

الرياضيات



الصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

القسم العلمي

تأليف

أ / كمال يونس كبشة

أ.د / عفاف أبو الفتوح صالح أ / سيرا فيم إلياس إسكندر

أ / مجدى عبد الفتاح الصفتى أ / أسامة جابر عبد الحافظ

مراجعة وتعديل

د / محمد محى الدين عبد السلام أ / شريف عاطف البرهامى

أ / ماجد محمد حسن أ / عثمان مصطفى عثمان

أ / إيمان سيد رمضان أ / عصام على أبو سالم

د / مدحت عطية شعراوى

إشراف علمى (مستشار الرياضيات)

أ / منال عزقول

إشراف تربوى (رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج)

د / أكرم حسن

طبعة 2026 - 2027 م

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوءها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- 1 تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
 - 2 تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
 - 3 تبني مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على ما يلي:
أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محباً للرياضيات ومبادراً بدراساتها - أن يكون المتعلم قادراً على العمل منفرداً أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطاً ومثابراً ومواظباً ومبتكراً - أن يكون المتعلم قادراً على التواصل بلغة الرياضيات.
 - 4 اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
 - 5 اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
 - 6 احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.
- وفي ضوء ما سبق روعي في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هي: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة، ومخطط تنظيمي لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعي عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشاف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولصناعتنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

- ١ - ١ الدوال الحقيقية. ٤
- ٢ - ١ بعض خواص الدوال. ١٣
- ٣ - ١ اطراد الدوال. ٢١
- ٤ - ١ التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية. ٢٦
- ٥ - ١ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة. ٤٢

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

- ١ - ٢ الأسس الكسرية. ٥٢
- ٢ - ٢ الدالة الأسية وتطبيقاتها. ٥٨
- ٣ - ٢ المعادلات الأسية. ٦٣
- ٤ - ٢ الدالة العكسية. ٦٧
- ٥ - ٢ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني. ٧٢
- ٦ - ٢ بعض خواص اللوغاريتمات. ٧٨

المحتويات

الوحدة الثالثة

النهايات والإتصال

- ١ - ٣ مقدمة فى النهايات. ٨٨
- ٢ - ٣ إيجاد نهاية الدالة جبريا. ٩٥
- ٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللانهاية. ١٠٣
- ٤ - ٣ نهاية الدوال المثلثية. ١٠٩
- ٥ - ٣ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة. ١١٤
- ٦ - ٣ الإتصال. ١١٩

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

- ١ - ٤ قانون قاعدة الجيب. ١٣٠
- ٢ - ٤ قانون قاعدة جيب التمام. ١٣٦

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

بعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧ - ١٧٨٣م) السويسري الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر في الرياضيات والفيزياء، فقدم وعمم الكثير من التعبيرات الرياضية ومنها مفهوم الدالة (Function) وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو $ص = د(س)$ للدلالة على الدالة معتبراً أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س نختاره بحرية، وبذلك عرّف الدالة لا المنحنى مما ساهم في تحويل الهندسة إلى علاقات حسابية، كما حول جميع النسب المثلثية التي نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. أدخل أويلر العدد الثابت $e \approx 2.71828$ (عدد أويلر) كأساس اللوغاريتم الطبيعي، واكتشف العلاقة الرياضية $e^{iz} + 1 = 0$ والتي تربط بين أهم خمسة ثوابت في الرياضيات، كما ربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة. في هذه الوحدة ستعرف صوراً مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانياً مستخدماً التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية في حل مشكلات رياضية وحياتية في مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- ✚ يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- ✚ يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال الحقيقية (تركيب الدوال)
- ✚ يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية.
- ✚ يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- ✚ يتعرف الدالة الأحادية (one - to - one).
- ✚ يستنتج اطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- ✚ يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- ✚ يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة
- ✚ المقياس - الدالة التكعيبة - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- ✚ يستنتج تأثير كل من التحويلات: $د(س \pm أ) \pm ب$ ، $د(س \pm ب) \pm ج$ على الدوال السابقة.
- ✚ يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- ✚ يحل معادلات على الصورة: $|أ + س| = |ب + س|$ ، $|أ + س| = |ب + س| + ج$ ، $|أ + س| = ج + س$
- ✚ يحل متباينات على الصورة: $|أ + س| > |ب + س|$ ، $|أ + س| < |ب + س|$ ، $|أ + س| \geq |ب + س|$ ، $|أ + س| \leq |ب + س|$
- ✚ يستخدم الدوال الحقيقية في حل مشكلات رياضية وحياتية في مجالات مختلفة.
- ✚ يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية في صورة أنشطة.
- ✚ يبحث عن التمثيل البياني للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيو جيبرا "geogebra".
- ✚ يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في التمثيل البياني لبعض الدوال التي يصعب تمثيلها بالطرق العادية ثم دراسة خواص هذه الدوال.

المصطلحات الأساسية

Rational Function	دالة كسرية	Odd Function	دالة فردية	Real Function	دالة حقيقية
Asymptote	خط تقارب	One-to-One Function	دالة أحادية	Domain	مجال
Transformation	تحويل	Monotony of a Function	اطراد دالة	Co-domain	مجال مقابل
Translation	إزاحة (انتقال)	Increasing Function	دالة تزايدية	Range	مدى
Reflection	انعكاس	Decreasing Function	دالة تناقصية	Vertical Line	خط رأسي
Stretching	تمدد	Constant Function	دالة ثابتة		دالة متعددة التعريف
Graphical Solution	حل بياني	polynomial Function	دالة كثيرة الحدود	Piecewise-Defind Function	
		دالة مقياس (قيمة مطلقة)		Composite Function	دالة مركبة
		Absolute Value Function		Even Function	دالة زوجية

مخطط تنظيمي للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.
- الدرس (٢ - ١): بعض خواص الدوال.
- الدرس (٣ - ١): اطراد الدوال.
- الدرس (٤ - ١): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.
- الدرس (٥ - ١): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة رسومية - حاسب آلي مزود ببرامج رسومية
(Graph, GeoGebra)

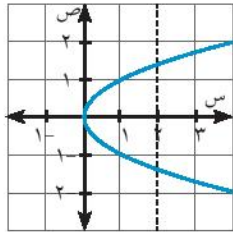
استكشف

Real Function

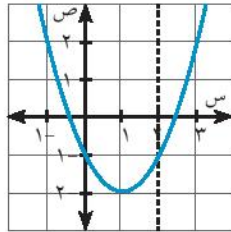
الدالة الحقيقية

تسمى الدالة دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية منها.

تعلم



ليست دالة



دالة

اختبار الخط الرأسى

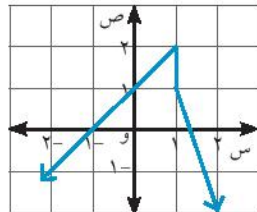
إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقاط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من S إلى T .

مثال

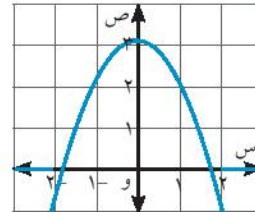
تحديد العلاقة التى تمثل دالة

Identify the Relation Representing Function

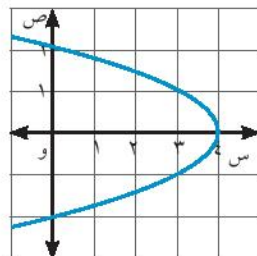
١ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت S تمثل دالة فى S أم لا.



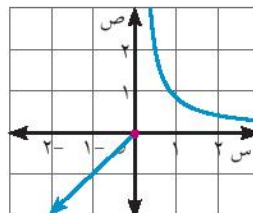
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

Function	دالة
Domain	مجال
Co-domain	مجال مقابل
Range	مدى
Arrow Diagram	مخطط سهمى
Cartesian Diagram	مخطط بياني
Vertical Line	خط رأسى
	دالة متعددة التعريف
Piecewise Function	

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تذكرا

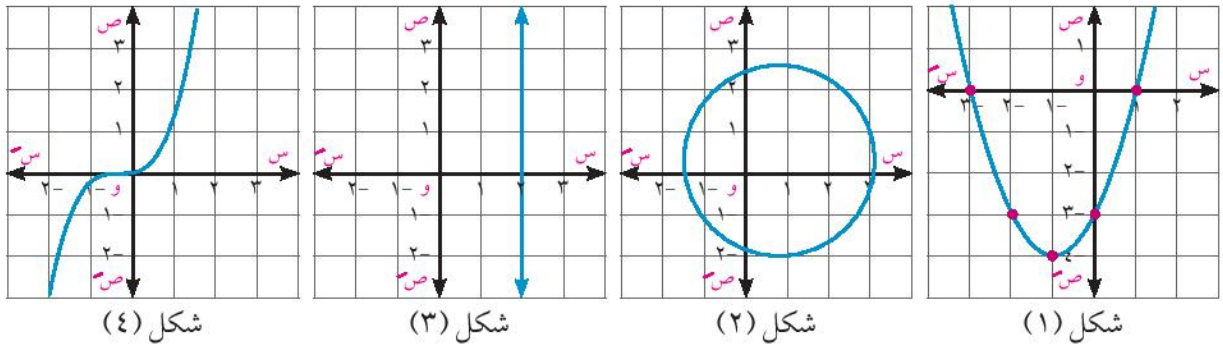
إذا كانت $S \rightarrow T$ فإن بيان $D = \{(s, t) : s \in S, t \in T, (s, t) \in D\}$

الحل

- شكل (١) يمثل دالة في S .
 شكل (٢) لا يمثل دالة في S لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البياني في عدد غير منتهٍ من النقط.
 شكل (٣) يمثل دالة في S .
 شكل (٤) لا يمثل دالة في S لأنه يوجد خط رأسى يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

٤ حاول أن تحل

١ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من S ← ص مع ذكر السبب.



مثال

تعيين مدى الدالة بيانياً

٢ إذا كانت $D: [٥, ١]$ ← C حيث $D(S) = S + ١$

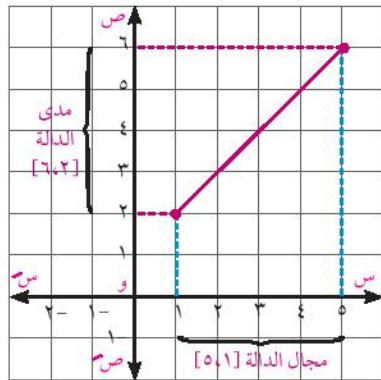
ارسم الشكل البياني للدالة D ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحل

الدالة D دالة خطية مجالها $[٥, ١]$ تمثل بيانياً بقطعة مستقيمة طرفها النقطتان (١، ١) و (٥، ٥) أى النقطتين (١، ٢) و (٥، ٦).

مدى الدالة $D = [٢, ٦]$

وهو مجموعة الاحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.



Piecewise-Defined Functions

الدالة متعددة التعريف:

تعلم

الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

٣ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} 3 - س & \text{عندما } 2 > س > -2 \\ س & \text{عندما } 5 > س > 2 \end{cases}$ عین مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

الحل

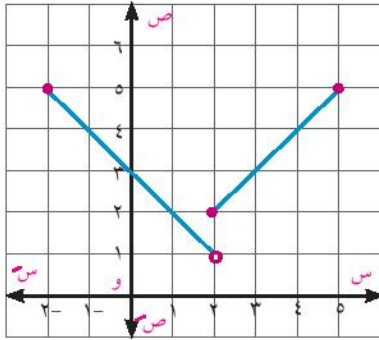
الدالة د معرفة على فترتين وتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د(س) = 3 - س عندما 2 > س > -2 أى على الفترة [-2، 2]

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان

(-2، 5)، (2، 1) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (2، 1)

لأن 2 ∉ [-2، 2] كما في الشكل المقابل.



القاعدة الثانية: د(س) = س عندما 5 > س > 2 أى على الفترة (2، 5]

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (2، 2)، (5، 5)

ويكون مجال الدالة د = [-2، 2] ∪ (2، 5] = [-2، 5]

ويمكن من الرسم البياني نستنتج أن:

مجال الدالة د = [-2، 5]

مدى الدالة د = [1، 5]

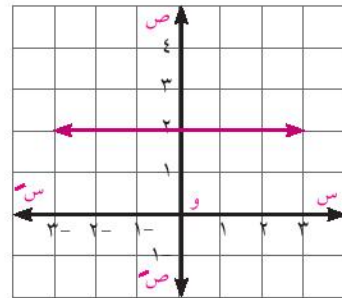
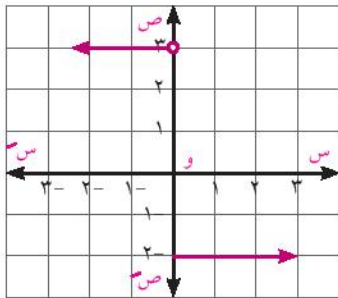
٦ حاول أن تحل

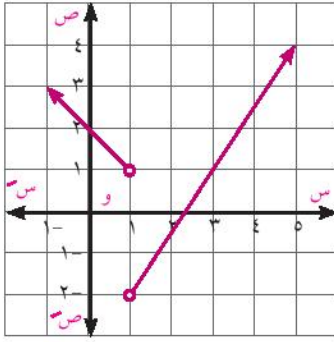
٢ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} 1 - س & \text{عندما } 2 > س > 0 \\ 1 + س & \text{عندما } 0 \leq س \end{cases}$ عین مجال الدالة ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

٢ في كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

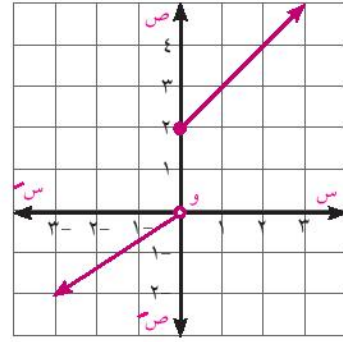
لاحظ أن

في الشكل البياني الممثل للدالة د
مجال الدالة = [أ، ب]
مدى الدالة = [ج، د]





د



ج

تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

Determining Domains

تعيين مجال الدالة

مثال

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

ب د_٢ (س) = $\sqrt{3-s}$

أ د_١ (س) = $\frac{3+s}{9-s^2}$

ج د_٣ (س) = $\sqrt{5-s}$

الحل

أ الدالة د_١ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = 0 لذلك نضع $9-s^2=0$ أي $s=\pm 3$ وعليه يكون مجال الدالة د_١ هو $E - \{-3, 3\}$.



ب مجال الدالة د_٢ هو جميع قيم س التي تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعي موجباً أو صفراً، أي قيم س التي تجعل $3-s \geq 0$.

∴ $3-s \geq 0$ ∴ $s \leq 3$ ∴ مجال د_٢ = $[-3, \infty)$.

ج د_٣ (س) = $\sqrt{6-s}$ ، دليل الجذر عدد فردي ∴ مجال د_٣ = E

لاحظ:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[n]{r(s)}$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، $n < 1$ ، ر(س) كثيرة حدود

أولاً: عندما ن عدد فردي فإن مجال الدالة د = E

ثانياً: عندما ن عدد زوجي فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط $r(s) \geq 0$.

٩ حاول أن تحل

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

ب د_٢ (س) = $\sqrt{16-3s}$

أ د_١ (س) = $\frac{3+s^2}{2+s^3-s^2}$

ج د_٣ (س) = $\sqrt{5-s}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث $D(s) = \frac{2}{s^2 - 6s + 8}$ هو ع - {3} أوجد قيمة ك.



تعلم

العمليات على الدوال

Operations on Functions

إذا كانت د₁ ، د₂ دالتين مجالاهما م₁ ، م₂ على الترتيب ، فإن:

١ $(D_1 \pm D_2)(s) = D_1(s) \pm D_2(s)$ ، مجال $(D_1 \pm D_2)$ هو $M_1 \cap M_2$

٢ $(D_1 \cdot D_2)(s) = D_1(s) \cdot D_2(s)$ ، مجال $(D_1 \cdot D_2)$ هو $M_1 \cap M_2$

٣ $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)(s) = \frac{D_1(s)}{D_2(s)}$ حيث $D_2(s) \neq 0$ ، مجال $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$ هو $(M_1 \cap M_2) - F(D_2)$ حيث ف (د₂) مجموعة أصفار د₂

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالى د₁ ، د₂ باستثناء القيم التى تجعل د₂(س) = 0 فى عملية القسمة.

مثال

٥ إذا كان د(س) = $s^2 - 4$ س ، ر (س) = $\sqrt{s+2}$ ، ع(س) = $\sqrt{s-4}$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ (د + ر) ب (ر - ع)

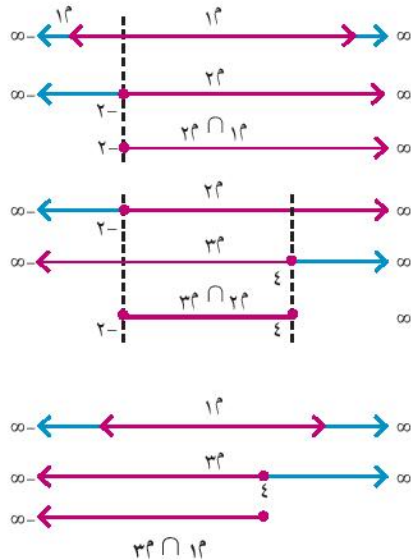
ج (د. ع) د $\left(\frac{ع}{د}\right)$

ثانياً: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

أ (ر - ع) (١) ب (د. ع) (٥) ج $\left(\frac{ع}{د}\right)$ (٣)

الحل

أولاً: مجال د = م₁ = ع ، مجال ر = م₂ = $[-2, \infty)$ ، مجال ع = م₃ = $[4, \infty)$



أ (د + ر) (س) = د(س) + ر(س)

$s^2 - 4 + \sqrt{s+2}$

ومجال الدالة (د + ر) هو $[-2, \infty) \cap [-2, \infty) = [-2, \infty)$

ب (ر - ع) (س) = ر(س) - ع(س)

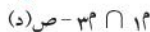
$\sqrt{s+2} - \sqrt{s-4}$

ومجال (ر - ع) هو: $[-2, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$

ج (د. ع) (س) = د(س) · ع(س)

$(s^2 - 4) \sqrt{s-4}$

ومجال (د. ع) = $[4, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$



مجموعة أصفار الدالة دهي $\{0, 4\}$

$$\{\cdot\} -]\varepsilon, \infty[= \{\varepsilon, \cdot\} - \mathcal{C} \cap]\varepsilon, \infty[= \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \text{ مجال}$$

ثانيًا: القيم العددية:

١. $\because (r - e)(s) = \sqrt{s - 4} - \sqrt{s + 2}$ لكل $s \in [-2, 4]$
 $\therefore (r - e)(1) = \sqrt{1 - 4} - \sqrt{1 + 2} = -3$ ، $\therefore [-2, 4] \ni 1$ ،

ب) $\therefore (د.ع) (س) = (س^2 - ٤س) \sqrt{s-٤}$ لكل $s \in]٤, \infty[$
 $\therefore (د.ع) (٥) = ٥$ غير معرفة $\therefore]٥, \infty[$

$$\textcircled{ج} \therefore \left(\frac{ع}{د}\right) (س) = \frac{\sqrt{س-٤}}{س-٢} \text{ لكل } س \in [-٤, \infty) \setminus \{٠\}$$

٩ **حاول أن تحل**

⑤ إذا كانت د، ر دالتين حقيقتين حيث:

د(س) = $s^2 - 4$ ، ر(س) = $\sqrt{s - 1}$ أوجد:

أ مجال كل من الدوال الآتية: $(r+d)$ ، $(r \cdot d)$ ، $(\frac{d}{r})$ ، $(\frac{r}{d})$

ب أوجد القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

$$(2-)\left(\frac{2}{5}\right) \quad , \quad (3)\left(\frac{3}{5}\right) \quad , \quad (2)(2.5) \quad , \quad (5)(2+5)$$

Composition of Functions تركيب الدوال

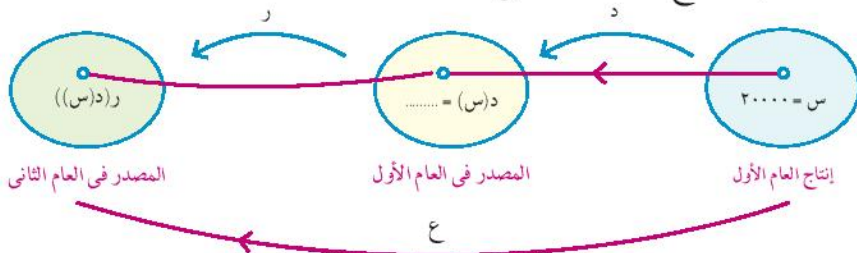
عمل تعاونی

يقوم مصنع بتصدير جزء من إنتاجه يعطى بالعلاقة (د) $\frac{1}{4}$ س حيث س عدد الوحدات المنتجة في العام الأول، وكان عدد الوحدات المصدرة في العام التالي يعطى بالعلاقة (د) $د = 1500 + 100$ حيث د عدد الوحدات المصدرة في العام الأول.

ابحث (مع زميل) كم يكون عدد الوحدات المصدرة في العام الثاني إذا كان إنتاج المصنع في العام الأول

أ ٢٠٠٠٠ وحدة ب ٨٠٠٠٠ وحدة

للتحقق من صحة استنتاجك تتبع المخطط التالي:



تعلم



إذا كان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوى $\emptyset$ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من

الدالتين السابقتين وهي: $ع = ر \circ د$

وتقرأ ر تركيب د، أو ر بعد د حيث تطبق الدالة د أولاً ثم الدالة ر

ويكون $ع(س) = (ر \circ د)(س)$

$ر(د(س)) =$

من المخطط السابق يكون:

لاحظ أن



$$د(٢٠٠٠٠) \times \frac{1}{4} = (٢٠٠٠٠)د$$

$$٥٠٠٠ =$$

ب ع $(٨٠٠٠٠) =$

أ ع $(٢٠٠٠٠) ر = [د(٢٠٠٠٠)]$

$ر(٥٠٠٠) =$

$٦٥٠٠ = ١٥٠٠ + ٥٠٠٠ =$ وحدة

فكر: هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

لبحث الإجابة عن هذا السؤال أوجد $(د \circ ر)(س)$ ، $(ر \circ د)(س)$ حيث $د(س) = ٤س^٢$ ، $ر(س) = ٢س$

٤ حاول أن تحل

٦ إذا كان $د(س) = ٦ + ٢س^٢$ ، $ر(س) = ٣س$

ثانياً: حدد قيم س التي تجعل $(د \circ ر)(س) = ٤٢$

أولاً: أوجد $(د \circ ر)(٣)$

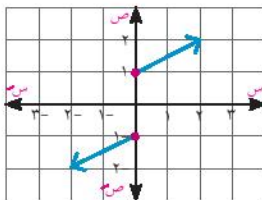


تمارين ١ - ١

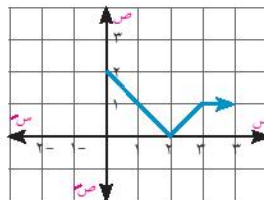


اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

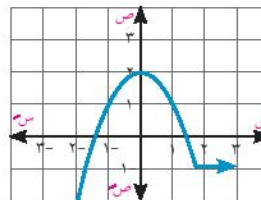
١ أي من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة في س:



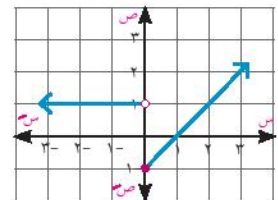
(د)



(ج)



(ب)



(أ)

٢ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ما عدا العلاقة:

ب $ص = ٤س^٢ - ٤$

أ $ص = ٣س + ١$

د $ص = ح س$

ج $ص = ٢س^٢ - ٢$

أجب عن ما يأتي:

$$\textcircled{2} \text{ حدد مجال الدالة د حيث د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س - ١ عندما } ٢ > \text{س} > ٤ \\ \text{١- عندما } ٢- > \text{س} > ٢ \end{array} \right\}$$

ثم ارسم الشكل البياني للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

$\textcircled{4}$ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$\text{د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س + ٣ عندما } \text{س} \leq ٢ \\ \text{١ - س عندما } \text{س} > ٢ \end{array} \right\} \text{ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.}$$

$$\textcircled{5} \text{ إذا كانت د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س + ٣ عندما } ٢- > \text{س} > ٠ \\ \text{١ - س عندما } ٤ > \text{س} > ٠ \end{array} \right\}$$

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

$$\textcircled{6} \text{ إذا كان: د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{٣ + س - ٤ عندما } \text{س} > ١ \\ \text{س - ٣ عندما } ٢ \geq \text{س} \geq ١ \\ \text{س - ٢ عندما } \text{س} < ٢ \end{array} \right\}$$

أوجد:

$\textcircled{ج}$ د(٢)

$\textcircled{ب}$ د(١)

$\textcircled{أ}$ د(صفر)

$\textcircled{٧}$ الربط بالميكانيكا: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر/ ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

$$\text{ع(ن) = } \left. \begin{array}{l} \text{٨ ن عندما } ١٠ \geq \text{ن} \geq ٠ \\ \text{٨٠ عندما } ٢٠٠ > \text{ن} > ١٠ \\ \text{٨٠ + ٤ ن - ٢٢٠ عندما } ٢٢٠ \geq \text{ن} \geq ٢٠٠ \end{array} \right\}$$

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

$\textcircled{ج}$ ع(٢١٠)

$\textcircled{ب}$ ع(١٥٠)

$\textcircled{أ}$ ع(١٠)

$\textcircled{٨}$ الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

$$\text{د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} \frac{٥}{٣} \text{ عندما } ٥٠٠٠ > \text{س} > ٠ \\ \text{٢ + ٢٥٠٠ عندما } ١٥٠٠٠ > \text{س} > ٥٠٠٠ \\ \text{٣ + ١٠٠٠٠ عندما } ٦٠٠٠٠ > \text{س} > ١٥٠٠٠ \end{array} \right\}$$

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربائية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

$\textcircled{ج}$ د(٥٠٠٠٠)

$\textcircled{ب}$ د(١٠٠٠٠)

$\textcircled{أ}$ د(٥٠٠٠)

٩) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

$$\begin{array}{ll} \text{أ) د(س)} = \frac{3+س}{6+س-2س} & \text{ب) د(س)} = \frac{1+س}{1+3س} \\ \text{ج) د(س)} = \sqrt{2-س} & \text{د) د(س)} = \sqrt[3]{4-س} \\ \text{هـ) د(س)} = \frac{س^3}{1-س^2} & \text{و) د(س)} = \frac{1}{2+س} + \frac{1}{س} \end{array}$$

١٠) إذا كان: $ع ← ح$ حيث $د_1(س) = 3-س$ ،

$د_2: [2, 3] ← ح$ حيث $د_2(س) = 2+س$ ،

فأوجد: $د_1(س)$ ، $د_2(س)$ ، $د_1(س)$ مبيّنًا مجال كل دالة.

١١) إذا كان: $د_1(س) = 2+س$ ومجال $د_1 = [2, 3]$ ، $د_2(س) = 2+س$ ومجال $د_2 = [1, 3]$ ،

أوجد: $د_1(س)$ ، $د_2(س)$ ، $د_1(س)$ مبيّنًا مجال كل دالة.

١٢) إذا كان: $د(س) = 3+س$ ، $ر(س) = 2-س$ ، $ق(س) = 3س$ أوجد:

أ) $د(ر)$ ب) $ر(د)$ ج) $ر(ق)$ د) $ق(د)$ هـ) $ق(د)$

١٣) إذا كان: $د(س) = \frac{1}{س}$ ، $ر(س) = 3+س$ ،

أوجد: $د(ر)$ ، $ر(د)$.

١٤) إذا كان: $د(س) = 3-س$ ، $ر(س) = \sqrt{3-س}$ ،

أوجد: $د(ر)$ (س) في أبسط صورة ثم أوجد $د(ر)$ (3)

سوف تتعلم

- التمائل في منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

المصطلحات الأساسية

- Symmetry تماثل
- Even Function دالة زوجية
- Odd Function دالة فردية
- One - to - One Function دالة أحادية
- Horizontal Line خط أفقي

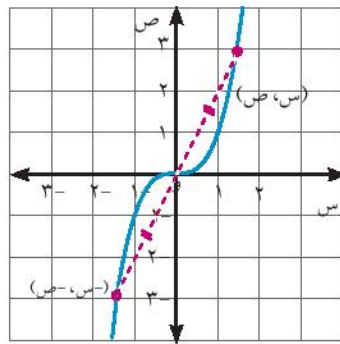
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية - برامج
- رسومية للحاسوب

قد يتميز الشكل البياني للدالة $y = f(x)$ بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، ويمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

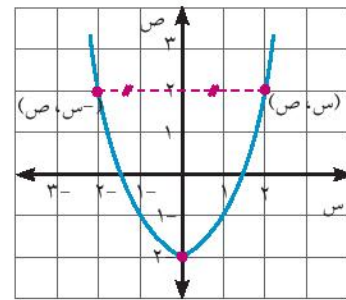
تمديد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصف المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول نقطة الأصل.

شكل (٢)



التماثل حول محور الصادات

شكل (١)

في شكل (١):

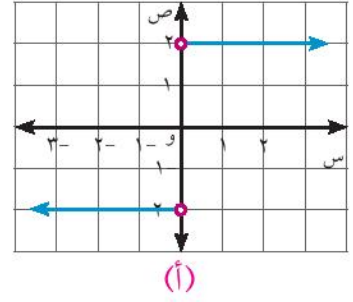
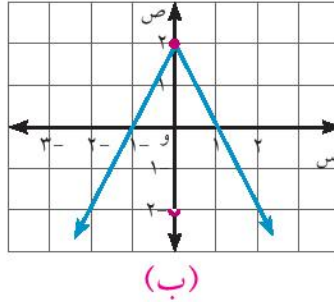
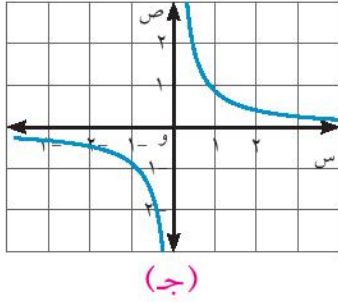
تكون النقطة $(-s, y)$ الواقعة على الشكل البياني لمنحنى الدالة هي صورة النقطة (s, y) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

في شكل (٢):

يوضح الشكل البياني للعلاقة بين s ، y تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة $(-s, -y)$ هي صورة النقطة (s, y) الواقعة على نفس المنحنى.

٤ حاول أن تحل

١ في كل شكل من الأشكال الآتية بين المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

Even and Odd Functions

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ ، لكل $x \in S$ ، $S \subseteq \mathbb{R}$ ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلاً حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ ، لكل $x \in S$ ، $S \subseteq \mathbb{R}$ ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين x ، $-x$ إلى مجال الدالة، وإذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد $f(-x)$

مثال

١ ابحث نوع الدالة f في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

- أ $f(x) = x^2$ ب $f(x) = x^3$ ج $f(x) = \sqrt{x+3}$ د $f(x) = \tan x$

الحل

أ $f(x) = x^2$ ، مجال $D = \mathbb{R}$

∴ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ، يكون: $f(x) = x^2$ دالة زوجية

أي أن: $f(-x) = f(x)$ دالة زوجية

ب $f(x) = x^3$ ، مجال $D = \mathbb{R}$

لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ، يكون: $f(x) = x^3$ دالة فردية

أي أن: $f(-x) = -f(x)$ دالة فردية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ ، $x \in S$ ، $0 \in S$ ، $f(0) = 0$ ، $f(x) = 0$ دالة القوى، وتكون الدالة زوجية عندما n عدد زوجي، فردية عندما n عدد فردي.

تذكر أن

حا (-س) = - حاس
 حتا (-س) = حتاس
 طا (-س) = - طاس

ج د(س) = $\sqrt{s+3}$ ، مجال د = $[-3, \infty]$

لاحظ أن $\infty, [-3, \infty]$ بينما $[-4, \infty]$

الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د د(س) = حتاس ، مجال د = ح

لكل س ، -س $\in$ ح يكون:

د(-س) = حتا (-س) = حتاس

أي أن: د(-س) = د(س) د دالة زوجية

٤ حاول أن تحل

٢ ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

- | | | |
|--|--------------------------------|-------------------------------|
| أ د(س) = جاس | ب د(س) = س ^٢ + جتاس | ج د(س) = س ^٣ - جاس |
| د د(س) = س ^٢ جتاس | هـ د(س) = س ^٣ جاس | و د(س) = س ^٣ جتاس |
| ز د(س) = س ^٣ + س ^٢ | ح د(س) = جاس + جتاس | ط د(س) = جاس جتاس |

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

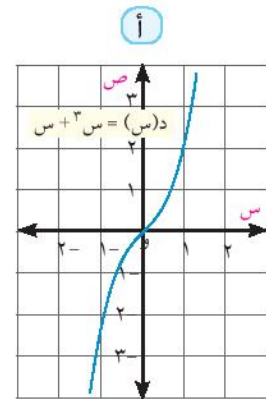
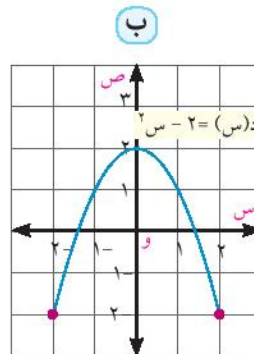
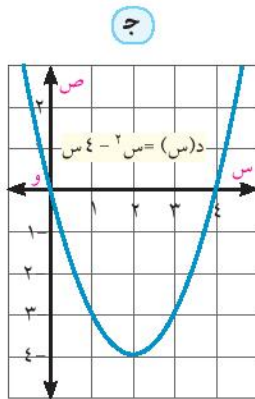
إذا كان كل من: د_١ ، د_٢ دالة زوجية ، وكان كل من: د_١ ، د_٢ دالة فردية ، فإن:

- | | |
|--|---|
| ١ د _١ + د _٢ دالة زوجية | ٢ د _١ + د _٢ دالة فردية. |
| ٣ د _١ × د _٢ دالة زوجية | ٤ د _١ × د _٢ دالة زوجية. |
| ٥ د _١ × د _٢ دالة فردية | ٦ د _١ + د _٢ ليست زوجية وليست فردية. |

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك في بند حاول أن تحل (٢)

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبرياً.



الحل

- أ) د (س) = س³ + س، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
مجال د = ع، منحني الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ أي أن الدالة فردية
∴ كل س، -س ∈ ع
∴ د (-س) = (-س)³ + (-س) = -س³ - س = - (س³ + س) = -د (س)
بالتبسيط:
نأخذ (١-) عاملاً مشتركاً
د (-س) = - (س³ + س) = -د (س)
د (-س) = -د (س)

أي أن الدالة فردية.

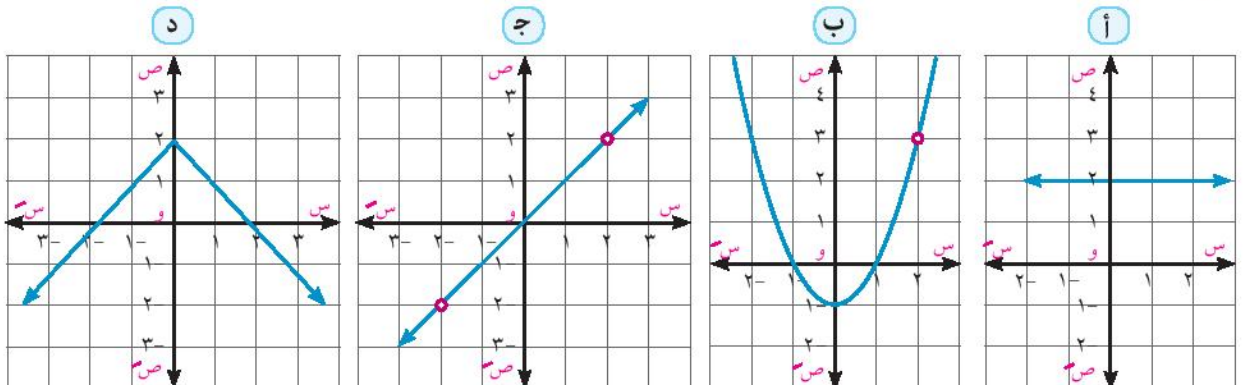
- ب) د (س) = س² - ٢، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن
مجال د = [٢، ٢-]، ومنحني الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية
∴ كل س، -س ∈ [٢، ٢-]
بالتبسيط:
د (-س) = (-س)² - ٢ = س² - ٢ = د (س)
أي أن الدالة زوجية

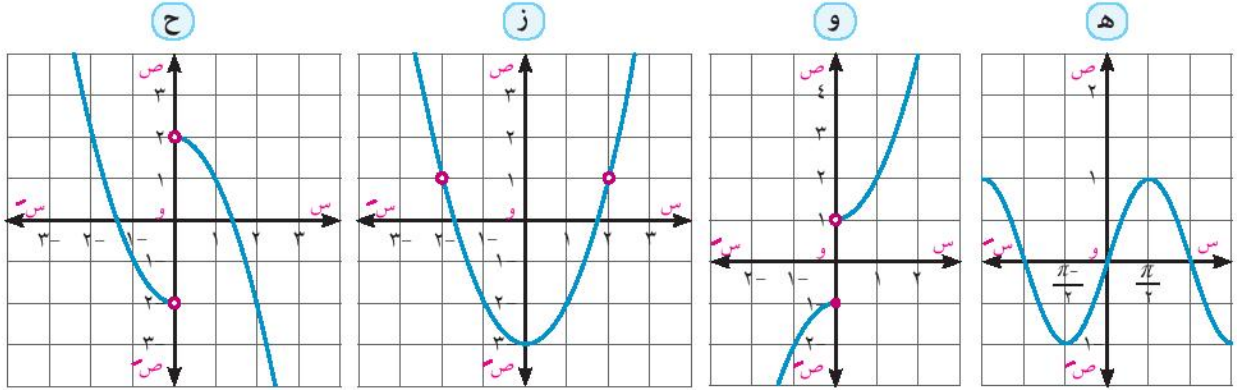
- ج) د (س) = س² - ٤، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
مجال د = ع، ومنحني الدالة ليس متماثلاً حول محور الصادات، وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل؛
أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

- ∴ كل س، -س ∈ ع
بالتبسيط:
د (-س) = (-س)² - ٤ = س² - ٤ = د (س) ∴ د ليست زوجية
ولكن
لذلك فإن
أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٩ حاول أن تحل

- ٢) اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.





٦ حاول أن تحل

٤ مثل الدالة د حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{حيث } ٢ + س \\ \text{حيث } ٢ - س \end{array} \right\}$ بياناً.

ثم بين: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبرياً.

الدالة الأحادية: (Injective Function) One - to - One Function

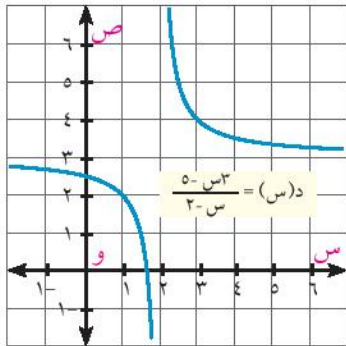
الدالة د: $س \rightarrow ص$ تسمى دالة أحادية إذا كان:

لكل $ا, ب \in د$ ، $د(ا) = د(ب)$ فإن $ا = ب$

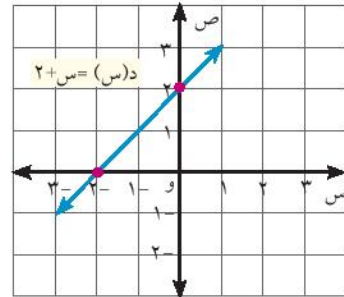
أو لكل $ا \neq ب$ فإن $د(ا) \neq د(ب)$

مثال

٣ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د: $س \rightarrow ص$ ، أثبت أن د دالة أحادية.



ب



أ

الحل

أ د(س) = س + ٢ ، مجال د = ح

لكل $ا, ب \in ح$ فإن $د(ا) = ا + ٢$ ، $د(ب) = ب + ٢$

بوضع $د(ا) = د(ب)$ $\therefore ٢ + ا = ٢ + ب$

وبحذف ٢ من الطرفين $\therefore ا = ب$

لذلك فإن د دالة أحادية

ب) د (س) = $\frac{٥-٣}{٢-٣}$ ، مجال د = ع - {٢}

لكل ا، ب $\in$ ع - {٢} فإن د(ا) = $\frac{٥-١}{٢-١}$ ، د(ب) = $\frac{٥-٣}{٢-٣}$

بوضع د(ا) = د(ب) $\therefore \frac{٥-١}{٢-١} = \frac{٥-٣}{٢-٣}$

بالضرب التبادلي $١٠ + ١٥ - ٦ - ٣ = ١٠ + ٥ - ١٦ - ١$ $\therefore$ بالحدف والتبسيط $١٠ + ١٥ - ٦ - ٣ = ١٠ + ٥ - ١٦ - ١$ $\therefore$ لذلك فإن دالة أحادية.

Horizontal - Line Test

إختبار الخط الأفقي

تعلم



تكون الدالة د: س $\rightarrow$ ع دالة إحادية إذا كان الخط الأفقي (الموازي لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.

٤ حاول أن تحل

٥ في بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التي تمثل دالة إحادية.

٦ أثبت أن د: س $\rightarrow$ ع دالة إحادية حيث:

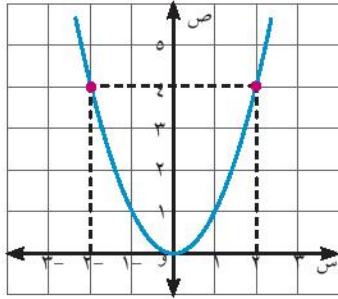
أ) د (س) = $\frac{٣-٥}{٣-٣}$ ب) س (س) = $\frac{٥-٣}{٣+٤}$

مثال



٤ بين أن الدالة د: س $\rightarrow$ ع حيث د (س) = $\frac{٣-٥}{٣-٣}$ ليست دالة أحادية.

