

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الأول الثانوى



للمباضيات تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات والمستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم.

إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل

أ/ كمال يونس كبشة

مراجعة وتعديل

أ/ شريف عاطف البرهامي

د/ محمد محي الدين عبد السلام

إشراف تربوى

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

د/ أكرم حسن

إشراف علمى

مستشار الرياضيات

أ/ منال عزقول



Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصرى

غير مصرح بتداول الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلى:

- ١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية، والتي تساعد على مشاركته فى المجتمع.
- ٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم المتميز والمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.
- ٣ تقديم رؤية شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع (STS) تعكس دور التقدم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرف الواعى الفعال حيال استخدام الأدوات التكنولوجية.
- ٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراساتها وتقدير علمائها.
- ٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.
- ٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

- ★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.
- ★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تحقق من فهمك».
- ★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة.

وأخيراً... نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهتدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الجبر والعلاقات والدوال

الوحدة
الأولى

- | | | |
|----|---|-------|
| ٤ | مقدمة عن الأعداد المركبة. | ١ - ١ |
| ١٠ | تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية. | ٢ - ١ |
| ١٤ | العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها. | ٣ - ١ |
| ٢٠ | إشارة الدالة. | ٤ - ١ |
| ٢٧ | متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد. | ٥ - ١ |

التشابه

الوحدة
الثانية

- | | | |
|----|--|-------|
| ٣٢ | تشابه المضلعات. | ١ - ٢ |
| ٣٦ | تشابه المثلثات. | ٢ - ٢ |
| ٤٥ | العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين. | ٣ - ٢ |
| ٥٣ | تطبيقات التشابه فى الدائرة. | ٤ - ٢ |

نظريات التناسب فى المثلث

الوحدة
الثالثة

- | | | |
|----|--|-------|
| ٦٢ | المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة. | ١ - ٣ |
| ٧٢ | منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة. | ٢ - ٣ |

حساب المثلثات

الوحدة
الرابعة

- | | | |
|-----|--|-------|
| ٨٢ | الزاوية الموجهة. | ١ - ٤ |
| ٩٠ | القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية. | ٢ - ٤ |
| ٩٥ | الدوال المثلثية. | ٣ - ٤ |
| ١٠٣ | الزاويا المنتسبة. | ٤ - ٤ |
| ١١٢ | التمثيل البيانى للدوال المثلثية. | ٥ - ٤ |
| ١١٦ | إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية. | ٦ - ٤ |

الوحدة

الجبر

الجبر والعلاقات والدوال

Algebra, Relations and Functions

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- ✚ يوجد مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- ✚ يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- ✚ يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد.
- ✚ يبحث نوع جذري معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- ✚ يبحث إشارة دالة.
- ✚ يتعرف مقدمة في الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوي عددين مركبين).
- ✚ يحل متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد.

المصطلحات الأساسية

Equation	معادلة	✚	معادلات	✚	Complex Number	عدد مركب	✚
Discriminant of the Equation	جذر المعادلة	✚	عدد تخيلي	✚	Imaginary Number	عدد مركب	✚
Root of the Equation	إشارة دالة	✚	قوى العدد	✚	Powers of a Number	قوى العدد	✚
Coefficient of a Term	معامل الحد	✚	متباينة	✚	Inequality	متباينة	✚

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): مقدمة عن الأعداد المركبة.
الدرس (١ - ٢): تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.
الدرس (١ - ٣): العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.
الدرس (١ - ٤): إشارة الدالة.
الدرس (١ - ٥): متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلى - برامج رسومية - بعض المواقع الإلكترونية مثل:

www.phschool.com

تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمي

نبذة تاريخية

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة العباسى المأمون) فى كتابه الذى ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذى وضع فيه طرقاً أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءاً من الحساب. وقد تُرجم الكتاب إلى اللغات الأوربية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ كلمة «الجبر» (algebra).

