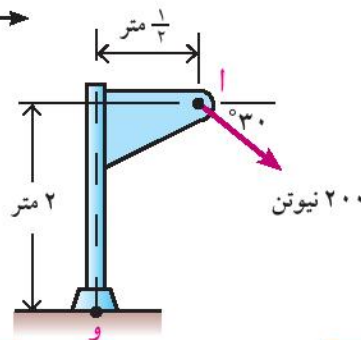
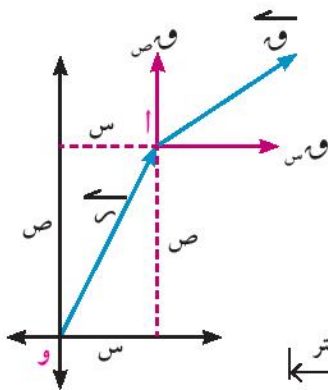
متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\vec{r} = (s, v)$ فإن

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$= (s, v) \times (v_s, v_v)$$

$$= \vec{e} (s v_v - v v_s) =$$

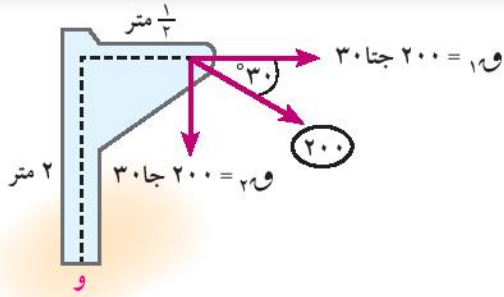
$$\text{عزم } \vec{v}_v \text{ حول و} + \text{عزم } \vec{v}_s \text{ حول و}$$



مثال

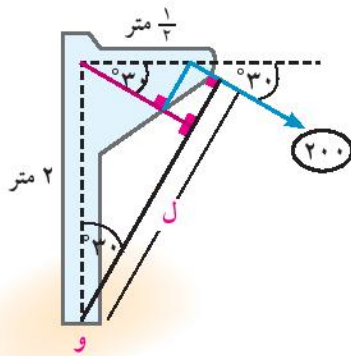
٢) فى الشكل المقابل:

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطة و



الحل الأول:

نحلل القوة ٢٠٠ نيوتن إلى مركبتين
 $٢٠٠ = ١٧٣$ جتا $٣٠ = ١٠٠$ سينيوتن
 $٢٠٠ = ١٧٣$ جتا $٣٠ = ١٠٠$ نيوتن
 وطبقاً لنظرية فارينون يكون
 جـ $= - ٢ \times ١٧٣ - ١٠٠ \times ١ = - ٤٤٦$
 $= - ٤٤٦$ نيوتن . متر

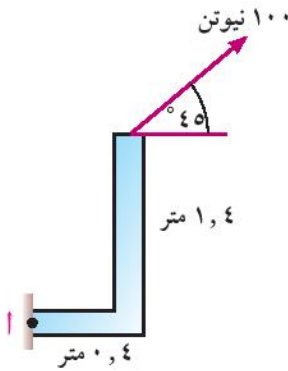


الحل الثانى:

طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة = ل
 حيث $ل = ٢$ جتا $٣٠ + ١٧٣ \sin(٣٠) = ٣٠$ متر
 ∴ القوة تعمل على الدوران حول و فى اتجاه دوران عقارب الساعة
 ∴ القياس الجبرى لعزم القوة يكون سالب
 جـ $= - (٣٠ + ١٧٣ \sin(٣٠)) \times ٢٠٠ = - ٤٤٦$ نيوتن . متر

٢ حاول أن تحل

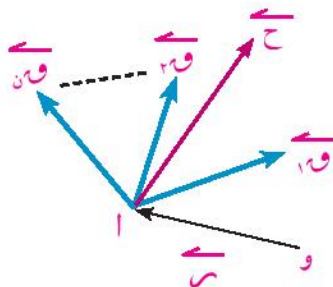
٢ فى الشكل المقابل : احسب القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة أ



مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

البرهان

بفرض $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ومن مجموعة محدودة ومتلاقية من القوى تؤثر فى نقطة أ
 وبفرض أن النقطة المطلوب إيجاد العزوم عندها هى النقطة (و)
 ∴ $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \dots = \vec{r}_n$



مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \\ &= \vec{r} \times \vec{R} \end{aligned}$$

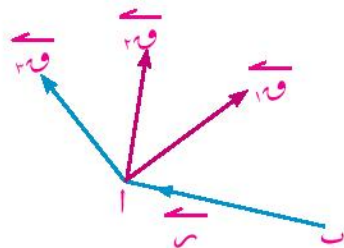
= عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها و

مثال

(عزوم القوى المستوية المتلاقية في نقطة)

٣ تؤثر القوى $\vec{r}_1 = \vec{s} + 2\vec{v}$ ، $\vec{r}_2 = \vec{v}$ ، $\vec{r}_3 = \vec{e} + \vec{s}$ في النقطة $A(1, -2)$ أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة $B(2, 0)$ ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة B . ماذا تلاحظ؟

الحل



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$$

$$(2, 1) \times (1, -2) =$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot (1 + \vec{e}) =$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot (1 + \vec{e}) = (2, 1) \times (1, -2) = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot (4 + \vec{e}) = (4, 4) \times (1, -2) = \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_3$$

∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة B

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 =$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e}$$

$$\text{محصلة القوى: } \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (9, 6) = (4, 4) + (3, 1) + (2, 1)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$$

$$(9, 6) \times (1, -2) =$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e}$$

نلاحظ أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة يساوي عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها.

النظرية العامة للعزوم

المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.

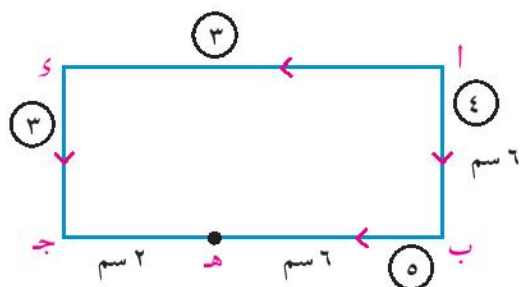
٥ حاول أن تحل

٣ تؤثر القوى $\vec{r}_1 = \vec{s} - 3\vec{v}$ ، $\vec{r}_2 = \vec{v} - 2\vec{s}$ في النقطة $A(4, -1)$. أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة $B(1, 1)$ ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة B .

مثال

٤) ا ب ج د مستطیل فیہ ا ب = ٦ سم، ب ج = ٨ سم اثر قوی مقادیرھا ٤، ٥، ٣، ٣ نیوتن فی اتجاهات
 ا ب، ب ہ، ی ج، ا ی $\overleftarrow{\hspace{1.5cm}}$ $\overleftarrow{\hspace{1.5cm}}$ $\overleftarrow{\hspace{1.5cm}}$ $\overleftarrow{\hspace{1.5cm}}$ حیث ہ $\exists$ ب ج، ب ہ = ٦ سم. اثبت أن محصلة هذه القوى تمر بالنقطة ہ.

الحل



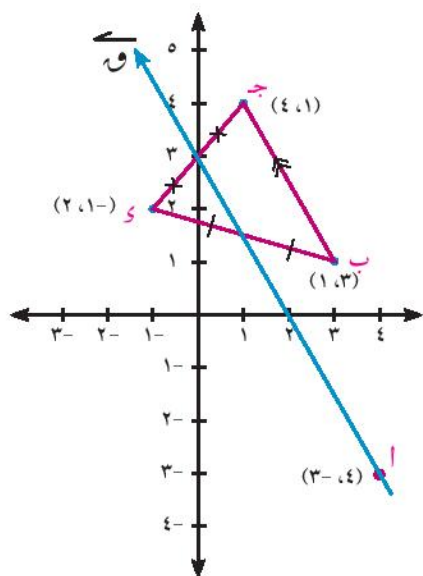
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى
بالنسبة لنقطة هـ = $-6 \times 2 + 2 \times 2 + 6 \times 4 = 0$ صفر
وطبقاً لنظرية العزوم فإن عزم المحصلة بالنسبة للنقطة هـ
يساوى = صفر
أى أن المحصلة تمر بالنقطة هـ

حاول أن تحل

(٤) ا ب ج د مربع طول ضلعه ٦سم، هـ = $\overline{ب ج}$ حيث ب هـ = اسم ، اثرت قوى مقاديرها ١، ٢، ٣، ٤، و نيوتن في ا ب ، ب ج ، ج د ، د ا ، ا ج على الترتيب. فإذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ أوجد قيمة و

مثال

٥) تؤثر القوة $\vec{F}$ = $\vec{s}_2 + \vec{s}_3$ في النقطة أ (٤، ٣). أوجد عزم $\vec{M}$ بالنسبة لكل من النقط ب (١، ٣)، ج (٤، ١)، د (١، ٢).



الحل

$$\begin{aligned} (4, -1) &= \overline{ب} - \overline{ا} = \overline{با} = \overline{س} \\ \overline{ع} \circ - &= \overline{ع} \quad (8, -3) = (3, 2-) \times (4, -1) = \overline{ق} \times \overline{س} = \overline{ج} \therefore \\ (7, -3) &= \overline{ج} - \overline{ا} = \overline{جا} = \overline{س} \\ \overline{ع} \circ - &= \overline{ع} \quad (14, -9) = (3, 2-) \times (7, -3) = \overline{ق} \times \overline{س} = \overline{ج} \therefore \\ (0, -5) &= \overline{س} - \overline{ا} = \overline{اس} = \overline{س} \\ \overline{ع} \circ &= \overline{ع} \quad (10, -15) = (3, 2-) \times (0, -5) = \overline{ق} \times \overline{س} = \overline{ج} \therefore \end{aligned}$$

من المثال السابق نستنتج أن:

(١) إذا كان عزم قوة حول نقطة ب = عزم هذه القوة حول نقطة جـ كان خط عمل القوة // ب جـ

(٢) إذا كان عزم قوة حول نقطة ب = - عزم هذه القوة حول نقطة د كان خط عمل القوة ينصف ب د

٤٠٠ حاول أن تحل

٥ تؤثر القوة $\vec{F}$ في النقطة أ (٢، ٣) فإذا كان عزم $\vec{M}$ حول كل من النقطتين ب (١، ٣)، جـ (١، ٤) يساوى ٢٨ ع $\vec{M}$ أوجد $\vec{F}$.

تعميم الاستنتاج السابق

إذا أثرت عدة قوى مستوية على جسم وكانت أ، ب نقطتين في نفس المستوى.

(١) فإذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = مجموع عزوم القوى حول ب فإذا خط عمل المحصلة // $\overrightarrow{AB}$.

(٢) إذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = - مجموع عزوم القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{AB}$.

ملاحظة: أما إذا كان مجموع عزوم القوى حول نقطة ما ولتكن ج ينعدم فيما ج تقع على خط عمل المحصلة أ، أن المحصلة هي المتجه الصفري

مثال

٦ تؤثر القوى $\vec{r}_1 = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$ ، $\vec{r}_2 = \vec{s}_5 + \vec{s}_2$ ، $\vec{r}_3 = \vec{s}_3 - \vec{s}_2 + \vec{s}_1$ في النقطة أ (١، ١) برهن

باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين ب (٢، ١)، ج (٤، ٦)

الحل

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{s}_5 + \vec{s}_2 - \vec{s}_1 + \vec{s}_3 - \vec{s}_2 + \vec{s}_1 + \vec{s}_5 + \vec{s}_2 = 2\vec{s}_5 + \vec{s}_3$$

$$\vec{r}_1 = \vec{s}_2 - \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{s}_5 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{s}_3 - \vec{s}_2 + \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \vec{r} = 2\vec{s}_5 + \vec{s}_3 = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

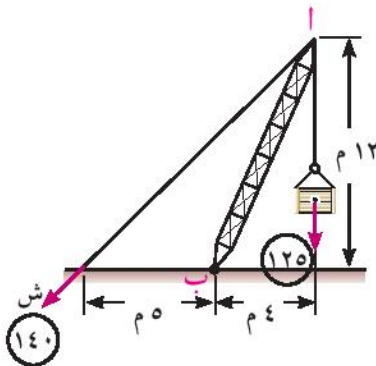
$$\therefore \text{خط عمل } \vec{r} \parallel \overrightarrow{AB}$$

٦ حاول أن تحل

٦ تؤثر القوى $\vec{r}_1 = \vec{s}_5 + \vec{s}_2$ ، $\vec{r}_2 = \vec{s}_3 - \vec{s}_2$ في النقطة أ (٣، ٢) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل

المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب (١، ٥)، ج (١، ٢)

٦ حاول أن تحل



٧ في الشكل المقابل: $\overline{AB}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد في

الخيوط يساوي ١٤٠ نيوتن، ووزن الصندوق ١٢٥ نيوتن. أوجد مجموع

عزمي القوتين بالنسبة للنقطة ب

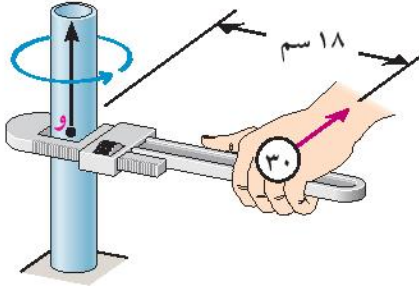


تمارين ١ - ١



أكمل ما يأتي

- ١ قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن نقطة أ مسافة ٨ سم فإن معيار عزمها حول نقطة أ يساوي نيوتن.سم

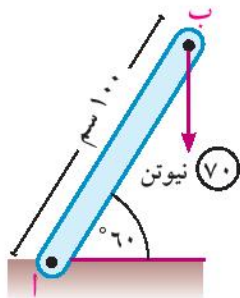


- ٢ في الشكل المقابل: معيار عزم القوة حول النقطة (و) يساوي

- ٣ قوة ٤ ص ← تؤثر في نقطة متجه موضعها بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوي ٥ م ← متر فإن عزم القوة حول نقطة الأصل يساوي

- ٤ إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوي صفرًا فإن ذلك يعني

- ٥ إذا كان عزم القوة حول نقطة ثابتًا فإن مقدار القوة يتناسب عكسيًا مع



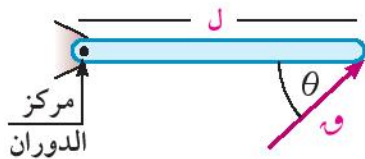
- ٦ الشكل المقابل: قضيب مثبت بمفصل عند أ. أثرت على الطرف ب قوة رأسية لأسفل مقدارها ٧٠ نيوتن. فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوي نيوتن.متر

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

- ٧ الشكل المقابل يمثل باب متصل بمفصل عند أ. أثرت عليه قوة $\vec{F}$ أي من الأشكال الآتية تكون القوة $\vec{F}$ لها أكبر عزم عند أ



- ٨ قضيب طول ل يمكنه الدوران بسهولة حول نقطة عند أحد نهايتيه.



أثرت على نهايته الأخرى قوة مقدارها $\vec{F}$ وتميل على القضيب بزاوية قياسها θ إذا كانت $\vec{F}$ يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أي بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر $\vec{F}$ بحيث يكون لها نفس العزم

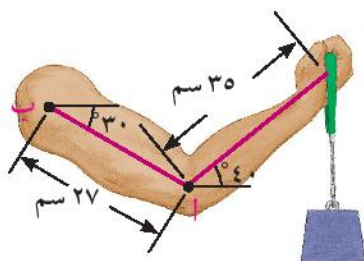
- أ ل جا θ ب ل حتا θ ج ل د ل طا θ

- ٩) إذا كان عزم قوة $\vec{W}$ حول النقطة أ يساوى عزمها حول النقطة ب فإن
- أ) $\vec{W} \perp \overline{AB}$ ب) $\vec{W}$ تنصف $\overline{AB}$
- ج) $\vec{W} \parallel \overline{AB}$ د) $\overline{AB}$ ، خط عمل $\vec{W}$ متخالفان

أجب عن الأسئلة الآتية

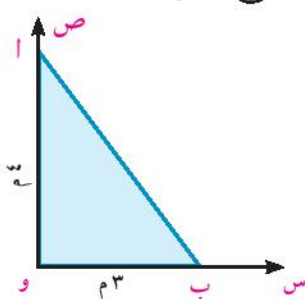
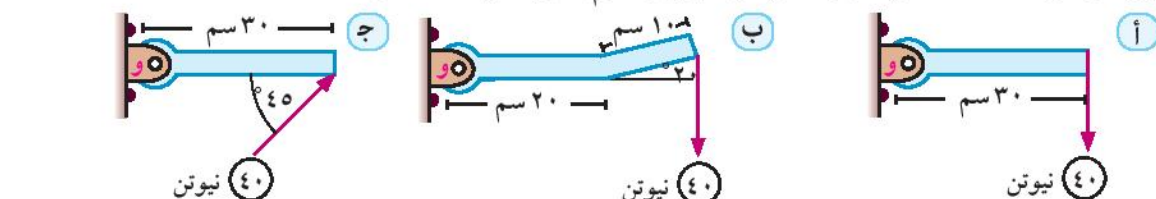
- ١٠) تؤثر القوتان $\vec{W}_1$ و $\vec{W}_2$ على M بحيث ينعدم مجموع عزمي هاتين القوتين حول نقطة الأصل وبالنسبة للنقطة ب (٢، ٣) عين قيمة كل من الثابتين م، ل بحيث ينعدم مجموع عزمي هاتين القوتين حول نقطة الأصل وبالنسبة للنقطة ب (٢، ٣)

- ١١) القوى $\vec{W}_1 = 2\vec{S} - \vec{S}_2$ ، $\vec{W}_2 = 5\vec{S} + 2\vec{S}_2$ ، $\vec{W}_3 = 3\vec{S} - 2\vec{S}_2$ تؤثر في النقطة أ (١، ١). برهن باستخدام العزم أن خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين (١، ٢) ، (٤، ٦)



- ١٢) الشكل المقابل يمثل شخص يحمل بيده ثقل. فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة أ يساوى ٨٠ نيوتن متر أوجد عزم الثقل حول نقطة ب

- ١٣) في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة و



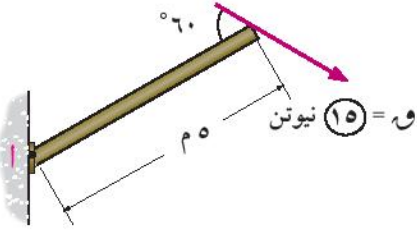
- ١٤) تؤثر القوة $\vec{W}$ في المستوى س ص على المثلث أ و ب. فإذا كان القياس الجبرى لعزم $\vec{W}$ بالنسبة للنقطة و يساوى ٨٤ نيوتن م، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة أ يساوى ١٠٠ نيوتن م، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة ب يساوى صفر. عين $\vec{W}$

- ١٥) أب جد $\vec{r}$ مربع طول ضلعه ١٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٣، ٥، ٨، ٢٦٥ ث. كجم فى اتجاهات أب، ب، ج، $\vec{r}$ ، $\vec{r}$ على الترتيب. أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى:

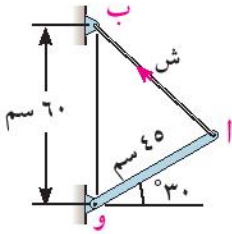
أ) بالنسبة للنقطة أ

ب) بالنسبة للنقطة ب

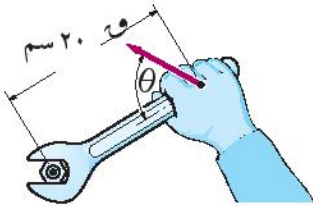
ج) بالنسبة لمركز المربع



- ١٦) الشكل المقابل يمثل تأثير قوة ١٥ نيوتن على ذراع مثبتة بمفصل عند أ. أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطة أ.



- ١٧) فى الشكل المقابل الشد فى الخيط أب مقداره ١٥٠ نيوتن أوجد القياس الجبرى لعزم قوة الشد بالنسبة للنقطة و.



- ١٨) إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار يساوى ٤٠٠ نيوتن.سم أوجد اقل قيمة للقوة و وقيمة θ التى تحقق دوران المسمار.

القوى المستوية

coplanar forces

الوحدة

٢

مقدمة الوحدة

في دراستنا السابقة لمجموعة القوى المستوية المؤثرة علي نقطة مادية، كانت خطوط عمل هذه القوى تتلاقى في نقطة مادية واحدة، وبالتالي فإن خط عمل محصلة هذه القوى يمر بنقطة واحدة هي نقطة التلاقي المشتركة لهذه المجموعة من القوى. وفي هذه الوحدة سوف نتناول مجموعة القوى التي تؤثر علي جسم متماسك حيث أن خطوط عمل هذه القوى لا تتلاقى في نقطة واحدة بالضرورة.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف القوى المتوازية المستوية
- يعين خط عمل محصلة قوتين متوازيتين عندما تكونان في اتجاه واحد أو في اتجاهين مختلفين.
- يعين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت القوة الأخرى والمحصلة.
- يوجد عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة.
- يوجد محصلة مجموعة من القوى المتوازية المستوية.
- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.
- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوة متوازية حول نقطة يساوي صفر إذا كانت محصلتهما تمر بهذه النقطة.
- يستنتج أن مجموع عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة يساوي صفر إذا تلاشت محصلة هذه القوى.
- يحدد الشروط العامة لاتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية.
- اتزان مجموعة من القوى المتوازية.
- اتزان مجموعة من القوى الغير المتوازية والغير متلاقية في نقطة.
- يحل تطبيقات متنوعة على اتزان سُلّم أو قضيب على أرض أفقية خشنة وحائط رأسي أملس أو وتد.

المصطلحات الأساسية

pnlley	يكرة	Parallel forces	قوى متوازية
Friction	الاحتكاك	Resultant	محصلة
General Equilibrium	الاتزان العام	Magnitude	مقدار
Vertical Reaction	رد فعل عمودي	Norm	معيار
	مركبة جبرية	Point of action	نقطة تأثير
Horizontal Component	مركبة أفقية	Reaction	رد فعل
Vertical Component	مركبة رأسية	Weight	وزن
Equilibrium of original body	اتزان جسم جاسئ	Parallel	متوازيان
triangle of force	مثلث قوى	Support	حامل (وتد)
		Beam	سقالة
		Tension	شد

الأدوات والوسائل

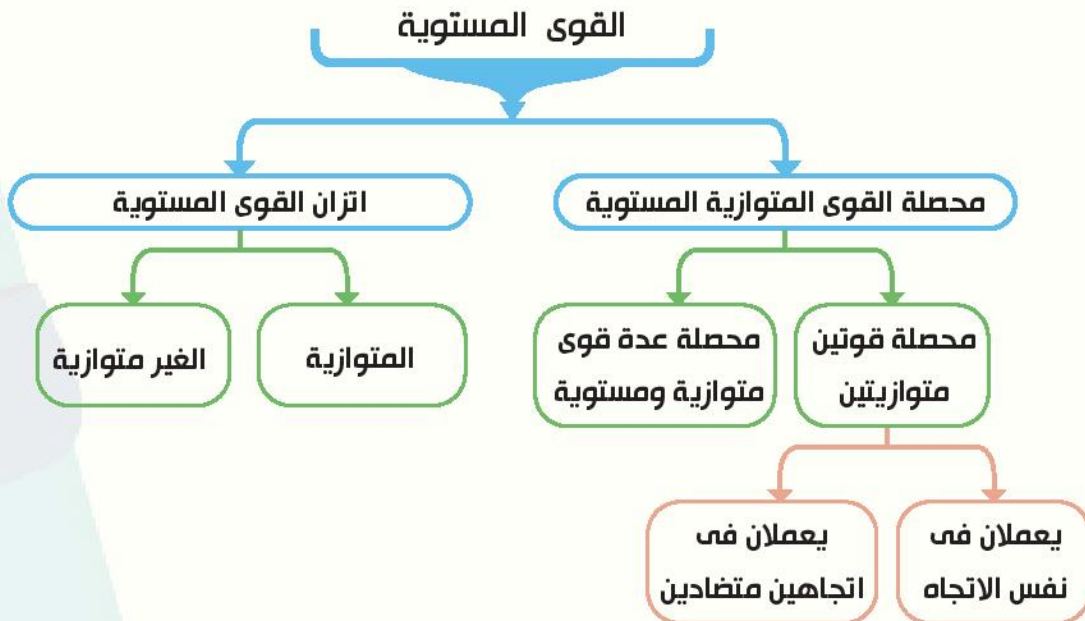
آلة حاسبة علمية .

دروس الوحدة

(١-٢): محصلة القوى المتوازية المستوية .

(٢-٢): اتزان مجموعة من القوى المستوية .

مخطط تنظيى للوحدة



محصلة القوى المتوازية المستوية

Resultant of a parallel coplanar forces

سوف تتعلم

- محصلة قوتين متوازيتين وفي نفس الاتجاه.
- محصلة قوتين متوازيتين وفي اتجاهين متضادين.
- محصلة عدة قوى متوازية ومستوية.

عمل تعاوني

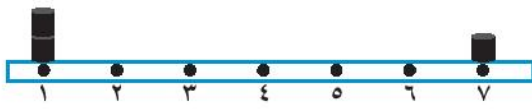


شكل (١)

شكل (١) يوضح مسطرة خشبية

مدرجة من ١ إلى ٧ موضوع عليها حجران متماثلان عند طرفي المسطرة.

(١) عين موضع نقطة على المسطرة يمكن تعليق المسطرة منها. بحيث تتزن أفقياً.



شكل (٢)

(٢) إذا وضع ثقلان عند أحد

الطرفين شكل (٢).

هل يتغير موضع نقطة التعليق

عين موضع نقطة التعليق الجديدة إذا تغير الموضع

أولاً: محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه

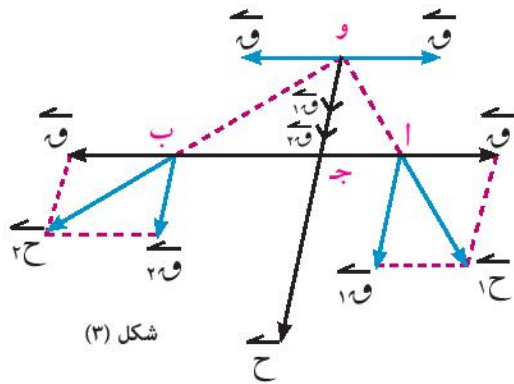
Resultant of two parallel forces having the same direction

تعلمت أن محصلة عدة قوى مستوية $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، ... ، $\vec{F}_n$ متلاقية في نقطة واحدة هو قوة $\vec{H}$ حيث $\vec{H} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ وتمر بنفس النقطة. وفي هذا الدرس سوف نتعلم إيجاد محصلة عدة قوى متوازية ومستوية .

نبدأ بإيجاد محصلة قوتين متوازيتين ومستويتين ولهما نفس الاتجاه.

بفرض $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ قوتان متوازيتان ويعملان في نفس الاتجاه ويؤثران في جسم متماسك في نقطتين أ، ب فتكون محصلة القوتين هي $\vec{H}$ حيث:

$$\vec{H} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



شكل (٣)

ولتحديد موضع نقطة تأثير

المحصلة نفرض قوتان

متساويتان في المقدار

ومتضادين في الاتجاه تؤثران

عند أ، ب وهذا لن يغير من

تأثير القوتين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$.

يمكن إيجاد محصلة القوتين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$. عند أ والتي تمثل قطر متوازي الاضلاع

ولتكن $\vec{H}_1$ كذلك $\vec{H}_2$ محصلة القوتين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ عند ب.

وبفرض أن خطي عمل المحصلتين $\vec{H}_1$ ، $\vec{H}_2$ يتقاطعان عند نقطة و.

المصطلحات الأساسية

Parallel	قوى متوازية
Resultant	محصلة
Magnitude	مقدار
Norm	معيار
Point of action	نقطة تأثير

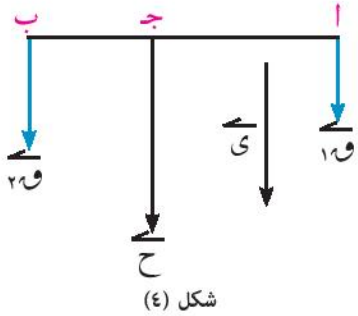
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فيمكن استبدال القوة $\vec{C}$ بمركبتها الاصليين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ كذلك يمكن استبدال القوة $\vec{C}$ بمركبتها الاصليين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$.
القوى المؤثرة عند نقطة (و) هي: $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ وتعملان في اتجاه $\vec{C}$ (الموازي لخط عمل القوتين الاصليتين)
والقوتان $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ وتعملان في اتجاهين متضادين حيث يمكن حذفهما دون حدوث أى تغير فى تأثير القوتين $\vec{F}_1$ ،
 $\vec{F}_2$ عند نقطة (و). القوتان $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ المؤثرتان عند نقطة (و) تعملان في اتجاه $\vec{C}$ ويكون لهما نفس تأثير القوتين
 $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ المؤثرتان عند أ ، ب وبالتالي فإن محصلتهما هي $\vec{C} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ وتؤثر أيضًا في اتجاه $\vec{C}$
وحيث أن القوى $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، $\vec{C}$ متوازية فإن

$$(1) \quad \frac{F_1}{C} = \frac{a}{b} \quad , \quad (2) \quad \frac{F_2}{C} = \frac{b}{a}$$

بقسمة (٢) على (١) فإن: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{F_1}{F_2} \times \frac{a}{b} = \frac{F_1}{F_2} \times \frac{a}{b}$ أى أن $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{b}$



ومن ذلك فإن: $F_1 \times a = F_2 \times b$

فى شكل (٤) يأخذ متجه وحدة $\vec{U}$ فى اتجاه القوتين فإن:

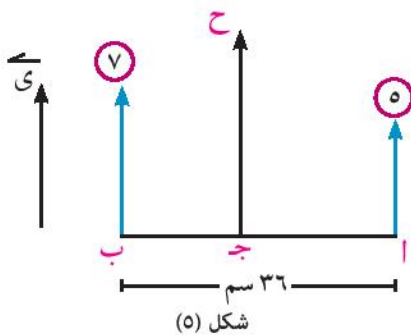
$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{U} \quad , \quad \vec{F}_2 = F_2 \vec{U}$$

∴ $\vec{C} = (F_1 + F_2) \vec{U}$ مما يعنى أن المحصلة تكون فى اتجاه القوتين

ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين أى أن:

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه هي قوة تعمل فى إتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية لمعياريهما.

مثال تعيين محصلة قوتين متوازيتين تعملان فى نفس الاتجاه



١ قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أب = ٣٦ سم أوجد محصلة القوتين

الحل

نفرض $\vec{U}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$$\vec{F}_1 = 7 \vec{U} \quad , \quad \vec{F}_2 = 5 \vec{U}$$

مقدار واتجاه المحصلة:

$$\vec{C} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 7 \vec{U} + 5 \vec{U} = 12 \vec{U}$$

تعيين نقطة تأثير المحصلة

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة ج $\exists \vec{C} = \vec{C}$

$$\frac{7}{5} = \frac{a}{b-36} \quad \text{أى أن} \quad \frac{7}{5} = \frac{a}{b-36}$$

$$\therefore 502 = 7a - 252 \quad \text{أى أن} \quad 7a = 754 \quad \therefore a = 108 \text{ سم}$$

أى أن مقدار المحصلة يساوى ١٢ نيوتن ويعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين وتؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٢١ سم

٩ حاول أن تحل

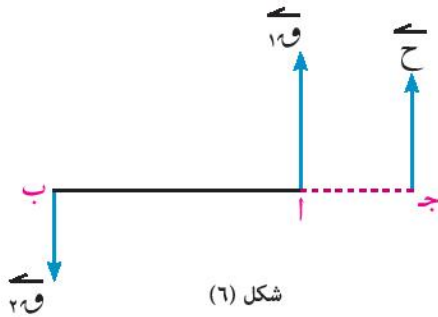
- ١ قوتان متوازيتان يعملان في نفس الاتجاه مقدارهما ٤، ٦ نيوتن تؤثران في نقطتين أ، ب حيث أ ب = ٢٥ سم. أوجد محصلة القوتين
- تفكير ناقذ: إذا كانت القوتان متساويتان فأين تقع نقطة تأثير المحصلة.

تعلم



محصلة قوتين متوازيتين ومتضادين في الاتجاه

Resultant of two parallel forces having opposite directions



بالمثل في شكل (٦) إذا كان F_1 ، F_2 قوتان متوازيتان وغير متساويتان وتعملان في اتجاهين متضادين وتؤثران في نقطتين أ، ب من جسم متماسك وكانت محصلتهما F فإن: $F = F_1 + F_2$ وتؤثر في نقطة ج التي تقسم أ ب من الخارج بنسبة عكسية بمعايير القوتين.

$$F_1 \times \text{أ ج} = F_2 \times \text{ب ج} \quad \text{أي أن:}$$

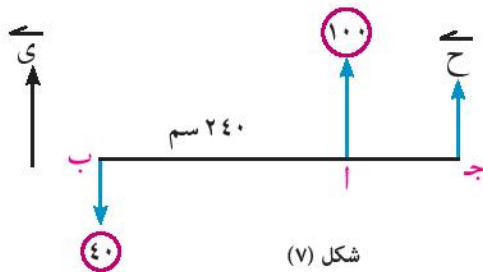
$$\text{إذا كان } F_1 < F_2 \quad \text{فإن } \frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{أ ج}}{\text{ب ج}}$$

أي أن: محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين في الاتجاه وغير متساويتين المعيار هي قوة تعمل في اتجاه القوة الأكبر معيارًا ويساوي معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطي عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارًا بنسبة عكسية لمعياريهما.

مثال

تعيين محصلة قوتين متوازيتين يعملان في اتجاهين مختلفين

- ٢ قوتان متوازيتان ومتضادان في الاتجاه مقدارهما ٤٠، ١٠٠ نيوتن والمسافة بين خطي عمليهما ٢٤٠ سم. أوجد محصلتهما.



الحل

نفرض F متجه وحدة في اتجاه القوة الكبرى

$$\therefore F_1 = 100 \text{ ن}، F_2 = -40 \text{ ن}$$

مقدار واتجاه المحصلة

$$\therefore F = F_1 + F_2 = 100 \text{ ن} - 40 \text{ ن} = 60 \text{ ن}$$

تعيين نقطة تأثير المحصلة نفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة ج $\Rightarrow$ حيث $\frac{\text{أ ج}}{\text{ب ج}} = \frac{40}{100}$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{\text{أ ج}}{1 + 240} \quad \therefore 480 + 2 \text{ أ ج} = 160 \quad \therefore \text{أ ج} = 160 \text{ سم}$$

أي أن مقدار المحصلة يساوي ٦٠ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة ١٠٠ نيوتن وتعمل في نقطة $\Rightarrow$ ب أ وتقع خارج أ ب وتبعد عن أ مسافة ١٦٠ سم

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد محصلة قوتان متوازيتان ومتضادان في الاتجاه مقدارهما ٧، ١٢ نيوتن تؤثران في أ، ب حيث $اب = ٢٠$ سم

تفكير ناقذ: ماذا تقول عن محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين ومتضادين في الاتجاه

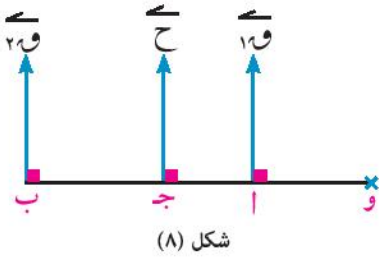
«مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة»

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

نبدأ بآثبات هذه النظرية في حالة خاصة عندما تكون المجموعة مكونة من قوتين فقط.

(١) إذا كانت القوتان متحدتي الاتجاه

نعتبر نقطة مثل (و) واقعة في مستوى القوتين ونقيم منها عمودًا مشتركًا على خطى عمل القوتين $١و$ ، $٢و$ فيقطعهما في النقطتين أ، ب على الترتيب ويقطع خط عمل المحصلة في نقطة ج فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لنقطة و



شكل (٨)

$$= - ١و \times وا - ٢و \times وب = - (١و \times وج - ٢و \times اج) - (٢و \times وج + ٢و \times جب)$$

(١)

$$= - ١و \times وج + ١و \times اج - ٢و \times وج - ٢و \times جب$$

$$\text{ولكن: } \frac{١و}{٢و} = \frac{ب ج}{ا ج} = \text{أى أن } ١و \times اج = ٢و \times جب$$

$$\text{بالتعويض فى (١) } ٠ = ١و \times وج - ٢و \times وج - ٢و \times جب$$

$$= - (١و + ٢و) \times وج$$

$$= - ح \times وج = \text{عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و}$$

(٢) إذا كانت القوتان متضادتين فى الاتجاه

بفرض $١و < ٢و$ فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لنقطة و

$$= ١و \times وا - ٢و \times وب$$

$$= ١و (وج + جا) - ٢و (وج + جب)$$

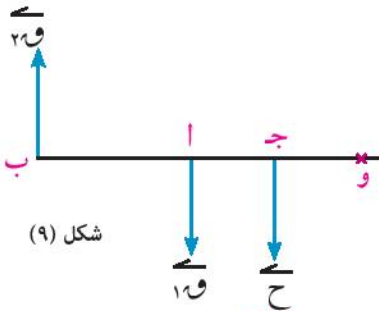
$$= ١و \times وج + ١و \times جا - ٢و \times وج - ٢و \times جب$$

$$\text{ولكن } \frac{١و}{٢و} = \frac{ب ج}{ا ج} = \text{أى أن } ١و \times جا = ٢و \times جب \text{ وبالتعويض فى (٢)}$$

$$٠ = ١و \times وج - ٢و \times وج$$

$$= (١و - ٢و) \times وج$$

$$= ح \times وج = \text{عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و}$$



شكل (٩)

(٢)

(٣) أما إذا كانت المجموعة تتكون من أى عدد محدود من القوى (أكثر من قوتين) والتي لاتنعدم محصلتها فيمكن إثبات النظرية بتحصيل أى قوتين من قوى المجموعة على التوالى حتى يتم تحصيل كافة قوى المجموعة إلى قوتين وتطبيق النظرية عليها.

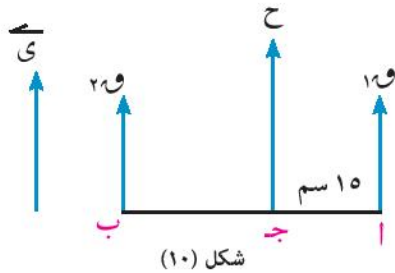
تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى والمحصلة

مثال

٣ قوتان متوازيتان مقدارهما ٢٠ ، و نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب ومقدار محصلتهما ٣٥ نيوتن والبعد بين خطى عمل القوة المعلومة والمحصلة يساوى ١٥ سم. أوجد $\vec{W}$ فى كل من الحالتين:

أ القوة المعلومة والمحصلة فى نفس الاتجاه. ب القوة المعلومة والمحصلة فى عكس الاتجاه.

الحل



أ نفرض $\vec{Y}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$$\therefore \vec{H} = 35 \vec{Y}, \vec{W} = 20 \vec{Y}$$

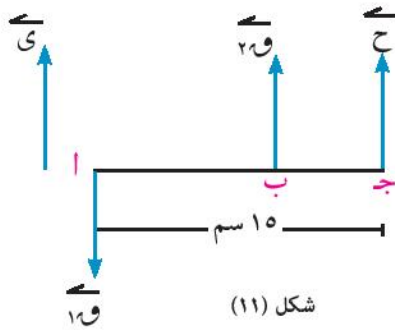
$$\therefore \vec{H} = \vec{W} + \vec{Y} \text{ أى أن } 35 \vec{Y} = 20 \vec{Y} + \vec{W}$$

$$\therefore \vec{W} = 15 \vec{Y}$$

أى أن القوة $\vec{W}$ مقدارها ١٥ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة المعلومة والمحصلة
∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة ج يساوى عزم المحصلة بالنسبة لنقطة ج = صفر

$$\therefore 20 \times 15 - 15 \times \text{ب ج} = \text{صفر}$$

∴ ب ج = ٢٠ سم أى أن القوة $\vec{W}$ تؤثر فى نقطة ب على بعد ٣٥ سم من أ



ب نفرض $\vec{Y}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$$\therefore \vec{H} = 35 \vec{Y}, \vec{W} = 20 \vec{Y}$$

$$\therefore \vec{H} = \vec{W} + \vec{Y} \text{ أى أن } 35 \vec{Y} = 20 \vec{Y} + \vec{W}$$

$$\therefore \vec{W} = 15 \vec{Y}$$

أى أن القوة $\vec{W}$ مقدارها ٥٥ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة المحصلة

∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة ج يساوى عزم المحصلة بالنسبة لنقطة ج = صفر

$$\therefore 20 \times 15 - 55 \times \text{ب ج} = \text{صفر أى أن ب ج} = \frac{60}{11} \text{ سم}$$

أى أن القوة $\vec{W}$ تؤثر فى نقطة ب على بعد $\frac{60}{11}$ سم من أ

٤ حاول أن تحل

٣ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بعد ٥١ سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان أولاً: فى اتجاه واحد ثانياً: فى اتجاهين متضادين

عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة

مثال



٤

الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على $\overline{AB}$ أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة إلى

أ نقطة أ

ب نقطة جـ

الحل

أ

القوة ٥ نيوتن تؤثر في نقطة أ فيكون عزمها بالنسبة لنقطة أ مساوى صفر

وبمراعاة اتجاه دوران القوى بالنسبة لنقطة أ (مع أو عكس اتجاه دوران عقارب الساعة)

فإن القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة أ

$$= 16 \times 2 + 9 \times 4 - 4 \times 6 = 20 \text{ نيوتن} \cdot \text{سم}$$

ب القوة ٦ نيوتن تؤثر في نقطة جـ فيكون عزمها بالنسبة لنقطة جـ مساوى الصفر.

ويكون القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ

$$= 12 \times 2 + 5 \times 4 - 4 \times 5 = 24 \text{ نيوتن} \cdot \text{سم}$$

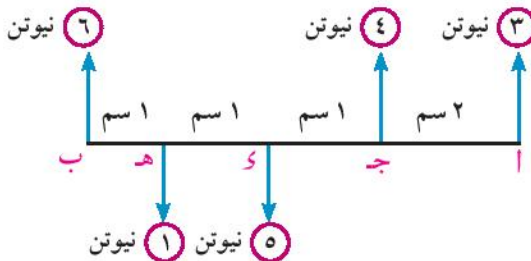
٥ حاول أن تحل

٤

الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على $\overline{AB}$ أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة

أ نقطة أ

ب نقطة منتصف $\overline{AB}$



محصلة مجموعة من القوى المتوازية والمستوية

مثال



٥

أ، ب، ج، د، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث:

أ ب : ب ج : ج د : د هـ = ٢ : ٣ : ٤ : ٧ أثرت خمس قوى متوازية وفي نفس الاتجاه مقاديرها ٣٠، ٥٠، ٢٠، ٧٠، ٤٠ نيوتن في النقط أ، ب، ج، د، هـ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى

الحل

بفرض

$$\text{أب} = 2 \text{ سم}، \text{ ب ج} = 3 \text{ سم}$$

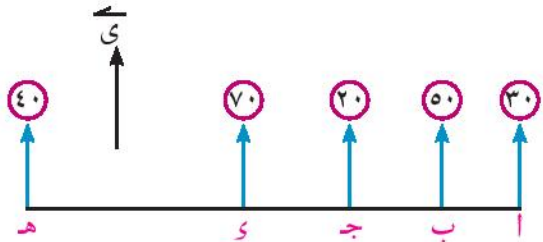
$$\text{ج د} = 4 \text{ سم}، \text{ د هـ} = 7 \text{ سم}$$

وبفرض $\vec{Y}$ متجه وحدة في اتجاه القوى

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$$

$$= 30\vec{Y} + 50\vec{Y} + 20\vec{Y} + 70\vec{Y} + 40\vec{Y} = 210\vec{Y} \text{ نيوتن}$$

أي أن مقدار المحصلة ٢١٠ نيوتن في نفس اتجاه القوى



شكل (١٢)

ولإيجاد نقطة تأثير المحصلة، نفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة و $\exists \overline{أه}$

∴ مجموع عزوم القوى حول أ يساوى عزم المحصلة حول أ

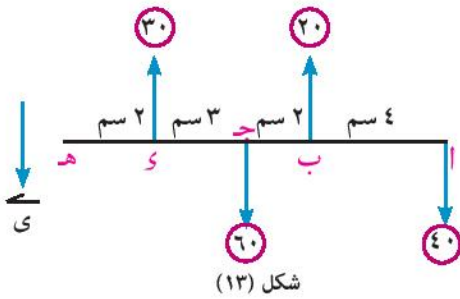
$$\therefore ٥٠ \times ٢ \text{ سم} - ٢٠ \times ٥ \text{ سم} - ٧٠ \times ٩ \text{ سم} - ٤٠ \times ١٦ \text{ سم} = ٢١٠ \times \overline{أه}$$

$$\frac{\overline{أه}}{١٦} = \frac{٧٠}{٢١٠} \text{ أي أن المحصلة تؤثر في نقطة (و) التي تقسم } \overline{أه} \text{ من الداخل بنسبة } ٧:١٦ \text{ من جهة أ}$$

٤ حاول أن تحل

٥ إذا كانت ج، د، هـ $\exists \overline{أب}$ بحيث أ ج: د: هـ: ب = ١: ٣: ٥: ٧ أثرت قوى متوازية وفي نفس

الاتجاه ومتساوية في المقدار في النقط أ، ج، د، هـ، ب برهن أن المحصلة تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٣: ٥



مثال محصلة عدة قوى متوازية

٦ في الشكل المقابل (شكل ١٣) أ، ب، ج، د، هـ خمس نقط تقع

على خط مستقيم واحدا أثرت القوتان ٢٠، ٣٠ نيوتن رأسيًا لأعلى

عند النقطتين ب، د وأثرت القوتان ٤٠، ٦٠ نيوتن رأسيًا لأسفل

عند النقطتين أ، ج. أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثيرة المحصلة.

الحل

بفرض $\overrightarrow{و}$ متجه وحدة لأسفل كما في شكل (١٣)

$$\therefore \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{و١} + \overrightarrow{و٢} + \overrightarrow{و٣} + \overrightarrow{و٤}$$

$$= ٣٠ \cdot \overrightarrow{و١} - ٦٠ \cdot \overrightarrow{و٢} + ٢٠ \cdot \overrightarrow{و٣} - ٤٠ \cdot \overrightarrow{و٤} = ٥٠ \cdot \overrightarrow{و١}$$

نفرض المحصلة تؤثر في نقطة على $\overline{أه}$ تبعد س سم من أ

∴ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

$$- ٥٠ \times س = ٤٠ \times ٤ - ٦٠ \times ٦ + ٢٠ \times ٩$$

أي أن المحصلة تؤثر في نقطة على $\overline{أه}$ وعلى بعد ٠,٢ سم من أ

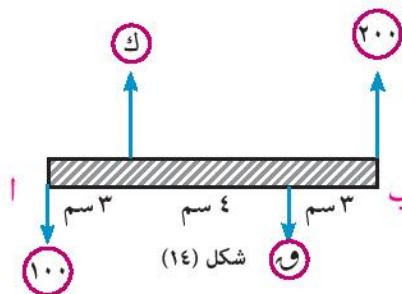
٤ حاول أن تحل

٦ الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف $\overline{أب}$. أثرت عليه القوى

المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت مقدار المحصلة ٣٠٠

نيوتن وتعمل لأعلى وتؤثر في نقطة على القضيب تبعد ٤ متر من أ.

أوجد و، ك



مثال البرهنة النظرية

٧ $\overrightarrow{و١}$ ، $\overrightarrow{و٢}$ قوتان متوازيتان ويعملان في نفس الاتجاه تؤثران في نقطتين أ، ب ومحصلتها $\overrightarrow{ح}$ إذا تحركت القوة

$\overrightarrow{و٢}$ موازية لنفسها في اتجاه $\overline{أب}$ مسافة س سم أثبت أن محصلة القوتين تتحرك في اتجاه $\overline{أب}$ مسافة مقدارها

$$\left(\frac{٢٢}{٢٢ + ١٢} \right) س$$

الحل

في الحالة الأولى:

نفرض المحصلة تؤثر في نقطة جـ

∴ عزم المحصلة عند أ = مجموع عزوم القوى عند أ

$$\therefore \text{ح} \times \text{أج} = \text{و} \times \text{أب} \quad (1)$$

في الحالة الثانية:

إذا تحركت القوة $\vec{و}$ موازية لنفسها في اتجاه $\overrightarrow{أب}$ مسافة س سم.

نفرض المحصلة تؤثر في جـ

∴ عزم المحصلة عند أ = مجموع عزوم القوى عند أ

$$\therefore \text{ح} \times \text{أج} = \text{و} \times \text{أب} \quad (2)$$

بطرح (١) من (٢)

$$\therefore \text{ح} (\text{أج} - \text{أب}) = \text{و} (\text{أب} - \text{أب})$$

$$\therefore \text{ح} \times \text{جج} = \text{و} \times \text{س}$$

$$\therefore \text{جج} = \frac{\text{و}}{\text{ح}} \times \text{س} = \left(\frac{\text{و}}{\text{و} + \text{و}} \right) \text{س}$$

حاول أن تحل

٧ قوتان متوازيتان وفي نفس الاتجاه مقدارهما $\vec{و}$ و $\vec{و}$ تؤثران في نقطتين أ، ب إذا تحركت القوة $\vec{و}$ موازية نفسها في اتجاه $\overrightarrow{أب}$ مسافة س سم اثبت أن محصلة القوتين تتحرك في نفس الاتجاه مسافة قدرها $\frac{2}{3}$ س

مثال

٨ تؤثر القوتان $\vec{و}_1 = \vec{و}_2 = ٣ \text{ ص}$ ، $\vec{و}_3 = ٤ \text{ ص}$ في النقطتين أ(١، ٣)، ب(٤، ٩) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overrightarrow{أب}$.