الحل



د (٢) = $\frac{٣-٥}{٣-٣}$ ، د (-٢) = $\frac{٣-٥}{٣-٣}$ $\therefore$ د (٢) = د (-٢) = ٤

$\therefore ٢ \neq -٢$ $\therefore$ ليست أحادية

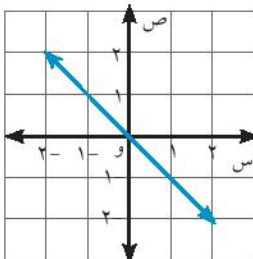
ونلاحظ أن الخط الأفقي عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما ٢، -٢.



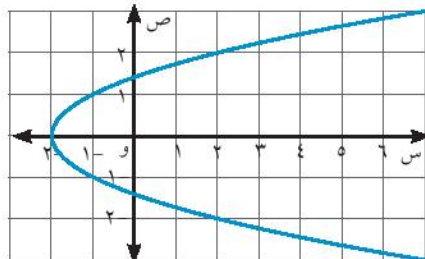
تمارين ١ - ٢



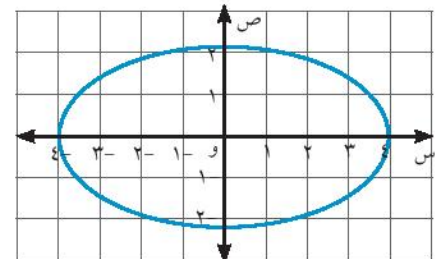
١ اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسّر إجابتك.



شكل (٣)

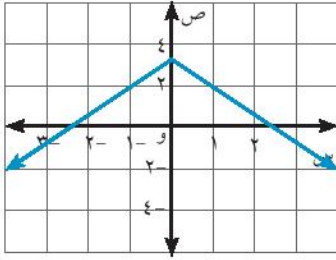


شكل (٢)

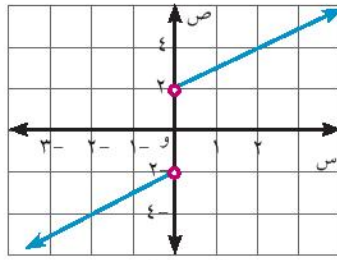


شكل (١)

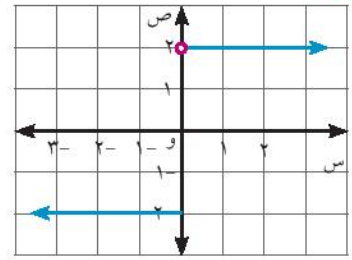
٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



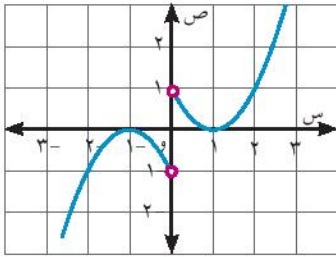
شكل (٣)



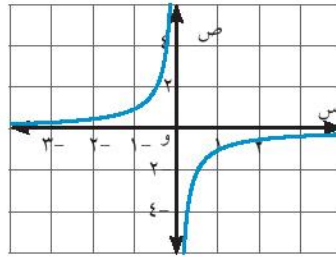
شكل (٢)



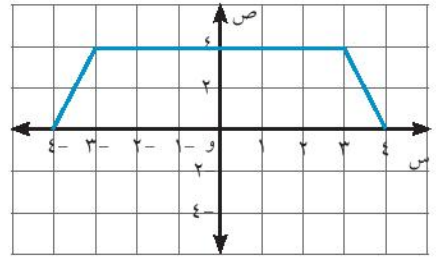
شكل (١)



شكل (٦)



شكل (٥)



شكل (٤)

٣ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د (س) = س^٢ + ١ - س

ب د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

ج د (س) = س^٢ - س

د د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

هـ د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

و د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

ز د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

ح د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

ط د (س) = س^٣ - س^٢ - ٤

٤ إذا كانت د_١، د_٢ دوال حقيقية حيث د_١ (س) = س^٢، د_٢ (س) = س^٣، د_٣ (س) = س^٤،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

أ د_١ + د_٢

ب د_١ + د_٢

ج د_١ × د_٢

د د_١ × د_٢

٥ إذا كانت د_١، د_٢ دالتين حقيقيتين حيث د_١ (س) = (س - ٣)^٢، د_٢ (س) = (س + ٣)^٢

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

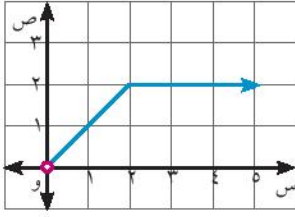
أ د + د_٢

ب د - د_٢

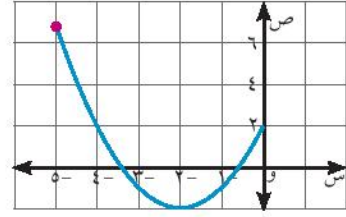
ج د × د_٢

د د / د_٢

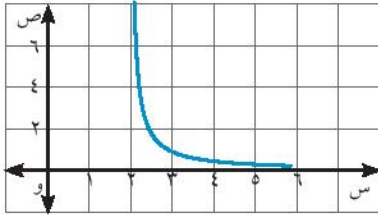
٦ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



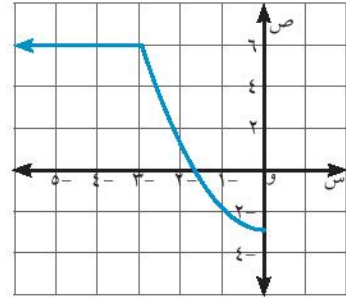
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

أولاً: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانياً: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثاً: حدد مجال ومدى الدالة في كل حالة وبين أى الأشكال البيانية تمثل منحنى دالة احادية.

٧ في كل من الدوال المعرفة كما يلي حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا، مع توضيح السبب.

ج د (س) = $س^٣ + ١$

ب د (س) = $\frac{١ + س^٢}{٢ - س}$

أ د (س) = $س^٣ + ١$

هـ د (س) = $س^٤ + س^٢ + ١$

د د (س) = $س^٢ - س - ٣$

سوف تتعلم

▶ اطراد الدوال.

▶ استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية

▶ اطراد. Monotony

▶ دالة تزايدية. Increasing Function

▶ دالة تناقصية.

Decreasing Function

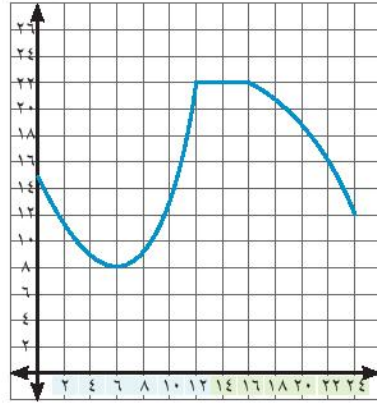
▶ دالة ثابتة. Constant Function

الأدوات المستخدمة

▶ آلة حاسبة علمية

▶ برامج رسومية للحاسوب

درجات الحرارة (°C)



الزمن

فكر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة في أحد الأيام ، لاحظ التغير في درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ فترات تناقص درجات الحرارة.

ب فترات تزايد درجات الحرارة

ج فترات ثبات درجات الحرارة.

تساعدنا صفات منحنيات الدوال في معرفة سلوك الدالة وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبات (د(س) كلما زادت س وهو ما يعرف باطراد الدالة.

تعلم

تزايد الدالة :

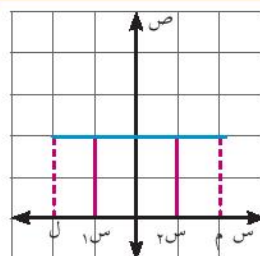
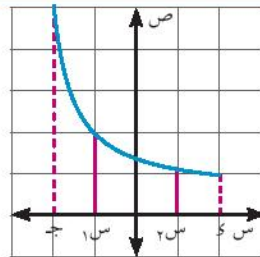
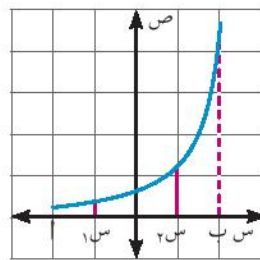
يقال للدالة د أنها **تزايدية** في الفترة [أ ، ب] إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [أ ، ب]$ حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $d(s_1) < d(s_2)$

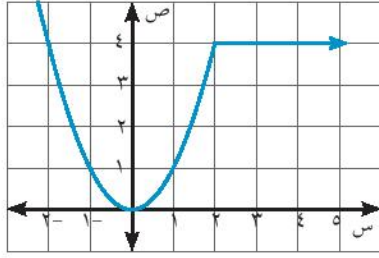
تناقص الدالة :

يقال للدالة د أنها **تناقصية** في الفترة [أ ، ب] إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [أ ، ب]$ حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $d(s_1) > d(s_2)$

ثبات الدالة :

يقال للدالة د أنها **ثابتة** في الفترة [أ ، ب] إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [أ ، ب]$ حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $d(s_1) = d(s_2)$





مثال

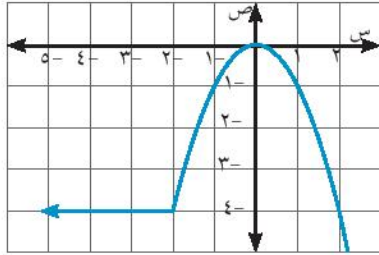
١ ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

الحل

◀ الدالة تناقصية في الفترة $[-\infty, 0]$

◀ الدالة تزايدية في الفترة $[0, 2]$

◀ الدالة ثابتة في الفترة $[2, \infty]$



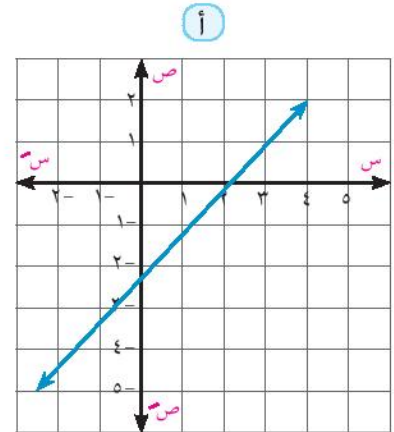
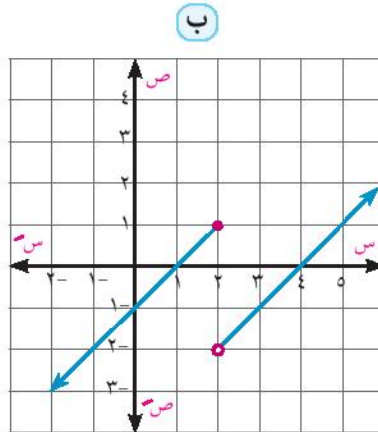
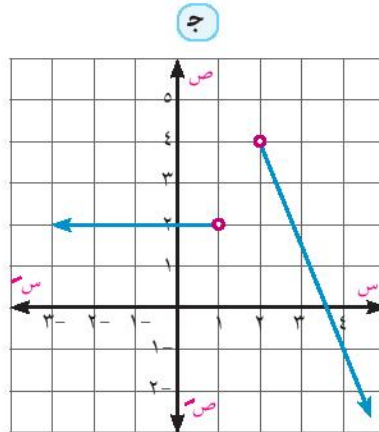
٢ حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل:

ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ← ص ، حيث ص = د(س) استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.



الحل

أ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

ب مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

ج مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

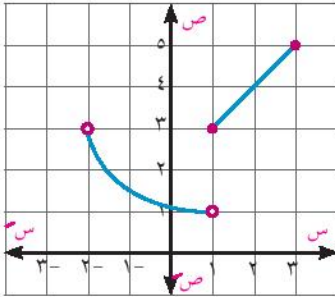
د مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

هـ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

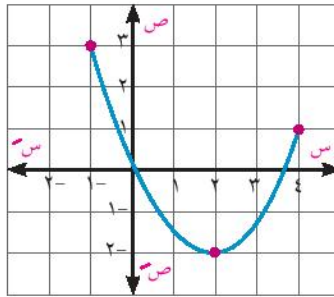
٤ حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرافها:

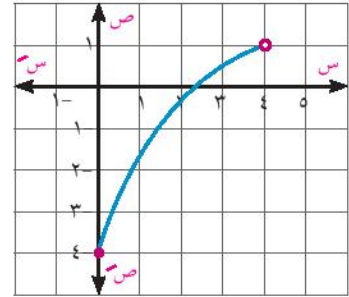
ج



ب



أ



تفكير ناقذ: أى من الأشكال السابقة يمثل دالة إحادية؟ فسر إجابتك

استخدام البرامج الرسومية فى دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانياً ، ومن أشهرها برنامج GeoGebra المجانى للتابلت أو الحاسوب.

نشاط

استخدم برنامج جيوجبرا فى عمل التحويلات الهندسية للدوال

باستخدام برنامج GeoGebra مثل بيانياً الدالة د حيث: $D(s) = s^3 - 3s^2 + 2$ ، ومن الرسم:

أ

أوجد مجال ومدى الدالة.

ب

ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها

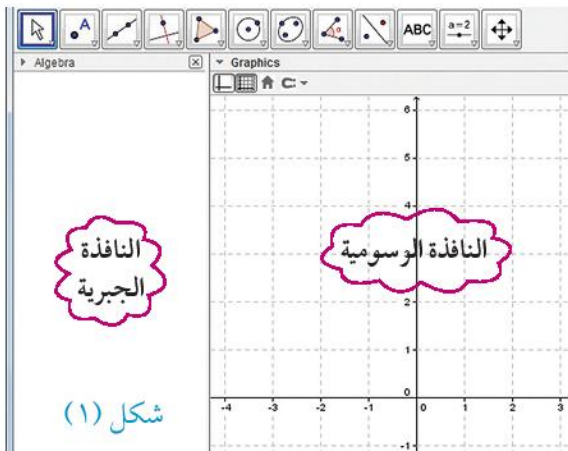
زوجية أو فردية أو غير ذلك.

لتمثيل الدالة بيانياً اتبع الخطوات التالية:

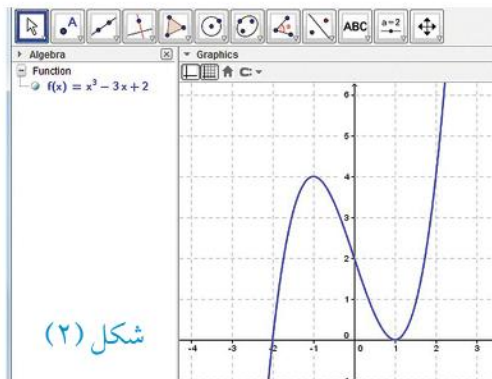
١- افتح نافذة الجبر والرسم البياني من برنامج (GeoGebra)

ثم اضغط **Graphics** واختر  لتصل إلى

النافذة المبينة فى شكل (١).



شكل (١)



شكل (٢)

٢- فى النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة

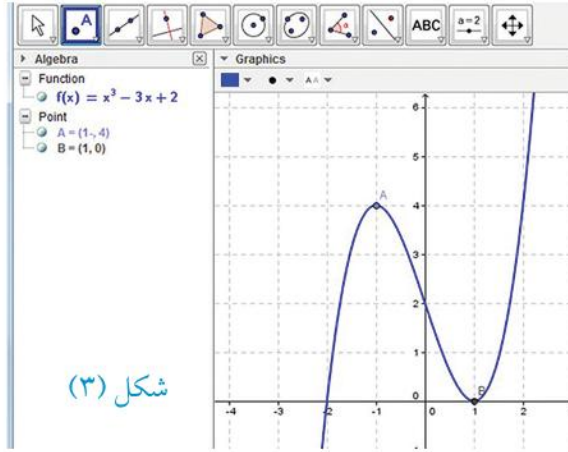
$D(s) = s^3 - 3s^2 + 2$ بمربع الادخال (input)

على النحو التالى:

إبدأ $\rightarrow$ 

ثم اضغط  فيظهر فى النافذة البيانية منحنى الدالة،

وفى النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما فى شكل (٢)



شكل (٣)

٣- لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر

من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى في النافذة الرسومية كما يظهر إحداثي النقطة في النافذة الجبرية كما في شكل (٣).

من الشكل البياني للدالة نجد:

أ مجال د = $]-\infty, \infty[$ ، مدى د = $]-\infty, \infty[$

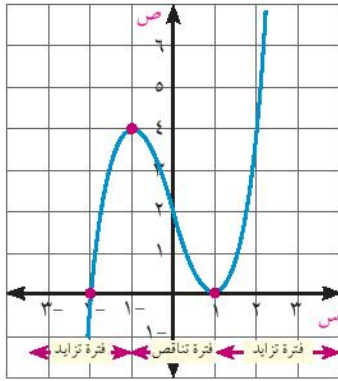
ب الدالة تزايدية في $]-\infty, 1[$ ، تناقصية في $]1, 2[$ ، تزايدية في $]2, \infty[$ كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ:

النقطة $(2, 0)$ هي نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة ليست دالة أحادية.

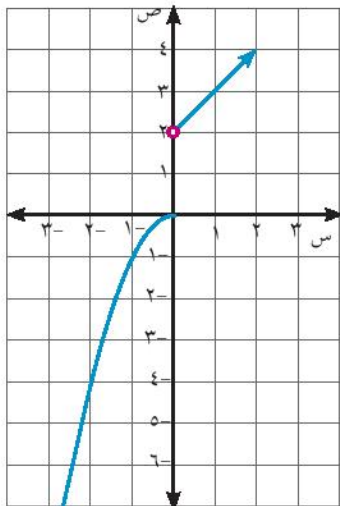
تدريب على النشاط

باستخدام برنامج Geogebra ارسم منحنى الدالة د: $(س) = ٣س - ٣س^٢$ ومن الرسم ابحث اطراف الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

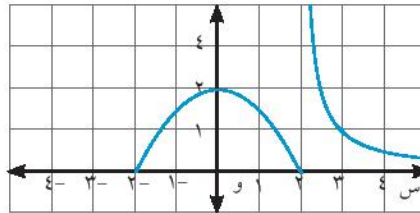


تمارين ١ - ٣

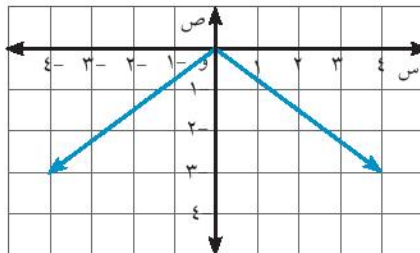
١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطار:



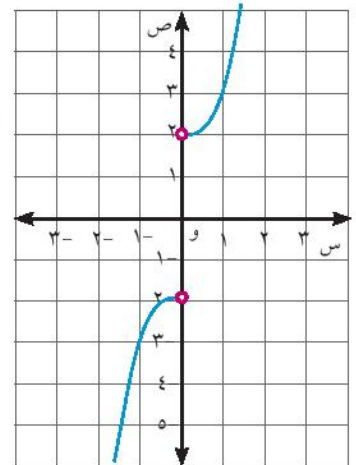
شكل (٤)



شكل (٢)



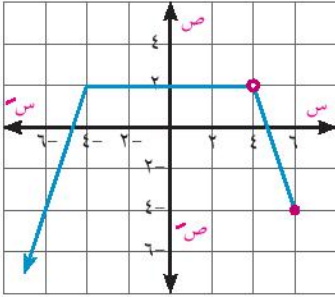
شكل (٣)



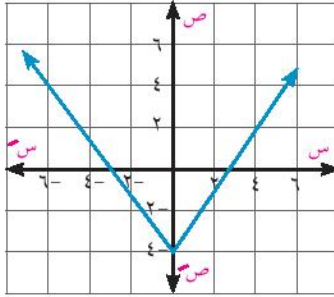
شكل (١)

٢ حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

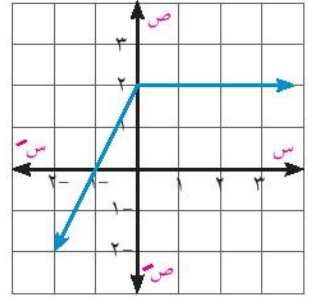
ج



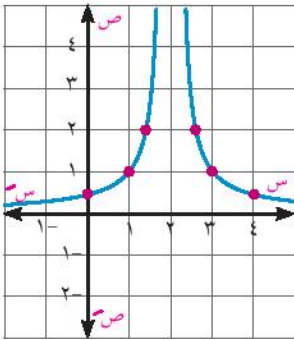
ب



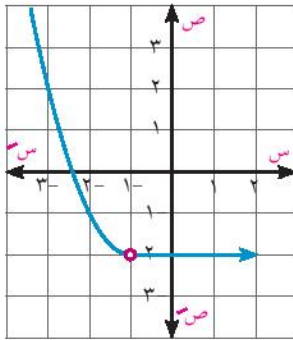
أ



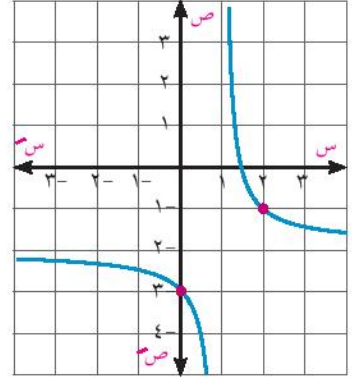
٩



٥



د



٣ إذا كانت د: $[-2, 6]$ ← ع

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -2 \leq x \leq 6 \\ \text{عندما } 1 \leq x \leq 6 \end{array} \right\} = (x)$$

أ ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب هل د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

٤ تفكير ابداعي

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometrical Transformations

١ - ٤

Polynomial Functions

الدالة كثيرة الحدود

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التي قاعدتها على الصورة:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0$$

حيث: $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ ، $a_n \neq 0$ ، $n \in \mathbb{N}$

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة n ، ودرجة كثيرة الحدود هي أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل s .

لاحظ:

١- إذا كان $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ ، فإن $D(s)$ تسمى كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالاً خطية، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالاً تربيعية، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالاً تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

٥- تتساوى دالتا كثيرتا الحدود $D(s)$ و $R(s)$ إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى s المتناظرة فيهما متساوية.

مثال

١ إذا كان $D(s) = 2s^2 + 5s + 10$ ، $R(s) = 3s^2 + 4s + 20$ ، أوجد قيمتي s ، جـ.

$$D(s) = 2s^2 + 5s + 10 = R(s) = 3s^2 + 4s + 20$$

الحل:

$$D(s) = 2s^2 + 5s + 10 = R(s) = 3s^2 + 4s + 20$$

$$2s^2 + 5s + 10 = 3s^2 + 4s + 20$$

$$-s^2 + s - 10 = 0$$

$$s^2 - s + 10 = 0$$

$$s^2 - s + 10 = 0$$

حاول أن تحل

١ إذا كان $D(s) = 2s^2 + 5s + 10$ ، $R(s) = 3s^2 + 4s + 20$ ، أوجد قيم s ، جـ التي تجعل $D(s) = R(s)$

$$D(s) = 2s^2 + 5s + 10 = R(s) = 3s^2 + 4s + 20$$

سوف تتعلم

دوال كثيرة الحدود (الدالة

الخطية - الدالة التربيعية -

الدالة التكعيبية)

دالة المقياس (القيمة المطلقة)

الدالة الكسرية

استخدام التحويلات الهندسية

للدالة D في رسم المنحنيات

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

التحويلات الهندسية لبعض

الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

Transformation تحويل

Translation انتقال

Reflection انعكاس

Vertical رأسي

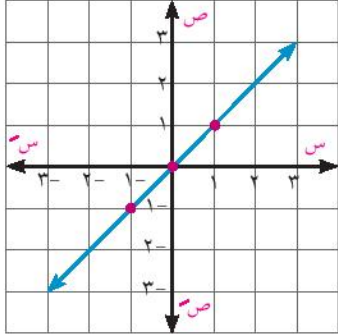
Horizontal أفقي

Asymptotes خط تقارب

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

برامج رسومية للحاسوب.



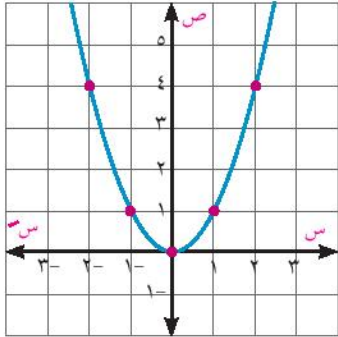
تعلم

فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:

(١) د(س) = س

الدالة تربط العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١

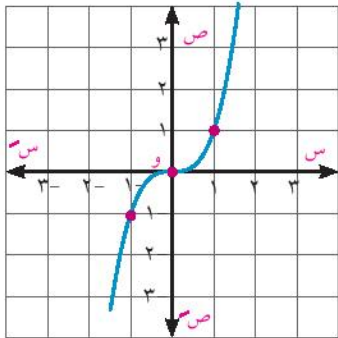
(تحقق من: مدى د = ح، د فردية، د تزايدية في ح)



(٢) د(س) = س^٢

الدالة تربط العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات، ونقطة رأس المنحنى هي (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د = ح، د زوجية، د تناقصية في]٠، -∞[، تزايدية في]٠، ∞[)



(٣) د(س) = س^٣

الدالة تربط العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هي (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د = ح، د فردية، د تزايدية في ح)

مثال

(٢) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

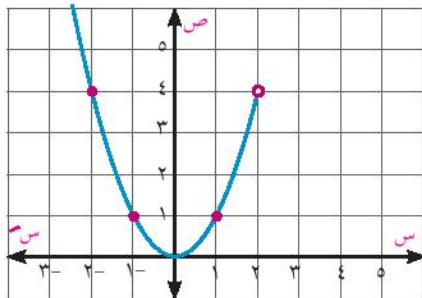
$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س > ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$

الحل

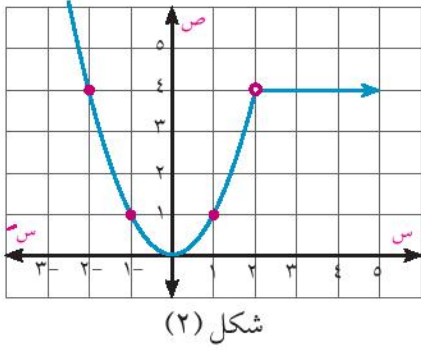
(١) عندما س > ٢، د(س) = س^٢

نرسم د(س) = س^٢ لكل س ∈]٢، ∞[

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما في شكل (١)



شكل (١)



٢) عندما $s < 2$: $d(s) = 4$

ترسم الدالة الثابتة $d(s) = 4$ لكل $s \in [2, \infty)$

على نفس الشكل البياني كما في شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة $d = [-3, \infty)$ ، ومدى $d = [0, 4]$

٩) حاول أن تحل

٢) ارسم الشكل البياني للدالة d حيث:

$$d(s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s > 0 \\ s & \text{عندما } s \leq 0 \end{cases}$$

ثم استنتج مدى الدالة وابحث أطرافها.

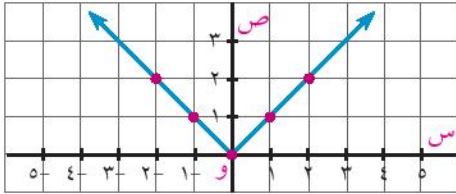
The Absolute Value Function

دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة):

تعلم

أبسط صورة لدالة المقياس هي $d(s) = |s|$ ، $s \in \mathbb{R}$
وتعرف كما يلي:

$$d(s) = \begin{cases} s & \text{عندما } s \geq 0 \\ -s & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$



لاحظ أن: $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{(2-)^2}$ ، $0 = |0|$ ، $3 = |3| = |3-|$

أي أن: $|s| \leq 0$ ، $|s| = -s$ ، $|s| = \sqrt{s^2}$

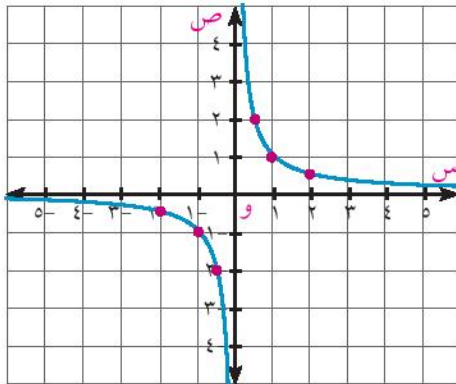
الدالة d يمثلها شعاعان يبدأان من النقطة $(0, 0)$ ميل أحدهما 1 ، وميل الآخر -1

(تحقق من: مدى $d = [0, \infty)$ ، زوجية ، تناقصية في $[-\infty, 0]$ ، وتزايدية في $[0, \infty)$)

Rational Function

الدالة الكسرية

تعلم



أبسط صورة للدالة الكسرية هي:

$$d(s) = \frac{1}{s} , s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

الدالة d تربط العدد بمعكوسه الضربي ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله $(0, 0)$ ويتكون من جزأين أحدهما يقع في الربع الأول والآخر يقع في الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولا يقطعهما ($s = 0$ ، $v = 0$ خطا تقارب للمنحنى)

(تحقق من: مدى $d = \mathbb{R} - \{0\}$ ، فردية ، تناقصية في $[-\infty, 0]$ ، وتناقصية أيضًا في $[0, \infty)$)

٩) حاول أن تحل

$$٣) \text{ ارسم الشكل البياني للدالة } d \text{ حيث } d(s) = \begin{cases} |s| & \text{عندما } s \geq 0 \\ \frac{1}{s} & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

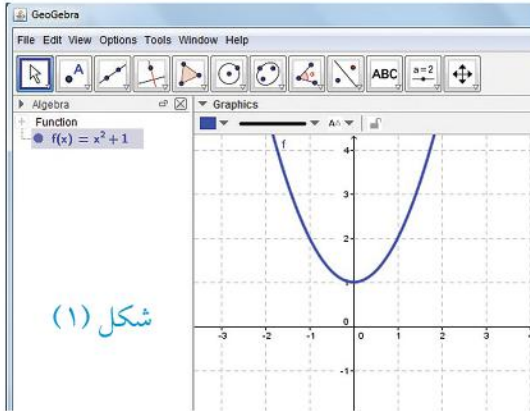
ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث أطرافها.

Transformations of Graphs

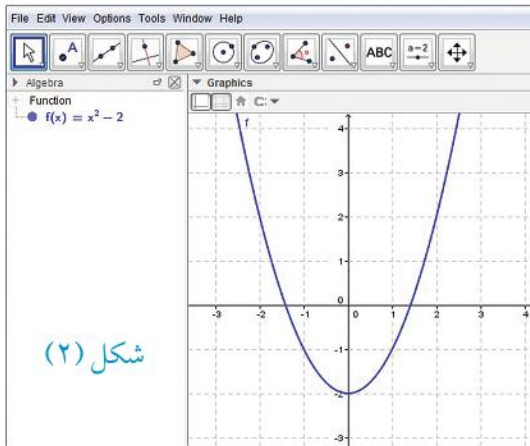
التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

Vertical Translation

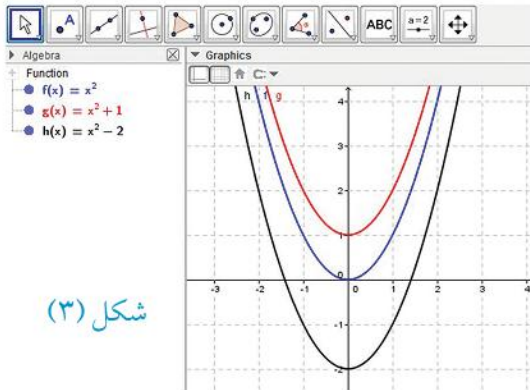
أولاً: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

عمل تعاوني



اعمل مع زميل

(١) ارسم منحنى الدالة د: $(س) = س^٢$ باستخدام برنامج **Geogebra**

(٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسياً لأعلى وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبّر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = $س^٢ + ١$ كما في شكل (١).

(٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط $(٢, ٠)$ ، $(٣, ٠)$ وسجل ملاحظتك في كل مرة.

(٤) اسحب منحنى د(س) = $س^٢$ وحدتين رأسياً إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبّر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = $س^٢ - ٢$ كما في شكل (٢).

فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = $س^٢ - ٥$ باستخدام منحنى د(س) = $س^٢$ ؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = $س^٢$ ، ر(س) = $س^٢ + ١$ ، ق(س) = $س^٢ - ٢$ فإن:

(١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

(٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

تفكير ناقد: باستخدام منحنى د(س) = $س^٢$ بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

(أ) ر(س) = $س^٢ + ٤$ (ب) ق(س) = $س^٢ - ٥$

تعلم



رسم المنحنى ص = د(س) + أ

لأي دالة د: يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات في اتجاه
 ↖ ص ، عندما $أ < ٠$ ، وفي اتجاه ↗ ص عندما $أ > ٠$.

مثال

٣) بين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق

صورة للدالة د بإزاحة رأسية

اكتب قاعدة كل من ر، ق حيث د(س) = |س|

الحل

•• منحني الدالة ر هو نفس منحني الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و ص

$$ر(س) = د(س) + ٣$$

$$•• د(س) = |س| \quad ر(س) = |س| - ٣$$

•• منحني الدالة ق هو نفس منحني الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص

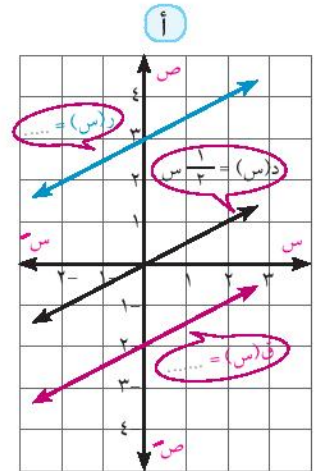
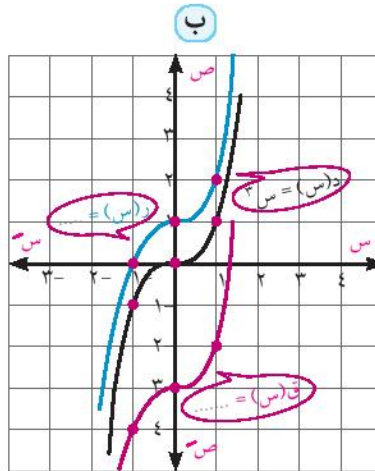
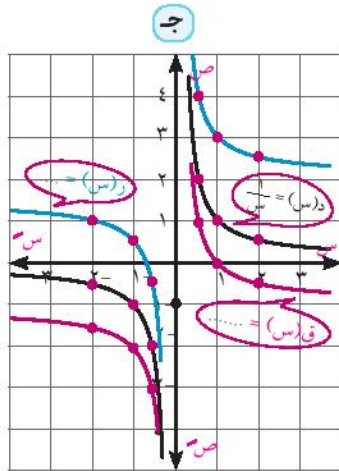
$$ق(س) = د(س) + ٢$$

$$•• د(س) = |س| \quad ق(س) = |س| + ٢$$

٦ حاول أن تحل

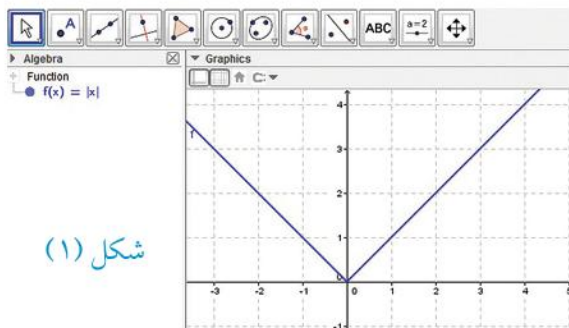
٤) تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية،

اكتب قاعدة كل من ر، ق في كل شكل .



Horizontal Translation

ثانياً: الإزاحة الأفقية لمنحني الدالة



شكل (١)

اعمل مع زميل:

عمل تعاوني

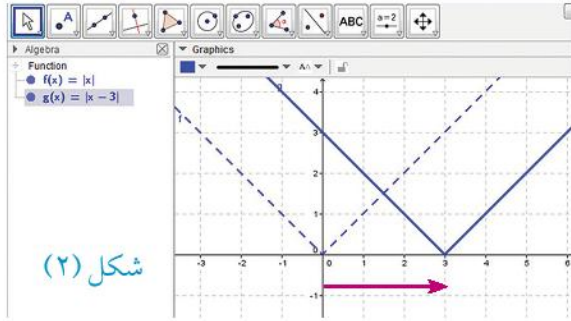
١) ارسم منحني الدالة د: د(س) = |س| مستخدماً

برنامج Geogebra بكتابة قاعدة الدالة في مربع

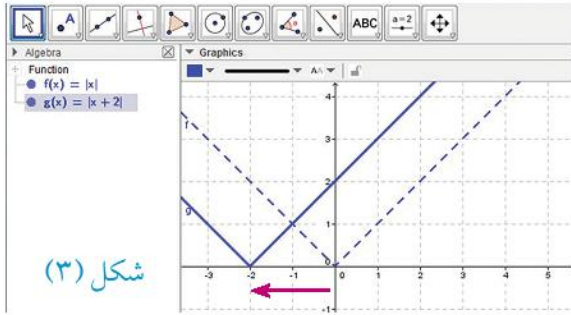
الإدخال على النحو التالي: abs(x) ثم اضغط إدخال

فيظهر منحني الدالة في النافذة البيانية وقاعدتها

|f(x)| = |x| في النافذة الجبرية كما في شكل (١)



٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًا في الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة في النافذة الجبرية كما في شكل (٢)



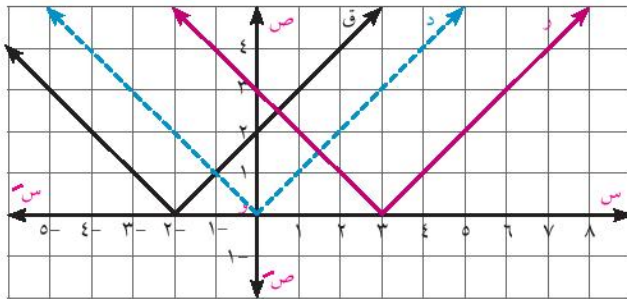
٣) اسحب منحنى الدالة أيضًا في الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما في شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟

فكر: بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) = |س - ٥|، ق(س) = |س + ٤|.

تعلم



رسم المنحنى ص = د(س + ١) لأي دالة د؛ يكون المنحنى، ص = د(س + ١) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها ١ من الوحدات في اتجاه وس عندما يكون $٠ < ١$ ، وفي اتجاه وس عندما يكون $٠ > ١$.



لاحظ: في الشكل المقابل: د(س) = |س|،

١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وس
 •• ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه وس
 •• ق(س) = |س + ٢|، نقطة بدء الشعاعين (٠، ٢)

مثال

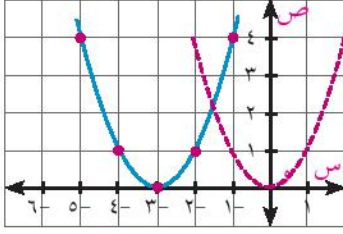


٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

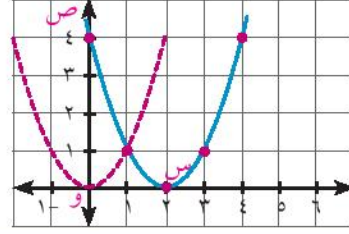
ب) ع(س) = (س + ٣)^٢

أ) ر(س) = (س - ٢)^٢

الحل



منحنى $ع$ $(س) = (س + 3)^2$ هو منحنى $د$ $(س) = س^2$ بإزاحة 3 وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هي $(0, -3)$.



منحنى $ر$ $(س) = (س - 2)^2$ هو منحنى $د$ $(س) = س^2$ بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هي $(2, 0)$.

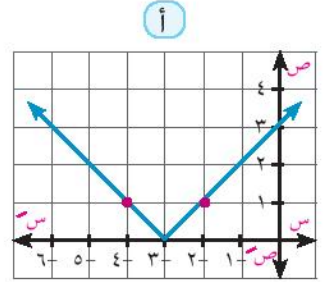
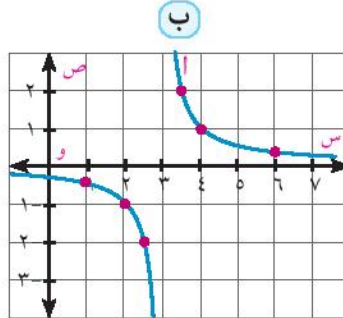
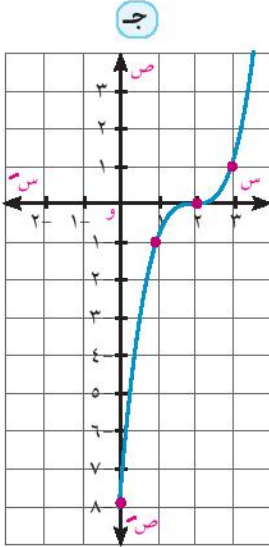
٦ حاول أن تحل

٥ استخدم منحنى الدالة $د$ حيث $(س) = س^2$ لتمثيل كل من الدالتين $ر$ ، $ع$ حيث:

ب $ع$ $(س) = (س - 3)^2$

أ $ر$ $(س) = (س + 4)^2$

٦ اكتب قاعدة الدالة $د$ الممثلة بيانياً بالأشكال التالية:



تفكير ناقده: إذا كان $(س) = س^2$ ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة $ر$ حيث $(س) = (س - 3)^2 + 2$

رسم المنحنى $ص = د(س + 1) + ب$

مما سبق نستنتج أن: المنحنى $ص = د(س + 1) + ب$ هو نفس منحنى $ص = د(س)$ بإزاحة أفقية قدرها 1 من الوحدات

(في اتجاه $س > 0$ ، وفي اتجاه $س < 0$ عندما $1 < 0$)، ثم إزاحة رأسية قدرها $ب$ من الوحدات

(في اتجاه $ص > 0$ عندما $ب < 0$ ، وفي اتجاه $ص < 0$ عندما $ب > 0$)

٤ حاول أن تحل

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث $(س) = س^2$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

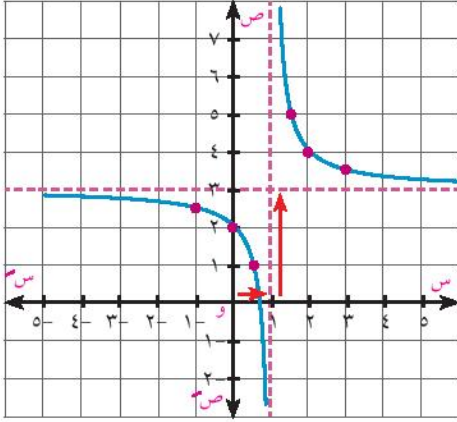
ب $(س) = (س - ٣) - ٢$ ع

أ $(س) = (س + ٢) - ٤$ ر

مثال

٥ ارسم منحنى الدالة ر حيث $(س) = \frac{1}{١-س} + ٣$ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرافها:

الحل



منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث $(س) = \frac{1}{س}$
 بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه وس $(١ = ١ - ٠ > ٠)$ ، ثم
 إزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وص وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هي النقطة $(١, ٣)$ ، مدى ر = ع - $\{٣\}$
 اطراف الدالة ر:

ر تناقصية في $[-\infty, ١)$ ، وتناقصية أيضًا في $(١, \infty]$

تفكير ناقداً: هل يمكن القول بأن $(س) = \frac{1}{١-س} + ٣$ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

٤ حاول أن تحل

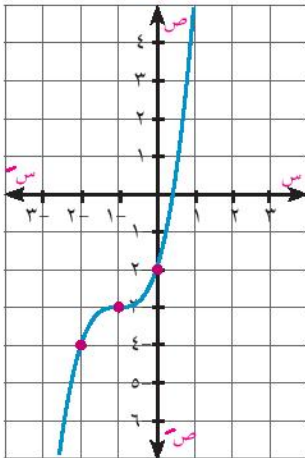
٨ استخدم منحنى الدالة د حيث $(س) = \frac{1}{س}$ ، لتمثيل كل من:

ب $(س) = \frac{٣-س}{٢-س}$ ق

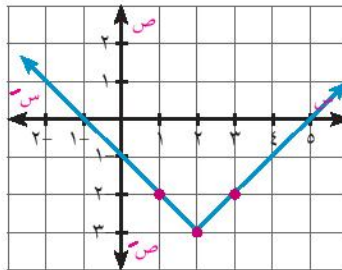
أ $(س) = \frac{1}{٢+س} + ١$ ر

٩ اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانياً بالأشكال التالية :

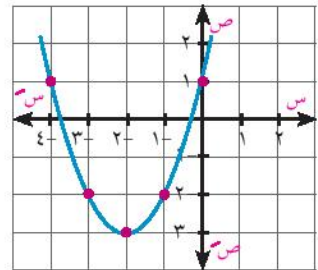
ج



ب

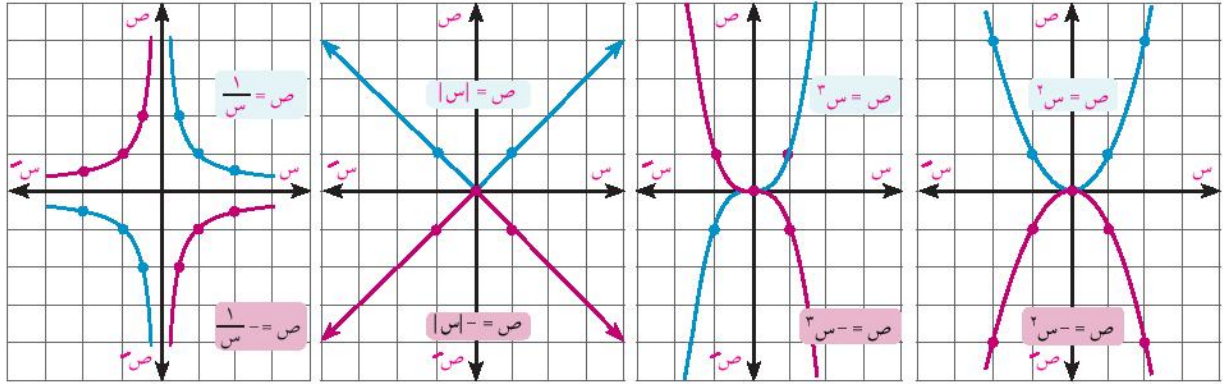


أ



ثالثاً: انعكاس منحنى الدالة في محور السينات

تبين الأشكال التالية انعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية في محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج ؟

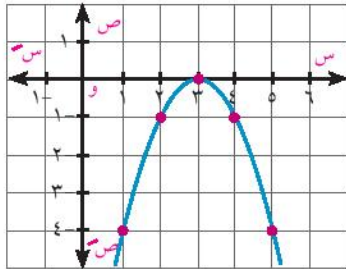
تعلم

رسم المنحنى $y = -x$ (د)

لأي دالة د، يكون المنحنى $y = -d(x)$ هو نفس منحنى $y = d(x)$ بانعكاس في محور السينات

مثال

استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

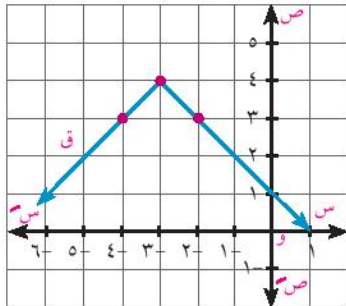


٦ باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر، ق، ع حيث:

أ ر(س) = -(س - ٣)² ب ق(س) = (س) - ٤ - |س + ٣|

ج ع(س) = ٢ - ١/س

الحل

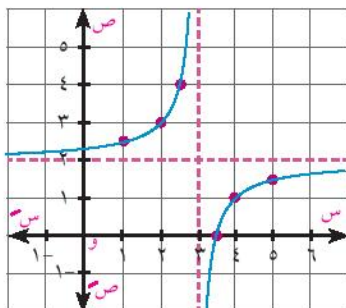


أ منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = س² في محور السينات،

ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه ← و س، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.

ب منحنى ق(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = |س| في محور السينات،

ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه ← و س، وإزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات في اتجاه ← و ص، وتكون نقطة بدء الشعاعين هي النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



ج منحنى ع(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = ١/س

في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه ← و س، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه ← و ص، وتكون نقطة تماثل المنحنى هي (٣، ٢)

٦ حاول أن تحل

١٠ في كل مما يأتي ارسم منحنى الدالة ر حيث:

ب) ر(س) = - (س - ٣)²

أ) ر(س) = ٣ - (س + ١)²

ج) ر(س) = ٣ - |س - ٥|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

مثال

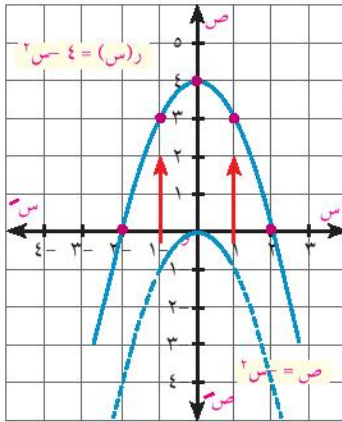
استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

٧ مستخدماً التحويل المناسب، ارسم منحنىي الدالتين ر، ق حيث ر(س) = ٤ - س²، ق(س) = |٤ - س²|

الحل

أولاً: رسم منحنى الدالة ر

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د: د(س) = س² بانعكاس في محور السينات، ثم إزاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات في اتجاه ↖ و يوضحه شكل (١)



شكل (١)

ثانياً: رسم منحنى الدالة ق

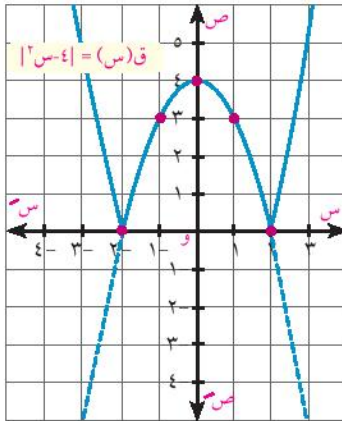
٠٠ ق(س) = |٤ - س²| ٠ ق(س) = |٤ - س²|

فيكون الإحداثي الصادي لجميع نقط منحنى الدالة ق موجباً حيث:

ص = |٤ - س²|

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } ر(س) \leq ٠ \\ \text{عندما } ر(س) > ٠ \end{array} \right\} = \text{ص}$$

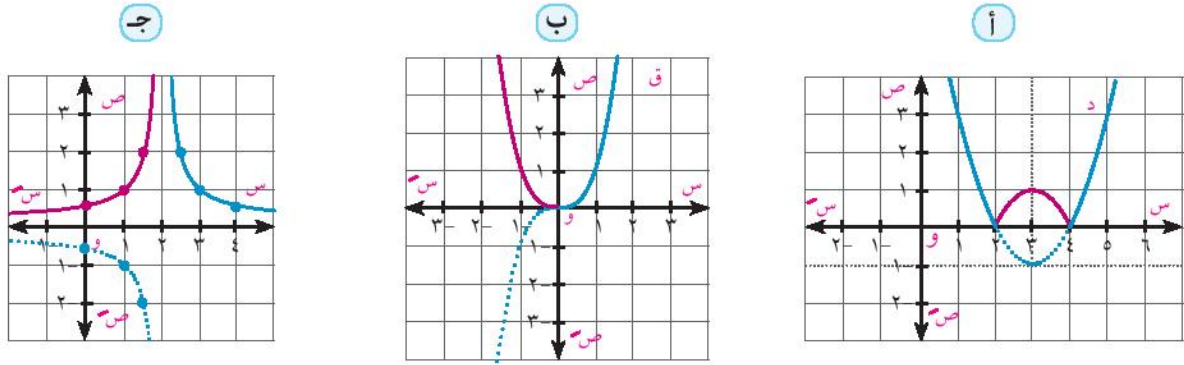
أي أن منحنى الدالة ق يقع في الربعين الأول والثاني فقط وهذا يعني إنعكاساً لمنحنى الدالة ر لكل ر(س) > ٠ في محور السينات كما في شكل (٢).



شكل (٢)

٩ حاول أن تحل

١١ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:



Expanding of graphs

رابعاً: تمديد منحنى الدالة:

عمل تعاوني

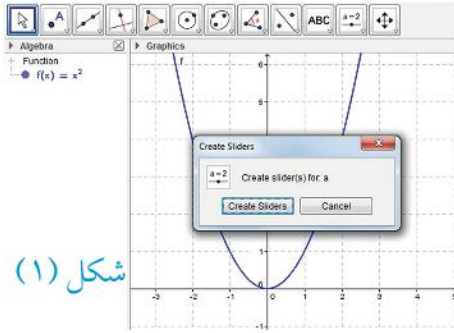
رسم منحنى ر (س) = د (س) = أ (س)
اعمل مع زميل.

١ ارسم منحنى الدالة د: د (س) = س^٢ باستخدام برنامج Geogebra
وفي مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

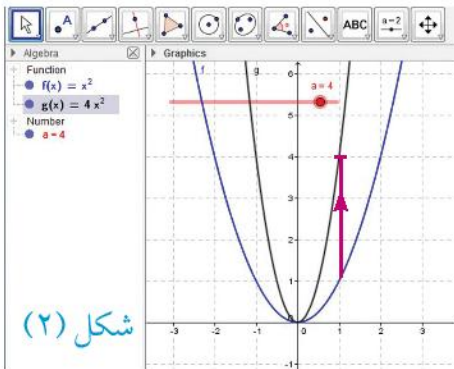
إبدأ → a $\times$ 2 ←

لتظهر لك نافذة جديدة (شكل ١)

إختر منها Create sliders

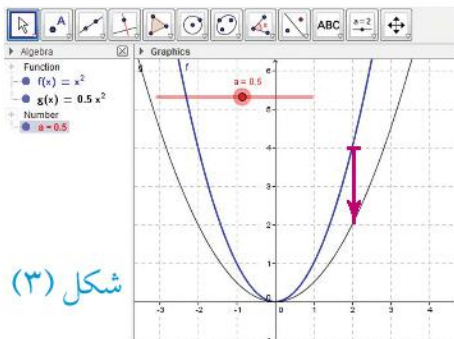


شكل (١)



شكل (٢)

٢ استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم أخرى لها حيث $a > 1$
ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د
لكل س $\exists$ ع كما في شكل (٢) وعندما $a < 1$
كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ؟ وماذا تستنتج؟



شكل (٣)

تعلم

رسم المنحنى ص = د (س)
لأي دالة د: يكون المنحنى ص = د (س) هو تمديد رأسي
لمنحنى ص = د (س) إذا كان $a < 1$ ،
وإنكماش رأسي لمنحنى ص = د (س) إذا كان $a > 1$.

رسم منحنى الدالة ر: $(س) = د (س + ب) + ج$

مثال

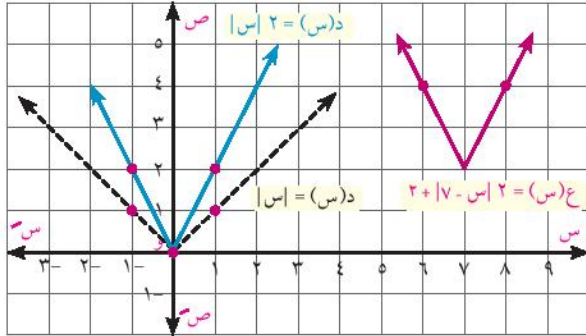
استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

٨ استخدام منحنى الدالة د حيث $(س) = د(س)$ لتمثيل كل من الدالتين ر، ع:

أ) ر $(س) = ٢ |س|$ ب) ع $(س) = ٢ |س - ٧| + ٢$

الحل

أ



منحنى ر $(س)$ هو تمديد رأسى لمنحنى الدالة د
معاملة $٢ = ٠ < ٢$ وعلي ذلك فإن:
لكل $(س، ص) \Rightarrow$ بيان د
يكون $(س، ٢ ص) \Rightarrow$ بيان ر

ب

منحنى ع $(س)$ هو نفس منحنى ر $(س)$ بإزاحة
أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه وس ← ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه وص ←

٩ حاول أن تحل

١٢ استخدام منحنى الدالة د حيث $(س) = س^٢$ لتمثيل الدالتين ر، ع:

أ) ر $(س) = -\frac{١}{٣} س^٢$ ب) ع $(س) = ٢ - \frac{١}{٣} (س - ٥)^٢$

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرادها.

نشاط

تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

Trigonometric functions

الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب)

First: Translation on X - axis

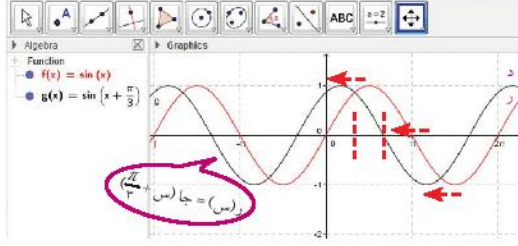
أولاً: الإزاحة في اتجاه محور السينات

١ استخدام برنامج جيوجبرا (GeoGebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدرج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدرج (π) .

٢ فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: $\sin(x)$ ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط - منقط، شرطى، متصل، ...).

٣ بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: $\sin(x + (\pi/3))$ أى: ص = جا (س + $\pi/3$) ثم اضغط (enter) ولون هذا المنحنى بلون آخر.

٤ قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟



من الرسم نستنتج أن:

تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوي $\pi/3$ (كما في الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو $[-1, 1]$ وهو نفس

مدى الدالة جا س، كما نلاحظ أن الدالة جا (س + $\pi/3$) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لا يوجد تماثل لمنحنها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

فكر:

ماذا نتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هي: جا (س - $\pi/3$).

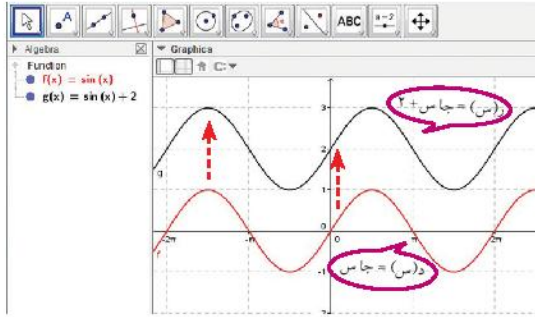
Second: Translation on Y-axis

ثانياً: الإزاحة في اتجاه محور الصادات

١ ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = جا س كما سبق.

٢ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = جا س + ٢

بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟



من الرسم نستنتج أن

منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة جا س، بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

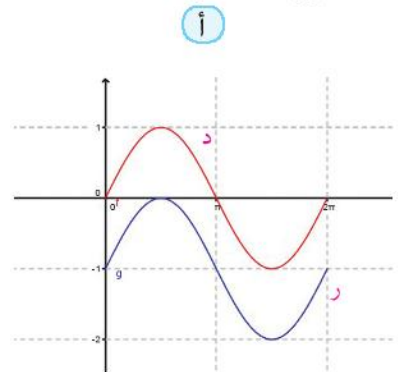
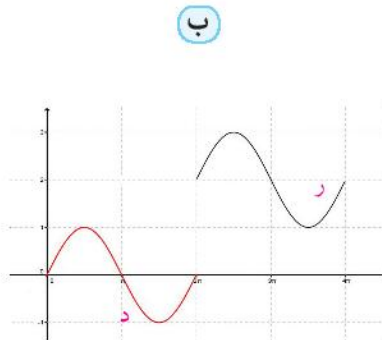
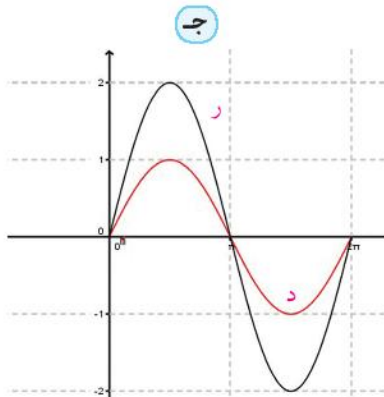
ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو $[1, 3]$ ؛ لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور

الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة جا س + ٢ ليست زوجية وليست فردية.

تفكير ناقد:

في كل من الأشكال الآتية:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتي ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر بدلالة د وحدد مداها وابحث اطرادها.





تمارين ١ - ٤



١ حدد قيم a ، b ، c التي تجعل $d(s) = r(s)$ حيث

$$d(s) = (s) = (a+b)s^2 + 3s - 2, \quad r(s) = (s) = 5s^2 + (a+b)s + 2$$

٢ ارسم منحنى الدالة d ، ومن الرسم حدد مداها وابتحث اطرافها

$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } s > 2 \\ \text{عندما } s \leq 2 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} 4 \\ s^2 \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } s > 0 \\ \text{عندما } s < 0 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} s \\ s^2 \end{array}$
$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } s > 1 \\ \text{عندما } s < 1 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} \frac{1}{s} \\ s \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } s > 1 \\ \text{عندما } s < 1 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} s^3 \\ 1 \end{array}$

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

٣ منحنى $r(s) = s^2 + 4$ هو نفس منحنى $d(s) = s^2$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:

☐ أ $\overleftarrow{\text{وس}}$
☐ ب $\overleftarrow{\text{وس}}$
☐ ج $\overleftarrow{\text{وص}}$
☐ د $\overleftarrow{\text{وص}}$

٤ منحنى $r(s) = (s) = |s + 3|$ هو نفس منحنى $d(s) = |s|$ بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:

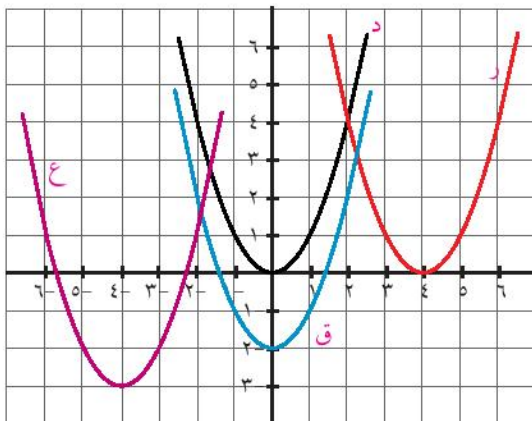
☐ أ $\overleftarrow{\text{وس}}$
☐ ب $\overleftarrow{\text{وس}}$
☐ ج $\overleftarrow{\text{وص}}$
☐ د $\overleftarrow{\text{وص}}$

٥ نقطة رأس منحنى الدالة $d(s) = (s) = (s - 2)^2 + 3$ هي:

☐ أ $(2, 3)$
☐ ب $(2, -3)$
☐ ج $(-2, 3)$
☐ د $(-2, -3)$

٦ نقطة تماثل منحنى الدالة d حيث $d(s) = (s) = \frac{1}{s-3} + 4$ هي:

☐ أ $(3, -4)$
☐ ب $(-3, -4)$
☐ ج $(4, -4)$
☐ د $(-4, -3)$



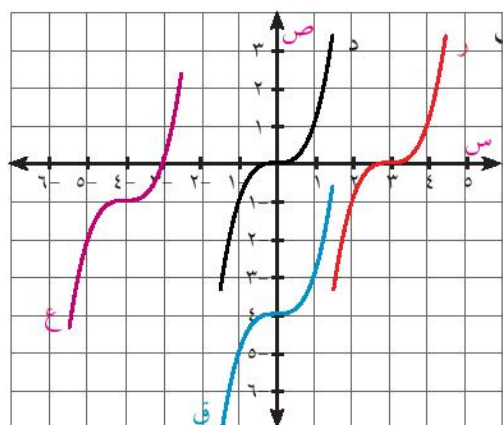
٧ رسم منحنى الدالة d حيث $d(s) = (s) = s^2$ ثم أزيح في

اتجاه محوري الإحداثيات

كما في الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

أ، ب، ج، د

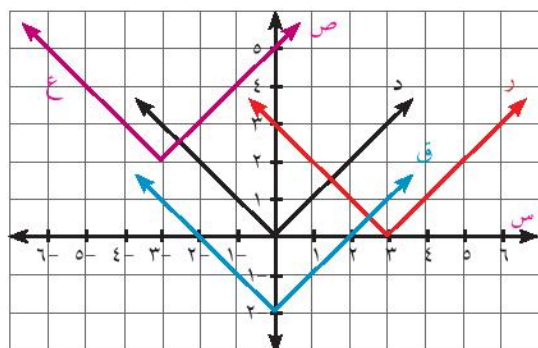


٨ في الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث

د(س) = س^٣ ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

ر، ق، ع



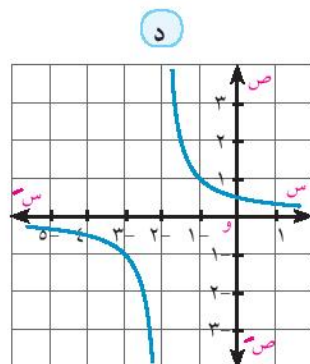
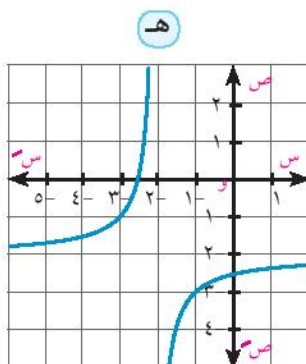
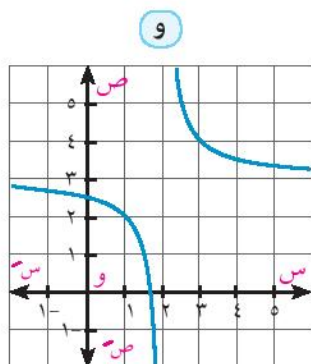
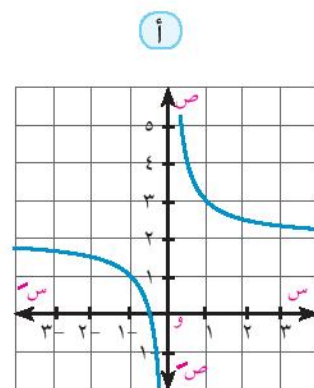
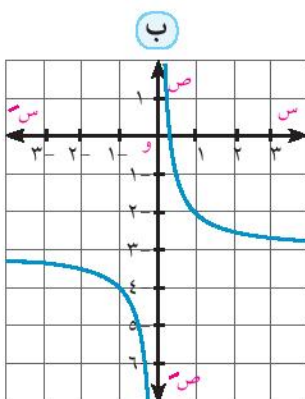
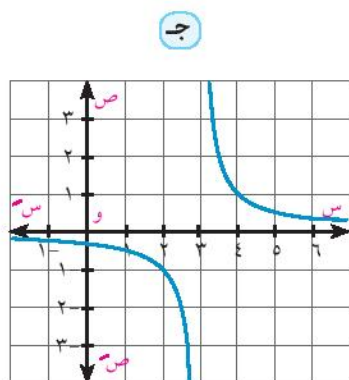
٩ رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|

ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات
كما في الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

ر، ق، ع

١٠ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ ، ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات. اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:



١١) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ) د_١(س) = س^٢ - ٤ ب) د_٢(س) = س^٢ + ١ ج) د_٣(س) = (س + ١)^٢
 د) د_٤(س) = (س - ٣)^٢ هـ) د_٥(س) = (س - ١)^٢ - ٢ و) د_٦(س) = (س + ٣)^٢ - ١

١٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ) د_١(س) = |س| + ١ ب) د_٢(س) = |س| - ٣ ج) د_٣(س) = |س + ٢|
 د) د_٤(س) = |س - ٥| هـ) د_٥(س) = |س + ٢| + ١ و) د_٦(س) = |س - ٣| - ٢

ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

١٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٣. لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ) د_١(س) = (س - ٣) ب) د_٢(س) = (س + ١) ج) د_٣(س) = (س - ٢)
 د) د_٤(س) = (س + ٣) هـ) د_٥(س) = (س - ٢) - ١ و) د_٦(س) = (س + ٣) + ٢

ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

١٤) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

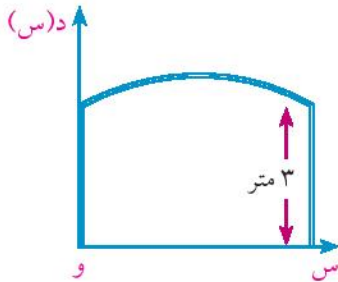
- أ) ق(س) = (س + ١) ب) ق(س) = (س - ٣) ج) ق(س) = (س + ٢)
 د) ق(س) = (س - ٤) هـ) ق(س) = (س + ٢) - ٥ و) ق(س) = (س - ٢) + ٢

١٥) ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرافها

- أ) د_١(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ٢ \text{ عندما } \text{س} \leq ٠ \\ \text{س}^٢ - ٢ \text{ عندما } \text{س} > ٠ \end{array} \right\}$ ب) د_٢(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ١ \text{ عندما } \text{س} \geq ٤ \\ \text{س}^٢ - ١ \text{ عندما } \text{س} < ٤ \end{array} \right\}$

د) د_٤(س) = $\frac{س^٢}{١ + س}$

ج) د_٣(س) = س - |س| - ١



١٦) ارسم منحنى الدالة د ، وحدد مداها إذا كان: د(س) = $\sqrt{١٦ - س^٢}$

١٧) الربط مع الصناعة: صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على

شكل جزء من منحنى الدالة د: د(س) = |س - ٢| + ٤ كما في الشكل

المقابل. أوجد:

- أ) قيمة | ب) أقصى ارتفاع للبوابة
 ج) عرض البوابة

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

أولاً: حل المعادلات

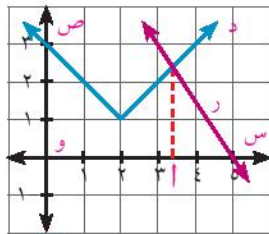
فكر وناقش

مثل بياناً في شكل واحد منحنى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة خطية. لاحظ الرسم ثم اجب:

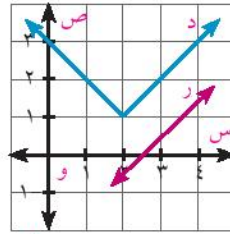
- ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنى الدالتين معاً؟
- إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنين معاً، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين؟
- استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

لاحظ أن:

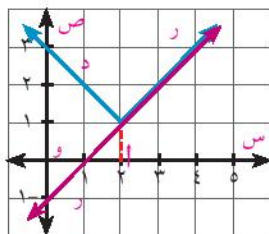
- عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: $D(x) = R(x)$ ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.
- لأي دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة $D(x) = R(x)$ هي مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



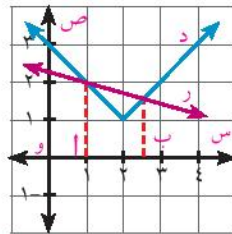
مجموعة الحل = {1}



مجموعة الحل = ϕ



مجموعة الحل = $[-\infty, 1]$



مجموعة الحل = {1, 3}

حل المعادلة: $|أ س - ب| = ج$

مثال

١ حل المعادلة: $|س - ٣| = ٥$ بياناً وجبرياً.

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بياناً
- حل معادلات المقياس جبرياً
- حل متباينات المقياس بياناً
- حل متباينات المقياس جبرياً
- نمذجة مشكلات وتطبيقات
- حياتية وحلها باستخدام
- معادلات ومتباينات المقياس

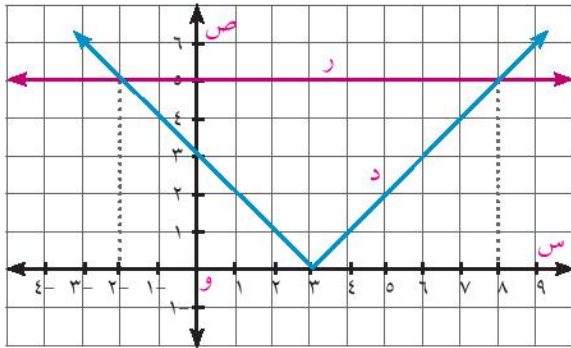
المصطلحات الأساسية

- Equation معادلة
- Inequality متباينة
- Graphical Solution حل بياني

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب

الحل



بوضع $د(س) = |س - ٣| - ٥$ ، $ر(س) = ٥$

(١) نرسم منحنى الدالة $د(س) = |س - ٣| - ٥$ بإزاحة منحنى

$د(س) = |س|$ ثلاث وحدات في اتجاه وس ←

(٢) على نفس الشكل نرسم $ر(س) = ٥$ ، حيث $ر$ دالة

ثابتة يمثلها مستقيم يوازي محور السينات ويمر

بالنقطة $(٥, ٠)$

∴ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين $(٥, ٢-)$ ، $(٥, ٨)$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{٨, ٢-\}$

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: $د(س) = \begin{cases} س - ٣ & \text{عندما } س \leq ٣ \\ ٣ - س & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$

عندما $س \leq ٣$: $٥ = ٣ - س$ أى أن: $س = ٨ \in]٣, \infty]$

عندما $س > ٣$: $٥ = س - ٣$ أى أن: $س = ٢- \in]-\infty, ٣]$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{٨, ٢-\}$ وهذا يطابق الحل البياني.

حاول أن تحل

١ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً وجبرياً.

ج $٥ = |س - ٧|$

ب $٠ = ١ + |س|$

أ $٠ = ٤ - |س|$

Properties of the Absolute Value

بعض خواص مقياس العدد

تعلم

(١) $||ب| \times |أ|| = |ب| \times |أ|$ فمثلاً:

$$٦ = ٣ \times ٢ = |٣-| \times |٢| \quad , \quad ٦ = |٦-| = |٣- \times ٢|$$

(٢) $|ب| + |أ| \geq |ب + أ|$

ويحدث التساوى فقط إذا كان العدداً $أ$ ، $ب$ لهما نفس الإشارة فمثلاً:

$$٩ = |٥| + |٤| = |٥ + ٤| \quad , \quad ٩ = |٥-| + |٤-| = |٥- ٤-|$$

لاحظ:

(١) إذا كان: $|س| = أ$ فإن: $س = أ$ أو $س = -أ$ لكل $أ \geq ٠$

(٢) إذا كان: $|أ| = |ب|$ فإن: $أ = ب$ أو $أ = -ب$ لكل $أ, ب \geq ٠$

(٣) $|س| = أ^٢$ $|س| = أ^٢$ إذا كان $|س| = أ^٢$ فإن $س \in]٠, \infty]$

(٥) إذا كان $|س| = -أ$ فإن $س \in]-\infty, ٠]$

حل المعادلة $|س + با| = جس + د$

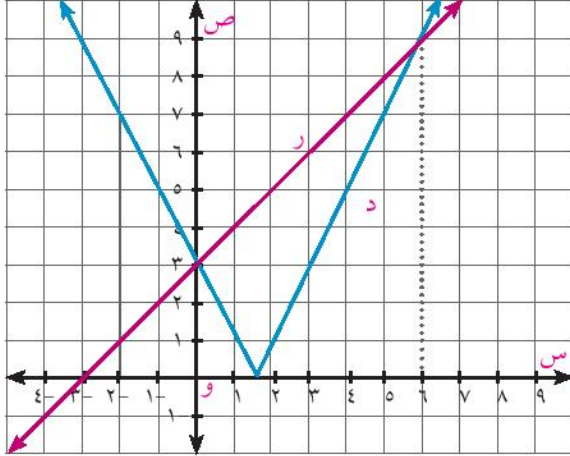
مثال

٢ حل المعادلة: $|س - ٢| = ٣ + س$ بيانيًا وجبريًا.

الحل

بوضع د(س) = $|س - ٢|$ ، ر(س) = $٣ + س$

الحل البياني:



د: د(س) = $|س - ٢| = |٣ - س|$

د(س) = $|٣ - س|$

منحنى د هو نفس منحنى $|س - ٢|$ بإزاحة أفقية

قدرها $\frac{٣}{٢}$ وحدة في اتجاه وس ←

ر: ر(س) = $٣ + س$ ويمثلها خط مستقيم ميله = ١ ويمر بالنقطة (٣, ٠)

نقط التقاطع هي (٣, ٥) ، (٩, ٩)

مجموعة حل المعادلة هي: $\{٣, ٥\}$

الحل الجبري:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } س \leq \frac{٣}{٢} \quad ٣ - س \\ \text{عندما } س > \frac{٣}{٢} \quad ٣ + س \end{array} \right\} = |س - ٢|$$

عندما $س \leq \frac{٣}{٢}$ تكون $٣ - س = ٣ + س$ ومنها $س = ٠$

عندما $س > \frac{٣}{٢}$ تكون $٣ + س = ٣ + س$ ومنها $س = ٥$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{٣, ٥\}$

٤ حاول أن تحل

٢ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانيًا وجبريًا.

ج $|س - ٣| = ٣ - س$

ب $|٥ + س| = ٤ - س$

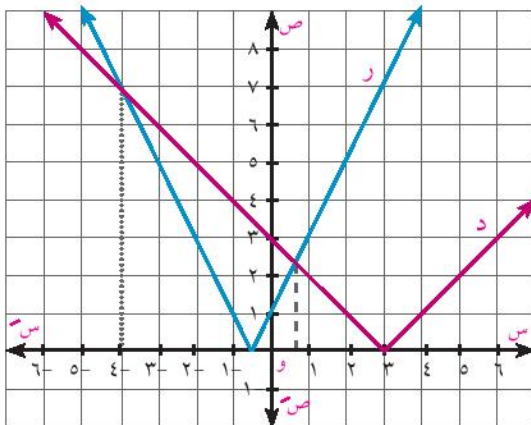
أ $|٤ + س| = ١ - س$

حل المعادلة: $|س + با| = اجس + د$

مثال

٢ حل المعادلة $|س - ٣| = |١ + س|$ بيانيًا.

الحل



بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = |٢س + ١|
منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات
في اتجاه وس ←

ر: ر(س) = |٢س + ١|
منحنى ر هو نفس منحنى |س| بإزاحة أفقية قدرها ١/٢
وحدة في اتجاه وس ← ، ويكون نقط تقاطع منحنيا
الدالتين د، ر هي: (٧، -٤) ، (١/٢، ٠)

مجموعة حل المعادلة هي { -٤، ١/٢ }

٩ حاول أن تحل

٣ حل كلاً من المعادلات الآتية بياناً.

ب) |س - ٢| + |س - ١| = صفر

أ) |س + ٧| = |س + ٣|

مثال

٤ أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

ب) $\sqrt{س^2 + ٦س + ٩} = س^٢ - ٩$

أ) |س + ٧| = |س - ٥|

الحل

تذكر أن

إذا كان أ، ب ≥ ٠
وكان |أ| = |ب|
فإن: أ = ± ب

∴ س + ٧ = ± (س - ٥)

∴ -٧ = س - ٥ (غير ممكن).

أى أن: ٢ = س

أى أن مجموعة حل المعادلة هي {٢}

∴ |س + ٧| = |س - ٥|

∴ س + ٧ = س - ٥

أو س + ٧ = - (س - ٥)

∴ س = -١

التحقيق:

بالتعويض عن س = -١ في طرفي المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦

أى أن مجموعة الحل هي { -١ }

فكر:

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

تذكر أن

لأي عدد حقيقي أ يكون:
 $|أ| = \sqrt{أ^2}$

ب) $\sqrt{س^2 + ٦س + ٩} = س^٢ - ٩$

أى أن: $\sqrt{س^2 + ٦س + ٩} = س^٢ - ٩$

فإن: س - ٩ = س^٢ - ٩

أى أن: س = ٣ ، ∞]

فإن: س - ٩ = س^٢ - ٩

أى أن: س = ٦ - ∞ ، ٣]

∴ مجموعة الحل هي {٤}

فكر:

١ هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حل للمعادلة؟ وضح ذلك.

٢ حاول أن تحل

٤ أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

ب $\sqrt{s-2} + s = 4$

أ $|s-1| - 2 = |s-2|$

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

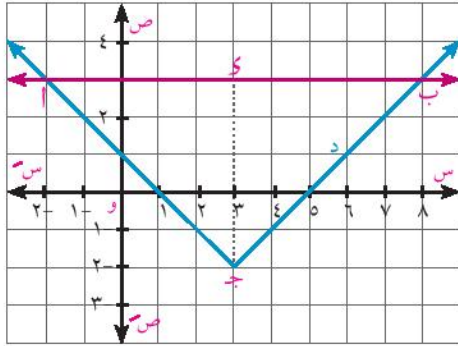
مثال

تخطيط المدن

٥ قطعة أرض محصورة بين منحنيي الدالتين د، ر حيث:

د(س) = |س-٣| - ٢ ، ر(س) = ٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

الحل



بتمثيل منحنيي الدالتين د، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (٣، -٢) ، ب (٣، ٨) ، و تكون قطعة الأرض على شكل

المثلث أ ب ج القائم الزاوية جـ حيث

أ ب = ٨ - (٢) = ١٠ وحدات

جـ د = ٣ - (٢) = ٥ وحدات

مساحة Δ أ ب ج = $\frac{1}{2} \times \text{أ ب} \times \text{جـ د}$

= $\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$ وحدة مربعة

مساحة قطعة الأرض = $25 = (8 \times 8) = 1600$ متراً مربعاً.

٢ حاول أن تحل

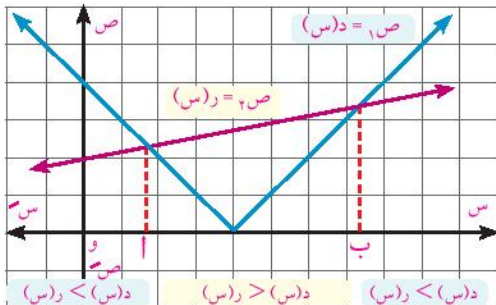
٥ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د، ر حيث:

د(س) = |س-٢| - ١ ، ر(س) = ٥ - |س-٢|

Solving the Inequalities

ثانياً: حل المتباينات

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: ($>$ ، $<$ ، $\geq$ ، $\leq$) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التي تجعل المتباينة صحيحة.