الحل

$$\vec{و}_3 = \vec{و}_1 + \vec{و}_2 = ٩ \text{ ص} - ٦ \text{ ص}$$

نلاحظ أن $\vec{و}_1 = ٢ \text{ ص}$ أي أن القوتين متوازيتان وفي نفس الاتجاه

نفرض المحصلة تؤثر في نقطة جـ $\exists \text{أب}$ حيث $\frac{2}{1} = \frac{\text{أج}}{\text{أب}}$

$$\text{ومن قانون نقطة التقسيم جـ} = \left(\frac{١٢ \text{س} + ٢٢ \text{ص}}{٢٢ + ١٢}, \frac{١٢ \text{س} + ٢٢ \text{ص}}{٢٢ + ١٢} \right)$$

$$\therefore \text{ج} = \left(\frac{٣ \times ١ + ٩ \times ٢}{١ + ٢}, \frac{١ \times ١ + ٤ \times ٢}{١ + ٢} \right) = (٧, ٣)$$

حاول أن تحل

٨ تؤثر القوتان $\vec{و}_1 = ٣ \text{ ص} - \vec{و}_2 = ٩ \text{ ص}$ ، $\vec{و}_3 = ٣ \text{ ص} + \vec{و}_4 = ٩ \text{ ص}$ في النقطتين أ(١، ٠)، ب(١، ٢) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overrightarrow{أب}$.

تمارين ٢ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١ قوتان متوازيتان ومتضادتين في الاتجاه مقدارهما ٧، ١٢ نيوتن فإن مقدار محصلتهما يساوى:
 أ ١٩ نيوتن ب ١٢ نيوتن ج ٧ نيوتن د ٥ نيوتن
- ٢ قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ٧، ١٠ نيوتن تؤثران في النقطتين أ، ب حيث $AB = ٥١$ سم. فإذا كانت محصلتهما تؤثر في نقطة ج فإن $AG =$
 أ ٣٠ سم ب ٢٧ سم ج ٢١ سم د ١٢ سم
- ٣ قوتان متوازيتان ومتحدتا في الاتجاه مقدارهما ٥، ٧ نيوتن فإن مقدار محصلتهما تساوى
 أ ١٢ ب ٦ ج ٢ د ١

اجب عن الأسئلة الآتية:

في التمارين ٤ - ٦ قوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ متوازيتان وتؤثران في النقطتين أ، ب فإذا كانت محصلتهما $\vec{R}$ تؤثر في نقطة ج $\Rightarrow AB$

٤ أوجد مقدار واتجاه المحصلة وطول $\vec{AG}$ في كل مما يأتي (القوتان في نفس الاتجاه)

- أ $\vec{F}_1 = ٩$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ١٧$ نيوتن، $AB = ١٣$ سم
 ب $\vec{F}_1 = ٢٣$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ١٥$ نيوتن، $AB = ٥٧$ سم
 ج $\vec{F}_1 = ١٦$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ١٠$ نيوتن، $AB = ٣٠$ سم

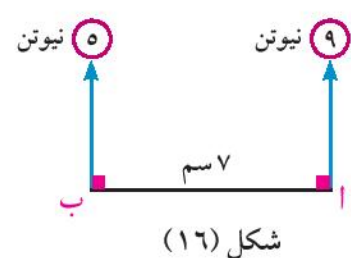
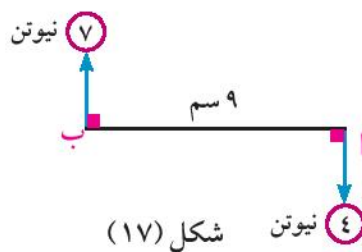
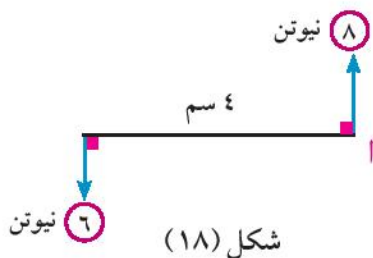
٥ إذا كانت $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ في نفس الاتجاه اجب عما يأتي:

- أ $\vec{F}_1 = ٨$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ١٣$ نيوتن، $AG = ١٠$ سم أوجد $\vec{F}_3$ ، AB
 ب $\vec{F}_1 = ٦$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ٢٤$ سم، $AB = ٥٦$ سم أوجد $\vec{F}_3$ ، AG
 ج $\vec{F}_1 = ٦$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ٩$ سم، $AB = ٨$ سم أوجد $\vec{F}_3$ ، AG

٦ إذا كانت $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ متضادان في الاتجاه اجب عما يأتي:

- أ $\vec{F}_1 = ١٥$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ٢٠$ نيوتن، $AG = ٧٠$ سم أوجد $\vec{F}_3$ ، AB
 ب $\vec{F}_1 = ٦$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ٢٤$ سم، $AB = ٥٦$ سم أوجد $\vec{F}_3$ ، AG
 ج $\vec{F}_1 = ٦$ نيوتن، $\vec{F}_2 = ٩$ سم، $AB = ٨$ سم أوجد $\vec{F}_3$ ، AG

٧ في كل مما يأتي أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبعُد نقطة تأثيرها عن نقطة أ



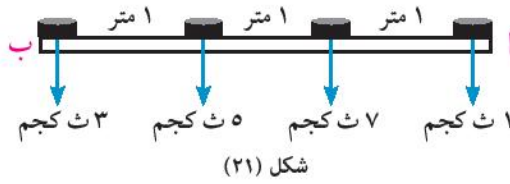
٨ قوتان متوازيتان ومتضادان في الاتجاه مقدارهما ٤، ٩ نيوتن تؤثران في نقطتين أ، ب حيث $AB = ١٥$ سم. أوجد محصلتهما.

٩ إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان ٧ نيوتن، ٥ نيوتن تؤثر في نقطة تبعد $\frac{1}{3}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطي عمل القوتين

١٠ قوتان متوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{AB}$ والكبرى تؤثر في الطرف ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم، فما طول القضيب

١١ أ، ب، ج، د، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث $AB = ٤$ سم، $BC = ٦$ سم، $CD = ٨$ سم، $DE = ١٠$ سم. أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠، ٣٠، ٥٠، ٨٠، ٤٠ ث كجم في النقاط أ، ج، د، هـ، ب، هـ على الترتيب وفي اتجاه عمودي على $\overline{AH}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه، والقوتان الأخريان في الاتجاه المضاد. عين محصلة المجموعة

١٢ في شكل (٢١) وضعت أربعة ائقال مقدارها ١، ٧، ٥، ٣ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل. عين نقطة يمكن ان يعلق القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً.



١٣ قوتان متوازيتان ومتحدتان الاتجاه مقاديرها ٥، ٨ نيوتن تؤثران في نقطتين أ، ب حيث $AB = ٣٩$ سم. إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ٩ في نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات. أوجد ٩

١٤ أ، ب، ج ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقي حيث $AB = ١$ متر، $AC = ٣$ متر $B \in \overline{AC}$. أثرت القوى التي مقاديرها ٢، $\frac{1}{3}$ نيوتن رأسياً لأسفل في النقطتين أ، ج على الترتيب كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن في نقطة ب رأسياً لأعلى. أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ

اتزان مجموعة من القوى المستوية

Equilibrium of a system of coplanar forces

قاعدة

سوف نتعلم

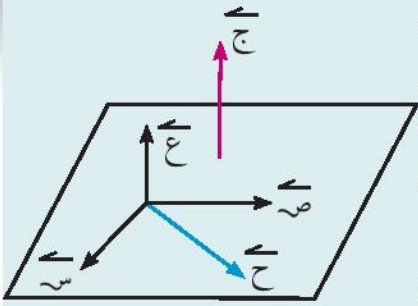
اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية.

يكون الجسم المتماسك الواقع تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية في حالة اتزان استاتيكي إذا تحقق الشرطان التاليان:

(١) أن ينعلم متجه محصلة القوى للمجموعة $(\vec{C} = \vec{0})$ (لا توجد حركة انتقالية)

(٢) أن ينعلم عزوم القوى بالنسبة لنقطة $(\vec{C} = \vec{0})$ (لا توجد حركة دورانية)

وهذه الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية



شكل (١٩)

الشكل (١٩): يبين مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة $(\vec{S}, \vec{V}, \vec{C})$ بحيث تقع $\vec{S}$ في مستوى القوى، وبالتالي يكون $\vec{C}$ عمودياً على هذا المستوى. وبذلك يمكن تحليل متجه المحصلة $\vec{C}$ في اتجاهي $\vec{S}$ ، $\vec{V}$ ، بينما متجه العزم $\vec{C}$ يوازي متجه الوحدة $\vec{C}$

$$\text{لذلك فإن: } \vec{C} = \vec{S} + \vec{V} + \vec{C}, \quad \vec{C} = \vec{C}$$

حيث: $\vec{S}$ = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة في اتجاه $\vec{S}$ ،

$\vec{V}$ = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة في اتجاه $\vec{V}$ ،

$\vec{C}$ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم قوى المجموعة في اتجاه $\vec{C}$.

ولذلك فإن الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة هذه القوى هو:

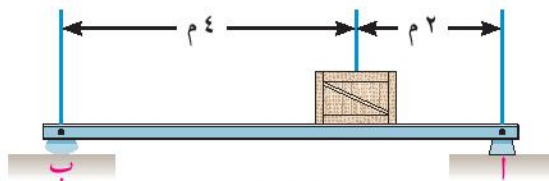
$$\vec{S} = 0, \quad \vec{V} = 0, \quad \vec{C} = 0 \quad \text{وأيضاً } \vec{C} = 0$$

المصطلحات الأساسية

رد فعل	Reaction
وزن	Weight
متوازيان	Parallel
حامل (وتد)	Support
سقالة	Beam
شد	Tension
بكرة	Pulley
دوران	Rotate

اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية

مثال
المستوية



شكل (٢٠)

الشكل المقابل يوضح

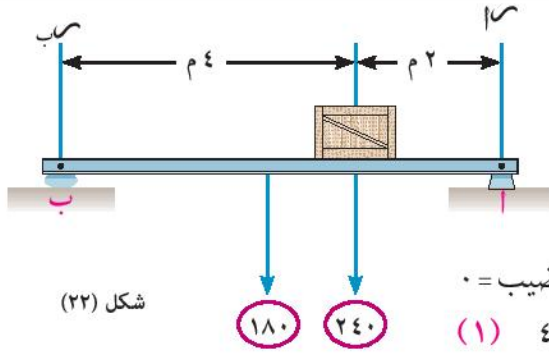
لوح خشبي كتلته ٣٠ كجم لكل متر من طوله يرتكز في وضع أفقي

على حاملين أ، ب ويحمل صندوق كتلته ٢٤٠ كجم. أوجد الضغط الواقع على كل حامل.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.
معمل ميكانيكا

الحل



شكل (٢٢)

حيث أن اللوح منتظم فإن وزنه يؤثر في نقطة منتصفه

كتلة اللوح = $6 \times 30 = 180$ كجم

∴ وزن اللوح = 180 ث كجم

رد الفعل عند كل حامل يساوي الضغط عليه

مجموع القياسات الجبرية للقوى في الاتجاه العمودي على القضيب = 0

$$\therefore 180 + 240 = B + 180 \quad (1) \quad 420 = B + 180$$

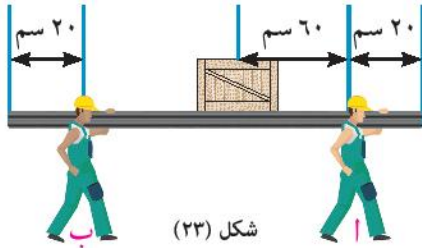
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة ب = صفر

$$- 180 \times 3 - 240 \times 4 + 180 \times 6 = 0 \quad \therefore 250 = 180 \text{ ث كجم}$$

∴ بالتعويض في (1) تكون $B = 170$ ث كجم

تفكير ناقد: ماذا يحدث لرد الفعل عند كل من أ، ب كلما اقترب الصندوق من نقطة أ

٦ حاول أن تحل



شكل (٢٣)

١ رجلان أ، ب يحملان لوح من الخشب طوله ٢ متر ووزنه

١٦ كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقا وزنه ٢٤ ث كجم كما

هو موضحا في شكل (٢٣) أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم

عين على أي نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى

يتساوى الضغطين.

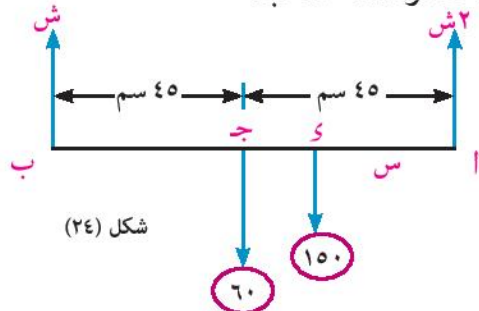
مثال

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

٢ أ ب قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن معلق في وضع أفقي بخيطين رأسيين من طرفيه أ، ب اين

يعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند أ ضعف مقداره الشد عند ب.

الحل



شكل (٢٤)

نفرض أن الثقل ١٥٠ نيوتن معلق من نقطة تبعد عن أ مسافة

س سم وأن الشد عند ب = ش، الشد عند أ = ٢ ش

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفر

$$\therefore 2 \text{ ش} + \text{ش} - 150 - 60 = 0 \quad \therefore 3 \text{ ش} = 210 \quad \therefore \text{ش} = 70 \text{ نيوتن}$$

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ يساوى صفر ∴ $90 \times \text{ش} - 45 \times 60 + 150 \times \text{س} = 0$

صفر

$$\therefore 70 = 3 \text{ ش} \quad \therefore \text{ش} = 70$$

$$\therefore 150 = 3 \text{ ش} \quad \therefore \text{ش} = 50 \text{ سم}$$

٦ حاول أن تحل

٢ أ ب لوح خشبي منتظم كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند أ والآخر

عند نقطة تبعد ١ متر عن ب. بين على أي بُعد يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكي يتساوى رد الفعل

على الحاملين.

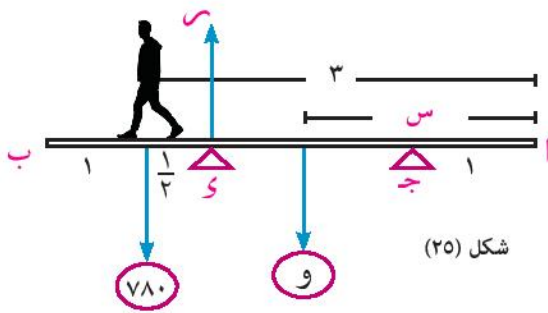
مثال

٣ **أب** لوح خشبي غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند ج، و بحيث $أج = ١$ متر، ب $و = ١ \frac{1}{4}$ متر. فإذا كانت أقصى مسافة يستطيع أن يتحركها رجل وزنه ٧٨٠ نيوتن على اللوح من أ إلى ب دون أن يختل توازن اللوح هي ٣ متر وأقصى مسافة يستطيع أن يتحركها نفس الرجل من ب إلى أ هي $١ \frac{1}{4}$ متر. عين وزن اللوح ونقطة تأثيره.

الحل

نفرض وزن اللوح يساوي (و) نيوتن ويؤثر في نقطة تبعد عن الطرف أ مسافة س متر.

الحالة الأولى:



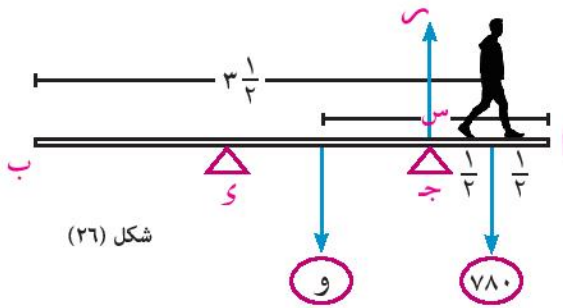
عندما يقطع الرجل أقصى مسافة ٣ متر من أ إلى ب يصبح اللوح على وشك الدوران حول و. أي أن رد فعل الحامل عند ج ينعدم.

∴ مجموع عزوم القوى حول و = صفر

$$٧٨٠ \times \frac{1}{4} - و \times (٢ \frac{1}{4} - س) = صفر$$

$$\therefore و \times (٢ \frac{1}{4} - س) = ٣٩٠ \quad (١)$$

الحالة الثانية:



عندما يقطع الرجل أقصى مسافة $١ \frac{1}{4}$ متر من ب إلى أ يصبح اللوح على وشك الدوران حول ج. أي أن رد فعل الحامل عند و = صفر

∴ مجموع عزوم القوى حول ج = صفر

$$\therefore و \times (١ - س) = ٧٨٠ \times \frac{1}{4} = ١٩٥$$

$$\therefore و \times (١ - س) = ٣٩٠ \quad (٢)$$

من (١)، (٢)

$$\therefore س - ١ = ٢ \frac{1}{4} - س \text{ ومنها } س = ١,٧٥ \text{ متر}$$

وبالتعويض في (٢) نجد أن و = ٥٢٠ نيوتن

أي أن وزن اللوح يساوي ٥٢٠ نيوتن ويؤثر في نقطة تبعد عن الطرف أ مسافة ١,٧٥ متر.

٩ حاول أن تحل

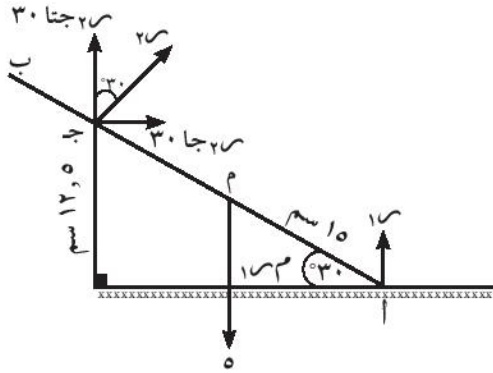
٣ يرتكز قضيب **أب** طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر في نقطة منتصفه في وضع أفقي على حاملين، أحدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة ج تبعد ٣٠ سم عن ب ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب عين قيمة الضغط على كل حامل. وأوجد أيضاً مقدار الثقل الذي يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وما هي قيمة الضغط على ج عندئذ.

مثال

اتزان ساق على مستوى أفقى خشن ووتد أملس

- ٤) أب ساق منتظمة وزنها ٥ ث كجم وطولها ٣٠ سم، ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة، وترتكز عند إحدى نقطتها جـ على وتد أملس، يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢,٥ سم، فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° وتقع فى مستوى رأسى. أوجد:
- أولاً: مقدار قوة رد فعل الوتد.
- ثانياً: معامل الاحتكاك بين الطرف أ والأرض.

الحل



نلاحظ أن أ جـ = ٢٥ سم
الساق متزنة تحت تأثير القوى:
وزن الساق ٥ ث كجم ويعمل رأسياً لأسفل.
رد فعل الطرف أ على الأرض مركبته المتعامدتان ١,٢ م، ٠,١ م.
رد فعل الوتد على القضيب ٢,٢ م، ويكون عمودياً على القضيب عند نقطة التماس جـ.

وبتطبيق شروط الاتزان وهى: $\sum S = 0$ ، $\sum V = 0$ ، $\sum J = 0$

$$\therefore \sum J = 0 \quad \therefore 10 \times 5 \times 0.30 - 25 \times 2.2 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2.2 \quad (1)$$

ومن معادلتى الاتزان: $\sum S = 0$ ، $\sum V = 0$

$$\therefore \sum V = 0 \quad \therefore 2.2 \times 0.30 - 1.2 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1.2 \quad (2)$$

$$\therefore \sum S = 0 \quad \therefore 1.2 \times 0.30 + 2.2 \times 0.30 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.30 \quad (3)$$

$$\therefore \sum S = 0 \quad \therefore 0.30 + 2.2 \times 0.30 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.30 \quad (4)$$

$$\therefore \sum S = 0 \quad \therefore 0.30 + 2.2 \times 0.30 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.30 \quad (5)$$

$$\therefore \sum S = 0 \quad \therefore 0.30 + 2.2 \times 0.30 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.30 \quad (6)$$

$$\therefore \sum S = 0 \quad \therefore 0.30 + 2.2 \times 0.30 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.30 \quad (7)$$

$$\therefore \sum S = 0 \quad \therefore 0.30 + 2.2 \times 0.30 = 0 \quad \therefore \sum S = 0 \quad \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.30 \quad (8)$$

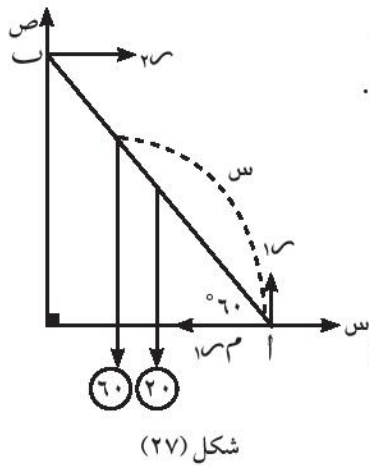
٩ حاول أن تحل

- ٤) أب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠ سم، يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن، ويرتكز عند إحدى نقطته جـ على وتد أملس، يعلو ٢٥ سم عن المستوى الأفقى، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠°. أوجد رد فعل الوتد، وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى، علماً بأن الساق تقع فى مستوى رأسى.

مثال ٥: اتران سلم على مستويين متعامدين أحدهما خشن

٥ سلم منتظم وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسي أملس، أترن السلم في مستو رأسي، وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠°، فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض يساوي $\frac{1}{3\sqrt{2}}$. أثبت أن أقصى مسافة تستطيع فتاة وزنها ٦٠ ث كجم أن تصعد على السلم تساوي نصف طول السلم.

الحل



شكل (٢٧)

السلم متزن تحت تأثير القوى :

وزن السلم ٢٠ ث كجم، ويعمل رأسيًا لأسفل عن منتصفه.

وزن الفتاة ٦٠ ث كجم ويعمل رأسيًا لأسفل على بعد s من قاعدة السلم.

رد فعل الأرض الخشنة على الطرف A ومركبتيه الرأسية r_1 والأفقية r_2 .

رد فعل الحائط الأملس r_3 ويكون عموديًا على الحائط .

وبتطبيق شروط الاتزان وهي :

$$\sum \tau = 0, \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

وبفرض أن طول السلم = L ،

وأن أقصى مسافة تصعد بها الفتاة = s فيكون القضييب على وشك الحركة

$$\therefore r_3 = 60 + 20 = 80 \text{ ثقل كجم} ,$$

$$r_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times 80 = 18.86$$

$$\therefore \frac{40}{3\sqrt{2}} = 80 \times \frac{1}{3\sqrt{2}} = 18.86 \text{ ث كجم (١)}$$

$$\therefore \sum \tau = 0 \text{ جتا } 60^\circ \times 20 + 60 \times s \text{ جتا } 60^\circ - r_2 \times L \text{ جا } 60^\circ = 0 \dots\dots (2)$$

من (١)، (٢) ،

$$\therefore 5L + 30s - \frac{40}{3\sqrt{2}} \times L \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\therefore 30s - 15L = 0 \therefore s = \frac{15}{30}L = \frac{1}{2}L$$

∴ المسافة القصوى التي تصعد بها الفتاة تساوي نصف طول السلم .

٦ حاول أن تحل

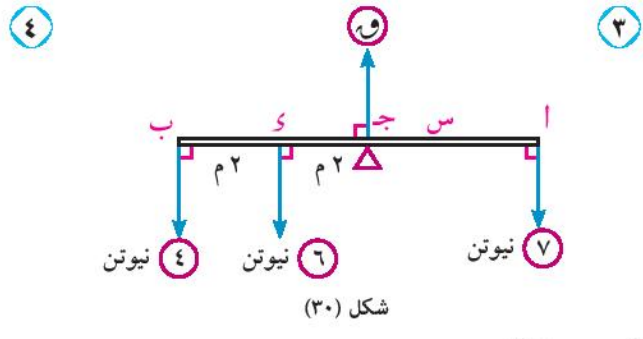
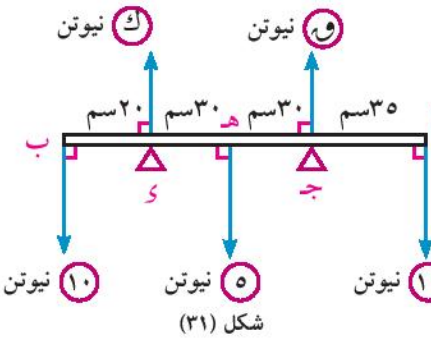
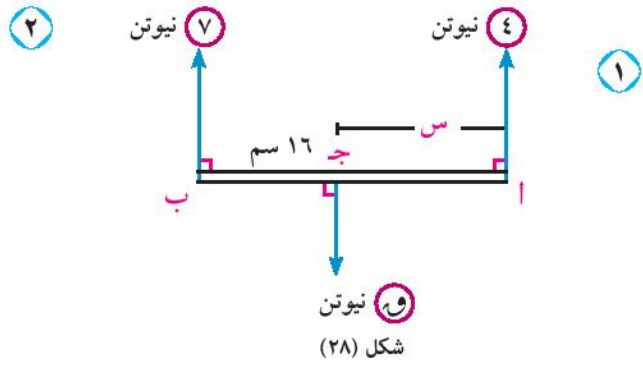
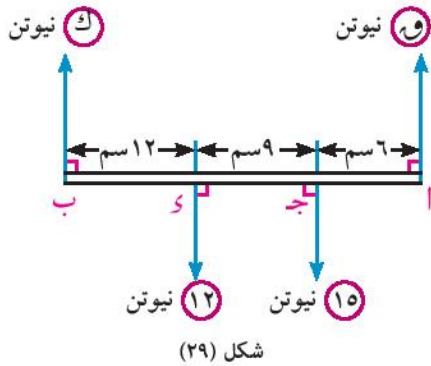
٥ أ ب سلم منتظم وزنه ٣٠ ث كجم، وطوله ٤ أمتار، يرتكز بطرفه A على مستو أفقي أملس، وبطرفه الآخر B على حائط رأسي أملس، اترن السلم في مستو رأسي وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف A بنقطة من المستوى الأفقى، تقع رأسيًا أسفل B تمامًا، فإذا صعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم على هذا السلم، فأثبت أن مقدار الشد في الحبل يزداد كلما صعد الرجل . وإذا كان الحبل لا يتحمل شداً يزيد مقداره على ٦٧ ث كجم، فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعد بها الرجل دون أن ينقطع الحبل .



تمارين ٢ - ٢



فى كل من الأشكال الآتية . قضيب خفيف متزن أفقيًا أوجد معيار كل من القوى ق، ك، البعد س

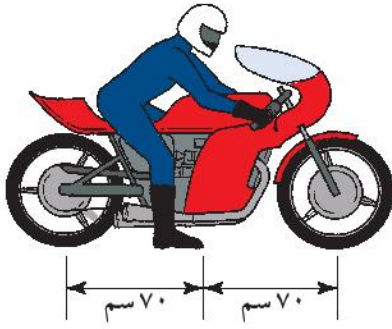


أجب عما يأتى :

٥ قضيب منتظم طوله ٢ متر وكتلته ٧٥ كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه. علق ثقل مقداره ١٥ ث كجم من نقطة على القضيب على بعد ٥٠ سم من احد طرفيه. أوجد رد الفعل عند كل حامل.

٦ قضيب منتظم طوله ٣ متر وكتلته ٤ كجم ويحمل جسمين كتلتاهما ٥ كجم، ١٠ كجم عند طرفيه. أوجد موضع نقطة تعليق على القضيب لكى يتزن القضيب فى وضع أفقى.

٧ أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم، إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن وعلق من أ ثقل قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم من أ، وإذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠ سم من أ. أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن أ.



شكل (٣٢)

٩ في شكل (٣٨) يوضح دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر في الخط الرأسى المار بمنتصف المسافة بين العجلتين وكانت كتلة راكب الدراجة ٨٤ كجم ووزنه يؤثر في الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف العجلة الأمامية أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين في كل من الحالات الآتية :

أ الدراجة بدون الراكب

ب الدراجة مع وجود الراكب.

٩ يرتكز قضيب $\overline{AB}$ طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ حفظ القضيب أفقيًا في حالة إتران بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد :

أ مقدار كل من الشد في الخيط ورد فعل التود.

ب مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد في الخيط على وشك أن ينعدم.

١٠ قضيب منتظم أ ب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ث. جم ويؤثر عند منتصفه معلق في وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين أحدهما مربوط في نقطة أ والآخر مربوط في نقطة جـ حيث أ جـ = س سم، علق ثقل قدره ١٢ ث. جم في نقطة د حيث أ د = ٢٥ سم. فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث. جم، فأوجد القيم التى تقع بينها س، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد في كل من الخيطين.

١١ ترتكز مسطرة خفيفة $\overline{AB}$ مقيسة بالسنتيمتر أفقيًا على حاملين عند النقطتين جـ، د بحيث جـ د = ١٢، أ جـ = ٢ ب د = د جـ. علق ثقل مقداره (و) نيوتن من النقطة (م) على المسطرة فوجد أنها تكون على وشك الانقلاب إذا علق من الطرف (أ) ثقل مقداره ١٠ نيوتن أو إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ٦ نيوتن. أوجد مقدار (و) وأثبت أن : $\frac{9}{7} = \frac{m}{B}$.

١٢ يحمل رجلان أ، ب جسما كتلته ٩٠ كجم معلق من قضيب معدنى متين وخفيف، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠ سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠ سم من أ، فما مقدار ما يتحمله كل رجل من هذا الثقل؟ وإذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم، فعين أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار في حمل القضيب.

١٣ سلم منتظم وزنه ٦٤ ث كجم، يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس، وحفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°، بواسطة حبل مثبت فى قاعدة السلم وفى نقطة من المستوى تقع رأسياً أسفل قمة السلم. وقف رجل وزنه يساوى وزن السلم على موضع من السلم يبعد $\frac{3}{4}$ طول السلم من ناحية القاعدة. عيّن قوة الشد فى الحبل وردى فعل الحائط والمستوى.

- ١٤) يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه أ على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها 45° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى رأسياً أسفل ب . يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم . أوجد:
- أولاً : قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{3}{4}$ طول السلم .
- ثانياً : أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علماً بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم .
- ١٥) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ نيوتن بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس ، بحيث يكون السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط ، ويميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها 45° . أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف أ للسلم؛ لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط علماً بأن معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض ٠,٧٥ .
- ١٦) سلم منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس ، وبطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى؛ بحيث يصنع السلم مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ أوجد معامل الاحتكاك بين السلم والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .

الازدواجات

Couples



الوحدة

٣

مقدمة الوحدة

تناولنا فى الوحدات السابقة تحصيل قوتين متوازيتين متضادتين فى الاتجاه وذلك بإبدالهما إلى قوتين تتلاقيان فى نقطة، ولاحظنا أن ذلك يكون ممكنًا ما دامت القوتان غير متساويتين، أما إذا كانت القوتان المتوازيتان متساويتين فى المقدار، فإنه لا يمكن الاستعاضة عنهما بقوتين غير متوازيتين، بل نحصل دائمًا على قوتين متوازيتين متساويتين فى المقدار ومختلفتين فى الاتجاه، وبذلك لا يمكن تحصيل مثل هاتين القوتين فى قوة واحدة.

من ذلك نرى أن المجموعة المركبة من قوتين متوازيتين متساويتين فى المقدار ومتضادتين فى الاتجاه تكون مسمى جديدًا فى علم الإستاتيكا يعرف بالازدواج، وتتناول هذه الوحدة مفهوم بالازدواج وتعريفه وحساب عزمه، ثم اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين، وعزم الأزواج المحصل، وتنتهى الوحدة بدراسة مجموع أى عدد محدود من الازدواجات.

أهداف الوحدة

- بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:
 - يتعرف مفهوم الازدواج.
 - يوجد عزم الازدواج.
 - يستنتج أن عزم الازدواج هو متجه ثابت.
 - يتعرف على تكافؤ ازدواجين واتزان ازدواجين.
 - يتعرف مفهوم اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين.
 - يوجد محصلة عدة ازدواجات.
 - يثبت أن مجموعة من القوى تكافئ ازدواج (المحصلة = صفر، العزم حول أى نقطة $\neq$ صفر) أو (مجموع عزوم
- القوى حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة = مقدارًا ثابتًا $\neq$ صفر)
- يثبت أن مجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا باستخدام التعريف.
- يتعرف النظرية التى تنص على أن (مجموعة القوى المؤثرة فى أضلاع مضلع فى اتجاه دورى واحد تكافئ ازدواجًا ..)
- يحل تطبيقات متنوعة على الازدواجات.

المصطلحات الأساسية

Rigid body

جسم متماسك (جاسي)

Couple

ازدواج

Equivalent

تكافؤ

Line of action

خط عمل

Equilibrium

اتزان

الأدوات والوسائل

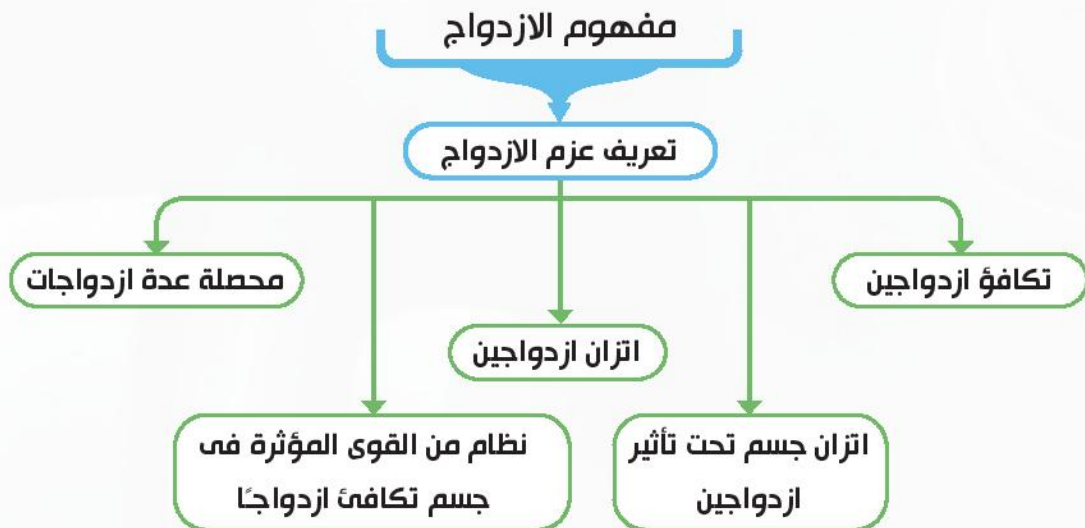
آلة حاسبة علمية.

دروس الوحدة

(١-٣): الازدواجات

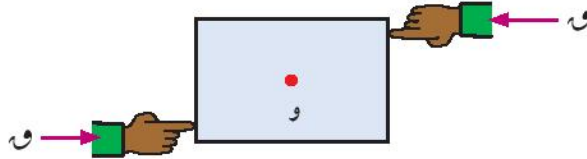
(٢-٣): الازدواج المحصل

مخطط تنظيمي للوحدة

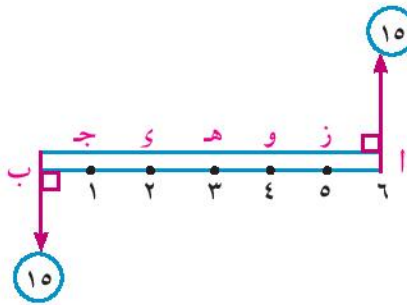


COUPLES

مقدمة: قد يظن البعض أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوى صفراً فإن هذا الجسم يظل ساكناً، ولكن إذا نظرت إلى الشكل المقابل تجد قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه (محصلتهما تساوى صفر) ترى أن هذا الجسم سوف يتحرك حركة دورانية حول (و) وتعتمد سرعة الدوران على عدة أشياء يمكن أن يكتشفها الطالب من العمل التعاوني الآتي:



عمل تعاوني



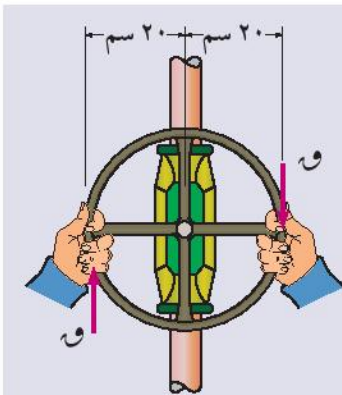
الشكل المقابل يمثل مسطرة مدرجة يؤثر على طرفيها قوتان متوازيتان متضادتان في الاتجاه، مقدار كل منها ١٥ نيوتن. استعن بزملائك في إيجاد مجموع عزوم القوتين حول كل من النقط أ، ب، ج، د، هـ، و، ز وضع النتائج في الجدول الآتي:

النقط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز
مجموع عزمى القوتين							

ماذا تلاحظ من نتائج الجدول؟

تعلم

couple



الازدواج: هو نظام من القوى، يتكون من قوتين متساويتين في المعيار ومتضادتين في الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.

ملاحظة

الأدوات المستخدمة

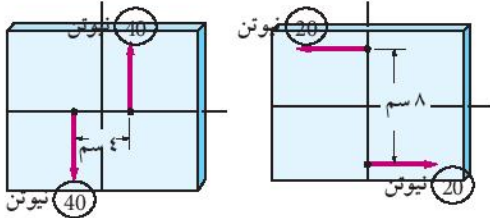
- آلة حاسبة علمية
- معمل ميكانيكا

عزم الازدواج

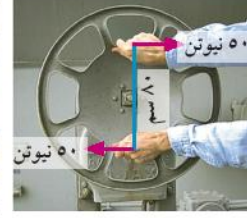
يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزوم قوتي الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ، ومعياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد بينهما، ويرمز له بالرمز $\vec{J}$ حيث $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{F}$ ، ل يسمى ذراع الازدواج $\vec{r}$.

مثال

١ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى كل من الأشكال الآتية:



ب



أ

الحل

أ

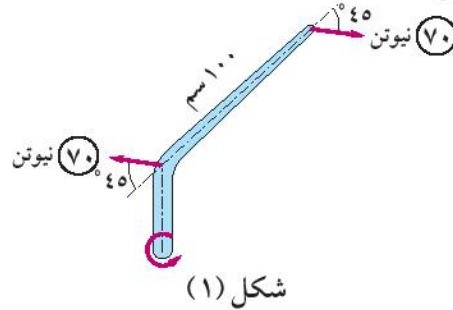
القياس الجبرى لكلا العزمين فى شكل (أ) يساوى - ٤٠٠٠ نيوتن.سم

ب

القياس الجبرى لكلا العزمين فى شكل (ب) يساوى ١٦٠ نيوتن.سم لاحظ زيادة البعد بين القوتين ونقصان معيار القوتين وثبوت معيار العزم.

٤ حاول أن تحل

١ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل الآتى:



شكل (١)

عزم الازدواج هو قيمة ثابتة، لا تعتمد على النقطة التى ننسب إليها عزمى قوته.

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

نفرض أن القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ تؤثران فى النقطتين أ، ب على الترتيب، ونفرض أن نقطة و نقطة عامة فى الفراغ. نوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة و

$$\vec{J} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

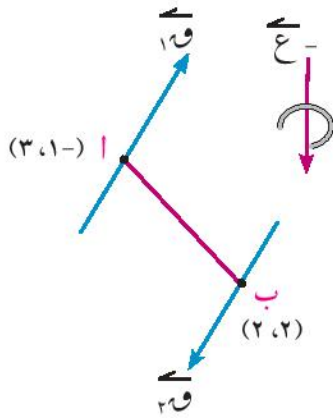
$$\therefore \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{J}$$

والصورة الأخيرة للعزم توضح أن عزم الازدواج لا يعتمد على موضع نقطة و التى تنسب العزوم إليها.

مثال

٢ إذا كانت القوتان $\vec{F}_1 = 2\vec{s} + \vec{b}$ ، $\vec{F}_2 = \vec{a} - \vec{s} - 5\vec{c}$ تكونان ازدواجًا وتؤثران في النقطتين $(3, 1, -)$ ، $(2, 2, -)$ ، ب (٢ ، ٢) على الترتيب. أوجد قيمة كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، ثم أوجد عزم الازدواج.

الحل



∴ القوتان تكونان ازدواجًا ∴ $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

$$1 = 2, \quad 0 = b$$

عزم الازدواج = عزم $\vec{F}_1$ حول ب

$$\begin{aligned} \vec{r}_B \times \vec{F}_1 &= \vec{r}_B \times (-\vec{F}_2) \\ &= (0, 2) \times (1, 3) = \\ &= (2 - 10) = -8 \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

١ إذا كان $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ قوتى ازدواج بحيث $\vec{F}_1 = 3\vec{s} - \vec{b} + 2\vec{c}$ تؤثر في النقطة $(1, 1)$ ، $\vec{F}_2$ تؤثر في النقطة $(2, 1)$ أوجد $\vec{c}$ ثم أوجد عزم الازدواج وكذلك طول العمود المرسوم من أعلى خط عمل $\vec{F}_1$

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر

يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزيمتهما هو المتجه الصفري.

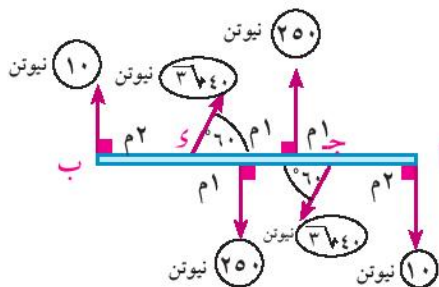
إذا كان $\vec{J}_1$ ، $\vec{J}_2$ عزمى الازدواجين، فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير الازدواجين هو $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{0}$

وعمومًا إذا أثر على الجسم عدة ازدواجات مستوية عزومها هي $\vec{J}_1$ ، $\vec{J}_2$ ، ... ، $\vec{J}_n$ فإن شرط توازن الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots + \vec{J}_n = \vec{0}$

يتزن الجسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات.

مثال

٣ أ ب قضيب خفيف تؤثر فيه القوى الموضحة بالشكل. أثبت أن القضيب متزن.



الحل

القوتان ١٠ ، ١٠ تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه $J_1 = 10 \times 7 = 70$ نيوتن. متر

القوتان ٣٦٤ ، ٣٦٤ تكونان ازدواج الازدواج القياس الجبرى لعزمه

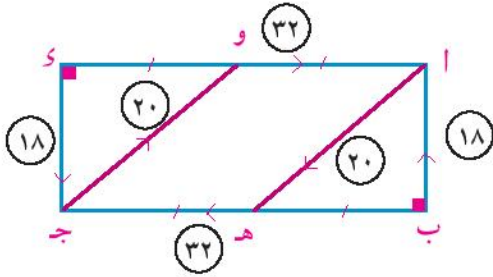
ج. $3 \times 3640 = 10800$ نيوتن. متر

القوتان ٢٥٠، ٢٥٠ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

ج. $1 \times 250 = 250$ نيوتن. متر

∴ القضيبي متزن. $ج١ + ج٢ + ج٣ = 250 + 180 - 70 = 360$ صفر

٩ حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل: أ ب ج د مستطيل هـ، ومنتصفات

ب ج، أ د على الترتيب أ ب = ٦ سم، ب ج = ١٦ سم. فإذا

كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها واتجاهاتها كما بالشكل. أثبت أن المجموعة متزنة.

مثال

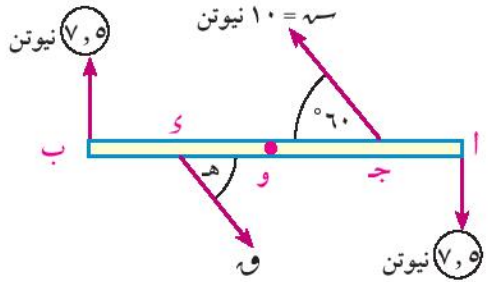
٤ أ ب قضيب مهمل الوزن معلق أفقياً من مسمار في منتصفه، أثرت فيه قوتان مقدار كل منهما ٧,٥ نيوتن في

طرفيه إحداهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل كما شُد بخيط يميل على القضيب بزاوية قياسها

٦٠° من نقطة عليه مثل ج أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة التي إذا أثرت على القضيب مع القوى السابقة

حفظته في حالة توازن وهو أفقى، علماً بأن مقدار الشد في الخيط يساوى ١٠ نيوتن وأن طول القضيب ٣٠ سم.

الحل



القوتان ٧,٥، ٧,٥ نيوتن عند أ، ب تكونان ازدواج القياس

الجبرى لعزمه ج. $225 = 30 \times 7.5 = 225$ نيوتن. سم

لكي يتزن القضيب يجب أن تكون قوة الشد في الخيط والقوة

الأخرى ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٢٢٥ نيوتن. سم

∴ القوة الأخرى و = ش = ١٠ نيوتن، هـ = ٦٠° ويكون

$$10 \times ج د = 225 \text{ جا } 60^\circ$$

∴ ج د = ١٥ سم أي أن نقطة و تبعد عن نقطة ج مسافة ١٥ سم على القضيب.

٩ حاول أن تحل

٣ أ ب ج د هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣، ٩، ٩، ١، ٣، ٩، و ث جم في الاتجاهات أ ب، ب ج، ج د، د هـ، هـ و، و أ على الترتيب أوجد قيمة كل من و، و لكي تتزن المجموعة.

مثال

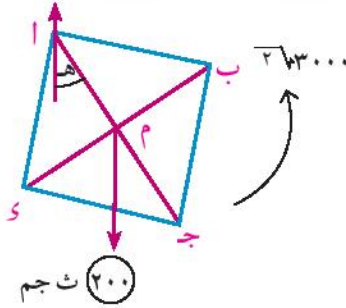
٥ أ ب ج د صفیحة رقیقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٦٠ سم ووزنها ٢٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة تلاقي

القطرين، عُلقَت الصفیحة فی مسمار من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسياً وأثر فيه

ازدواج فی مستواها معيار عزمه ٣٠٠٠ ٣٦ ث جم. سم أوجد فی وضع الاتزان قياس زاوية ميل أ جـ على

الرأسى.

الحل



فى وضع التوازن تكون الصفيحة تحت تأثير قوتين هما وزن الصفيحة ورد فعل المسمار عند أ بالإضافة إلى الازدواج الخارجى. نفرض أن الازدواج الخارجى يعمل فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة (كما فى الشكل) وحيث إن الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله. فعلى ذلك رد الفعل عند نقطة أ والوزن يُكوّنان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$$\begin{aligned} \text{ج} \times 2000 &= \text{أ} \times \text{ج} \quad \text{حيث } \text{أ} = 363000 \\ \text{ج} + \text{ج} &= \text{صفر} \quad \text{صفر} = 363000 - 363000 \times 2000 \\ \text{ج} &= \frac{1}{3} \quad \text{هـ} = 30^\circ \text{ أو } 150^\circ \end{aligned}$$

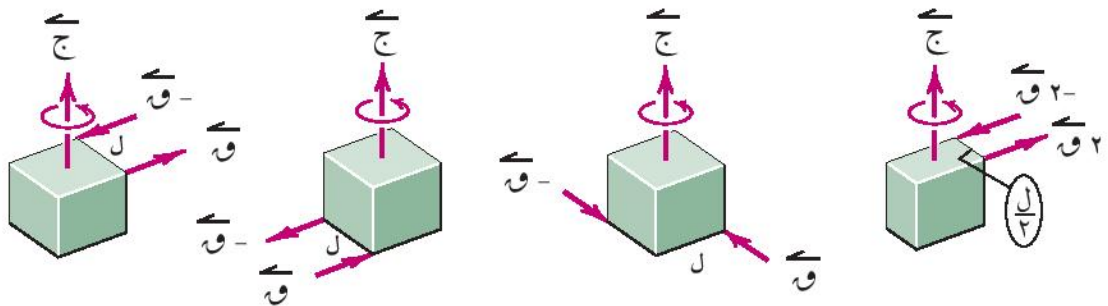
٤ حاول أن تحل

٤ قضيب طوله ٤٠ سم ووزنه ٢,٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه، يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه. أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٤ ث كجم. سم واتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه. عيّن مقدار واتجاه رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان.

Equivalent couples

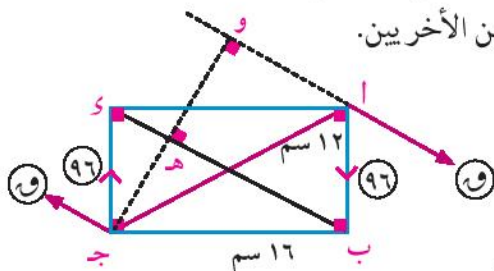
تكافؤ ازدواجين

يقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.



مثال

٦ أ ب ج د مستطيل، فيه أ ب = ١٢ سم، ب ج = ١٦ سم أثرت قوتان مقدار كل منهما ٩٦ نيوتن فى اتجاهات أ ب، ج د أوجد مقدار كل من القوتين المتساويتين والمؤثرتين فى أ، ج فى اتجاه يوازى ب د بحيث يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المُكوّن من القوتين الأخيرين.



الحل

القوتان ٩٦، ٩٦ نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$$\text{ج} = 16 \times 96 = 1536 \text{ نيوتن. سم}$$

لكى يتكافأ الأزودجان فإن القوتين عند أ، ج يعملان على الدوران

في اتجاه عقارب الساعة (كما بالشكل).

من نظرية إقليدس

$$\frac{\text{جـ هـ}}{\text{بـ د}} = \frac{\text{جـ ب} \times \text{جـ د}}{\text{بـ د}}$$

$$\text{جـ هـ} = \frac{12 \times 16}{20} = 9,6 \text{ سم}$$

$$\text{جـ و} = 2 \text{ جـ هـ}$$

$$\text{جـ و} = 19,2 \text{ سم}$$

$\therefore \text{جـ ٢} = - \text{و} \times \text{جـ و}$
 $\therefore \text{جـ ٢} = - \text{و} \times 19,2$
 $\therefore$ الازدواجين متكافئان $\therefore \text{جـ ١} = \text{جـ ٢}$
 $\therefore - \text{و} \times 19,2 = - 1036$
 $\therefore \text{و} = 80 \text{ نيوتن}$

٦ حاول أن تحل

٥ أ ب قضيب خفيف، طوله ٥٠ سم، تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن في أ، ب في اتجاهين متضادين. أثرت قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن في اتجاهين متضادين في نقطتين ج، د من القضيب، حيث ج د = ٣٠ سم بحيث يكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج المكون من القوتين الأوليين. أوجد قياس زاوية ميل القوتين الآخرين على القضيب.