حل المتباينات بيانياً

يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:

ص_١ = د(س) ، ص_٢ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة

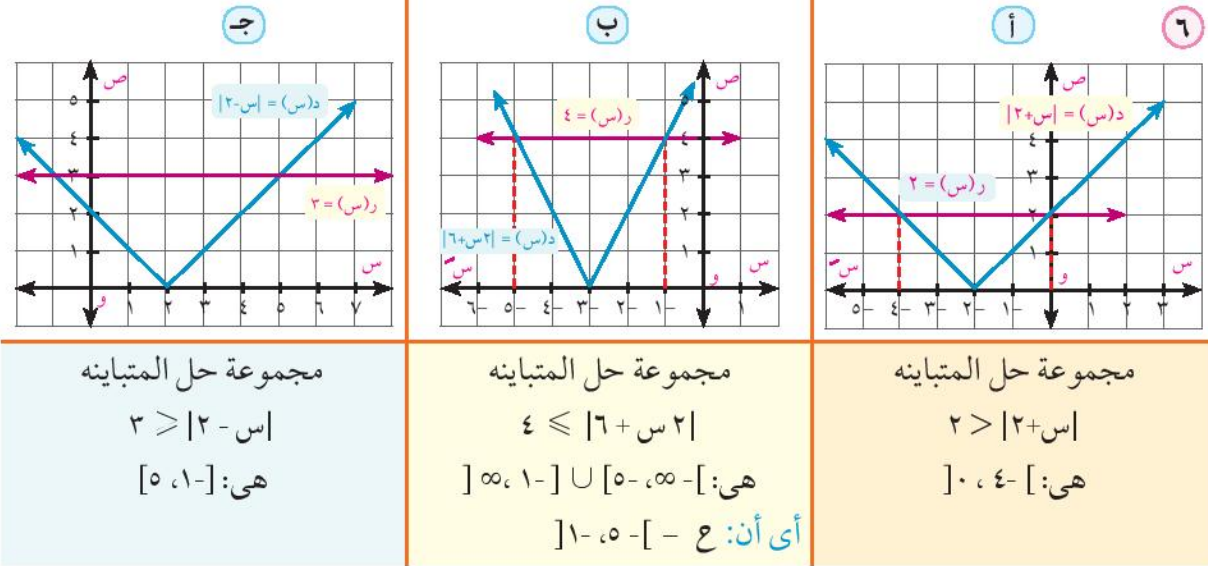
د(س) = ر(س) هي {أ، ب}

أى أن: $ص_١ = ص_٢$ عندما $س = أ$ أو $س = ب$

ويلاحظ: $ص_١ > ص_٢$ أى $د(س) > ر(س)$ عندما $س \in [أ، ب]$

$ص_١ < ص_٢$ أى $د(س) < ر(س)$ عندما $س \in [ب، \infty)$

مثال



٤ حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

ج $|س - ٢| < ٣$

ب $|٢ + س| > ٤$

أ $|س + ٢| > ٢$

حل المتباينات جبريًا

تعلم

تذكر أن



لكل من أ، ب، ج

إذا كان: أ > ب، ب > ج

فإن أ > ج

إذا كان: أ > ب فإن

أ + ج > ب + ج

أ ج > ب ج عند ج < ٠

أ ج < ب ج عند ج > ٠

إذا كان أ، ب موجبتان،

أ > ب فإن $\frac{١}{أ} < \frac{١}{ب}$

أولاً: إذا كان $|س| > أ$ ، $٠ < أ$ ، فإن: $س > أ$ أو $س < -أ$

ثانياً: إذا كان $|س| \leq أ$ ، $٠ < أ$ ، فإن: $س \leq أ$ أو $س \geq -أ$

مثال

٧ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

ب $|س - ٢| + ١ \leq ٤$

أ $|س - ٣| > ٤$

ج $\frac{١}{|س - ٣|} \leq ٢$

الحل

وبإضافة ٣ إلى المتباينة

أى $٤ > س - ٣ > ٤ - ١$

أى أن: $١ < س < ٧$

٠: $٣ + ٤ > س - ٣ + ٣ > ٣ + ٤ - ١$

٠: مجموعة الحل $[-١، ٧]$

ب) $\therefore \sqrt{1-s} = |1-s|$ أى أن: $|1-s| \leq 4$

$\therefore 1-s \leq 4$ أى $s \leq 5$ ، $s-1 \geq -4$ أى $s \geq -3$

$s \in [-3, 5]$ $\therefore$ مجموعة حل المتباينة هي $[-3, 5] \cup]\infty, 5]$

ج) $\therefore \frac{1}{|3-s|} \leq 2$ وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين $\therefore |3-s| \geq \frac{1}{2}$ ، $s \neq \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{1}{2} > 3-s \geq \frac{1}{2}$ وبإضافة 3 إلى المتباينة $\therefore 3+\frac{1}{2} > 3-s \geq 3+\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{7}{2} > s \geq \frac{5}{2}$ وبالقسمة على 2 $\therefore \frac{7}{4} > s \geq \frac{5}{4}$

$\therefore$ مجموعة حل المتباينة هي $[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}] - \{\frac{3}{2}\}$

٦ حاول أن تحل

٧ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ) $|1-s| > 11$ ب) $|3s+7| > 8$ ج) $\sqrt{s^2-6s+9} \leq 8$ د) $\frac{1}{|3s|} \leq 5$

تفكير ناقده: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتى:

أ) $-4 > s > 4$ ب) $0 > s > 6$

ج) $s > -2$ أو $s \leq 2$ د) $-6 < s < -2$



تمارين ١ - ٥



أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

$$\begin{array}{lll} ١) |س - ٢| = ٣ & ٢) |٣ - ٢س| = ٧ & ٣) |س + ٢| = ١٠ \\ ٤) |س + ٢| + |س - ٢| = ٠ & ٥) |س| + |س - ٢| = ٢ & ٦) |س - ٢| = ٣س - ٤ \\ ٧) |س - ١| = |س - ٢| & ٨) |٢س - ٦| = |س - ٣| & ٩) \sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + س = ٩ \end{array}$$

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

$$\begin{array}{lll} ١٠) |س - ٣| = ٧ & ١١) |س + ٢| + |س - ٢| = ٠ & ١٢) |س - ٢| = ٣س - ٤ \\ ١٣) |٢س - ٤| = |س + ١| & ١٤) |س| + |س - ٢| = ٠ & ١٥) |س + ٢| = |س - ٣| \end{array}$$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانياً :

$$\begin{array}{lll} ١٦) |س - ١| > ٢ & ١٧) |س - ٢| > ٣ & ١٨) |٥ - س| < ٣ \\ ١٩) |٢س - ٣| \leq ٧ & ٢٠) |س + ٣| < ١ & ٢١) |٢س - ٥| \leq ٢ \end{array}$$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية جبرياً :

$$\begin{array}{lll} ٢٢) |س - ٣| > ١٥ & ٢٣) |٣س - ٢| > ٤ & ٢٤) |٣س - ٧| \leq ٢ \\ ٢٥) |٣س + ٢| + |٥س + ٤| > ٤ & ٢٦) \sqrt{س^٢ - ٢س + ١} \leq ٤ & ٢٧) \sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} > ٩ \\ ٢٨) |٢س - ٣| + |٦س - ٤| > ١٢ & ٢٩) |٢س - ٥| \leq ٣ & ٣٠) |٢س - ٣| < ٢ \end{array}$$

تمارين عامة



لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات في أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية (لوم س ص) = لوم س + لوم ص، ويرجع الفضل للعالم ليونهارت أولر في القرن الثامن عشر، بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة القوت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلول ما.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- ✦ يتعرف الدالة الأسية د: س $\rightarrow$ a^x حيث $a \in \mathbb{R}^+$ - {1}.
- ✦ يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- ✦ يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- ✦ يحل معادلات أسية على الصورة $a^x = b$.
- ✦ يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $a^x = b$.
- ✦ يتعرف الدالة اللوغاريتمية ص = لوم س أو د(س) = لوم س حيث $a \in \mathbb{R}^+$ - {1}، س $\in \mathbb{R}^+$.
- ✦ يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- ✦ يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها.
- ✦ يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية فى فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- ✦ يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانيًا.
- ✦ يتعرف قوانين اللوغاريتمات:
- ✦ لوم (س ص) = لوم س + لوم ص حيث س > 0، ص > 0.
- ✦ لوم $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = لوم س - لوم ص، س > 0، ص > 0.
- ✦ لوم س^ن = ن لوم س، س > 0، ن $\in \mathbb{R}$.
- ✦ لوم $\frac{1}{س}$ = - لوم س، س > 0.
- ✦ لوم س = $\frac{\text{لوم ص}}{\text{لوم أ}}$ ، س > 0، أ > 0، ب $\in \mathbb{R}^+$ - {1}.
- ✦ لوم ب = $\frac{1}{\text{لوم أ}}$ ، ب > 0، أ > 0، ب $\in \mathbb{R}^+$ - {1}.
- ✦ لوم 1 = 0.
- ✦ لوم 1 = صفر.
- ✦ يحل معادلات لوغاريتمية.
- ✦ يحل مسائل تشتمل تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- ✦ يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة.
- ✦ يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

Symmetry	تماثل	Exponential Growth	نمو أسي	Exponent	أس
Compound Interest	فائدة مركبة	Exponential Decay	تضاؤل أسي	Power	قوة
Inverse Function	دالة عكسية	Even	زوجي	Base	أساس
Logarithm	لوغاريتم	Odd	فردى	Radicals	جذور
Exponential Form	صورة أسية	Laws of Exponents	قوانين الأسس	Rational Exponents	أسس كسرية
Logarithmic Form	صورة لوغاريتمية	Exponential Function	الدالة الأسية	Square Root	الجذر التربيعى
Common Logarithm	لوغاريتم معتاد	Exponential Equation	معادلة أسية	Cube Root	الجذر التكعيبي
Logarithmic Function	دالة لوغاريتمية	Increasing Function	الدالة المتزايدة	n^{th} Root	الجذر النوني
Logarithmic Equation	معادلة لوغاريتمية	Decreasing Function	الدالة المتناقصة	Real Root	جذر حقيقي

مخطط تنظيمى للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): الأسس الكسرية.
- الدرس (٢ - ٢): الدالة الأسية وتطبيقاتها.
- الدرس (٢ - ٣): المعادلات الأسية.
- الدرس (٢ - ٤): الدالة العكسية.
- الدرس (٢ - ٥): الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني.
- الدرس (٢ - ٦): بعض خواص اللوغاريتمات.

الأدوات والوسائل

- ورق رسم بياني - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

الجذر النوني:

تعلمت أن:

المعادلة $9 = 3^2$ لها جذران حقيقيان فقط هما $3 = \sqrt{9}$ أو $-3 = -\sqrt{9}$
لاحظ أن $9 = 3^2$ ، $9 = (-3)^2$

كذلك المعادلة $8 = 2^3$ لها جذر حقيقي وحيد

هو $2 = \sqrt[3]{8}$ (باقي جذور المعادلة أعداد مركبة غير حقيقية)

لاحظ أن $8 = 2^3$

وعلى وجه العموم:

المعادلة $a = b^n$ حيث $a \geq 0$ ، $b \geq 0$ لها
 n من الجذور، وناقش فيما يلي عدة حالات:

(١) إذا كان n عددًا زوجيًا، $a < 0$

فإن المعادلة $a = b^n$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[n]{a}$ ، $-\sqrt[n]{a}$ ، ويسمى الجذر النوني الذي له نفس إشارة a بالجذر النوني الأساسي للعدد a .

مثل: المعادلة $16 = 2^4$ لها جذران حقيقيان هما $2 = \sqrt[4]{16}$ ، $-2 = -\sqrt[4]{16}$

(وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية).

لاحظ أن $16 = 2^4$ ، $16 = (-2)^4$

(٢) إذا كان n عددًا زوجيًا، $a > 0$

فإن المعادلة $a = b^n$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).
مثل: المعادلة $9 = 3^2$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).

(٣) إذا كان n عددًا فرديًا، $a \geq 0$

فإن المعادلة $a = b^n$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[n]{a}$ (باقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النوني.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

The n^{th} Power	القوة النونية
Base	الأساس
Exponent	الأس
n^{th} Root	جذر نوني
Rational Exponent	أس كسري

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

مثال: المعادلة $32 = x^5$ لها جذر حقيقي وحيد هو $x = \sqrt[5]{32} = 2$ (لاحظ أن $(-2)^5 = -32$)

٤ إذا كان $x \geq 0$ ، $x^5 = 32$ ، $x = 2$ = صفر

فإن المعادلة $x^5 = 32$ صفر لها حل حقيقي وحيد هو $x = 2$ (المعادلة لها $x = 0$ من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر عندما $x < 0$).

٦ حاول أن تحل

١ أوجد في x مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $x^5 = 81$ ب $x^5 = 243$ ج $x^5 = 16$ د $x^5 = -64$

تفكير ناقداً: وضع بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد 16 وبين $\sqrt[5]{16}$

تعلم

الأسس الكسرية Rational Exponents

تعلمت أن الجذر التربيعي للعدد الحقيقي غير السالب a هو العدد الذي مربعه يساوي a وبفرض a تمثل الجذر التربيعي الأساسي للعدد a

$\therefore 1 = 1^2$ ومنها $1 = 1^2$ $\therefore \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

أي أن $\frac{1}{4}$ هي الجذر التربيعي الأساسي للعدد 1 أي أن $\sqrt[2]{1} = \frac{1}{4}$

بالمثل $\frac{1}{9}$ هي الجذر التكعيبي الأساسي للعدد 1 أي أن $\sqrt[3]{1} = \frac{1}{9}$ وعموماً $\sqrt[n]{1} = \frac{1}{n}$

١ لأي عدد حقيقي $a \geq 0$ ، $x^5 = a$ يكون $\sqrt[5]{a} = x$

هذه العلاقة صحيحة أيضاً عندما $a > 0$ ، x عدد صحيح فردي أكبر من 1

٢ $\sqrt[5]{a^2} = (\sqrt[5]{a})^2 = a^{\frac{2}{5}}$ حيث $a \geq 0$ ، x عدنان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، $x < 1$ ، $\sqrt[5]{a} \geq 0$

تعميم قوانين الأسس

قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

مثال

١ أوجد قيمة كل مما يأتي (إن أمكن)

أ $\sqrt[5]{16}$ ب $\sqrt[5]{27}$ ج $\sqrt[5]{-243}$ د $\sqrt[5]{-9}$ هـ $\sqrt[5]{16}$ و $\sqrt[5]{27}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad 2 &= \sqrt[4]{16} = \frac{1}{2}(16) \\ \text{ب} \quad 3 &= \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3}(27) \\ \text{ج} \quad 3 &= \sqrt[3]{243} = \frac{1}{3}(243) \\ \text{د} \quad 3 &= \sqrt[3]{9} = \frac{1}{3}(9) \\ \text{هـ} \quad 64 &= 2^6 = 2^3(16) = \frac{1}{3}16 \\ \text{و} \quad \frac{1}{81} &= \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{27}) = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3}(27) \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة كل مما يأتي (إن أمكن):

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \sqrt[3]{125} \quad \text{ب} \quad \sqrt[4]{81} \quad \text{ج} \quad \sqrt[5]{128} \quad \text{د} \quad \sqrt[6]{343} \end{aligned}$$

فسر لماذا؟

العدد $(\sqrt[n]{a})$ معرف في $\mathbb{R}$ ، بينما العدد $(\sqrt[n]{a})$ غير معرف في $\mathbb{C}$

Properties of n^{th} Roots

خواص الجذور النونية

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ (2) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0 \end{aligned}$$

حيث كل من $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}$

مثال

٢ أوجد في أبسط صورة كل من:

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{2} \quad \text{ب} \quad \sqrt[4]{16} \text{ ص } \sqrt[4]{8} \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{2 \times 9} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{9} - 1) \\ \text{ب} \quad \sqrt[4]{16} \text{ ص } \sqrt[4]{8} &= \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2^3} = 2 \times \sqrt[4]{8} = 2\sqrt[4]{8} \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد في أبسط صورة كل من:

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \sqrt[3]{16} \quad \text{ب} \quad \sqrt[4]{(2+3)^{18}} \end{aligned}$$

مثال

٣ أوجد في أبسط صورة كل من

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{24}} \times \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18} \quad \text{ب} \quad \frac{\sqrt[3]{147} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{63}} \end{aligned}$$

لاحظ أن



$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ إذا كان n زوجي
 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ إذا كان n فردي

الحل

$$\text{المقدار (أ)} \quad \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)} = \sqrt[3]{2^6 \times 2^6 \times 2^6 \times 2^6 \times 2^6 \times 2^6} = \sqrt[3]{2^{36}} = 2^{12} = 4096$$

$$2 = 1 \times 2 = 0.3 \times \sqrt[3]{2} = \frac{1-2+2}{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{المقدار (ب)} \quad \frac{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{(7 \times 7) \times 7}}{\sqrt[3]{(7 \times 7)}} = \sqrt[3]{7} = 7$$

$$1 = 1 \times 1 = 0.7 \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

٩ حاول أن تحل

٤ أثبت أن:

$$\text{أ} \quad \frac{1}{7} = \frac{1 + 3(4) \times \sqrt[3]{4} - 3(4^2)}{4 \times 3(196)}$$

$$\text{ب} \quad 25 = \frac{\frac{1}{4} - 10 \times \sqrt[3]{4} \times 120}{\frac{3}{4} \times 10 \times \sqrt[3]{4} \times \frac{5}{4}}$$

حل المعادلات الآتية في ع

مثال

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\text{أ} \quad 128 = \sqrt[3]{x} \quad \text{ب} \quad 81 = \sqrt[3]{(3+x)}$$

$$\text{ج} \quad \sqrt[3]{x} - 13 = \sqrt[3]{x} + 36 = 0 \quad \text{د} \quad \sqrt[3]{x} - 31 = \sqrt[3]{x} + 32 = 0$$

الحل

$$\text{أ} \quad 128 = \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{(128)} = \sqrt[3]{x}$$

$$4 = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{ب} \quad 81 = \sqrt[3]{(3+x)}$$

$$\sqrt[3]{(81)} = \sqrt[3]{(3+x)} \quad \text{برفع الطرفين للقوة 3}$$

$$128 = (3+x)$$

$$2 \pm \sqrt[3]{(128)} = 3+x \quad 2 \pm \sqrt[3]{(128)} = 3+x$$

$$12 = 3+x \quad 24 = 3+x \quad 27 = 3+x$$

$$15 = 3+x \quad 30 = 3+x \quad 27 = 3+x$$

$$\text{م. ح.} = \{15, 12\}$$

لاحظ أن

إذا كان $a < 0$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-a}$$

حيث م عدد فردي

إذا كان

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

حيث م عدد زوجي

م، ن ليس بينهما عامل مشترك

٥ اكتشاف الخطأ:

$$q = \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{(q-)} = \sqrt[n]{q-} = q- \quad \textcircled{i}$$

ب) إذا كان $s^4 = 81$ فإن $s = \sqrt[4]{81}$ $\therefore s = 3$

٦ **الربط بالهندسة:** إذا كان طول نصف قطر كرة ρ ، يعطى بدلالة الحجم C من العلاقة $\rho = \left(\frac{3C}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. أوجد

الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\pi \frac{32}{3}$ إلى $\pi 36$ وحدة مكعبة.

٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

ا) $\frac{1}{32} = \frac{5}{2}$ س

ب. س ۴ = ۸۱

ج. $32 = \sqrt[4]{(1-s)^0}$

$$243 = \frac{5}{4}(9 + 5s - s^2) \quad (5)$$

هـ $س\frac{4}{5} - 5س\frac{2}{5} + 4 = صفر$

9 سس + 10 = 8√س

ز) $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} = 04 - \sqrt[3]{5} = \text{صفر}$

$${}^E(3+s) = {}^E(1-s^2) \quad \textcircled{C}$$

٨ إذا كان $s = \frac{2}{3}$ $v = \frac{2}{3}$ $27 =$ فما قيمة $s + v$

٩ تفكير ابداعي: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان س > صفر فإن: $\sqrt[4]{\frac{1}{S}} = \frac{1}{\sqrt[4]{S}}$

ب) إذا كان $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = 1$ فأی الأعداد الآتية عدد نسبي..... (١٢، ١٦، ١٨، ٢٤)

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)

$$\frac{0 - \mu \times \frac{1}{2} V}{V - \mu} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{0}{F}(\cdot, \cdot 1) + \frac{2}{F}(22) \text{ ب}$$



الدالة الأسية وتطبيقاتها

Exponential Function and its Applications

نشاط



تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين في كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمان، ويستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفي نفس الظروف.

يبين الجدول التالي زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.

الزمن بالساعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الخلايا	١	٢	٤				٦٤

١) أكمل الجدول السابق.

٢) عبّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.

٣) ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.

٤) عبّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور ٨ ساعات.

تعلم



الدالة الأسية Exponential Function

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا $a \neq 1$ فإن الدالة:

د حيث د: $x \rightarrow a^x$ ، د(س) = a^s

تسمى دالة أسية أساسها a

مثال:

د(س) = 2^s دالة أسية أساسها (٢) وأسها (س).

د(س) = 5^{s+1} دالة أسية أساسها (٥) وأسها (س+١).

د(س) = $(\frac{1}{3})^{2s}$ دالة أسية أساسها ($\frac{1}{3}$) وأسها (٢س)

سوف تتعلم

الدالة الأسية.

تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.

خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

دالة أسية. Exponential Function

نمو أسّي. Exponential Growth

تضاؤل أسّي. Exponential Decay

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

برامج رسومية.

تذكر أن



الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقي.

الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لا يساوي الواحد.

٦ حاول أن تحل

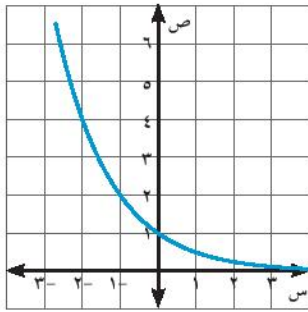
١ بين أى الدوال الآتية دالة أسية.

- أ د(س) = $2^س$ ب د(س) = $(2)^س$
 ج د(س) = $\frac{3}{1+س}$ د د(س) = $س^3 - 1$
 ه د(س) = $(\frac{3}{4})^{س-1}$ و د(س) = $(2-س)^3$

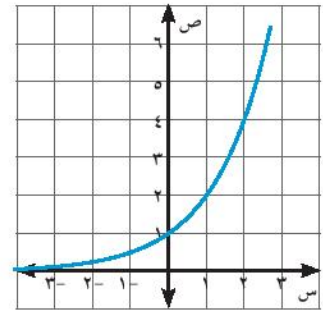
Graphical Representation of Exponential Function

التمثيل البياني للدالة الأسية

مثل بيانيًا كل من الدالتين د(س) = $2^س$ ، د(س) = $(\frac{1}{2})^س$
 وذلك على فترة اختيارية س $\in [-3, 3]$

د(س) = $(\frac{1}{2})^س$

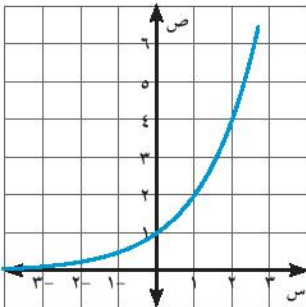
س	د(س)	د(س)
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
صفر	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$

د(س) = $2^س$ خواص الدالة الأسية د(س) = $أ^س$ حيث $أ > 0$ ، $أ \neq 1$

- ١ مجال الدالة الأسية د(س) = $أ^س$ هو $[-\infty, \infty]$
- ٢ إذا كان $أ < 1$ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسى معاملها $أ$.
أما إذا كان $أ > 1$ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضائل أسى معاملها $أ$.
- ٣ منحنى الدالة د(س) = $أ^س$ يمر دائماً بالنقطة (٠، ١) لجميع قيم $أ > 0$ ، $أ \neq 1$
- ٤ د(س) = $أ^س$ هي دالة احادية (One - to - One)
- ٥ منحنى الدالة د(س) = $أ^س$ هو صورة منحنى الدالة د(س) = $(\frac{1}{أ})^س$ بالانعكاس على محور الصادات
- ٦ $أ^س \rightarrow \infty$ عندما $س \rightarrow \infty$ حيث $أ < 1$
 $أ^س \rightarrow 0$ عندما $س \rightarrow \infty$ حيث $أ > 1$

٦ حاول أن تحل

٢ الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على $ح$ ، حيث د(س) = $3^س$. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على $ح$ ، حيث ر(س) = $(\frac{1}{3})^س$ ، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بين أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.



٣ تفكير ناقداً: إذا كانت د(س) = a^x حيث $0 < a < 1$ رتب كل مما يأتي ترتيباً تصاعدياً د(٧)، د(٢)، د(٥)، د(٠).

مثال

١ إذا كانت د(س) = 3^x فأكمل ما يأتي:

أ د(٢) = ب د(٢ + س) = ج د(س) × د(٢ - س) =

الحل

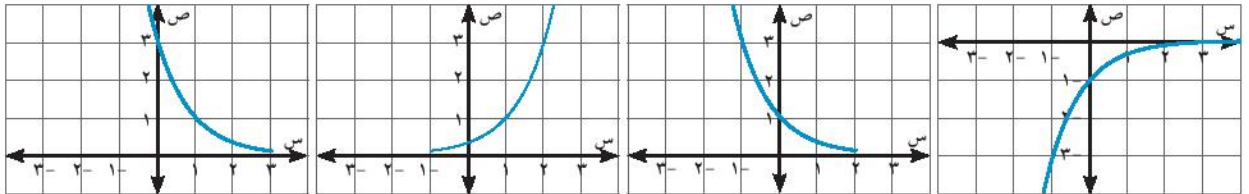
أ د(٢) = $3^2 = 9$ ب د(٢ + س) = $3^{2+S} = 3^2 \times 3^S = 9 \times 3^S$ د(س) = 3^S

ج د(س) × د(٢ - س) = $3^S \times 3^{2-S} = 3^{S+2-S} = 3^2 = 9$

٢ حاول أن تحل

٤ في كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البياني المناسب حيث:

أ ص = 3^x ب ص = 3^{-x} ج ص = 3^{-x} د ص = 3^{-x}
هـ ص = 3^{-x} و ص = 3^{-x} ز ص = 3^{-x} ح ص = 3^{-x}

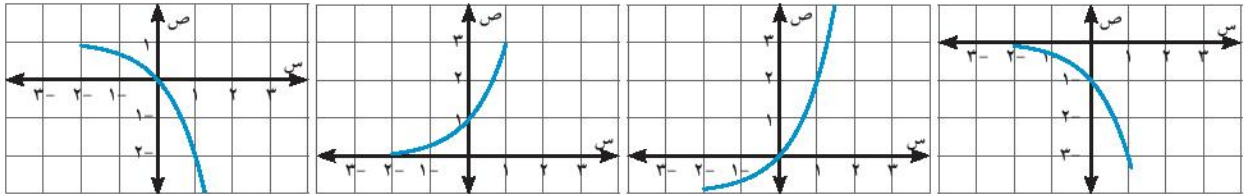


شكل (٤)

شكل (٣)

شكل (٢)

شكل (١)



شكل (٨)

شكل (٧)

شكل (٦)

شكل (٥)

إثرائي

تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة $a^x = b$

النمو والتضاؤل: Growth and Decay

يوجد العديد من الظواهر في الحياة اليومية يمكن أن نمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الاضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفيروسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة. وفي مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسّي ودالة التضاؤل الأسّي.

أولاً: النمو الأسّي: Exponential growth

يمكن استخدام الدالة د، حيث د(٠) = ١ لتمثيل النمو الأسّي بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، حيث ٠ هي الفترة الزمنية، القيمة الابتدائية، ٠ النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

الربح المركب: عند حساب جـ جملة مبلغ استثمار في أحد البنوك التي تعطي ربح سنوي مركب r (نسبة مئوية) لعدد n من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوي إلى s فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة:

$$ج = أ \left(1 + \frac{r}{s} \right)^{ns}$$

مثال

٢ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية:

أ) العائد السنوي ب) العائد الربع سنوي ج) العائد الشهري

الحل

باستخدام العلاقة $ج = أ \left(1 + \frac{r}{s} \right)^{ns}$ حيث s التقسيم السنوي:

(أ) العائد السنوي $s = 1$ $ج = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢$ جنيه
 (ب) العائد ربع سنوي $s = ٤$ $ج = ٥٠٠٠ \left(1 + \frac{٠,٠٨}{٤} \right)^{٤ \times ١٠} = ١١٠٤٠,٢$ جنيه
 (ج) العائد الشهري $s = ١٢$ $ج = ٥٠٠٠ \left(1 + \frac{٠,٠٨}{١٢} \right)^{١٢ \times ١٠} = ١١٠٩٨,٢$ جنيه

٤ حاول أن تحل

٥ يتكاثر النحل في أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل في البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد n أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

ثانيًا: التضائل الأسى: Exponential decay

يمكن استخدام الدالة $د(ن) = أ(١ - r)^n$ لتمثيل التضائل الأسى بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، حيث n هي الفترة الزمنية، $أ$ القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للتضائل في الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

٣ **الربط بالتجارة:** اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولاً: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد n سنة من شرائها.

ثانيًا: احسب لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

الحل

$١٢٠٠٠٠ = أ$ ، $١٢ = r$ ، الفترة الزمنية $n = ٦$ سنوات

أولاً: دالة التضائل الأسى هي: $د(ن) = أ(١ - r)^n$ وبالتعويض عن قيم $أ$ ، r فإن:

$د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (١ - ١٢)^n$ **أى أن:** $د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (٠,٨٨)^n$

ثانيًا: بالتعويض عن $n = ٦$ في دالة النمو الأسى:

$د(٦) = ١٢٠٠٠٠ (٠,٨٨)^٦ = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١$

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

٤ حاول أن تحل

٦ **الربط بالطب:** يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبي، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا في الساعة.

أ) اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية في جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب) قدر كمية العقار المتبقية في جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.



تمارين ٢ - ٢



١ أكمل ما يأتي:

أ تكون الدالة د حيث د(س) = a^s دالة أسية إذا كانت أ س

ب الدالة الأسية ر حيث ر(س) = a^{s-1} أساسها هو

ج الدالة و حيث و(س) = $(\frac{1}{a})^s$ ليست دالة أسية لأن

د إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = a^s مع المستقيم س = ٠ هي النقطة (..... ،)

ه معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: د(س) = a^s ، ر(س) = $(\frac{1}{a})^s$ هو

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) $0 < a < 1$ (ب) $a < 1$ (ج) $0 < a > 1$ (د) $a = 1$

ب تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت:

(أ) $0 < a < 1$ (ب) $a > 1$ (ج) $0 < a > 1$ (د) $1 > a > 0$

ج الدالة الأسية د حيث د(س) = a^s ، $a < 1$ يقترب خطها البياني من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(ج) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د في الدالة الأسية د حيث د(س) = a^s ، $a < 1$ تكون د(س) < ١ عندما:

(أ) $s \geq 0$ (ب) $s \geq 0$ (ج) $s \geq 0$ (د) $s \geq 0$

ه في الدالة الأسية ر حيث ر(س) = a^s ، $(0 < a < 1)$ تكون $0 < a^s < 1$ عندما س

(أ) $0 < a < 1$ (ب) $0 < a < 1$ (ج) $0 < a < 1$ (د) $0 < a < 1$

٣ بين أي من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

أ د(س) = 2^s ب د(س) = $(\frac{1}{2})^s$ ج د(س) = $\frac{1}{s-1}$

د د(س) = $3^s - 1$ ه د(س) = $(\frac{1}{2})^{s-1}$ و د(س) = $(-7)^s$

٤ مثل الدالة د في كل مما يأتي بياناً، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبين أي منها تزايدية وأي منها تناقصية:

أ د(س) = 3^s ب د(س) = $(\frac{1}{3})^s$ ج د(س) = $3 - (2)^s$ د د(س) = $2^{s+1} + 1$

ه د(س) = $(\frac{1}{4})^{s+2} - 2$ و د(س) = $2 + (\frac{2}{3})^{s-1}$ ز د(س) = $(\frac{1}{4})^{s+2} + \frac{3}{4}$

استكشف

من الجدول الآتي بين متى تتساوى ٣^x مع ٢^x :

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤
س٢	٤-	٢-	٠				
س٣	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١				

تعلم

Exponential Equation

المعادلة الأسية

إذا تضمنت المعادلة متغيراً في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل $(٢٧ = ٣^x)$ فنجد:

أولاً: إذا كان $١^a = ١^b$ حيث $a, b \in \{٠, ١, -١\}$ فإن $١^a = ١^b$.

مثال

١ أوجد في x مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\frac{1}{27} = ١ + ٣^x$ ب $٢^x - ٨ = ٣^x - (٣^x \times ٢)$

الحل

أ $\frac{1}{27} = ١ + ٣^x$ $\therefore ٣^x = \frac{1}{27} - ١ = -\frac{26}{27}$

$\therefore$ $٣^x = ١ + ٣ = ٤$ ومنها $٣^x = -٤$ $\therefore$ مجموعة الحل $\{٤-\}$

ب $٢^x - ٨ = ٣^x - (٣^x \times ٢)$ $\therefore ٢^x - ٨ = ٣^x - ٢ \times ٣^x$

$\therefore ٢^x - ٨ = ٣^x - ٢ \times ٣^x$ $\therefore ٢^x - ٨ = ٣^x - ٢ \times ٣^x$

بالضرب في ٢

$\therefore ٢^x - ٨ = ٣^x - ٩$

$\therefore ٢^x - ٨ = ٣^x - ٩$ ومنها $٢^x = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل $\{١\}$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد في x مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\frac{1}{16} = ٣^x - ٢$ ب $\frac{1}{32} = \frac{٣^{(٢٥+٢٣)}}{٣^{٦٨}}$

ثانياً: إذا كان $١^a = ١^b$ حيث $a, b \in \{٠, ١, -١\}$ فإن

إما: $١^a = ١^b$ عندما $١^a = ١^b$

أو: $١^a = ١^b$ عندما $١^a = ١^b$ عندما $١^a = ١^b$

سوف تتعلم

حل المعادلة الأسية جبرياً.

حل المعادلة الأسية بيانياً.

المصطلحات الأساسية

معادلة أسية

Exponential Equation

الحل البياني Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

حاسب آلي مزود ببرامج

رسومية.

آلة حاسبة علمية.

مثال

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $3^x - 5 = 3^{x-2}$ ب $7^{x+1} = 3^{x+2}$

الحل

أ $3^x - 5 = 3^{x-2}$ $\therefore$ س - 3 = صفر ومنها س = 3

$\therefore$ مجموعة الحل = {3}

ب $7^{x+1} = 3^{x+2}$ $\therefore$ $7^{x+1} = 3^{x+2}$ $\therefore$ $7^{x+1} = 3^{x+2}$

$\therefore$ س + 1 = صفر ومنها س = -1 $\therefore$ مجموعة الحل = {-1}

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ $3^x - 5 = 3^{x-2}$ ب $7^{x+1} = 3^{x+2}$

تفكير ناقد: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة س $3^x - 5 = 3^{x-2}$

مثال

٢ إذا كانت د(س) = 3^x

أ أثبت أن د(س + 2) = د(س - 2) × د(س) ب إذا كان د(س + 1) - د(س - 1) = 72 أوجد قيمة س

الحل

أ الطرف الأيمن = د(س + 2) × د(س - 2) = $3^{x+2} \times 3^{x-2} = 3^{2x} = (3^x)^2 = د(س)^2$ الطرف الأيسر = د(س + 2) - د(س - 2) = 72

ب $\therefore$ د(س + 1) - د(س - 1) = 72 $\therefore$ $3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore$ $3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore$ $3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore$ $3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$ $\therefore$ س = 3 $\therefore$ س = 1 - 2 = 3

٩ حاول أن تحل

٣ إذا كان د(س) = 8، د(س) = 4

أ أثبت أن $128 = \frac{د(س+2) \times د(س+1)}{د(س-2) \times د(س-1)}$ ب حل المعادلة د(س) + د(س-3) = 80

مثال

٤ إذا كانت $د(س) = ٣٢$ أوجد $س$ التي تحقق المعادلة: $د(س) + د(٥ - س) = ١٢$:

الحل

$$\begin{aligned} & \text{بالتعويض في المعادلة } د(س) + د(٥ - س) = ١٢ \\ & ٣٢ + ٣^{٥-س} = ١٢ \\ & ٣٢ \times ٣^{٥-س} + ٣٢ \times ٣^٢ = ١٢ \times ٣^٢ \text{ وذلك بضرب الطرفين في } ٣^٢ \\ & ٣ + س - ٢٥ + س + س = ١٢ \times ٣^٢ \\ & ٣٢ - ٣٢ \times ١٢ + ٣٢ = ٣٢ \times ١٢ - ٣٢ \times ١٢ \\ & ٠ = (٨ - ٣٢) (٤ - ٣٢) \\ & \text{إما: } ٣٢ = ٣٢ \text{ ومنها } س = ٢ \\ & \text{أو: } ٣٢ = ٣٢ \text{ ومنها } س = ٣ \end{aligned}$$

٦ حاول أن تحل

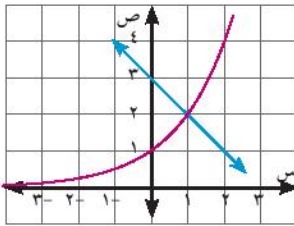
٤ في المثال السابق أثبت أن: $\frac{١٧}{٤} = \frac{د(١-س)}{د(١+س)} + \frac{د(١+س)}{د(١-س)}$

حل المعادلات الأسية بيانيًا Solving Exponential Equations Graphically

نشاط

٥ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين $د(س) = ٣٢$ ، $د(س) = ٣ - س$ ، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٣ - س = ٣٢$

الحل



باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنى الدالتين $د(س) = ٣٢$ ، $د(س) = ٣ - س$ ، ومن الرسم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع هي $(١, ٢)$ نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدالتين $د(س) = ٣ - س$ هو $(١, ٢)$ لذلك فإن مجموعة حل المعادلة: $٣ - س = ٣٢$ هو $\{١\}$.

٦ حاول أن تحل

٥ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلا من الدالتين:

$د(س) = ٣٢$ ، $د(س) = ٢ + س$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢ + س = ٣٢$



١ اختر الإجابة الصحيحة:

أ إذا كان $s_2 = 1$ ، فإن $s = 8$

١ (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٣ (د)

ب) إذا كان $h = 1$ ، $e = 1$ ، فإن $s =$

(أ) ٥ (ب) ١ (ج) ١- (د) صفر

ج $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 1$ حيث $1 < \text{صفر}$ ، فإن $1 =$

١ (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د)

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

ا. $2 = 1 + 1$ ب. $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ ج. $1 = \sqrt{2} - 1$

$$162 = 2^+ 3^3 - 2^+ 3^3 \quad (9) \qquad 27 = \sqrt[3]{3^3} \quad (5) \qquad 2^+ 3^4 = 2^+ 3^5 \quad (5)$$
$$\lambda 8 = {}^{0+} \text{س} \left(\frac{1}{\text{ف}} \right) + {}^{2+} \text{س} \left(\frac{1}{\text{ف}} \right) + {}^{1+} \text{س} \left(\frac{1}{\text{ف}} \right) \quad \text{ط}$$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$$٤٥ = ٥ \times ٩ \quad , \quad ٧٥ = ٥ \times ١٥$$

٤) إذا كانت $d_1(s) = s^3$ ، $d_2(s) = s^9$ فأوجد قيمة s التي تحقق $d_1(2s-1) + d_2(s+1) = 756$

٥) إذا كانت $v = (s)$ فأوجد قيمة s التي تحقق $d(2s - 1) + d(s - 2) = 0$.

٦ أوجد بيانياً مستخدماً أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

ا) $3^2 - 3 = 3^3$ ب) $3^2 = 3^2$

٧ **تفكير إبداعي:** إذا كان س^٣ = ص^٢ وكان س^{١+٢} = ص^{١-٢} فما قيمة س؟

٨ **الربط بالأعداد:** إذا كان مجموع الأعداد $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n$ يُعطى بالعلاقة $جس = 2(2^n - 1)$

أ) أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب) أوجد عدد الحدود في النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

٩ حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$\text{ا} \quad 3^{42-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

تفكير ابداعي: ۱۰

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$\therefore = 3 + 3^2 - 3^1 - 3^0$$

سوف تتعلم

- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا وجبريًا.

المصطلحات الأساسية

Function	دالة
Inverse Function	دالة عكسية
One - to One Function	دالة أحادية
Domain	مجال
Range	مدى
Reflection	انعكاس

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلي.

فكر و ناقش



الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء س = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.

١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من س إلى ص

هل العلاقة تمثل دالة؟ وإذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من ص إلى س هل العلاقة تمثل دالة؟

تعلم



The Inverse Function

الدالة العكسية

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة د^{-١} تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان:



مثال



١) إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(٨، ٤)، (٦، ٣)، (٤، ٢)، (٢، ١)}.

أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلها في شكل واحد.

الحل

حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.

∴ د(س) = {(٨، ٤)، (٦، ٣)، (٤، ٢)، (٢، ١)}

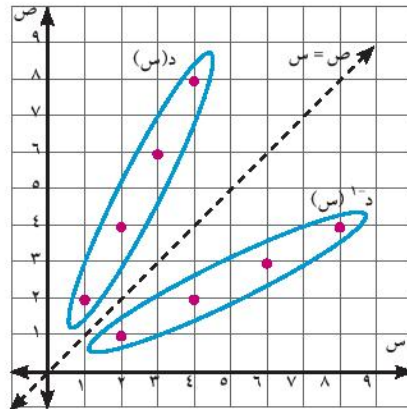
∴ د^{-١}(س) = {(٤، ٨)، (٣، ٦)، (٢، ٤)، (١، ٢)}

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د^{-١}

متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

أي أن د^{-١}(س) هي صورة د(س) بالانعكاس

في المستقيم ص = س



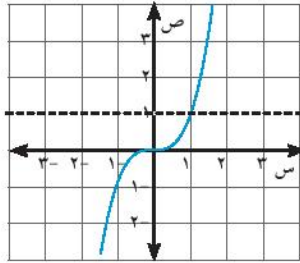
٩ حاول أن تحل

١ أوجد بيان الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:

١	٠	١-	٢-	٣-	س
$\frac{1}{3}$	٠	١	٣	٧	د(س)

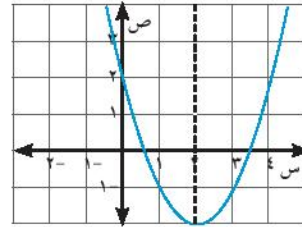
اختبار الخط الأفقي

إذا قطع أي خط أفقي منحنى دالة ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية.



اختبار الخط الرأسي

إذا قطع أي خط رأسي منحنى ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة.



لاحظ أن:

إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.

مثل $ص = س^2$ (ليست أحادية) معكوسها $ص = |س|$ لا يمثل دالة.

من خواص الدالة العكسية:

١- يقال أن د(س)، م(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان

$$(د \circ م)(س) = س \quad \text{و} \quad (م \circ د)(س) = س$$

٢- مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية د^{-١}(س)

مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د^{-١}(س)

تفكير ناقذ:

ما مجال الدالة د حيث د(س) = س^٢ التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

مثال

٢ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = س^٢ + ١ ومثل الدالة ومعكوسها

بياناً في شكل واحد.

لاحظ أن



لإيجاد الدالة العكسية أولاً نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

الحل

$$ص = ٢س + ١$$

بتبديل المتغيرات

$$١ + ٢ص = س$$

$$١ - س = ٢ص$$

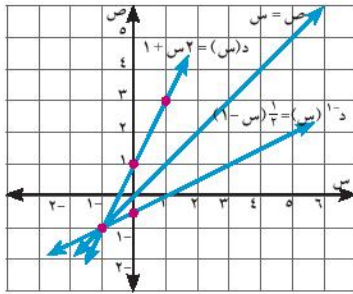
$$أي \quad د^{-١}(س) = \frac{١}{٢}(س - ١)$$

$$١ - س = ٢ص \quad \therefore \quad د^{-١}(س) = \frac{١}{٢}(س - ١)$$

١ -	٠	١	س
١ -	١	٣	د(س)
١ -	$\frac{١-}{٢}$	٠	د^{-١}(س)

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د^{-١} منحناهما متماثلان بالنسبة

للمستقيم $ص = س$



١ حاول أن تحل

٢ أوجد الدالة العكسية للدالة $ص = س^٢$ ومثلها في شكل واحد.