تمارين ٣ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ الازدواج هو:

- أ قوتان متوازيتان ومتساويتان في المقدار متحدتا الاتجاه.
- ب قوتان متعامدتان ومتساويتان في المقدار.
- ج قوتان متوازيتان ومتساويتان في المقدار وعلى خط عمل واحد.
- د قوتان متوازيتان ومتساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وليستا على خط عمل واحد.

٢ أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم:

- أ إزاحة الازدواج إلى موضع جديد في مستواه.
- ب إزاحة الازدواج إلى مستوى آخر يوازي مستواه.
- ج دوران الازدواج في نفس مستواه.
- د كل ما سبق.

٣ القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة وتحداث دورانًا لعجلة القيادة تكونان:

- أ احتكاكًا.
- ب ازدواجًا.
- ج قوة عمودية على عجلة القيادة.
- د محصلة غير صفيرية.

٤ لإحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان:

- أ متساويتين في المقدار.
- ب متضادتين في الاتجاه.
- ج ليسا على خط عمل واحد.
- د كل ما سبق.

٥ إذا كان ج_١، ج_٢ هما القياسان الجبريان لعزمى ازدواجين، وكان ج_١ + ج_٢ = صفر فإن:

- أ) الازدواجين متكافئان
ب) الازدواجين غير متزنين
ج) الازدواجين متزان
د) الازدواجين يكافئان قوة

٦ حاصل ضرب معيار إحدى قوتى الازدواج فى ذراع الازدواج يسمى:

- أ) محصلة الازدواج.
ب) عزم الازدواج.
ج) عزم إحدى قوتى الازدواج.
د) لاشىء مما سبق.

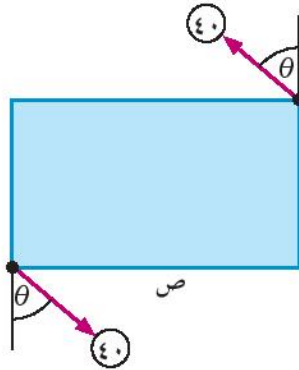
٧ إذا كان $\vec{r}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ، $\vec{r}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ، $\vec{r}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ تكونان ازدواجاً فإن (أ، ب) =

- أ) (٤، ٣) ب) (٥، ٣) ج) (٥، ٣-) د) (٥، ٣-)

٨ إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن. م ومعيار إحدى قوتيّه ٧٠ نيوتن، فإن طول ذراع الازدواج يساوى:

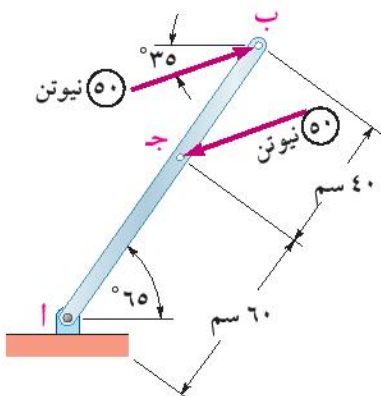
- أ) ٥٠ مترًا ب) ٥ أمتار ج) ٥ سم د) ٤٥٠٠ سم

اجب عن الاسئلة الآتية :



٩ الشكل المقابل يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن، تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة الشكل أبعادها س، ص سم. أوجد عزم ازدواج القوتين فى س كل من الحالات الآتية:

- أ) س = ٣ سم، ص = ٤ سم، $\theta = 0^\circ$
ب) س = ٦ سم، ص = ٦ سم، $\theta = \frac{\pi}{4}$
ج) س = ٠، ص = ٥ سم، $\theta = 30^\circ$
د) س = ٦ سم، ص = ٠، $\theta = 60^\circ$
هـ) س = ٥ سم، ص = ١٢ سم، $\theta = \frac{\pi}{12}$

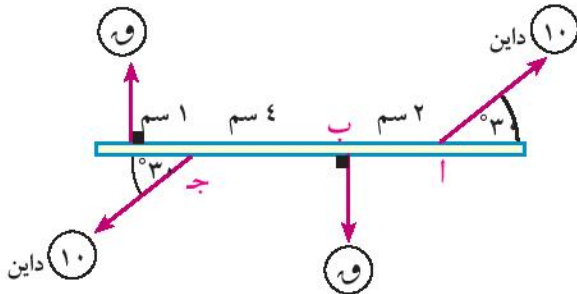


١٠ الشكل المقابل يوضح قوتين معيار كل منها ٥٠ نيوتن، تؤثران على رافعة أ ب أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج بطريقتين:

- أ) باستخدام البعد العمودى بين القوتين.
ب) بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة أ

١١ أثرت القوتان (٣ سم - ٥ سم)، (٣ سم + ٥ سم) نيوتن في النقطتين أ، ب على الترتيب، متجهاً موضعهما (٦ سم + ٤ سم)، (٤ سم + ٤ سم) متر برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه.

١٢ أثرت القوتان (١ سم + ٤ سم)، (٥ سم - ٢ سم) نيوتن في النقطتين ج، د على الترتيب حيث جـ (٢، ١)، د (٣، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجاً. أوجد قيمة كل من أ، ب، ثم أوجد عزم الازدواج، وأوجد أيضاً البعد العمودي بين خطي عمل القوتين.



١٣ الشكل المقابل يمثل قضيباً متزنًا تحت تأثير أربع قوى، أوجد قيمة و.

١٤ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم، ب جـ = ٦ سم، س، ص، ع، ل منتصفات الأضلاع أ ب، ب جـ، جـ د، د أ على الترتيب، أثرت القوى التي مقاديرها و، و، و، و، ٦، ٦ نيوتن في الاتجاهات أ س، جـ ع، ص س، ل ع، جـ ص، أ ل على الترتيب إذا اتزن المستطيل، أوجد قيمة و.

١٥ أ ب قضيب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ نيوتن، يؤثر عند منتصفه، يمكن للقضيب الدوران بسهولة في مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير في القضيب عند النقطة جـ التي تبعد ١٥ سم عن أ، فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشُد الطرف أ أفقياً بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب. أوجد الشد في الحبل ورد فعل المسمار علماً بأن القضيب يتزن في وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°.

١٦ أ ب جـ د صفیحة رقیقة على هیئة مستطیل فیہ أ ب = ١٨ سم، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن، ويؤثر في نقطة تلاقي القطرين، علقت الصفیحة في مسمار رفیع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسياً. فإذا أثر على الصفیحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن. سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفیحة. فأوجد زاوية ميل بـ على الرأسى في وضع الاتزان.

١٧ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠، ٦٠ نيوتن في اتجاهات بـ أ، د جـ، أوجد قوتين متساويتين في المقدار تؤثران في أ، جـ توازيان بـ د وتكونان ازدواجاً يتكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين.

الازدواج المحصل

الوحدة الثالثة

٢ - ٣

Resultant couple

فكر و ناقش



- (١) إذا وقع جسم تحت تأثير ازدواج. ما التأثير الحادث على هذا الجسم نتيجة ذلك الازدواج؟
- (٢) هل يتحرك الجسم الواقع تحت تأثير ازدواج حركة خطية أم حركة دائرية؟
- (٣) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة تساوى صفر. هل يمكن أن تمثل هذه القوى ازدواجًا؟
- (٤) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية وغير متلاقية في نقطة تساوى صفر. هل يمكن أن تمثل هذه القوى ازدواجًا؟

تعلم

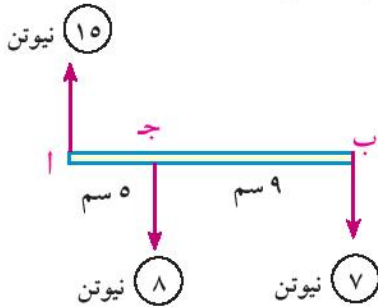


نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجًا

يقال لعدة قوى مستوية $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، ... ، $\vec{F}_n$ إنها تكافئ ازدواجًا إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا:

- (١) انعدام محصلة القوى (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر)
 - (٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم
- ملحوظة:** تحقق أحد الشرطين فقط لا يكفي لإثبات أن المجموعة تكافئ ازدواجًا فالقوى المتلاقية فى نقطة إذا انعدمت محصلتها فإن المجموعة تكون متزنة ولا تكافئ ازدواجًا.

مثال



- (١) أ ب قضيب خفيف أثرت عليه القوى الموضحة بالشكل أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه.

الحل



بفرض أن $\vec{F}_1$ متجه وحدة فى اتجاه القوة ١٥ نيوتن

$$\therefore \vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 - \vec{F}_3 = \vec{F}_1 - 7 - 8 = \vec{F}_1 - 15$$

أى أن المحصلة تنعدم

$\therefore$ إما أن تكون المجموعة متزنة أو تكافئ ازدواجًا، لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة (ولتكن أ)

سوف تتعلم

- مجموع ازدواجات مستوية (الازدواج المحصل)
- شرط مجموعة من القوى المستوية تكافئ ازدواجًا.

المصطلحات الأساسية

ازدواج محصل	Resultant couple
يكافئ	Equivalent

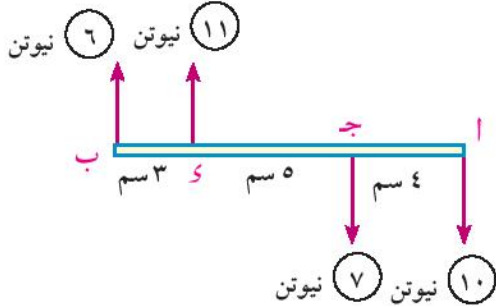
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

$$ج١ = ٨ \times ٥ - ٧ \times ١٤ = ١٣٨ -$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا، القياس الجبري لعزمه يساوى - ١٣٨ نيوتن.سم

تفكير ناقد: أوجد مجموع عزوم القوى حول كل من ب، جـ ماذا تلاحظ؟



٤ حاول أن تحل

١ فى الشكل المقابل أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبري لعزمه.

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلًا تامًا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

ملاحظة

البرهان (غير مطلوب من الطالب)

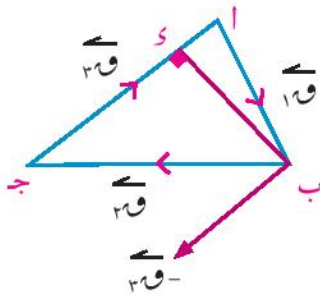
تمثل القطع المستقيمة الموجهة $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ ، $\vec{CA}$ القوى الثلاث تمثيلًا تامًا، أى مقدارًا واتجاهًا وخط عمل وبفرض أن m تمثل مقدار القوة لوحدة الأطوال

$$أى \quad m = \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} = \frac{1}{CA}$$

$$\therefore \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} = \vec{CA} + \vec{BC}$$

$$\therefore \vec{CA} = \vec{AB} - \vec{BC}$$



أى أن محصلة القوتين $\vec{CA}$ ، $\vec{CB}$ هى قوة $(-\vec{CA})$ وتؤثر فى نقطة بـ - لذلك فإن المجموعة تكافئ القوتين $\vec{CA}$ وتعمل عند جـ، $(-\vec{CB})$ وتعمل عند ب، أى أنها تكافئ ازدواجًا.

لتعيين معيار عزم هذا الازدواج نرسم عمودًا من ب على $\vec{AC}$ فيقطعه فى نقطة د.

$$\text{معيار عزم الازدواج} = \|\vec{CA}\| \times BD$$

$$\text{ولكن} \|\vec{CA}\| = AC \times m$$

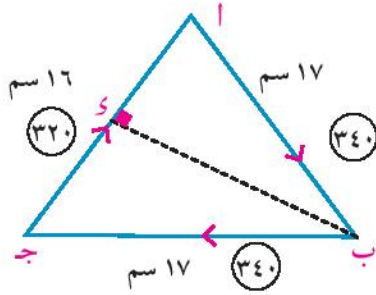
$$\text{معيار عزم الازدواج} = AC \times m \times BD$$

$$= (AC \times BD \times m) \times \text{ضعف مساحة سطح المثلث } ABC$$

مثال

٢) أب ج مثلث، فيه أب = ب ج = ١٧ سم، أ ج = ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٣٤٠، ٣٤٠، ٣٢٠ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بج}$ ، $\overrightarrow{جأ}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

الحل



حيث إن $٢٠ = \frac{٣٢٠}{١٦} = \frac{٣٤٠}{١٧} = \frac{٣٤٠}{١٧}$
 ∴ مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال يساوي ٢٠ نيوتن وحيث إن
 القوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد
 ∴ المجموعة تكافئ ازدواج
 معيار عزم الازدواج = ضعف مساحة $\triangle أب ج$ × مقدار القوة الممثل

لوحدة الأطوال

لإيجاد مساحة $\triangle$ نرسم $\overline{ب س} \perp \overline{أ ج}$ فينصفه

$$\therefore ب س = \sqrt{١٧^2 - ٨^2} = ١٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{معيار عزم الازدواج} = ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ١٥ \times ٢٠ = ٤٨٠٠ \text{ نيوتن.سم}$$

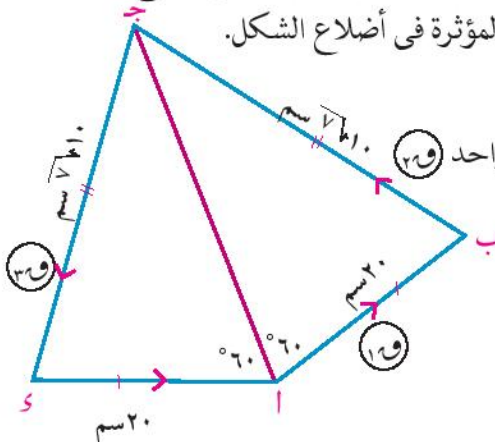
٤ حاول أن تحل

٢) أب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٣٠ سم، ب ج = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٦، ٨، ١٠ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بج}$ ، $\overrightarrow{جأ}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

تعميم: إذا أثرت عدة قوى مستوية في جسم متماسك ومثلها تمثيلًا تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة في ترتيب دوري واحد، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوي حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع في مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

مثال

٣) أب ج د شكل رباعي فيه أب = أ د = ٢٠ سم، ب ج = ١٠ سم، $\angle أ = ١٢٠^\circ$ أثرت قوى ممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بج}$ ، $\overrightarrow{ج د}$ ، $\overrightarrow{د أ}$ فإذا كانت المجموعة تؤول إلى ازدواج معيار عزمه ٣٦٨٠ نيوتن. سم في الاتجاه أب ج د أوجد مقدار القوى المؤثرة في أضلاع الشكل.



الحل

∴ القوى تؤثر في أضلاع المضلع ومأخوذة في ترتيب دوري واحد
 ∴ معيار الازدواج = ضعف مساحة الشكل × م

$$٣٦٨٠ = \text{ضعف مساحة الشكل} \times م$$

من هندسة الشكل $\triangle أب ج \equiv \triangle أ د ج$

من قانون جيب التمام في $\triangle أب ج$

$$(ب ج) = (أ ب) + (أ ج) - ٢ أ ب \times أ ج \times جتا (ب أ ج)$$

$$\therefore (٧٨٠) = (٢٠) + (٢٠) - ٢(٢٠) \times (٢٠) \times جتا ٦٠$$

$$\therefore ٧٠٠ = (٢٠) + (٢٠) - ٢(٢٠) \times (٢٠) \times جتا ٦٠$$

$$\therefore (٢٠) - ٢(٢٠) \times (٢٠) \times جتا ٦٠ = ٣٠٠ - ٧٠٠$$

$$\therefore (٢٠) \times (١٠ + (٢٠ - ٣٠)) = ٠$$

$$\text{مساحة الشكل أ ب ج} \times ٢ = \text{مساحة } \triangle أ ب ج$$

$$٢ \times \frac{١}{٢} \times أ ب \times أ ج \times جتا ٦٠ =$$

$$٢٠ \times ٢٠ \times ٦٠ = ٣٦٠ \text{ سم}^٢$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore ٣٦٠ = ٢ \times ٣٦٠ \times م \times ٣٦٠ \text{ ومنها } م = \frac{٣}{١٠}$$

$$\therefore \frac{٣}{١٠} = \frac{٢٠}{٢٠} = \frac{٢٠}{٢٠} = \frac{٢٠}{٢٠}$$

$$\therefore \frac{٣}{١٠} = \frac{٢٠}{٢٠} = \frac{٢٠}{٢٠} = \frac{٢٠}{٢٠}$$

$$\text{ومنها } ٦ = ٦ \text{ نيوتن ، } ٣ = ٣ \text{ نيوتن ، } ٦ = ٦ \text{ نيوتن ، } ٦ = ٦ \text{ نيوتن}$$

٥ حاول أن تحل

٢ أ ب ج شبه منحرف فيه $\overline{أ ب} \parallel \overline{ب ج}$ ، $\overline{أ ب} \perp \overline{ب ج}$ ، $أ ب = ٦$ سم ، $ب ج = ٩$ سم ، $أ ج = ٣$ سم أثرت القوى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ على الترتيب، فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن. سم في الاتجاه أ ب ج فأوجد مقدار كل من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط في مستواها ليست على استقامة واحدة يساوي مقداراً ثابتاً لا يساوى الصفر، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

أى مجموعة من القوى إما أن تؤول إلى قوة واحدة ١ أو تؤول إلى ازدواج أو تكون متزنة.

واضح أن القوى غير متزنة لأن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة ما لا يندمج، نفرض أن المجموعة

تكافئ قوة واحدة مقدارها ١ وان النقط الثلاث هي أ ، ب ، ج وان ابعادها عن خط عمل القوة هي $ل١$ ، $ل٢$ ، $ل٣$

$$\therefore ١ \times ل١ = ٢ \times ل٢ = ٣ \times ل٣ = \text{المقدار الثابت}$$

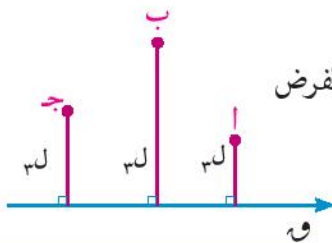
على الترتيب

$$\text{وبالقسمة على } ١ \text{ حيث } ١ \neq ٠ \therefore ل١ = ل٢ = ل٣$$

أى أن النقط أ ، ب ، ج تقع على مستقيم واحد يوازي خط عمل ١ وهذا يتنافى مع الفرض

$\therefore$ مجموعة القوى لا تكافئ قوة

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى المقدار الثابت



مثال

٤) أ ب ج د شبه منحرف فيه $\overline{أد} // \overline{بج}$ ، و $(\angle ب) = 90^\circ$ ، $أب = ١٢$ سم، $بج = ١٨$ سم، $أد = ٩$ سم، أثرت القوى التي مقاديرها ٢٠٠، ٦٠٠، ٥٠٠، ١٢٠٠، ١٣٦٣٠٠ ث كجم في أ، ب، ج، د على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

الحل

نحسب مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولتكن أ، ب، ج.

$$ج١ = ١٢ \times ٦٠٠ - ٥٠٠ \times ٩$$

$$حيث أ و ٩ جا ٩ = \frac{١٢}{١٥} \times ٩ = ٧,٢$$

$$ج٢ = ١٢ \times ٦٠٠ - ٥٠٠ \times ٧,٢ = ١٠٨٠٠ - ٣٦٠٠ = ٧٢٠٠$$

$$ج٣ = ١٢ \times ١٢٠٠ - ٥٠٠ \times ١٣٦٣٠٠ + ١٢ \times ١٣٦٣٠٠ = ١٤٠٠٠ - ١٣٦٣٠٠ + ١٦٣٥٦٠٠ = ١٤٠٠٠$$

$$حيث ب ل ١٨ جا ١٨ = \frac{١٢}{١٥} \times ١٨ = ١٤,٤$$

$$ب ه = \frac{١٨ \times ١٢}{١٣٦٣٠٠} = \frac{٢١٦}{١٣٦٣٠٠}$$

$$ج٤ = ١٢ \times ١٢٠٠ - ٥٠٠ \times ١٤,٤ + \frac{٢١٦}{١٣٦٣٠٠} \times ١٣٦٣٠٠ = ١٤٠٠٠ - ٧٢٠٠ + ٢١٦ = ٦٠٠٠$$

$$= ١٠٨٠٠ - ٣٦٠٠ = ٧٢٠٠$$

$$ج٥ = ١٨ \times ٢٠٠ - ١٢ \times ١٢٠٠ = ٣٦٠٠ - ١٤٤٠ = ٢١٦٠$$

$$= ١٠٨٠٠ - ٣٦٠٠ = ٧٢٠٠$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا يعمل على الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة، معيار عزمه ١٠٨٠٠ ث كجم.سم

٩ حاول أن تحل

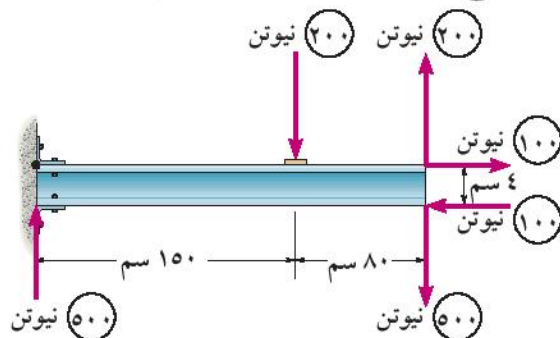
٤) أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم، هـ $\exists$ ج ب، و $\exists$ ج د، بحيث كان ج هـ = ج و = ٣٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ١٠، ٢٠، ٣٠، ٢٠ ث كجم في أ، ب، ج، د، هـ، و على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

Resultant couple

الازدواج المحصل

يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه الازدواج الذي عزمه يساوي مجموع عزمي هذين الازدواجين

$\vec{ج} = \vec{ج١} + \vec{ج٢}$ ويسمى مجموع ازدواجين مستويين بالازدواج المحصل (المجموعة تكافئ ازدواجًا)



مثال

٥) في الشكل المقابل أوجد القياس الجبري للازدواج المحصل

الحل

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$$ج١ = ٠,٨ \times ٢٠٠ = ١٦٠ \text{ نيوتن.متر}$$

القوتان ٥٠٠ ، ٥٠٠ تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

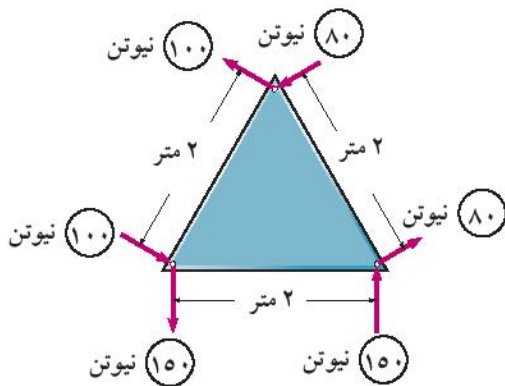
$$ج٢ = ٢,٣ \times ٥٠٠ = ١١٥٠ \text{ نيوتن.متر}$$

القوتان ١٠٠ ، ١٠٠ تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$$ج٣ = ٠,٠٤ \times ١٠٠ = ٤ \text{ نيوتن.متر}$$

$$\text{الازدواج المحصل} = ج١ + ج٢ + ج٣$$

$$= ١٦٠ + (١١٥٠) + (٤) = ٩٩٤ \text{ نيوتن.متر}$$



٥ حاول أن تحل

الشكل المقابل يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث

متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى كما بالشكل أوجد

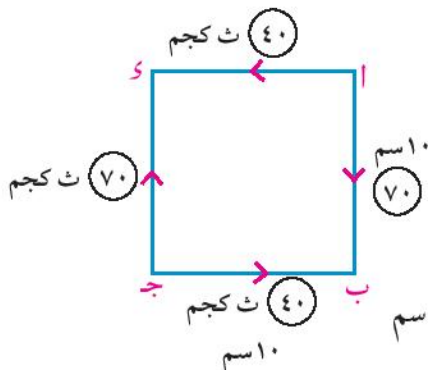
القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

مثال

٦ أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم، أثرت قوتان مقدار كل منهما ٤٠ ث كجم فى $\overrightarrow{أى}$ ، $\overrightarrow{ج ب}$ وقوتان مقدار

كل منهما ٧٠ ث كجم فى $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ج د}$ ، أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

الحل



القوتان ٤٠ ، ٤٠ تُكوّنان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$$ج١ = ١٠ \times ٤٠ = ٤٠٠ \text{ ث كجم.سم}$$

القوتان ٧٠ ، ٧٠ تُكوّنان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$$ج٢ = ١٠ \times ٧٠ = ٧٠٠ \text{ ث كجم.سم}$$

$$\text{الازدواج المحصل} = ج١ + ج٢ = ٧٠٠ + ٤٠٠ = ١١٠٠ \text{ ث كجم.سم}$$

٥ حاول أن تحل

٦ أ ب ج د مستطيل، فيه أ ب = ٦٠ سم ، ب ج = ١٦٠ سم ، ص منتصفات ب ج ، $\overrightarrow{أى}$ على الترتيب،

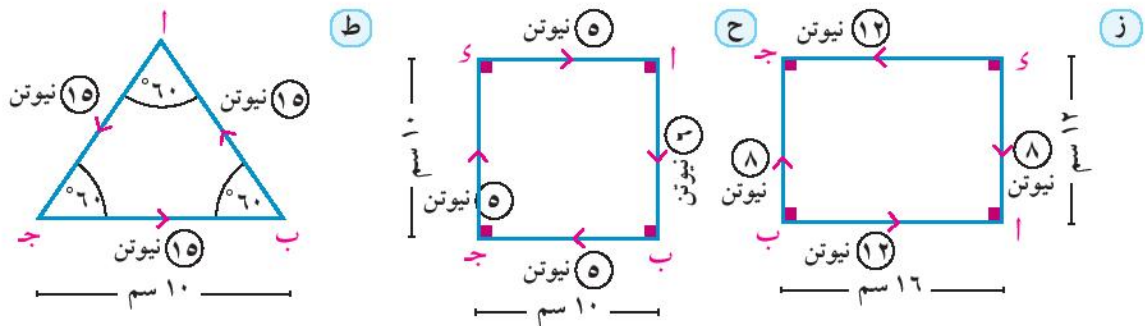
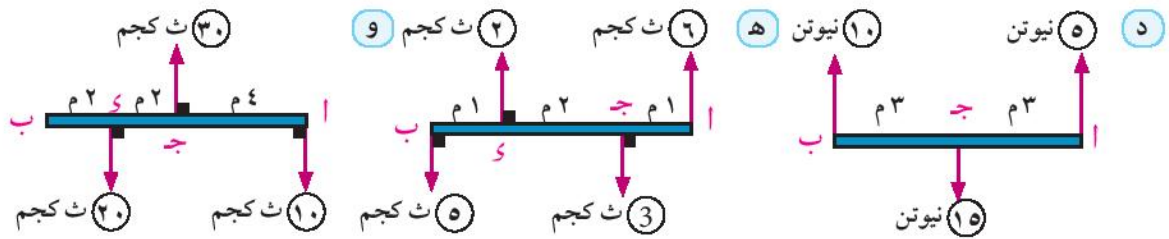
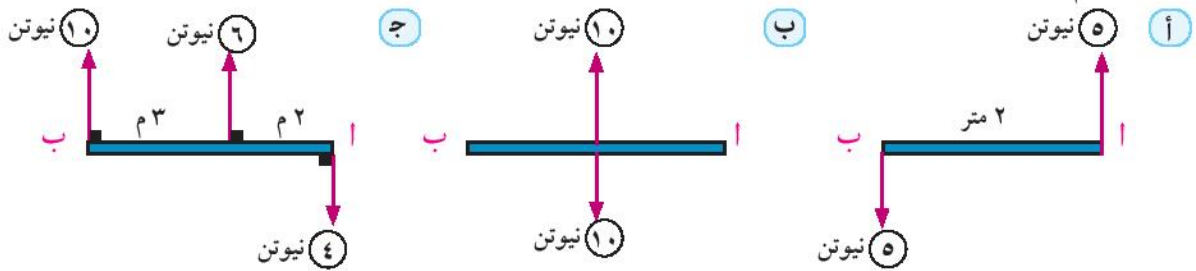
أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ٧٠ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ج د}$ ، $\overrightarrow{ج ب}$ ،

$\overrightarrow{أى}$ ، $\overrightarrow{س أ}$ ، $\overrightarrow{ص ج}$ ، على الترتيب، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن.سم.

أوجد قيمة: $\overrightarrow{و ه}$.

تمارين ٢ - ٣

١ بين أي نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبري لعزمه:

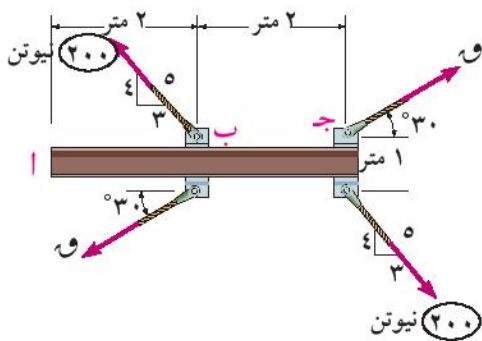


٢ أ ب ج د مربع طول ضلعه ٣ أمتار تؤثر القوى التي مقاديرها ٥، ٢، ٥، ٢ نيوتن في اتجاهات ب أ ، ب ج ، ج د ، د أ ، على الترتيب. بين أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمها.

٣ أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم أثرت قوى مقدار كل منها ٧ ث. كجم في كل من أ ب ، ب ج ، ج د ، د أ ، على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

٤ أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٣٠ سم ، ب ج = ٤٠ سم أثرت القوى التي مقاديرها ١٥، ٣٠، ١٥، ٣٠ ث. كجم في ب أ ، ب ج ، ج د ، د أ ، على الترتيب، أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه، ثم أوجد قوتين تؤثران في أ ، ج عموديتين على أ ج ، بحيث تتزن المجموعة.

٥ أ ب ج د معين طول ضلعه ١٠ سم، و (أ ب ج) = ١٢٠° أثرت القوى التي مقاديرها ٢٠، ١٥، ٢٠، ١٥ ث كجم في أ ب ، ب ج ، ج د ، د أ ، على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران في ب ، د عموديتين على ب د بحيث تتزن المجموعة.



٦ الشكل المقابل يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٢٠٠ - ٣٦٢٠٠ نيوتن. متر أوجد w .

٧) أب جـ ي شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{أ ي} // \overline{ب ج}$ ، $أ ي = ٩$ سم ، $أ ب = ١٥$ سم ، $ب ج = ٣٣$ سم
 أثرت القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ في الاتجاهات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ج}$ ، $\overline{ج ي}$ ، $\overline{ي أ}$ على الترتيب، أثبت أن المجموعة
 تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

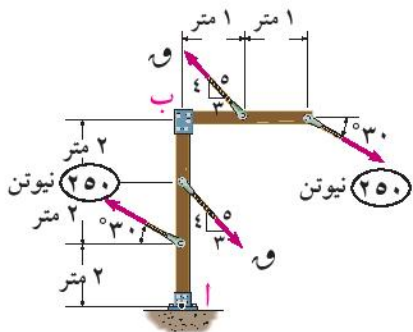
٨) أب جد هـ ومسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم، أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ٥٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٣٠ نيوتن في أب، جـب، جـد، هـد، وهـ، وأ على الترتيب. عين عزم الازدواج المحصل.

٩) ا ب ج د ه خماسى منتظم طول ضلعه ١٥سم. أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ اث كجم فى ا ب ، ب ج ، ج د ، د ه ، ه ا على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

١٠) $\overrightarrow{ab}$ جـ مثلث فيه $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{bج} = \overrightarrow{سم}$ ، و $(\Delta \text{ } ab \text{ } ج) = ١٢٠^\circ$ أثرت قوى مقاديرها ١٨، ١٨، ١٨ في $\overrightarrow{ab}$ ، $\overrightarrow{بج}$ ، $\overrightarrow{جأ}$ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

١١) أب ج و مربع طول ضلعه ٦٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٠، ٢٠، ٨٠، ٥٠ نيوتن في أب، ب ج، ج و، و أ على الترتيب واثرت قوتان مقدارهما ٥٠ $\sqrt{2}$ ، ٢٠ $\sqrt{2}$ نيوتن في أج، و ب على الترتيب برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم

١ متر ١ متر



١٢) فى الشكل المقابل أوجد θ التى تجعل القياس الجبرى
لعمم الازدواج المحصل يساوى $100 - 300$

متطلبات قبلية
فى

الديناميكا



الصف الثالث الثانوي

لا يمتحن فيها الطالب

Momentum

١ كمية الحركة

كمية حركة جسم متحرك هي كمية متجهة لها نفس اتجاه سرعة هذا الجسم ومقدارها عند لحظة ما يُقدر بحاصل ضرب كتلة هذا الجسم في سرعته عند هذه اللحظة ويُرمز لمتجه كمية الحركة بالرمز $\vec{p}$.

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

وفي حالة الحركة الخطية يكون كل من $\vec{p}$ ، $\vec{v}$ موازيًا للخط المستقيم الذي تحدث عليه الحركة، ويمكن التعبير عن كل من $\vec{p}$ ، $\vec{v}$ بدلالة القياس الجبري لكل منهما:

$$p = m v$$

حيث m ، v هما القياسان الجبريان لمتجهي كمية الحركة والسرعة على الترتيب.

Units of Momentum

٢ وحدات قياس كمية الحركة

وحدة معيار كمية الحركة = وحدة كتلة $\times$ وحدة سرعة

وفي النظام الدولي للوحدات يُقاس معيار كمية الحركة بوحدة كجم.م/ث

أي أن: m (كجم.م / ث) = k (كجم) $\times$ v (م/ث).

لاحظ أن: عند ثبوت كتلة الجسم يتناسب m مع v وتكون العلاقة بينهما خطية؛ لذلك تسمى كمية الحركة في هذه الحالة بكمية الحركة الخطية.



تعريف كمية الحركة

١ احسب كمية حركة دراجة كتلتها ٣٥ كجم تتحرك بسرعة ثابتة قدرها ١٢ م/ث في اتجاه الشرق.



شكل (١)



$$\therefore m = k v$$

$$\therefore m = 35 \times 12 = 420 \text{ كجم.م/ث}$$

كمية حركة الدراجة = ٤٢٠ كجم.م/ث في اتجاه الشرق.

٩ حاول أن تحل

- ١ احسب كمية حركة قطار كتلته ٤٠ طنًا يتحرك في اتجاه الشمال بسرعة ثابتة قدرها ٧٢ كم/س.
- ٢ احسب كمية حركة سيارة كتلتها ٨٠٠ كجم تتحرك في اتجاه الجنوب الغربى بسرعة ثابتة قدرها ١٢٦ كم/س.

مثال

استخدام المتجهات

- ٢ سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك في خط مستقيم بحيث كانت $\vec{s} = (٣ن^٢ - ٤ن + ١) \vec{i}$ حيث $\vec{i}$ متجه وحدة اتجاه حركة السيارة، إذا كانت s مقيسة بوحدّة المتر فأوجد مقدار كمية حركة السيارة عند بدء الحركة ثم بعد ٣ ث من بدء الحركة.



شكل (٢)

الحل

$$\vec{s} = (٣ن^٢ - ٤ن + ١) \vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = (٦ن - ٤) \vec{i}$$

$$(١) \text{ عند بدء الحركة } n = 0, \vec{v} = -٤ \vec{i}$$

$$\therefore \vec{p} = m\vec{v} = (-٤ \vec{i}) (٢٠٠٠) = -٨٠٠٠ \vec{i}$$

$$\text{مقدار كمية الحركة} = ٨٠٠٠ \text{ كجم.م/ث}$$

$$(٢) \text{ عندما } n = ٣ \text{ ث، فإن } \vec{v} = (٦ \times ٣ - ٤) \vec{i} = ١٤ \vec{i}$$

$$\therefore \vec{p} = m\vec{v} = (١٤ \vec{i}) (٢٠٠٠) = ٢٨٠٠٠ \vec{i}$$

$$\text{مقدار كمية الحركة} = ٢٨٠٠٠ \text{ كجم.م/ث.}$$

٩ حاول أن تحل

- ٢ سيارة كتلتها ١٢٠٠ كجم تتحرك في خط مستقيم بحيث كانت $\vec{v} = (١٢ن^٢ - ٣ن) \vec{i}$ حيث $\vec{i}$ مقيسة بالمتر، أوجد كمية حركة السيارة بعد ٤ ث من بدء الحركة.

The Change of Momentum

٣ التغير في كمية الحركة

إذا كان متجهها سرعة جسم متحرك عند لحظتين زمنيتين متتاليتين t_1 ، t_2 على الترتيب هما $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ فإن التغير في كمية حركة الجسم يتحدد بالعلاقة:

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}$$

حيث m كتلة الجسم المتحرك، $\Delta \vec{v}$ التغير الحادث في قيمة سرعته

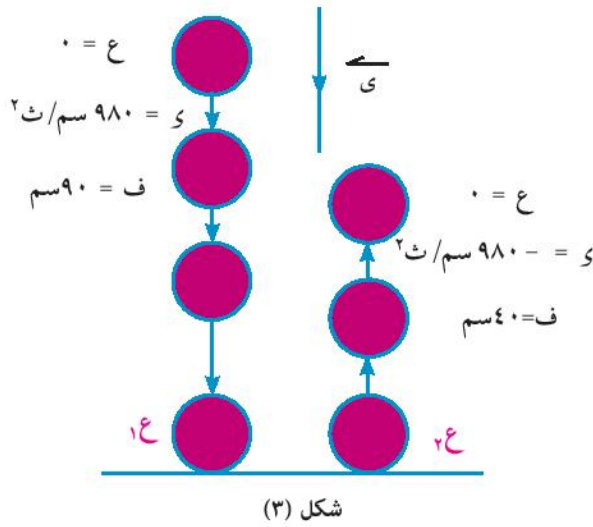
$$\therefore \text{التغير في كمية حركة الجسم } \Delta \vec{p} = m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

مثال

التغير في كمية الحركة

٣ سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠٠ جم من ارتفاع ٩٠ سم على سطح أفقي فارتدت إلى ارتفاع ٤٠ سم. احسب بوحدة كجم.م/ث مقدار التغير في كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم.

الحل



نعتبر $\vec{v}_1$ متجه وحدة في اتجاه الحركة رأسياً لأسفل.
دراسة حركة الكرة في مرحلة السقوط.

$$\therefore \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + a t$$

$$\therefore \vec{v}_2 = 0 + 9.8 \times 2 = 19.6 \text{ م/ث}$$

$$\therefore \vec{v}_2 = 19.6 \text{ م/ث}$$

$$\therefore \vec{v}_2 = 19.6 \text{ م/ث}$$

دراسة حركة الكرة في مرحلة الارتداد.

$$\therefore \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + a t$$

$$\therefore 0 = 19.6 - 9.8 t$$

$$\therefore t = 2 \text{ ث}$$

$$\therefore \vec{v}_2 = 19.6 - 9.8 \times 2 = -19.6 \text{ م/ث}$$

التغير في كمية الحركة $\Delta \vec{p} = m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

$$= 0.2 (19.6 - (-19.6)) = 7.84 \text{ كجم.م/ث}$$

$\therefore$ مقدار التغير في كمية الحركة = ١,٤ كجم.م/ث

Newton's First Law

٤ القانون الأول لنيوتن

وصف نيوتن من خلال هذا القانون ما الذي يحدث لجسم عندما تنعدم محصلة القوى المؤثرة عليه.

كل جسم يحتفظ بحالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من حالته.

نلاحظ من القانون الأول لنيوتن الآتي :

- (١) الجسم الساكن يظل ساكنًا ما لم تؤثر عليه قوة تحركه، والجسم المتحرك حركة منتظمة يظل متحركًا بها ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حركته.
- (٢) يقصد بتعبير "القوة" في صياغة القانون محصلة جميع القوى المؤثرة على الجسم، ويقاس معيار القوة بوحدة النيوتن في النظام الدولي للوحدات.
- (٣) يضع القانون حالتى السكون والحركة المنتظمة في خط مستقيم في وضع متكافئ، وتمثل كلتاهما " الحالة الطبيعية" للجسم، عندما تكون محصلة القوى المؤثر عليه مساوية للصفر.
- (٤) يبين القانون أن الجسم الساكن أو المتحرك حركة منتظمة في خط مستقيم (أى عندما يكون في حالته الطبيعية) لا يمكنه تغيير حالته هذه تلقائيًا، بل لابد أن تؤثر عليه قوة فتخرجه من هذه الحالة. ولهذا السبب سمى القانون الأول لنيوتن " قانون القصور الذاتى ".

Inertia

٥ القصور الذاتى

من القانون الأول لنيوتن يمكن استنتاج أن الأجسام لها ميل طبيعى للمحافظة على حالتها من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم وتعرف هذه الممانعة أو المقاومة للتغيير بالقصور الذاتى.

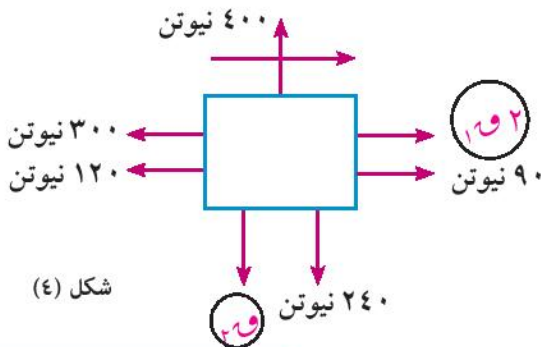
مبدأ القصور الذاتى:

كل جسم قاصر أو عاجز بذاته عن تغيير حالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم.

Force

٦ القوة

يتضمن القانون الأول لنيوتن تعريفًا للقوة بأنها المؤثر الذى يغير أو يعمل على تغيير حالة الجسم من سكون أو حركة منتظمة في خط مستقيم.



شكل (٤)

(الجسم فى حالة حركة)

مثال

(٤) يوضح الشكل المقابل جسمًا يتحرك أفقيًا فى الاتجاه

الموضح بسرعة ثابتة قدرها ٨ م/ث ، أوجد v_1 ، v_2 .

الحل

∴ الجسم في حالة حركة منتظمة

∴ القوى الأفقية متزنة

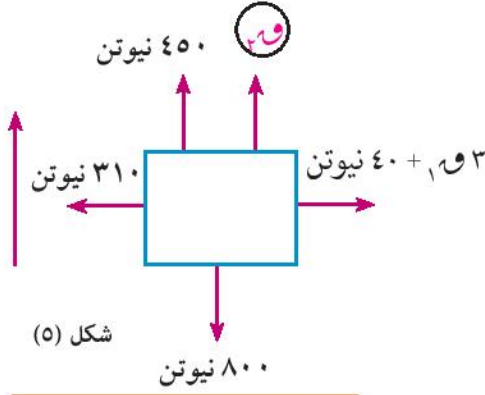
$$120 + 300 = 90 + 192$$

$$165 = 19$$

∴ القوى الرأسية متزنة

$$400 = 19 + 240$$

$$160 = 19$$



٦ حاول أن تحل

٤ يوضح الشكل المقابل جسمًا متحركًا رأسيًا لأعلى بسرعة

ثابتة تؤثر عليه مجموعة من القوى . أوجد 19 ، 19 .

مثال

معطيات

$$120 \times 9,6 = 12$$

$$1920 = 12$$

$$12 = 72 \text{ كم / س}$$

٥ قطار كتلته ٢٠٠ طن، يتحرك تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته. فإذا كانت هذه المقاومة ٩,٦ ث. كجم لكل طن من كتلة القطار عندما كانت سرعة القطار ٧٢ كم / ساعة. فأوجد أقصى سرعة للقطار إذا كانت القاطرة تجره بقوة ثابتة مقدارها ٤,٣٢ ث طن.



شكل (٦)

الحل

نفرض أن المقاومة = 12 عندما تكون سرعة القطار 12 .

المقاومة = 12 عندما تكون سرعة القطار 12 .

∴ المقاومة تتناسب مع مربع السرعة

$$\frac{12}{24} = \frac{12}{24} \therefore$$

يبلغ القطار أقصى سرعة له عندما تكون المقاومة مساوية تمامًا لقوة جرّ القطار
فإذا كانت ع_٢ أقصى سرعة للقطار فإن م_٢ = ٤,٣٢ ث طن
∴ م_٢ = ٤٣٢٠ ث كجم

$$\frac{72 \times 72}{24} = \frac{1920}{4320} \quad \frac{12}{24} = \frac{12}{24} \therefore$$

$$\therefore 108 = 24 \text{ كم/ساعة.}$$

Newton's Second Law

القانون الثاني لنيوتن

معدل التغير في كمية الحركة يتناسب مع القوة المحدثه له،
ويحدث في اتجاه القوة

$$\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} \quad (1) \quad \text{(حيث ثابت التناسب)}$$

وعند ثبوت كتلة الجسم أثناء الحركة فإن:

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$F = ma$$

وإذا عرفنا وحدة القوى بأنها القوة التي إذا أثرت على جسم كتلته وحدة الكتل لأكسبته وحدة العجلات، وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:

$$1 \times 1 = 1 \quad \therefore 1 = 1$$

ونأخذ المعادلة السابقة الصورة $F = ma$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة الحركة لجسم ثابت الكتلة، وتعتبر المعادلة الأساسية لعلم الديناميكا. إذ يمكن تطبيقها على جميع الأجسام المتحركة ثابتة الكتلة.

من معادلة الحركة السابقة نجد أن كل من F ، a ، m لهما نفس الاتجاه، فإذا قيست a في اتجاه معين لزم قياس F في الاتجاه نفسه؛ لذلك من الأنسب كتابة معادلة الحركة في الصورة:

$$F = ma$$

لتحديد اتجاه العجلة أولاً.

وإذا كانت a ، F تعبر عن القياس الجبري لكل من a ، F على الترتيب، فإن معادلة الحركة لجسم ثابت الكتلة تأخذ الصورة:

$$ك \cdot ج = و$$

حيث $ك$ كتلة الجسم المتحرك، $ج$ عجلة الحركة، $و$ تعبر عن القياس الجبري لمحصلة مجموعة القوى المؤثرة على الجسم، أى أن:

$$ك \cdot ج = و$$

Units of Force and Units of Mass

٨ وحدات القوة والكتلة

عند استنتاج معادلة الحركة لجسم متحرك اخترنا وحدات محددة لكل من القوة والكتلة والعجلة، حتى يكون ثابت التناسب مساوياً للواحد الصحيح، وتصبح معادلة الحركة على الصورة $ك \cdot ج = و$ ، لذلك عند استخدام معادلة الحركة، فإننا نستخدم الوحدات المطلقة للقوة مثل النيوتن، الداين

تذكر أن

١ كجم = ٩,٨ نيوتن
١ ث جم = ٩٨٠ داين

$$ك \times ج = و$$

$$١ كجم \times ١ م/ث^٢ = ١ نيوتن$$

$$١ جم \times ١ سم/ث^٢ = ١ داين$$

The Weight and the Mass

٩ الوزن والكتلة

وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم، فإذا كان لدينا جسم كتلته ١ كجم، فإن وزنه طبقاً لمعادلة الحركة يساوى ١ ث كجم

$$\therefore ك \cdot ج = و$$

$$\therefore ١ \times ٩,٨ = و$$

$$و = ٩,٨ نيوتن = ١ ث كجم$$

مثال

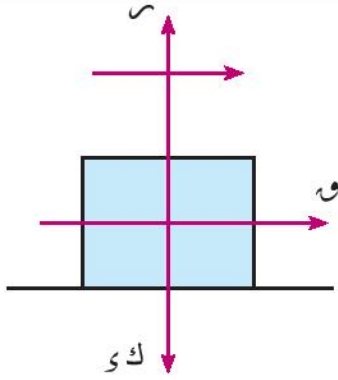
٦ أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن على جسم ساكن كتلته ٨ كجم، فحركته في اتجاهها بعجلة منتظمة، احسب المسافة المقطوعة بعد ١٢ ث وسرعته عندئذ.

الحل

$$و = ١٠ نيوتن ، ع = ؟$$

$$ك = ٨ كجم$$

$$ن = ١٢ ث$$



شكل (٧)

معادلة حركة الجسم

$$ك ج = و$$

$$\therefore ٨ ج = ١٠$$

$$ج = \frac{٥}{٤} م/ث$$

$$\therefore ع = ع.ج + ج.ن$$

$$\therefore ع = ١٢ \times \frac{٥}{٤} + ٠ = ١٥ م/ث$$

$$\therefore ف = ع.ن + ج.ن^٢$$

$$\therefore ف = ١٤٤ \times \frac{٥}{٤} \times \frac{١}{٤} + ٠ = ٩٠ متر$$

مثال

٧ سقط جسم كتلته ٣ كجم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٥ سم، أوجد مقاومة الرمل للجسم بثقل الكيلو جرام بفرض ثبوتها علمًا بأن الجسم تحرك بعجلة منتظمة داخل الرمل

الحل

مرحلة السقوط الحر

$$ع^٢ = ع.٢ + ٢.ف$$

$$ع^٢ = ١٠ \times ٩,٨ \times ٢ + ٠$$

$$ع = ١٤ م/ث$$

مرحلة الغوص في الرمل

$$ع^٢ = ع.٢ + ٢.ج.ف$$

$$٠ = ١٤ \times ٢ + ٢ \times ج \times ٠,٠٥$$

$$ج = -١٩٦٠ م/ث^٢$$

معادلة الحركة

$$ك ج = و - م$$

$$٣ \times ١٩٦٠ - = ٩,٨ \times ٣ - م$$

$$\therefore م = ١٩٦٠ \times ٣ + ٩,٨ \times ٣$$

$$م = ٥٩٠٩,٤ نيوتن$$

$$م = ٦٠٣ ث كجم$$

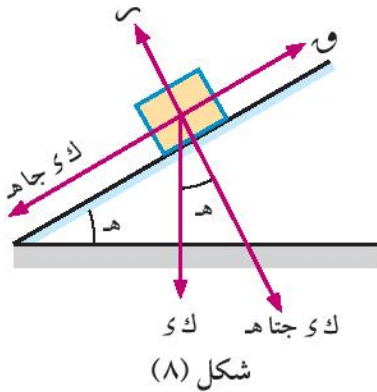
١٠ القانون الثالث لنيوتن:

لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه.