مثال

٣ إذا كانت د دالة بحيث $د(س) = ٣ + \sqrt{١-س}$ فأوجد

أ مجال د(س) ومدى د(س) ب د^{-١}(س) وعين مجالها ومدها

الحل

أ د(س) معرفة لجميع قيم $س - ١ \leq ٠$ أي $س \leq ١$

$\therefore$ مجال د(س) $=]١, \infty[$

لجميع قيم $س$ الواقعة في مجال الدالة $٠ \leq \sqrt{١-س}$

$$\therefore ٣ \leq ٣ + \sqrt{١-س} \leq د(س) \leq ٣$$

$\therefore$ مدى د(س) $=]٣, \infty[$

ب $\therefore ٣ + \sqrt{١-س} = د^{-١}(س)$

بإستبدال المتغيرات $س$ ، $ص$

بتربيع الطرفين

$$٣ + \sqrt{١-ص} = س \quad س - ٣ = \sqrt{١-ص}$$

$$(س - ٣)^٢ = ١ - ص$$

$$ص = ١ - (س - ٣)^٢ \quad د^{-١}(س) = ١ - (س - ٣)^٢$$

مجال د^{-١}(س) $=]٣, \infty[$ ومدها $=]١, \infty[$

٩ حاول أن تحل

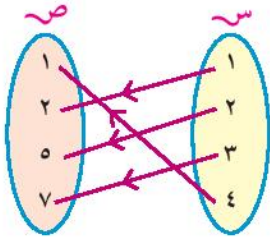
٣ إذا كانت د: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ بحيث د(س) = $\frac{1}{1+s}$

أ أوجد د^{-١}(س) وعين مجالها ومداها

ب مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البياني لكل د(س)، د^{-١}(س)

تمارين ٢ - ٤

١ أكمل:



أ إذا كانت الدالة د = {(١، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ١)} فإن د^{-١} =

ب الشكل المقابل يمثل دالة د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ فإن د^{-١}(٢) =

ج صورة النقطة (١، ٢) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة

د إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن د^{-١}(٦) =

ه إذا كان د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ فإن د^{-١}: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

٢ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ:

أ مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (.....)

ب الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (.....)

ج الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (.....)

د الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (.....)

٣ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ د(س) = $\frac{1}{4}س + ٤$ ب د(س) = $٤س$

ج د(س) = $\frac{٤}{س} + ٥$ د د(س) = $\frac{٣}{س}$

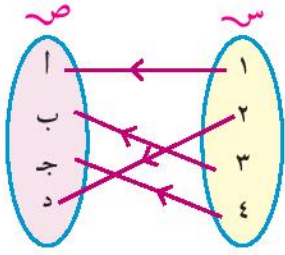
ه د(س) = $٨س - ٢$ و د(س) = $\sqrt[٣]{٤س - ٤}$

ز د(س) = $\sqrt[٣]{٣س - ٢}$ ح د(س) = $٢س$ حيث $٢س \leq ٧$

ط د(س) = $\sqrt[٢]{١ - س}$ حيث $١ \leq س$ ي د(س) = $٨س + ٧$ حيث $٧ \leq س$

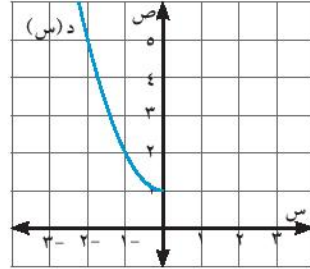
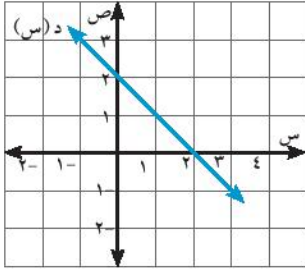
ك د(س) = $\sqrt[٢]{٩س - ٢}$ حيث $٣ > س > ٠$

ل د(س) = $\sqrt[٢]{٩س - ٢}$ حيث $٣ > س > ٠$



٤ أ إذا كانت $D(S) = S$. أوجد $D^{-1}(S)$ ومثلها بيانياً.
 ب الشكل المقابل يمثل دالة D من S إلى S فأوجد قيمة $D^{-1}(2) + D^{-1}(3)$.

٥ في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية $D^{-1}(S)$



٦ **اكتشف الخطأ:**

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة $D(S) = \frac{S-5}{S}$

حل رنا

بتبديل المتغيرات
 بالضرب التبادلي

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S-5}{S} &= D \\ \therefore \frac{S-5}{S} &= S \\ \therefore S-5 &= S^2 \\ \therefore S^2 - S + 5 &= 0 \\ \therefore S^2 - S &= -5 \\ \therefore D^{-1}(S) &= \frac{S-5}{S^2 - S} \end{aligned}$$

حل وائل

$$\begin{aligned} \therefore D(S) &= \frac{S-5}{S} \\ \therefore D^{-1}(S) &= \frac{1}{D(S)} \\ \therefore D^{-1}(S) &= \frac{S}{S-5} \div 1 = \frac{S}{S-5} \\ \therefore D^{-1}(S) &= \frac{S}{S-5} \end{aligned}$$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

٧ **سؤال مفتوح:** هل يمكن أن تكون الدالة D هي نفسها الدالة العكسية D^{-1} ؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

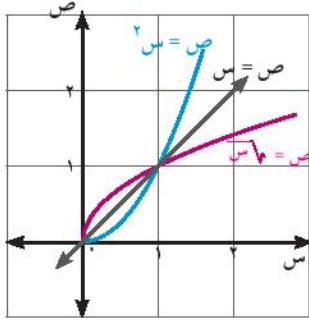
٨ في كل مما يأتي عين المجال الذي يكون فيه للدالة D دالة عكسية:

- أ $D(S) = S^2$ ب $D(S) = S^3$ ج $D(S) = \frac{1}{S}$

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

Logarithmic Function and Its Graph

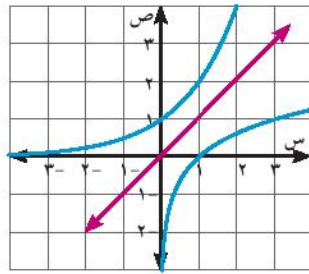
التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الأسية



استكشف

علمت أن الدالة $y = 2^x$ هي الدالة العكسية للدالة $y = \log_2(x)$ لكل $x \leq 0$ (صورته بالانعكاس في المستقيم $y = x$)

فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $y = 2^x$ بيانياً من خلال تمثيل قيم x ، y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.



س = 2^ص		ص = log_2(س)	
ص	س	ص	س
3-	1/8	1/8	3-
2-	1/4	1/4	2-
1-	1/2	1/2	1-
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

نجد مما سبق أن معكوس $y = 2^x$ هو $y = \log_2(x)$ ويسمى المتغير x في المعادلة $y = 2^x$ لوغاريتم x ويكتب $y = \log_2(x)$ ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس 2

تعلم

Logarithmic Function

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فإن الدالة $y = \log_a(x)$ حيث $x > 0$ هي الدالة العكسية للدالة $y = a^x$ وتسمى $y = \log_a(x)$ بالدالة اللوغاريتمية

مجال الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a(x)$ $x > 0$ مدى الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a(x)$ $y \in \mathbb{R}$ الصورة $y = \log_a(x)$ تكافئ الصورة $x = a^y$

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

- Logarithm لوغاريتم
- Inverse Function دالة عكسية
- Domain مجال
- Common Logarithm اللوغاريتم المعتاد

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

إرشادات للدراسة

- تسمى $y = \log_a(x)$ بالصورة اللوغاريتمية وتسمى $x = a^y$ بالصورة الأسية المكافئة لها.

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

(أ) $١٦ = ٤^٢$ تكافئ $٤ = ١٦$ لو $٢٥ = ٢٥$ تكافئ $٢ = ٢٥$ لو
 (ب) $١٦ = ٤^٢$ تكافئ $٤ = ١٦$ لو $٢٥ = ٢٥$ تكافئ $٢ = ٢٥$ لو
 (ج) $\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$ تكافئ $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ لو $٢٥ = ٢٥$ تكافئ $٢ = ٢٥$ لو

٦ حاول أن تحل

١ حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

(أ) $٤٩ = ٢٧$ (ب) $٥١٢ = (٢٧)^{١٠}$ (ج) $\frac{٨١}{٦٢٥} = \frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{1}{125} = ٥^{-٣}$

اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.
 مثال: ٧ لو تكتب ٧ لو ١٢٧ تكتب ١٢٧ لو

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

(أ) $٤ = ٨١$ لو $٨١ = ٤^٣$ تكافئ $٧ = ١٢٨$ لو $١٢٨ = ٧^٢$ تكافئ
 (ب) $٤ = ٨١$ لو $٨١ = ٤^٣$ تكافئ $٧ = ١٢٨$ لو $١٢٨ = ٧^٢$ تكافئ
 (ج) $٢ = \frac{1}{١٠٠}$ لو $٢ = \frac{1}{١٠٠}$ تكافئ $\frac{٣}{٤} = ٢٧$ لو $٢٧ = \frac{٣}{٤}$ تكافئ

٦ حاول أن تحل

٢ حول من الصورة اللوغاريتمية للصورة الأسية:

(أ) $٣ = ١٢٥$ لو (ب) $٥ = \frac{1}{٣٤٣}$ لو (ج) $٠ = ١$ لو (د) $٣ = ١٠٠٠$ لو

مثال

حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم

١ أوجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $٠,٠٠١$ لو (ب) $٢٧\frac{١}{٣}$ لو

الحل

١ بوضع ص = $٠,٠٠١$ لو

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$٠,٠٠١ = ١٠^{-٣}$

$١٠ = \frac{1}{١٠^٣}$

وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠ = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = $٣ = ٠,٠٠١$ لذلك فإن لو

٦ حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة كل من: (أ) $٠,٠٠٠٠١$ لو (ب) ١٢٨ لو

٢ بوضع ص = $٢٧\frac{١}{٣}$ لو

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣ = ٣^٣ = \frac{٣}{٣}$ من خواص الأسس

$\frac{٣}{٤} = ٢٧$

لذا فإن $\frac{٣}{٤} = ٢٧\frac{١}{٣}$ لو

مثال

٢ أوجد في E مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $١ = (٥ - س)$ ب لو $٢ = (٢ + س)$

الحل

أ المعادلة لكل قيم $س$ التي تحقق $٥ - س < ٥$ صفر؛ أي $س < ٥$ (مجال تعريف المتغير)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

$٥ - س = ١$ $\therefore ٢ = س$ $\therefore ٨ = س$

$\therefore س = ٤ \in$ مجال تعريف المتغير $\therefore$ مجموعة الحل هي $\{٤\}$

ب المعادلة معرفة لقيم $س$ التي تحقق

أي $\left. \begin{array}{l} ٢ + س < ٥ \\ ١ \neq س \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} ٢ + س < ٥ \\ ١ \neq س \end{array} \right\}$

أي صفر، $-\infty$ - $\{١\}$ (مجال تعريف المتغير)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

$٢ + س = ٢$ $\therefore س = ٠$ $\therefore س - ٢ = ٢$ $\therefore س = ٤$

$\therefore س = ٢$ أو $١ = س$ $\therefore س = ٢$ أو $١ = س$

$\therefore س = ١ \notin$ مجال تعريف المتغير $\therefore$ مجموعة الحل $\{٢\}$

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد في E مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $\frac{٢}{٤} = س$ ب لو $٢ = س$

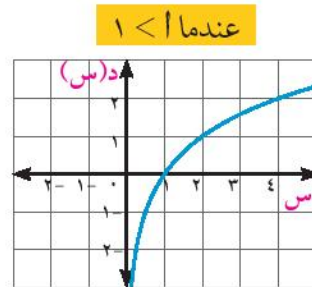
تعلم

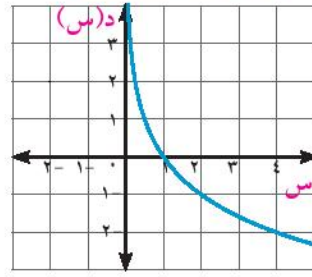
Graphical Representation of the Logarithmic Function

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:

تمثل الدالة $د$ حيث $د(س) = \log_s$ حيث $١ \neq س$ بيانياً كما في الأشكال الآتية:

المجال: $س > ٠$
المدى: $س \in \mathbb{R}$
التقاطع مع محور $س$: $(٠, ١)$
الاطراد: تزايدية $س > ١$
تناقصية $٠ < س < ١$



المجال: $\mathbb{R}^+$ المدى: $\mathbb{R}$ التقاطع مع محور س: $(0, 1)$ الاطراد: تناقصية على مجالها $\mathbb{R}^+$ عندما $1 > a > 0$ 

تفكير ناقداً: هل يمكنك استنتاج العلاقة بين منحنى الدالة الأسية ومنحنى الدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.

مثال

٣ مثل الدوال الآتية بياناً:

أ) د(س) = لو_٣ سب) د(س) = لو_٣ س

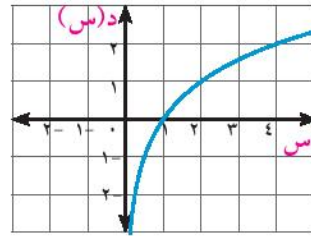
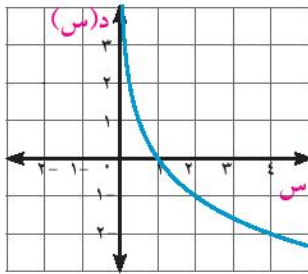
الحل

ب) لاحظ أن: الأساس: $1 > \frac{1}{3} > 0$

٤	١	٢	س
٢-	٠	١-	د(س)

أ) لاحظ أن: الأساس $1 < ٣$

٤	١	٢	س
٢	٠	١	د(س)



استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

log 2 4 = 2

log 3 8 = 1.579783597

١) لإيجاد لو_٣ ٤ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:٢) لإيجاد لو_٣ ٢٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:

تدريب

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

أ) لو_٣ ١٢ب) لو_٣ ٢٤ب) لو_٣ ٢٧

د) لو ١٢٨



تمارين ٢ - ٥



- ١) عبّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:
- أ) $2^{-3} = \frac{1}{9}$ ب) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$ ج) $5^0 = 1$ د) $4 = (2\sqrt{2})^4$
- ٢) عبّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:
- أ) $2 = 100$ ب) $\frac{5}{9} = 3\sqrt{2}$ ج) $1 = 7^0$ د) $4 = 121$
- ٣) عيّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:
- أ) $(س) = لو_3(1+س)$ ب) $(س) = 2 = لو_5$ ج) $(س) = (س-3)$ د) $(س) = لو_{(س-5)}$
- ٤) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:
- أ) $لو_2 16$ ب) $لو_{\frac{1}{2}} 5$ ج) $لو_8 1$ د) $لو_{\frac{3}{4}} 3\sqrt{2}$
- ٥) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
- أ) $لو_3 27 = س + 2$ ب) $لو_5 (3+س) = 2$ ج) $لو_2 (1+س) = 3$ د) $لو_2 (س) = 1$
- ٦) مثل بيانياً كل من الدوال الآتية:
- أ) $(س) = لو_3 س$ ب) $(س) = لو_{\frac{1}{3}} (1+س)$

٧	٣	١	صفر	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{8}$	س
						(دس)

٩	٣	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	س
					(دس)

- ٧) ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث $ر(س) = لو_3 س$ ، $د(س) = 6 - س$ ، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة $لو_3 س = 6 - س$.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٨) إذا كان $لو_3 س = 2$ فإن $س =$
 أ) ٩ ب) ٨ ج) ٣ د) ٥
- ٩) إذا كان $لو_3 16 = 4$ فإن $ا =$
 أ) {١٦} ب) {٢} ج) {٢، -٢} د) {١}
- ١٠) $لو_5 125 =$
 أ) $3\sqrt{2}$ ب) ٣ ج) ٥ د) ١٢٥

١١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو_(س-١) ٣ هو

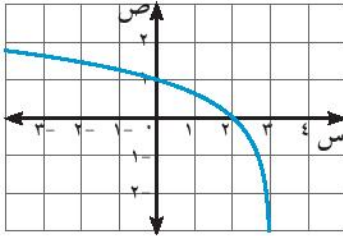
- أ) $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ ب) $]-\infty, 1[$ ج) $]1, \infty[$ د) $]1, 1[$

١٢) لو ١٠٠ =

- أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٥

١٣) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو_٣ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) =

- أ) ١ ب) ٢ ج) $\frac{1}{4}$ د) ٢



١٤) الشكل المقابل يمثل الدالة

- أ) ص_٣ = ١- ب) ص_٣ = ١+ ج) ص_٣ = ٢- د) ص_٣ = ٣-

- أ) ص_٣ = ٢- ب) ص_٣ = ٣- ج) ص_٣ = ٢- د) ص_٣ = ٣-

١٥) أوجد قيمة س في كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

- أ) لو_٣ ٨١ ب) لو_٣ $\frac{1}{8}$ ج) لو_٣ ٣٤٣ د) لو_٣ ٠,٠٠١

١٦) أوجد قيمة كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

- أ) لو_٣ ٣ = $\frac{3}{4}$ ب) لو_٣ (٢ - ٥) = ٠ ج) لو_٣ (٦ + ٢) = ٢ د) لو_٣ لو_٣ س = ٠ هـ) لو_٣ ($\frac{٣-٣}{٣-٣}$) = ١ و) لو_٣ |٢ + ١| = ١

١٧) **الربط بالتعليم:** إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول

الثانوي وعدد الأشهر (س) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(س) = ٧٠ - ٤ لو_٣ (١ + س)

فأوجد درجات هذا الطالب:

أولاً: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوي (س = ٠)

ثانياً: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوي.

١٨) **تطبيقات:** في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى

أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(س) = ٨٥ - ٢٥ لو_٣ (١ + س) حيث س عدد الأشهر بعد اكمال الدراسة، د(س) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد:

أ) درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.

ب) درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.

ج) درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

بعض خواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

استكشف



باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

- (١) $(\log_2 8 + \log_2 4)$ ، $\log_2 32$ (٢) $(\log_2 40 + \log_2 \frac{1}{5})$ ، $\log_{10} 100$
(٣) $(\log_2 27 - \log_2 9)$ ، $\log_2 3$ ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلم



بعض خواص اللوغاريتمات Some Properties of Logarithms

إذا كان $a \in \mathbb{R}^+$ ، $\{1\}$ فإن: (١) $\log_a 1 = 1$ (٢) $\log_a 1 = 0$ صفر

حاول إثبات كل من ١ ، ٢ من تعريف اللوغاريتم.

(٣) خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

$\log_a s + \log_a v = \log_a (s \cdot v)$ حيث $s, v \in \mathbb{R}^+$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع $\log_a s = x$ ، $\log_a v = y$

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

$s = a^x$ ، $v = a^y$

فتكون $s \cdot v = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ أي أن $\log_a (s \cdot v) = x + y$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: $\log_a s + \log_a v = \log_a (s \cdot v)$

وبالتعويض عن قيمتي x, y تكون $\log_a s + \log_a v = \log_a (s \cdot v)$

مثال



١) أوجد قيمة $\log_{10} 10$ في أبسط صورة إذا كان $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ، $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية.
- Logarithmic Equations
- مقياس ريختر.
- Richter Scale

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

الحل

$$\log_{10} 10 = \log_{10} (2 \times 5)$$

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 =$$

$$3,3219 \approx 2,3219 + 1 =$$

باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات

باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن $\log_{10} 5 \approx 2,3219$

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\log 2 \quad 1 \quad 0 \quad = \quad 3,321928095$$

٦ حاول أن تحل

١ أوجد قيمة $\log_{10} 10$ في أبسط صورة إذا كان $\log_{10} 5 \approx 2,3219$ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

٤ خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$$\log_{10} \frac{s}{v} = \log_{10} s - \log_{10} v \quad \text{حيث } s, v \in \mathbb{R}^+$$

(حاول أن تثبت صحة العلاقة)

مثال

٢ أوجد قيمة المقدار: $\log_{10} 30 - \log_{10} 3$.

الحل

$$\log_{10} 30 - \log_{10} 3 = \log_{10} \frac{30}{3} = \log_{10} 10 = 1$$

٦ حاول أن تحل

٢ أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: $\log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 5$

٥ خاصية لوغاريتم القوة:

$$\log_{10} s^v = v \log_{10} s \quad \text{حيث } s \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{R}$$

مثال

٣ أوجد في أبسط صورة $\log_{10} \sqrt[4]{125}$

الحل

$$\log_{10} \sqrt[4]{125} = \log_{10} (5)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_{10} 5 = \frac{3}{4} \times 2,3219 = 1,7414$$

لاحظ أن



$$\left(\frac{3}{4}\right) 5 = \sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3}$$

٩ حاول أن تحل

٣ ضع في أبسط صورة

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{243}{\sqrt{3}}, \log_{\frac{1}{3}} \frac{243}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن: $\log_{\left(\frac{1}{s}\right)} = -\log_s$ حيث $s \in \mathbb{R}^+$

٦ خاصية تغيير الأساس:

$$\text{إذا كانت } s \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{R}^+, \text{ أثبت أن: } \log_s \frac{u}{v} = \frac{\log_s u}{\log_s v}$$

(لا يمتحن فيه الطالب)

البرهان

بوضع: $\log_s u = x$

$$s^x = u$$

$$\log_s v = y \Rightarrow s^y = v$$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس

$$\log_s \frac{u}{v} = \log_s u - \log_s v$$

$$\log_s \frac{u}{v} = \log_s u - \log_s v$$

٩ حاول أن تحل

٤ استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: $\log_8 \frac{1}{2}$

ب $\log_9 \frac{1}{3}$

٧ - خاصية المعكوس الضربي: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

تفكير ناقد: إذا كانت $a, b \in \mathbb{R}^+$ فأثبت أن $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: $\log_7 \frac{1}{49} \times \log_7 \frac{1}{7}$ في أبسط صورة.

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

مثال

٤ اختصر لأبسط صورة:

$$\log_9 \frac{1}{81} \times \log_8 \frac{1}{64} \times \log_5 \frac{1}{125}$$

$$\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 \frac{1}{9} + \log_4 \frac{1}{16} - \log_5 \frac{1}{25}$$

الحل

خاصية ٥

$$\text{أ) المقدار} = \text{لو } ٢٥ + \text{لو } \frac{٨}{١٥} + \text{لو } ٢ - \text{لو } ٣٠$$

خاصية ٣، ٤

$$= \text{لو } \left(\frac{١}{٣٠} \times ٢٣ \times \frac{٨}{١٥} \times ٢٥ \right)$$

$$= \text{لو } ١٠٠ = ٢$$

خاصية ٦

$$\text{ب) المقدار} = \frac{\text{لو } ٩}{\text{لو } ٧} \times \frac{\text{لو } ٨}{\text{لو } ٩} \times \frac{\text{لو } ٥}{\text{لو } ٨} \times \frac{\text{لو } ٤٩}{\text{لو } ٥}$$

$$= \frac{\text{لو } ٢}{\text{لو } ٧} = \frac{\text{لو } ٤٩}{\text{لو } ٧} = ٢$$

٩ حاول أن تحل

$$\text{٥) اختصر: لو } ٠,٠٠٩ - \text{لو } \frac{٢٧}{١٦} + \text{لو } \frac{٥}{٨} - \text{لو } \frac{١}{١٣}$$

$$\text{٦) أثبت أن: } \frac{\text{لو } ٧٢٩ - \text{لو } ٦٤}{\text{لو } ٩ - \text{لو } ٤} = ٣$$

$$\text{٧) إذا كان س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٨ \text{ س ص، أثبت أن: } ٢ \text{ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص}$$

Solving Logarithmic Equations

حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال

$$\text{٥) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:}$$

$$\text{ب) لو س} + \text{لو } \frac{٣}{\text{س}} = ٣$$

$$\text{أ) لو (س - ١) + لو (س + ١) = \text{لو } \frac{٨}{٣}}$$

الحل

$$\text{أ) المعادلة معرفة لكل س } \exists \{ \text{س: س} - ١ < ٠ \} \cap \{ \text{س: س} + ١ < ٠ \} \text{ صفر}$$

أي س < ١ (مجال تعريف المتغير)

$$\text{لو (س - ١) + لو (س + ١) = لو } \frac{٨}{٣}$$

خاصية ٣

$$\therefore \text{لو (س - ١) (س + ١) = لو } \frac{٨}{٣}$$

$$\text{ومنها س} = \pm ٣$$

$$\therefore \text{س} = ٩$$

$$\therefore \text{س} = ١ - ٨$$

وحيث إن س = -٣ لا تنتمي لمجال تعريف المتغير $\therefore$ مجموعة الحل = {٣}

$$\text{ب) المعادلة معرفة لكل س } < \text{صفر، س} \neq ١$$

خاصية ٧

$$\therefore \text{لو س} + \frac{١}{\text{لو س}} = ٢$$

بالضرب في لو_٣ س

$$\therefore (\text{لو} \text{ س} - 1) = 2 \text{ صفر}$$

$$\therefore \text{س} = 3 \Rightarrow \text{مجال تعريف المتغير}$$

$$\therefore (\text{لو} \text{ س})^2 = 1 + 2 \text{ لو} \text{ س}$$

$$\therefore (\text{لو} \text{ س})^2 - 2 \text{ لو} \text{ س} + 1 = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{لو} \text{ س} = 1$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{3\}$$

٦ حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ج:

$$\text{أ} \quad \text{لو} \text{ س} + \text{لو} (2 + \text{س}) = 1 \quad \text{ب} \quad \text{لو} (8 - \text{س}) + 2 \text{ لو} 2 - \text{س} = 0 \quad \text{ج} \quad \text{لو} \text{ س} - \text{لو} 100 = 1$$

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات Solving Exponential Equations Using Logarithms

استخدام الآلة الحاسبة في حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال

٦ أوجد قيمة س في كل مما يأتي مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

$$\text{أ} \quad 5 = 1 + 3^2 \quad \text{ب} \quad 5 - 3 = 2 \times 3 \times 4^{1 + \text{س}}$$

الحل

يأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\text{أ} \quad 5 = 1 + 3^2$$

$$\therefore (\text{س} + 1) \text{ لو} 2 = \text{لو} 5$$

$$\therefore \text{لو} 5 = 1 + 3^2 \text{ لو} 2$$

$$\text{أي أن: س} = \frac{\text{لو} 5}{2} - 1 \quad \therefore \text{س} \approx 1,32$$

$$\therefore \text{س} + 1 = \frac{\text{لو} 5}{2}$$

استخدام الآلة الحاسبة:

$$\text{log } 5 \text{) } \div \text{ log } 2 \text{) } - 1 = 1,321928095$$

يأخذ لوغاريتم للطرفين

$$\text{ب} \quad 5 - 3 = 2 \times 3 \times 4^{1 + \text{س}}$$

$$\therefore \text{لو} 5 - 3 = \text{لو} 2 + 3 \text{ لو} 4 + \text{لو} 4^{1 + \text{س}}$$

$$\therefore \text{لو} 5 - 3 = \text{لو} (2 \times 3 \times 4^{1 + \text{س}})$$

$$\therefore \text{س لو} 5 - 5 \text{ لو} 2 = \text{لو} 2 + 3 \text{ لو} 4 + \text{س لو} 4 + \text{لو} 4$$

$$\therefore (\text{س} - 2) \text{ لو} 5 = \text{لو} 2 + 3 \text{ لو} 4 + (\text{س} + 1) \text{ لو} 4$$

$$\therefore \text{س} (\text{لو} 5 - \text{لو} 4) = (\text{لو} 2 + 4 \text{ لو} 4 + 3 \text{ لو} 4)$$

$$\therefore \text{س لو} 5 - 5 \text{ لو} 2 = \text{لو} 2 + 4 \text{ لو} 4 + 3 \text{ لو} 4$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{لو} 2 + 4 \text{ لو} 4 + 3 \text{ لو} 4}{\text{لو} 5 - \text{لو} 4} \approx 20,06$$

استخدم الآلة الحاسبة:

$$\log(3) + \log(4) + 2 \log(5) = \frac{\log(5)}{\log(4)} = 25.56104553$$

٩ حاول أن تحل

٩ أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

ب $3 - 2 = 4 - 3$

أ $3 - 2 = 4 - 3$

مثال

تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

٧ **الربط بالجيولوجيا:** إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة $D = \log(\frac{I}{I_0})$ ، حيث I هي شدة الزلزال، I_0 الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفري لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل 10^6 مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ $D = \log(\frac{I}{I_0})$ ، $I = 10^6 I_0$ ، $D = \log(10^6) = 6$

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب $D = \log(\frac{I}{I_0})$ ، $I = 10^7 I_0$ ، $D = 7,1$

$\therefore \log(\frac{I}{I_0}) = 7,1$ فتكون $I = 10^{7,1} I_0$

أي أن شدة الزلزال تعادل $10^{7,1}$ مرة تقريباً قدر الشدة الابتدائية.

٩ حاول أن تحل

١٠ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة $P(t) = 1,3 \times 10^6 e^{0,01t}$ ، حيث e عدد السكان، t السنة

أ احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

ب في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.



تمارين ٢ - ١



١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

- أ) لو ١٠٠٠ ب) لو ٣٢ ج) لو ١٦ د) لو ٤٩
 هـ) لو ٠,٠٠١ و) لو ٢ ز) لو ١ ح) لو ١/٢

٢ اختصر لأبسط صورة

- أ) لو ٢ + لو ٥ ب) لو ١٥ - لو ٣ ج) لو ٢٥ / لو ٥
 د) لو ٥ × لو ٢ هـ) لو ٥٤ - لو ٣ - لو ٢ و) ١ + لو ٣ - لو ٢ - لو ١٥

ز) لو أ + لو ب + لو ج ح) $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$

٣ علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة، حيث س، ص $\Rightarrow$ ع⁺، أ، ب $\Rightarrow$ ع⁻ {١}:

- أ) لو (س + ص) = لو س + لو ص ب) لو (س + ص) = لو س × لو ص
 ج) لو (س ص) = لو س + لو ص د) لو ٢ س° = ٥ لو ٢ س
 هـ) لو (س/ص) = لو س + لو ص^{-١} و) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}}$
 ز) إذا كان س > صفر فإن لو س^٤ = ٤ لو س

٤ إذا كان لو ٢ = س^٨، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س، ص كل من: لو ٦، لو ١٢

٥ أوجد قيمة س في كل مما يأتي مقرباً الناتج لرقمين عشريين.

- أ) ٥ = ٣ - س ب) ٧ = ١ + س ج) ٧ = $\frac{٥}{٣ - س}$ د) س لو س = ١٠٠ س

٦ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

- أ) لو س = ١ - لو (س - ٣) ب) لو (س + ٦) = ٢ لو س ج) لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١
 د) (لو س)^٢ - لو س = ٢ هـ) (لو س)^٣ = لو س^٩ و) ٣ لو س = ٢ لو ٣

ط) لو_٢ (٢ - ٤) + س - ٥ = صفر

ح) لو_٢ س + لو_٢ ٢ = ٢

ز) لو_٢ س = لو_٢ ٣

٧) استخدم الحاسبة في إيجاد قيمة كل من:

د) $\frac{200 \times 10 \times 3}{30 \times 7}$

ج) ٢ لو ٣ - ٥ لو ٧

ب) لو_٢ ٢٥

أ) لو ٣, ١٥

٨) **اكتشف الخطأ:** قامت كل من أميرة وإسراء بحل السؤال اختصر: لو_٢ س + لو_٢ ص - لو_٢ س ص

حل إسراء

المقدار = لو_٢ $\frac{س \times ص}{س \times ص}$ = لو_٢ س ص = لو_٢ س ص
 = لو_٢ (س ص) = ٢ لو_٢ س ص
 = ٢ (لو_٢ س + لو_٢ ص)

حل أميرة

المقدار = ٣ لو_٢ س + ٤ لو_٢ ص - ٢ لو_٢ س ص
 = ٣ لو_٢ س + ٤ لو_٢ ص - ٢ (لو_٢ س + لو_٢ ص)
 = ٣ لو_٢ س + ٤ لو_٢ ص - ٢ لو_٢ س - ٢ لو_٢ ص
 = لو_٢ س + ٢ لو_٢ ص

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

٩) **تفكير ابداعى:** بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:

لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + + لو (ظا ٨٩°)

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال Limits and Continuity

مقدمة الوحدة

ظهرت أولى أفكار حساب التفاضل والتكامل في أعمال الرياضي الإغريقي أرشميدس Archimedes ، الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل: حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدماً في ذلك طرقاً كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة في التكامل، وفي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين شغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل حتى قام كل من الإنجليزي نيوتن Newton والألماني لايبنتز Leibnitz كل على حدة باكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

والتفاضل والتكامل أو الحسبان Calculus هو أحد فروع الرياضيات التي تدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدالة وتحليلها ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيراً ما يحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ ما فيها من أنشطة يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف بعض الكميات غير المعينة مثل: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times 0$ ، ...
- ✚ يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:
- ✚ بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- ✚ يوجد نهاية دالة مستخدماً القانون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{c_n - d_n} = \frac{a - b}{c - d}$ إن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{a}{c}$
- ✚ يستنتج نهاية دالة مستخدماً القانون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{c_n - d_n} = \frac{a - b}{c - d}$ إن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{a}{c}$
- ✚ يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- ✚ يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.
- ✚ يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية .
- ✚ يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند نقطة يختلف حولها تعريف الدالة.
- ✚ يتعرف مفهوم اتصال الدالة:
- ✚ اتصال دالة عند نقطة - اتصال دالة على فترة - إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة.
- ✚ يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.

المصطلحات الأساسية

Polynomial Function	دالة كثيرة الحدود	Unspecified Quantity	كمية غير معينة
Limit of a Function at Infinity	نهاية الدالة عند اللانهاية	Undefined	غير معرف
Trigonometric Function	دالة مثلثية	Right Limit	نهاية يميني
Limit of a Trigonometric Function	نهاية دالة مثلثية	Left Limit	نهاية يسري
Continuity of a Function	اتصال دالة	Limit of a Function	نهاية دالة
		Direct Substitution	تعويض مباشر

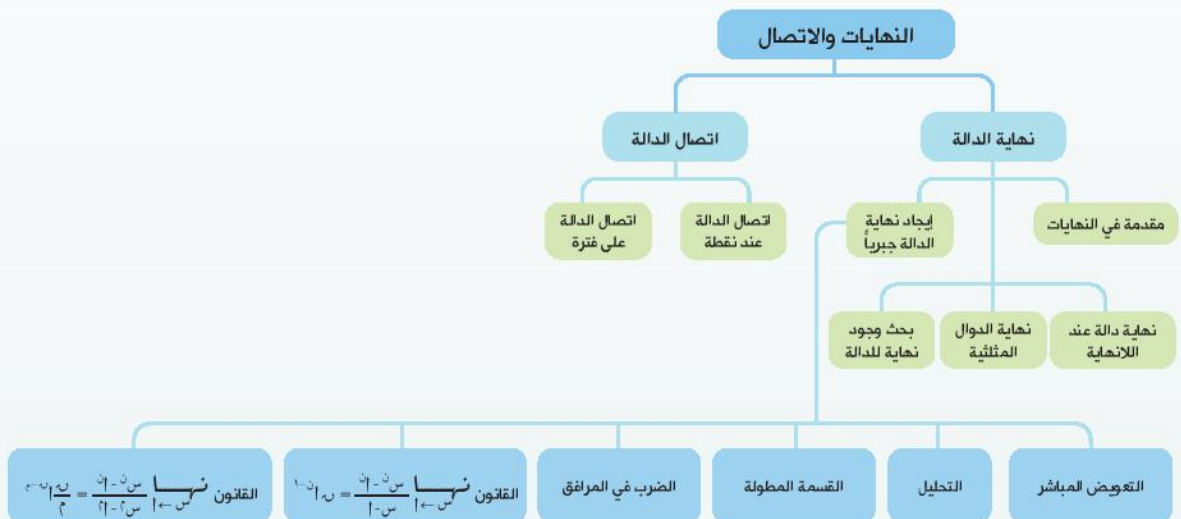
الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلي - برامج رسومية

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ٣): مقدمة في النهايات.
الدرس (٢ - ٣): إيجاد نهاية الدالة جبرياً.
الدرس (٣ - ٣): نهاية دالة عند اللانهاية.
الدرس (٤ - ٣): نهايات الدوال المثلثية.
الدرس (٥ - ٣): بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.
الدرس (٦ - ٣): الاتصال.

مخطط تنظيمي للوحدة



مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

١ - ٣

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل. وفي هذه الوحدة سوف نتعرف على مفهوم نهاية الدالة من الناحية البينانية والجبرية. ولكن قبل ذلك دعنا نتعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تذكر أن

∞ هي رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

$9 - 4$	$4 \div 28$	5×3
$3 + \infty$	$0 \div 0$	$0 \div 7$
	$00 - 00$	$00 \div 00$

أضف إلى معلوماتك
مجموعة الأعداد الحقيقية
يرمز لها بالرمز ∞
حيث $\infty = \{ \infty \} \cup \{ -\infty \}$

Unspecified Quantities

الكميات غير المعينة:

تعلم

فى بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١، ٢، ٣ بينما بعض النواتج لا يمكن تحديدها مثل باقى العمليات.
لاحظ أن: $0 \div 7$ غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لأمعنى لها.
والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $0 \div 0$.

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفرًا، لذلك فإن $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ (لماذا؟)

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، $-\infty$ كالآتى:

لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن:

$-\infty < a < \infty$ $-\infty < a < \infty$

$-\infty < a < \infty$ $-\infty < a < \infty$

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة

Unspecified Quantities

Undefine غير معرف

مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة

Extended Real Numbers

Right Limit نهاية يمنى

Left Limit نهاية يسرى

Value of a Function قيمة دالة

Limit of a Function نهاية دالة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال

١ أوجد ناتج العمليات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $\infty + 4$ ب $\infty - 3$ ج $3 \div 0$ د $0 \div 5$
 هـ $\infty + \infty$ و $0 \div 0$ ز $\infty \times 5$ ح $\infty - 6$

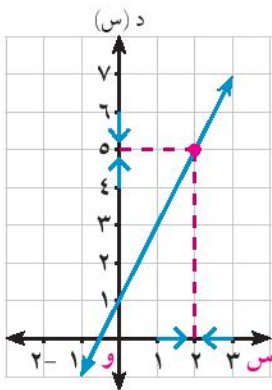
الحل

أ ∞ ب ∞ ج ∞ د غير معرفة
 هـ ∞ و كمية غير معينة ز ∞ ح ∞

٢ حاول أن تحل

١ أوجد ناتج العمليات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $(2-) \div 0$ ب $0 \div 7$ ج $9 \div 0$ د $0 \times \infty$
 هـ $\infty \times (7-)$ و $12 + (\infty -)$ ز $\infty + \infty$ ح $\infty \div \infty$



نهاية دالة عند نقطة:

ادرس قيم الدالة د حيث د (س) = ٢س + ١ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول الآتي:

د(س)	س > ٢
٤,٨	١,٩
٤,٩٨	١,٩٩
٤,٩٩٨	١,٩٩٩
٤,٩٩٩٨	١,٩٩٩٩
.....	
↓	↓
د(٢) ← ٥	س ← ٢

د(س)	س < ٢
٥,٢	٢,١
٥,٠٢	٢,٠١
٥,٠٠٢	٢,٠٠١
٥,٠٠٠٢	٢,٠٠٠١
.....	
↓	↓
د(٢) ← ٥	س ← ٢

نلاحظ من النشاط السابق أن:

عندما تقترب س من اليمين ومن اليسار من العدد (٢) فإن د(س) تقترب من العدد (٥)

أي أن د(٢) = ٥ = د(٢) ونعبر عن ذلك رياضياً كالآتي: $\lim_{s \rightarrow 2} (2s + 1) = 5$ والتمثيل البياني للدالة يوضح ذلك:

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما تقترب س من أ من جهتي اليمين واليسار، فإن نهاية

د(س) تساوي ل وتكتب رمزياً: $\lim_{s \rightarrow a} f(s) = l$

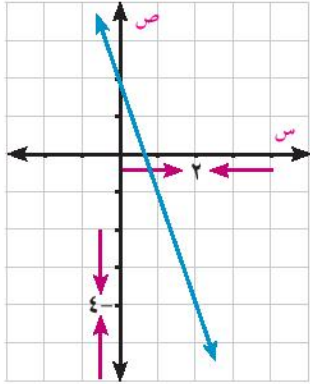
وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوي ل

مثال

تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

٢ قدر نها $\lim_{s \rightarrow 2} (3 - s)$ بيانياً وعددياً

الحل



بيانياً: تمثل الدالة الخطية: $ص = 3 - 2$ بيانياً كما بالشكل المقابل:

ومن الرسم نلاحظ أن:

عندما $s \leftarrow 2$ فإن $د(س) \leftarrow 1$

أي أن: نها $\lim_{s \rightarrow 2} (3 - s) = 1$

عدياً: نكون جدولاً لقيم $د(س)$ وذلك باختيار قيم s تكون قريبة من العدد 2 من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتي:

1,9	1,99	1,999	→	2	←	2,001	2,01	2,1	س
3,7-	3,97-	3,997-	→	1-	←	4,003-	4,03-	4,3-	د(س)

بين الجدول أنه كلما s اقترب من العدد 2 من اليمين أو اليسار فإن قيم $د(س)$ تقترب من العدد 1-

٢ حاول أن تحل

٢ قدر نهاية كل مما يأتي بيانياً وعددياً.

ب) نها $\lim_{s \rightarrow 2} (3 - s)$

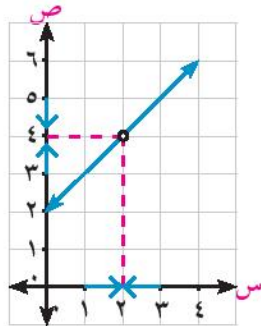
أ) نها $\lim_{s \rightarrow 1} (3 - s)$

مثال

تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

٣ قدر نها $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 4}{s - 2}$ بيانياً وعددياً.

الحل



بيانياً: بين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة $د$ حيث: $د(س) = \frac{s^2 - 4}{s - 2}$

حيث $s \neq 2$.

ونلاحظ من الشكل أنه عندما $s \leftarrow 2$ فإن قيمة $د(س) \leftarrow 4$

لذلك فإن: نها $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 4}{s - 2} = 4$

عدياً: نكون جدولاً لقيم $د(س)$ ، وذلك باختيار قيم s القريبة من العدد 2

1,9	1,99	1,999	→	2	←	2,001	2,01	2,1	س
3,9	3,99	3,999	→	4	←	4,001	4,01	4,1	د(س)

بين الجدول أنه كلما اقتربت s من العدد 2 من اليمين أو اليسار فإن قيم $د(س)$ تقترب من العدد 4.

لاحظ من هذا المثال أن:

١ الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين $\frac{0}{0}$ عندما $s = 2$

٢ وجود نهاية للدالة عندما $s \leftarrow 2$ لا تعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $s = 2$ حيث إن $s \in \mathbb{C} - \{2\}$ وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهمًا في النهايات.