مثال

٨ جسم كتلته ١٢ كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ، أثرت عليه قوة مقدارها ٨٨,٨ نيوتن في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى، أوجد سرعة هذا الجسم بعد ١٤ ثانية من بدء الحركة، إذا أوقفت القوة المؤثرة على الجسم عند هذه اللحظة، أوجد المسافة التي يتحركها الجسم على المستوى بعد ذلك حتى يسكن

الحل



شكل (٨)

$$\therefore W = 88,8 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{كـ يـ جـاـهـ} = \frac{1}{2} \times 9,8 \times 12 =$$

$$= 58,8 \text{ نيوتن}$$

$$W < \text{كـ يـ جـاـهـ}$$

$\therefore$ الجسم يتحرك لأعلى المستوى بعجلة منتظمة جـ

معادلة الحركة:

$$\text{كـ جـ} = W - \text{كـ يـ جـاـهـ}$$

$$12 \text{ جـ} = 88,8 - 58,8$$

$$\text{جـ} = 2,5 \text{ م/ث}^2$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ع} + \text{جـ} = 0 + 2,5 \times 14 = 35 \text{ م/ث}$$

بعد إيقاف تأثير القوة يتحرك الجسم في نفس اتجاهه السابق بتقصير منتظم جـ

معادلة الحركة:

$$\text{كـ جـ} = - \text{كـ يـ جـاـهـ}$$

$$\text{جـ} = - \frac{1}{2} \times 9,8 = - 4,9 \text{ م/ث}^2$$

يقطع الجسم مسافة ف حتى يصل لسكون لحظي حيث

$$\text{ع}^2 = \text{ع}^2 + 2 \text{ جـ ف}$$

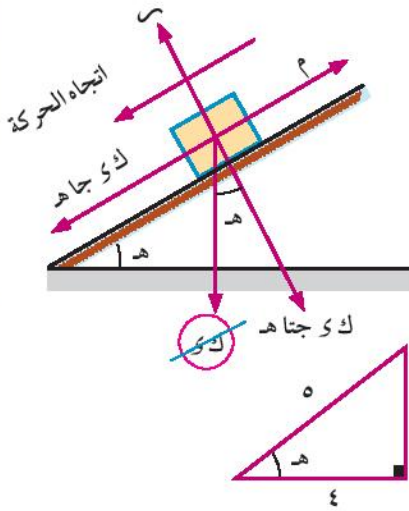
$$0 = (35)^2 - 2 \times 4,9 \text{ ف}$$

$$\text{ف} = 125 \text{ متر}$$

مثال

٩ مستوى مائل خشن طوله ٢٥٠ سم، وارتفاعه ١٥٠ سم، وُضع عليه جسم في حالة سكون فانزلق الجسم إلى أسفل المستوى، وكانت عجلة الحركة تساوي ١٩٦ سم/ث^٢، أوجد معامل الاحتكاك الحركي، ثم أوجد سرعة الجسم بعد أن يقطع ٢٠٠ سم على المستوى.

الحل



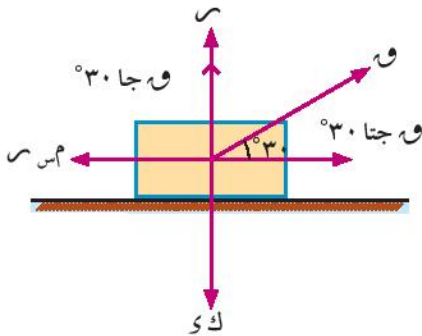
شكل (٩)

$$\begin{aligned}
 & \text{س} = \text{ك} \sin 30^\circ = \frac{\text{ك}}{2} \\
 & \therefore \text{الجسم يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة} \\
 & \text{ك ج} = \text{ك} \sin 30^\circ - \text{م} \text{ك} \text{س} \\
 & 196 \text{ ك} = \frac{3}{2} \text{ ك} - \text{م} \text{ك} \times \frac{\text{ك}}{2} \\
 & 196 = \frac{3}{2} - \text{م} \times \frac{1}{2} \\
 & 980 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \text{م} \times \frac{1}{2} \\
 & \therefore \text{م} = \frac{1}{2} \\
 & \therefore \text{ع} = 2 + 2 \text{ ج ف} \\
 & 200 \times 196 \times 2 + 0 = \text{ع} \\
 & \therefore \text{ع} = 280 \text{ سم/ث}
 \end{aligned}$$

مثال

١٠ جسم كتلته ١٢ كجم، موضوع على مستوى أفقى خشن، معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{3}{4}$ بينما معامل الاحتكاك الحركى يساوى $\frac{3}{4}$ احسب القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة، ثم أوجد القوة التى تجعله يتحرك بعجلة قدرها $\frac{3\sqrt{49}}{20}$ م/ث^٢ إذا كانت القوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°.

الحل



شكل (١٠)

أولاً: القوة تجعل الجسم على وشك الحركة

$$\begin{aligned}
 & \text{س} = \text{و} \sin 30^\circ = \frac{\text{و}}{2} \\
 & \text{س} = (12 - \frac{1}{4} \text{ و}) \text{ ث كجم} \\
 & \therefore \text{و} \sin 30^\circ = \text{م} \text{س} \\
 & \therefore \frac{3}{4} \text{ و} = (12 - \frac{1}{4} \text{ و}) \frac{3}{4} \\
 & 3 \text{ و} = 24 - \text{و} \\
 & 4 \text{ و} = 24 \\
 & \text{و} = 6 \text{ ث كجم}
 \end{aligned}$$

ثانياً: القوة تحرك الجسم بعجلة قدرها $\frac{3\sqrt{49}}{20}$ م/ث^٢

$$\begin{aligned}
 & \therefore \text{س} = \text{ك} \sin 30^\circ - \text{م} \text{ك} \text{س} = 9.8 \times 12 - \frac{1}{4} \text{ و} = 117.6 - \frac{1}{4} \text{ و} \text{ نيوتن} \\
 & \therefore \text{ك ج} = \text{و} \sin 30^\circ - \text{م} \text{ك} \text{س} \\
 & 12 \times \frac{3\sqrt{49}}{20} = \frac{3\sqrt{49}}{2} \times \text{و} - \frac{3\sqrt{49}}{4} (117.6 - \frac{1}{4} \text{ و}) \\
 & 9.8 \times 3\sqrt{49} - \frac{3\sqrt{49}}{8} \text{ و} = \frac{3\sqrt{49}}{20} \times 12 \\
 & \text{و} = 94.08 \text{ نيوتن}
 \end{aligned}$$

الحركة فى خط مستقيم

Rectilinear Motion

ثانياً
الديناميكا

الوحدة

١

مقدمة الوحدة

فى هذه الوحدة سوف ندرس الحركة الخطية لجسيم متحرك وتحليل هذه الحركة ودراسة الموضع والإزاحة وامتجه السرعة وعجلة الحركة للجسيم، ويتم تحديدها عند أى لحظة خلال حركة الجسيم على الخط المستقيم سواء كانت الحركة منتظمة أو غير منتظمة مستخدمين فى ذلك طرق التكامل والتفاضل لاستنتاج عناصر الدراسة وسيتم تحليل الحركة الخطية بيانياً من خلال منحنيات الحركة، واستخدام ذلك فى حل المسائل المختلفة، ولن تقتصر الدراسة على الجسيم المتحرك فقط ولكن سيؤخذ فى الاعتبار الأجسام الأخرى المختلفة كالسيارات والقطارات والطائرات وغير ذلك.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يستخدم $(ع = \frac{س}{ت})$ للتعبير عن السرعة إذا كانت الإزاحة دالة فى الزمن
- ✚ يستخدم $(ج = \frac{ع}{ت})$ للتعبير عن العجلة إذا كانت السرعة دالة فى الزمن
- ✚ يعبر عن العجلة $(ج = ع \frac{ع}{س})$ كدالة فى الإزاحة إذا كانت السرعة دالة فى الإزاحة
- ✚ إذا كانت كل من $ف$ و $ع$ جدوالاً فى الزمن فإن:
 - ✚ $ع = \frac{س}{ت} \Leftrightarrow س = ع \cdot ت$
 - ✚ $ج = \frac{ع}{ت} \Leftrightarrow ع = ج \cdot ت$
- ✚ إذا كانت جدالة فى الإزاحة فإن:
 - ✚ $ع = \frac{س}{ت} \Leftrightarrow س = ع \cdot ت$
 - ✚ $ج = \frac{ع}{ت} \Leftrightarrow ع = ج \cdot ت$

المصطلحات الأساسية

Average Velocity	متجه السرعة المتوسطة	Position Vector	متجه الموضع
	القياس الجبري لمتجه السرعة المتوسطة	Instantaneous Velocity Vector	متجه السرعة اللحظية
Algebraic Measure of Average Velocity Vector		Instantaneous Acceleration Vector	متجه العجلة اللحظية
Average Speed	متوسط مقدار السرعة		القياس الجبري لمتجه السرعة اللحظية
Average Acceleration Vector	متجه العجلة المتوسطة	Algebraic Measure of Instantaneous Velocity Vector	
	القياس الجبري لمتجه العجلة المتوسطة		القياس الجبري لمتجه العجلة اللحظية
Algebraic Measure of Average Acceleration Vector		Algebraic Measure of Instantaneous Acceleration Vector	

الأدوات والوسائل

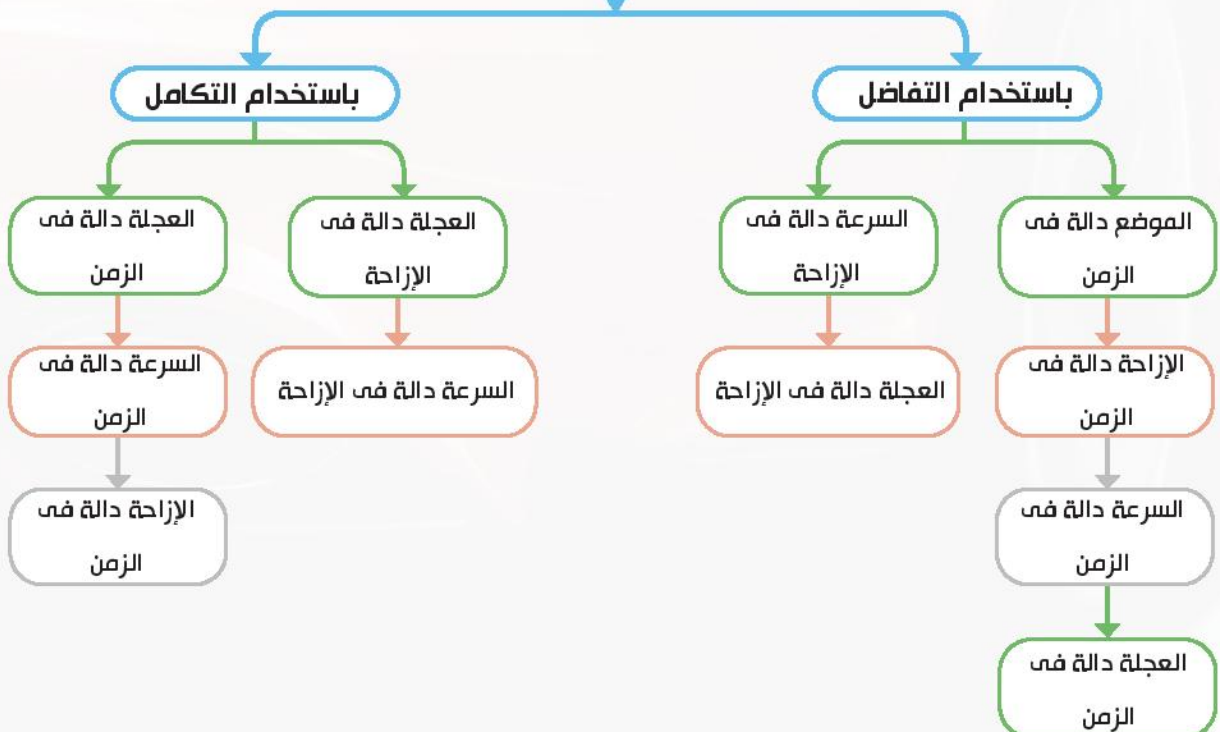
آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

دروس الوحدة

(١-١): تفاضل وتكامل الدوال المتجهة.

مخطط تنظيمي للوحدة

الحركة في خط مستقيم



تفاضل وتكامل الدوال المتجهة

Differentiation of Vector Functions

تعلم



١ - التكامل المحدد:

$$\int_a^b \vec{r}(s) ds = \vec{r}(b) - \vec{r}(a)$$

فمثلاً: $\int_1^4 (s^2 + s - 1) ds = \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} - s \right]_1^4 = \left(\frac{64}{3} + 8 - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{112}{3} - \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{112}{3} + \frac{1}{6} = \frac{224}{6} + \frac{1}{6} = \frac{225}{6} = \frac{75}{2}$

$$= \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} - s \right]_1^4 = \left(\frac{64}{3} + 8 - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{112}{3} - \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{112}{3} + \frac{1}{6} = \frac{224}{6} + \frac{1}{6} = \frac{225}{6} = \frac{75}{2}$$

وسوف يدرس التكامل المحدد في كتاب التفاضل.

Rectilinear Motion

١ - الحركة في خط مستقيم:

إذا تحرك جسيم في خط مستقيم فيقال إنه يتحرك حركة خطية.

Position Vector

متجه الموضع :

متجه موضع الجسيم كمية متجهه و يمكن التعبير عنها كدالة في الزمن و يرمز له بالرمز $\vec{r}(t)$ و يقاس معياره بوحدة طول.



إذا تحرك جسيم على المستقيم ل وكانت النقطة و $\exists$ ل، $\vec{r}$ متجه وحدة يوازي المستقيم ل فإن متجه موضع الجسيم عند النقطة أ بالنسبة للنقطة و هو $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}$.

Displacement Vector

متجه الإزاحة :

يعرف متجه إزاحة جسيم بأنه التغير في متجه موضعه و يرمز له بالرمز $\vec{s}$.

$$\vec{s} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$$

المسافة المقطوعة كمية قياسية (تحدد بمعلومية مقدارها فقط)، بينما الإزاحة كمية متجهه (تحدد بمعلومية المقدار و الإتجاه)

إذا كانت ف دالة في الزمن (ن) فإن:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

إذا كانت ع دالة في الزمن (ن) فإن:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

إذا كانت ع دالة في

الازاحة (ف) فإن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{ds}$$

المصطلحات الأساسية

الحركة في خط مستقيم

Rectilinear Motion

موضع الجسيم

Position of the Particle

الإزاحة

Distance

مقدار السرعة

Speed

متجه السرعة

Velocity

متجه السرعة المتوسطة

Average Velocity

متجه السرعة اللحظية

Instantaneous Velocity

العجلة المتوسطة

Average Acceleration

العجلة

Accelertion

الأدوات المستخدمة

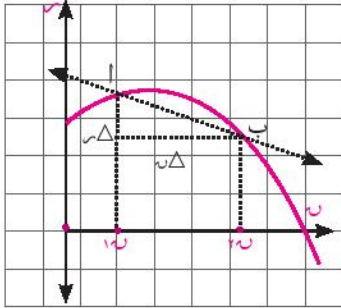
آلة حاسبة علمية.

برامج رسومية للحاسب

◀ معيار متجه الإزاحة > المسافة المقطوعة.

◀ تستخدم الرموز $\vec{r}$ ، $\vec{v}$ للتعبير عن القياس الجبري لمتجهات الموضع $\vec{r}$ ، $\vec{v}$ على الترتيب.

Average Velocity Vector



متجه السرعة المتوسطة :

إذا كانت $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ هي إزاحة الجسم خلال فترة زمنية Δt فإن متجه

السرعة المتوسطة $\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ فمن منحني الموضع الزمن: إذا كانت $\Delta t = t_2 - t_1$ فإن القياس الجبري للسرعة المتوسطة $\vec{v}_{avg}$ يساوي ميل القاطع $\vec{AB}$ لمنحني الموضع-الزمن.

Instantaneous velocity vector

متجه السرعة اللحظية :

ويعرف متجه السرعة اللحظية $\vec{v}$ عند أي لحظة زمنية t بالعلاقة:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

ومن تعريف المشتقة يتضح أن: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (ميل المماس لمنحني الموضع - الزمن)

وبالتالي: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، $\vec{r} = \int \vec{v} dt$ ، $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، $\vec{r} = \int \vec{v} dt$

◀ المسافة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[t_1, t_2] = \Delta t$ هي $\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$

◀ أي أن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين محور الزمن

ومنحني السرعة الزمن في هذه الفترة.

Average Speed

متوسط مقدار السرعة :

متوسط مقدار سرعة الجسم خلال فترة زمنية Δt يساوي خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن المستغرق

$$\text{متوسطة مقدار السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

مثال

١ قذف حجر رأسياً لأعلى، وكان ارتفاعه h بعد t ثانية من قذفه يعطى بالعلاقة $h = 4.9t^2 - 9t + 4$ حيث h بالمتر.

أ أوجد أقصى ارتفاع يبلغه الجسم المقذوف.

ب أوجد القياس الجبرى لمتجه السرعة عندما يكون الحجر على ارتفاع 78.4 متراً، ثم أوجد معيار سرعته عندئذ.

ج ارسم كلاً من منحني الموضع - الزمن ومنحني السرعة - الزمن واستخدمه فى تحليل الحركة.

الحل

فى النظام الإحداثى للحركة فى خط مستقيم نعتبر h تقيس الارتفاع (الموضع) عن نقطة القذف، t تكون موجبة فى حالة الحركة لأعلى.

$$\therefore h = 4.9t^2 - 9t + 4$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = 9.8t - 9$$

$$\therefore h = 4.9t^2 - 9t + 4$$

أ يبلغ الحجر أقصى ارتفاع له عندما $\frac{dh}{dt} = 0$.

$$\therefore 0 = 4.9t^2 - 9t + 4$$

$$\therefore t = 0.5 \text{ ث}$$

$$\therefore \text{أقصى ارتفاع } h = 4.9(0.5)^2 - 9(0.5) + 4 = 122.5 \text{ متر}$$

ب يكون الحجر على ارتفاع 78.4 متر عندما $h = 78.4$ متر

$$\therefore 78.4 = 4.9t^2 - 9t + 4$$

$$\therefore 4.9t^2 - 9t - 74.4 = 0$$

بقسمة طرفى المعادلة على 4.9 نجد أن: $t^2 - 1.8t - 15.16 = 0$

$$\therefore (t - 2)(t + 8) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ ث أو } t = -8 \text{ ث}$$

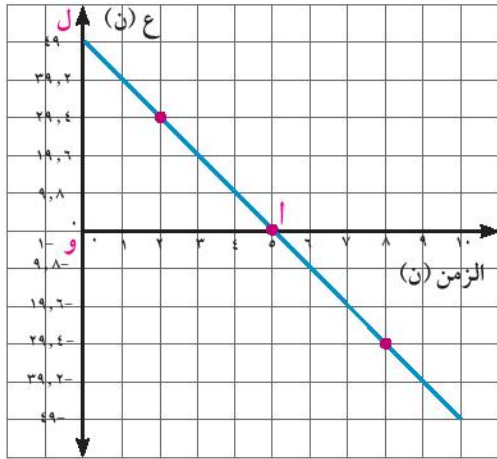
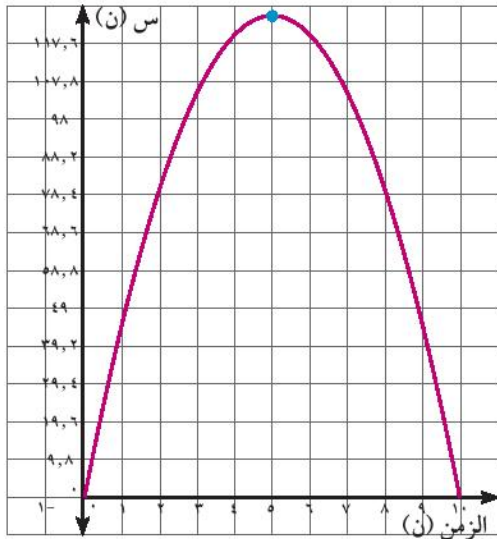
$$\therefore v = 9.8t - 9 = 9.8(2) - 9 = 29.6 \text{ م/ث}$$

$$\therefore v = 9.8t - 9 = 9.8(-8) - 9 = -79.4 \text{ م/ث}$$

أى أن: الحجر يكون على ارتفاع 78.4 متر مرة صاعداً بعد 2 ث ومرة هابطاً بعد 8 ث

القياس الجبرى لمتجه السرعة إما 29.6 أو -29.6

$$\therefore \text{مقدار سرعة الحجر فى الحالتين } = |29.6| = 29.6 \text{ م/ث}$$



جـ من منحنى الموضع - الزمن نجد أن:

- ◀ الحجر يبلغ أقصى ارتفاع له ١٢٢,٥ متر عندما $t = ٥$ ث (نقطة رأس المنحنى).
- ◀ يعود الحجر لنقطة القذف مرة أخرى عندما $t = ١٠$ ث (النقطة ب (١٠, ٠)).
- ◀ مرحلة الصعود استغرقت ٥ ثوان، ومرحلة الهبوط استغرقت ٥ ثوان أخرى.
- ◀ الحجر كان على ارتفاع ٧٨,٤ متر عندما $t = ٢$ ث، $t = ٨$ ث

من منحنى السرعة - الزمن نجد أن:

- ١- السرعة الابتدائية للحجر كانت ٤٩ م / ث وأخذت سرعته في التناقص خلال الفترة الزمنية [٠, ٥] حتى سكن لحظياً عندما $t = ٥$ وعندها وصل لأقصى ارتفاع له ثم أخذت سرعته في التزايد في الاتجاه المضاد في الفترة الزمنية [٥, ١٠] حتى عاد مرة أخرى لنقطة القذف عندما $t = ١٠$ ث بنفس سرعة القذف ٤٩ م / ث.

٢- يمكن حساب أقصى ارتفاع للحجر من خلال منحنى السرعة - الزمن بإحدى طريقتين:

$$\text{أقصى ارتفاع} = \text{مساحة } \triangle \text{ و } \frac{1}{2} \times \text{و} \frac{1}{2} \times \text{و} \frac{1}{2} \times ٤٩ \times ٥ = ١٢٢,٥ \text{ متر}$$

بحساب التكامل

$$\text{أقصى ارتفاع} = \int_0^5 v \, dt = \int_0^5 (49 - 9.8t) \, dt = [49t - 4.9t^2]_0^5 = 122.5 \text{ متر}$$

تفكير ناقد: كيف تحسب من المنحنى السابق السرعة - الزمن في مثال (١) المسافة المقطوعة خلال رحلة الحجر حتى عودته إلى نقطة القذف، وكذلك إزاحته خلال هذا الزمن؟

٤ حاول أن تحل:

١) جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث كان موضعه $\vec{r}$ عند أي لحظة زمنية t يعطى بالعلاقة $\vec{r}(t) = (2t^2 + 4t - 3) \vec{i}$ حيث $\vec{i}$ مقاسه بالمتر، $\vec{j}$ بالثانية، $\vec{k}$ متجه وحدة في اتجاه حركة الجسيم.

أ) أوجد إزاحة الجسيم خلال الثواني الثلاث الأولى

ب) أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما $t \in [0, 2]$

ج) أوجد متجه سرعة الجسم عندما $n = 4$

د) من خلال منحنى السرعة - الزمن، منحنى الموضع - الزمن قم بتحليل حركة الجسم، وبين متى يغير الجسم اتجاه حركته.

Average Acceleration

متجه العجلة المتوسطة :

إذا كانت $\Delta \vec{v}$ تعبر عن التغير في متجه السرعة خلال الفترة الزمنية Δt فإن متجه العجلة المتوسطة $\vec{a}_{\text{متوسط}}$ يعطى بالعلاقة

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \text{ أى أن } \vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\vec{v} - (\vec{v} + n\Delta t)}{\Delta t}$$

متجه العجلة اللحظية :

يعرف متجه العجلة اللحظية $\vec{a}$ عند أى لحظة زمنية n بالعلاقة:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v} - (\vec{v} + n\Delta t)}{\Delta t}$$

ومن تعريف المشتقة $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

أى أن متجه العجلة هو معدل تغير متجه السرعة بالنسبة للزمن (ميل المماس لمنحنى السرعة - الزمن)

$$\text{وبالتالى } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ أى أن } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ أى أن } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

الحركة المتسارعة والحركة التقصيرية:

إذا تحرك جسم حركة متغيرة فيقال أن الحركة:

متسارعة: إذا كانت $a < 0$ وهذا يعنى أن مقدار السرعة (مقياس متجه السرعة) يزداد.

تقصيرية: إذا كانت $a > 0$ وهذا يعنى أن مقدار السرعة (مقياس متجه السرعة) ينقص.

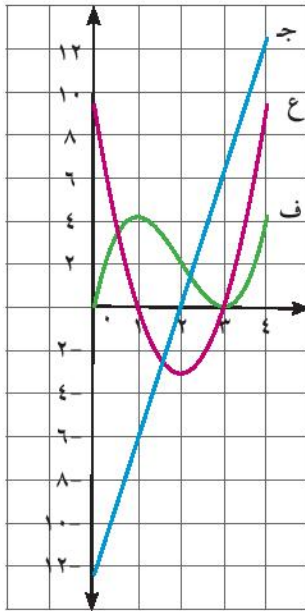
مثال

٢) إذا كان القياس الجبرى لإزاحة جسم يتحرك فى خط مستقيم يعطى بالعلاقة $f = n^2 - 6n^2 + 9n$ حيث f مقاسه بالمتر ، n بالثانية

أ) أوجد عجلة الجسم عند انعدام السرعة

ب) أوجد مقياس سرعة الجسم عندما تنعدم العجلة

ج) أوجد المسافة المقطوعة بواسطة الجسم خلال الفترة من $n = 0$ إلى $n = 2$



الحل

$$\therefore \text{ف} = \text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9 \quad \therefore \text{ع} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9}{\text{ن}} = \text{ن} - 6 + \frac{9}{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{\text{ع}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9}{\text{ن}^2} = 1 - \frac{6}{\text{ن}} + \frac{9}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أ} \quad \text{تتعدم سرعة الجسم عندما} \quad \text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9 = 0 \quad \therefore \text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9 = 0$$

$$\therefore \text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9 = 0$$

$$(\text{ن} - 3)^2 = 0 \quad \text{عندما} \quad \text{ن} = 3 \quad \text{أو} \quad \text{ن} = 3$$

$$\text{ج} (1) = 1 - \frac{6}{1} + \frac{9}{1} = 4 \text{ م/ث}^2$$

$$\text{ج} (3) = 1 - \frac{6}{3} + \frac{9}{9} = 1 \text{ م/ث}^2$$

$$\text{ب} \quad \text{تتعدم عجلة الجسم عندما} \quad \text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9 = 0 \quad \therefore \text{ن} = 3$$

$$\text{مقياس السرعة} = | \text{ع} | = | \text{ن} - 6 + \frac{9}{\text{ن}} | = | 3 - 6 + \frac{9}{3} | = 0 \text{ م/ث}$$

ج من دراسة منحنى السرعة - الزمن لحركة الجسم أو بدراسة إشارة ع (ن) نجد أن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب في الفترة $0 < \text{ن} < 3$ ثم يغير اتجاه حركته ويتحرك في الاتجاه المضاد في الفترة $\text{ن} > 3$.

$\therefore$ المسافة المقطوعة من $\text{ن} = 0$ إلى $\text{ن} = 3$ خلال الثانية الأولى والثانية

$$= \int_0^3 (\text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9) d\text{ن} = \left[\frac{\text{ن}^3}{3} - 3\text{ن}^2 + 9\text{ن} \right]_0^3 = 9 \text{ م}$$

$$= \int_3^4 (\text{ن}^2 - 6\text{ن} + 9) d\text{ن} = \left[\frac{\text{ن}^3}{3} - 3\text{ن}^2 + 9\text{ن} \right]_3^4 = 1 \text{ م}$$

$$= \left[\frac{\text{ن}^3}{3} - 3\text{ن}^2 + 9\text{ن} \right]_0^3 + \left[\frac{\text{ن}^3}{3} - 3\text{ن}^2 + 9\text{ن} \right]_3^4 = 9 + 1 = 10 \text{ أمتار}$$

مثال

١ بدأ جسم حركته في خط مستقيم من نقطة الأصل بسرعة ابتدائية قدرها ٨ م/ث وكانت عجلة الحركة بعد ٢ ثانية تعطى بالعلاقة (٣ - ن) أوجد كلاً من سرعة الجسم وإزاحته بعد ٢ ث من بدء الحركة.

الحل

$$\therefore \text{ج} = \text{ن}^2 - 3\text{ن} \quad \therefore \text{ع} = \text{ن}^2 - 3\text{ن} \quad \therefore \text{ع} = \frac{\text{ج}}{\text{ن}} = \text{ن} - 3$$

$$\therefore \text{ع} = 8 \text{ م/ث} \quad \therefore \text{ع} = 8 \text{ م/ث عندما} \quad \text{ن} = 0 \quad \therefore \text{ث} = 8$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ن}^2 - 3\text{ن} \quad \therefore \text{ع} = 10 \text{ م/ث} \quad \therefore \text{ع} = 10 \text{ م/ث عندما} \quad \text{ن} = 4$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ن}^2 - 3\text{ن} \quad \therefore \text{ع} = 10 \text{ م/ث} \quad \therefore \text{ع} = 10 \text{ م/ث عندما} \quad \text{ن} = 4$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ن}^2 - 3\text{ن} \quad \therefore \text{ع} = 10 \text{ م/ث} \quad \therefore \text{ع} = 10 \text{ م/ث عندما} \quad \text{ن} = 4$$

$$\therefore s = \frac{1}{4}n^3 - 2n^2 + 8n$$

$$\therefore s = 0 \text{ عندما } n = 0 \therefore t = 0$$

$$f(2) = s(2) - s(0) = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

حل آخر:

$$\therefore \frac{ds}{dn} = 3 - 4n$$

$$\therefore 3 - 2n = 0$$

$$\therefore 8 - \frac{3}{4}n^2 = 2n^2$$

$$\therefore s = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

$$\therefore s(2) = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

$$\therefore s = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

$$\therefore f(2) = s(2) - s(0) = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

$$\therefore f(2) = s(2) - s(0) = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

$$\therefore f(2) = s(2) - s(0) = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

٩ حاول أن تحل

٢ جسيم يتحرك في خط مستقيم مبتدئاً من السكون وعلى بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت $s = 6 - 4t + t^2$ حيث s مقاسة بوحدتي م/ث^٢ فأوجد العلاقة بين السرعة والزمن، كذلك العلاقة بين الإزاحة والزمن.

مثال

٢ بدأت سيارة حركتها من السكون في خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط ويعطى القياس الجبري لمتجه سرعتها بعد زمن n بالعلاقة $s = 3n^2 - 6n$ حيث s مقاسة بوحدتي م/ث^٢، n مقاسة بالثانية. أوجد كلاً من متجه السرعة المتوسطة ومتوسط مقدار السرعة خلال الفترة الزمنية $0 < n < 3,5$

الحل



$$\therefore s = 3n^2 - 6n \quad \therefore s = 3(3.5)^2 - 6(3.5)$$

نجد أن السيارة تغير اتجاه حركتها بعد ٢ ث ويوضح ذلك بحث إشارة s (ن) أو منحنى السرعة - الزمن

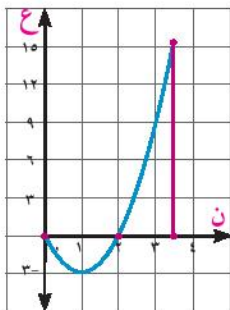
$$\therefore f = \frac{1}{4}(2)^3 - 2(2)^2 + 8(2) = 16 \text{ متر}$$

$$= \frac{49}{8} = \frac{3(3.5)^2 - 6(3.5)}{8} = \frac{3.5}{8}$$

$$\therefore \text{متجه السرعة المتوسطة} = \frac{\frac{49}{8}}{3.5} = \frac{1}{8} \text{ م/ث}$$

حيث $\frac{1}{8}$ متجه وحدة في اتجاه الحركة ، ويكون القياس الجبري لمتجه السرعة المتوسطة يساوي ١,٧٥ م/ث

المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية $n \in [0, 3.5]$

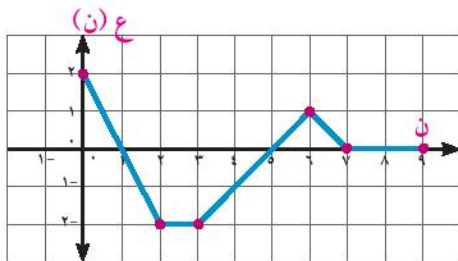


[illegible]

٩ حاول أن تحل

٣ بدأت سيارة حركتها من السكون في خط مستقيم من نقطة ثابتة على هذا الخط، ويعطى القياس الجبري لمتجه السرعة v بعد زمن t بالعلاقة $v = at - \frac{1}{2}at^2$ حيث a مقاسة بوحدته م/ث، t مقاسة بالثانية أوجد خلال الفترة الزمنية $t \in [0, 4]$ كلاً من متوسط مقدار السرعة ومنتجه السرعة المتوسطة. متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى؟ وأوجد مقدار العجلة عندئذ.

تفكير ناقد:



الشكل المرفق يبين سرعة جسيم $e = d(n)$ يتحرك في خط مستقيم.

- أ متى يتحرك الجسيم للأمام ومتى يتحرك للخلف؟ ومتى تتسارع حركته ومتى تتباطأ؟
- ب متى تكون عجلة الحركة موجبة ؟ ومتى تكون سالبة؟ ومتى تنعدم؟
- ج متى تصل سرعة الجسيم إلى قيمتها العظمى؟
- د متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية واحدة؟

استنتاج العجلة عندما تكون السرعة دالة في الموضع:

إذا كانت $د = د(س)$ ، $د = د(ن)$

فباستخدام قاعدة السلسلة يمكن استنتاج أن: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}}$

أى أن: $ج = ع \cdot \frac{ع}{س}$ وبالتالي $س = ع \div ج$
وباستخدام التكامل المحدد مع حدود تكامل مناسبة نجد أن:

$$e_{\beta} e_{\gamma} = e_{\beta \gamma}$$

وعند ثبوت العجلة ج يكون: $\frac{1}{\rho} (e^2 - e) = \text{ج سبيل ج س}$ ← $\frac{1}{\rho} (e^2 - e) = \text{ج (س - س)}$

$$\frac{1}{2} = ({}^2\text{ع} - {}^2\text{ع}) \leftarrow {}^2\text{ع} = {}^2\text{ع} + {}^2\text{جف}$$

مثال

٣ جسم يتحرك في خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته $\vec{v}$ يعطى بالعلاقة $\vec{v} = \frac{1}{3}(400 - s^2)$ حيث s تعبر عن القياس الجبرى للموضع s ، أوجد القياس الجبرى لعجلة الحركة $\vec{a}$ عندما $s = 10$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \vec{v} &= \frac{1}{3}(400 - s^2) \\ \therefore \vec{a} &= \frac{dv}{ds} = \frac{1}{3}(-2s) \\ \therefore \vec{a} &= -\frac{2s}{3} \\ \therefore \vec{a} &= -\frac{2 \times 10}{3} = -\frac{20}{3} \text{ وحدة عجلة} \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٤ جسم يتحرك في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين s تعطى فى الصورة $\vec{v} = \frac{s^2}{s+4}$ حيث $\vec{v}$ مقاسة بوحدة م/ث، s مقاسة بوحدة متر. أوجد عجلة الحركة عندما $s = 2$ متر.

مثال

٤ جسم يتحرك في خط مستقيم يبدأ حركته من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان القياس الجبرى لعجلته $\vec{a}$ يعطى بدلالة القياس الجبرى لموضعه s بالعلاقة $\vec{a} = 2s + 5$ علمًا بأن سرعة الجسم الابتدائية 2 م/ث فأوجد:

- أ $\vec{a}$ بدلالة s
 ب أوجد مقدار سرعة الجسم عندما $s = 1$
 ج أوجد s عندما $\vec{a} = 4$ م/ث

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ} \therefore \vec{a} &= 2s + 5 \\ \therefore \vec{a} &= \frac{d^2s}{dt^2} = 2s + 5 \\ \therefore \frac{d^2s}{dt^2} &= 2s + 5 \\ \text{ب} \text{ عندما } s = 1 \text{ نجد أن:} \\ \therefore \vec{a} &= 2(1) + 5 = 7 \text{ م/ث}^2 \\ \text{ج} \text{ عندما } \vec{a} = 4 \text{ م/ث}^2 \text{ نجد أن:} \\ 4 &= 2s + 5 \\ \therefore 2s &= 4 - 5 = -1 \\ \therefore s &= -\frac{1}{2} \text{ متر أو } s = 0.5 \text{ متر} \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

- ٥ سيارة تتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث من موضع يبعد ٤ أمتار في الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت ح = س - ٤ فأوجد:
- أ ع^٢ بدلالة س
- ب أوجد سرعة السيارة عندما ج = ٠

مثال

- ٥ جسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية قدرها ٨ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت ج = ٤٠ هـ - س^٢، أوجد:
- أ ع^٢ بدلالة س
- ب أوجد س عندما ع = ١٠ م/ث
- ج عين أقصى سرعة للجسيم.

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \therefore \text{ج} = 40 - \text{هـ} \quad \therefore \text{ج} = 40 - \text{هـ} \\ \therefore 40 - \text{هـ} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = 40 - \text{هـ} \\ \therefore \text{ع} = \frac{1}{4} [\text{س}]^2 = \frac{1}{4} (40 - \text{هـ})^2 \\ \therefore \text{ع} = \frac{1}{4} (1600 - 80\text{هـ} + \text{هـ}^2) \\ \therefore \text{ع} = 400 - 20\text{هـ} + \frac{\text{هـ}^2}{4} \\ \therefore \text{ع} = 400 - 20(40 - \text{س}) + \frac{(40 - \text{س})^2}{4} \\ \therefore \text{ع} = 400 - 800 + 20\text{س} + \frac{1600 - 80\text{س} + \text{س}^2}{4} \\ \therefore \text{ع} = 400 - 800 + 20\text{س} + 400 - 20\text{س} + \frac{\text{س}^2}{4} \\ \therefore \text{ع} = \frac{\text{س}^2}{4} \\ \therefore \text{ع} = \frac{16}{4} = 4 \text{ م}^2/\text{ث}^2 \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

- ٦ جسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت ج = هـ - س، أوجد ع^٢ بدلالة س ثم أوجد ع عندما س = ٤ متر، س عندما ع = ٢٠ م/ث.



تمارين ١ - ١

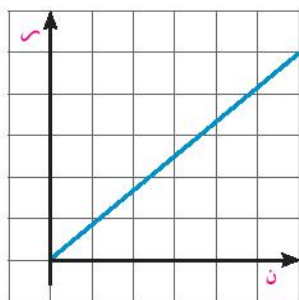


فى جميع المسائل اعتبر أن الجسم يتحرك فى خط مستقيم ، s ، c ، j هى القياسات الجبرية لكل من الموضوع ، متجه السرعة ، العجلة على الترتيب :

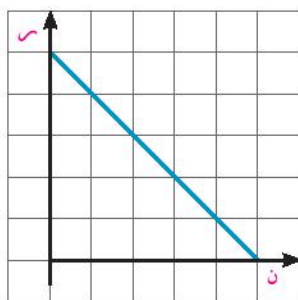
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) جسم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت $c = 3$ هـ فإن سرعته الابتدائية تساوى
 أ) ٣ ب) هـ ج) ٣ هـ د) ٥ هـ
- ٢) جسم يتحرك فى خط مستقيم ، ومعادلة حركته $s = 2t^2$ فإن عجلة الحركة حـ تساوى
 أ) $2t$ ب) ٢ قان ج) $2c$ د) c
- ٣) جسم يتحرك فى خط مستقيم وكانت معادلة حركته $s = 2 + t(1 + t)$ فإن
 أ) سرعته وعجلة الحركة تتناقصان دائماً. ب) سرعته وعجلة الحركة تتزايدان دائماً.
 ج) السرعة تتناقص وعجلة الحركة تزداد. د) السرعة تتزايد وعجلة الحركة تتناقص.
- ٤) إذا كان $c = 3t^2 - 2t$ ، وكانت $s = 1$ عندما $t = 0$ فإن :
 أ) $s = 6t - 2$ ب) $s = 3t^2 - 2t + 1$ ج) $s = 3t^2 - 2t + 1$ د) $s = 3t^2 - 2t - 1$
- ٥) إذا كان $c = 1 + t$ ، وكانت $s = 2$ عندما $t = 0$ فإن :
 أ) $s = t + 2$ ب) $s = t - 2$ ج) $s = t + 2$ د) $s = t - 2$
- ٦) إذا كان $c = 3t - 2$ ، فإن ف خلال الفترة $[0, 2]$
 أ) ١ وحدة طول ب) ٢ وحدة طول ج) ٣ وحدة طول د) ٤ وحدة طول
- ٧) إذا كان $c = 3t^2 - 2t$ ، فإن المسافة المقطوعة خلال $[0, 2]$
 أ) $\frac{4}{3}$ وحدة طول ب) ٤ وحدة طول ج) $\frac{112}{37}$ وحدة طول د) $\frac{117}{37}$ وحدة طول
- ٨) إذا كانت $c = 3t^2 - 2t + 3$ ، فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية $[0, 3]$
 أ) $\frac{1}{4}$ وحدة طول ب) $\frac{1}{4}$ وحدة طول ج) $\frac{9}{4}$ وحدة طول د) $\frac{11}{4}$ وحدة طول
- ٩) إذا كانت حـ = ٣ ، $c = 1 - t$ فإن ف خلال الفترة الزمنية $[0, 2]$
 أ) $\frac{1}{4}$ وحدة طول ب) ٤ وحدة طول ج) $\frac{25}{4}$ وحدة طول د) $\frac{13}{4}$ وحدة طول
- ١٠) إذا كانت حـ = ٣ ، $c = 1 - t$ فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية $[0, 2]$
 أ) $\frac{1}{4}$ وحدة طول ب) ٤ وحدة طول ج) $\frac{25}{4}$ وحدة طول د) $\frac{13}{4}$ وحدة طول

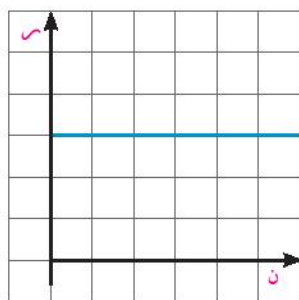
١١) تخير الرسم البياني المناسب أمام كل جملة من الجمل الآتية :



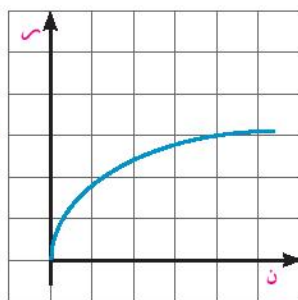
شكل أ



شكل ب



شكل ج

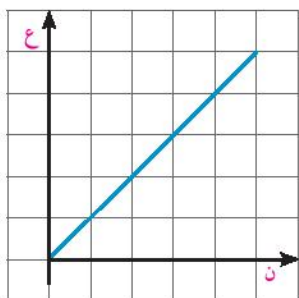


شكل د

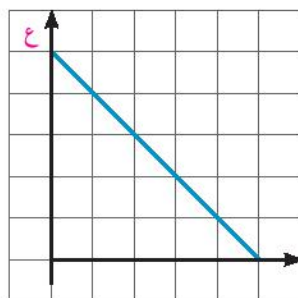
(٢) الجسم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة
(٤) سرعة الجسم تتناقص

(١) الجسم متوقف
(٣) الجسم يرجع للخلف

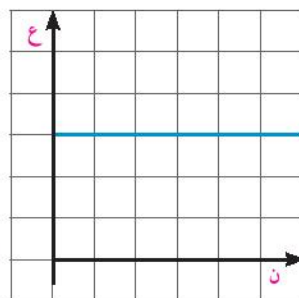
١٢) تخير الرسم البياني المناسب أمام كل جملة من الجمل الآتية:



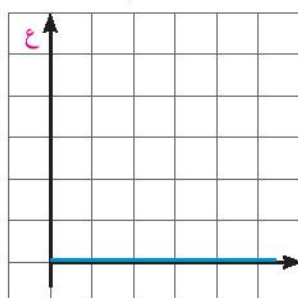
شكل أ



شكل ب



شكل ج

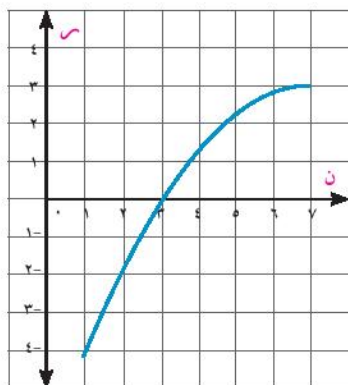


شكل د

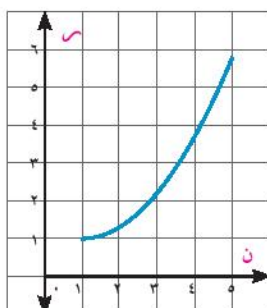
(٢) الجسم يتحرك بسرعة ثابتة
(٤) حركة الجسم متسارعة

(١) حركة الجسم تقصيرية
(٣) الجسم متوقف

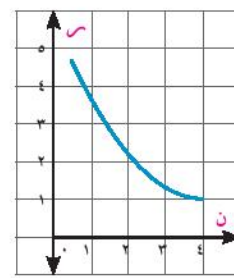
١٣) في كل من المنحنيات المرسومة (منحنى الموضع - الزمن) حدد إشارة القياس الجبري لمتجه السرعة، ثم عين ما إذا كان الجسم يتحرك بتسارع أو يتباطأ (يتحرك ببطء).



شكل (١)

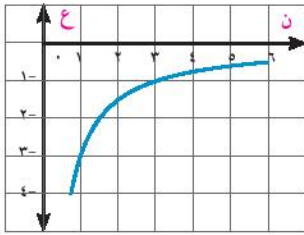


شكل (٢)

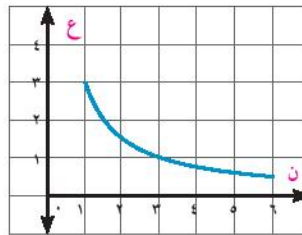


شكل (٣)

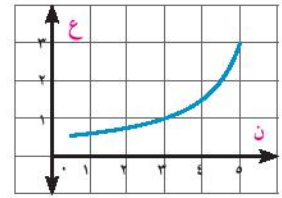
١٤ فى كل من المنحنيات المرسومة (منحنى السرعة - الزمن) حدد إشارة العجلة، وبين إذا كان الجسم يتحرك بتسارع أو يتحرك بتباطؤ.



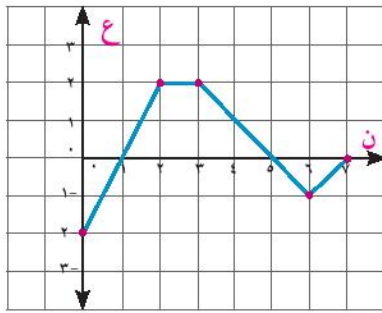
شكل (٣)



شكل (٢)

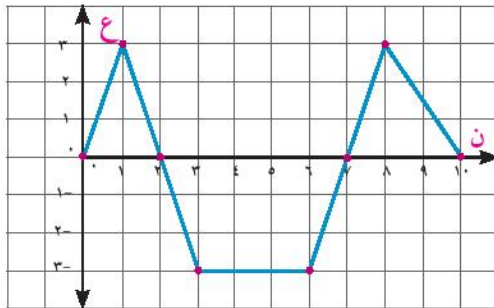


شكل (١)



١٥ من منحنى السرعة - الزمن المقابل فإن مقدار الإزاحة

- أ ٣ وحدة طول
- ب ٥ وحدة طول
- ج ٧ وحدة طول
- د ٨ وحدة طول



١٦ من منحنى السرعة - الزمن المقابل، فإن المسافة المقطوعة =

- أ ٤,٥ وحدة طول
- ب ١٠,٥ وحدة طول
- ج ١٣,٥ وحدة طول
- د ١٩,٥ وحدة طول

١٧ إذا كانت $a = 3$ م فأوجد ج بدلالة م ثم أوجد ج عندما $a = 2$

١٨ يتحرك جسم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه السرعة ع فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة $a = v + \frac{1}{v}$ ، أوجد عجلة الحركة عندما $a = 2$ حيث م مقاسة بالمتري، ع مقاسة بوحد م/ث.

١٩ جسم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لسرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع م بالصورة $a = \frac{1}{3} - v$ ، أوجد ح بدلالة م، ثم أوجد ح عندما $a = \frac{1}{3}$

- ٢٠) جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى للسرعة c يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع s بالصورة $c^2 = 16 - 9s$ ، أوجد أقصى سرعة للجسيم وعجلة الحركة عندئذ.
- ٢١) قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها $6,5$ م/ث من نقطة على ارتفاع $24,5$ متر من سطح الأرض أوجد كل من c ، s بدلالة t ثم أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.
- ٢٢) جسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية 2 م/ث من نقطة ثابتة بحيث كانت $c = 2 - 6t$ حيث c مقاسة بوحدة م/ث^٢ أوجد بدلالة t كل من c ، s ثم أوجد s عندما $c = 18$ م/ث
- ٢٣) جسيم يتحرك في خط مستقيم من نقطة ثابتة على المستقيم مبتدأ من السكون بحيث كانت $c = 8 - 2t^2$ حيث c مقاسة بوحدة م/ث^٢ أوجد أقصى سرعة للجسيم والمسافة المقطوعة حتى يصل لأقصى سرعة.
- ٢٤) جسيم يتحرك في خط مستقيم من نقطة ثابتة على المستقيم مبتدأ من السكون بحيث كانت $c = \frac{3}{8}s$ حيث c مقاسة بوحدة م/ث^٢، s بالمتري. أوجد سرعة الجسيم عندما يكون $s = 2$ متر، ثم أوجد موضعه عندما تكون $c = 4$ م/ث
- ٢٥) جسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية 3 م/ث من نقطة ثابتة بحيث $c = 6s + 4$ حيث c مقاسة بوحدة م/ث^٢، s بالمتري أوجد c بدلالة s ، أوجد سرعة الجسيم عندما $s = 2$ ثم أوجد s عندما $c = 87$

المصطلحات الأساسية

Pulley	بكرة ملساء	Reaction	رد الفعل	Momentum	كمية الحركة
Impulse	الدفع	Lift motion	حركة المصاعد	Equation of Motion	معادلة الحركة
Impulsive Forces	القوى الدفعية	Spring scale	ميزان الزنبرك	Weight	الوزن
		Pressure scale	ميزان الضغط	Newton's Third Law	القانون الثالث لنيوتن
		balance	ميزان معتاد	Pressure	الضغط

دروس الوحدة

(١ - ٢): حركة أجسام متغيرة الكتلة أو العجلة.

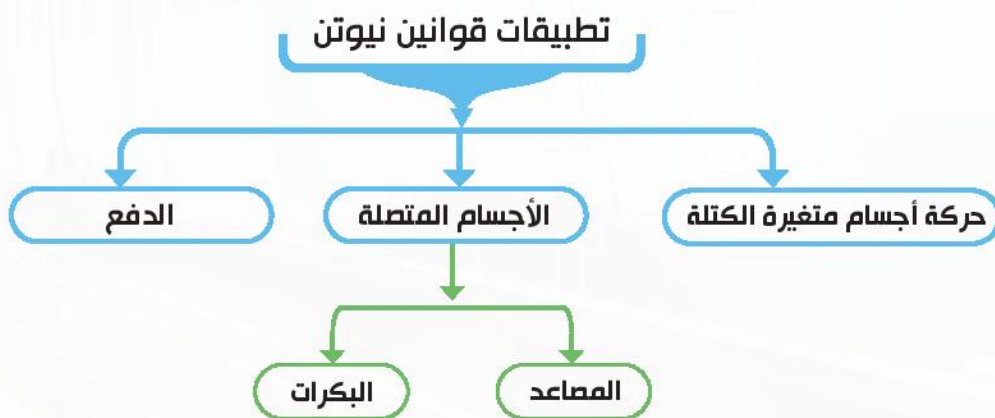
(٢ - ٢): حركة الأجسام المتصلة

(٢ - ٣): الدفع

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

مخطط تنظيمي للوحدة



تطبيقات على قوانين نيوتن

وحركة الأجسام ذات الكتلة المتغيرة

Applications on Newton's Laws

الوحدة الثانية

١ - ٢

فكر و ناقش



نعلم من القانون الأول لنيوتن أن محصلة القوى المؤثرة على جسم متحرك بسرعة منتظمة تنعدم، أما إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على الجسم لا تساوى صفراً، فإن الجسم سيتحرك بعجلة .

هل توجد علاقة بين مقدار القوة المحصلة المؤثرة على الجسم ومقدار عجلة الحركة؟

هل يمكنك استنتاج هذه العلاقة؟

تعلم



١ - نعلم من القانون الثاني لنيوتن ان :

معدل التغير في كمية الحركة يتناسب مع القوة المحدثه له،
ويحدث في اتجاه القوة

أي أنه إذا كانت كتلة الجسم ك متغيرة فإن معادلة حركة الجسم تأخذ الصورة

$$F = \frac{d}{dt}(K \cdot v)$$

$$\therefore F = K \frac{dv}{dt}$$

حيث كل من ك، ع دوال قابلة للاشتقاق في ن

معادلة الحركة باستخدام التفاضل والتكامل

Use the Calculus to Determine the Equation of Motion

معادلة حركة جسم ثابت الكتلة ك تُعطى بالصورة

$$F = K \cdot a$$

$$\text{فإذا كانت ج} = \frac{dv}{dt} \quad \text{فإن و} = K \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore F \cdot dt = K \cdot dv \quad \text{ع}$$

$$\text{أما إذا كانت ج} = \frac{dv}{dt} \quad \text{فإن و} = K \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore F \cdot dt = K \cdot dv \quad \text{ع}$$

سوف تتعلم

القانون الثاني لنيوتن.

وحدات القوة.

الوزن والكتلة.

المصطلحات الأساسية

القانون الثاني لنيوتن.

newton's second law

معادلة الحركة

Equation of motion

Force

القوة

Mass

الكتلة

Weight

الوزن

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

Units of Force and Units of Mass

وحدات القوة والكتلة

عند استنتاج معادلة الحركة لجسم متحرك اخترنا وحدات محددة لكل من القوة والكتلة والعجلة، حتى يكون ثابت التناسب مساوياً للواحد الصحيح، وتصبح معادلة الحركة على الصورة $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ، لذلك عند استخدام معادلة الحركة، فإننا نستخدم الوحدات المطلقة للقوة مثل النيوتن، الداين

تذكر أن

١ كجم = ٩,٨ نيوتن
١ ثجم = ٩٨٠ داين

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$1 \text{ كجم} \times 1 \text{ م/ث}^2 = 1 \text{ نيوتن}$$

$$1 \text{ جم} \times 1 \text{ سم/ث}^2 = 1 \text{ داين}$$

Weight and Mass

الوزن والكتلة

وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم، فإذا كان لدينا جسم كتلته ١ كجم، فإن وزنه طبقاً لمعادلة الحركة يساوي ٩,٨ ث كجم

$$\therefore \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \therefore 9,8 \times 1 = \mathbf{F} \quad \mathbf{F} = 9,8 \text{ نيوتن} = 1 \text{ ث كجم}$$

مثال

١ يتحرك جسم كتلته الوحدة تحت تأثير القوى الثلاث $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ ، حيث $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{e}$ ، $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{e}$ ، $\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{e}$ متجهات وحدة متعامدة متنى متنى في الفراغ.

$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ ، $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{e}$ ، $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{e}$ ، $\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{e}$ ، فإذا كان متجه الإزاحة $\mathbf{F}_1$ يعطى بالعلاقة $\mathbf{F}_1 = n\mathbf{F}_2 + \left(\frac{1}{2}n + 1\right)\mathbf{F}_3 + 5\mathbf{e}$ فأوجد قيمة كل من n ، b ، h

الحل

$$\therefore \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 3\mathbf{e} + 2\mathbf{e} = 5\mathbf{e} \quad \mathbf{F}_1 = 5\mathbf{e}$$

$$\therefore \mathbf{F}_1 = n\mathbf{F}_2 + \left(\frac{1}{2}n + 1\right)\mathbf{F}_3 + 5\mathbf{e}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{5\mathbf{e}}{5} = \mathbf{e} \quad \mathbf{F}_1 = \frac{5\mathbf{e}}{5} = \mathbf{e}$$

$$\therefore \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 3\mathbf{e} + 2\mathbf{e} = 5\mathbf{e} \quad \mathbf{F}_1 = 5\mathbf{e}$$

$$0 = 2 + 1 \quad 1 = 3 + b \quad 0 = h - 3$$

$$2 = 1 \quad b = 2 \quad h = 3$$

٩ حاول أن تحل

- ١ يتحرك جسم كتلته ٣ كجم بتأثير ثلاث قوى مستوية هي $\vec{F}_1 = \vec{a} + \vec{c}$ و $\vec{F}_2 = \vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{F}_3 = \vec{a} + \vec{b}$ ، حيث $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ متجهها وحدة متعامدان في مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يعطى كدالة في الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (1 + 2t)\vec{a} + (3 + 2t)\vec{b}$ ، عيّن قيمة كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$.

مثال

- ٢ يتحرك جسم في خط مستقيم تحت تأثير ثلاث قوى $\vec{F}_1 = \vec{a} + \vec{c}$ ، $\vec{F}_2 = \vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{F}_3 = \vec{a} + \vec{b}$ ، حيث $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ متجهها وحدة متعامدان في مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يعطى كدالة في الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (1 + 2t)\vec{a} + (3 + 2t)\vec{b}$ ، عيّن قيمة كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \vec{F} &= 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{a} \\ \therefore \text{الجسم يتحرك بسرعة ثابتة} \\ \therefore \vec{a} &= \frac{\vec{F}}{3} = \frac{3\vec{a}}{3} = \vec{a} \\ \therefore \vec{b} &= \frac{\vec{F}}{3} = \frac{3\vec{b}}{3} = \vec{b} \\ \therefore \vec{c} &= \frac{\vec{F}}{3} = \frac{3\vec{c}}{3} = \vec{c} \\ \therefore \vec{F} &= 3\vec{a} = 3(1, 4, -1) = (3, 12, -3) \\ \therefore \|\vec{F}\| &= \sqrt{3^2 + 12^2 + (-3)^2} = \sqrt{144 + 9 + 9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \text{ وحدة قوة.} \end{aligned}$$

٩ حاول أن تحل

- ٢ جسم يتحرك بسرعة منتظمة تحت تأثير مجموعة القوى $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ ، حيث $\vec{F}_1 = \vec{a} + \vec{c}$ ، $\vec{F}_2 = \vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{F}_3 = \vec{a} + \vec{b}$ ، حيث $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ متجهها وحدة متعامدان في مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يعطى كدالة في الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (1 + 2t)\vec{a} + (3 + 2t)\vec{b}$ ، عيّن قيمة كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$.

مثال

- ٣ أثرت قوة $\vec{F}$ على جسم ساكن كتلته ١ كجم، يتحرك في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة أصل "و" على الخط المستقيم، وكانت $\vec{F} = 5\vec{a} + 6\vec{b}$ حيث $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متجهها وحدة متعامدان في مستوى القوى، عيّن قيمة كل من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$.

أولاً سرعة الجسم ع عندما $\vec{r} = 4$ متر
ثانياً إزاحة الجسم عندما تكون $\vec{r} = 9$ م/ث

الحل



شكل (٢٥)

$$\therefore \vec{F} = 5\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$\therefore \text{ك ج} = ٥ \text{ ر} + ٦$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{\text{ع ك}}{\text{ر}}, \text{ك} = ١ \text{ كجم}$$

أولاً:

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ك}}{\text{ر}} = ٥ \text{ ر} + ٦$$

$$\therefore \left[\frac{١}{٢} \text{ع} \right]^2 = \left[\frac{٥}{٢} \text{ر} + ٦ \right]^2$$

$$\text{ع}^2 = ١٢٨$$

ثانياً:

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ك}}{\text{ر}} = ٥ \text{ ر} + ٦$$

$$\therefore \left[\frac{١}{٢} \text{ع} \right]^2 = \left[\frac{٥}{٢} \text{ر} + ٦ \right]^2$$

$$\therefore ٥ \text{ ر} + ١٢ = ٨١$$

$$\therefore (٥ \text{ ر} + ١٢) = ٨١$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ك}}{\text{ر}} = ٥ \text{ ر} + ٦$$

$$\therefore \left[\frac{١}{٢} \text{ع} \right]^2 = \left[\frac{٥}{٢} \text{ر} + ٦ \right]^2$$

$$\therefore \text{ع} = \pm ١١.٣ \text{ م/ث}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ك}}{\text{ر}} = ٥ \text{ ر} + ٦$$

$$\therefore \left[\frac{١}{٢} \text{ع} \right]^2 = \left[\frac{٥}{٢} \text{ر} + ٦ \right]^2$$

$$\therefore \text{ر} = ٣ \text{ أو } \text{ر} = -\frac{٢٧}{٥}$$

٥ حاول أن تحل

٣ أثرت قوة $\vec{F}$ على جسم كتلته ٣ كجم، يتحرك في خط مستقيم مبتدئاً بسرعة قدرها ٢ م/ث، وكانت $\vec{F} = \frac{٣}{١ + \text{ع}}$ حيث ع سرعة الجسم بعد زمن قدره t ، متى تكون سرعة الجسم ٦ م/ث.

مثال

٤ قوة تؤثر على جسم كتلته ٢٥٠ جم، يتحرك في خط مستقيم مبتدئاً من السكون من نقطة أصل "و" على الخط المستقيم، وكانت $\vec{F} = (٢ - \text{س}) \hat{i} + ٤ \hat{j}$ ن ص، إذا كانت $\vec{F}$ مقيسة بوحدتي النيوتن، ن بالثانية، أوجد كلاً من السرعة $\vec{v}$ ، الإزاحة $\vec{s}$ بدلالة الزمن t .

الحل

$$\therefore \vec{F} = (٢ - \text{س}) \hat{i} + ٤ \hat{j} \quad \therefore \vec{F} = \text{ك ج} \quad \text{حيث} \quad \text{ك} = \frac{١}{٤} \text{ كجم}$$

$$\therefore \frac{١}{٤} \text{ ج} = (٢ - \text{س}) \hat{i} + ٤ \hat{j} \quad \therefore \text{ج} = (٨ - ٢٠ \text{س}) \hat{i} + ١٦ \hat{j} \text{ ن ص}$$

$$\therefore \frac{\text{ك}}{\text{ن}} = \frac{\text{ج}}{\text{ن}} \quad \therefore \frac{\text{ك}}{\text{ن}} = \frac{(٨ - ٢٠ \text{س}) \hat{i} + ١٦ \hat{j}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ج}}{\text{ك}} = \frac{(٨ - ٢٠ \text{س}) \hat{i} + ١٦ \hat{j}}{\frac{١}{٤}}$$

$$\therefore \text{ع} = (٨ - ٢٠ \text{س}) \hat{i} + ٦٤ \hat{j} \text{ ن ص}$$

$$\therefore \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} \quad \therefore \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \therefore \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\therefore \vec{F} = m \vec{a} = m (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = m \vec{a}_1 + m \vec{a}_2$$

$$\therefore \vec{F} = m \vec{a}_1 + m \vec{a}_2 = m \vec{a}_1 + m \vec{a}_2$$

٦ حاول أن تحل

٤ قوة $\vec{F}$ تؤثر على جسم ساكن كتلته $\frac{1}{4}$ كجم مبتدئاً حركته من نقطة ثابتة "و" على خط مستقيم، وكانت $\vec{F} = (4 - 1) \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a} + \vec{a} = 4\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ مقيساً بالنيوتن، أوجد عندما $t = 2$ ثانية، سرعة الجسم، وبعده عن و.

مثال

٥ يتحرك جسم متغير الكتلة، كتلته $K = 2n + 1$ في خط مستقيم، وكان متجه إزاحته يُعطى بالعلاقة: $\vec{r} = (\frac{1}{4}n^2 + n) \vec{a}$ حيث $\vec{a}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم. أوجد كمية حركة هذا الجسم واستنتج مقدار القوة المؤثرة عليه.

الحل

$$K = 2n + 1 \quad \text{متجه السرعة } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4}n^2 + n \right) \vec{a} = \left(\frac{1}{2}n + 1 \right) \vec{a}$$

$$\text{متجه كمية الحركة } \vec{p} = K \vec{v} = (2n + 1) \left(\frac{1}{2}n + 1 \right) \vec{a}$$

$$= (2n + 1) \left(\frac{1}{2}n + 1 \right) \vec{a} = \left(n^2 + \frac{5}{2}n + 1 \right) \vec{a}$$

من القانون الثانى لنيوتن نجد أن:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(n^2 + \frac{5}{2}n + 1 \right) \vec{a} = (2n + \frac{5}{2}) \vec{a}$$

$$= \left(2n + \frac{5}{2} \right) \vec{a} = \left(2n + \frac{5}{2} \right) \vec{a}$$

أى أن القوة المؤثرة على الجسم تكون فى اتجاه المتجه $\vec{a}$ ويساوى مقدارها $(2n + \frac{5}{2})$

٦ حاول أن تحل

٥ كرة معدنية كتلتها ١٠٠ جم تحركت بسرعة منتظمة ١٠ م/ث وسط غبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت يساوى ٠,٦ جم فى الثانية. أوجد كتلة الكرة والقوة بالداين المؤثرة عليها عند أى لحظة.

مثال

استخدام التكامل

٦ جسم يتحرك في خط مستقيم بحيث كانت عجلته حركته ح تُعطى كدالة في الزمن ن بالعلاقة $ح = ٢ - ٦$ حيث ح مقاسة بوحدة م/ث^٢، الزمن ن بالثانية، احسب التغير في كمية حركة الجسم في الفترة الزمنية $٣ \leq ن \leq ٥$ إذا كانت كتلة الجسم ٨ كجم.

الحل

$$\therefore \Delta م = ك_{ن٣} - ك_{ن٥}$$

$$\therefore \Delta م = ٨ ك_{ن٣} - ٨ ك_{ن٥} = ٨ (٣ - ٥) = -١٦$$

$$= -١٦ \times ٨ = -١٢٨ \text{ كجم.م/ث}$$

$$\therefore \Delta م = ٣٢ \text{ كجم.م/ث حيث } \vec{م} \text{ متجه وحدة في اتجاه حركة الجسم.}$$

٥ حاول أن تحل

٦ سيارة كتلتها ١٥ طن، تتحرك في خط مستقيم بحيث كانت ح (ن) تعطى بالعلاقة $ح = ١٢ - ن^٢$

حيث ح مقاسة بوحدة م/ث^٢، الزمن ن مقيس بالثانية أوجد:

أ التغير في كمية حركة السيارة خلال الثواني الست الأولى.

ب التغير في كمية حركة السيارة خلال الفترة الزمنية [٢، ١٤]

تمارين ٢ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة في كل مما يأتي:

١ جسم كتلته الوحدة يتحرك تحت تأثير القوة $\vec{ق} = ٥ \vec{م}$ فإذا كان متجه سرعته $\vec{ع} = (٢ن + ب) \vec{م}$ ، فإن $أ + ب =$

- أ ٠ ب $\frac{٥}{٣}$ ج $\frac{٧}{٣}$ د ٥

٢ إذا تحرك جسم كتلته $(٢ + ٣)$ كجم في خط مستقيم، وكان متجه إزاحته كدالة في الزمن يُعطى بالعلاقة $\vec{ق} = (\frac{٣}{٢}ن^٢ + ٢ن) \vec{م}$ ، ف مقاسه بالمتر، ن بالثانية فإن مقدار القوة المؤثرة عليه بالنيوتن هي:

- أ $٢ + ٣$ ب $١٢ + ٣$ ج $١٢ + ١٣$ د $١٣ + ٦$

٣ إذا تحرك جسم كتلته الوحدة في خط مستقيم بحيث كانت عجلته حركة الجسم تعطى بالعلاقة

ج = $٢ + ٤ن$ حيث مقاسة بوحدة م/ث^٢، ن بالثانية فإن التغير في كمية حركة الجسم في الفترة الزمنية [٢، ٦] يساوي

- أ ١٦ ب ٣٢ ج ٦٤ د ٨٤

- ٤) يتحرك جسم كتلته ٣ كجم بتأثير ثلاث قوى مستوية $\vec{F}_1 = 2\vec{s} - \vec{b}$ ، $\vec{F}_2 = \vec{a} + \vec{s}$ ، $\vec{F}_3 = \vec{a} + \vec{s}$ حيث $\vec{s} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ، متجهًا وحدة متعامدين في مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يُعطى كدالة في الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (1 + 2t)\vec{a} + (3 + 2t)\vec{b}$ عين الثابتين أ، ب.
- ٥) جسم كتلته ك = (٢٠ + ٥) كجم ومتجه موضعه $\vec{r} = (\frac{1}{4}n^2 + ٥ - n)\vec{a}$ حيث متجه $\vec{a}$ وحدة ثابت، ر مقاسة بالمتر، ن الزمن بالثانية. أوجد:

أولاً: متجهي السرعة والعجلة للجسم عند أى لحظة زمنية ن.

ثانياً: مقدار القوة المؤثرة على الجسم عند ن = ١٠ ثانية

- ٦) كرة معدنية كتلتها ١٥٠ جم تحركت بسرعة منتظمة ١٢ م/ث وسط غبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت ٥٠،٥ جم في الثانية. أوجد كتلة الكرة والقوة بالداين المؤثرة عليها عند أى لحظة زمنية ن.
- ٧) كرة معدنية كتلتها ١٠ جم تتحرك في خط مستقيم داخل وسط محمل بالغبار الذي يلتصق بسطحها بمعدل جرام واحد كل ثانية، فإذا كانت إزاحة هذه الكرة في نهاية فترة زمنية ن هي $\vec{r} = (3n^2 + 2n)\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ متجه وحدة في اتجاه حركتها فأوجد القوة المؤثرة على الكرة عند أى لحظة ن واحسب معيارها عند ن = ٣ ثواني إذا علم أن معيار الإزاحة يقاس بالسنتيمتر.
- ٨) يتحرك جسم متغير الكتلة في خط مستقيم وكانت كتلته عند أى لحظة زمنية ن تساوى ك = (٤ن + ١) جرام وكان متجه إزاحته يعطى بالعلاقة $\vec{r} = (2n^2 + ٣n)\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ متجه وحدة ثابت مواز للخط المستقيم، ن الزمن بالثانية، ف المسافة بالسنتيمتر أوجد:
- ١ - متجه كمية الحركة لهذا الجسم، ٢ - معيار القوة المؤثرة على الجسم عندما ن = ٤.

- ٩) أثرت قوة $\vec{F} = 3\vec{a} + \vec{b}$ على جسم، ساكن كتلته ٤ كجم مبتدئاً حركته من نقطة أصل "و" على خط مستقيم.
- أ) أوجد ع عندما ن = ٢ ثانية.
- ب) أوجد ف عندما ن = ٢ ثانية. ، علماً بأن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بوحدتي النيوتن.

- ١٠) جسم يتحرك في خط مستقيم بعجلة منتظمة $\vec{a} = -3\vec{a} + ٢\vec{b}$ وبسرعة ابتدائية ٥ م/ث. إذا كانت كتلة الجسم ١٨ كجم فأوجد مقدار التغير في كمية الحركة في الفترات الزمنية الآتية:
- أ) [٣، ٠] ب) [٢، ١]

- ١١) جسم كتلته ٤٨ جم، يتحرك في خط مستقيم بحيث كانت ج = (٣٠ - ١٢) م/ث. احسب التغير في كمية حركة الجسم خلال الفترة الزمنية الآتية:
- أ) [٣، ١] ب) [٥، ٣]

حركة الأجسام المتصلة

حركة المصاعد - البكرات البسيطة

Lift Motion

عمل تعاوني



سوف تتعلم

- الضغط ورد الفعل.
- حركة المصاعد.
- البكرات البسيطة.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسياً من طرفي خيط يمر على بكرة ملساء.



قم مع زميل لك بإحضار ميزان ضغط وضعه في أرضية مصعد، ثم قف على الميزان والمصعد ساكن، ودع زميلك يسجل قراءة الميزان لدى وقوفك على ميزان الضغط، واجعل المصعد يتحرك لأعلى وزميلك يسجل أى تغير يحدث في قراءة الميزان، ثم أوقف المصعد وسجل القراءة مرة أخرى، ثم اجعل المصعد يهبط لأسفل وزميلك يسجل قراءة الميزان عند حدوث أى تغير في القراءة، ثم كرر التجربة بالتبادل مع زميلك. سجل قراءة الميزان حال وقوف كل منكما على الميزان في كل مرحلة من مراحل سكون المصعد أو الحركة لأعلى أو الحركة لأسفل. بماذا تفسر اختلاف قراءة الميزان في كل الحالات؟

تعلم



المصطلحات الأساسية

القانون الثالث لنيوتن

Newton's Third Law

Pressure الضغط

Reaction رد الفعل

Liftmotion حركة المصاعد

Spring Scale ميزان الزنبرك

Pressure Scale ميزان الضغط

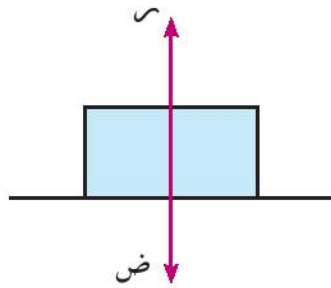
Balance ميزان معتاد

Newton's Third Law

نعلم من القانون الثالث لنيوتن أن:

لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه.

pressure and reaction



الضغط ورد الفعل:

عندما نضع جسمًا كتلته K على مستوى أفقى ساكن، فإن الجسم يؤثر على المستوى بقوة ضغط تساوي في هذه الحالة وزن الجسم، وتنشأ عن ذلك قوة رد فعل للمستوى تؤثر على الجسم وهى تساوى تمامًا ضغط الجسم على المستوى والقوتان متضادتان في الاتجاه، ولكنهما متساويتان في المقدار تمامًا، ويتغير ضغط الجسم على المستوى كلما تحرك المستوى صعودًا أو هبوطًا، ويعرف الضغط في هذه الحالة بالوزن الظاهري.

أولاً : حركة المصاعد: Lift Motion

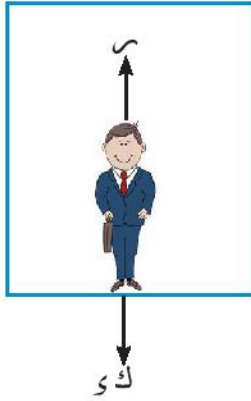
وتعتبر حركة المصاعد من أشهر تطبيقات الفعل ورد الفعل، عندما يقف شخص كتلته K داخل مصعد كتلته K فإن هناك مجموعة من القوى المؤثرة على كل منهما.



الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- ميزان معتاد
- ميزان زنبركي
- ميزان ضغط

Forces Acting on the Person Inside the Lift



القوى المؤثرة على الشخص داخل المصعد
يؤثر على الشخص داخل المصعد قوتان.

١ - وزن الشخص = $ك$ (ويؤثر رأسياً لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٢ - رد فعل المصعد على الشخص = $ش$

(ويؤثر رأسياً لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد).

Equation of the Motion of a Person

معادلة حركة الشخص:

عندما يكون المصعد ساكناً أو متحركاً حركة منتظمة (سرعة ثابتة لأعلى أو لأسفل)

$$\text{فإن } ك = ش$$

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها $ج$ تكون معادلة حركة الشخص

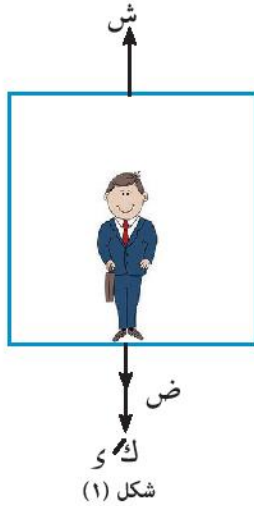
$$ك - ش = ج$$

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها $ج$ تكون معادلة حركة الشخص

$$ك - ش = ج$$

تفكير ناقد: ماذا نتوقع أن يكون رد فعل المصعد على الرجل إذا سقط المصعد بعجلة مساوية لعجلة الجاذبية؟

Forces Acting on a Lift (شكل ١)



يؤثر على المصعد ثلاث قوى عندما يكون الشخص بداخله:

١ - وزن المصعد فقط = $ك$ (ويؤثر رأسياً لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٢ - ضغط الشخص على أرضية المصعد = $ض$

(ويؤثر رأسياً لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٣ - الشد في الحبل الذي يحمل المصعد = $ش$

(ويؤثر رأسياً لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد)

equation of the motion of the lift

معادلة حركة المصعد

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها $ج$ تكون معادلة حركة المصعد

$$ش - ك - ض = ج$$

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها $ج$ تكون معادلة حركة المصعد

$$ش - ك - ض = ج$$

القوى المؤثرة على المصعد والرجل معاً (شكل ٢)

Forces Acting on a both Person and Lift



يؤثر على المصعد والرجل معاً قوتان:

١ - وزن المجموعة (الرجل والمصعد) = $(ك + ك)$

(ويؤثر رأسياً لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٢ - الشد في الحبل الذي يحمل المصعد = $ش$

(ويؤثر رأسياً لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد)

ملحوظة:

ضغط الرجل على أرضية المصعد يساوى ويضاد رد فعل المصعد على الرجل

Equation of the Motion of both Person and Lift

معادلة حركة المجموعة:

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها ج تكون معادلة حركة المصعد $(ك + ك') ج = ش - (ك + ك') ي$

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها ج تكون معادلة حركة المصعد $(ك + ك') ج = (ك + ك') ي - ش$

Spring Scale



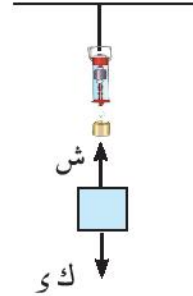
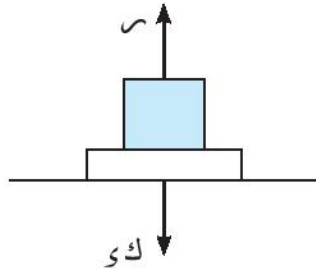
ميزان الزنبرك

عندما يعلق جسم كتلته ك فى سلك ميزان زنبرك مثبت فى سقف مصعد، فإن قراءة الميزان تعبر عن الشد الحادث فى سلك الميزان.

Pressure (health) Scale

ميزان الضغط

عندما يوضع جسم كتلته ك على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، فإن قراءة الميزان تعبر عن ضغط الجسم على الميزان.



١ - إذا كانت قراءة الميزان < الوزن الحقيقي ش < ك ي ، س < ك ي

فإن المصعد يكون صاعداً لأعلى بعجلة موجبة أو هابطاً لأسفل بعجلة سالبة.

٢ - إذا كانت قراءة الميزان > الوزن الحقيقي ش > ك ي ، س > ك ي

فإن المصعد يكون هابطاً لأسفل بعجلة موجبة أو صاعداً لأعلى بعجلة سالبة.

٣ - إذا كانت قراءة الميزان = الوزن الحقيقي ش = ك ي ، س = ك ي

فإن المصعد يكون ساكناً أو متحركاً بسرعة منتظمة.

قراءة ميزان الضغط أو ميزان الزنبرك تسمى الوزن الظاهري.

لاحظ أن

إذا تحرك مصعد لأعلى بعجلة منتظمة وتحرك لأسفل بالعجلة نفسها،

فإن قراءة الميزان حال الصعود + قراءة الميزان حال الهبوط = ضعف الوزن الحقيقي.

الميزان المعتاد ذى الكفتين Balance



الميزان المعتاد ذى الكفتين هو الوحيد الذى يقيس الوزن الحقيقى فى كل الظروف والأجواء

مثال

١ رجل كتلته ٨٠ كجم يقف داخل مصعد، احسب بثقل الكيلوجرام ضغط الرجل على أرضية المصعد فى كل من الحالات الآتية:

١ - صاعداً بعجلة منتظمة قدرها ٤٩ سم/ث^٢.

٢ - متحركاً بسرعة منتظمة قدرها ٨٠ سم/ث.

٣ - هابطاً بعجلة منتظمة قدرها ٩٨ سم/ث^٢.

الحل

ضغط الرجل على أرض المصعد يساوى فى المقدار رد فعل المصعد على الرجل فى الحالات التالية:

١ - المصعد يتحرك لأعلى بعجلة قدرها ٤٩ سم/ث^٢.

$$\therefore \text{ك ج} = \text{ر} - \text{د}$$

$$٨٠ \times ٩,٨ = ٠,٤٩ \times ٨٠ - \text{ر}$$

$$\therefore \text{ر} = ٨٠ \times ٩,٨ + ٠,٤٩ \times ٨٠$$

$$\text{ر} = ٨٢٣,٢ \text{ نيوتن} \quad \text{ر} = ٨٤ \text{ ث كجم}$$

٢ - المصعد يتحرك بسرعة منتظمة.

$$\therefore \text{ج} = \text{د}$$

$$\therefore \text{ر} = \text{ك} \quad \text{ر} = ٨٠ \text{ ث كجم}$$

٣ - المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة قدرها ٩٨ سم/ث^٢.

$$\text{ك ج} = \text{ك د} - \text{ر}$$

$$٨٠ \times ٠,٩٨ = ٨٠ \times ٩,٨ - \text{ر}$$

$$\text{ر} = ٨٠ \times ٩,٨ - ٨٠ \times ٠,٩٨$$

$$\text{ر} = ٧٠٥,٦ \text{ نيوتن} \quad \text{ر} = ٧٢ \text{ كجم}$$

٤ حاول أن تحل

١ شخص كتلته ٦٠ كجم يقف داخل مصعد، احسب بثقل الكيلوجرام ضغط الرجل على أرضية المصعد فى كل من الحالات الآتية:

١ - إذا كان المصعد ساكناً.

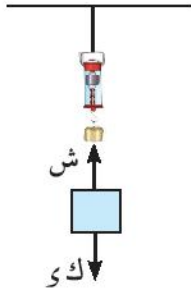
٢ - المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة ٤٩ سم/ث^٢.

٣ - المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ٤٩ سم/ث^٢.

مثال

٢) غلق جسم بواسطة خيط في ميزان زنبركي مثبت في سقف مصعد يتحرك رأسياً، فإذا كان مقدار الشد في الخيط أثناء الصعود بعجلة منتظمة $٢,٤٥$ م/ث^٢ يساوي ٥٠ ث كجم. أوجد كتلة الجسم، وإذا هبط المصعد بالعجلة نفسها فما مقدار الشد في الخيط؟

الحل



$$ك = ٤٠ \text{ كيلو جرام}$$

أولاً: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة $٢,٤٥$ م/ث^٢

معادلة الحركة: $ك - ج = ش - ك$

$$ك = ٢,٤٥ \times ٥٠ = ٩,٨ \times ٥٠ - ٩,٨ \times ك$$

$$ك = (٩,٨ + ٢,٤٥) \times ٥٠ = ٩,٨ \times ٥٠$$

ثانياً: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة $٢,٤٥$ م/ث^٢.

معادلة الحركة: $ك - ج = ش - ك$

$$٤٠ \times ٢,٤٥ = ش - ٩,٨ \times ٤٠$$

$$ش = ٤٠ (٢,٤٥ - ٩,٨)$$

$$ش = ٢٩٤ \text{ نيوتن} \quad ش = ٣٠ \text{ ث كجم}$$

حاول أن تحل

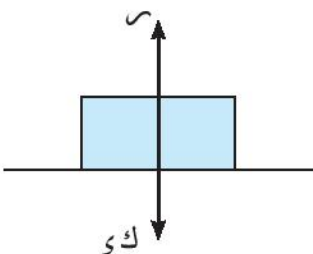
٢) جسم وزنه الحقيقي ٢٤٠ ث جم معلق في سلك ميزان زنبركي مثبت في سقف مصعد، ووزنه الظاهري ٢٧٦ ث جم كما يعينه الميزان الزنبركي، بين أن عجلة الحركة للمصعد لها قيمتان، فأوجدتهما وعين اتجاه الحركة.

مثال

٢) مصعد يتحرك رأسياً لأعلى بعجلة منتظمة ١٤٠ سم/ث^٢.

يقف رجل بداخل المصعد، وكان ضغطه على أرضية المصعد يساوي ٧٢ ث كجم. احسب كتلة هذا الرجل، ثم أوجد مقدار ضغطه على أرضية المصعد حال هبوطه بنفس العجلة.

الحل



أولاً: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة $ج = ١,٤$ م/ث^٢.

معادلة الحركة: $ك - ج = س - ك$

$$ك = ١,٤ \times ٧٢ = ٩,٨ \times ٧٢ - ٩,٨ \times ك$$

$$ك = ٦٣ \text{ كجم}$$

ثانياً: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة $ج = ١,٤$ م/ث^٢.

معادلة الحركة: $ك - ج = س - ك$

$$٦٣ \times ١,٤ = س - ٩,٨ \times ٦٣$$

$$س = (١,٤ - ٩,٨) \times ٦٣ = ٥٢٩,٢ \text{ نيوتن}$$

$$س = ٥٤ \text{ ث كجم}$$

٩ حاول أن تحل

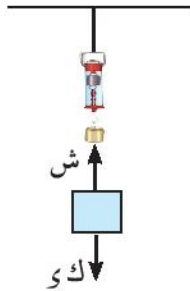
٣ رجل كتلته ٧٠ كجم يقف على أرضية مصعد كهربى كتلته ٤٢٠ كجم فإذا تحرك المصعد رأسياً لأعلى بعجلة منتظمة ٧٠ سم/ث^٢.

أوجد بثقل الكجم مقدار كل من الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد وضغط الرجل على أرضية المصعد.

مثال

٤ جسم معلق فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، لوحظ عند تحرك المصعد إلى أعلى بعجلة جـ م/ث^٢، أن قراءة الميزان ٨ ث كجم وعندما تحرك المصعد إلى أسفل بعجلة ٢ جـ م/ث^٢ كانت قراءة الميزان ٥ ث كجم. احسب جـ ، وإذا كان الحبل الصلب الذى يحمل المصعد لا يتحمل شداً أكثر من ١,٢ ث طن، فأوجد أقصى حمولة يمكن أن يحملها المصعد وهو صاعد بالعجلة جـ علماً بأن كتلة المصعد وهو فارغ تساوى ٦٠٠ كجم.

الحل



أولاً: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة جـ

معادلة الحركة: ك جـ = ش - ك

$$ك جـ = ٩,٨ \times ٨ - ٩,٨ \times ك$$

(١)

$$ك جـ = ٩,٨ \times (ك - ٨)$$

ثانياً: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة ٢ جـ

معادلة الحركة ك جـ = ش - ك

$$٢ ك جـ = ٩,٨ \times ٥ - ٩,٨ \times ك$$

(٢)

$$٢ ك جـ = ٩,٨ \times (٥ - ك)$$

من (١)، (٢) نجد أن

$$\frac{٢ ك جـ}{ك جـ} = \frac{٩,٨ \times (٥ - ك)}{٩,٨ \times (ك - ٨)}$$

$$\frac{٥ - ك}{ك - ٨} = \frac{٢}{١}$$

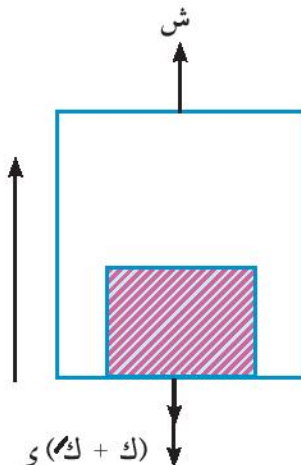
$$ك - ١٦ = ٥ - ٢ ك \quad ٣ ك = ٢١$$

$$\therefore ك = ٧ \text{ كجم}$$

من (١) نجد أن

$$٧ جـ = ٩,٨ \quad جـ = ١,٤ \text{ م/ث}^٢$$

ثالثاً:



نفترض أن أقصى حمولة يمكن أن توضع فى المصعد كتلتها ك عندئذ يكون الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد يساوى ١٢٠٠ ث كجم

معادلة الحركة: (ك + ك) جـ = ش - (ك + ك)

$$\therefore (ك + ٦٠٠) \times ١,٤ - ٩,٨ \times ١٢٠٠ = ٩,٨ \times (ك + ٦٠٠)$$

$$\therefore (ك + ٦٠٠) \times ١١,٢ = ٩,٨ \times ١٢٠٠$$

$$ك = ١٠٥٠ = ٦٠٠ + ٤٥٠ \text{ كجم}$$

٦ حاول أن تحل

٤ علق جسم في ميزان زنبركي مثبت في سقف مصعد، فسجل القراءة ١٧ ث كجم، عندما كان المصعد صاعدًا بعجلة منتظمة ١,٥ ج م/ث^٢، وسجل القراءة ١٦ ث. كجم عندما كان المصعد هابطًا بعجلة سالبة قدرها ج م/ث^٢، أوجد كتلة الجسم ومقدار ج.

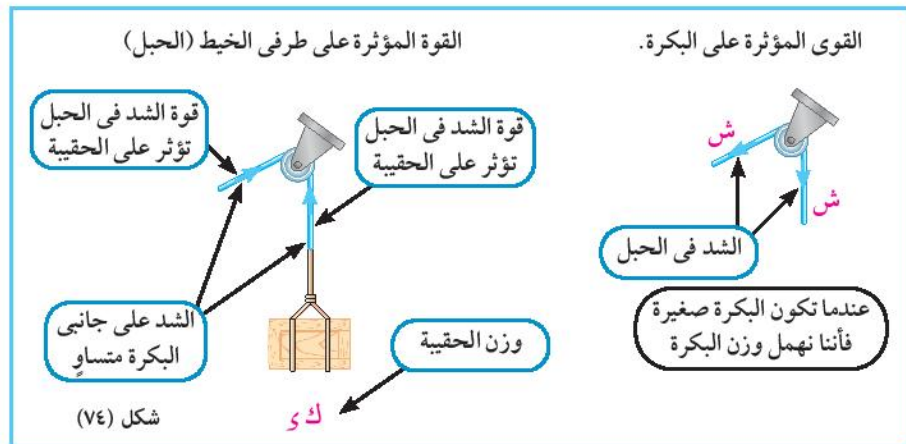
ثانيًا : حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسياً من طرفي خيط يمر على بكرة ملساء

Motion of System of two Bodies Connected by a String Passing Over a Smooth Pulley



تستخدم البكرات في أغراض عدة منها: تقليل القوة اللازمة لرفع جسم وتسهيل الحركة وتغيير اتجاه القوة، ومنها ما هو ثابت، ومنها ما هو متحرك، وفي هذا الدرس سنتناول نظام بكرات مكون من بكرة واحدة ثابتة.

وعندما تكون البكرة صغيرة وملتساء يكون الشد على جانبي البكرة متساوٍ. والشكل الآتي يوضح القوى المؤثرة عند رفع حقيبة (جسم) باستخدام البكرة.



إذا رُبط جسمان كتلتاهما $ك_١$ ، $ك_٢$ في طرفي خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويتدليان رأسياً، وكانت $ك_١ < ك_٢$ فإن المجموعة تبدأ الحركة من السكون بعجلة منتظمة قدرها ج.

معادلات الحركة

$$ك_1 ج = ك_1 و - ش$$

$$ك_2 ج = ش - ك_2 و$$

بجمع المعادلتين بحذف الشد، ومن ثم يمكن حساب عجلة الحركة

$$(ك_1 + ك_2) ج = (ك_1 - ك_2) و$$

وبالتالى من أى من المعادلتين نوجد الشد فى الخيط ش

عند قطع الخيط :

إذا قطع الخيط الواصل بين الجسمين بعد زمن ن، فإن كلاً من الجسمين يتحرك فى اتجاهه السابق نفسه قبل قطع الخيط مباشرة.

(١) الكتلة ك_١ تتحرك لأسفل بسرعة ابتدائية ع (هى نفس السرعة لحظة قطع الخيط) وتحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية.

(٢) الكتلة ك_٢ تتحرك لأعلى بسرعة ابتدائية ع (هى

نفس السرعة لحظة قطع الخيط) إلى أن تصل

لسكون لحظي، وذلك تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية، ثم تسقط سقوطاً حراً.

الضغط على البكرة : Pressure on a Pulley

عند تعليق الكتلتين من طرفى الخيط المار على البكرة يصبح الخيط مشدوداً ونتيجة للشد الحادث فى الخيط تتولد قوة ضغط على محور البكرة تساوى محصلة قوتى

الشد فى الخيط.

$$ض = ٢ ش$$

حالات مشابهة (١)

فى الحالة المرسومة

إذا كان $(ك_1 + ك_2) < ك_٢$ ، وكانت $ك_١ > ك_٢$ فإن معادلات الحركة

$$(ك_1 + ك_2) ج = (ك_1 + ك_2) و - ش$$

$$ك_٢ ج = ش - ك_٢ و$$

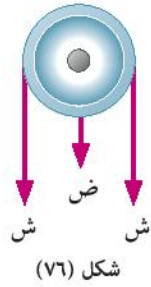
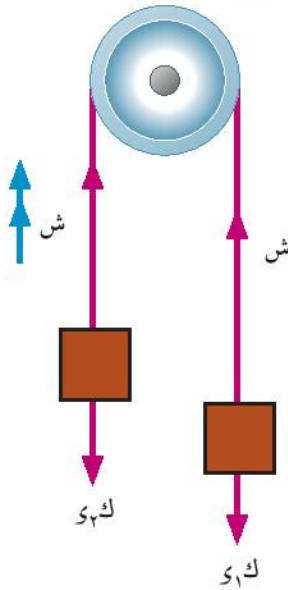
عند انفصال الكتلة الإضافية

وإذا انفصلت الكتلة ك_٢ بعد زمن قدره ن ثانية، فإن المجموعة تتحرك فى نفس اتجاهها السابق، ولكن بعجلة تقصيرية إلى أن تسكن لحظياً، ثم تغير اتجاه حركتها، ولإيجاد عجلة الحركة التقصيرية بعد انفصال الكتلة ك_٢

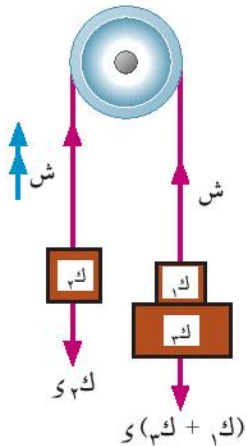
نوجد معادلات الحركة

$$ك_١ ج' = ك_١ و - ش'$$

$$ك_٢ ج' = ش' - ك_٢ و$$



شكل (٧٦)



لاحظ أن

إذا بدأت المجموعة الحركة والكتلتين فى مستوى أفقى واحد، وكانت المسافة المقطوعة بعد زمن قدره ن، تساوى ف وحدة طول، فإن المسافة الرأسية بين الكتلتين عند نفس الزمن تساوى ٢ ف وحدة طول.

والمجموعة بعد انفصال ك_١ الكتلة تتحرك بسرعة ابتدائية هي السرعة التي اكتسبتها لحظة الانفصال، وتصل إلى سكون لحظي، ثم تغير اتجاه حركتها، وترتد لتكون الكتلة ك_١ هي القائدة

الشّد في الخيط بين الكتلتين: Tension of a String

في الشكل السابق إذا كانت الكتلتان ك_١، ك_٢ مربوطتين بخيط آخر، فتكون الشدود كما هي موضحة في شكل (٧٨) ومعادلات الحركة هي:

$$K_1 J = K_1 Y + Sh - Sh$$

$$K_2 J = K_2 Y - Sh$$

حالات مشابهة (٢)

إذا كانت ك_١ = ك_٢ = ك شكل (٧٩)

أي أن الكتلتين متساويتان، وفي هذه الحالة لن تتحرك المجموعة، أما إذا أضيفت كتلة مقدارها ك_١ إلى إحدى الكتلتين، فإن المجموعة تتحرك في اتجاه الكتلتين (ك + ك) ومعادلات الحركة

$$(K + K) J = (K + K) Y - Sh$$

$$K J = Sh - K Y$$

عند انفصال الكتلة الإضافية:

وإذا فصلت الكتلة الإضافية ك_١ بعد زمن قدره ن ثانية، فإن المجموعة تتحرك في نفس اتجاهها السابق بسرعة منتظمة، هي السرعة التي اكتسبتها خلال ن ثانية (السرعة لحظة انفصال الكتلة ك_١)

حالات مشابهة (٣) في الشكل المقابل

إذا علقت الكتلتان ك_١، ك_٢ في طرفي الخيط وكنا لانعلم أيًا من الكتلتين أكبر من الأخرى، واكسبنا الكتلة ك_١ سرعة قدرها ع لأسفل وتحركت المجموعة فإننا أمام ثلاث حالات (١) إذا عادت المجموعة إلى موضعها الأصلي بعد زمن قدره ن، نستنتج من ذلك أن ك_١ > ك_٢، وأن المجموعة تحركت بعجلة تقصيرية إلى أن سكنت لحظيًا، ثم غيرت اتجاه حركتها، ويمكن استنتاج عجلة الحركة من البيانات المعطاة حيث

السرعة الابتدائية هي السرعة التي اكتسبتها الكتلة ك_١، السرعة النهائية = صفر، الزمن = $\frac{N}{P}$

(٢) أما إذا تحركت المجموعة حركة منتظمة بسرعة ثابتة هي السرعة التي اكتسبتها الكتلة ك_١ نستنتج من ذلك أن

الكتلتين متساويتان ك_١ = ك_٢، وأن الحركة تتبع القانون الأول لنيوتن

(٣) وإذا تحركت المجموعة بعجلة منتظمة تزايدية، نستنتج من ذلك أن ك_١ < ك_٢، ويمكن دراسة الحركة بإيجاد

معادلات الحركة

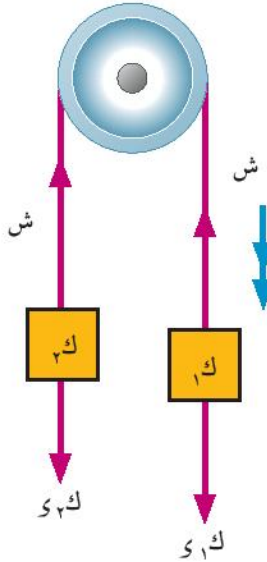
$$K_1 J = K_1 Y - Sh$$

$$K_2 J = Sh - K_2 Y$$

مثال

١ علق جسمان كتلتاهما $ك_١$ ، $ك_٢$ ، حيث $ك_١ < ك_٢$ فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء، وكانا على ارتفاع واحد من سطح الأرض عند بدء الحركة، وبعد ثانية واحدة كانت المسافة الرأسية بينهما ٢٠ سم، أوجد $ك_١$: $ك_٢$

الحل



عند بدء الحركة كانا الجسمان فى مستوى أفقى واحد وبعد ثانية كانت المسافة الرأسية بينهما ٢٠ سم.

$$\therefore \text{ف} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ف} = \text{ع} \cdot \text{ن} + \frac{١}{٢} \cdot \text{ج} \cdot \text{ن}^2$$

$$١٠ = ١ \times \text{ج} \times \frac{١}{٢} + ٠ =$$

$$\text{ج} = ٢٠ \text{ سم/ث}^2$$

معادلات الحركة

$$ك_١ \cdot \text{ج} = ك_١ \cdot \text{ش} - \text{ش}$$

$$ك_٢ \cdot \text{ج} = \text{ش} - ك_٢ \cdot \text{ش}$$

بالجمع نجد أن

$$(ك_١ + ك_٢) \cdot \text{ج} = (ك_١ - ك_٢) \cdot \text{ش}$$

$$٢٠ (ك_١ + ك_٢) = ٩٨٠ (ك_١ - ك_٢)$$

$$ك_١ + ك_٢ = ٤٩ (ك_١ - ك_٢)$$

$$ك_١ + ك_٢ = ٤٩ ك_١ - ٤٩ ك_٢$$

$$٥٠ ك_٢ = ٤٨ ك_١$$

$$\frac{ك_١}{ك_٢} = \frac{٢٥}{٢٤}$$

$$ك_١ : ك_٢ = ٢٥ : ٢٤$$

٦ حاول أن تحل

٥ علق جسمان كتلتاهما ٢١ جم، ٢٨ جم من طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء، فإذا تحركت المجموعة من السكون، فأوجد عجلة المجموعة ومقدار الشد فى الخيط وسرعة المجموعة بعد ثانيتين من بدء الحركة.