٩ حاول أن تحل

٣ قدر نهاية كل مما يأتي بيانًا وعدديًا:

ب) نها $\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}$ نها $\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}$

أ) نها $\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}$ نها $\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}$

نشاط

استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)
استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:

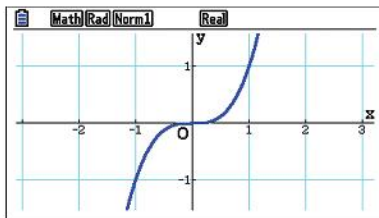
١ د(س) = س^٣ عند س $\leftarrow$ صفر

٢ د(س) = $\left(\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}\right)$ عند س $\leftarrow$ ١

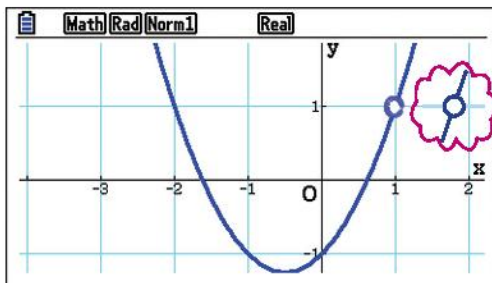
٣ د(س) = $\frac{\cos s}{s}$ عند س $\leftarrow$ صفر

يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل (Geogebra)

في الحاسب الآلي أو في التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتي:



١ باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة حيث: د(س) = س^٣
من الرسم نها د(س) = صفر

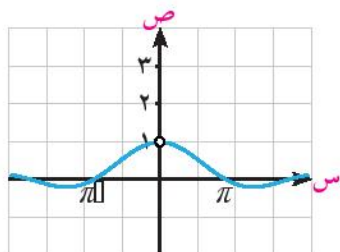


٢ باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث

$$د(س) = \left(\frac{s^2 - 2s - 3}{s - 3}\right)$$

من الرسم نها د(س) = ١

(لاحظ الفجوة عند النقطة (١، ١))



٣ باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \frac{\cos s}{s}$$

من الرسم نجد أن نها $\frac{\cos s}{s} = ١$

نستنتج من النشاط السابق أن:

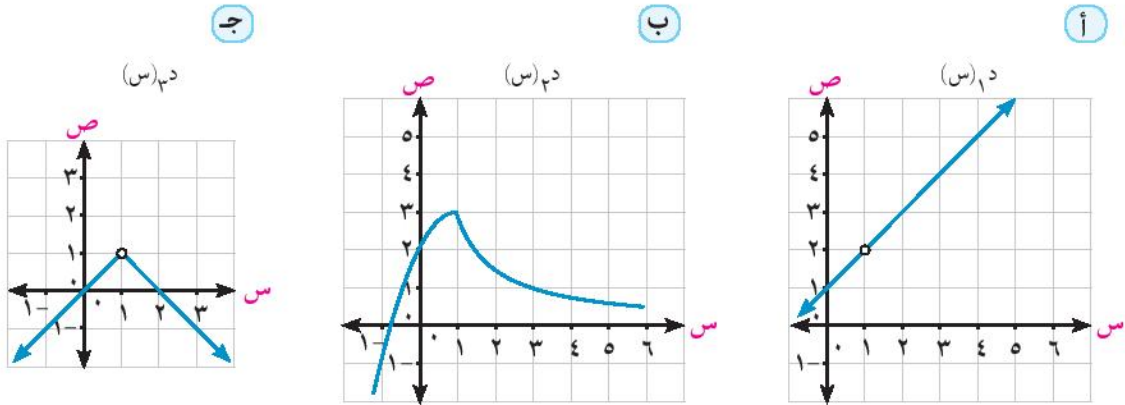
إن وجود نهاية الدالة عندما $s \leftarrow a$ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $s = a$

تفكير ناقد: إذا كانت الدالة د معرفة عند $s = 1$ فهل هذا يعني وجود النهاية عند 1 فسر إجابتك.
تدريب على النشاط: باستخدام الحاسبة البيانية أو بأحد البرامج الرسومية للحاسوب أو التابلت قدر كلاً مما يأتي:

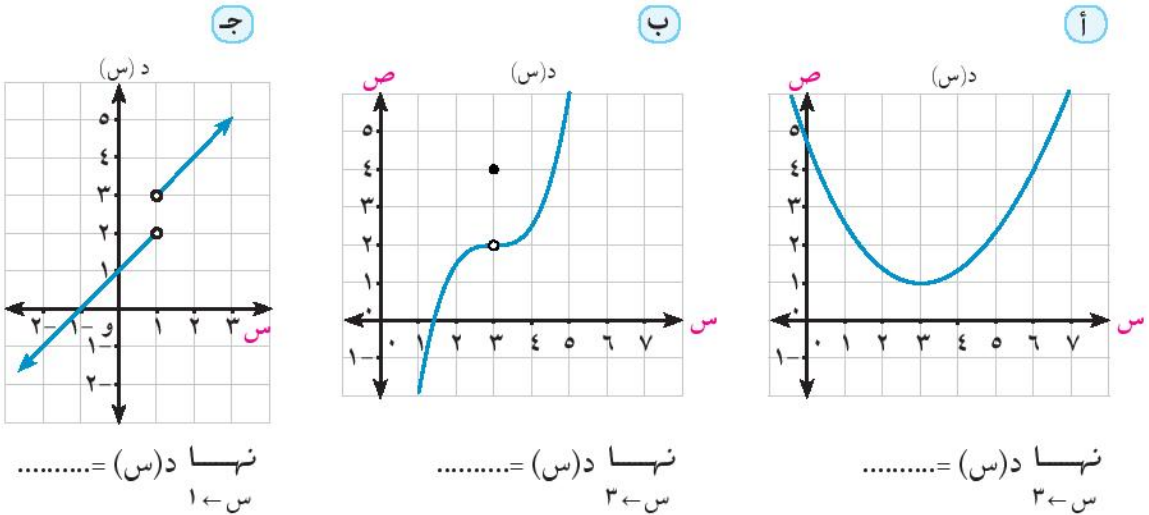
أ) نها $(2 - s)$ س $\leftarrow 0$ ب) نها $\frac{s^2 + 8}{s^2 + 2}$ س $\leftarrow 2$ ج) نها $\frac{s^3 + 3}{s}$ س $\leftarrow 0$

تمارين ٣ - ١

١) قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند $s \leftarrow 1$

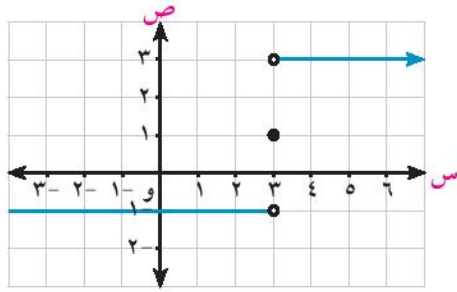


٢) قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:



٣) من الرسم البياني أوجد:



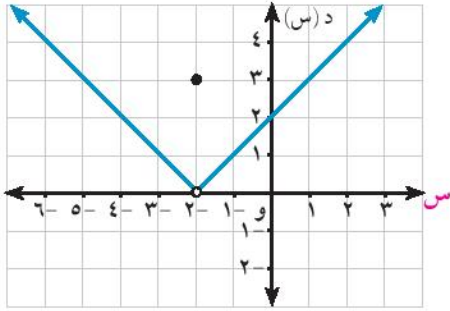


٤ من الرسم البياني المقابل أوجد

أ نها د(س)

س ← ٣

ب د(٣)



٥ من الرسم البياني المقابل أوجد:

أ نها د(س)

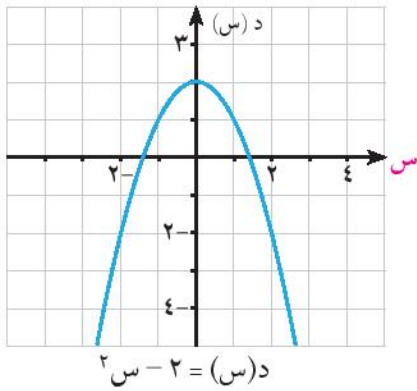
س ← ٢

ب د(٢)

ج نها د(س)

س ← ٠

د د(٠)

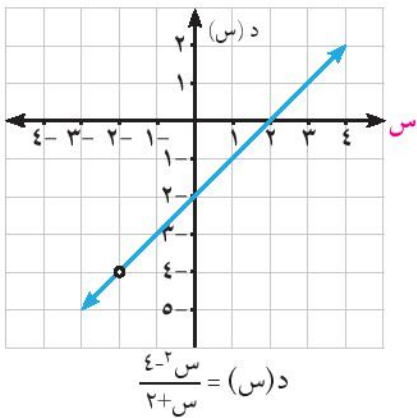


٦ من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها (٢ - س)

س ← ٠

ب د(٠)

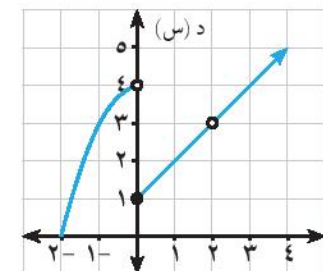


٧ من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها $\frac{4-s^2}{2+s}$

س ← ٢

ب د(٢)



٨ من الشكل البياني المقابل أوجد:

ب نها د(س)

س ← ٠

د نها د(س)

س ← ٢

أ د(٠)

ج د(٢)

٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 4)$ حيث $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					٢				

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1)$ حيث $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)					١				

١١ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1+x}$ حيث $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)					١				

١٢ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ حيث $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					٢				

١٣ باستخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل مما يأتي ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الإرشادية.

ب نها $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4)$

د نها $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8}{x^2 - 2}$

و نها $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1}$

ح نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$

أ نها $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4)$

ج نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

ه نها $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)$

ز نها $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة في إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية
- نهاية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ إذا $g(a) \neq 0$
- نهاية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ إذا $g(a) = 0$ و $f(a) \neq 0$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تحليل Factorization
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند $s = a$ بيانياً أو عددياً عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من $s = a$ وفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية في رسم الشكل البياني لكل من الدالتين:

$$d_1(s) = \frac{s^2 - 2s - 2}{s - 2}, \quad d_2(s) = s + 1$$

ماذا تلاحظ؟

أوجد: نهاية $d_1(s)$ ، نهاية $d_2(s)$

ماذا تستنتج؟

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of a Polynomial Function

إذا كانت $d(s)$ كثيرة حدود، $a \in \mathbb{R}$

فإن: نهاية $d(s)$ عند $s = a$ هو $d(a)$

تذكر أن

تسمى الدالة كثيرة حدود إذا كانت على الصورة $d(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ حيث: $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \neq 0$ ، $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

مثال

التعويض المباشر

أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ) نهاية $(s^2 - 3s + 5)$ عند $s = 2$

ب) نهاية $(-4s^3)$ عند $s = 3$

الحل

أ) نهاية $(s^2 - 3s + 5)$ عند $s = 2$ هو $2^2 - 3(2) + 5 = 0 + 6 - 4 = 2$

ب) نهاية $(-4s^3)$ عند $s = 3$ هو $-4(3^3) = -108$

(بالتعويض المباشر)

لاحظ أن $d(s) = -4s^3$ ثابتة لكل قيم $s \in \mathbb{R}$

٩ حاول أن تحل

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) نها $(٥ - س)$ س $\leftarrow ٣$ ب) نها $(٣س^٢ + س - ٤)$ س $\leftarrow ٢$ ج) نها (٧) س $\leftarrow ٢$

النتيجة:

إذا كان نها $(س) = ل$ س $\leftarrow ١$ ، نها $(س) = م$ س $\leftarrow ١$ فإن:

١) نها $(س) = ك.ل$ س $\leftarrow ١$ حيث $ك \Rightarrow ع$ ٢) نها $(س) = [د(س) \pm و(س)]$ س $\leftarrow ١$ بشرط $م \neq ٠$ ٣) نها $(س) = و(س) \cdot ل(س)$ س $\leftarrow ١$ ٤) نها $(س) = \frac{د(س)}{و(س)}$ س $\leftarrow ١$ ٥) نها $(س) = ل(س) \cdot ن(س)$ س $\leftarrow ١$ حيث $ل \Rightarrow ع$

مثال

استخدام النظرية

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) نها $\frac{٧+س^٣}{٥-س^٢+س}$ س $\leftarrow ١$ ب) نها $(٣س^٢ - ٣)$ س $\leftarrow ٢$

الحل

أ) نها $\frac{٧+س^٣}{٥-س^٢+س}$ س $\leftarrow ١$ = $\frac{٧+١-٣}{٥-(١-٢)+١} = \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٤}$ ب) نها $(٣س^٢ - ٣)$ س $\leftarrow ٢$ = $\frac{٣(٢-٢)}{٣-٢} = \frac{٠}{١} = ٠$

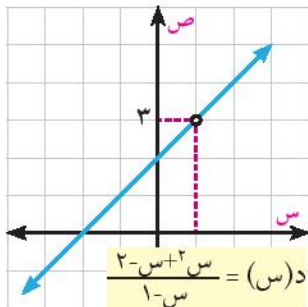
٩ حاول أن تحل

٢ احسب النهايات الآتية:

أ) نها $\frac{٣-س^٢}{١+س^٢}$ س $\leftarrow ٢$ ب) نها $\sqrt[٣]{١+س^٢}$ س $\leftarrow ٢$

إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

لا يمكن إيجاد نها $(س)$ حيث $د(س) = \frac{٢-س+س^٢}{١-س}$ باستخدام التعويض المباشر



حيث نصل إلى إحدى حالات عدم التعيين $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، ويبين الشكل المقابل

التمثيل البياني للدالة حيث نجد أن نها $(س) = ٣$ س $\leftarrow ١$

وبعد تبسيط الدالة واختصار العوامل المتشابهة غير الصفريية نصل للدالة

$و(س) = س + ٢$ حيث $و(س) = د(س)$ لجميع قيم $س \in \mathbb{R} - \{١\}$.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ لكل $\epsilon > 0$ - {1}

وكانت نهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ فإن نهاية $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

مثال

استخدام التحليل

٣ استخدم التحليل لإيجاد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$

الحل

أ) نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$ غير معينة عند $x = 1$

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفرية فإنه يمكن كتابة $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ على الصورة.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

من ذلك نجد إن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ لكل $x \neq 1$

وحيث أن نهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

فإنه طبقاً للنظرية ٣ نستنتج أن نهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

طريقة القسمة المطولة

ب) نجد أن دالة البسط $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ وذلك بالتعويض عن $x = 1$ ، كذلك دالة المقام $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ وبالتعويض أيضاً عن $x = 1$ وهذا يعني أن العامل $(x - 1)$ مشترك في كل من البسط والمقام، ونظراً لصعوبة تحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها $(x - 1)$ نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار $x^2 - 2x + 1$ كالآتي:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 : x - 1 \\ \underline{-(x - 1)} \\ x - 1 \\ \underline{-(x - 1)} \\ 0 \end{array}$$

ارشاد للحل

في عملية القسمة المطولة

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً بنفس الطريقة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة

تسمى طريقة القسمة التركيبية

نستخدم في هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلي:

خطوة ١: نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوي

المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:

المعاملات $1 + 1 - 2 - 0 - 1$ | قيمة س

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}$$

خطوة ٢: اترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول في قيمة س واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني ثم اجمع.

خطوة ٣: كرر عمليتي الضرب والجمع.

نجد أن معاملات خارج القسمة هي: ١، ١-، ١- على الترتيب لذلك، فإن خارج

القسمة هو $س^٢ - س - ١$

أي أن: $س^٢ - س - ١ = (س - ١)(س - ٢) + (س - ١)$

لذلك فإن: $\frac{1}{س^٣ - س^٢ - س - ١} = \frac{س^٢ - س - ١}{(س - ١)(س - ٢) + (س - ١)} = \frac{س^٢ - س - ١}{س - ١} = \frac{س^٢ - س - ١}{س - ١} = \frac{س^٢ - س - ١}{س - ١}$

٦ حاول أن تحل

٣ أوجد:

ب $\frac{س^٢ - ٨}{س^٣ - ١٢} = \frac{س^٢ - ٨}{س^٣ - ١٢}$

د $\frac{س^٢ - ١٠}{س^٣ - ٣} = \frac{س^٢ - ١٠}{س^٣ - ٣}$

أ $\frac{س^٢ + ٨}{س^٢ - ٢} = \frac{س^٢ + ٨}{س^٢ - ٢}$

ج $\frac{س^٢ - ٢}{س^٢ - ٦} = \frac{س^٢ - ٢}{س^٢ - ٦}$

Conjugate

استخدام المرافق

مثال

٤ أوجد النهايات الآتية:

ب $\frac{س^٢ - ٥}{س^٣ - ٤} = \frac{س^٢ - ٥}{س^٣ - ٤}$

أ $\frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤} = \frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤}$

الحل

أ لاحظ أن: $\frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤} = \frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤}$ غير معينة عند س = ٤

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط والمقام.

$$\frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}$$

$$\frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}$$

$$\frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٤} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)} = \frac{س^٢ - ٣}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}$$

$$\text{ب) } \frac{3 + \sqrt{4 + s}}{3 + 4 + s} \times \frac{s^{5-2}}{3 - 4 + s} = \frac{s^{5-2}}{3 - 4 + s} = \frac{s^3}{s-1}$$

$$\frac{(3 + \sqrt{4 + s})(s-1)}{(s-1)} = \frac{(3 + \sqrt{4 + s})(s-1)}{s-1} =$$

$$30 = (3+2) \cdot 5 = (3 + \sqrt{4 + s}) \cdot 5 =$$

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

$$\text{أ) } \frac{2 - \sqrt{1 - s}}{s-5}$$

$$\text{ب) } \frac{1 + s}{2 - 5 + s}$$

نظرية ٣

إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) = $\frac{f(s)}{g(s)}$ فإن $\lim_{s \rightarrow a} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ ن | ن | ن

نشاط

استعن بمعلمك للبحث في الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).

مثال

إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)

$$\text{٥ أوجد } \frac{81 - s^4}{3 - s}$$

الحل

$$\frac{81 - s^4}{3 - s} = \frac{(3 - s)(27 + 9s + 3s^2 + s^3)}{3 - s} = 27 + 9s + 3s^2 + s^3$$

نتائج

نتائج على النظرية:

$$\text{٢- } \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f(a)}{g(a)} \text{ ن | ن | ن}$$

$$\text{١- } \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f(a)}{g(a)} \text{ ن | ن | ن}$$

مثال

٦ أوجد:

$$\text{ب) } \frac{32 - s^5}{4 - s^2}$$

$$\text{أ) } \frac{625 - (5 + s)}{s}$$

$$\text{د) } \frac{32 - s^5}{64 - s^3}$$

$$\text{ج) } \frac{32 + (4 - s)}{2 - s}$$

الحل

أ) نها $\frac{٥٠ - ٤(٥ + س)}{س} = ٣٥ \times ٤ = ٥٠٠$ س ← ٠

ب) نها $\frac{٥٢ - ٥}{٢٢ - ٢} = ٣٢ \times \frac{٥}{٢} = ٨٠$ س ← ٢

ج) نها $\frac{٣٢ + ٥(٤ - س)}{٢ - س} = \frac{٥(٢ - س) - ٥(٤ - س)}{(٢ - س) - (٤ - س)}$ س ← ٢

$٨٠ = ٤(٢ - ٥) =$

د) نها $\frac{٣٢ - ٥}{٦٤ - ٣} = \frac{٣٢ - ٥}{٦٤ - ٣}$ س ← ١٦

$\frac{٥}{١٢} = \frac{١}{٤} - ١٦ \times \frac{٥}{٦} = (٢ - \frac{٥}{٢}) \times \frac{٥}{٢} =$

لاحظ أن



$\frac{٥}{٤} \times ٤٢ = \frac{٥}{٤} (٤٢) = \frac{٥}{٤} ١٦$

$٣٢ = ٥٢ =$

كذلك فإن:

$٦٤ = \frac{٢}{٢} ١٦$

٩ حاول أن تحل

أوجد:

ج) نها $\frac{٢ - ٣٥ + س}{٧ - س}$ س ← ٧

ب) نها $\frac{١٢٨ - ٧}{١٦ - س}$ س ← ١٦

أ) نها $\frac{٦٢٥ - ٤}{٥ + س}$ س ← ٥

تفكير إبداعي:

إذا كان نها $\frac{٦٤ - س}{٢ - س} = ل$ فما قيمة: ن ، ل

تمارين ٢ - ٣

أكمل ما يأتي:

١) نها $\frac{٣(١ - س)}{٢ - س} =$ س ← ١

٢) نها $\frac{٣ - س}{١ + س} =$ س ← ١

٣) نها $\frac{س - ٢}{س} =$ س ← ٠

٤) نها $\frac{س - ٢}{٢ - س} =$ س ← ٢

٥) نها $\frac{٥ - ٥}{١ - س} =$ س ← ١

٦) نها $\frac{٢ - س}{٢ - س} =$ س ← ٢

٧) نها $\frac{١ - \frac{١}{٣}}{١ - س} =$ س ← ١

٨) نها $\frac{١ - ٢ - ١ - س}{٣ - ٢ - ٣ - س} =$ س ← ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٩) نها $\frac{١ - ٢}{١ + س} =$ تساوى س ← ١

٥) ليس للدالة نهاية

ج) ٣

ب) ٢ -

أ) ٣ -

١٠) نها $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ تساوى

ب) $\frac{\pi}{2}$

ج) $\frac{2}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

١١) نها $\frac{\sqrt{1-s}-1}{16-s}$ تساوى:

ب) $\frac{1}{2}$

ج) ١

د) ليس للدالة نهاية

١٢) نها $\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ تساوى

ب) ١

ج) $\frac{4}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

١٣) نها $\frac{\text{س}^{\circ}-243}{\text{س}^2-27}$ تساوى

ب) $\frac{0}{3}$

ج) ١٥

د) ٩

١٤) نها $\frac{\text{س}^2-14}{\text{س}^2-2}$ لها وجود فإن تساوى:

ب) ١

ج) ٢

د) ٤

١٥) نها $\frac{\text{س}^{\circ}}{2(2-\text{س})}$ تساوى:

ب) صفر

ج) ٥

د) ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

١٦) نها $\frac{\text{س}^2-3\text{س}+2}{\text{س}^2-3}$

١٧) نها $\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^2-3}$

١٨) نها $\frac{\text{س}^2-9}{\text{س}^2-81}$ (جاس)

١٩) نها $\frac{\text{جاس}^2}{\text{س}}$

٢٠) نها $\frac{\text{س}+1}{\text{س}^2+1}$

٢١) نها $\frac{\text{س}-9}{\text{س}^2-81}$

٢٢) نها $\frac{\text{س}^2-7\text{س}+10}{\text{س}^2-2\text{س}}$

٢٣) نها $\frac{\text{س}^2+6\text{س}+5}{\text{س}^2-3\text{س}-4}$

٢٤) نها $\frac{\text{س}+\sqrt{12}}{\text{س}-9}$

٢٥) نها $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\text{س}+2}}{\text{س}}$

٢٦) نها $\frac{\text{س}+2}{\text{س}^2-16}$

٢٧) نها $\left(\frac{\text{س}^2-2}{\text{س}-1} + \frac{2}{\text{س}}\right)$

٢٨) نها $\frac{\text{س}^3+3\text{س}^2-12\text{س}+4}{\text{س}^2-4\text{س}}$

٢٩) نها $\frac{\text{س}^3-4\text{س}^2-5\text{س}+4}{\text{س}^2-7\text{س}-4}$

٣٠) نها $\frac{\text{س}^2-9}{\text{س}^3-2\text{س}^2+3\text{س}-10}$

٣١) نها $\frac{\text{س}^{\circ}-32}{\text{س}-2}$

٣٢) نها $\frac{\text{س}^{\circ}-(16)^2}{\text{س}-2}$

٣٣) نها $\frac{\sqrt{1-\text{س}}}{\text{س}-1}$

٣٤) نها $\frac{\text{س}^{\circ}-12}{\text{س}-2}$

٣٥) نها $\frac{\sqrt{1250}-7}{\text{س}^2-250}$

٣٦) نها $\frac{\sqrt{3-\text{س}}}{\text{س}-81}$

٣٧) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٣٨) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٣٩) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٠) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤١) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٢) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٣) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٤) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٥) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٦) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٧) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٨) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٤٩) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٥٠) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

٥١) نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$ نها $\frac{س-٧}{س-٣٢}$

نشاط



٥٢) **الربط بالحجم** صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤ سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

أولاً: ارسم شكلاً توضيحياً للعلبة.

ثانياً: أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة $ح = س(٢٤ - ٢س)$

ثالثاً: أوجد حجم العلبة عندما $س = ٤$ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما $س \leftarrow ٤$ مستخدماً الجدول التالي:

س	٣	٣,٥	٣,٩	←	٤	→	٤,١	٤,٥	٥
ح				←		→			

رابعاً: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند $س = ٤$

تفكير إبداعي:

٥٣) إذا كان نها $\frac{س-٥}{س-٢} = ١$ فأوجد: نها $\frac{س-٥}{س-٢}$ د(س)

٥٤) إذا كان نها $\frac{س-٥}{س-٢} = ٥$ فأوجد: نها $\frac{س-٥}{س-٢}$ د(س)

٥٥) نها $\frac{س-٥}{س-٢}$ د(س) نها $\frac{س-٥}{س-٢}$ د(س)

٥٥) **الربط بالتجارة:** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة $د(س) = س(٢ - ٥س + ٤٠)$ أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

سوف تتعلم

- نهاية دالة عند اللانهاية.
- إيجاد نهاية دالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبري.
- إيجاد نهاية دالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.

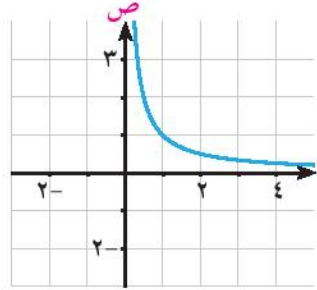
Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

نحتاج في كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة $D(s)$ عندما $s \rightarrow \infty$ والنشاط التالي يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب في رسم الدالة $D(s)$

حيث: $D(s) = \frac{1}{s}$ ، $s < 0$

ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم s

الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم نلاحظ أن:

كلما زادت قيم s واقتربت من ما لانهاية اقتربت قيم $D(s)$ من عدد محدد.

أكمل الجدول التالي لإيجاد العدد الذي تقترب منه $D(s)$

$s \rightarrow \infty$	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠	s
$D(s) \rightarrow ?$				٠,٠١	٠,١	$D(s)$

تعلم

Limit of a Function at Infinity

نهاية دالة عند اللانهاية

من النشاط السابق نجد أنه كلما اقتربت s من ما لانهاية اقتربت قيم $D(s)$ من الصفر.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0 \quad \{ \text{حيث } n \in \mathbb{N}^+, \text{ ثابت} \}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0$$

قواعد أساسية:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0 \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0 \quad \text{إذا كان } n \text{ عددًا موجبًا فإن } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^n} = 0$$

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند

$s \rightarrow \infty$ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع $s \rightarrow \infty$ بدلًا من

$s \rightarrow a$

مثال

أوجد: ١

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right)$ ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right)$

ثم تحقق من ذلك بيانياً باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} 3 + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 3 + 0 = 3$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right) = 3$

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s} - \lim_{s \rightarrow \infty} 4 = 0 - 4 = -4$

$-4 = 0 - 4 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s} - 4$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right) = -4$

٦ حاول أن تحل

أوجد: ١

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{0}{s}\right)$ ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{s}\right)$

مثال

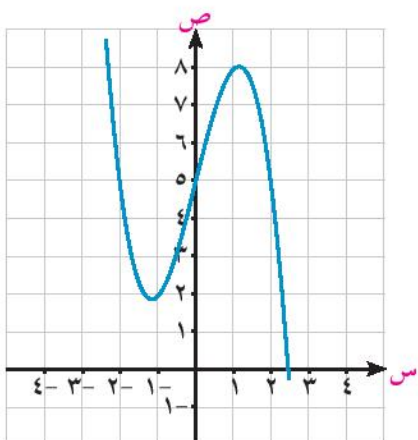
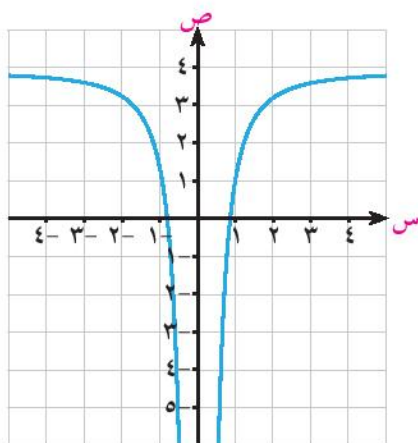
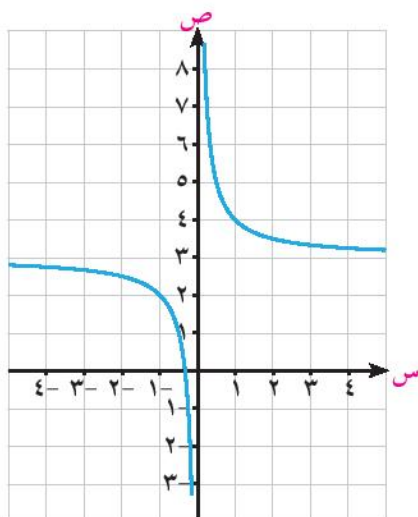
أوجد: ٢ $\lim_{s \rightarrow \infty} (4s - s^2 + 5)$

الحل

$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(4s - s^2 + 5\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} 4s - \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 + \lim_{s \rightarrow \infty} 5$

$= \lim_{s \rightarrow \infty} 4s - \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 + 5 = \infty - \infty + 5 = -\infty$

$-\infty = -\infty + 5 = -\infty$



٦ حاول أن تحل

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} (2 + 3s^2 + 7s^3)$ نها

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} (4 - 3s^3 - s^2)$ نها

مثال

٣ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

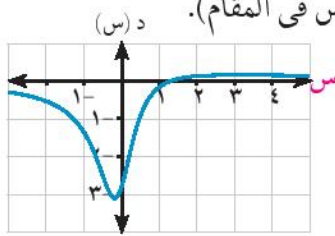
أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3 - s^2}{1 + 2s^3}$ نها

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3 - s^2}{1 + 2s^3}$ نها

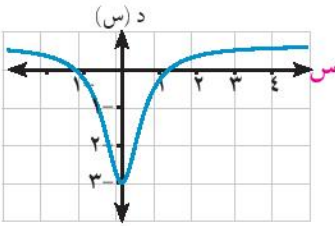
ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3 - s^2}{1 + 2s^3}$ نها

الحل

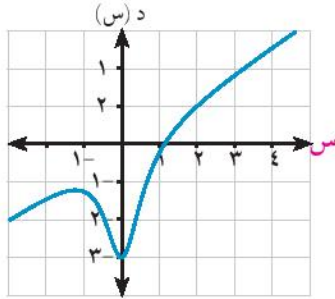
في كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على s^3 (أعلى قوة للمتغير s في المقام).



أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(3/s^3 - 1/s)}{(1/s^3 + 2)} = \frac{0 - 0}{0 + 2} = 0$ نها



ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(3/s^3 - 2)}{(1/s^3 + 2)} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1$ نها



ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(3/s^3 - s^2)}{(1/s^3 + 2)} = \frac{0 - \infty}{0 + 2} = -\infty$ نها

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد نها $\frac{f(s)}{g(s)}$ حيث كل من $f(s)$ ، $g(s)$ دوال كثيرات الحدود فإن:

◀ النهاية تعطى عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

◀ النهاية تساوى صفراً إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

◀ النهاية تعطى $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.

◀ يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولا تعتبر طريقة حل.

٦ حاول أن تحل

٣ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + s^3 - 2s^5}{s^2}$ نها

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4s^5 - 2s^3}{2s^3 + 3s^2 - 2}$ نها

ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + 2s^6 - 7s^3}{2 - s + 3s^2}$ نها

مثال

٤ أوجد النهايات الآتية:

١) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$ نها

الحل

١) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$ نها

$\therefore s \rightarrow -\infty$

$\therefore s < 0$ أي أن $|s| = -s$

$\therefore \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$ نها

بقسمة كل من البسط والمقام على s^3

$$1 = \frac{0 - 1}{0 + 1} = \frac{\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{s^2}{s^3} - 1 \right)}{\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{s^3}{s^3} + 1 \right)}$$

ب) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{(s^2 - 2)}{(s^3 + 1)}$ نها

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{(s^2 - 2)}{(s^3 + 1)} \times \frac{(s^3 + 1)}{(s^3 + 1)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$$

$\therefore s \rightarrow -\infty$

$\therefore s < 0$ أي أن $|s| = -s$ بقسمة كل من البسط والمقام على s^3

$$0 = \frac{0}{1 + 1} = \frac{\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{s^2}{s^3} - 2 \right)}{\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{s^3}{s^3} + 1 \right)}$$

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

ب) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{(s^3 - 5s^2 + 3s)}{(s^3 + 1)}$ نها

١) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s^3 - 5s^2 + 3s}{s^3 + 1}$ نها



تمارين الدرس ٣ - ٣



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $\left(\frac{2}{s} + 1\right)$
 ٢) نها $\left(2 - \frac{2}{s}\right)$
 ٣) نها $(7-)$
 ٤) نها $(s^2 - 3)$
 ٥) نها $\frac{1+s^2}{s}$
 ٦) نها $\frac{s^5 - 2}{1+s^2}$
 ٧) نها $\frac{s^3 + 2}{s^5 - 2}$
 ٨) نها $\frac{s^3}{1-s^2}$
 ٩) نها $\left(\frac{4}{s} + \frac{7}{s} - 3\right)$
 ١٠) نها $(s - \sqrt{1+s^2})$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١١) نها $\frac{s^6}{s^3 + s^2}$ تساوي
 أ) صفر
 ب) ٢
 ج) ٢
 د) ∞
 ١٢) نها $\sqrt{1 + \frac{4}{s}}$
 أ) صفر
 ب) ١
 ج) ٢
 د) ∞
 ١٣) نها $\frac{s^3 + s}{s^2 - 2}$
 أ) صفر
 ب) $\frac{1}{2}$
 ج) $\frac{2}{3}$
 د) ∞
 ١٤) نها $\frac{1+s^2}{1-s^2}$
 أ) صفر
 ب) $\frac{1}{2}$
 ج) ١
 د) ∞
 ١٥) نها $\sqrt{\frac{s+1}{1-s^4}}$
 أ) ١-
 ب) $\frac{1}{4}$
 ج) $\frac{1}{2}$
 د) ١

أوجد:

- ١٦) نها $\frac{3}{s^2}$
 ١٧) نها $(s^3 + 5s^2 + 1)$
 ١٨) نها $\frac{s^7 - 2}{s^3 + 2}$
 ١٩) نها $\frac{s^2}{s^3 + s}$
 ٢٠) نها $\frac{s^4}{s^3 + 2}$
 ٢١) نها $\frac{s^7 - 6s^3 - 5}{s^2 + s^2 + 4}$

- ٢٢) نهـا س ← ∞ س ٢ - ١ س ٢ + ٤ س ١ + نهـا س ← ∞
- ٢٣) نهـا س ← ∞ س ٣ - ٢ س ٣ + ٤ س ١ - نهـا س ← ∞
- ٢٤) نهـا س ← ∞ س ٤ - ٣ س ٥ - ١ س ٢ - نهـا س ← ∞
- ٢٥) نهـا س ← ∞ س ٢ - ٦ س ٢ (١ - س) نهـا س ← ∞
- ٢٦) نهـا س ← ∞ س ٢ (٣ + س) + ٧ نهـا س ← ∞
- ٢٧) نهـا س ← ∞ س ١ (٣ س - ١) - ٥ س نهـا س ← ∞
- ٢٨) نهـا س ← ∞ س ٣ (٣ - س) + ١ س ٢ + نهـا س ← ∞
- ٢٩) نهـا س ← ∞ س ٤ + ٢ س - نهـا س ← ∞
- ٣٠) نهـا س ← ∞ س ٣ (١ - س) - ٥ س + ٤ نهـا س ← ∞
- ٣١) نهـا س ← ∞ س ٤ (٢ - ١ + س ٢ - ٢ س) نهـا س ← ∞
- ٣٢) نهـا س ← ∞ س ٥ (٢ + ٤ س + ٧ - ٥ س ٢ + ٣ س) نهـا س ← ∞
- ٣٣) نهـا س ← ∞ س ٤ (١ + ٢ س - ٢ س) نهـا س ← ∞
- ٣٤) نهـا س ← ∞ س ٨ (٣ - ٢ س) - ١ س + نهـا س ← ∞
- ٣٥) نهـا س ← ∞ س ٦ + ٩ س ٣ - ٤ نهـا س ← ∞
- ٣٦) نهـا س ← ∞ س ٣ (٢ + س) (٢ - ٣ س) نهـا س ← ∞
- ٣٧) إذا كان نهـا س ← ∞ س ٣ (١ + ٢ س + ٣ س - ٥ س + ٢ س) = ٣ فما قيمة كل من أ، ب. نهـا س ← ∞
- ٣٨) نهـا س ← ∞ س ٢ - ١ س ٣ + ٥ نهـا س ← ∞
- ٣٩) نهـا س ← ∞ س ٤ - ٢ س ٣ - ١ س ٢ - ٣ نهـا س ← ∞

٤٠) تفكير إبداعي

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة الكارت نصف جنيه، فكانت التكلفة الإجمالية جـ = $\frac{1}{n}$ س + ٥٠٠٠ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

- أ) ١٠٠٠٠ كارت ب) ١٠٠٠٠٠ كارت

٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لا نهائيًا من الكروت.

سوف تتعلم

نهايات بعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

دالة مثلثية

Trigonometric Function

نهاية دالة مثلثية

Limit of a Trigonometric Function

نشاط



إذا كانت دالة حيث $\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = (س)$ والمطلوب دراسة قيم الدالة عندما $س \leftarrow ٠$ حيث
س قياس الزاوية بالتقدير الدائري
كون جدولاً لدراسة سلوك الدالة $\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = (س)$ عندما تقترب س من الصفر
مستخدماً التقدير الدائري

س	١	٠,١	٠,٠١	→	٠	←	٠,٠١	٠,١	١
$\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣		→		←	٠,٩٩٩٩٨	٠,٩٩٨٣	٠,٨٤١٥

من الجدول السابق استنتج $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ نها $س \leftarrow ٠$

تعلم



إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائري فإن:

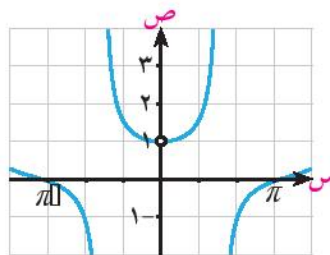
$$\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١ \quad \text{نها } س \leftarrow ٠$$

$$\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١ \quad \text{نها } س \leftarrow ٠$$

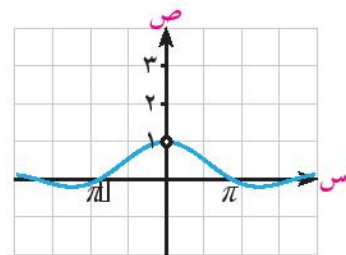
الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

برامج رسومية



$$\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = (س)$$



$$\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = (س)$$

تعبير شفهي

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستيني فهل يمكن إيجاد نها $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ $س \leftarrow ٠$
فسر إجابتك.