مثال

٢ جسمان كتلتاهما ١٠٥ جم، ٧٠ جم مربوطان فى طرفى خيط خفيف ثابت الطول، يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويتدليان رأسياً، فإذا بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كانت الكتلتان فى مستوى أفقى واحد، فأوجد مقدار عجلة حركة المجموعة، وإذا اصطدم الجسم الأول بالأرض بعد أن قطع مسافة ٥٠ سم، فأوجد الزمن الكلى الذى يستغرقه الجسم الثانى من بدء الحركة حتى يسكن لحظياً.

الحل

معادلات الحركة:

$$١٠٥ \text{ ج} - ٩٨٠ \times ١٠٥ = \text{ش}$$

$$٧٠ \text{ ج} - \text{ش} = ٩٨٠ \times ٧٠$$

بجمع المعادلتين نجد أن

$$١٧٥ \text{ ج} = ٩٨٠ \times ٣٥$$

$$\text{ج} = ١٩٦ \text{ سم/ث}^٢$$

عند لحظة اصطدام الجسم ١٠٥ جم بالأرض يكون استغرق زمنًا

$$٢ \text{ ع} = \text{ع.ع} + ٢ \text{ ج ف}$$

$$٥٠ \times ١٩٦ \times ٢ + ٠ = ٢ \text{ ع}$$

$$\text{ع} = ١٤٠ \text{ سم/ث}$$

$$\text{ع} = \text{ع.ع} + \text{ج ن}$$

$$١٤٠ = ٠ + ١٩٦ \text{ ن}$$

$$\text{ن} = \frac{٥}{٧} \text{ ثانية}$$

عند اصطدام الجسم ١٠٥ جم بالأرض، فإن الجسم ٧٠ جم، يتحرك رأسياً لأعلى بعجلة الجاذبية مبتدئاً بالسرعة

ع. = ١٤٠ سم/ث. فيسكن لحظياً بعد زمن ن.

$$\text{ع} = \text{ع.ع} + \text{و ن}$$

$$٠ = ١٤٠ - ٩٨٠ \text{ ن}$$

$$\text{ن} = \frac{١}{٧} \text{ ثانية}$$

∴ الجسم ٧٠ جم يستغرق من بدء الحركة زمناً قدره ن حتى يصل إلى سكون لحظي

$$\text{حيث ن} = \text{ن}_١ + \text{ن}_٢ = \frac{١}{٧} + \frac{٥}{٧} = \frac{٦}{٧} \text{ ثانية}$$

٩ حاول أن تحل

٦ خيط خفيف يمر على بكرة مثبتة ملساء، ويتدلى من أحد طرفيه جسم كتلته ٩٠ جم، ومن الطرف الآخر جسم

كتلته ٧٠ جم، وبدأت المجموعة حركتها من السكون عندما كانت الكتلة ٩٠ جم على ارتفاع ٢٤٥ سم من سطح الأرض:

أ أوجد الزمن الذي يمضي حتى تصل الكتلة ٩٠ إلى سطح الأرض.

ب أوجد الزمن الذي يمضي بعد ذلك حتى يصبح الخيط مشدوداً مرة أخرى.

مثال

٢ جسمان كتلتاهما ٥ كجم، ٣ كجم مربوطان في طرفي خيط خفيف، يمر على بكرة ملساء، بدأت المجموعة

حركتها من السكون عندما كان الجسمان في مستوى أفقي واحد على ارتفاع ٢٤٥ سم من سطح الأرض، وبعد

ثانية واحدة من بدء الحركة قُطع الخيط، أوجد عجلة الحركة وسرعة كل من الجسمين عند وصوله للأرض.

الحل

معادلات الحركة:

$$(1) \quad 5 \text{ ج} - 9,8 \times 5 = \text{ش}$$

$$(2) \quad 3 \text{ ج} - \text{ش} = 9,8 \times 3$$

بالجمع نجد أن

$$8 \text{ ج} = 9,8 \times 2$$

$$\therefore 8 \text{ ج} = 19,6 \text{ م/ث}^2$$

عند لحظة قطع الخيط

$$ع = 5 \text{ ج} + 3 \text{ ج}$$

$$ع = 19,6 + 0 = 19,6 \text{ م/ث}^2$$

$$ف = 5 \text{ ج} + \frac{1}{2} 5 \text{ ج}$$

$$1,225 \text{ متر} = 19,6 \times \frac{1}{2} + 0 =$$

بعد قطع الخيط

الجسم 5 كجم يتحرك رأسياً لأسفل

$$ع = 19,6 \text{ م/ث}^2, \quad 5 \text{ ج} = 9,8 \text{ م/ث}^2, \quad ف = 19,6 - 9,8 = 9,8 \text{ م/ث}^2$$

$$\therefore ع = 5 \text{ ج} + 2 \text{ ج}$$

$$\therefore ع = 19,6 + 2(9,8) = 39,2 \text{ م/ث}^2$$

$$\therefore ع = \frac{39,2}{2} = 19,6 \text{ م/ث}^2$$

الجسم 3 كجم يتحرك رأسياً لأعلى حراً من نقطة على بعد ف من سطح الأرض ليصل إلى سكون لحظي ثم يعود ماراً بنقطة بدء الحركة الحرة ثم إلى سطح الأرض.

$$ع = 19,6 \text{ م/ث}^2, \quad 5 \text{ ج} = 9,8 \text{ م/ث}^2, \quad ف = 19,6 - 9,8 = 9,8 \text{ م/ث}^2$$

$$\therefore ع = 5 \text{ ج} + 2 \text{ ج}$$

$$ع = 19,6 + 2(9,8) = 39,2 \text{ م/ث}^2$$

$$ع = \frac{39,2}{2} = 19,6 \text{ م/ث}^2$$

٦ حاول أن تحل

٧ يمر خيط خفيف ثابت الطول على بكرة صغيرة ملساء مثبتة، ويحمل من طرفيه كتلتين ٢٠، ١٢ جم تتدليان رأسياً، أوجد عجلة حركة المجموعة والشد في الخيط، وإذا كانت المجموعة قد بدأت حركتها من السكون، وقُطع الخيط بعد مرور ثانيتين من لحظة بدء الحركة، عين أقصى ارتفاع تصل إليه الكتلة ١٢ جم عن موضعها الأصلي عند بدء الحركة.

مثال

٤ خيط خفيف يمر على بكرة رأسية ملساء، علق في أحد طرفيه، جسم كتلته ٤٠ جم، وفي الطرف الآخر

جسمان كتلة كل منهما ٣٠ جم، تُركت المجموعة لتتحرك من سكون، وبعد ثانية واحدة من بدء الحركة، انفصلت إحدى الكتلتين الصغيرتين عن المجموعة، أوجد المسافة التي تصعبها الكتلة ٤٠ جم من بدء الحركة حتى تصل لسكون لحظي.

الحل

معادلات الحركة:

$$٦٠ \text{ ج} = ٩٨٠ \times ٦٠ - \text{ش}$$

$$٤٠ \text{ ج} = \text{ش} - ٩٨٠ \times ٤٠$$

بجمع المعادلات نجد أن

$$١٠٠ \text{ ج} = ٩٨٠ \times ٢٠$$

$$\text{ج} = ١٩٦ \text{ سم/ث}^٢$$

لحظة انفصال الكتلة الصغرى

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ج} - \text{ن}$$

$$١٩٦ \text{ سم/ث} = ١ \times ١٩٦ + ٠ =$$

$$\text{ف}_١ = \text{ع} + \text{ن} - \frac{١}{٢} \text{ ج} - \text{ن} =$$

$$٩٨ = ١ \times ١٩٦ \times \frac{١}{٢} + ٠ =$$

بعد انفصال الكتلة الصغرى معادلات الحركة

$$٤٠ \text{ ج} = \text{ش} - ٩٨٠ \times ٤٠$$

$$٣٠ \text{ ج} = ٩٨٠ \times ٣٠ - \text{ش}$$

بجمع المعادلات نجد أن

$$٧٠ \text{ ج} = ٩٨٠ \times ١٠$$

$$\text{ج} = ١٤٠ \text{ سم/ث}^٢$$

أى أن المجموعة تتحرك في نفس اتجاهها السابق قبل انفصال الكتلة الصغرى، ولكن بعجلة تقصيرية إلى أن تصل لسكون لحظي بعد أن تقطع مسافة ف_٢، ثم تغير اتجاه حركتها.

$$٢٠ \text{ ج} = \text{ع} + ٢ \text{ ج} - \text{ف}$$

$$٠ = (١٩٦) - ٢ \times ١٤٠ - \text{ف}_٢$$

$$\therefore \text{ف}_٢ = ١٣٧,٢ \text{ سم}$$

∴ الكتلة ٤٠ جم تصعد مسافة ف قبل أن تسكن لحظياً؛ حيث ف = ف_١ + ف_٢ = ٢٣٥,٢ سم

٩ حاول أن تحل

٨ خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويحمل في أحد طرفيه ثقلين ٢٣٥، ٢٠ جم متصلين بخيط بحيث كان الثقل ٢٠ أسفل الثقل ٢٣٠، وفي الطرف الآخر ثقل قدره ٢٣٥ جم، احسب العجلة المشتركة إذا تحركت المجموعة من سكون. وإذا قطع الخيط الذي يحمل الثقل ٢٠ جم بعد أن قطعت المجموعة مسافة ٤٥ سم، وكان الثقل ٢٣٥ جم الهابط على مسافة ٩٠ سم من سطح الأرض عندئذ، فاحسب الزمن الذي يأخذه هذا الثقل حتى يصل إلى سطح الأرض.

تمارين ٢ - ٢

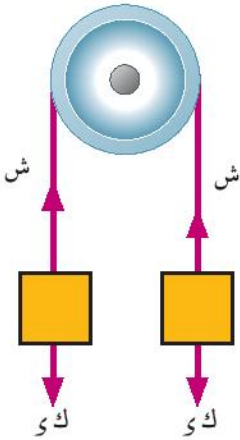
أكمل كلاً مما يأتي:

- ١ جسم كتلته ٧٠ كجم موضوع على ميزان ضغط على أرضية مصعد متحرك بعجلة منتظمة ٤,١ م/ث^٢ لأسفل، فإن قراءة الميزان ث كجم.
 - ٢ علق جسم في خطاف ميزان زنبركي معلق في سقف مصعد ف سجل القراءة ٣٩٠ ث جم عندما كان صاعداً لأعلى:
إذا كانت عجلة الحركة - ٧٠ سم/ث^٢، فإن كتلة الجسم جم.
إذا كانت كتلة الجسم ٣٥٠ جم، فإن عجلة الحركة سم/ث^٢.
 - ٣ شخص يقف على ميزان ضغط مثبت في أرضية مصعد، ف سجل الميزان القراءة ٧٥ ث كجم، عندما كان متحركاً لأعلى بعجلة جـ م/ث^٢، وسجل القراءة ٦٩ ث كجم عندما كان متحركاً لأسفل بالعجلة نفسها، فإن وزن الشخص الحقيقي ث كجم.
 - ٤ يقف طفل على ميزان ضغط داخل مصعد متحرك لأسفل بعجلة ٤,١ م/ث^٢.
إذا كانت قراءة الميزان ٣٠ ث كجم، فإن وزن الطفل = ث كجم
إذا كان وزن الطفل ٤٩ ث كجم، فإن قراءة الميزان ث كجم
- أجب عن الأسئلة الآتية:
- ٥ يقف شخص كتلته ٨٠ كجم على ميزان ضغط مثبت في أرضية مصعد، أوجد قراءة الميزان في كل من الحالات الآتية:
 - أ المصعد يتحرك بسرعة منتظمة.
 - ب المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة سالبة مقدارها ١,٤٤ سم/ث^٢.
 - ج المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ٤,٢٩ سم/ث^٢.
 - ٦ جسم كتلته ٤ ك، معلق في سلك ميزان زنبركي مثبت في سقف مصعد، أوجد ك في كل من الحالات الآتية:
 - أ المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة ٩٨ سم/ث^٢، قراءة الميزان ٤٤ ث جم
 - ب المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ١٤٠ سم/ث^٢، قراءة الميزان ٢١٠ ث جم.
 - ج المصعد ساكن وقراءة الميزان ١٠٠ ث جم.
 - ٧ مصعد كهربائي يتحرك رأسياً لأعلى حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها جـ م/ث^٢، مثبت في سقفه ميزان زنبركي يحمل جسمًا كتلته ٣٥ كجم، فإذا كان الوزن الظاهري الذي يبينه الميزان قدره ٣٠ ث كجم، فأوجد قيمة جـ .

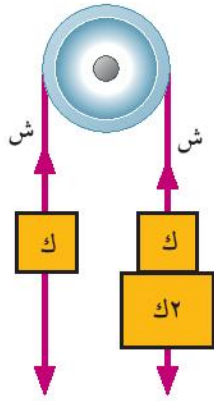
- ٨) وُضع جسم على ميزان ضغط مثبت في أرضية مصعد، فسجل القراءة ١٤ ث كجم، عندما كان المصعد ساكنًا. أوجد بثقل الكجم قراءة الميزان عندما يتحرك رأسياً لأعلى بعجلة منتظمة ٧٠ سم/ث^٢.
- ٩) جسم كتلته ٩٤,٥ كجم وضع في صندوق كتلته ٥٢,٥ كجم، ثم رفع رأسياً إلى أعلى بواسطة حبل متحرك بعجلة قدرها ١,٤ م/ث^٢، أوجد مقدار ضغط الجسم على قاعدة الصندوق، ومقدار الشد في الحبل الذي يحمل الصندوق، وإذا قُطع الحبل، فأوجد ضغط الجسم على قاعدة الصندوق عندئذ.
- ١٠) مصعد كهربى وزنه ٣٥٠ ث كجم يهبط رأسياً إلى أسفل بعجلة منتظمة سالبة مقدارها ٤٩ سم/ث^٢ وبه رجل وزنه ٧٠ ث كجم. أوجد مقدار كل من ضغط الرجل على أرضية المصعد والشد في الحبل الذي يحمل المصعد بثقل الكجم.
- ١١) علق جسم في ميزان زنبركى مثبت في سقف مصعد فسجل الميزان القراءة ٧ ث كجم عندما كان المصعد ساكنًا ثم سجل القراءة ٨ ث كجم عندما تحرك المصعد رأسياً بعجلة منتظمة. أوجد مقدار واتجاه العجلة التي يتحرك بها المصعد.
- ١٢) علق جسم في ميزان زنبركى مثبت في سقف مصعد فسجل القراءة ١٦ ث جم، عندما كان المصعد صاعداً بعجلة منتظمة ج سم/ث^٢، وسجل القراءة ١١ ث جم عندما كان المصعد هابطاً بعجلة منتظمة ١,٥ ج سم/ث^٢. أوجد كتلة الجسم والعجلة ج، واحسب أيضاً قراءة الميزان عندما يكون المصعد هابطاً بعجلة منتظمة سالبة قدره $\frac{1}{4}$ ج سم/ث^٢.

أكمل كلاً مما يأتي:

- ١٣) جسمان كتلة كل منهما ٣ كجم، مربوطان في طرفي خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء، إذا اكتسبت المجموعة سرعة قدرها ٢ م/ث فإن:
- أ) عجلة الحركة ج =
- ب) الشد في الخيط ش = ث كجم
- ج) المسافة التي قطعتها إحدى الكتلتين خلال ثانية واحدة من بدء الحركة مترًا.



١٤ في الشكل المقابل : إذا تحركت المجموعة من السكون فإن:



أ عجلة المجموعة = م/ث^٢

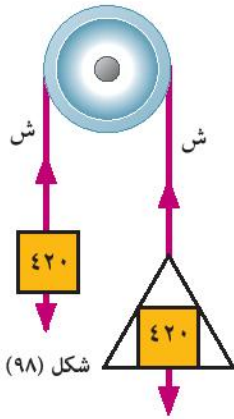
ب سرعة المجموعة بعد ٢ ث = م/ث

ج

إذا انفصلت الكتلة ٢ ك عن المجموعة بعد ٢ ثانية فإن المجموعة تتحرك بعد ذلك بعجلة =

د المسافة التي قطعتها الكتلة ك في ٥ ثوانٍ من بداية الحركة =

١٥ كتلتان مقدار كل منهما ٤٢٠ جم إحداهما موضوعة في كفة ميزان كتلتها ١٤٠ جم. وتحركت المجموعة من السكون فإن:



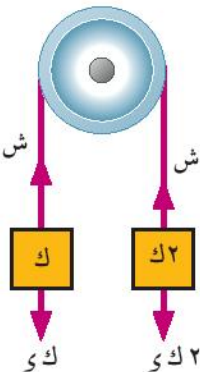
أ عجلة الحركة = سم/ث^٢

ب الشد في الخيط = ث جم

ج الضغط على محور البكرة = ث جم

د الضغط على كفة الميزان = ث جم

١٦ في الشكل المقابل : جسمان كتلتاهما ك، ٢ ك مربوطان في طرفي خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء وتحركت المجموعة من السكون عندما كان الجسمان في مستوى أفقي واحد.



أ عجلة الحركة = م/ث^٢

ب الضغط على البكرة = ث كجم

ج سرعة المجموعة بعد $\frac{3}{4}$ ثانية من بدء الحركة = م/ث

د المسافة الرأسية بين الجسمين بعد $\frac{3}{4}$ ثانية من بدء الحركة = متر.

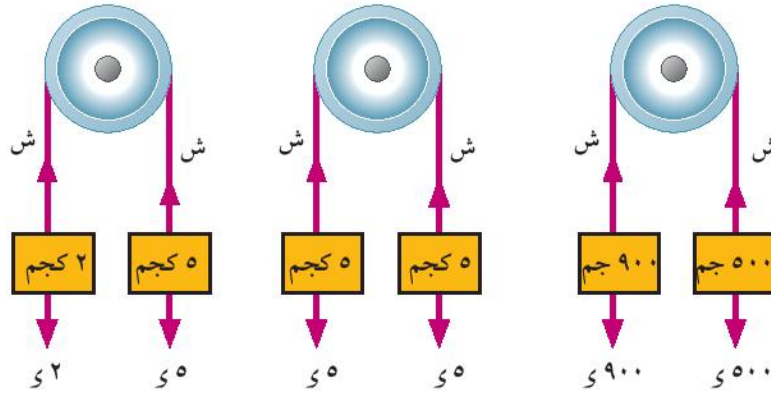
هـ

إذا قُطع الخيط بعد $\frac{3}{4}$ ثانية من بدء الحركة فإن الكتلة ك تصل للسكون اللحظي بعد زمن قدره ثانية

و إذا كانت المسافة بين الجسمين بعد زمن ن ثانية بعد قطع الخيط أصبحت ١٢,٢٥ مترًا فإن ن = ثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١٧) فى كل من الأشكال الآتية أوجد :



أ) عجلة الحركة.

ب) الشد فى الخيط.

ج) الضغط على البكرة.

١٨) رُبط جسمان كتلتاهما ٥ كجم، ٣ كجم فى نهايتى خيط يمر فوق بكرة صغيرة ملساء، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزء الخيط رأسيان إذا تركت المجموعة لتتحرك فأوجد مقدار عجلتها والضغط على البكرة، عين كذلك سرعة الجسم الذى كتلته ٥ كجم عندما يكون قد هبط مسافة قدرها ٤٠ سم.

١٩) عُلق جسمان كتلتاهما ١ ك، ٢ ك حيث ١ ك < ٢ ك فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء، إذا كانت المجموعة تتحرك بعجلة ١٩٦ سم/ث^٢ فأوجد ١ ك: ٢ ك

٢٠) رُبطت كتلتان ٣ ك، ١ ك جرام فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزء الخيط رأسيان، فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون عندما كانت المسافة الرأسية بين الكتلتين ١٦٠ سم والكتلة ١ ك أسفل الكتلة ٣ ك. أوجد الزمن الذى تصبح فيه الكتلتان فى مستوى أفقى واحد.

٢١) عُلق كفتا ميزان كتلة كل منهما ٢١٠ جم فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء ويتدليان رأسياً، وضع فى إحدى الكفتين جسم كتلته ٧٠٠ جم وفى الكفة الأخرى جسم كتلته ٨٤٠ جم. أوجد عجلة الحركة للمجموعة والضغط على كل من الكفتين.

٢٢ رُبِطَت كتلتان ٥ ك، ٢ ك كجم فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء وحفظت المجموعة فى حالة اتزان، وجزء الخيط رأسيان، فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون. فأوجد عجلة حركة المجموعة، وإذا كان الضغط على محور البكرة يساوى ١١٢ نيوتن، فأوجد قيمة ك.

٢٣ جسمان كتلتاهما ٤٢٠ جم، ٥٦٠ جم مربوطان فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء، بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد، وبعد مرور ثانية واحدة قُطِعَ الخيط الواصل بينهما، فاحسب المسافة بين الكتلتين بعد مرور ثانية أخرى من قطع الخيط.

سوف تتعلم

- يتعرف مفهوم الدفع
- يستنتج العلاقة بين الدفع والتغير في كمية الحركة

المصطلحات الأساسية

- الدفع Impulse
- كمية الحركة Momentum
- القوى الدفعية Impulsive Forces

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator



تمهيد: ماذا تلاحظ عند:

- قذف كرة في اتجاه حائط رأسى.
- تصادم السيارات على الطرق السريعة.
- تصادم عجلات الطائرات بأرض المطار أثناء الهبوط.

في مثل هذه الحالات تكون دراسة حركة الأجسام عملية شاقة للغاية نتيجة تشابك العوامل المؤثرة عليها ولصغر الفترات الزمنية المتناهية . وسوف ندرس في هذا الدرس بعض المعلومات الخاصة بذلك لربط حالة الجسم قبل وبعد حدوث التغير في متجه سرعته من خلال هذا النشاط.

نشاط



الأدوات: مسطرة خشبية طويلة يزيد طولها عن متر، مجموعة من الكرات المختلفة مثل كرة جولف، كرة تنس، كرة بلياردو، كرة من الصلصال، ...

العمل: قم بإسقاط هذه الكرات تباعاً من ارتفاع ثابت وليكن ٢ متر على أرضية غرفة من الرخام أو السيراميك وسجل الارتفاع الذى ترتد إليه كل كرة.

الملاحظة والاستنتاج: هل لاحظت اختلافاً في الارتفاعات التي ترتد إليها الكرات المختلفة؟

هل يمكنك ترتيب الكرات حسب مسافة الارتداد لكل منها ترتيباً تنازلياً؟ يرجع اختلاف مسافة الارتداد إلى عدة عوامل منها التغير في كمية حركتها نتيجة تصادم الكرة بالأرض.

ابحث في شبكة المعلومات الدولية عن كل من الدفع وكمية الحركة.

أولاً: الدفع

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ ثابتة المقدار على جسم خلال فترة زمنية Δt فإن دفع هذه القوة، ونرمز له بالرمز $\vec{D}$ يعرف بأنه حاصل ضرب متجه القوة في زمن تأثيرها أى أن:

$$\vec{D} = \vec{F} \Delta t$$

يتضح من هذا التعريف أن الدفع $\vec{D}$ كمية متجهة لها نفس اتجاه متجه القوة $\vec{F}$ ويمكن كتابة العلاقة بين القياس الجبرى للدفع D والقياس الجبرى للقوة F كالآتي:

$$D = F \cdot n$$

وحدات قياس مقدار الدفع:

من تعريف الدفع نجد أن:

وحدة قياس مقدار الدفع = وحدة قياس مقدار القوة $\times$ وحدة قياس الزمن
ففى النظام الدولى للوحدات يقاس مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ث ويمكن أيضًا أن يقاس بحاصل ضرب أى وحدة قوة فى أى وحدة زمن.

كما يمكن التعبير عن وحدات قياس مقدار الدفع بطريقة اخري بملاحظة أن:

كجم.م/ث ، جم.سم/ث ، ...
لذلك نجد أن: إذا كانت الكتلة بالكيلو جرام و السرعة متر/ثانية فإن وحدة مقدار الدفع تكون كجم.م/ث وهى نفس الوحدة نيوتن.ث
وعندما تكون الكتلة بالجرام والسرعة سم/ث فإن وحدة مقدار الدفع تكون جم.سم/ث وهى نفس الوحدة داي.ث

مثال

على تعريف الدفع

١ أثرت قوة مقدارها ٢٥ ث كجم على جسم لفترة زمنية قدرها $\frac{1}{10}$ ثانية ، أوجد دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث

الحل

الدفع = $F \cdot t$

$$= 25 \times 9.8 \times \frac{1}{10} = 24.5 \text{ نيوتن . ث}$$

٩ حاول أن تحل

١ أثرت قوة مقدارها ١٠ داي.ث على جسم لفترة زمنية ١٠^{-٥} ثانية ، أوجد دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث

مثال

إيجاد مقدار الدفع

٢ أثرت القوى $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، $\vec{F}_3$ ، $\vec{F}_4$ ، $\vec{F}_5$ على جسم $\vec{m}$ ، أوجد مقدار دفع القوى على الجسم إذا كان مقدار القوة يقاس بوحدة نيوتن.

الحل

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 \\ &= (\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + \vec{F}_3) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) + (\vec{F}_3 - \vec{F}_4 + \vec{F}_5) \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 \\ \therefore \vec{D} &= \vec{F} \times t \\ &= (5\vec{F}_1 + 5\vec{F}_2 + 5\vec{F}_3) \times 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\text{مقدار الدفع} = \sqrt{5^2(10)^2 + 5^2(5)^2 + 5^2(25)^2} = 30.6 \text{ نيوتن . ث}$$

٤ حاول أن تحل

١ أثرت القوى $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ ، $\vec{F}_4 = \vec{F}_5 - \vec{F}_6$ على جسم لمدة ثانية واحدة، أوجد مقدار دفع القوة على الجسم إذا كان معيار القوة يقاس بوحدة نيوتن.

ثانياً: الدفع وكمية الحركة

تذكر أن

$$\begin{aligned} \therefore E &= E + J \\ \therefore E &= E - J \end{aligned}$$

حيث أن دفع قوة ثابتة المقدار F على جسم لفترة زمنية t يساوي W ومن القانون الثاني لنيوتن نجد أن :

$$\text{الدفع} = K \cdot J$$

$$\therefore \text{الدفع} = K (E - E)$$

حيث E ، E هما القياسان الجبريان لمتجهي السرعة الابتدائية والسرعة بعد زمن t على الترتيب أي أن الدفع يساوي التغير في كمية الحركة.

أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الدفع يعطى بالتكامل الآتي :

$$\text{الدفع} = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} F dt = K \cdot J$$

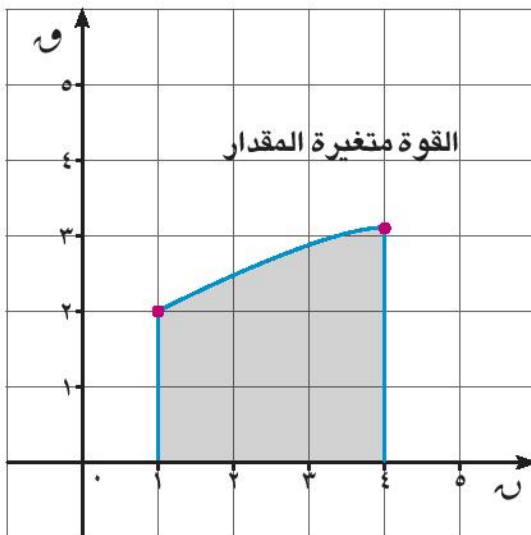
$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = K \cdot \left(\frac{E}{t} - \frac{E}{t} \right)$$

$$K \cdot \int_{t_1}^{t_2} F dt =$$

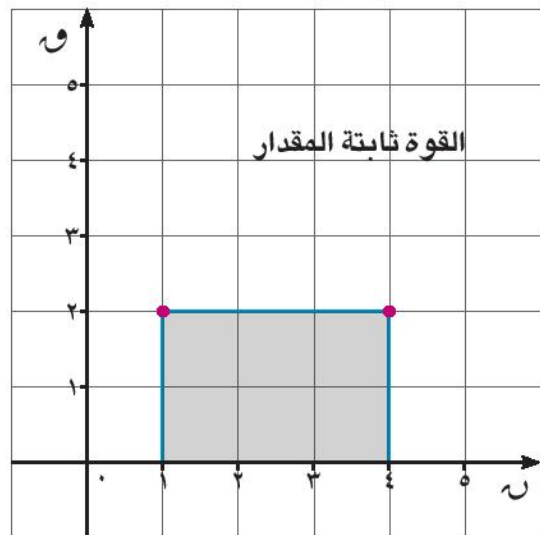
$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = K [E]_{t_1}^{t_2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = K (E - E)$$

على وجه العموم الدفع يساوي التغير في كمية الحركة



$$\text{الدفع} = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$



$$\text{الدفع} = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

مثال

٣ الشكل المقابل يمثل منحنى القوة - الزمن حيث $١ = (٢ - ن)^٢$ أوجد :

أ دفع القوة ١ خلال الثواني الثلاث الأولى .

ب دفع القوة ١ في الثانية الخامسة .

الحل

حيث مقدار القوة ١ بالنيوتن ، الزمن $ن$ بالثانية

$$١ = (٢ - ن)^٢$$

$$١ = ٢ - ن$$

أ الدفع خلال الثواني الثلاث الأولى $١ = ٢ - ن$ و ١

$$١ = (٢ - ن)^٢$$

$$١ = (٢ - ن)^٢$$

$$١ = ٢ - ن$$

ب الدفع خلال الثانية الخامسة $١ = ٢ - ن$ و ١

$$١ = (٢ - ن)^٢$$

$$١ = (٢ - ن)^٢$$

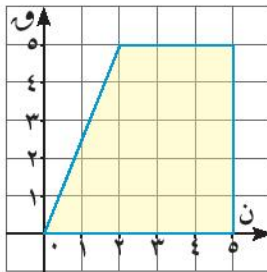
$$١ = ٢ - ن$$

٤ حاول أن تحل

١ الشكل المقابل يمثل منحنى القوة - الزمن أوجد مستخدماً التكامل .

أ دفع القوة ١ خلال الثانية الأولى

ب دفع القوة ١ خلال الثواني الخمسة الأولى حيث مقدار القوة ١ بالنيوتن ، الزمن $ن$ بالثانية .



القوى الدفعية

القوى الدفعية هي قوة كبيرة جداً تؤثر لفترة زمنية صغيرة للغاية وتحدث تغيراً هائلاً في كمية حركة الجسم دون أن تحدث تغيراً يذكر في موضعه والحركة الناتجة عند تأثير هذه القوى تسمى حركة دفعية كمثال على ذلك كرة البيسبول عندما تضرب فإن زمن التلامس بين المضرب والكرة صغيراً للغاية مع أن متوسط

القوة المؤثرة على الكرة كبير جداً ويكون الدفع كبيراً بما يكفي ليغير كمية حركة الكرة دون تغير يذكر في موضع الكرة عند تأثير قوة دفعية على جسم يكون ١ و $١ = ٢ - ن$ حيث $ن$ فترة زمنية صغيرة للغاية.



الدفع و كمية الحركة

مثال

٤ جسم ساكن كتلته ٤ كجم موضوع على مستوى أفقى أملس ، أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٥ نيوتن لمدة ٨ ثانية. أوجد مقدار الدفع على الجسم ومقدار سرعة الجسم بعد ٨ ثانية.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{الدفع} &= \text{ق. ن.} \\ \therefore \text{الدفع} &= 8 \times 5 = 40 \text{ نيوتن. ث} \\ \therefore \text{الدفع} &= \text{التغير فى كمية الحركة} \\ 40 &= \text{ك} (\text{ع} - \text{ع.}) \\ 40 &= \text{ك} (\text{ع} - 0) \\ \text{ع} &= 10 \text{ م/ث} \end{aligned}$$

٦ حاول أن تحل

١ أثرت قوة ثابتة مقدارها ١٠ على جسم كتلته ٤ كجم لمدة $\frac{1}{9}$ ثانية، فغيرت سرعته من ٣ م/ث إلى ٤٥ كم/س فى اتجاه القوة، وكان دفع القوة يساوى ٤,٨ نيوتن. ث فأوجد كتلة الجسم ومقدار القوة بثقل الكجم.

مثال

٥ أثرت قوة $\vec{Q} = 2\vec{s} + 7\vec{v}$ على جسم كتلته ٥ كجم لمدة ١٠ ثانية عندما كان متجه سرعته $\vec{c} = 2\vec{s} - \vec{v}$ ، أوجد سرعته بعد تأثير القوة إذا كان مقدار القوة بوحدة نيوتن، السرعة بوحدة م/ث.

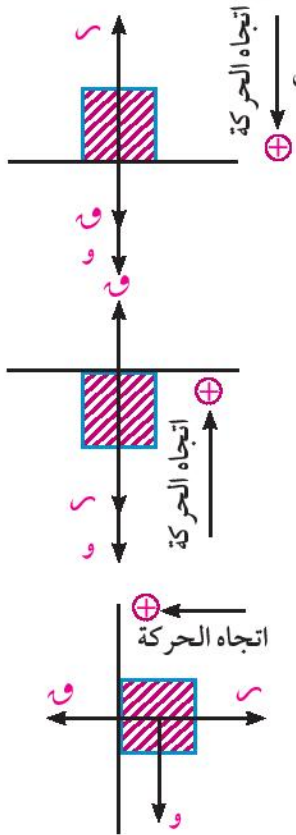
الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{الدفع} &= \text{التغير فى كمية الحركة} \\ \therefore \vec{Q} \cdot \text{ن} &= \text{ك} (\vec{c} - \vec{c.}) \\ \therefore 10(2\vec{s} + 7\vec{v}) &= 5(\vec{c} - \vec{c.}) \\ \therefore 2(2\vec{s} + 7\vec{v}) &= \vec{c} - \vec{c.} \quad \therefore 2(2\vec{s} + 7\vec{v}) + \vec{c} = \vec{c.} \\ \therefore 4\vec{s} + 14\vec{v} + 2\vec{s} - \vec{v} &= \vec{c.} \quad \therefore 6\vec{s} + 13\vec{v} = \vec{c.} \\ \therefore \|\vec{c.}\| &= \sqrt{36 + 169} = 13 \text{ م/ث} \end{aligned}$$

٦ حاول أن تحل

٢ جسم كتلته ٣ كجم يتحرك بسرعة $\vec{c} = 5\vec{s} - 2\vec{v}$ ، أثرت عليه قوة ثابتة لمدة زمنية ن وكان دفع القوة على الجسم يساوى $6\vec{s} + 9\vec{v}$ ، أوجد سرعة الجسم بعد تأثير القوة إذا كانت السرعة بوحدة م/ث، مقدار الدفع بوحدة نيوتن. ث.

لاحظ أن



عند سقوط جسم وزنه «و» رأسياً على سطح الأرض فإنه عند لحظة التلامس يكون:

ضغط الجسم على الأرض = رد فعل الأرض على الجسم = $و + و$

عند قذف جسم وزنه «و» رأسياً وأصطدامه بسقف حجرة فإن:

ضغط الجسم على السقف = رد فعل السقف على الجسم = $و - و$

عند قذف جسم وزنه «و» أفقياً وأصطدامه بحائط رأسي فإن:

ضغط الجسم على الحائط = رد فعل الحائط على الجسم = $و$

حيث $و$ هو مقدار القوة الدفعية في كل من الحالات السابقة

الحركة الرأسية

مثال

٦ سقطت كرة من المطاط كتلتها $\frac{1}{4}$ كجم من ارتفاع ١٠ متر عن سطح الأرض فارتدت بعد اصطدامها بالأرض إلى ارتفاع ٢,٥ متر، أوجد الدفع الناتج عن تصادم الكرة على الأرض وعين رد فعل الأرض على الكرة إذا كان زمن تلامس الكرة مع الأرض $\frac{1}{10}$ ثانية.

الحل

دراسة مرحلة السقوط
 $\therefore ع^2 = ٢ \times ف + ٢ \times و$
 $\therefore ١٠ \times ٩,٨ \times ٢ + ٠ = ع^2$
 $\therefore ١٤ = ع$ م/ث
وهي سرعة الكرة قبل ملامستها للأرض مباشرة.

الدفع = التغير في كمية الحركة = $ك(ع - ٢ع)$

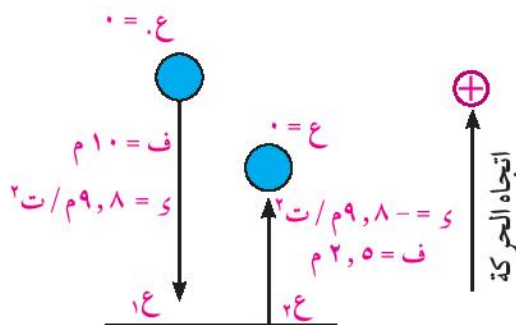
$$= \frac{1}{4} [(١٤ - ٧) - ٧] = ٥,٢٥ \text{ كجم} \cdot \text{م/ث}$$

$$\therefore \text{الدفع} = و \cdot ن \quad \therefore ٥,٢٥ = و \times \frac{1}{10}$$

$$\therefore و = ٥٢,٥ \text{ نيوتن}$$

رد فعل الأرض على الكرة = القوة الدفعية + وزن الكرة

$$= ٥٤,٩٥ = ٩,٨ \times \frac{1}{4} + ٥٢,٥ \text{ نيوتن}$$



٩ حاول أن تحل

- ١ جسم كتلته ٣٠٠ جم قذف رأسياً لأعلى بسرعة ٨٤٠ سم/ث من نقطة تقع أسفل سقف حجرة بمقدار ١١٠ سم فاصطدم بالسقف وارتد إلى أرض الحجرة بعد $\frac{1}{4}$ ثانية من الارتداد. أوجد دفع السقف للجسم علماً بأن ارتفاع السقف ٢٧٢,٥ سم ، وإذا كان زمن تلامس التلامس $\frac{1}{4}$ ثانية فأوجد القوة الدافعة.

تفكير ناقذ

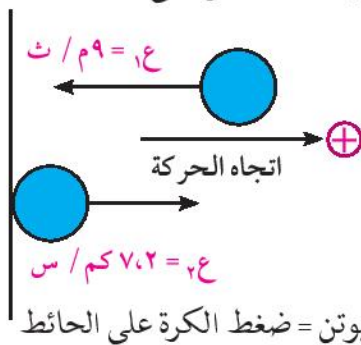
- كرة من الصلصال كتلتها ١ كجم سقطت من ارتفاع ٤٠ سم على ميزان ضغط وكان زمن الصدمة $\frac{1}{4}$ ثانية فأوجد قراءة الميزان علماً بأن الكرة لم ترتد بعد الصدمة.

مثال

الحركة الأفقية

- ٧ كرة كتلتها ١٠٠ جم تتحرك أفقياً بسرعة ٩ م/ث. أصطدمت بحائط رأسى وارتدت بسرعة قدرها ٧,٢ كم/س فإذا كان زمن تلامس الكرة مع الحائط $\frac{1}{4}$ من الثانية فأوجد دفع الحائط للكرة ثم أوجد ضغط الكرة على الحائط.

الحل



باعتبار أن اتجاه الارتداد هو الإتجاه الموجب للحركة

$$\therefore ٩ - ٧,٢ = ١,٨ \text{ م/ث}$$

$$\therefore د = ك (٩ - ٧,٢)$$

$$\therefore د = ١,٨ \times ١٠٠ = ١٨٠ \text{ كجم.م/ث}$$

$$\therefore د = و \times ن \quad \therefore ١٨٠ = و \times \frac{1}{4} \quad \therefore و = ١,٨ \text{ نيوتن}$$

٩ حاول أن تحل

- ٢ كرة تنس كتلتها ٤٠ جم تتحرك أفقياً بسرعة ٥٠ سم/ث أصطدمت بالمضرب فارتدت في الاتجاه المضاد بسرعة ١١٠ سم/ث. أوجد مقدار دفع المضرب على الكرة. وإذا كان زمن تماس الكرة مع المضرب $\frac{1}{4}$ من الثانية فما مقدار قوة دفع المضرب على الكرة؟

تمارين ٢ - ٣

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا أثرت قوة مقدارها ١٦ ث كجم على جسم لمدة ربع ثانية فإن مقدار دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن. ث تساوى.

أ ٤

ب ٣٩,٢

ج ٤٩

د ٦٤

- ٢ إن كان مقدار دفع قوة و على جسم لمدة ١٠ ث فإن مقدار و يساوى:

أ ١٠ دايين

ب ١٠ دايين

ج ١٠ نيوتن

د ١٠ نيوتن

- ٣ إذا أثرت القوتان و١ = ٥ + ٧ ع ، و٢ = ٢ س - ٢ ع مقداران بوحدة النيوتن

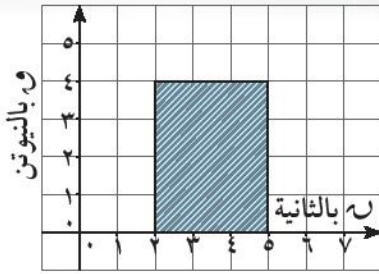
على جسم لفترة زمنية قدرها ٢ ثانية فإن مقدار دفع القوتى بوحدة نيوتن. ثانية يساوى:

أ ٣٦٥

ب ٣٦١٠

ج ٣٦٥٠

د ٣٦١٠٠



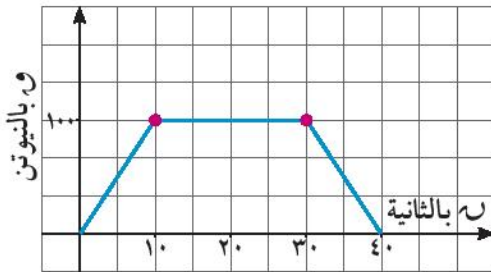
٤ إذا أثرت قوة ثابتة المقدار على جسم لفترة زمنية كما هو معطى فى الشكل فإن مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ثانية تساوى.

أ ٨ ب ١٢

ج ٢٠ د ٥٠

٥ إذا أثرت قوة مقدارها ٩٠ نيوتن على جسم كتلته ١٠ كجم لمدة ٥ ثوان ، فإن مقدار التغير فى سرعة الجسم فى اتجاه القوة نفسه يساوى.

أ ٤٥ م/ث ب ٥٠ م/ث ج ٩٠ م/ث د ١٢٠ م/ث



٦ جسم كتلته ٢٠ كجم موضوع على مستوى أفقى أملس فإذا تحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة اتجاهها ثابت ويتغير مقدارها مع الزمن كما هو موضح بالشكل فإن مقدار الدفع لهذه القوة بعد ٤٠ ثانية بوحدة نيوتن. ثانية يساوى:

أ ١٠٠٠ ب ٢٠٠٠

ج ٣٠٠٠ د ٤٠٠٠

ثانيا : اجب عن الأسئلة الآتية :

٧ أطلقت رصاصة كتلتها ٢٠ جم من بندقية أفقياً، فإذا إستمر مسارها داخل البندقية لمدة ٠,٥ ثانية وكان مقدار قوة دفع البندقية عليها ٢٠ نيوتن أوجد سرعة خروج الرصاصة من فوهة البندقية.

٨ مدفع سريع الطلقات يطلق الرصاصات رأسياً لأعلى ، كتلة الواحدة منها ٥٠٠ جم فإذا كان متوسط قوة دفع الغاز فى إسطوانة المدفع على الرصاصة هو ٢٥٠ نيوتن وتؤثر على الرصاصة لمدة ٠,٢ ثانية حتى لحظة خروج الرصاصة من فوهة المدفع احسب سرعة خروج الرصاصة من فوهة المدفع.

٩ سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠ جم من إرتفاع ٦,٤ متر من سطح الأرض فارتدت رأسياً إلى أعلى فإذا كان متوسط القوة التى تبذلها الأرض على الكرة 182×10^4 داین وأن زمن تلامس الكرة بالأرض ٠,٠٢ من الثانية فأوجد.

أ مقدار دفع الأرض للكرة

ب أقصى إرتفاع وصلت إليه الكرة بعد إرتدادها

١٠ تتحرك كرة ملساء كتلتها ٢٠٠ جرام فى خط مستقيم على أرض أفقية ملساء بسرعة ١٠ م/ث فإذا إصطدمت الكرة بحائط رأسى أملس وارتدت بسرعة ٤ م/ث أوجد:

أ مقدار دفع الحائط على الكرة

ب مقدار قوة دفع الحائط للكرة إذا كان زمن تلامس الكرة على الحائط ٠,٠٥ من الثانية.

١١) عربة سكة حديد كتلتها ١٠ طن تسير بسرعة ١٨ كم/س صدمت حاجز الأصطدام وارتدت بسرعة ٩ كم/س أوجد مقدار دفع الحاجز للعربة.

١٢) عربة ساكنة كتلتها ١ طن دفعت في اتجاه حركتها بقوة ٢٠٠ ث كجم لمدة ٥ ثوان ثم تركت العربة وشأنها فعادت إلى حالة السكون مرة أخرى بعد ١٥ ثانية أوجد مقدار المقاومة بفرض ثبوتها في الحالتين وكذلك أقصى سرعة وصلتها العربة مستخدما العلاقة بين الدفع وكمية الحركة.

١٣) قذفت كرة كتلتها ١ كجم رأسيا لأعلى وباتجاه سقف يرتفع عن نقطة القذف مسافة ٣٦٠ سم بسرعة مقدارها ١٤ م/ث فإذا اصطدمت الكرة بالسقف وارتدت بسرعة ١٠ م/ث أوجد مقدار قوة دفع السقف على الكرة إذا كان زمن تلامس الكرة مع السقف ٠,٠٢ من الثانية.

١٤) مدفع سريع الطلقات يطلق أفقياً ٦٠٠ رصاصة في الدقيقة . كتلة كل واحدة منها ٣٩,٢ جرام بسرعة ١٢٦٠ كم/س إحسب قوة رد الفعل المؤثر على المدفع بثقل الكيلو جرام.

١٥) كرة كتلتها ١٥٠٠ جرام سقطت من إرتفاع ٢,٥ متر على سطح سائل لزج فغاصت فيه بسرعة منتظمة وقطعت مسافة ٧٠ سم في ٠,٢ من الثانية احسب مقدار دفع السائل على الكرة.

١٦) أثرت القوى $\vec{F}_1 = \vec{a} - \vec{b}$ ، $\vec{F}_2 = \vec{b} + \vec{c}$ ، $\vec{F}_3 = \vec{a} + \vec{c}$ على جسم لمدة $\frac{1}{2}$ ثانية وكان دفع هذه القوى على الجسم يعطى بالعلاقة $\vec{d} = \vec{c} + \vec{e}$ أوجد قيمة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$.

١٧) جسم كتلته ٢٠ جم سقط من ارتفاع ٤٠ سم عن سطح بركة من الماء فغاص في الماء وقطع مسافة ٢١٠ سم خلال ثانية واحدة بعجلة ١,٢ م/ث^٢ أوجد مقدار دفع الماء على الجسم نتيجة لتصادمه بسطح الماء.

الشغل ، الطاقة ، القدرة

Work , Energy & Power



الوحدة

٣

مقدمة الوحدة

فى دراستنا للوحدات السابقة وجدنا أنه عندما تؤثر محصلة عدة قوى على جسم فإنه يتحرك بشكل أو بآخر، وإذا تساءلنا الآن ما الفائدة من حركة وتحريك الأجسام؟ تأتى الإجابة فى شقين؛ أولهما أن الإنسان بفضوله الدائم يسعى لتفسير الظواهر الطبيعية وأسبابها وما ينتج عنها. وثانيها أن الإنسان يريد الاستفادة مما أنعم الله عليه وسخره لنا، فهو يريد سيارة تنقله من مكان لآخر ومصابيح كهربائية لإنارة المدن والقرى وغير ذلك، وبالطبع فإن كل ذلك لن يتحقق ما لم نعرف كيف نتحكم بالأشياء ونستفيد من حركاتها سواء أكانت أجهزة كهربائية والإلكترونية أو وسائل مواصلات مختلفة أو أجسام كونية تسبب دوران الأرض وتعاقب الليل والنهار.

لذلك سوف ندرس فى هذه الوحدة حركة الأجسام فنتعرف على الشغل وكيف نستفيد من تحريك الأجسام ثم نتعرف على طاقة الحركة وطاقة الوضع ثم نربط بين هذه الكميات القياسية (غير المتجهة) وحدات قياسها المختلفة والعلاقة بينها ونتعرف بعد ذلك على القوى التى تحافظ على الطاقة وتلك التى لا تحافظ عليها وصولاً لمبدأ الشغل والطاقة ثم نتعرف على أبسط الآلات التى استخدمها الإنسان ونقارن بينها بحساب القدرة الناتجة عن كل واحدة ومردوداتها المختلفة فى الحياة اليومية.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف الشغل المبذول بواسطة قوة ووحدات قياس الشغل.
- ✚ يتعرف مفهوم القدرة ووحدات قياسها.
- ✚ يتعرف طاقة حركة الجسم ووحدات قياسها.
- ✚ يتعرف مبدأ الشغل والطاقة.
- ✚ يتعرف طاقة الوضع ووحدات قياسها وتطبيقاتها.

المصطلحات الأساسية

المشغل	Work	قوة متغيرة	Variable Force	مبدأ الشغل والطاقة
قوة ثابتة	Constant Force	إرج	Erg	principle of Work – Energy
كمية قياسية	Scalar Quantaty	طاقة الحركة	Kinetic Energy	ثبات الطاقة
متجه إزاحة	Displacement Vector	طاقة لوضع	potential Energy	القدرة
متجه موضع	Position Vector	التغير في طاقة الوضع	Change in Potential Energy	قوة الحصان
جول	Joule			Horse Power

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

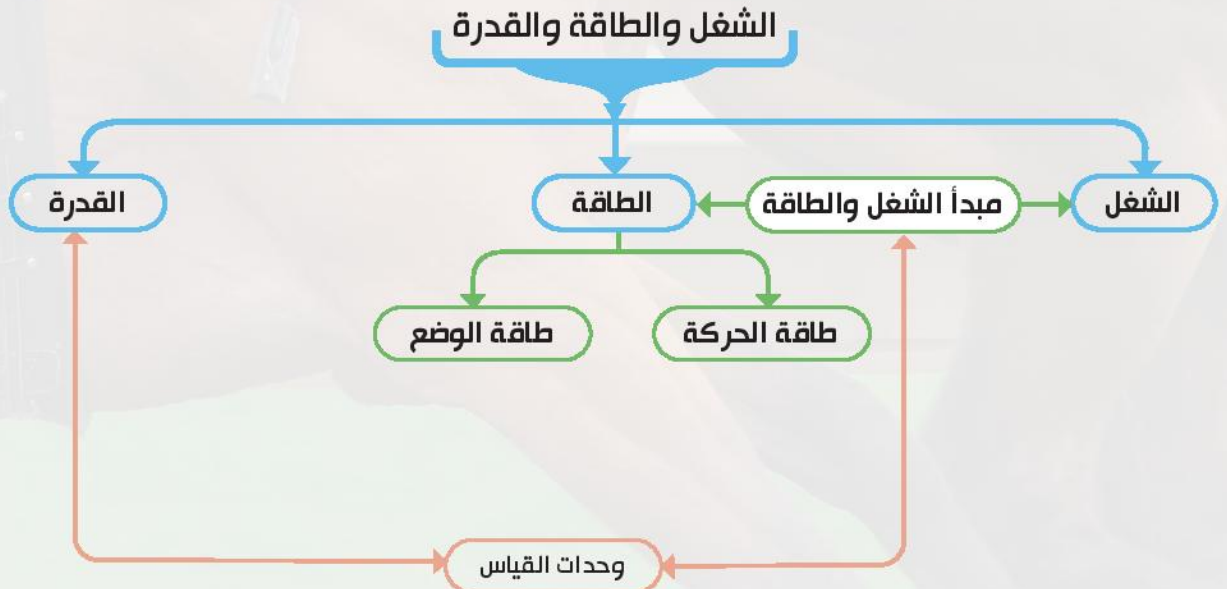
دروس الوحدة

(٤- ١): الشغل

(٤- ٢): الطاقة

(٤- ٣): القدرة

مخطط تنظيمي للوحدة



Work

مقدمة:

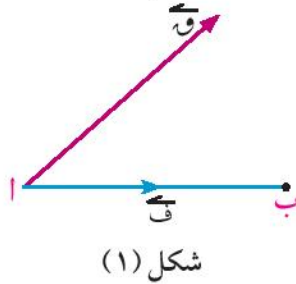
إن مفهوم الشغل من الأمور الهامة في علم الكيناتيكا (Kinetic) لأنه يعتمد على مفاهيم القوة التي وضعها نيوتن في القوانين الثلاثة، ويجدر بالذكر أن الشغل والطاقة كميات قياسية وبالتالي فإن التعامل معها سيكون أسهل من استخدام قوانين نيوتن للحركة خصوصاً، عندما يكون متجه القوة متغيراً وبالتالي فإن متجه العجلة سيكون متغيراً كذلك. وفي هذا الدرس سوف نوضح مفهوم الشغل وهو حلقة الوصل بين القوة والطاقة. والشغل قد يكون ناتجاً من قوة ثابتة Constant force أو من قوة متغيرة Varying force. وسوف ندرس كلا من النوعين في هذا الدرس.

سوف نتعلم

- الشغل المبذول من قوة ثابتة.
- بعض الحالات المختلفة لمتجهي القوة والإزاحة.
- وحدات قياس الشغل.
- الشغل المبذول من قوة متغيرة.

Work done by a Constant Force

أولاً: الشغل المبذول من قوة ثابتة:



باعتبار أن جسماً يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$ وأنه أنتقل من الموضع أ إلى الموضع ب وكان متجه إزاحته $\vec{AB} = \vec{r}$ كما في شكل (١)

المصطلحات الأساسية

الشغل	Work
قوى ثابتة	Constant force
كمية قياسية	Scalar quantity
متجه إزاحة	Displacement vector
متجه موضع	Position vector
جول	Joule
إرج	Erg

تعريف

يعرف الشغل المبذول بواسطة القوة الثابتة $\vec{F}$ في تحريك جسم من موضع ابتدائي إلى موضع نهائي ويرمز له بالرمز (ش) على أنه يساوي حاصل الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة بين الموضعين

$$ش = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

يتضح إذاً أن الشغل هو كمية قياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر تبعاً لاتجاه كل من المتجهين $\vec{F}$ ، $\vec{r}$

مثال

١) تحرك جسم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\vec{F} = 6\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$ من النقطة أ (٣، ٤) إلى النقطة ب (٧، ٢) احسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة.

الحل

$$\text{متجه الإزاحة } \vec{r} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) - (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

$$\vec{F} = 6\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$$

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- Scientific calculator

نطبق تعريف الشغل مع ملاحظة أن القوة المعطاة ثابتة

$$\text{ش} = \vec{Q} \cdot \vec{F}$$

$$\text{ش} = (\vec{Q}_6 + \vec{Q}_8) \cdot (\vec{F}_6 + \vec{F}_4) = 6 \times 8 + 4 \times 6 = 72 \text{ وحدة قياس شغل}$$

٩ حاول أن تحل

- ١) تحرك جسم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\vec{Q} = \vec{Q}_5 + \vec{Q}_2$ من النقطة أ (٥، ٢) إلى النقطة ب (٣، ١) احسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة

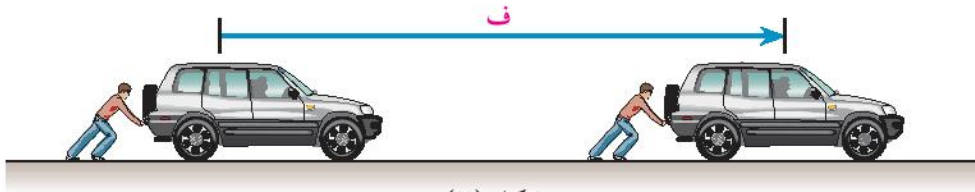
بعض الحالات المختلفة لمتجهي القوة والإزاحة

وحيث أنه يمكن إعادة كتابة معادلة تعريف الشغل $\text{ش} = \vec{Q} \cdot \vec{F}$ بصورة أخرى وهي $\text{ش} = ||\vec{Q}|| ||\vec{F}|| \cos \theta$ حيث θ قياس أصغر زاوية بين متجه القوة $\vec{Q}$ ومتجه الإزاحة $\vec{F}$ باعتبارهما خارجين من نقطة واحدة.

- أ) إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها مواز لإتجاه الأزاحة أى أن $\theta = 0^\circ$ = صفر عندئذ يصبح الشغل $\text{ش} = ||\vec{Q}|| ||\vec{F}||$ جتا صفر = $||\vec{Q}|| ||\vec{F}||$

ويكتب: $\text{ش} = Q \times F$

وشكل (٢) يوضح ذلك

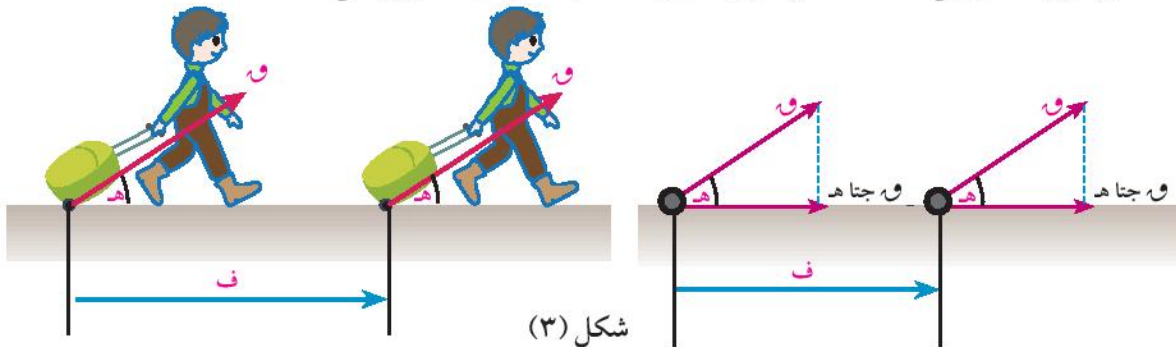


شكل (٢)

- ب) إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها يميل على اتجاه الأزاحة بزاوية قياسها أقل من 90° عندئذ يصبح الشغل

$$\text{ش} = ||\vec{Q}|| ||\vec{F}|| \cos \theta$$

ويكون الشغل في هذه الحالة يساوى المركبة الأفقية للقوة $Q \cos \theta$ مضروباً في المسافة F .

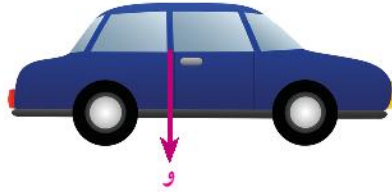


شكل (٣)

ج إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها عمودى على إتجاه الأزاحة أى أن $\theta = 90^\circ$ (هـ) عندئذ يصبح الشغل

$$\text{ش} = \vec{F} \cdot \vec{s} = 0 \quad \text{ف جتا } 90 = \text{صفر}$$

وشكل (٤) يوضح ذلك.



فالسيرة المتحركة أفقياً وزنها لا يقوم بأى شغل في مسار الحركة

د إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها يميل على إتجاه الأزاحة بزاوية قياسها أكبر من 90° عندئذ يصبح الشغل

$$\text{ش} = \vec{F} \cdot \vec{s} = \text{ف جتا } \theta$$

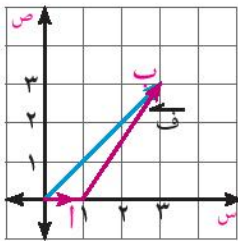
ويكون الشغل سالبا ويسمى شغلاً مقاوماً ومثال ذلك الشغل الذى تبذله قوة المقاومة أو قوة الاحتكاك.

مثال

٢ تحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\vec{F} = 5\vec{s} - 3\vec{v}$ من النقطة أ (١، ٠) إلى النقطة

ب (٣، ٣) حيث ينسب التحليل إلى مجموعة محاور ديكارتية متعامدة $\vec{s}$ ، $\vec{v}$. عين الشغل المبذول

الحل



شكل (٥)

يبين شكل (٥) موضع كل من النقطتين أ، ب بالنسبة للمحاور.

لحساب متجه الإزاحة $\vec{F}$:

(قاعدة طرح المتجهات)

$$\vec{F} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\therefore \vec{F} = (3-1)\vec{s} + (3-0)\vec{v} = 2\vec{s} + 3\vec{v}$$

$$= 2\vec{s} + 3\vec{v}$$

$$\therefore \text{ش} = \vec{F} \cdot \vec{s} =$$

(تعريف الشغل)

$$= (2\vec{s} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{s} - 5\vec{v}) =$$

$$= 2 \times 3 + 3 \times (-5) = 6 - 15 = -9$$

٩ حاول أن تحل

٢ يتحرك جسيم تحت تأثير القوتين $\vec{F}_1 = 2\vec{s} - 3\vec{v}$ ، $\vec{F}_2 = 5\vec{s} + \vec{v}$ من النقطة أ (٢، ١) إلى النقطة

ب (٣، ٠) حيث $\vec{s}$ ، $\vec{v}$ متجهي الوحدة الأساسية. احسب الشغل المبذول.

تفكير ناقد:

أثبت أنه إذا حدث للجسم إزاحتان متتاليتان تحت تأثير قوة ما، فإن الشغل المبذول خلال الإزاحة المحصلة يساوى مجموع الشغلين خلال كل من الإزاحتين.

مثال

٣ أثرت القوة $\vec{Q} = 3\vec{s} + 5\vec{v}$ على جسم فحركته من النقطة أ (٤، ٢) على خط مستقيم إلى النقطة ب (٣، ٥) ثم إلى النقطة ج (٢، ٨) إحسب الشغل بواسطة هذه القوة خلال كل من الأزاحتين ثم حقق أن مجموع الشغلين يساوي الشغل المبذول خلال الأزاحة المحصلة.

الحل

أولاً: متجه الأزاحة الأولى $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, 3) = (4, 2) - (3, 5)$

الشغل المبذول خلال الأزاحة الأولى

$$ش_1 = \vec{Q} \cdot \vec{AB} = (3\vec{s} + 5\vec{v}) \cdot (2\vec{s} - 3\vec{v})$$

$$ش_1 = 9 - 5 = 4 \text{ وحدة قياس شغل}$$

$$\text{متجه الأزاحة الثانية } \vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (5, 3) = (2, 8) - (3, 5)$$

الشغل المبذول خلال الأزاحة الثانية

$$ش_2 = \vec{Q} \cdot \vec{BC} = (3\vec{s} + 5\vec{v}) \cdot (3\vec{s} - 5\vec{v})$$

$$ش_2 = 9 - 25 = -16 \text{ وحدة قياس شغل}$$

الشغل المحصل = مجموع الشغلين

$$ش = ش_1 + ش_2 = 4 - 16 = -12 \text{ وحدة قياس شغل}$$

ثانياً: الأزاحة المحصلة $\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (6, 6) = (2, 8) - (4, 2)$

الشغل خلال الأزاحة المحصلة

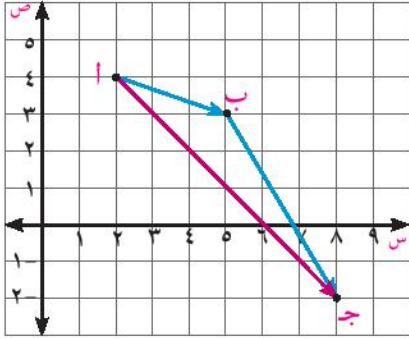
$$ش = \vec{Q} \cdot \vec{AC} = (3\vec{s} + 5\vec{v}) \cdot (6\vec{s} - 6\vec{v})$$

$$ش = 30 - 18 = 12 \text{ وحدة قياس الشغل}$$

٤ حاول أن تحل

٣ أثرت القوة $\vec{Q} = 5\vec{s} - 7\vec{v}$ على جسم فحركته من النقطة أ (٥، ١) على خط مستقيم إلى النقطة ب (٣، ١) ثم إلى النقطة ج (٤، ٦) إحسب الشغل بواسطة هذه القوة خلال كل من الأزاحتين ثم حقق أن مجموع الشغلين يساوي الشغل المبذول خلال الأزاحة المحصلة.

تعبير شفهي: إذا تحرك جسم على خط مستقيم من موضع ما ثم عاد إلى نفس هذا الموضع تحت تأثير نفس القوة فما مقدار الشغل المبذول خلال هذا المسار



لاحظ أن



لا يتوقف الشغل على المسار
الذى يسلكه الجسم من
الموضع أ إلى الموضع ب بل
يتوقف على الإزاحة $\overrightarrow{AB}$

مثال



٤ أثرت قوة $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3}$ على جسم فكان متجه موضع الجسم عند لحظة زمنية n تتعين من العلاقة: $\overrightarrow{R}(n) = \overrightarrow{S_1}(n) + \overrightarrow{S_2}(n) + \overrightarrow{S_3}(n)$ حيث $\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{S_3}$ متجهها الوحدة الأساسيين، احسب الشغل المبذول من القوة من $n = 1$ إلى $n = 5$



الحل

الإزاحة الحادثة من $n = 1$ إلى $n = 5$ هي

$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{R_5} - \overrightarrow{R_1}$$

$$\therefore \overrightarrow{Q} = (\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3}) - (\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3}) = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} - \overrightarrow{S_1} - \overrightarrow{S_2} - \overrightarrow{S_3} = \overrightarrow{0}$$

$$\therefore \text{ش} = \overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{Q} = 0$$

(من تعريف الشغل)

$$\therefore \text{ش} = (2, 2) \cdot (2, 2) = 4 + 4 = 8 \text{ وحدة شغل.}$$

٤ حاول أن تحل

٤ إذا كان متجه موضع جسم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة: $\overrightarrow{R}(n) = \overrightarrow{S_1}(n) + \overrightarrow{S_2}(n) + \overrightarrow{S_3}(n)$ حيث $\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{S_3}$ متجهها الوحدة الأساسية. أثرت على الجسم قوة $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3}$ أحسب الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{Q}$ من $n = 1$ إلى $n = 3$

وحدات قياس الشغل:

من تعريف الشغل نستنتج ان:

$$\text{وحدة قياس الشغل} = \text{وحدة قياس مقدار القوة} \times \text{وحدة قياس الإزاحة}$$

ومن وحدات قياس الشغل:

الجول: يعرف الجول بأن مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها نيوتن واحد في تحريك جسم ما مسافة متر واحد.

$$\text{فإذا أخذنا } ||\overrightarrow{Q}|| = 1 \text{ نيوتن ، } ||\overrightarrow{F}|| = 1 \text{ متر فإن:}$$

$$\text{الجول} = 1 \text{ نيوتن} \times 1 \text{ متر} \quad \text{أى} \quad \text{الجول} = \text{نيوتن} \cdot \text{متر}$$

الجول هو الوحدة الدولية لقياس الشغل

الإرج: يعرف الإرج على أنه مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها دايين واحد في تحريك جسم ما مسافة سنتيمتر واحد.

$$\text{فإذا أخذنا } ||\overrightarrow{Q}|| = 1 \text{ دايين ، } ||\overrightarrow{F}|| = 1 \text{ سم فإن:}$$

$$\text{الإرج} = 1 \text{ دايين} \times 1 \text{ سم} \quad \text{أى} \quad \text{الإرج} = \text{داين} \cdot \text{سم}$$

✓ **ث كجم. متر:** هو مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها ١ ث كجم فى تحريك جسم ما مسافة متر واحد.

فإذا أخذنا $||\vec{F}|| = ١$ ث كجم $||\vec{F}|| = ١$ متر فإن ث كجم. متر = ١ ث كجم $\times$ ١ متر
ويمكن التحويل بين وحدات الشغل على النحو الآتى:

$$١ \text{ جول} = ١ \text{ نيوتن} \times ١ \text{ متر}$$

$$١٠^\circ \text{ دايين} \times ١٠٠ \text{ سم} =$$

$$١٠^\circ \text{ دايين} \times \text{سم} =$$

$$\text{جول} = ١٠^\circ \text{ إرج}$$

$$١ \text{ ث كجم. متر} = ١ \text{ ث كجم} \times ١ \text{ متر}$$

$$= ٩,٨ \text{ نيوتن. متر}$$

$$\text{ث كجم. متر} = ٩,٨ \text{ جول}$$

مثال

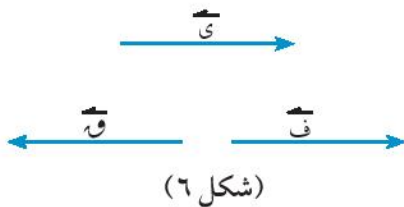
٥ يتحرك جسم على خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوى فى المقدار ١٠٠ نيوتن. أحسب الشغل الذى تبذله هذه القوة خلال أزاحة معيارها ٣٠٠ متر.

الحل

بما أن القوة هى مقاومة. إذن فهى تعمل عكس اتجاه متجه الإزاحة، وإذا كان $\vec{F}$ متجه وحدة فى اتجاه الإزاحة، فإنه يمكن التعبير عن كل من الإزاحة والقوة بالقياسات الجبرية.

$$\vec{F} = -F \vec{e}, \quad \vec{e} = -\vec{e}$$

فى حالتنا:



$$F = ٣٠٠ \text{ متر}, \quad e = ١٠٠ \text{ نيوتن}$$

من شكل (٦) ش $= -F \cdot e$

$$= (٣٠٠) \times (١٠٠) =$$

$$= -٣٠ \times ١٠ \text{ نيوتن. متر}$$

$$= -٣٠ \times ١٠ \text{ جول}$$

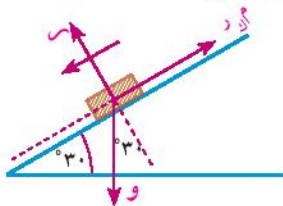
مثال

شغل الوزن ورد الفعل العمودى والأحتكاك

٦ ينزلق جسم كتلته ١٠ كجم مسافة ٦ متر على مستو خشن معامل الأحتكاك الحركى بينهما ٠,٢ ويميل هذا المستوى على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد بوحدته ث كجم. متر الشغل الذى تبذله كلاً من:

أولاً: قوة وزن الجسم **ثانياً:** رد الفعل العمودى على المستوى **ثالثاً:** قوة الأحتكاك

الحل



أولاً: الشغل المبذول من قوة الوزن

$$\text{وزن الجسم (و)} = W$$

$$\therefore W = ٩,٨ \times ١٠ = ٩٨ \text{ نيوتن}$$

∴ الزاوية المحصورة بين $\vec{w}$ ، $\vec{F}$ تساوى 60°

ومن تعريف الشغل:

$$\text{ش} = w \times F \text{ جتا } 60^\circ$$

$$\therefore \text{ش} = 98 \times 6 \times \frac{1}{2} = 294 \text{ جول} = 30 \text{ ث كجم. متر}$$

حل آخر:

يمكن إيجاد مركبة الوزن التي تعمل فى نفس اتجاه الإزاحة ويكون الشغل المبذول $\text{ش} = \text{ك} \times \text{جاء} \times F$

$$\therefore \text{ش} = 10 \times 9.8 \times \frac{1}{2} \times 6 = 294 \text{ جول} = 30 \text{ ث كجم. متر}$$

ثانيًا:

∴ قوة رد الفعل العمودى على المستوى (س) تكون دائمًا عمودية على المستوى الذى يتحرك عليه الجسم لذا

تكون الزاوية بين س ، ف مساوية 90° .

$$\therefore \text{الشغل المبذول من س} = 0$$

ثالثًا: الشغل المبذول من قوة الاحتكاك:

نعلم أن قوة الاحتكاك الحركى $\text{م} = \mu$ (حيث μ معامل الاحتكاك الحركى)

$$\therefore \text{م} = 0.2 \times 9.8 \times 10 = 39.2 \text{ نيوتن}$$

∴ الشغل المبذول من قوة الاحتكاك = $\text{م} \times \text{س} \times F$

$$\therefore \text{ش} = -39.2 \times 6 = -235.2 \text{ جول} = -30 \text{ ث كجم. متر}$$

٩ حاول أن تحل

٥ سيارة كتلتها ٦ طن تصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{98}$ ضد مقاومات تعادل ١٠ ث كجم لكل

طن من الكتلة فاكسبت سرعة ٥٤ كم / س خلال ٣٠ ثانية ، فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون فأحسب

بالجول مقدار الشغل المبذول من:

ثانيًا: قوة المقاومة

أولًا: قوة محرك السيارة

ثالثًا: وزن السيارة

Work Done by a Varying Force

ثانيًا: الشغل المبذول من قوة متغيرة

سبق أن استخدمنا مفهوم الشغل فى التعامل مع الحركة - عندما تكون القوة منتظمة ويمكن توضيح ذلك من خلال

المثال التالى:

مثال توضيحى:

باعتبار أن قوة ثابتة مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر على جسم ليتحرك

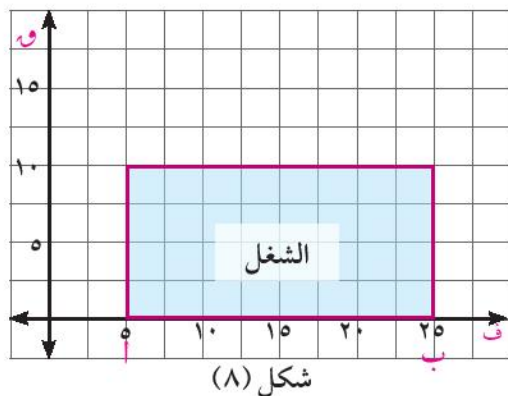
من أ إلى ب كما هو موضح فى شكل (٨)

وبالتالى تكون الإزاحة من أ إلى ب = ٢٠ متر ولتمثيل ذلك

بيانًا نرسم محور القوة ومحور الإزاحة كما هو مبين فى

الشكل وبالتالى تكون القوة ممثلة على مستقيم أفقى يوازي

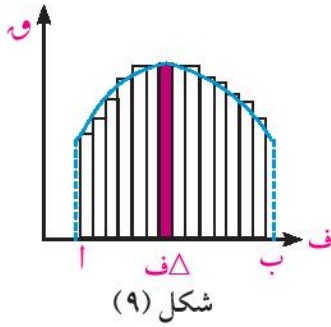
محور الإزاحة ف.



الشغل = و = ف = ١٠ (٥-٢٥) = ٢٠٠ جول

وهو عبارة عن المساحة أسفل المنحنى وتمثل بمساحة المستطيل الذي عرضه ١٠ نيوتن وطوله ٢٠ متر.

أما حالة أن تكون القوة متغيرة خلال الإزاحة كما هو موضح في شكل (٩) فتكون المساحة تحت المنحنى تتحدد من العلاقة:



$$\text{ش} = \int_a^b W \, dF$$

وفي هذه الحالة نأخذ إزاحة صغيرة قدرها ΔF حتى تكون القوة المؤثرة لهذه الإزاحة منتظمة ويكون الشغل المبذول عندها يعطى بالعلاقة:

$$\Delta \text{ش} = W \, \Delta F$$

وإذا قسمنا منحنى القوة إلى أجزاء صغيرة وحسبنا الشغل المبذول خلال كل جزء وأوجدنا مجموعهم ، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة:

$$\text{ش} = \int_a^b W \, dF$$

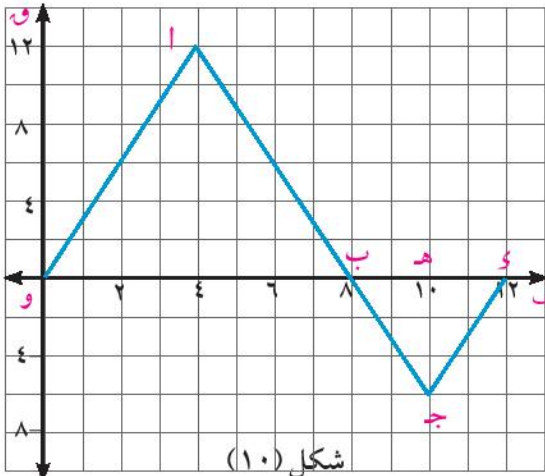
وعندما تكون الإزاحة Δs أصغر ما يمكن (أى تؤول إلى الصفر) لكى نحصل على قيم أدق فى المعادلة السابقة فإن المعادلة السابقة تتحول إلى :

$$\text{ش} = \int_a^b W \, dF$$

وهذه هى الصورة العامة للشغل (لاحظ أن: $W = W \cos \theta$) (تمثل مركبة القوة فى اتجاه الإزاحة)

$$\text{ش} = \int_a^b W \, dF$$

مثال



شكل (١٠) يوضح تأثير قوة متغيرة على جسم احسب الشغل المبذول بالإرج بواسطة هذه القوة فى الحالات الآتية حيث مقدار القوة بالداين، ف بالسنتيمتر:

أولاً: عندما يتحرك الجسم من $F = 0$ إلى $F = 8$

ثانياً: عندما يتحرك الجسم من $F = 8$ إلى $F = 12$

ثالثاً: عندما يتحرك الجسم من $F = 0$ إلى $F = 12$

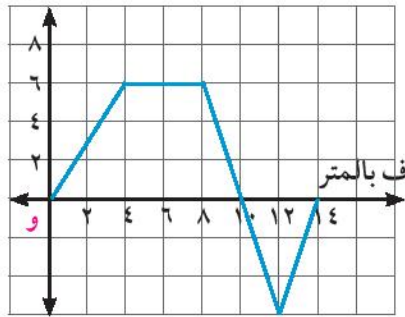
الحل

ش_١ = ٦.٠ و ف = المساحة تحت المنحنى من ف = ٠ إلى ف = ٨ =
 = مساحة سطح Δ و ا ب = $\frac{1}{2} \times 8 \times 12 = 48$ ارج

ش_٢ = ٦.٨ و ف = - المساحة تحت المنحنى من ف = ٨ إلى ف = ١٢ =
 = -مساحة سطح Δ ب ج د = $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ ارج

ش_٣ = ٦.٠ و ف = المساحة تحت المنحنى = ٦.٨ + و ف = ٨ و ف =
 = مساحة سطح Δ و ا ب - مساحة سطح Δ ب ج د
 = $\frac{1}{2} \times 8 \times 12 - \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 36$ ارج

و بالنيوتن



شكل (١١)

٤ حاول أن تحل

٦ الشكل المقابل يوضح تأثير قوة متغيرة على جسم احسب الشغل الكلى المبذول بواسطة هذه القوة فى الحالات الآتية:

أولاً: من ف = ٠ إلى ف = ١٠

ثانياً: من ف = ٨ إلى ف = ١٤

مثال

٨ أثرت قوة متغيرة و (مقاسة بالنيوتن) على جسم حيث و = ٣ ف ٢ - ٤ ، ف القياس الجبرى للإزاحة ومقاسة بالمتر أوجد الشغل المبذول من هذه القوة فى الفترة من ف = ٢ متر إلى ف = ٥ متر

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \text{و} = 3 - 2F - 4, \quad \text{ش} = 1.3 \text{ و ف} \\ \therefore \quad & \text{ش} = 1.3 \text{ و ف} = (3 - 2F - 4) \text{ و ف} = [4 - 2F - 4] \text{ و ف} \\ \therefore \quad & \text{ش} = [(8 - 8) - (20 - 125)] = 105 \text{ جول} \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٧ أثرت قوة متغيرة و (مقاسة بالداين) على جسم حيث و تعطى بالعلاقة:
 و = ٤ ف ٣ - ٢ ف + ١ ، ف القياس الجبرى للإزاحة ومقاسة بالسنتيمتر أوجد الشغل المبذول من هذه القوة فى الفترة من ف = ٠ إلى ف = ٤



تمارين ٣ - ١



أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

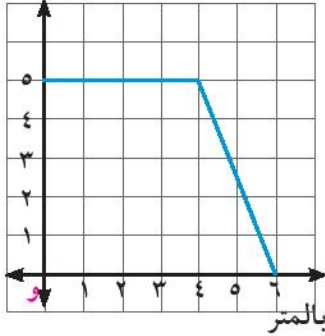
١) إذا تحرك جسم في خط مستقيم من نقطة الأصل إلى النقطة أ (٢، ٣) تحت تأثير القوة $\vec{F} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$ فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة = وحدة شغل .

- أ - ٤ ب - ١ ج - صفر د - ١

٢) إذا تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة أ (-٣، ٢) إلى النقطة ب (٥، -٣) تحت تأثير القوة $\vec{F} = 5\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$ فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة = وحدة شغل

- أ - صفر ب - ٤٠ ج - ٤٠ د - ٨٠

و، بالنيوتن



٣) الشكل المقابل يوضح تأثير قوة (و) على جسم يتحرك مسافة (ف) فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة ليتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ٦ متر يساوي جول

- أ - صفر ب - ٤٠ ج - ٨٠ د - ٢٥

٤) الشغل المبذول في رفع كتلة مقدارها ٢٠٠ جرام موضوعة على سطح الأرض مسافة ١٠ أمتار عن سطح الأرض يساوي جول

- أ - صفر ب - ٩,٨ ج - ١٩,٦ د - ٢٩,٤

٥) إذا تحرك جسم في خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوي في المقدار ٤٠٠ نيوتن فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال إزاحة $\vec{F}$ حيث $||\vec{F}|| = 350$ متر يساوي جول

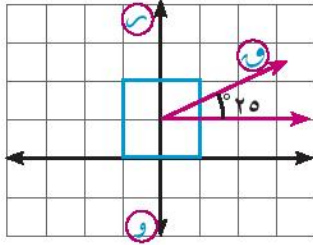
- أ - 14×10^4 ب - 7×10^4 ج - 7×10^4 د - 14×10^4

ثانياً: أكمل:

٦) رجل يتسوق في متجر (سوبر ماركت) يدفع عربة تسوق بقوة مقدارها ٣٥ نيوتن تميل هذه القوة على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° لتتحرك العربة مسافة ٥٠ متر فإن الشغل المبذول بواسطة الرجل = جول

٧) الشغل المبذول في تحريك كتلة مقدارها ٦٠٠ جرام مسافة ٤ أمتار بعجلة مقدارها ٢٠ سم / ث^٢ يساوي إرج

٨ الشكل المقابل يوضح قوة مقدارها ١٦ نيوتن تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° تؤثر على جسم كتلته ٢,٥ كجم ليتحرك على نضد أفقى أملس مسافة ٢٢٠ سم فإن:



- أ الشغل المبذول بواسطة القوة = جول
 ب الشغل المبذول بواسطة رد فعل النضد =
 ج الشغل المبذول بواسطة وزن الجسم =
 د الشغل الكلى بواسطة القوى المؤثرة على الجسم = جول

ثالثا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩ تحرك جسيم فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\vec{F} = 6\vec{s} - 3\vec{v}$ من النقطة أ (-١، ٢) إلى النقطة ب (٣، ٤) حيث $\vec{s}$ ، $\vec{v}$ متجهى الوحدة الأساسيان إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة.

١٠ أثرت القوى $\vec{F}_1 = 4\vec{s} + 3\vec{v}$ ، $\vec{F}_2 = 2\vec{s} - 4\vec{v}$ ، $\vec{F}_3 = 3\vec{s} - \vec{v}$ على جسم فانتقل من النقطة أ (٢، ٣) إلى النقطة ب (٤، ٤) أحسب الشغل المبذول من محصلة هذه القوى خلال الإزاحة $\vec{AB}$

١١ يتحرك جسم كتلته ١ كجم ومتجه إزاحته $\vec{F} = (2\vec{s} + 3\vec{v}) + (3\vec{s} + 2\vec{v})$ ما هى القوة المحركة احسب الشغل المبذول من القوة المحركة خلال ٥ ثوان من بدء الحركة علما بأن ف مقيسة بالمتر، $\vec{v}$ بالنيوتن، ن بالثانية.

١٢ متجه موضع جسيم كتلته ٣ كجم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (2\vec{s} + 3\vec{v}) + (3\vec{s} + 2\vec{v})$ حيث $\vec{s}$ ، $\vec{v}$ متجهى وحدة متعامدان فى المستوى أثبت أن الجسيم يتحرك تحت تأثير قوة ثابتة ثم إحسب الشغل المبذول من هذه القوة من ن = ١ إلى ن = ٥

١٣ عربة ترام ساكنة شدت بحبل يصنع مع شريط الترام زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت قوة الشد ٥٠٠ ن. كجم وتحركت العربة بعجلة ٥ سم/ث^٢ لمدة ٣٠ ثانية احسب الشغل الذى بذلته قوة الشد.

١٤ عامل بناء كتلته ٧٠ كجم يحمل على كتفه كمية من الطوب صاعداً أعلى سلم إرتفاع قمته عن سطح الأرض ١٢ متر فإذا بذل شغلا قدره ١١٧٦٠ جول حتى بلوغه قمة السلم أوجد كتلة الطوب.

١٥ أثرت قوة على جسم ساكن كتلته ٥٠ كجم فأكسبته عجلة منتظمة ٧,٠ م/ث^٢ فحركته مسافة ف فى اتجاهها فإذا كان الشغل المبذول بواسطة هذه القوة يساوى ٣٥٠ ن. كجم. متر أوجد المسافة التى تحركها الجسم.

١٦ قذف حجر كتلته ٤ كجم رأسيا لأعلى من على سطح الأرض فإذا كان الشغل المبذول ليصل إلى أقصى إرتفاع ١١٧٦ جول أوجد أقصى إرتفاع وصل إليه الحجر.

١٧ أحسب بالجول مقدار الشغل اللازم بذله لرفع ٥ متر مكعب من الماء لأرتفاع ١٠ أمتار.

١٨ سيدة تدفع أمامها عربة بها طفل من حالة سكون علي طريق أفقى بقوة قدرها ٢ ث كجم وتميل على الأفقى لأسفل بزاوية قياسها ٦٠° ضد مقاومات قدرها ٠,٩٥ ث كجم، فإذا كانت كتلة العربة والطفل ١٨ كجم فأوجد بثقل كجم. متر مقدار الشغل المبذول خلال دقيقة واحدة من :

أ وزن العربة والطفل

ب قوة السيدة

ج مقاومة الطريق.

١٩ قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ بسرعة ثابتة فإذا كان الشغل المبذول من آلات القطار يساوى ١٥ × ١٠^٥ ث. كجم متر حتى وصل إلى أعلى المنحدر والشغل المبذول ضد المقاومات ٥ × ١٠^٥ ث. كجم متر أوجد:

أولاً: طول المنحدر

ثانياً: المقاومة لكل طن من كتلة القطار

٢٠ سيارة كتلتها ٤ طن تصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ ضد مقاومات تعادل ٥ ث. كجم لكل طن من كتلة القطار فاكسبت سرعة ٥٤ كم/س خلال $\frac{1}{4}$ دقيقة فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون احسب بالجول الشغل المبذول من:

أولاً: قوة محرك السيارة

ثانياً: قوة المقاومة

ثالثاً: من وزن السيارة

رابعاً: ضد وزن السيارة

٢١ جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\mathbf{F}$ (نيوتن) حيث $\mathbf{F} = ٠,٤ \mathbf{F}$ ، ف مقاسة بالـ متر . أحسب الشغل المبذول من القوة $\mathbf{F}$ عندما يتحرك الجسيم من :

أ $\mathbf{F} = ٠$ حتى $\mathbf{F} = ١٠$

ب $\mathbf{F} = ١$ حتى $\mathbf{F} = ٥$

٢٢ جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\mathbf{F}$ (نيوتن) حيث $\mathbf{F} = ٢ \mathbf{F}$ حيث ف مقاسة بالـ متر ، أحسب الشغل المبذول من القوة $\mathbf{F}$ عندما يتحرك الجسيم من :

أ $\mathbf{F} = ٠$ حتى $\mathbf{F} = \frac{\pi}{4}$

ب $\mathbf{F} = \frac{\pi}{4}$ حتى $\mathbf{F} = \frac{\pi}{2}$

ج $\mathbf{F} = \frac{\pi}{4}$ حتى $\mathbf{F} = \frac{3\pi}{4}$

الطاقة

Energy

Kinetic energy

أولاً: طاقة الحركة

طاقة حركة جسم هي الطاقة التي يكتسبها الجسم بفضل سرعته وتقدر عند لحظة ما بنصف حاصل ضرب كتلة هذا الجسم في مربع سرعته عند هذه اللحظة ويرمز لها بالرمز ط.

فإذا كانت ك كتلة الجسم، ع متجه سرعته، ع القياس الجبري لهذا المتجه فإن:

(١)

$$ط = \frac{1}{2} ك ع^2 = \frac{1}{2} ك ع^2$$

وبما أن ع = ع ⊙ ع ، فإنه يمكن التعبير عن طاقة الحركة كالآتي:

(٢)

$$ط = \frac{1}{2} ك (ع \cdot ع)$$

يتضح من التعريف أن طاقة حركة الجسم هي كمية قياسية غير سالبة، وتندم فقط عندما يندم متجه السرعة. كما يبين التعريف أن طاقة حركة الجسم قد تتغير من لحظة زمنية لأخرى أثناء حركته تبعاً لمقدار سرعته. وحدات قياس طاقة الحركة:

حيث أن الشغل هو صورة من صور الطاقة فإن :

وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس الشغل

فمثلاً ، إذا قيست الكتلة بالكيلوجرام والسرعة بالمتر / ثانية فإن:

$$\text{وحدة قياس طاقة الحركة} = \text{كجم} \times \frac{\text{متر}}{\text{ث}} \times \frac{\text{متر}}{\text{ث}} = \frac{\text{كجم} \cdot \text{متر}^2}{\text{ث}^2} = \text{متر} \cdot \text{نيوتن}.$$

وإذا قيست الكتلة بالجرام والسرعة بالسنتيمتر / ثانية فإن:

$$\text{وحدة قياس طاقة الحركة} = \text{جم} \times \frac{\text{سم}}{\text{ث}} \times \frac{\text{سم}}{\text{ث}} = \frac{\text{جم} \cdot \text{سم}^2}{\text{ث}^2} = \text{سم} \cdot \text{داين} \times$$

مثال

١ يتحرك جسم كتلته ١٠٠ جم بسرعة ع = ٥ سم + ١٢ ص حيث ص ، ص متجهها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث، احسب طاقة حركة هذا الجسم **أولاً:** بالأرج **ثانياً:** بالجول

الوحدة الثالثة

٢ - ٣

سوف نتعلم

طاقة الحركة

وحدات قياس طاقة الحركة

مبدأ الشغل والطاقة

المصطلحات الأساسية

Kinetic Energy طاقة الحركة

Potential Energy طاقة الوضع

طاقة الشغل والطاقة

Principle of Work and Energy

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

الحل

نوجد معيار السرعة $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ سم/ث}$$

$$\therefore \|\vec{v}\| = 13$$

أولاً: طاقة حركة الجسم $= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 13^2 = 8450 \text{ جرج}$ ثانياً: طاقة الحركة $= \frac{8450}{7.1} = 10 \times 8.45 \text{ جول}$

٢١ حاول أن تحل

١) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة $\vec{v} = 60 \text{ سم} - 80 \text{ سم}$ حيث $\vec{v}$ متجهها وحدة متعامدين ومقدار

السرعة مقيس بوحدة سم/ث احسب طاقة حركة هذا الجسم

أولاً: بالأرج ثانياً: بالجول.

مثال

٢) قذف جسم كتلته ١ كجم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٤٩ م/ث، أوجد

أ) طاقة حركة الجسم بعد ٦ ثانية من قذفه

ب) طاقة حركة الجسم عندما يصبح على ارتفاع ١٠٢,٩ متر من نقطة القذف

الحل

$$\text{أ) } \therefore \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad \therefore \vec{v} = 49 - 6 \times 9.8 = -9.8 \text{ م/ث}$$

 $\therefore$ الجسم يكون هابطاً بسرعة مقدارها ٩,٨ م/ث $\therefore \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (9.8)^2 = 48.02 \text{ جول}$

$$\text{ب) } \therefore \vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + 2 \vec{v}_1 \vec{v} \quad \therefore (49)^2 = 2 \times 9.8 \times 102.9$$

$$\therefore \vec{v} = 38.416 \text{ م/ث} \quad \therefore \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (38.416)^2 = 192.08 \text{ جول}$$

٢٢ حاول أن تحل

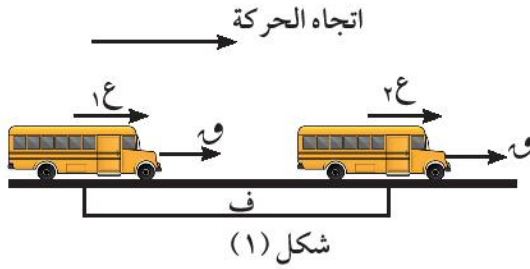
٢) سقط جسم كتلته ٥٠٠ جم رأسياً إلى أسفل من ارتفاع ٧٨,٤ متر عن سطح الأرض، أوجد:

أ) طاقة حركة الجسم بعد ٢ ثانية من سقوطه

ب) طاقة حركة الجسم لحظة ملاسته لسطح الأرض.

Principle of Work and Energy

مبدأ الشغل والطاقة:



إذا كانت v ثابتة :
 باعتبار أن جسمًا كتلته (ك) يتحرك مسافة (ف) تحت تأثير
 محصلة القوى (و) بحيث تتغير سرعته من (v_1) إلى (v_2)
 فيكون: الشغل المبذول بواسطة محصلة هذه:
 $ش = و \times ف$

$$\therefore ع^2 = ع_1^2 + 2 ج ف \text{ وباعتبار أن } ع_1, ع_2 \text{ هما السرعتان الابتدائية والنهائية على الترتيب}$$

$$\therefore ع_2^2 - ع_1^2 = 2 ج ف \text{ بضرب طرفي العلاقة في } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} ك (ع_2^2 - ع_1^2) = ك ج ف$$

$$\therefore \frac{1}{2} ك (ع_2^2 - ع_1^2) = ق \cdot ف \text{ حيث } و \text{ قوة ثابتة المقدار}$$

$\therefore$ التغير في طاقة الحركة يساوي الشغل المبذول

إذا كانت $و$ قوة متغيرة ،

$$\therefore ط = \frac{1}{2} ك ع^2$$

$$\therefore \frac{ط}{و} = ك \frac{ع^2}{و} \quad \therefore \frac{ط}{و} = ك \frac{ع^2}{و}$$

$$\frac{ط}{و} = ك \frac{ع^2}{و}$$

$$\therefore ط = \frac{1}{2} ك ع^2 \quad \text{أي أن } ط - ط = ش$$

$\therefore$ التغير في طاقة الحركة = الشغل المبذول

تعبّر العلاقة الأخيرة عن مبدأ الشغل والطاقة والذي ينص على الآتي:

«التغير في طاقة حركة الجسم عند انتقاله من موضع ابتدائي إلى موضع نهائي يساوي الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة عليه خلال الإزاحة بين هذين الموضعين».

ويلاحظ أنه عند استخدام العلاقات السابقة يجب أن تكون وحدات قياس طاقة الحركة هي نفسها وحدات قياس الشغل.

تفكير ناقد:

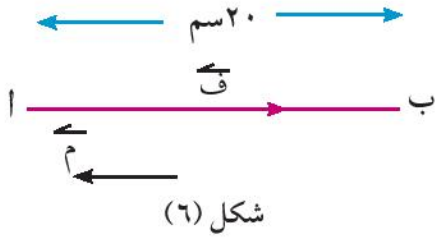
أثبت أنه إذا بدأ جسم حركته من موضع ما ثم عاد إلى نفس الموضع، فإن طاقة حركته النهائية تساوي طاقة حركته الابتدائية ، ثم استنتج من ذلك أنه في حركة المقذوف الرأسى تحت تأثير الجاذبية الأرضية الثابتة تكون سرعة المقذوف أثناء مرحلة الصعود عند نقطة ما تساوي سرعته أثناء مرحلة الهبوط عند النقطة نفسها.

مثال

٢ اطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠ جم بسرعة ٤٠٠ متر/ث على حاجز سميكة فاستقرت فيه على عمق ٢٠ سم، أوجد

مقدار قوة مقاومة مادة الحاجز لحركة الرصاصة باعتبار هذه القوة ثابتة.

الحل



ليكن أ موضع دخول الرصاصة إلى داخل الحاجز ، ب الموضع الذي أستقرت فيه، م قوة المقاومة مقدرة بوحدة الداين لدينا أ ب = ٢٠ سم، بما أن قوة المقاومة تعمل في عكس اتجاه الازاحة.

فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة يكون سالبًا ويحسب كالآتي:

$$\text{ش} = -\text{أ ب} \times \text{م} = -20 \times \text{م}$$

طاقة حركة الرصاصة عند الدخول إلى الحاجز :

$$\text{ط} = \frac{1}{2} \times 200 \times (100 \times 400)^2 = 1,6 \times 10^4 \text{ إرج}$$

(لاحظ تحويل السرعة إلى وحدة سم/ث).

طاقة حركة الرصاصة عند الموضع ب : ط_ب = صفر لأن الرصاصة ساكنة في هذا الموضع.

التغير في طاقة حركة الرصاصة : ط_ب - ط_أ = -1,6 × 10⁴ إرج

$$\therefore \text{ط}_\text{ب} - \text{ط}_\text{أ} = \text{ش}$$

$$\therefore -20 \times \text{م} = -1,6 \times 10^4$$

$$\therefore \text{م} = \frac{1,6 \times 10^4}{20} = 8 \times 10^2 \text{ داين}$$

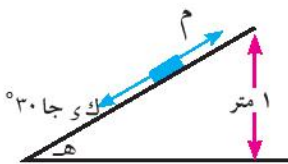
٩ حاول أن تحل

٢ أطلقت رصاصة على هدف سمكه ٩ سم وخرجت من جانبه الآخر بنصف سرعتها التي دخلت بها. فما هو أقل سمك لازم لهدف من نفس المادة حتى لا تخرج منه نفس الرصاصة لو أطلقت عليه بسرعتها السابقة نفسها.

مثال

٤ وضع جسم كتلته ٣٠٠ جم عند قمة مستوى مائل ارتفاعه ١ متر. أحسب السرعة التي يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى للحركة يساوي ١,٥٩ جول.

الحل



شكل (٨)

ليكن ف طول المستوى مقيسًا بالمتر ، هـ قياس زاوية ميله على الأفقي، تؤثر على الجسم قوتان توازيان اتجاه الحركة: مركبة الوزن، وتعمل في خط أكبر ميل لأسفل ومقدارها ك و جا هـ وقوة مقاومة المستوى لحركة الجسم عليه وتعمل في خط أكبر ميل لأعلى وليكن مقدارها م.

الشغل المبذول أثناء حركة الجسم من قمة المستوى حتى قاعدته:

$$\text{ش} = (\text{ك و جا هـ} - \text{م}) \times \text{ف}$$

$$= (300 \times 9,8 \times \sin 30^\circ - \text{م}) \times \text{ف} = 1470 \text{ ج} - \text{م} \times \text{ف}$$

ولكن م ف = ١,٥٩ جول هو الشغل المبذول ضد المقاومة.

$$\therefore \text{ش} = ١,٣٥ = ١,٥٩ - ٩,٨ \times ٠,٣$$

$$\therefore \text{ط} - \text{ط} = \text{ش}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \times ٠,٣ \text{ ع} - \text{صفر} = ١,٣٥$$

$$\therefore \text{ع} = ٩ \quad \therefore \text{ع} = ٣ \text{ متر / ث}$$

٩ حاول أن تحل

٤ وضع جسم كتلته ٢٠٠ جرام عند قمة مستوى مائل إرتفاعه ٣ أمتار. إحسب السرعة التي يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى للحركة ٤,٤٨ جول.

مثال

٥ جسم كتلته ١ كجم يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ١٢ م/ث، أثرت عليه قوة مقاومة في اتجاه مضاد لاتجاه حركته مقدارها ٦ س^٢ (نيوتن) حيث س المسافة التي يقطعها الجسم تحت تأثير المقاومة (بالمتر).