نتيجة ١: نها $\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$ ، نها $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$ $س \leftarrow ٠$

مثال

١) أ) نها $\frac{3}{س} = ٣$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$ ج) نها $\frac{٢}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$

٢) أ) نها $\frac{٣}{س} = ٣$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$ ج) نها $\frac{٢}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$

٣) أ) نها $\frac{٣}{س} = ٣$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$ ج) نها $\frac{٢}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$

٤) حاول أن تحل

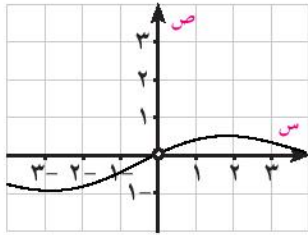
أوجد:

أ) نها $\frac{٣}{س} = ٣$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$ ج) نها $\frac{٢}{س} = ٧$ س $\leftarrow ٠$

نتيجة ٢

أ) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

استعن بمدرسك في برهان نتيجة (٢)



مثال

٢) أوجد:

أ) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

الحل

أ) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

٤) حاول أن تحل

أوجد النهايات الآتية:

أ) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$ ب) نها $\frac{١-جتاس}{س} = ٠$ س $\leftarrow ٠$

تذكر أن

جا^٢س + جتا^٢س = ١

مثال

٣ أوجد النهايات الآتية:

$$\begin{array}{r} \text{نہا} \quad \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow * \\ \hline \text{س}^2 - \text{س} + \text{جاس} \\ \text{س}^2 \\ \hline \text{جا} (1 - \text{جتا س}) \\ \text{س} \leftarrow * \\ \hline \text{نہا} \quad \text{ج} \\ \text{س} \leftarrow * \\ \hline 1 - \text{جتا س} \end{array}$$

ج. $\frac{\text{جا (۱ - جتا س)}}{۱ - \text{جتا س}}$ س ← ۰

الحل 

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ نهيا } \left(\frac{\text{حاس}^2}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{س}^2}{\text{س}} \right)$$

$$\bullet = (1 + 1 - \bullet) \frac{1}{2} =$$

$$\begin{array}{r} \text{ب} \quad \text{نہا} \\ \text{س} + \text{س جتا س} \\ \text{جا س جتا س} \\ \text{جا } 32 \text{ س} \\ \text{س } 5 \end{array}$$

د

نہا

س ← ۰

جا ۲۳ س

۵ س

ب) نہا $\frac{س + س جتا س}{جاس جتا س}$ بقسمۃ کل من البسط
س ← ۰ والمقام علی س

$$= \frac{1 + \text{جتا س}}{\text{جتا س} \times \frac{\text{جاس}}{\text{س}}} \leftarrow \text{س}$$

$$\frac{\text{نہا} \left(\begin{smallmatrix} \text{س} \leftarrow * \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right) (1 + \text{جتا س})}{\text{نہا} \left(\begin{smallmatrix} \text{س} \leftarrow * \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right) \frac{\text{جتا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}} =$$

$$۲ = \frac{۱+۱}{۱} = \frac{۰\text{ حتما} + ۱}{۰\text{ حتما} \times ۱} =$$

د) $\frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2}$ نہا
س ← ۰

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{\text{فہا}}{\text{س} \leftarrow} \frac{\text{جا}^3 \text{س}}{\text{س}} \right)^2$$

$$r(r) \times \frac{1}{0} =$$

$$\frac{p}{o} =$$

ج نہا
س ←

$$\frac{\text{جا (۱ - جتا س)}}{۱ - جتا س}$$

اعتبر ۱ - جتا س = ص

عندما س ← نجد أن ص ← .

$$1 = \frac{\text{جاس}}{\text{ص}}$$

$$1 = \frac{\text{جا} (1 - \text{جتاس})}{1 - \text{جتاس}}$$

حاول أن تحل

٣ أوجد النهايات الآتية:

۱) نہا جا ۳س
س ← ۰ ۵س ۳-۴س

س ← ۵ س ۳-۴ س

ج۔ نہا
س۔ ← ۰

جا^۲س
۳س^۲

س ← ۰ ۳ س ۲

ب) $\frac{\text{نہا}}{\text{س} \leftarrow 1} \quad \frac{\text{جا (س-1)}}{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$

$$\overline{s \leftarrow s^2 + s - 2}$$

٥) $\frac{\text{س جا 2س} + \text{حا 2س}}{\text{س 1} + \text{طا 3س}}$

س ← ۱



تمارين ٣ - ٤



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s} =$ جتا ٣ س
- ٢) نها $\lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2}{s} =$ جا ٢ س
- ٣) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s} =$ ظا س
- ٤) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{7}{s} =$ جا ٧ س
- ٥) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^4} =$ ظا ٣ س
- ٦) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{(s-5)^3} =$ جا (س-٥)
- ٧) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi}{s^2} =$ جا π س
- ٨) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} =$ حا ٢ س
- ٩) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3+2}{s^4} =$ جتا ٤ س
- ١٠) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-جتا س}{s^3} =$ جا ٣ س
- ١١) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^3} =$ ظا ٣ س
- ١٢) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^2} =$ قتا ٢ س
- ١٣) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^2} =$ جا ٣ س
- ١٤) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^4} =$ حا ٣ س

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١٥) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s} =$ تساوى
- أ) صفر ب) $\frac{1}{3}$ ج) ١ د) ٣
- ١٦) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s^5} =$ تساوى
- أ) صفر ب) $\frac{4}{5}$ ج) ١ د) $\frac{5}{4}$
- ١٧) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3+2}{s^5} =$ تساوى
- أ) ١ ب) $\frac{5}{6}$ ج) $\frac{6}{5}$ د) ٢
- ١٨) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^3} =$ تساوى
- أ) $\frac{4}{9}$ ب) $\frac{1}{6}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{4}{6}$
- ١٩) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^4} =$ تساوى
- أ) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{2}{8}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) $\frac{2}{6}$
- ٢٠) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{جاس}{س} =$ حيث س بالتقدير الستيني
- أ) ١ ب) $\frac{\pi}{180}$ ج) $\frac{180}{\pi}$ د) π

أوجد:

٢١) نهـا $\frac{\text{جا س}}{\text{س}^5}$ س ← ٠

٢٣) نهـا $\frac{\text{ظا}^2 \text{س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٥) نهـا $\frac{\text{جا س} (١ - \text{جتا س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٢٧) نهـا $\frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٩) نهـا $\frac{(١ - \text{جتا}^2 \text{س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣١) نهـا $\frac{\text{س} - \text{س جتا س}}{\text{جا}^2 \text{س}}$ س ← ٠

٣٣) نهـا $\frac{\text{س جتا} (-\text{س}^2 + ١)}{\text{س}^2 + \frac{1}{3}}$ س ← ٠

٣٥) نهـا $\frac{(١ + \text{جتا س}) \times (١ - \text{جتا س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٧) نهـا $\frac{\text{جا}^5 \text{س} + \text{جا}^3 \text{س}^2}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٩) نهـا $\frac{\text{س}^2 + \text{س جا}^5 \text{س}}{\text{س}^2 - \text{ظا}^3 \text{س}}$ س ← ٠

٤١) نهـا $\frac{\text{ظا}^2 \text{س} + ٥ \text{ جا}^3 \text{س}}{٢ \text{ جا}^3 \text{س} - \text{ظا}^5 \text{س}}$ س ← ٠

٤٣) نهـا $\frac{١ - \text{جتا}^3 \text{س}}{\text{جتا}^2 \text{س} - ١}$ س ← ٠

٤٥) نهـا $\frac{\text{ظا}^3 \text{س}^2 + \text{جا}^2 \text{س}^5}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٤٧) نهـا $\frac{\text{جا} (\text{جا س})}{٥ \text{ جا س}}$ س ← ٠

٤٩) نهـا $\frac{\text{س} (\text{قتا}^2 \text{س} - \text{ظتا}^3 \text{س})}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٢٢) نهـا $\frac{\text{جا س}}{\text{ظا س}}$ س ← ٠

٢٤) نهـا $\frac{٣ (١ - \text{جتا س})}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٦) نهـا $\frac{\text{جتا س ظا س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٢٨) نهـا $\frac{\text{ظا}^3 \text{س}}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٠) نهـا $\frac{\text{جتا س} - ١}{\text{جا س}}$ س ← ٠

٣٢) نهـا $\frac{١ - \text{ظا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ س ← ٠

٣٤) نهـا $\frac{\text{س}^2 - ٣ \text{ جا س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٣٦) نهـا $\frac{\text{ظا}^3 \text{س}^2 + \text{جا}^2 \text{س}^5}{\text{س}^2}$ س ← ٠

٣٨) نهـا $\frac{(٢ \text{ س}^2 + \text{جا}^3 \text{س} - ٤)}{٢ \text{ س}^2 + \text{ظا}^6 \text{س}}$ س ← ٠

٤٠) نهـا $\frac{١ - \text{جتا س} + \text{جا س}}{١ - \text{جتا س} - \text{جا س}}$ س ← ٠

٤٢) نهـا $\frac{\text{س ظا}^2 \text{س}}{\text{س}^2 + \text{جا}^3 \text{س}}$ س ← ٠

٤٤) نهـا $\frac{٢ - \text{جتا}^3 \text{س} - \text{جتا}^4 \text{س}}{\text{س}}$ س ← ٠

٤٦) نهـا $\frac{١ - \text{جتا}^3 \text{س}}{\text{جتا}^2 \text{س} - ١}$ س ← ٠

٤٨) نهـا $\frac{\text{س}}{\text{جتا} (\frac{\pi}{4} - \text{س})}$ س ← ٠

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

٣ - ٥

Existence of Limit of a Function at a Point

فكر و ناقش



شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د حيث

$$\left. \begin{array}{l} \text{لكل } s < 2 \\ \text{لكل } s > 2 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} s - 1 \\ s - 2 \end{array}$$

أوجد نها $d(s)$ (النهاية اليمنى) $s \rightarrow 2^+$

أوجد نها $d(s)$ (النهاية اليسرى) $s \rightarrow 2^-$

هل نها $d(s)$ = نها $d(s)$ $s \rightarrow 2^-$ $s \rightarrow 2^+$

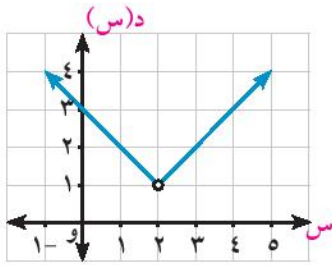
شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

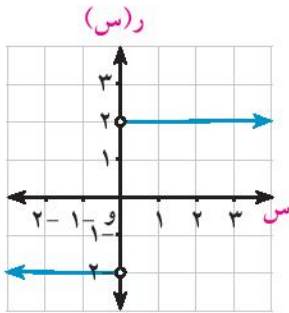
$$\left. \begin{array}{l} \text{لكل } s < 0 \\ \text{لكل } s > 0 \end{array} \right\} r(s) = \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}$$

أوجد نها $r(s)$ $s \rightarrow 0^+$

أوجد نها $r(s)$ $s \rightarrow 0^-$ هل نها $r(s)$ = نها $r(s)$ $s \rightarrow 0^-$ $s \rightarrow 0^+$



شكل (١)



شكل (٢)

Limit of a Function نهاية الدالة

تعلم



النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د تساوي ل عندما س تؤول إلى أ إذا فقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوي ل حيث $ل \in \mathbb{R}$

وتكتب رمزياً:

نها $d(s) = ل$ إذا فقط إذا كان: د $(+)$ = د $(-)$ $s \rightarrow أ$

حيث: د $(+)$ = نها $d(s)$ «النهاية اليمنى للدالة» $s \rightarrow أ^+$

د $(-)$ = نها $d(s)$ «النهاية اليسرى للدالة» $s \rightarrow أ^-$

سوف تتعلم

- النهاية اليمنى للدالة عند نقطة.
- النهاية اليسرى للدالة عند نقطة.
- بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- Right Limit نهاية اليمنى
- Left Limit نهاية اليسرى

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مثال توضيحي

أ) لاحظ في شكل (١) أن:

$$د(-١) = ٣ ، د(+١) = ١-$$

$$\therefore د(-١) \neq د(+١)$$

∴ لا يوجد نهاية للدالة عند $s \leftarrow ١$. ∴ نها $د(s)$ غير موجودة
س ← ١

ب) لاحظ في شكل (٢) أن:

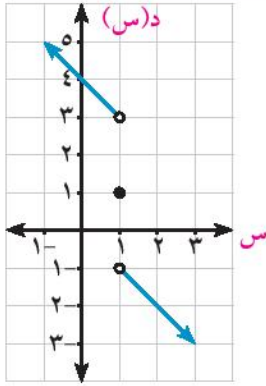
$$د(-١) = ٣ ، د(+١) = ٣$$

$$\therefore د(-١) = د(+١) = ٣$$

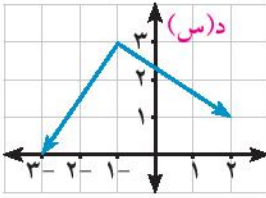
$$\therefore \text{نها } د(s) = ٣$$

٦ حاول أن تحل

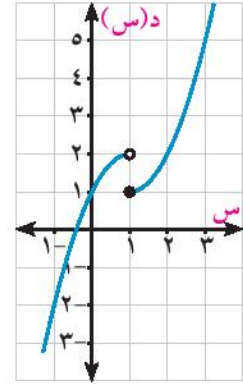
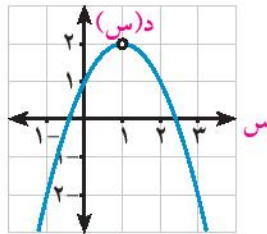
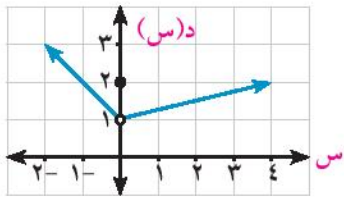
١) ادرس الشكل البياني لكل دالة من الدوال الآتية ثم أوجد:



شكل (١)



شكل (٢)



أ) $د(-٠)$

ب) $د(+٠)$

ج) نها $د(s)$
س ← ٠

أ) $د(-١)$

ب) $د(+١)$

ج) نها $د(s)$
س ← ١

أ) $د(-١)$

ب) $د(+١)$

ج) نها $د(s)$
س ← ١

مثال

١) ابحث وجود نهاية الدالة $د(s)$ حيث $د(s) = \begin{cases} |s| - ١ & \text{س} > ١ \\ |s| - ٢ & \text{س} \leq ١ \end{cases}$

الحل

بإعادة تعريف الدالة

$$د(s) = \begin{cases} (س - ١) - ١ & \text{عندما } س > ١ \\ (س - ٢) - ٢ & \text{عندما } س \leq ١ \end{cases} = \begin{cases} س - ٢ & \text{لكل } س > ١ \\ س - ٤ & \text{لكل } س \leq ١ \end{cases}$$

$$\therefore د(-٠) = \text{نها } د(s) = \text{نها } (س - ٢) = ١- \text{س} \leftarrow ٠$$

$$\therefore \text{نها } د(s) = ١- \text{س} \leftarrow ٠$$

$$\therefore د(-٠) = د(+٠) = ١-$$

$$د(+٠) = \text{نها } ١ - ١ = ٠ \text{س} \leftarrow +٠$$

٩ حاول أن تحل

٢ إذا كان د(س) = $\begin{cases} |س-٣| & س \neq ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$

فأبحث وجود نها د(س) ← س

مثال

٢ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢+٢س}{س} & \text{لكل س} > ٠ \\ \frac{س+٢\text{ظا س}}{س^٣-٣\text{جا س}} & \text{لكل س} < ٠ \end{cases}$ عندما س ← ٠

الحل

$$\begin{aligned} \text{د}(-٠) &= \frac{س^٢+٢س}{س} \xrightarrow{س \leftarrow -٠} \text{نها} = \frac{س(س+٢)}{س} \xrightarrow{س \leftarrow -٠} \text{نها} = (س+٢) \xrightarrow{س \leftarrow -٠} \text{نها} = ٢ \\ \text{د}(+٠) &= \frac{س+٢\text{ظا س}}{س^٣-٣\text{جا س}} \xrightarrow{س \leftarrow +٠} \text{نها} = \frac{\frac{س}{\text{ظا س}} + ٢}{\frac{س^٣}{س} - ٣\frac{\text{جا س}}{س}} \xrightarrow{س \leftarrow +٠} \text{نها} = \frac{١ + ٢}{٢ - ٣} = \frac{٣}{-١} = -٣ \end{aligned}$$

∴ د(-٠) ≠ د(+٠) ∴ نها د(س) غير موجودة ← س

٩ حاول أن تحل

٣ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← π حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جاس}}{\pi - س} & \text{لكل س} > \pi \\ \frac{\text{جتا س}}{\pi} & \text{لكل س} < \pi \end{cases}$

مثال

٣ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ١ حيث: د(س) = $\sqrt{١-س}$

الحل

∴ د(س) معرفة لجميع قيم س - ١ ≤ ٠ ∴ مجال الدالة د(س) =] ١, ∞]



∴ د(+١) = نها د(س) = $\sqrt{١-س} \xrightarrow{س \leftarrow +١} \text{نها} = \sqrt{١-١} = \sqrt{٠} = ٠$

د(-١) غير معرفة لأن الدالة غير معرفة على يسار ١

∴ د(س) ليس لها نهاية عندما س ← ١

٩ حاول أن تحل

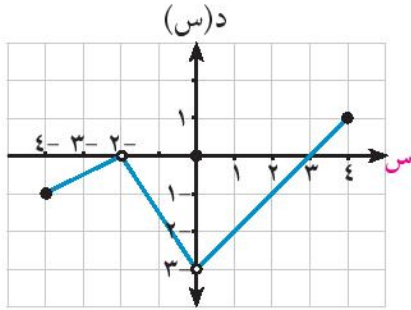
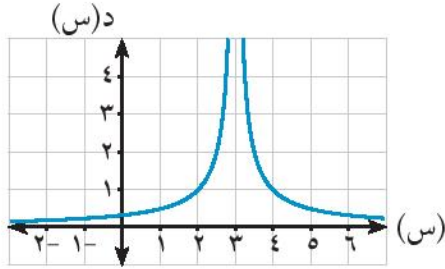
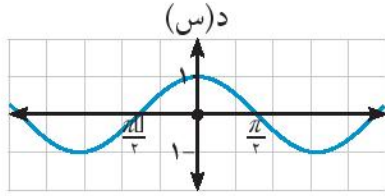
٤ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣ حيث د(س) = $\sqrt[٣]{٣-س}$



تمارين ٣ - ٥



أكمل ما يأتي:



١ من الشكل البياني المقابل:

- أ نها د(س) =
س ← ٠
ب نها د(س) =
س ← ٠

٢ من الشكل البياني المقابل:

- أ نها د(س) =
س ← ٣
ب نها د(س) =
س ← ٣

٣ من الشكل البياني المقابل:

- أ نها د(س) =
س ← ٢
ب نها د(س) =
س ← ٠
ج نها د(س) =
س ← ٢
د نها د(س) =
س ← ٤
ه نها د(س) =
س ← ٤

٤ الدالة معرفة على ح حيث د(س) = ٢ }
س - ٢

- أ نها د(س) =
س ← ٠

٥ الدالة معرفة على ح حيث د(س) = ٣ }
س - ٣

- أ نها د(س) =
س ← ٠

٦ إذا كانت د(س) = }
س لكل س ≤ ٠
١/س لكل س > ٠

- أ نها د(س) =
س ← ٠

- لكل س ≤ ٠
لكل س > ٠

- ب نها د(س) =
س ← ٠

- لكل س < ٠
لكل س > ٠

- ب نها د(س) =
س ← ٠

- ب نها د(س) =
س ← ٠

ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية :

۷ نہ ۱ د (س) حیث د (س) = ۲ س
س ← ۲

٢ > لكل س

تکلیف $s \leq 2$

۸ ﴿ نہ (س) حیث د (س) = } س ۱ + ۲
س ۳ ←

٢٠٠٠

لكل $s \leq ۳$

۹ نہاد (س) حیث (د) س = $\left. \begin{matrix} \text{س}^2 + 2 \\ \text{س}^3 + 1 \end{matrix} \right\}$ س ← *

• لکل سے >

• لکھ س $\leq$

۱۰ نہاد (س) حیث د (س) = ۲ س + ۱
س ← ۱

١- > لکل س

١- < س١

١١) أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية عندما س ← ١ حيث د(س) = $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(1-s)^2}{|1-s|} \text{ لكل } s > 1 \\ 3-s \text{ لكل } s < 1 \end{array} \right.$

ٲكل س > ١

لکل س $1 <$

١٢) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما $s \rightarrow 1$ حيث $d(s) = \frac{1 + \frac{2}{s}}{1 - \frac{2}{s}}$ لكل $s > 2$ لكل $s < 2$

لکل سے $\pi >$

لکل سے $\pi <$

$\pi \leftarrow$ عندما س

١٣) أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان $\begin{matrix} \text{نـ} \\ \text{س} \leftarrow 2 \end{matrix}$ د(س) = ٧، د(س) = $\begin{matrix} \text{س}^2 + 3 \\ \text{س}^5 + \text{ك} \end{matrix}$ لكل $\text{س} > 2$
لكل $\text{س} < 2$

٢ > نكل س

٢ < لكل س

١٤) أوجد قيمة K التي تجعل للدالة $D(s)$ نهاية عندما $s \rightarrow -1$ حيث، $D(s) = \frac{s^2 + K}{s^4 + 1}$ لكل $s > -1$
 لكل $s < -1$

١- > لكل س

لكل س < ۱

١٥) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما $s \rightarrow 0$ ، حيث، $D(s) = \frac{s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 7s^2 + 6s + 5}{s^6 + 7s^5 + 6s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$ لكل $s < 0$ لكل $s > 0$

• لکل س <

• نکل سے >

١٦) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \text{ س} \\ \text{ظل س} \end{array} \right\}$$

لكل $0 < س < \frac{\pi}{3}$

لكل $0 < س < \frac{\pi}{3}$

لكل $-\frac{\pi}{3} < s < 0$.

لکل . $\pi > 3$

ج. ← س .

ب. س ← $\frac{\pi}{3}$

۱) عندما $s \rightarrow \frac{\pi}{3}$

١٧) ابحث وجود نهاية للدالة $d(s) = \frac{1}{s-2}$ عندما $s \rightarrow 2$

عندما س ← ۲

۱

س۔ ۲

سوف تتعلم

- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

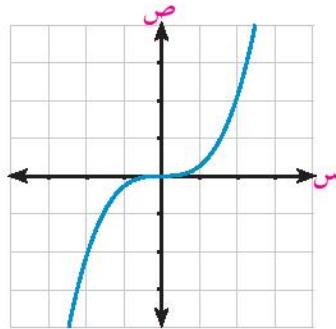
- اتصال دالة عند نقطة
- Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة على فترة
- Continuity of a Function on Interval

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

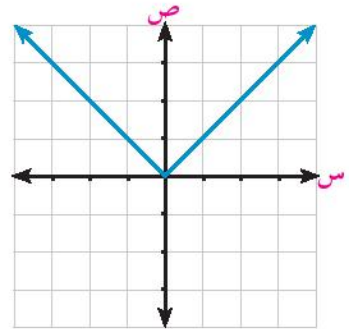
فكر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟



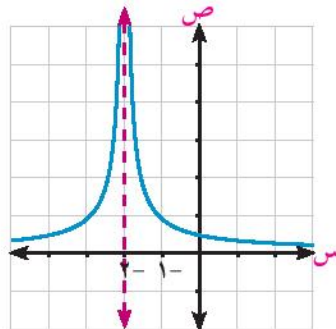
$$f(x) = x^2$$

شكل (٢)



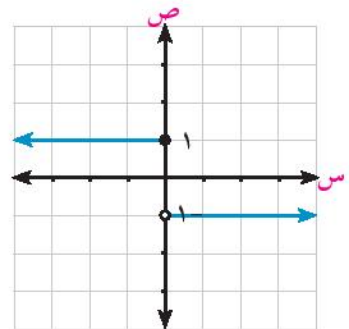
$$f(x) = |x|$$

شكل (١)



$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

شكل (٤)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{لكل } x < 1 \\ 0 & \text{لكل } x > 1 \end{cases}$$

شكل (٣)

في شكل (١)، (٢) نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أي نقطة.

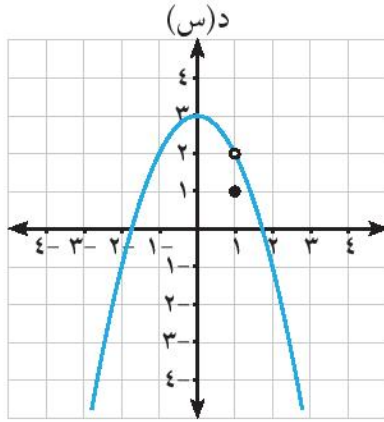
في شكل (٣) منحنى الدالة غير متصل عند $x = 1$ =

في شكل (٤) منحنى الدالة غير متصل عند $x = -2$ =

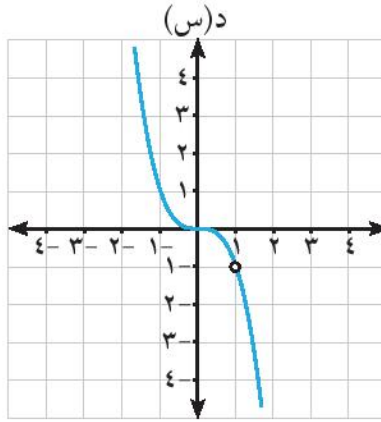
مما سبق نستنتج أن الدالة (د) تكون متصلة عند $x = a$ إذا كان منحنى الدالة لا يعاني انقطاعاً عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند $x = a$ إذا انقطع منحنىها عند هذه النقطة.

Continuity of a function at a Point

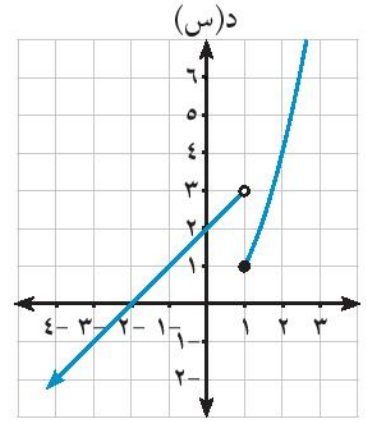
اتصال دالة عند نقطة



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد نها $f(x)$ ، $f(1)$ إن وجدت.

في الشكل (١): نها $f(x) = 1$ ، نها $f(x) = 3$ أي أن نها $f(x)$ غير موجودة بينما $f(1) = 1$

في الشكل (٢): نها $f(x) = 1$ ، نها $f(x) = 0$ أي أن نها $f(x)$ غير معرفة.

في الشكل (٣): نها $f(x) = 2$ ، نها $f(x) = 1$ أي أن نها $f(x)$ بينما $f(1) = 1$

أي أن: نها $f(x) \neq f(1)$

لذلك تكون الدالة f في كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند $x = 1$

تكون الدالة f متصلة عندما $x = a$ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معاً:

نها $f(x)$ معرفة
نها $f(x)$ موجودة
نها $f(x) = f(a)$

ملاحظة

مثال

بحث اتصال دالة عند نقطة

لكل $x > 1$
لكل $x < 1$

١) ابحث اتصال الدالة f حيث $f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$

أ) عند $x = 0$ ب) عند $x = 1$

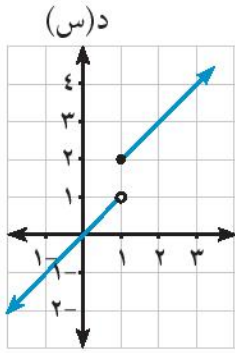
الحل

أ) بحث الاتصال عند $x = 0$

$f(0) = 0$ ، نها $f(x) = 0$ ، نها $f(x) = 0$ أي أن نها $f(x) = 0$

أي أن نها $f(x) = 0$

لذلك فإن الدالة f متصلة عند $x = 0$



ب) بحث اتصال الدالة عند $s = 1$

نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة $s = 1$ تختلف عن قاعدتها يسار تلك

النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمنية ونهاية يسرى للدالة عند $s = 1$

$$د(+1) = نهـ 1 = (س + 1) = 2، د(-1) = نهـ 1 = (س - 1) = 0$$

أي أن: $د(+1) \neq د(-1)$ وهذا الشرط يكفي لعدم اتصال الدالة د عند $s = 1$
والشكل البياني يوضح عدم اتصال الدالة عند $s = 1$

٦ حاول أن تحل

١) ابحث اتصال الدالة د حيث $د(s) = \begin{cases} 4-s & \text{عندما } s \geq 1 \\ s^2+2 & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$ عند $s = 1$

مثال

التحقق من اتصال دالة عند نقطة

٢) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

أ) د(s) = $\frac{s+3}{s-2}$ عند $s = 2$ ، $s = 3$ ب) د(s) = $|s-3| - 5$ عند $s = 3$

الحل

أ) أولاً: بحث اتصال الدالة عند $s = 2$

∴ مجال الدالة = $E - \{2\}$

∴ د(s) غير متصلة عند $s = 2$

ثانياً: بحث اتصال الدالة عند $s = 3$

$$د(3) = \frac{3+3}{3-2} = 6، ∴ نهـ 3 = \frac{3+3}{3-2} = 6، ∴ نهـ 3 = \frac{3+3}{3-2} = 6$$

$$∴ نهـ 3 = د(s) = د(3) ∴ د(s) متصلة عند $s = 3$$$

ب) إعادة تعريف الدالة د(s) = $\begin{cases} s-8 & \text{عندما } s \leq 3 \\ s+2 & \text{عندما } s > 3 \end{cases}$

$$د(3) = 0، ∴ د(+3) = نهـ 3 = (س - 8) = -5، ∴ د(-3) = نهـ 3 = (س + 2) = -1$$

$$∴ نهـ 3 = د(s) = 0، أي أن د(3) = نهـ 3 = 0 ∴ د(s) متصلة عند $s = 3$$$

لذلك فإن الدالة متصلة عند $s = 3$

٦ حاول أن تحل

٢) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

أ) د(s) = $\frac{s^2-2}{s-2}$ عند $s = 1$ ، $s = 2$ ب) د(s) = $|s-2| - 3$ عند $s = 2$

إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة

إذا كانت د(س) غير متصلة عند س = ١ وكانت نها س ← ١ لها وجود فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د حتى تصبح متصلة عند س = ١.

مثال

٣ أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س = ١

أ) د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$ ب) د(س) = $\left. \begin{array}{l} س^٢ + ٢س، س < ١ \\ س - ١، س > ١ \end{array} \right\}$

الحل

أ) لكي تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن نها س ← ١ د(س) = د(١)

$$\therefore \text{نها س} \leftarrow ١ = \frac{(١ - س)(٣ + س)}{س - ١} = \frac{نها س(٣ + س)}{س \leftarrow ١}$$

أي أن نها س ← ١ د(س) = ٤

لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$ عندما س ≠ ١
عندما س = ١

ب) لكي تكون الدالة متصلة عند س = ١، لا بد أن تكون د(١) = نها س ← ١ د(س)

$$د(١) = (+١) = \text{نها س} \leftarrow ١ (س^٢ + ٢س) = ١ \times ٢ + ١ = ٣، د(-١) = \text{نها س} \leftarrow -١ (س - ١) = ١ - ٥ = -٤$$

∴ د(-١) ≠ د(+١) لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عند س = ١

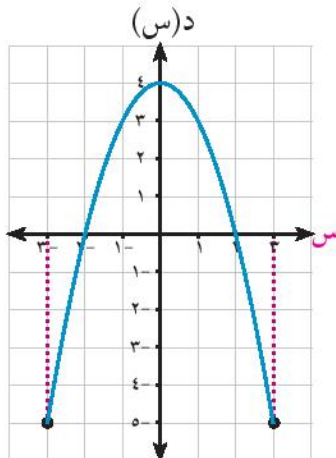
ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

٤ حاول أن تحل

٣ أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث د(س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣}$

٤ بين أن د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

ثم أوجد قيمة ه التي تجعل د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ عندما س ≠ ٣
عندما س = ٣



continuity of a Function on an Interval

اتصال دالة على فترة

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ - س²

في الفترة [-٣، ٣] ولكي تكون د متصلة على الفترة [-٣، ٣]

فلا بد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

أي أن: نها س ← ١ د(س) = د(١) لكل ١ ∈ [-٣، ٣]

نها س ← ٣ د(س) = د(٣)، نها س ← -٣ د(س) = د(-٣)

ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتي:

ملاحظة ٢

- إذا كانت د معرفة على الفترة [أ، ب].
تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:
- ١- د(س) متصلة على الفترة [أ، ب]
 - ٢- نها د(س) = د(أ) ، نها د(س) = د(ب)
 س ← أ س ← ب

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة

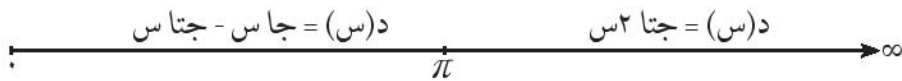
- ١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ع أو على مجال تعريفها.
- ٢- الدالة الكسرية: متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.
- ٣- دالة الجيب د(س) = جا (س) وجيب التمام د(س) = جتا س: متصلة على ع
- ٤- دالة الظل: د(س) = ظاس متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{2} + \pi n$ }, $n \in \mathbb{Z}$

مثال

٤ ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة $[0, \infty)$

$$\text{حيث د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{جا س - جتا س} \\ \text{جتا ٢ س} \end{array} \right\} \text{ لكل } 0 < \text{س} < \pi$$

الحل



د(س) معرفة على الفترة $[0, \infty)$

لكي نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة وأيضاً من اليمين عند الصفر.

- ١) د(س) = جا س - جتا س متصلة على الفترة $[0, \pi)$
- كذلك د(س) = جتا ٢ س متصلة على الفترة $[\pi, \infty)$

- ٢) د(٠) = جا ٠ - جتا ٠ = ١ - ١ = ٠ ، نها د(س) = جا س - جتا س
 س ← ٠

أي أن: د(٠) = نها د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠
 س ← ٠

لاحظ أن



إذا كانت د، د_١ متصلتين على ع فإن:
 ١- د_١ ± د_٢ متصلة على ع
 ٢- د_١ × د_٢ متصلة على ع
 ٣- $\frac{د_1}{د_2}$ تكون متصلة على ع
 عدا مجموعة أصفار المقام.

٦ حاول أن تحل

٦ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٧
 ب د(س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س}$
 ج د(س) = $\frac{س^٢ + ١}{س}$
 د د(س) = (س + ١)جتا س

٧ الربط بالكيمياء

إذا كان معدل التفاعل في تجربة كيميائية يعطى بالدالة س حيث س(س) = $\frac{٦س}{١٢ + س}$ ، س تركيز المحلول.
 ابحث في الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:
 أ مثل الدالة بيانياً بأحد البرامج الرسومية.
 ب ابحث اتصال هذه الدالة.

مثال

٦ بين أن الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س^٢ + س + ١}$ متصلة على ع

الحل

حيث أن س^٢ + س + ١ موجب لجميع قيم س $\Rightarrow$ ع
 (المميز = ب^٢ - ٤أح = ١ - ٤ = -٣ < ٠ صفر)

أو س^٢ + س + ١ = (س + $\frac{١}{٢}$)^٢ + $\frac{٣}{٤}$ مجموع مربعين

$\therefore$ س^٢ + س + ١ موجب لجميع قيم س $\Rightarrow$ ع

معرفة لجميع قيم س $\Rightarrow$ ع $\therefore$ د(س) = $\sqrt{س^٢ + س + ١}$

لكل أ $\in$ المجال ع نجد أن

نها د(س) = $\sqrt{س^٢ + س + ١}$ نها س $\leftarrow$ س $\leftarrow$ س $\leftarrow$ س

$\therefore$ د(أ) = نها د(س) لكل أ $\in$ ع

$\therefore$ د(س) متصلة على ع

٦ حاول أن تحل

٨ ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٢}$ على مجالها.



تمارين ٣ - ٦



ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

$$\textcircled{1} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 + 2, \text{ س} > 1 \\ \text{س}^3, \text{ س} < 1 \end{array} \right. \text{عند س} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 - 1, \text{ س} \geq 2 \\ \text{س}^2 - 1, \text{ س} < 2 \end{array} \right. \text{عند س} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{3} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 - 3\text{س} + 2, \text{ س} > 3 \\ \text{س}^2 - 2\text{س} - 1, \text{ س} < 3 \end{array} \right. \text{عند س} = 3 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{4} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} + 4, \text{ س} > 2 \\ \text{س}^2 - 1, \text{ س} \geq 2 \\ \text{س}^2 + 3, \text{ س} \leq 1 \end{array} \right. \text{عند س} = 2 \\ \text{عند س} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{5} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جا}(\text{س} - 2)}{\text{س}^2 - 4}, \text{ س} > 2 \\ \frac{3}{\text{س}^2} - 1, \text{ س} \leq 2 \end{array} \right. \text{عند س} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{6} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}}, \text{ س} < 0 \\ 2 \text{ جا س}, \text{ س} \geq 0 \end{array} \right. \text{عند س} = 0 \end{array} \right\}$$

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:

$$\textcircled{7} \text{د(س)} = \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 1 \quad \textcircled{8} \text{د(س)} = \frac{\text{س}^-}{1 + \text{س}^2} \quad \textcircled{9} \text{د(س)} = \frac{2 + \text{س}^3}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$$

$$\textcircled{10} \text{د(س)} = \frac{3 - \text{س}^2}{10 - \text{س}^2 - \text{س}} \quad \textcircled{11} \text{د(س)} = \frac{\text{س}}{2 - |\text{س}|} \quad \textcircled{12} \text{د(س)} = \frac{|2 + \text{س}|}{2(2 + \text{س})}$$

$$\textcircled{13} \text{د(س)} = \text{جا س} - 3 \text{ جتا} (1 + \text{س}) \quad \textcircled{14} \text{د(س)} = \text{س}^2 + 2 \text{ جتا} \text{س} \quad \textcircled{15} \text{د(س)} = \text{س}^2 \text{ جا} 2 \text{س}$$

$$\textcircled{16} \text{د(س)} = \text{ظا} \text{س} - 1 \quad \textcircled{17} \text{د(س)} = \frac{\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا س}}{\text{س}^2 - 9} \quad \textcircled{18} \text{د(س)} = \frac{\text{ظا س}}{\text{س}^2 - 9}$$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

$$\textcircled{19} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{س}^2 \text{ ظا س} + \text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^5}, \text{ س} > \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4}, \text{ على الفترة } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \\ \frac{\pi}{4}, \text{ س} > 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{20} \left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{س}^{1-6}}{1-3\text{س}}, \text{ س} > 4 \\ \text{س}^3 - 1, \text{ س} \geq 1 \\ \text{س}^2, \text{ س} \geq 4 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

على الفترة $[-4, 6]$

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

$$\textcircled{21} \text{د(س)} = \frac{3 + \text{س}}{\text{س}^2 + |\text{س}| + 9} \text{متصلة على ع}$$

$$\textcircled{22} \text{ د(س)} = \left. \begin{array}{l} \frac{81 - (3+s)}{s} \\ \text{حيث } s \neq 0 \\ \text{عندما } s = 0 \end{array} \right\} \text{متصلة على } \mathbb{C}$$

أوجد قيمتي الثابتين ب ، ج في كل مما يأتي :

$$\textcircled{23} \text{ د(س)} = \left. \begin{array}{l} 1+s \\ 2 > s > 1 \\ \text{متصلة على } \mathbb{C} \end{array} \right\} \text{ ، } \left. \begin{array}{l} 2+s \\ s \in [-1, 2] \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{24} \text{ د(س)} = \left. \begin{array}{l} 2+s \\ 2 > s > 1 \\ \text{متصلة على } \mathbb{C} \end{array} \right\} \text{ ، } \left. \begin{array}{l} 3+s \\ 1 > s > 2 \\ \text{متصلة على } \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكناً :

$$\textcircled{25} \text{ د(س)} = \left. \begin{array}{l} 1+s \\ s \leq 2 \\ \text{عند } s = 2 \end{array} \right\} \text{ ، } \left. \begin{array}{l} \frac{4-s}{2-s} \\ s > 2 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{26} \text{ د(س)} = \left. \begin{array}{l} \frac{3+s-1}{s} \\ s < 0 \\ \text{عند } s = 0 \end{array} \right\} \text{ ، } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{s} \\ s > 0 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{27} \text{ د(س)} = \left. \begin{array}{l} \frac{(3-s) + (3-s)}{3-s} \\ s < 3 \\ \text{عند } s = 3 \end{array} \right\} \text{ ، } \left. \begin{array}{l} \text{جتا } (3-s) \\ s > 3 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{28} \text{ د(س)} = \frac{6-s-s}{3-s} \text{ عند } s = 3$$

$$\textcircled{29} \text{ أوجد قيمة ج التي تجعل الدالة د متصلة عند ج حيث: د(س)} = \left. \begin{array}{l} 2-s \\ s > 2 \\ \text{ج} \end{array} \right\} \text{ ، } \left. \begin{array}{l} s \\ s < 2 \\ \text{ج} \end{array} \right\}$$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات Trigonometry

مقدمة الوحدة

حساب المثلثات Trigonometry هو أحد فروع مادة الرياضيات ويعتبر قديماً المصريين أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات حيث استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم ، وترجع معرفتنا بحساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها واستخدموها في إيجاد بعض العلاقات التي تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، كما ساهم علماء العرب والمسلمين في حل المعادلات المثلثية كما استخدموا المماسات والقواطع ونظائرها في قياس المسافات والزوايا كما ابتكروا طريقة لإنشاء جداول للجيب في المثلثات المستوية. ونشير هنا إلى العالم السويسري ليونارد أويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) الذي قدم تعبيراً جديداً للدوال المثلثية ، كما استخدم الكثير من الرموز الرياضية التي تساعد في استخدام المسائل الرياضية المتقدمة التي تدرس في جميع المدارس والجامعات حتى الان وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التي تربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

مخرجات تعلم الوحدة

في نهاية الوحدة وتنفيذاً للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف على قانون (قاعدة) الجيب ✚ يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام ✚ إذا علم في المثلث طولاً ضلعين، لأي مثلث ، والتي تنص على: في أي مثلث في إيجاد طول ضلع مجهول في هذا المثلث. وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- ✚ مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها. ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث. ✚ إذا علم في المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.
- ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث. ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب ✚ يستخدم الآلة الحاسبة في حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام لأي مثلث.
- ✚ يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها في حل تمارين متنوعة. ✚ يستخدم قانون (قاعدة) الجيب ✚ إذا علم في المثلث قياساً زاويتين، وطول أحد أضلاعه.
- ✚ يتعرف على قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.

المصطلحات الأساسية

حساب المثلثات	Trigonometry	حل وحيد	Unique Solution	زاوية مقابلة لضلع	Opposite Angle of a Side
قاعدة الجيب	Sine Rule	أقصر ضلع	Shortest Side	أصغر زاوية	Smallest Angle
زاوية حادة	Acute Angle	أطول ضلع	Longest Side	أكبر زاوية	Largest Angle
زاوية منفرجة	Obtuse Angle	مساحة المثلث	Area of The Triangle	قاعدة جيب التمام	Cosine Rule
زاوية قائمة	Right Angle	أطوال أضلاع المثلث	The Lengths of The Sides of the Triangle		
حالة مبهمه	Ambiguous Case				
حلول ممكنة	Possible Solutions				

الأدوات والوسائل

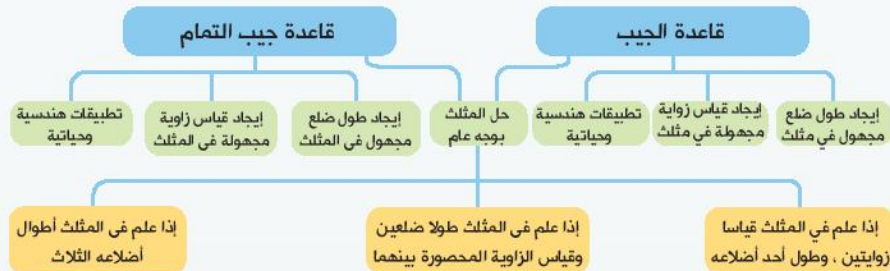
آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١ - ٤): قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس (٢ - ٤): قانون (قاعدة) جيب التمام.

مخطط تنظيمي للوحدة



قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

١ - ٤

سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتييه الحادتين والآن سوف نتعلم طرقاً أخرى لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.



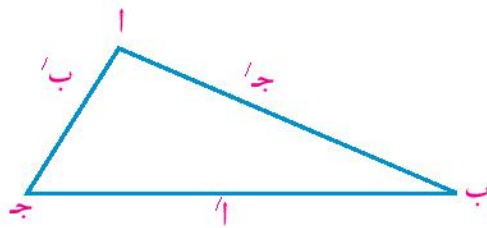
نشاط

أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل. قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم) تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.