أ أوجد الشغل الذي تبذله المقاومة عندما س = ٤ ب أوجد سرعة الجسم وطاقة حركته عندما س = ٢

الحل

$$\text{أ} \quad \text{ش} = \text{ط} - \text{ط}$$

$$\therefore \text{ش} = \text{ط} - \text{ط} = \frac{1}{2} \times ١ \times ١٢^2 - \frac{1}{2} \times ١ \times ٠^2 = ٧٢ \text{ جول}$$

$$\therefore \text{ش} = ٧٢ \text{ جول}$$

$$\text{ب} \quad \therefore \text{التغير في طاقة الحركة} = \text{الشغل المبذول}$$

$$\frac{1}{2} \times ١ \times ١٢^2 - \frac{1}{2} \times ١ \times ٠^2 = \text{ش}$$

$$\frac{1}{2} \times ١ \times (١٤٤ - ٠) = \text{ش}$$

$$\frac{1}{2} \times ١ \times (١٤٤ - ٠) = \text{ش}$$

$$\frac{1}{2} \times ١ \times (١٤٤ - ٠) = ١٦$$

$$\text{ع} = ١١٢$$

$$\text{ع} = ٧٢ \text{ م/ث}$$

$$\text{ط} = \frac{1}{2} \times ١ \times ١١٢^2 = ٦٢٥٦ \text{ جول}$$

potential energy

ثانيًا: طاقة الوضع

عندما يتحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة توازي هذا الخط فإن طاقة وضع الجسيم U عند لحظة ما هي الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة لجسيم لو أنها حركته من موضعه إلى موضع آخر ثابت على الخط المستقيم $\overrightarrow{AB}$ كما في الشكل المجاور.

إذا كانت القوة $\overrightarrow{F}$ توازي $\overrightarrow{AB}$ وكانت (و) هي الموضع الثابت، أ، ب وضعين مختلفين للجسم على هذا الخط فإن:

طاقة الوضع عند ص_م = $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AO}$ ، طاقة الوضع عند ص_ب = $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{BO}$ ، وباستخدام الرمز U للتعبير عن طاقة الوضع نجد أن:

$$\checkmark \text{ طاقة الوضع عند (و) } = 0 \quad \text{لأن} \quad \text{طاقة الوضع عند و} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OO} = 0 = \text{صفر}$$

$\checkmark$ باعتبار أن أ، ب هما الموضعان الابتدائي والنهائي للجسم المتحرك، ص_ب، ص_ا هما طاقتي الوضع عند أ، ب علي الترتيب فإن:

$$\text{ص}_ب - \text{ص}_ا = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{BO}) - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AO})$$

$$= \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{BA})$$

$$= -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (١)$$

من (١) (٢)

ولكن: $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} = W$ (٢)

$$\text{ص}_ب - \text{ص}_ا = -W$$

أي أن: التغير في طاقة وضع الجسم عند إنتقاله من موضع ابتدائي إلى موضع نهائي يساوي سالب الشغل المبذول بواسطة القوة خلال الحركة.

Conservation of Energy

بقاء الطاقة

إذا أنتقل جسم من موضع أ إلى موضع آخر ب دون أن يلاقى أى مقاومة فإن مجموع طاقتي الحركة والوضع عند أ يساوي مجموع طاقتي الحركة والوضع عند ب .

$$\text{من مبدأ الشغل والطاقة نجد أن} \quad \text{ط}_ب - \text{ط}_ا = W$$

ومن العلاقة السابقة التي تربط الشغل بطاقة الوضع نجد أن:

$$\text{ص}_ب - \text{ص}_ا = -W$$

$$\therefore \text{ط}_ب - \text{ط}_ا = -(\text{ص}_ب - \text{ص}_ا)$$

$$\therefore \text{ط}_ب + \text{ص}_ب = \text{ط}_ا + \text{ص}_ا$$

مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتاً أثناء الحركة

وحدات قياس طاقة الوضع: من تعريف طاقة الوضع نجد أن وحدات قياسها هى نفسها وحدات قياس الشغل وطاقة الحركة

مثال

١ أثرت القوة $\vec{F} = 6 \text{ سـ} + 2 \text{ صـ}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى بالعلاقة: $\vec{r} = (2 + 2^2) \text{ سـ} + (1 + 2^2) \text{ صـ}$ احسب التغير فى طاقة الوضع للجسم حيث معيار $\vec{F}$ مقيس بالنيوتن، معيار $\vec{r}$ بالمتر، ن بالثانية.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \vec{F} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2 + 2^2) \text{ سـ} + (1 + 2^2) \text{ صـ} - (1 + 2^2) \text{ سـ} - (2 + 2^2) \text{ صـ} \\ &= 2 \text{ سـ} + 2 \text{ صـ} = \vec{F} \\ \therefore \text{التغير في طاقة الوضع} &= \vec{F} \cdot \vec{AB} = (2 + 2^2) \cdot (2 + 2^2) \\ &= (2 + 4) \cdot (2 + 4) = 6 \cdot 6 = 36 \\ &= (18 + 2 \cdot 4) = 36 \\ &= 36 \cdot 1 = 36 \text{ جول} \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٥ أثرت القوة $\vec{F} = 4 \text{ سـ} + 5 \text{ صـ}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (3 + 2^2) \text{ سـ} + (1 + 4^2) \text{ صـ}$. احسب التغير فى طاقة الوضع للجسم حيث معيار $\vec{F}$ مقيس بالنيوتن، معيار $\vec{r}$ بالمتر، ن بالثانية.

مثال

٢ جسم كتلته ٣٠٠ جم موضوع على ارتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض، أوجد طاقة وضع الجسم، وإذا سقط الجسم رأسياً فأوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عند أى لحظة أثناء سقوطه. ثم أوجد طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع ٣ متر عن سطح الأرض.

الحل

طاقة وضع الجسم عند أ:

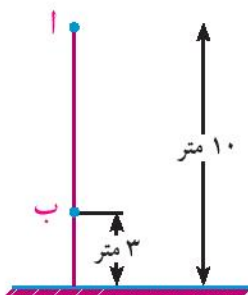
$$\text{طاقة وضع الجسم عند أ} = m \cdot g \cdot h = 0.3 \cdot 9.8 \cdot 10 = 29.4 \text{ جول}$$

$$= 0.3 \cdot 9.8 \cdot 10 = 29.4 \text{ جول}$$

$\therefore$ الجسم ساكن عند أ $\therefore$ طاقة حركته = صفر

$$\therefore \text{ط} + \text{ص} = 29.4 \text{ جول}$$

$\therefore$ مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتاً أثناء الحركة



∴ مجموع طاقتي الحركة والوضع للجسم عن أى لحظة أثناء سقوطه = ٢٩,٤ جول

طاقة الحركة وطاقة الوضع عند ب:

∴ طاقة وضع الجسم = كى × ل

$$= ٣ \times ٩,٨ \times ٠,٣ = ٨,٨٢ \text{ جول}$$

$$\therefore \text{ط ب} + \text{ص ب} = \text{ط ا} + \text{ص ا}$$

$$\therefore \text{ط ب} + ٨,٨٢ = ٢٩,٤ =$$

$$\therefore \text{ط ب} = ٢٩,٤ - ٨,٨٢ = ٢٠,٥٨ \text{ جول}$$

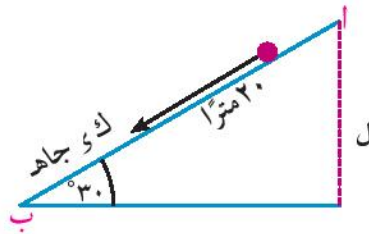
٩ حاول أن تحل

٦ سقط جسم كتلته ١٠٠ جم من ارتفاع ٤ متر عن سطح الأرض. أوجد مجموع طاقتي الحركة والوضع للجسم عند أى لحظة أثناء سقوطه، ثم أوجد طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع متر واحد من سطح الأرض.

مثال

٣ جسم كتلته ٣ كجم موضوع عند أ أعلى نقطة من مستوى مائل أملس طوله ٢٠ متر ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. احسب طاقة وضع الجسم، وإذا هبط الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى. احسب سرعة الجسم لحظة وصوله إلى أسفل نقطة فى المستوى.

الحل



طاقة الحركة الجسم عند ب:

$$\text{ص ب} = \text{ك ب} \times \text{ل}$$

$$= ٣ \times ٩,٨ \times (٢٠ \text{ جا } ٣٠^\circ)$$

$$= ٢٩٤ \text{ جول}$$

$$\text{ط ب} + \text{ص ب} = ٢٩٤ + ٠ = ٢٩٤ \text{ جول} \quad (\text{لأن الجسم ساكن عند أ})$$

طاقة الحركة وطاقة الوضع عند ب:

$$\text{ط ب} + \text{ص ب} = ٢٩٤ \text{ جول}$$

$$\frac{1}{2} \text{ك ب} \times \text{ع} + ٠ = ٢٩٤$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{٢ \times ٢٩٤}{٣} = ١٩٦$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times ٣ \times \text{ع} = ٢٩٩٤$$

$$\therefore \text{ع} = ١٤ \text{ متر/ث}$$

٩ حاول أن تحل

٧ أ، ب نقطتان علي خط أكبر ميل فى مستوى مائل خشن بحيث ب أسفل أ، بدأ جسم كتلته ٥٠٠ جم الحركة من السكون من نقطة أ، فإذا كانت المسافة الرأسية تساوى مترًا واحدًا وسرعة الجسم عندما يصل إلى ب تساوى ٤م/ث. أوجد بالجول:

أولاً: طاقة الوضع المفقودة

ثانيًا: الشغل المبذول من المقاومات

مثال

٤ بندوق بسيط يتكون من قضيب خفيف طوله ٨٠ سم ويحمل في طرفه جسمًا كتلته ٤ جم يتدلى رأسياً ويتذبذب في زاوية قياسها ١٢٠°. أوجد:

أولاً: زيادة طاقة الوضع في نهاية المسار عنها في منتصف المسار

ثانياً: سرعة الجسم عند منتصف المسار.

الحل

من هندسة الشكل:

الكتلة تتحرك في قوس دائري مركزه النقطة م ونصف قطره = ٨٠ سم.

$$\therefore \angle \text{ام ج} = ١٢٠^\circ$$

$$\therefore \angle \text{ام د} = ٦٠^\circ$$

$\therefore$ المثلث أوم ثلاثيني ستيني

$$\therefore \text{م و} = \text{م ب} = ٤٠ \text{ سم}$$

زيادة طاقة الوضع عند أ عنها عن ب:

$$\text{صه أ} - \text{صه ب} = \text{كؤ ل} - \text{كؤ ل} = \text{كؤ (ل - ل)} = \text{كؤ} \times \text{ب و}$$

$$= ٤ \times ٩٨٠ \times ٤٠ = ١٥٦٨٠٠ \text{ إرج}$$

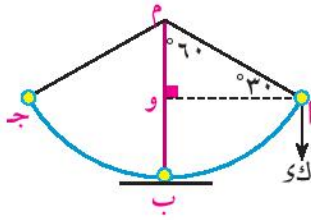
لإيجاد سرعة الجسم عند منتصف المسار:

$$\text{من مبدأ ثبات الطاقة ط ب} + \text{صه ب} = \text{ط ا} + \text{صه ا}$$

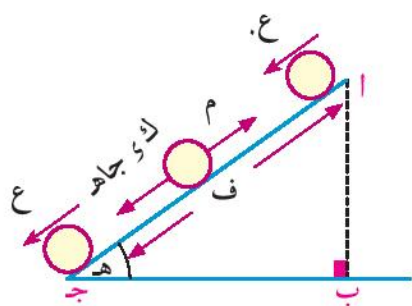
$$\therefore \frac{1}{2} \times ٤ \times \text{ع}^2 + ٠ = ٠ + ١٥٦٨٠٠$$

$$\therefore \text{ع}^2 = ٧٨٤٠٠$$

$$\therefore \text{ع} = ٢٨٠ \text{ سم/ث}$$



Motion on Rough Inclined Plane



الحركة على مستوى مائل خشن

إذا هبط جسم على مستوى مائل خشن تحت تأثير وزنه فقط من الموضع أ إلى الموضع ج فإن التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل المبذول ضد المقاومات.

الإثبات:

نفرض أن المسافة التي تحركها الجسم على المستوى (ف) فتكون المسافة الرأسية أ ب التي هبطها الجسم أ ب = ف ج هـ التغير في طاقة الحركة من أ إلى ب = الشغل المبذول بواسطة (ك و ج هـ - م)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m u^2 &= (K \text{ و ج هـ} - M) \times F \\ \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m u^2 &= K \times \text{أ ب} - M \times F \end{aligned}$$

التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل المبذول ضد المقاومات.

لاحظ أن: يمكن تعميم القاعدة السابقة سواء كانت الحركة رأسية أو على مستوى مائل كالآتي: إذا سقط أو قذف جسم رأسياً في وسط به مقاومة أو هبط على مستوى مائل خشن فإن: التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل ضد المقاومات.



الحركة على مستوى خشن

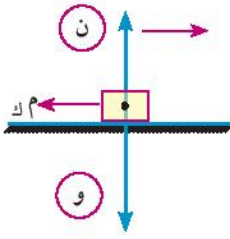


٥ في الشكل المقابل مكعب من الخشب عند كتلته ٢ كيلو جرام، ينزلق على سطح (كما هو مبين بالشكل) حيث أ ب ، ج د سطحان

أملسان. السطح الأفقي ب ج خشن، طوله ٣٠ متر، معامل الاحتكاك الحركي بين المكعب والسطح الأفقي $\frac{1}{6}$ فإذا بدأ مكعب الخشب الحركة من سكون وهو على ارتفاع ٤ متر، على أي مسافة على ب ج يسكن مكعب الخشب؟

الحل

المكعب ينزلق على القوس أ ب وتبعاً لمبدأ ثبات الطاقة $ط_أ + ص_أ = ط_ب + ص_ب$
صفر + $2 \times 9.8 \times 4 = ط_ب + ص_ب$
∴ $ط_ب = 78.4$ جول.



وحيث إن المكعب يتحرك على المستوى بـ جـ خشن.

التغير في طاقة وضع الجسم = التغير في طاقة الحركة + الشغل ضد المقاومات

$$صفر = (٧٨,٤ - ٠) + م \times ر \times ف$$

$$٧٨,٤ = ف \times ٢ \times ٩,٨ \times \frac{١}{٥} \quad \therefore ف = ٢٠ \text{ متر}$$

٤ حاول أن تحل

- ٨ تهبط عربة من السكون أسفل منحدر، طوله ١٨٠ متر، ارتفاعه ١٠ متر، فإذا علم أن $\frac{٣}{٤}$ طاقة الوضع فقدت نظير التغلب على المقاومات ضد الحركة، وأن هذه المقاومات ظلت ثابتة طوال حركة العربة، فأوجد سرعة العربة بعد قطعها مسافة ١٨٠ متر السابقة.

تمارين ٢ - ٣

أولاً: أكمل :

- ١ طاقة حركة قذيفة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم وتتحرك بسرعة ٣٠٠ متر/ث يساوي جول.
- ٢ طاقة حركة جسم كتلته ٤٠ جرام يتحرك بسرعة ٢٠ متر/ث يساوي جول
- ٣ سيارة كتلتها ١,٥ طن وطاقة حركتها ١٦٨٧٥٠ جول فإن سرعة السيارة م/ث
- ٤ جسم كتلته ٢٠٠ جرام يتحرك بسرعة $\vec{ع} = ٣٠ \vec{س} + ٤٠ \vec{ص}$ حيث $\vec{س}$ ، $\vec{ص}$ ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث فإن طاقة حركة هذا الجسم = إرج
- ٥ جسم يتحرك بسرعة $\vec{ع} = ٥٠ \vec{س} + ١٠٠ \vec{ص}$ حيث $\vec{ع}$ مقيس بوحدة سم/ث ، $\vec{س}$ ، $\vec{ص}$ في إتجاهي $\vec{و}$ ، $\vec{ن}$ وكانت طاقة حركة هذا الجسم تساوي ٣,٩ جول فإن كتلة الجسم = جرام.
- ٦ إذا ترك جسم كتلته ٣٠ جرام ليسقط من إرتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض فإن طاقة حركة هذا الجسم = جول عندما يكون وشك الارتطام بالأرض.

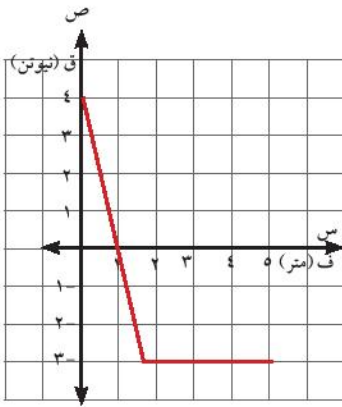
ثانياً :

- ٧ قوة مقدارها ١٢ نيوتن ثابتة الاتجاه تقوم ببذل شغل على جسم تحرك فإذا كانت إزاحته تعطى بالعلاقة $\vec{ف} = ٣ \vec{س} - ٤ \vec{ص}$ حيث $\vec{ف}$ بالمتري إحسب قياس الزاوية بين $\vec{ف}$ ، $\vec{ص}$ إذا كان التغير في طاقة الحركة للجسم.

أولاً: يساوي ٣٠ جول

ثانياً: يساوي -٣٠ جول

٨ الشكل المقابل يوضح تأثير مركبة قوة في الاتجاه الموجب لمحور السينات على جسم كتلته ٢ كجم فإذا كانت سرعة الجسم عند $s = ٠$ يساوي ٤ م/ث



أولاً: أوجد التغير في طاقة حركة بين $s = ٠$ ، $s = ٥$ متر.

ثانياً: احسب مقدار طاقة حركة الجسم عند $s = ٣$

ثالثاً: عند أي قيمة لـ s يكون مقدار طاقة الحركة ٨ جول

٩ ترك جسم كتلته ٢٠٠ جرام ليتحرك من سكون من قمة مستوى أملس طوله ٢٥ متر ويميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ أوجد طاقة حركة هذا الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى.

١٠ قذف جسم كتلته ٥ كجم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ ، ولأعلى بسرعة ٤ متر/ث. احسب التغير الذي يطرأ على طاقة حركة هذا الجسم بعد إنقضاء ثانية واحدة على لحظة قذفه ثم عندما يعود إلى موضع القذف.

١١ مستوى مائل خشن طوله ٢٠ متر وإرتفاعه ٥ أمتار أوجد أصغر سرعة يقذف بها جسم من أسفل نقطة في المستوى المائل وفي اتجاه خط أكبر للمستوى لكي يصل بالكاد إلى أعلى نقطة في المستوى علماً بأن الجسم يلاقى مقاومات تساوى $\frac{1}{4}$ وزنه.

١٢ أطلقت قذيفة مدفع بسرعة $\vec{v} = ١٠٥ \text{ م}^2 + ٣٦٠ \text{ م}^2$ حيث $\vec{v}$ متجهها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة م/ث، فإذا كانت طاقة الحركة للقذيفة تساوى ١٢٥×١٠ جول فأوجد كتلة القذيفة بالكيلو جرام.

١٣ يتحرك جسم كتلته ٢ كجم تحت تأثير القوى $\vec{F}_1 = \vec{v}^2 + \vec{v}^2$ ، $\vec{F}_2 = \vec{v}^2 + \vec{v}^2$ ، $\vec{F}_3 = \vec{v}^2 + \vec{v}^2$ = $\vec{v}^2 + \vec{v}^2$ مقدرة كل منها بالنيوتن حيث $\vec{v}$ متجهها وحدة متعامدين فإذا كان متجه الأزاحة كدالة في الزمن يعطى بالعلاقة $\vec{F} = \vec{v}^2 - \vec{v}^2$ (ب - ن) $\vec{v}$ ومعيار الأراحة بالمتر أوجد:

أولاً: قيمة كل من الثابتين a ، b

ثانياً: الشغل المبذول من هذه القوة بعد ٢ ثانية من بدء الحركة

ثالثاً: طاقة الحركة في نهاية زمن قدره ٢ ثانية

١٤ أطلقت رصاصة أفقياً بسرعة ٥٤٠ كم/س على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٢٠ سم، فإذا أطلقت نفس الرصاصة بنفس السرعة على هدف ثابت من نفس نوع الخشب سمكه ١٥ سم، فما هي السرعة التي تخرج بها الرصاصة من الهدف بفرض ثبوت المقاومة.

١٥ سقطت كرة كتلتها ١٠٠ جرام من إرتفاع ٣,٦ متر على أرض أفقية صلبة فاصطدمت بها وأرادت رأسياً إلى أعلى فإذا بلغ النقص في طاقة حركة الكرة نتيجة إصطدامها بالأرض ١,٩٦ جول. احسب المسافة التي إرتدتها الكرة عقب تصادمها بالأرض .

١٦ سقط جسم مطاطي من السكون من قمة برج فبلغت كمية حركته قبل التصادم مباشرة ١٠٩٢ جم . متر/ث ، طاقة حركته ١٠١٤ ث جم. متر احسب كتلة هذا الجسم وارتفاع البرج وإذا إرتد الجسم بعد إصطدامه بالأرض مسافة ٤,٩ متر فأوجد مقدار دفع الأرض للجسم.

١٧ سقط جسم كتلته ٠,٢ كجم من إرتفاع ٥ أمتار عن سطح الأرض .

أ طاقة وضع الجسم لحظة سقوطه =

ب طاقة حركة الجسم لحظة سقوطه =

ج مجموع طاقتي الحركة والوضع لحظة وصوله لسطح الأرض =

١٨ جسم كتلته ٣٥٠ كجم على إرتفاع ٢٠ متر من سطح الأرض، فإن طاقة وضع الجسم = جول.

١٩ طائرة عمودية وزنها ٣٥٠٠ ث كجم تهبط رأسياً لأسفل من إرتفاع ٢٥٠ متر إلى إرتفاع ١٥٠ متر من سطح الأرض فإن مقدار الفقد في طاقة وضعها = جول.

٢٠ جسم وزنه ٢ ث كجم صعد مسافة ٢٠٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°، فإن الزيادة في طاقة وضعه = جول

٢١ وضع جسم عن قمة مستو مائل أملس إرتفاعه ٩٠ سم فإن سرعته عندما يصل إلى قاعدة المستوى = متر/ث

٢٢ يتحرك جسم من الموضع أ (٢، ٣) إلى الموضع ب (٧، ٦) تحت تأثير القوة $\vec{F}$ = $3\vec{i} + 4\vec{j}$ ص فإن التغير في طاقة وضع الجسم = ارج؛ حيث ف بالسنتيمتر، $\vec{F}$ مقاسة بالداين.

٢٣ أثرت قوة $\vec{F}$ = $4\vec{i} + 5\vec{j}$ ص على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب في زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى كدالة في الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) + (4\vec{i} + 1\vec{j})\vec{v}$ ص فإن التغير في طاقة الوضع للجسم = جول؛ حيث $\vec{F}$ بالنيوتن، $\vec{r}$ بالمتراً، ن بالثانية

أجب عن الأسئلة الآتية:

٢٤ جسم كتلته ٣٠٠ جرام موضوع على إرتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض، أوجد طاقة وضع الجسم، وإذا سقط الجسم رأسياً، فأوجد طاقة حركته عندما يكون على إرتفاع ٣ متر من سطح الأرض.

٢٥ قذف جسم كتلته ١٤٠ جرام رأسياً لأعلى من قمة برج إرتفاعه ٢٥ متراً عن سطح الأرض، احسب التغير في طاقة حركة الجسم من لحظة قذفه حتى وصوله إلى سطح الأرض مقدراً بالجول.

٢٦) قذف جسم كتلته ٢ كجم من سطح الأرض رأسياً إلى أعلى بسرعة ٧٠ متر/ثانية أوجد مجموع طاقتي الحركة والوضع بعد ٥ ثوان ، وإذا كانت طاقة حركته بعد زمن ما هو ٤٤, ١٢٥ جول فأوجد هذا الزمن وأوجد طاقة وضعه عندئذ.

٢٧) جسم كتلته ١٠٠ جم سقط من ارتفاع ٥ أمتار على أرض رخوة فغاص فيها ٢٠ سم أوجد :
أولاً: مقدار ما فقد من طاقة الوضع بالجول قبل لحظة اصطدامه بالأرض مباشرة.
ثانياً: متوسط مقاومة الأرض بثقل الكيلو جرام.

٢٨) تحرك رجل كتلته ٧٢ كيلو جراماً صاعداً طريقاً يميل علي الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{4}$ فقطع ١٢٠ متراً . أحسب التغير في طاقة وضع الرجل

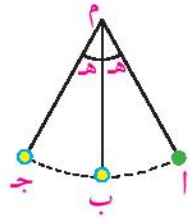
٢٩) احسب السرعة التي يصل بها جسم كتلته ٣٠٠ جم موضوع عند قمة مستوى مائل ارتفاعه ٢ متر إلى قاعدة المستوى إذا كان مقدار الشغل المبذول ضد المقاومة يساوى ١٣, ٢ جول.

٣٠) أ، ب نقطتان على خط أكبر ميل لمستوى مائل خشن بحيث ب أسفل أ، بدأ جسم كتلته ٥٠٠ جم الحركة من السكون من النقطة أ، فإذا كانت المسافة الرأسية تساوى متراً واحداً وسرعة الجسم عندما يصل إلى ب تساوى ٤ م/ث. أوجد بالجول :

أولاً: طاقة الوضع المفقودة.

ثانياً: الشغل المبذول من المقاومات .

٣١) **فى الشكل المجاور :** بندول بسيط طول خيطه ١٣٠ سم، يبدأ البندول الحركة من السكون من النقطة أ ويتحرك حراً ليتذبذب فى زاوية قياسها ٢ هـ حيث طاه = $\frac{9}{13}$. أوجد سرعة الكرة عند منتصف المسار.



٣٢) حلقة كتلتها $\frac{1}{4}$ كجم، تنزلق على عمود أسطوانى رأسي خشن، فإذا كانت سرعتها ٣, ٦ متر/ث بعد أن قطعت مسافة ٨, ٤ متر من بدء حركتها باستخدام مبدأ الشغل والطاقة، احسب الشغل المبذول من المقاومة أثناء الحركة.

القدرة

Power

الوحدة الثالثة

٣ - ٣

سوف نتعلم

القدرة.

فكر و ناقش



إذا بذلت آلة شغلاً قدره ٢٠٠ ثقل كجم.متر في ٤ دقائق وبذلت آلة أخرى شغلاً قدره ١٠٠ ثقل كجم.متر في دقيقة واحدة.

فأي من الآلتين أقدر (أكفأ) من الأخرى؟

قد يبدو لك أن الآلة الأولى هي الأقدر من الآلة الثانية لأنها بذلت شغلاً أكثر. ولكن ما بذلته الآلة الأولى في الدقيقة الواحدة = $\frac{200}{4} = 50$ ثقل كجم.متر وما بذلته الآلة الثانية في الدقيقة الواحدة = ١٠٠ ثقل كجم.متر من ذلك نستنتج أنه لقياس قدرة آلة لابد من معرفة ما تبذله هذه الآلة من شغل في وحدة الزمن

القدرة : هي المعدل الزمني لبذل شغل

تعريف

ويصاغ هذا التعريف أيضًا كالآتي:

«القدرة هي الشغل المبذول في وحدة الزمن»

$$\text{القدرة} = \frac{\text{ش}}{\text{ث}}$$

$$\therefore \text{ش} = \text{ق} \cdot \text{ث}$$

$$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{ث}} = \frac{\text{ق} \cdot \text{ث}}{\text{ث}}$$

$$= \frac{\text{ش}}{\text{ث}} \cdot \frac{\text{ث}}{\text{ث}} = \frac{\text{ق} \cdot \text{ث}}{\text{ث}}$$

$$= \frac{\text{ش}}{\text{ث}} \cdot \frac{\text{ث}}{\text{ث}} = \frac{\text{ق} \cdot \text{ث}}{\text{ث}}$$

$$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{ث}} = \text{ق}$$

$$= \text{ق} \cdot \text{ث} = \text{ش}$$

وإذا كانت ق لها نفس اتجاه القوة ق فإن القدرة = $\text{ق} \cdot \text{ث}$

من ذلك نجد أن القدرة كمية قياسية تتعين عند كل لحظة زمنية بمعلومية ق ، ث وتحدد قيمتها بالمعدل الزمني لبذل الشغل عند هذه اللحظة .

لاحظ أن القدرة تتعين لحظيًا (عند لحظة معينة) خلافاً للشغل الذي يحسب دائماً بين لحظتين زمنيتين.

المصطلحات الأساسية

القدرة	Power
الحصان	Horse Power

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

Average Power

القدرة المتوسطة:

إذا بذلت القوة شغلاً قدرة $\bar{P}$ خلال فترة زمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ فإن:

$$\text{القدرة المتوسطة} = \frac{\bar{P}}{\Delta t} = \frac{\bar{P}}{t_2 - t_1}$$

استخدام التكامل في إيجاد الشغل

$$\therefore \text{القدرة} = \frac{dW}{dt} \quad \therefore \bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad (\text{القدرة}) \text{ و } t$$

القدرة المتغيرة وأقصى قدرة

عند ثبوت مقدار القوة F فإن مقدار القدرة يتغير طردياً مع مقدار سرعة الجسم v ويكون v ثابت التغير حيث
القدرة $P = F \cdot v$ عند ثبوت F
وكلما تغير مقدار السرعة تغير مقدار القدرة ونحصل على أقصى قدرة عند ما تصبح السرعة أقصى ما يمكن ويطلق
على القدرة في هذه الحالة قدرة الآلة (بوجه عام)

وحدات قياس القدرة:

بما أن القدرة تساوي المعدل الزمني لبذل الشغل.

$$\therefore \text{وحدة قياس القدرة} = \frac{\text{وحدة قياس الشغل}}{\text{وحدة قياس الزمن}} = \text{وحدة قياس القوة} \times \text{وحدة قياس السرعة}$$

ومن وحدات قياس القدرة : **الوات (نيوتن . م / ث)**، **ث كجم . م / ث - أرج / ث**، **الحصان**

✓ **النيوتن - متر / ثانية (نيوتن . متر / ث)**: يعرف النيوتن - متر / ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلاً بمعدل زمني ثابت مقداره نيوتن - متر واحد في كل ثانية.

ويطلق أيضاً على وحدة النيوتن - متر / ثانية (جول / ثانية) إسم «الوات»

✓ **ثقل كيلوجرام . متر / ثانية (ث . كجم . متر / ث)**: يعرف ثقل كيلوجرام . متر / ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلاً بمعدل زمني ثابت مقداره كيلو جرام - متر واحد في كل ثانية.

✓ **الإرج / ثانية (إرج / ث)**: يعرف الإرج / ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلاً بمعدل زمني ثابت مقداره إرجاً واحداً في كل ثانية.

✓ **الحصان**: يعرف الحصان على أنه قدرة الآلة التي تبذل شغلاً قدره ٧٥ ث كجم . م كل ثانية.

فيمايلي قواعد التحويل بين مختلف وحدات القدرة.

$$1 \text{ ث كجم . متر / ث} = 9.8 \text{ نيوتن . متر / ث}$$

$$1 \text{ نيوتن . متر / ث} = 1 \text{ وات} = 10^7 \text{ إرج / ث}$$

كما أن هناك وحدات أخرى للقدرة مثل الكيلو ووات والحصان.
 ١ كيلو واط = ١٠٠٠ واط = ١٠٠٠ نيوتن. متر/ث = ١٠٠٠ إرج/ث

١ حصان = ٧٥٠ ث كجم. متر/ث

$$= ٧٥٠ \times ٩,٨ \text{ نيوتن. متر/ث}$$

$$= ٧٣٥ \text{ نيوتن. متر/ث (واط)}$$

$$= ٠,٧٣٥ \text{ كيلو واط}$$

مثال

١ شخص كتلته ٥٠ كجم يصعد سلم برج إرتفاع البرج ٤٤١ متر في زمن قدره ١٥ دقيقة إ حسب القدرة المتوسطة له بوحدة الواط.

الحل

$$\text{القوة (و)} = \text{ك} \times \text{و} = ٩,٨ \times ٥٠ = ٤٩٠ \text{ نيوتن}$$

$$\text{سرعة الرجل المتوسطة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٤٤١}{٦٠ \times ١٥} = ٠,٤٩ \text{ م/ث}$$

$$\text{القدرة المتوسطة} = \text{القوة} \times \text{السرعة} = \text{و} \times \text{ع} = ٤٩٠ \times ٠,٤٩ = ٢٤٠,١ \text{ واط}$$

٢ حاول أن تحل

١ محرك طائرة يعطى قوة مقدارها ٣٢,٢ × ١٠ نيوتن عندما تكون سرعة الطائرة ٩٠٠ كم/س إ حسب قدرة المحرك بالحصان

مثال

٢ سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ١٠٨ كم/س ضد مقاومات تعادل ١٥ ث. كجم لكل طن من الكتلة إ حسب قدرة آلتها بالحصان.

الحل

الجسم يتحرك بسرعة منتظمة «تبعاً للقانون الأول لنيوتن فتكون و = م = ٢ × ١٥ = ٣٠ ثقل كيلوجرام

$$\text{سرعة السيارة} = \frac{١٠٨}{١٨} = ٣٠ \text{ م/ث}$$

$$\therefore \text{القدرة} = \text{و} \times \text{ع} = ٣٠ \times ٣٠ = ٩٠٠ \text{ ث كجم. م/ث}$$

$$\therefore \text{القدرة} = \frac{٩٠٠}{٧٥} = ١٢ \text{ حصان}$$

٢ حاول أن تحل

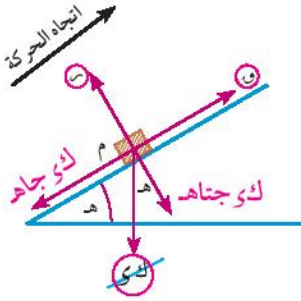
٢ شاحنة كتلتها ٦ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم/س عندما تكون قدرة محركها ٣٠ حصان ، احسب مقاومة الطريق بثقل الكيلوجرام لكل طن من الكتلة.

مثال

٣ سيارة كتلتها ٩ طن تصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{125}$ بأقصى سرعة مقدارها ٤٥ كم/س ضد مقاومات تعادل ٢٠ ثقل كيلوجرام لكل طن من الكتلة، إحصب قدرة محركها بالحصان

الحل

الحركة لأعلى المستوى



$$\begin{aligned} \text{معادلة الحركة} \quad & W = m + K \text{ و} \\ & 9,8 \times 9 \times 20 = 9,8 \times 9 \times 20 + 9,8 \times 20 \times \frac{1}{125} \text{ نيوتن} \\ & 202 \text{ ث. كجم} \end{aligned}$$

أقصى سرعة تصعد بها السيارة على المنحدر

$$\begin{aligned} \text{ع} \quad & \frac{20}{3} = \frac{0}{18} \times 45 = \\ \therefore \text{أقصى قدرة للسيارة} \quad & = 70 \times \frac{20}{3} = 467 \text{ حصان} \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٢ في المثال السابق إذا هبطت السيارة بعد ذلك على نفس المستوى بعد تحميلها ببضائع كتلتها ٣ طن، أحسب أقصى سرعة للهبوط بالكم/س علما بأن المقاومة عن كل طن من الكتلة لم تتغير.

لاحظ أن: إذا كان معدل بذل الشغل منتظمًا (ثابتًا) فإن :

$$\frac{\text{القوة} \times \text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{الشغل}}{\text{الزمن}} = \text{القدرة}$$

مثال

٤ عامل وظيفته تحميل صناديق على شاحنة كتلة الصندوق الواحد ٣٠ كجم فإذا كان إرتفاع الشاحنة ٩ متر احسب عدد الصناديق التي يستطيع العامل تحميلها في زمن قدره ١ دقيقة إذا كانت قدرته المتوسطة تساوي ٠,٦ حصان.

الحل

$$\frac{\text{الشغل الكلى}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{عدد الصناديق} \times \text{الشغل اللازم لتحميل صندوق واحد}}{\text{الزمن}}$$

$$\therefore \text{عدد الصناديق اللازم تحميلها في زمن قدرة ١ دقيقة} = \frac{\text{القدرة} \times \text{الزمن}}{\text{الشغل للصندوق الواحد}}$$

$$\text{عدد الصناديق} = \frac{735 \times 0,6}{0,9 \times 9,8 \times 30} = \frac{0}{3} \text{ صندوق لكل ثانية}$$

$$\text{عدد الصناديق} = 60 \times \frac{0}{3} = 100 \text{ صندوق لكل دقيقة}$$

٩ حاول أن تحل

٤ في المثال السابق احسب عدد الصناديق اذا كانت قدرة العامل ٣٥٢,٨ وات

مثال

٥ قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ بسرعة منتظمة مقدارها ٢٧ كم/س ضد مقاومات للحركة موازية لاتجاه خط أكبر ميل للمستوى بمعدل ١٨ ثقل كجم لكل طن من الكتلة. فما قدرة القاطرة بالحصان وإذا هبط القطار على المنحدر بنفس السرعة فكم تكون قدرة القاطرة في هذه الحالة بفرض ثبوت مقاومات الحركة في الحالتين

الحل

أولاً: عندما يكون القطار صاعدًا المنحدر:

نتخذ متجه وحدة $\vec{u}$ في اتجاه الحركة أى إلى أعلى المستوى
 $\therefore$ مقاومات الحركة = $18 \times 200 = 3600$ ثقل كجم
 مركبة وزن القطار في اتجاه المستوى = $\frac{1}{3} \times 1000 \times 200 = 1000$ ثقل كجم

$\therefore$ القطار يصعد بسرعة منتظمة

$\therefore$ قوة المحرك = المقاومات + مركبة الوزن = $1000 + 3600 = 4600$ ثقل كجم

$\therefore$ القدرة = $P = F \cdot v$ حيث v قوة المحرك ، ع السرعة

$\therefore$ القدرة = $4600 \times 27 \times \frac{1}{18} = 6900$ ثقل كجم . متر/ث

= $460 \times \frac{1}{75} \times 27 \times \frac{1}{18} = 460$ حصان

ثانيًا: عندما يكون القطار هابطًا المنحدر:

نتخذ متجه وحدة $\vec{u}$ في اتجاه الحركة أى إلى أسفل المستوى

$\therefore$ القطار يهبط بسرعة منتظمة

$\therefore$ قوة المحرك + مركبة الوزن = المقاومات

$\therefore$ قوة المحرك + $1000 = 3600$

$\therefore$ قوة المحرك = 2600 ثقل كجم

$\therefore$ القدرة = $P = F \cdot v$ حيث v قوة المحرك ، ع السرعة (لأنها لم تتغير)

$\therefore$ القدرة = $2600 \times 27 \times \frac{1}{18} = 3900$ ثقل كجم = $260 \times \frac{1}{75} = 260$ حصان

٩ حاول أن تحل

٥ قاطرة كتلتها ٢٨ طن تجر عربة كتلتها ٥٦ طن بعجلة ثابتة أسفل منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ ولما بلغت قدرة محركها ٨٤ حصان أصبحت سرعتها ٢١ م/ث احسب عجلة الحركة اذا علمًا بأن المقاومة ١٠ ث كجم لكل طن من الكتلة

مثال

٦ يتحرك جسيم كتلته ١ كجم تحت تأثير القوة $\vec{F} = 3\vec{e} + 4\vec{e}$ بحيث كانت إزاحته $\vec{F}$ كدالة في الزمن تعطى بالعلاقة $\vec{F} = 3\vec{e} + 6\vec{e}$ أوجد الشغل المبذول من القوة ثم أوجد القدرة عندما $n = 2$ ثانية إذا كانت q مقيسة بالنيوتن، F مقيسه بالمتر، n بالثانية.

الحل

$$\vec{F} = 3\vec{e} + 4\vec{e}$$

$$\vec{F} = (3, 4) \cdot (3n^2, 6n) = 9n^2 + 24n$$

$$\vec{F} = \frac{dW}{dt} \quad \text{القدرة} \quad \text{عندما } n = 2 \text{ ثانية}$$

$$\vec{F} = 9n^2 + 24n$$

٩ حاول أن تحل

٦ أثرت قوة ثابتة $\vec{F}$ على جسيم بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة في الزمن n بالعلاقة $\vec{F} = (3n^2 + 4n)\vec{e} - 4n\vec{e}$. أوجد $\vec{F}$ إذا كانت قدرة القوة $\vec{F}$ تساوى ٧٥ إرج/ث عندما $n = 4$ ثانية، وكانت قدرة القوة $\vec{F}$ تساوى ١٦٥ إرج/ث عندما $n = 9$ ثانية علماً بأن F مقيسة بالسنتيمتر، q مقيسة بوحدة داين.

مثال

٧ إذا كانت قدرة آلة عند أى زمن n مقاساً بالثواني يساوى $(9n^2 + 4n)$ فأوجد الشغل المبذول من الآلة خلال الثواني الثلاث الأولى ثم أوجد الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة.

الحل

$$\vec{F} = \frac{dW}{dt} \quad \text{القدرة}$$

$$\vec{F} = (9n^2 + 4n) \quad \text{القدرة}$$

$$\vec{F} = (9n^2 + 4n) \quad \text{الشغل المبذول خلال الثلاث الأولى}$$

$$= [3n^3 + 2n^2]$$

$$= 99 \text{ وحدة شغل}$$

$$\vec{F} = (9n^2 + 4n) \quad \text{الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة}$$

$$= [3n^3 + 2n^2]$$

$$= 125 \text{ وحدة شغل}$$

الحل 

مش = 125×735 ن

$$\therefore 735 \times 125 = (100 - 26 \left(\frac{5}{18} \times 126 \right)) 1200 \times \frac{1}{4} \quad \therefore$$

$$\therefore 735 \times 120 = 100 \times 735 \quad \therefore 8 = 120$$

٧ إذا كانت قوة محرك سيارة تبذل شغلاً بمعدل يعطى خلال الفترة الزمنية $t \in [0, 5]$ بالعلاقة $144 - 2t^2$ ، وإذا كانت كتلة السيارة ٩٨٠ كجم وسرعتها في نهاية الثانية الثالثة ٩٠ كم/س فأوجد سرعتها في نهاية الثانية الرابعة.

تمارين ٣-٣

اکمل

١) جسيم يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$ بحيث كانت إزاحته $\vec{r} = n\vec{e}_x + (n+2)\vec{e}_y$ فإن قدرة القوة $\vec{F}$ عند اللحظة $n = 3$ ثانية تساوي داي.ن.سم/ث حيث n بالداين، F بالسنتيمتر.

٢) قطار كتلته ٣٧٥ طن وقدرة محركه ٦٢٥ حصان يتحرك على أرض أفقية بأقصى سرعة ك وقدورها ٩٠ كم/س فإن المقاومة التي يلاقيها عن كل طن من كتلة القطار = ث كجم

٢) تتحرك سيارة كتلتها ٤ طن وقدرة محركها ١٠ حصان في خط مستقيم علي أرض أفقية فكانت أقصى سرعة لها ٧٥ كم/س فإن مقدار مقاومة الطريق لحركة السيارة = ث كجم

٤ قطار كتلته ١٠٨ طن يتحرك بسرعة منتظمة على طريق أفقى بسرعة ٣٠ كم/ساعة فإذا كانت المقاومات تعادل ١٠,٥ ثقل كجم لكل طن من كتلته فأوجد قدره القاطرة بالحصان عندئذ.

٥ قطار قدرة آتته ٥٠٤ حصان وكتلته ٢١٦ طن يتحرك على طريق أفقى بأقصى سرعة له ضد مقاومات تعادل ٥ ثقل كجم لكل طن من الكتلة ، أوجد أقصى سرعة له بالكيلو متر/ساعة

٦ يتحرك قطار أفقيًا تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته، فإذا كانت المقاومة تعادل ٨٠٠ ثقل كجم عندما كانت سرعته ٢٠ كم/ساعة وكانت قدرة القطار ٢٠٠ حصان عندما يتحرك بأقصى سرعة له. فأوجد هذه السرعة بالكم/ساعة

٧) تتحرك سيارة كتلتها ١٥٠٠ كجم وقدرة محركها ١٢٠ حصان على طريق مستقيم أفقى بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س. ما هى أقصى سرعة يمكن لهذه السيارة أن تصعد بها طريقاً مستقيماً منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ علمًا بأن المقاومة واحدة على الطريقين ☒

٨) سيارة كتلتها ٣ طن تسير على طريق أفقى بسرعة منتظمة قدرها ٣٧,٥ كم/ساعة وعندما وصلت إلى قمة منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ ، أوقف السائق المحرك وتحركت السيارة أسفل المنحدر بسرعتها السابقة نفسها فإذا كانت مقاومة المنحدر $\frac{2}{3}$ مقاومة الطريق الأفقى فأوجد:
أولاً: مقاومة المنحدر بثقل الكيلو جرام. **ثانياً:** قدرة محرك السيارة على الطريق الأفقى.

٩) تحركت سيارة كتلتها ٦ طن. بأقصى سرعة وقدرها ٢٧ كم/س صاعدة طريقاً منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ ، عادت السيارة وهبطت على الطريق نفسه بأقصى سرعة لها وقدرها ١٣٥ كم/س. عين مقدار قوة مقاومة الطريق للحركة بفرض أنه لم يتغير طوال الوقت ثم أوجد قدرة محرك السيارة.

١٠) طائرة قدرة محركها ١٣٥٠ حصانًا عندما تتحرك أفقيًا بسرعة ثابتة قدرها ٢٧٠ كم/س أوجد مقاومة الهواء لحركة الطائرة عندئذ. وإذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعتها، أوجد قدرة المحرك عندما تطير أفقيًا بسرعة ثابتة قدرها ١٨٠ كم/ساعة.

١١) تجر قاطرة قدرة آلتها ٤٠٠ حصان قطارًا بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س على أرض أفقية. إحسب المقاومة لحركة القطار، إذا كانت كتلة القطار والقاطرة معًا ٢٠٠ طن، أوجد أقصى سرعة يصعد بها القطار طريقاً منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ على فرض أن مقاومة الطريق للحركة لم تتغير.

١٢) راكب دراجة كتلته مع دراجته ٨٠ كجم، وأكبر قدره له $\frac{4}{5}$ حصان فإذا كانت أقصى سرعة له على طريق أفقى هى ١٨ كم/ساعة، فاحسب مقاومة الطريق بثقل كجم، وإذا علم أنه صعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{3}{4}$ بأقصى سرعة له فاحسب هذه السرعة بالكم/ساعة.

١٣) عربة نقل كتلتها ٥ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة قدرها ١٤٤ كم/س، عندما كانت قدرة آلتها ١٢٠ حصان. أوجد مقاومة الطريق لكل طن من الكتلة بثقل كجم، وإذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة، فأوجد قدرة المحرك بالحصان عندما تصعد العربة منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{3}{4}$ بسرعة منتظمة قدرها ٩٦ كم/س

١٤) هبطت شاحنة كتلتها ٢ طن على طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{3}$ من موقع (أ) الى موقع (ب) بأقصى سرعة وقدرها ٩٠ كم/س. إحسب قدرة محرك السيارة إذا علمت أن مقاومة الطريق لحركتها تقدر بنسبة ١٣٪ من وزن السيارة، حملت السيارة عند وصولها إلى الموقع (ب) شحنة كتلتها $\frac{1}{4}$ طن ثم تحركت صاعدة الطريق الى موقع (أ) بأقصى سرعة، أوجد هذه السرعة إذا ظلت المقاومة على نفس نسبتها من الوزن.

١٥) قطار كتلته (ك) طن يتحرك على طريق أفقى بأقصى سرعة له وقدرها ٦٠ كم/س. فصلت منه العربة الأخيرة وكتلتها ١٥ طن، فزادت أقصى سرعة له بمقدار ٧,٥ كم/س. أوجد قدرة الآلة بالحصان. وكذلك كتلة القطار، علمًا بأن المقاومة تساوى ٩ ثقل كجم عن كل طن من الكتلة.

١٦ جسم يتحرك تحت تأثير القوة $\vec{F} = 3\vec{s} + 4\vec{v}$ وكان متجه إزاحته $\vec{r}$ يعطى كدالة فى الزمن t بالعلاقة $\vec{r} = t^2\vec{s} + (\frac{1}{2}t^2 + 1)\vec{v}$ ، أوجد إذا كانت $\vec{F}$ مقيسة بالنيوتن، ف بالمتر، t بالثانية.

أ الشغل المبذول خلال الثانى الثلاث الأولى

ب متوسط القدرة خلال الثانى الثلاث الأولى

ج قدرة القوة $\vec{F}$ عند $t = 3$ ث

١٧ يتحرك جسم كتلته الوحدة تحت تأثير قوة $\vec{F} = (2t - 1)\vec{s} + (5t + 2)\vec{v}$ بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\vec{r} = (3t^2 + 1)\vec{s} + 4t\vec{v}$ ، أوجد إذا كانت $\vec{F}$ مقيسة بالنيوتن، ف بالمتر، t بالثانية.

أ الشغل المبذول خلال الثانى الثالثة والرابعة والخامسة

ب القدرة المتوسطة خلال الثانى الثالثة والرابعة والخامسة.

ج قدرة القوة عند $t = 5$ ث

١٨ جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ وكان متجه موضع الجسم عند أى لحظة زمنية t يعطى بالعلاقة $\vec{r} = (t^3 + 2t^2)\vec{s} + 2t\vec{v}$ حيث $\vec{r}$ مقيسة بالمتر، $\vec{v}$ بالنيوتن، t بالثانية . أوجد :

أ القوة المؤثرة $\vec{F}$ بدلالة t

ب أوجد قدرة القوة $\vec{F}$ بدلالة الزمن t .

ج أوجد الشغل المبذول من القوة $\vec{F}$ خلال الفترة الزمنية $0 < t < 2$

١٩ إذا كانت قدرة آلة (بالحصان) تساوى $(6 - \frac{1}{3}t^2)$ حيث t الزمن بالثوانى ، $t \in [0, 120]$ أوجد :

أ قدرة الآلة عندما $t = 90$ ث.

ب الشغل المبذول خلال الفترة الزمنية $[0, 30]$.

ج أقصى قدرة للآلة .

٢٠ جسم كتلته ٥ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ بحيث كان متجه موضعه عند الزمن t يعطى بالعلاقة $\vec{r} = (t^3 + 2t^2)\vec{s} + 2t\vec{v}$ إذا كانت $\vec{F}$ مقيسة بالنيوتن، $\vec{v}$ بالمتر . فأوجد :

- مستخدماً التكامل الشغل المبذول من القوة $\vec{F}$ فى الفترة الزمنية $[0, 2]$.

٢١ جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ بحيث كان متجه سرعته $\vec{v}$ يعطى بالعلاقة

$\vec{v} = (1 - 2t)\vec{s} + (1 - t)\vec{v}$ إذا كانت $\vec{F}$ مقيسة بالنيوتن ، $\vec{v}$ بوحدته م/ث فأوجد:

أ القوة $\vec{F}$ بدلالة الزمن t .

ب طاقة الحركة E_k عند الزمن t .

ج أثبت أن معدل تغير E_k يساوى القدرة الناتجة عن القوة $\vec{F}$.