(استنتاج قانون الجيب لا يمتحن فيه الطالب)

The Sine Rule

قانون (قاعدة) الجيب



في المثلث أ ب ج إذا استخدمنا الرمز أ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ، والرمز ب للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب، والرمز ج للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ج، فإنه

يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.

أي أن: $\frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج}$ صيغ مساحات المثلث المتساوية

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين $\times$ جيب الزاوية بينهما

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

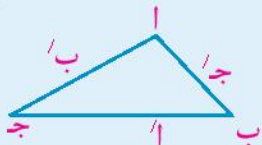
المصطلحات الأساسية

- حساب المثلثات Trigonometry
- قاعدة الجيب Sine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle
- حالة مبهمه
- The Ambiguous Case

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

تذكر أن



مساحة المثلث أ ب ج

$$\frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ج} \times \sin \text{أ} =$$

$$\frac{1}{2} \times \text{ا} \times \text{ج} \times \sin \text{ب} =$$

$$\frac{1}{2} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \sin \text{ج} =$$

بضرب كل عبارة في ٢

بقسمة كل عبارة على أ ب ج

بالتبسيط

من خواص التناسب

$$\text{ب} \times \text{ج} \times \text{ا} = \text{ا} \times \text{ج} \times \text{ب} = \text{أ} \times \text{ب} \times \text{ج}$$

$$\frac{\text{ب} \times \text{ج} \times \text{ا}}{\text{أ} \times \text{ب} \times \text{ج}} = \frac{\text{ا} \times \text{ج} \times \text{ب}}{\text{أ} \times \text{ب} \times \text{ج}} = \frac{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج}}{\text{أ} \times \text{ب} \times \text{ج}}$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

أي أن: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أي: $\frac{\text{ا}}{\sin \text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\sin \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\sin \text{ج}}$

استخدام قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

مثال

١ أوجد طول أكبر ضلع في المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle \text{ا} = ٥٤^\circ ٣٣'$ ، و $\angle \text{ب} = ٤٩^\circ ٢٢'$ ، $\text{ا} = ١٢٤,٥$ سم

الحل

(التباين في المثلث)

أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية

$$\angle \text{ج} = ١٨٠^\circ - (\angle \text{ا} + \angle \text{ب}) = ١٨٠^\circ - (٥٤^\circ ٣٣' + ٤٩^\circ ٢٢')$$

$$= ٧٦^\circ ٥ = ١٨٠^\circ - [٤٩^\circ ٢٢' + ٥٤^\circ ٣٣']$$

∴ أكبر طول ضلع هو ج لأنه يقابل أكبر زاوية في المثلث وهي زاوية ج

$$\frac{\text{ج}}{\sin ٧٦^\circ ٥} = \frac{١٢٤,٥}{\sin ٥٤^\circ ٣٣'}$$

$$\frac{\text{ج}}{\sin ٧٦^\circ ٥} = \frac{\text{ا}}{\sin \text{ا}}$$

$$\text{ج} = \frac{١٢٤,٥ \times \sin ٧٦^\circ ٥}{\sin ٥٤^\circ ٣٣'} = ١٤٨,٤ \text{ سم}$$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد طول أصغر ضلع في المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle \text{ا} = ٤٣^\circ$ ، و $\angle \text{ب} = ٦٥^\circ$ ، $\text{ج} = ٨,٤$ سم

حل المثلث باستخدام قانون الجيب Solving the triangle using the sine rule

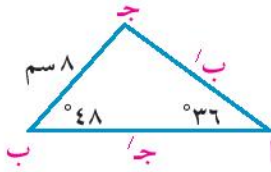
المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

أولاً: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

٢ حل المثلث أ ب ج حيث $\text{ا} = ٨$ سم، و $\angle \text{ا} = ٣٦^\circ$ ، و $\angle \text{ب} = ٤٨^\circ$

الحل



$$\text{و} (\angle ج) = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ) = 96^\circ$$

$$\therefore \frac{\text{جـ}}{\text{بـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{اـ}} \quad \therefore \frac{\text{جـ}}{\text{بـ}} = \frac{8}{10.14}$$

$$\therefore \text{بـ} = \frac{8 \times 10.14}{8} = 10.14 \text{ سم}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولاً من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

$$\rightarrow \text{إبدأ} \quad (8 \times \sin 48) \div \sin 36 =$$

$$\therefore \frac{\text{جـ}}{\text{اـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{بـ}} \quad \therefore \frac{8}{10.14} = \frac{\text{جـ}}{\text{بـ}} \quad \therefore \text{جـ} = \frac{8 \times 10.14}{10.14} = 8 \text{ سم}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

$$\rightarrow \text{إبدأ} \quad (8 \times \sin 96) \div \sin 36 =$$

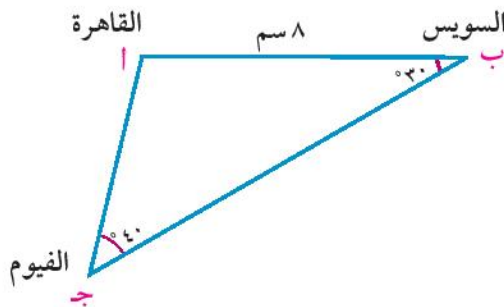
٤ حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب ج حيث أ = 8 سم، و $(\angle ا) = 60^\circ$ ، و $(\angle ب) = 40^\circ$

مثال

٣ الربط بالجغرافيا: الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثاً إذا كانت المسافة على

الخريطة بين السويس والقاهرة 8 سم وقياس الزاوية عند الفيوم 40° فأوجد لأقرب كيلو متر:



أ المسافة بين القاهرة والفيوم.

ب المسافة بين السويس والفيوم.

علماً بأن كل اسم على الرسم يمثل 16,75 كم

الحل

$$\text{و} (\angle ا) = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$$

$$\therefore \frac{\text{اـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{بـ}}{\text{اـ}} = \frac{\text{جـ}}{110^\circ} = \frac{8}{40^\circ}$$

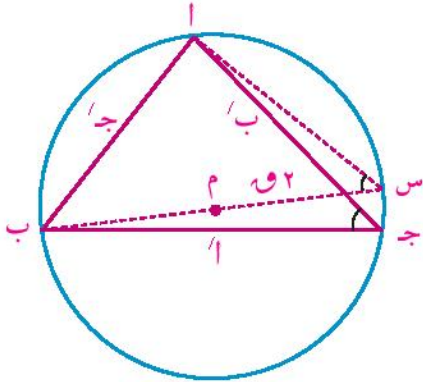
$$\therefore \text{اـ} = \frac{8 \times 110}{40} = 22 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المسافة بين القاهرة والفيوم} \approx 16,75 \times 22 = 368,5 \text{ كم}$$

$$\therefore \text{المسافة بين السويس والفيوم} \approx 16,75 \times 11,7 = 196 \text{ كم}$$

في أي مثلث $أ ب ج$ يكون: $\frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج}$

حيث $م$ طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث $أ ب ج$



(البرهان لا يمتحن فيه الطالب)

البرهان:-

إذا كانت الدائرة تمر برؤوس المثلث $أ ب ج$ الحاد الزوايا

نرسم الدائرة التي تمر برؤوس المثلث $أ ب ج$ الحاد الزوايا ثم

نرسم القطر $ب س$ والوتر $س أ$

$$\therefore \angle (ب س أ) = 90^\circ, \quad \angle (أ ب س) = \angle (أ ج ب) \quad , \quad \angle (أ س ب) = \angle (أ ج ب)$$

$$\therefore \frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج} \quad , \quad \frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب}$$

فيكون $أ ب = ب س ج$

$$\therefore \frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج} \quad \text{أي أن:} \quad \frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج}$$

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن: $\frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج}$ ، $\frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب}$

$$\therefore \frac{أ}{\sin أ} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج} = \frac{أ}{\sin أ}$$

مثال

٤ مثلث $ل م ن$ فيه $م = ٦٨,٤$ سم، $\angle (م) = 100^\circ$ ، $\angle (ن) = 40^\circ$ أوجد:

أ $ل$ ب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث $ل م ن$

ج مساحة سطح المثلث $ل م ن$

الحل

$$\angle (ل) = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$$

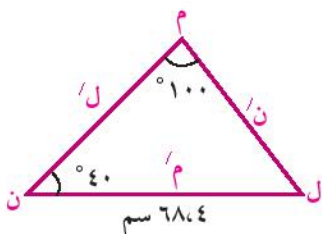
$$\frac{ل}{\sin 40^\circ} = \frac{٦٨,٤}{\sin 100^\circ}$$

$$ل = \frac{٦٨,٤}{\sin 100^\circ} \times \sin 40^\circ \approx ٤٤,٦٤ \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{ل}{\sin 40^\circ} = \frac{م}{\sin 100^\circ} \quad \therefore \frac{ل}{\sin 40^\circ} = \frac{٦٨,٤}{\sin 100^\circ}$$

$$\text{أي أن } م = \frac{ل \times \sin 100^\circ}{\sin 40^\circ} \approx ٣٤,٧٢ \text{ سم}$$

$$\text{مساحة المثلث } ل م ن = \frac{١}{٢} \times ل \times م \times \sin 40^\circ = \frac{١}{٢} \times ٤٤,٦٤ \times ٣٤,٧٢ \times \sin 40^\circ \approx ٩٨١,١ \text{ سم}^٢$$



(قانون الجيب)

وهو المطلوب (١)

وهو المطلوب (٢)

٤ حاول أن تحل

- ٣ أب جـ مثلث فيه $\widehat{أ} = ٢٥^\circ$ سم، و $(\triangle ب) = ٣٥١٨^\circ$ ،
و $(\triangle ج) = ١٠٣٤٢^\circ$ أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

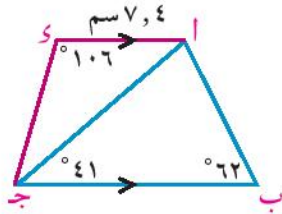
مثال

- ٥ أب جـ شبه منحرف فيه $\overline{أى} // \overline{ب ج}$ ، $أى = ٧,٤$ سم، و $(\triangle ب) = ٦٢^\circ$ ، و $(\triangle س) = ١٠٦^\circ$ ،
و $(\triangle ا ج ب) = ٤١^\circ$. أوجد

أولاً: طول كل من $\overline{أ ج}$ ، $\overline{ب ج}$
ثانياً: مساحة سطح شبه المنحرف أب جـ لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

فى المثلث ا جـ



(بالتبادل)

$$\begin{aligned} \therefore (\triangle س ا ج) &= (\triangle ا ج ب) = ٤١^\circ \\ \therefore (\triangle ا ج س) &= ١٨٠^\circ - (١٠٦^\circ + ٤١^\circ) = ٣٣^\circ \\ \therefore \frac{ا ج}{\sin ٣٣^\circ} &= \frac{٧,٤}{\sin ١٠٦^\circ} \\ \therefore ا ج &= \frac{٧,٤ \times \sin ١٠٦^\circ}{\sin ٣٣^\circ} = ١٣,٠٦ \text{ سم} \\ \therefore (\triangle ا ج ب) &= ١٨٠^\circ - (٤١^\circ + ٦٢^\circ) = ٧٧^\circ \\ \therefore \frac{ب ج}{\sin ٦٢^\circ} &= \frac{١٣,٠٦}{\sin ٧٧^\circ} \\ \therefore ب ج &= \frac{١٣,٠٦ \times \sin ٧٧^\circ}{\sin ٦٢^\circ} = ١٤,٤١ \text{ سم} \\ \text{مساحة سطح شبه المنحرف ا ب جـ} &= \frac{١}{٢} \times ا ج \times ب ج \times \sin ٤١^\circ + \frac{١}{٢} \times ا ج \times ا س \times \sin ٤١^\circ \\ &= \frac{١}{٢} \times ١٣,٠٦ \times (١٤,٤١ + ٧,٠٤) \times \sin ٤١^\circ \approx ٩٣ \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

- ٤ أب جـ شكل رباعى فيه جـ = ١٠٠ سم، و $(\triangle ب ج ا) = ٣٦^\circ$ ، و $(\triangle ب س ا) = ٥٥^\circ$ ،
و $(\triangle ب ج س) = ٨٥^\circ$ ، و $(\triangle ج س ا) = ٨٧^\circ$ ، أوجد طول كل من $\overline{ب س}$ ، $\overline{أ ج}$ لأقرب سنتيمتر.

تمارين ٤ - ١

أكمل كل مما يأتى:

- فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع
- فى المثلث أب جـ إذا كان ٢ جا = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن أ: ب: جـ =
- أب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ٣٦١٠ سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث =
- مثلث أب جـ فيه و $(\triangle ا) = ٦٠^\circ$ ، و $(\triangle ج) = ٤٠^\circ$ ، جـ = ٨,٤ سم فإن أ = سم
- فى المثلث أب جـ يكون $\frac{ب}{\sin ا} = \frac{ج}{\sin ب}$ هو

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

- طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جـ الذى فيه و $(\triangle ا) = ٣٠^\circ$ ، أ = ١٠ سم هو:
 أ ١٠ سم ب ٢٠ سم ج ٥ سم د ٤٠ سم
- إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جـ يساوى ٤ سم، و $(\triangle ا) = ٣٠^\circ$ فإن أ هو:
 أ ٤ سم ب ٢ سم ج ٣,٦٤ د ١,٦

٨ في المثلث أ ب ج يكون المقدار ٢ مو جا مساويًا:

- أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤ م (أ ب ج)

٩ إذا كان مو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{\text{ص}}{\text{جا ص}}$ يساوي:

- أ ١ ب ٢ ج $\frac{1}{3}$ د ٤ مو

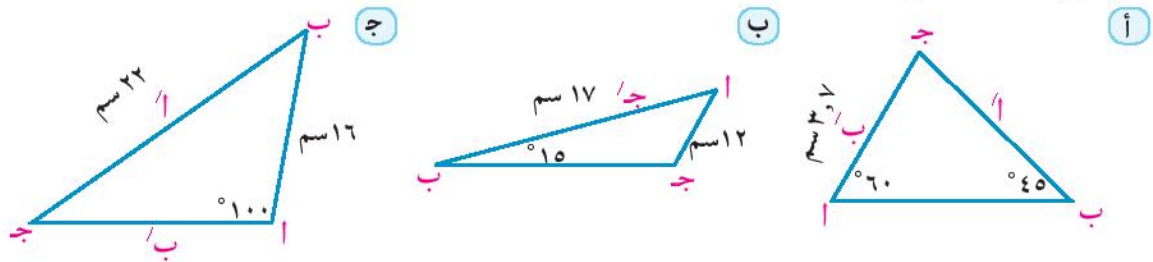
١٠ Δ م ن فيه، و (أ ب) = 30° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوي:

- أ ٧ سم ب ٣,٥ سم ج ١٤ سم د $\frac{14}{3}$ سم

١١ في المثلث س ص ع إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن س: ص: ع تساوي:

- أ ٤: ٣: ٢ ب ٣: ٤: ٦ ج ٦: ٤: ٣ د ٦: ٣: ٤

١٢ حل كل مثلث مما يلي:



١٣ أ ب ج مثلث فيه و (أ ب) = 60° ، و (ب ج) = 45° ، أثبت أن: أ: ب: ج = $1 + \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$

١٤ أ ب ج د متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧ سم وقطره أ ج، ب د يصنعان مع ضلعه أ ب زاويتين مقدارهما $36^\circ ٢٢'$ ، $٥٨^\circ ٤٤'$ ، أوجد طولَي القطرين.

١٥ أ ب ج د شبه منحرف فيه أ د // ب ج، أ د = ١٠,٧ سم، و (أ د) = 100° ، و (ب ج) = $٦١^\circ ١٩'$ ، و (أ ج د) = $٣٣^\circ ٥٠'$ ، أوجد طول كل من أ ج، ب ج.

١٦ أ ب ج د شكل رباعي فيه و (أ ب ج د) = 85° ، و (أ ج د) = ٨٧° ، و (أ ب ج) = ٣٦° ، و (أ د ب) = ٥٥° ج د = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من ب د، أ ج لأقرب متر.

١٧ أ ب ج مثلث فيه جا ج = ٠,٣٥، ج = ١٤ سم، أوجد بدلالة π مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج.

١٨ أ ب ج مثلث فيه أ = ٥٨° ، و (أ ب) = ٣٨° ، (أ ج) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من أ على أ.

١٩ أ ب ج مثلث فيه و (أ ب) = 60° ، و (ب ج) = 45° ، فإذا كان أ + ب = $(٢ + \sqrt{3})$ سم فأوجد كل من أ، ب.

٢٠ أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠ سم، إذا كان و (أ ب) = 42° ، و (ب ج) = $٧٤^\circ ٤٨'$ ، أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب ج.

٢١ أ ب ج مثلث فيه ج = ١٩ سم، و (أ ب) = ١١٢° ، و (ب ج) = ٣٣° ، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من ب، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

٢٢ **الربط بالجغرافيا:** الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ، ب، ج.

أوجد لأقرب كيلو متر:

- أ المسافة بين أ، ج ب المسافة بين ب، ج

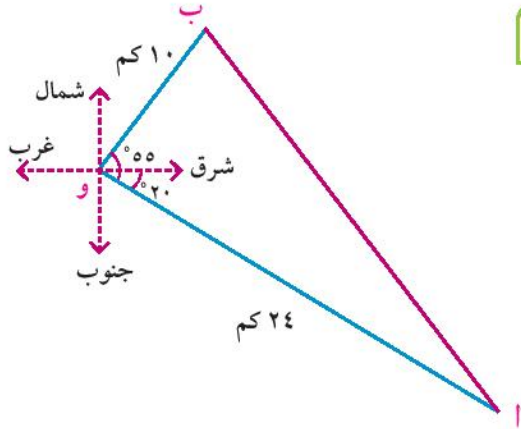
٢٣ **تفكير ابداعي:**

أ في المثلث أ ب ج أثبت أن: $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ} - \text{ج}}{\text{جا ب}}$

ب إذا كانت م هي مساحة سطح المثلث أ ب ج أثبت أن م = $\frac{1}{2} (\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا ج})$

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule



فكر و ناقش

تحركت سفيتان ١، ب في نفس اللحظة من أحد الموانئ، فإذا تحركت أ في اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب في اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم في نفس الزمن.

أوجد المسافة بين السفينتين في نهاية هذا الزمن.

استخدم القياسات الهندسية بمقياس رسم مناسب وذلك لإيجاد طول $\overline{AB}$.

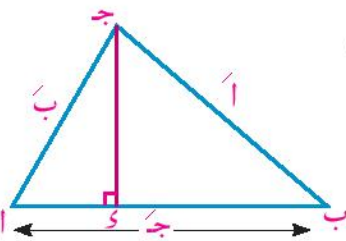
هل يمكنك استخدام قانون الجيب لإيجاد طول $\overline{AB}$ ؟

هل يمكنك استنتاج قانون آخر لإيجاد طول $\overline{AB}$ بمعلومية طول كل من $\overline{OA}$ ، و $\overline{OB}$ وقياس الزاوية المحصورة بينهما؟ فسر إجابتك.

(استنتاج قاعدة جيب التمام لا يمتحن فيه الطالب)

تعلم

The Cosine Rule



(بأخذ b^2 عامل مشترك)

تذكر أن

متطابقة فيثاغورث

$$1 = 1^2 + 1^2 - 1^2$$

قانون (قاعدة) جيب التمام

في $\triangle ABC$ ب و ج القائم الزاوية في و:

$$(b^2 - c^2) + (a^2 - c^2) = (b^2 - c^2) + (a^2 - c^2)$$

أي أن:

$$b^2 - c^2 + a^2 - c^2 = b^2 - c^2 + a^2 - c^2$$

$$b^2 - c^2 + a^2 - c^2 = b^2 - c^2 + a^2 - c^2$$

(بفك الأقواس)

$$b^2 - c^2 + a^2 - c^2 = b^2 - c^2 + a^2 - c^2$$

$$b^2 - c^2 + a^2 - c^2 = b^2 - c^2 + a^2 - c^2$$

ومن ذلك يكون:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

- Cosine Rule قاعدة جيب التمام
- Acute Angle زاوية حادة
- Obtuse Angle زاوية منفرجة
- Right Angle زاوية قائمة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

ارشاد

يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أ، ب، ج في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

تفكير ناقد: هل القانون السابق صحيح إذا كان $\triangle$ أ ب ج قائم الزاوية في أ؟ فسر إجابتك.

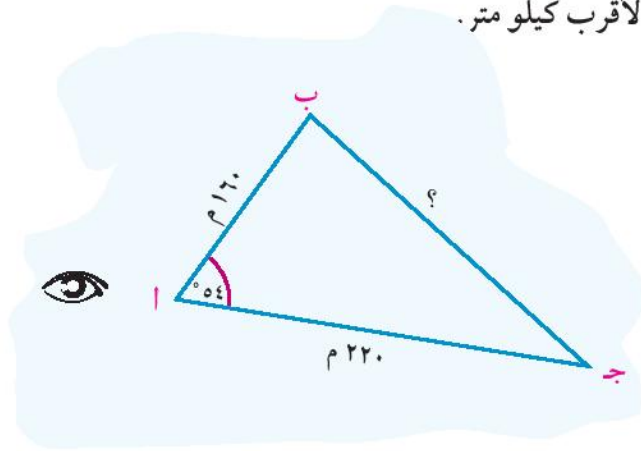
ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أ ب ج يكون:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}{c^2} &= 1 \quad \text{ومنه} \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2 \\ \frac{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}{b^2} &= 1 \quad \text{ومنه} \quad a^2 + c^2 - 2ac \cos B = b^2 \\ \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{a^2} &= 1 \quad \text{ومنه} \quad b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2 \end{aligned}$$

نشاط

أ استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث باستخدام قاعدة جيب التمام.
أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليهما باستخدام جهاز قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى (أ) يساوي ١٦٠ مترًا وبعده عن النقطة الثانية (ج) يساوي ٢٢٠ مترًا، و $\angle$ أ ب ج = 54° . استخدم هذه البيانات لحساب المسافة بين النقطتين لأقرب كيلو متر.



- ١ - حدد بدقة البيانات التي رصدها المهندس باستخدام جهاز قياسات المسافات.
- ٢ - حدد المطلوب.
- ٣ - مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا الأدوات الهندسية اللازمة..
- ٤ - قس بالسنتيمترات طول ب ج.
- ٥ - أوجد الطول الحقيقي للمسافة بين ب، ج بالكيلو مترات.

٦ - هل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتي ب، ج؟
وضح ذلك.

٧ - قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول ب ج باستخدام القياسات الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

من النشاط السابق نجد أن:

- ١ - مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو مترًا
- ٢ - باستخدام القياس: طول ب ج = ٩ سم في الرسم
- ٣ - طول ب ج الحقيقي $\approx 20 \times 9 \approx 180$ كم

تذكر أن



الطول الحقيقي = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

٤ - قاعدة جيب التمام هي: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ جتا أ

بالتعويض: $a^2 = 160^2 + 220^2 - 2(160)(220) \cos 54^\circ$ جتا ٥٤ $\approx 32619,9$

فتكون: $a \approx 180,6$ كم.

٥ - النتائج تكون أدق عندما يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.

٦ - استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد الناتج:



ابدأ
1 6 0 χ^2 + 2 2 0 χ^2 - 2 $\times$ 1 6 0 $\times$
2 2 0 $\times$ Cos 5 4) = $\sqrt{\quad}$ =

تطبيق على النشاط: أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين في $\triangle$ أ ب ج الذي فيه:

أ $\angle A = 43,26^\circ$ سم، $b = 3,84$ سم، $c = 1,01$ سم

ب $\angle B = 2^\circ$ سم، $c = 5$ سم، $a = 60^\circ$

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

١ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب ج الذي فيه $a = 6,4$ ، $b = 2,3$ ، $c = 8,2$

الحل

$\therefore$ أكبر زاوية في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا $\therefore \triangle$ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\text{جتا أ} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2,3^2 + 8,2^2 - 6,4^2}{2 \times 2,3 \times 8,2}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ

3.2 χ^2 + 2.8 χ^2 - 4.6 χ^2 = $\div$ (2 $\times$ 3.2 $\times$ 2.8)
= Shift Cos = ,,,

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية أمفرجة

$\therefore \angle A = 99^\circ 53' 49''$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب ج الذي فيه $a = 11$ سم، $b = 10$ سم، $c = 8$ سم

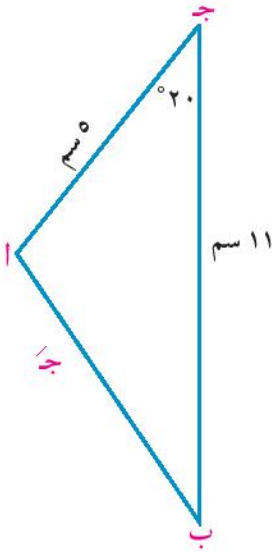
استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

أولاً: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included

مثال



٢ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ١١ سم، ب = ٥ سم، و $\angle أ = 20^\circ$

الحل

يجب إيجاد ج، و $\angle أ$ ، و $\angle ب$

∴ $ج^2 = أ^2 + ب^2 - 2 \cdot أ \cdot ب \cdot \cos \angle أ$ (قانون جيب التمام)

$$ج^2 = 11^2 + 5^2 - 2(11)(5) \cos 20^\circ$$

$$ج \approx \sqrt{11^2 + 5^2 - 2(11)(5) \cos 20^\circ} \approx 7.529 \text{ سم}$$

$$\cos \angle ب = \frac{أ^2 + ج^2 - ب^2}{2 \cdot أ \cdot ج} = \frac{11^2 + 7.529^2 - 5^2}{2(11)(7.529)} \approx 0.817$$

$$\angle ب \approx \cos^{-1}(0.817) \approx 35.214^\circ$$

$$\angle أ = 180^\circ - (\angle ب + \angle ج) = 180^\circ - (35.214^\circ + 20^\circ) = 124.786^\circ$$

$$\angle ج = 180^\circ - (124.786^\circ + 35.214^\circ) = 20^\circ$$

في المثال السابق عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلاً من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

لاحظ أن:

١- في حالة استخدام قانون الجيب:

◀ فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائماً موجب.

٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:

◀ إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالباً.

◀ وإذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجباً.

◀ يسمح أيضاً قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علماً بأن مجموع طولى أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.

ارشاد



يمكنك استخدام قانون الجيب أيضاً لحساب $\angle أ$ ، و $\angle ب$ بعد إيجاد ج، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ٦ سم، ب = ٢ سم، $\angle أ = 14^\circ$

$$\angle ب = \cos^{-1}\left(\frac{أ^2 + ج^2 - ب^2}{2 \cdot أ \cdot ج}\right) = 42.18^\circ$$

ثانياً: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

٢ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ٩ سم، ب = ٧ سم، $\angle ج = 5^\circ$

الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ، ب، ح

$$\therefore \text{جنا أ} = \frac{29^2 - 25^2 + 27^2}{2 \times 25 \times 27} = \frac{29^2 - 25^2 + 27^2}{2 \times 25 \times 27} = 0,1 =$$

$$\text{و } (\angle \text{ أ}) \simeq 95^\circ 44' 21''$$

$$\text{جنا ب} = \frac{27^2 - 29^2 + 25^2}{2 \times 29 \times 25} = \frac{27^2 - 29^2 + 25^2}{2 \times 29 \times 25} = 0,633 \simeq$$

$$\text{و } (\angle \text{ ب}) \simeq 50^\circ 42' 13''$$

$$\text{و } (\angle \text{ ح}) = 180^\circ - [(\angle \text{ أ}) + (\angle \text{ ب})] = 33^\circ 33' 26''$$

٦ حاول أن تحل

٣ حل المثلث أ ب ح الذي فيه أ = ١٢, ٢ سم، ب = ١٨, ٤ سم، ح = ٢١, ١ سم

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام Geometric Applications on the Cosine Rule

مثال

٤ أ ب ح مثلث فيه أ = ٦٣ سم، ب = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلاً من ب، ح وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

$$\therefore \text{أ} + \text{ب} + \text{ح} = 140 \quad (\text{محيط المثلث}) \quad \text{أ} = 63$$

$$\therefore \text{ب} + \text{ح} = 140 - 63 = 77 \quad \text{أي} \quad \text{ب} + \text{ح} = 77 \quad (1)$$

$$\therefore \text{ب} - \text{ح} = 27 \quad (\text{معطى}) \quad (2)$$

من (١)، (٢) بالجمع ينتج أن:

$$2\text{ب} = 104 \quad \text{أي أن} \quad \text{ب} = 52 \text{ سم}$$

$$\text{بالتعويض في ١ ينتج أن} \quad \text{ح} = 25 \text{ سم}$$

ونلاحظ أن ح هو أصغر أضلاع المثلث أ ب ح

$\therefore \angle \text{ ح}$ هي أصغر زوايا المثلث أ ب ح

$$\therefore \text{جنا ح} = \frac{29^2 - 25^2 + 27^2}{2 \times 25 \times 27} = \frac{29^2 - 25^2 + 27^2}{2 \times 25 \times 27} = 0,9230769 =$$

$$\therefore \text{و } (\angle \text{ ح}) = 22^\circ 37'$$

مساحة المثلث أ ب ح = $\frac{1}{2} \times \text{أ} \times \text{ب} \times \sin \text{ح}$

$$\simeq 630 \text{ سم}^2 = \frac{1}{2} \times 63 \times 52 \times \sin 22^\circ 37'$$

٩ حاول أن تحل

- ٤ △ ا ب ح فيه ب = ٤ سم، أ = ح = ١١ سم، أثبت أن و (أ ب) = ٢ و (ب) ، ثم أوجد محيط المثلث ا ب ح ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

مثال

- ٥ ا ب ح و شكل رباعي فيه ا ب = ٢٢ سم، و (أ ب) = ٦٥°، و (ب) = ٥٠°، ب ح = ٢٥ سم، و ح = ١٨ سم، أوجد: و (ب ح) و (أ ب ح)

الحل

في △ ا ب و

$$\text{و (أ ب)} = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ) =$$

$$= 115^\circ - 65^\circ =$$

$$\therefore \text{و (أ ب)} = \text{و (ب ح)} = 65^\circ$$

$$\therefore \text{ا ب} = \text{ب ح} = 22 \text{ سم}$$

في △ ب ح و

$$\text{جتا (ب ح و)} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ح}^2 - \text{ا}^2}{2(\text{ب ح})} =$$

$$= \frac{22^2 + 25^2 - 18^2}{2 \times 22 \times 25} \approx 0,7137$$

$$\therefore \text{و (ب ح و)} \approx 44^\circ 28' 6''$$

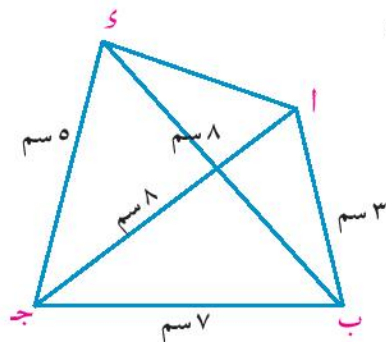
$$\text{جتا (ب ح و)} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ا}^2 - \text{ح}^2}{2(\text{ب ا})} = \frac{22^2 + 18^2 - 25^2}{2 \times 22 \times 18} \approx 0,5167$$

$$\therefore \text{و (ب ح و)} \approx 58^\circ 34' 28''$$

٩ حاول أن تحل

- ٥ ا ب ح و شكل رباعي فيه و (أ ب) = و (ب ح) = ٩٠°، ب = ١٠ سم، ا = ٨ سم، و (ب ح) = ٣٠°، أوجد ا ح لأقرب سنتيمتر.

مثال



- ٦ ا ب ح و شكل رباعي فيه ا ب = ٣ سم، ا ح = ٨ سم، ب ح = ٧ سم، ح = ٥ سم، ب = ٨ سم، أثبت أن الشكل ا ب ح و رباعي دائري.

الحل

في △ ا ب ح

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ح}^2 - \text{ا}^2}{2(\text{ب ح})} = \frac{3^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 5} =$$

∴ $\angle A = 60^\circ$ (١)

في $\triangle ABC$

$$\frac{1}{2} = \frac{2(7) - 2(8) + 2(5)}{8 \times 5 \times 2} = \frac{2(BC) - 2(AB) + 2(AC)}{2(BC)(AC)}$$

∴ $\angle C = 60^\circ$ (٢)

∴ $\angle A = \angle C = 60^\circ$ وهما مرسومتان على $\overline{BC}$ وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل ABC رباعي دائري. (وهو المطلوب).

٩ حاول أن تحل

٦ ABC شكل رباعي فيه $AB = 9$ سم، $BC = 5$ سم، $CD = 8$ سم، $DA = 9$ سم، $\angle A = 110^\circ$. أثبت أن الشكل ABC رباعي دائري.

تمارين ٤ - ٢

أكمل كلاً مما يأتي:

١ يستخدم لحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

٢ يستخدم لحل المثلث بمعلومية قياسى زاويتين وطول ضلع فيه

٣ فى أى مثلث LMN يكون: $\angle L = 2^\circ$ ، $\angle M = 2^\circ$ ، $\angle N = 2^\circ$ ، جتان -

٤ فى المثلث ABC ، أطوال أضلاعه 13 ، 17 ، 10 من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي°

٥ مثلث SCS ع أطوال أضلاعه 5 ، 7 سم، 4 ، 7 سم، 3 ، 4 سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي°

٦ $\triangle SCS$ فيه $\angle S = 10^\circ$ سم، $\angle C = 6^\circ$ سم، $\angle S = 6^\circ$ سم، $\angle C = 6^\circ$ سم، فإن $\angle C =$ °

٧ فى $\triangle LKM$ يكون $\angle K = 2^\circ$ ، $\angle M = 2^\circ$ ، $\angle L = 2^\circ$ ، -

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه 3 ، 5 ، 7 هى:

- أ 150° ب 120° ج 60° د 30°

٩ فى أى مثلث LMN يكون المقدار $\frac{\angle L + \angle M + \angle N}{2}$ مساوياً:

- أ جتان ب جتان ج جتان د لا شئ مما سبق

١٠ فى المثلث SCS ع يكون $\angle S = 2^\circ$ ، $\angle C = 2^\circ$ ، $\angle S = 2^\circ$ ، $\angle C = 2^\circ$ ، -

- أ جتان ب جتان ج جتان د جتان

١١ فى المثلث ABC ، $\angle A = 3^\circ$ ، $\angle B = 2^\circ$ ، $\angle C = 2^\circ$ ، فإن جتان A تساوى

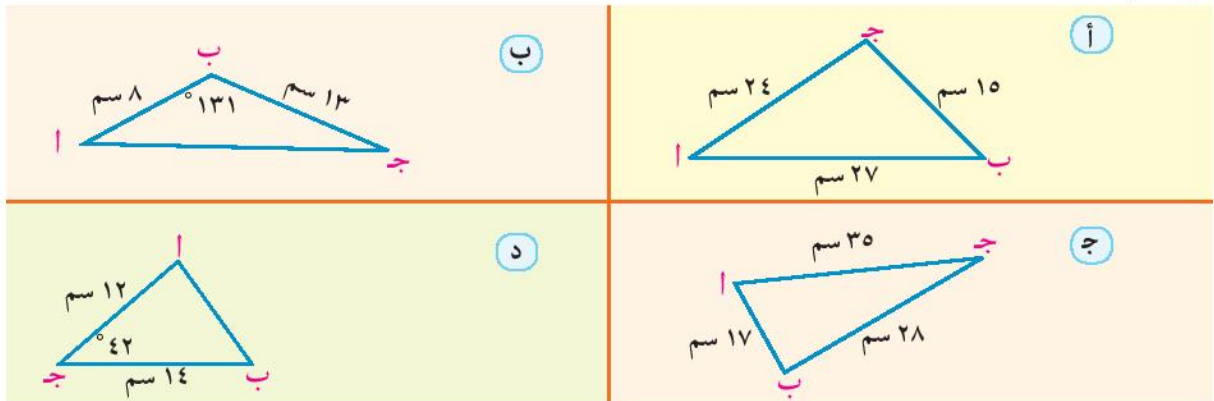
- أ $\frac{1}{8}$ ب $\frac{1}{8}$ ج $\frac{1}{4}$ د $\frac{3}{4}$

أجب عن الاسئلة الآتية:

١٢ في المثلث أ ب ج إذا كان:

- أ $\hat{A} = 5^\circ$ سم، $\hat{B} = 7^\circ$ سم، $\hat{C} = 8^\circ$ سم
 ب $\hat{A} = 3^\circ$ سم، $\hat{B} = 5^\circ$ سم، $\hat{C} = 7^\circ$ سم
 ج $\hat{A} = 13^\circ$ سم، $\hat{B} = 7^\circ$ سم، $\hat{C} = 13^\circ$ سم
 د $\hat{A} = 13^\circ$ سم، $\hat{B} = 8^\circ$ سم، $\hat{C} = 7^\circ$ سم
 هـ $\hat{A} = 10^\circ$ سم، $\hat{B} = 17^\circ$ سم، $\hat{C} = 21^\circ$ سم
 و $\hat{A} = 5^\circ$ سم، $\hat{B} = 6^\circ$ سم، $\hat{C} = 7^\circ$ سم
 ز $\hat{A} = 17^\circ$ سم، $\hat{B} = 11^\circ$ سم، $\hat{C} = 42^\circ$ سم
 ح $\hat{A} = 16^\circ$ سم، $\hat{B} = 14^\circ$ سم، $\hat{C} = 72^\circ$ سم
- فأثبت أن و (ب) $\hat{C} = 60^\circ$
 فأثبت أن و (ج) $\hat{C} = 120^\circ$
 فأوجد و (ب) $\hat{C}$
 فأوجد و (د) $\hat{C}$
 فأوجد قياس أصغر زاوية في المثلث
 فأوجد قياس أكبر زاوية في المثلث
 جـ مقرباً لأقرب رقمين عشريين
 أ مقرباً لأقرب رقمين عشريين

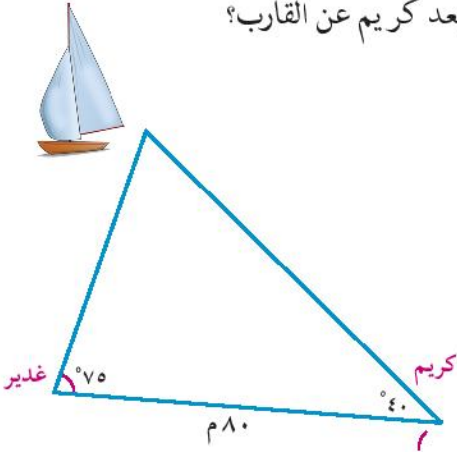
١٣ في التمارين من (أ) إلى (د) حل المثلث أ ب ج:



تطبيقات هندسية:

- ١٤ متوازي أضلاع طولاً ضلعيه المتجاورين ١٨ سم، ٢٦ سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقرباً لأقرب رقمين عشريين.
- ١٥ أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = ٩ سم، ب ج = ٥ سم، ج د = ٨ سم، د أ = ٩ سم، أ ج = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري.
- ١٦ أ ب ج د متوازي أضلاع فيه أ ب = ٩ سم، ب ج = ١٣ سم، أ ج = ٢٠ سم، أوجد طول ب د
- ١٧ أ ب ج مثلث محيطه ٧٠ سم، أ = ٢٦ سم، و (ب) $\hat{C} = 60^\circ$ ، أوجد مساحة سطحه.

١٨ **الربط بالملاحة البحرية:** يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟



قرب إجابتك لأقرب متر.

١٩ **الربط بالزراعة:** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة

الشكل طول ضلعيها ٩٨ م، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج؟

٢٠ **البرهنة النظرية:** ا ب ج مثلث فيه د منتصف ب ج ،

أثبت أن: (أ ب)² + (أ ج)² = ٢ (أ د)² + ٢ (ب د)²

وإذا كان: أ ب = ٥ سم ، أ ج = ٨ سم ، ب ج = ١٢ سم أوجد أ د .

٢١ **البرهنة النظرية (للمتفوقين):** في المثلث أ ب ج إذا كان: (أ + ب + ج) (أ - ب + ج) = ك أ ب

فأثبت أن: ك = ٠ ، ٤ ، ثم أوجد (ج) عندما ك = ١

تطبيقات حياتية:

٢٢ **مسافات:** يركب كريم دراجته البخاريه ليقطع المسافة من

المدينة أ إلى المدينة ج مروراً بالمدينة ب بسرعة منتظمة

مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة ج إلى المدينة أ

بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. أوجد:

أ المسافة بالكيلو متر بين المدينة ج ، المدينة أ

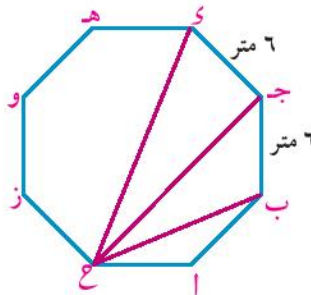
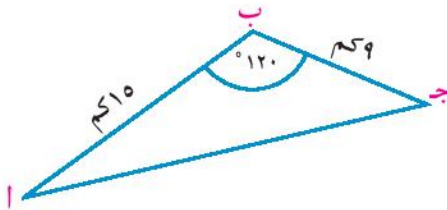
ب الزمن الكلي بالدقيقة للرحلة كلها.

٢٣ **التصميم المعماري:** صمم مهندس معماري مبنى على شكل مثنى منتظم، طول

كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار ع ب ، ع ج ، ع د .

٢٤ **اكتشف الخطأ:** ا ب ج مثلث فيه أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، ج = ٥ سم

و (أ) = ٦٢ ، ٤١° . أوجد (ج) و (ب)



حل كريم

$$\therefore \text{جتاب} = \frac{1^2 + 7^2 - 10^2}{2 \times 1 \times 7} = \frac{1 + 49 - 100}{14} = \frac{-50}{14} \approx -3.57$$

$$\therefore \text{جتاب} = \frac{10^2 - 7^2 - 1^2}{2 \times 10 \times 7} = \frac{100 - 49 - 1}{140} = \frac{50}{140} \approx 0.36$$

$$\therefore \text{و (ب)} \approx 111.8^\circ$$

حل زياد

$$\therefore \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{10}{\text{ج}} \Rightarrow \text{ج} = \frac{10 \times 10}{7} \approx 14.29$$

$$\therefore \text{و (ب)} = 71.09^\circ$$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.