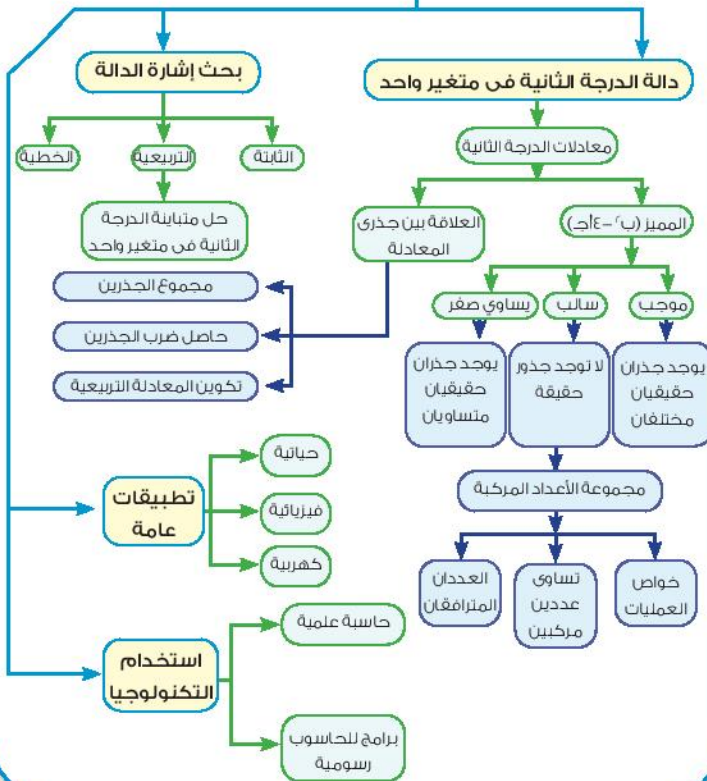
والجذر هو الذى نرمز له حالياً بالرمز $\sqrt{\quad}$ (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمي حلولاً هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التى تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذى اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة. وجدير بالذكر أنه ظهر فى بردية أحمر (١٨٦٠ ق.م) بعض المسائل التى يشير حلها إلى أن المصريين فى ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حالياً إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم - أبناءنا الطلاب - فى استعادة مجدنا العلمى فى عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والصور الإسلامية، التى حمل علماءنا فيها لواء التقدم ومشاعل المعرفة إلى العالم شرقاً وغرباً.

مخطط تنظيمي للوحدة

الجبر والعلاقات والدوال



مقدمة عن الأعداد المركبة

Complex Numbers

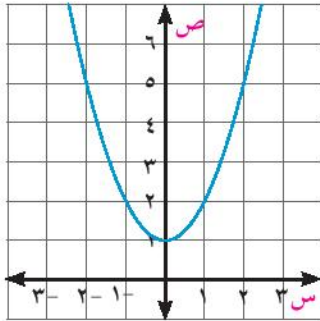
١ - ١



سوف تتعلم

- مفهوم العدد التخيلي.
- قوى ت الصحيحة.
- مفهوم العدد المركب.
- تساوى عددين مركبين.
- العمليات على الأعداد المركبة.

سبق أن درست نُظُمًا مختلفة للأعداد، وهي نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "ص" ونظام الأعداد النسبية "ن" وغير النسبية "و" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ع" ورأينا أن أى نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذى يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، وإذا تأملنا المعادلة $س^2 = ١ -$ نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (١-) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.



يبين الشكل المجاور: التمثيل البياني للدالة $ص = س^2 + ١$ نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لا يقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة $س^2 + ١ = ٠$ حلول حقيقية. لذا كان من الضروري التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.

المصطلحات الأساسية

- عدد تخيلي Imaginary Number
- عدد مركب Complex Number

Imaginary number

العدد التخيلي

يعرف العدد التخيلي بأنه العدد الذى مربعه يساوى (١-)

أى أن: $١ = -١$ وله الخاصية $١ = -١$ لكل $١ \geq ٠$ ح

وتسمى الأعداد التى على الصورة $٢، -٥، ٣١$ ت بالأعداد التخيلية

بذلك نكتب $٣١ = ٣١$ ت

$٥ = ٥$ ت وهكذا.....

تفكير ناقذ: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون

$$١١ = ١١ \text{ ت} \quad ؟ \text{ فسر ذلك بمثال عددي.}$$

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

لاحظ:

ت يرمز لها بالرمز i

قوى الصحيحة: Integer powers of i

العدد t يحقق قوانين الأسس التي سبق لك دراستها، ويمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد t كالآتي:

$$\begin{aligned} t^1 &= t & t^2 &= -1 & t^3 &= -t & t^4 &= 1 \\ t^5 &= t & t^6 &= -1 & t^7 &= -t & t^8 &= 1 \end{aligned}$$

وبوجه عام فإن: $t^{4n} = 1$ ، $t^{4n+1} = t$ ، $t^{4n+2} = -1$ ، $t^{4n+3} = -t$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

مثال

١ أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ t^{30} ب t^{43} ج t^{61} د t^{19}

الحل

أ $t^{30} = (t^4)^7 \times t^2 = 1 \times 1 = 1$ ب $t^{43} = (t^4)^{10} \times t^3 = 1 \times (-t) = -t$
ج $t^{61} = (t^4)^{15} \times t = 1 \times t = t$ د $t^{19} = (t^4)^4 \times t^3 = 1 \times (-t) = -t$

حاول أن تحل

١ أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ t^{24} ب t^{37} ج t^{43} د t^{51} هـ t^{29} و t^{43}

تعلم

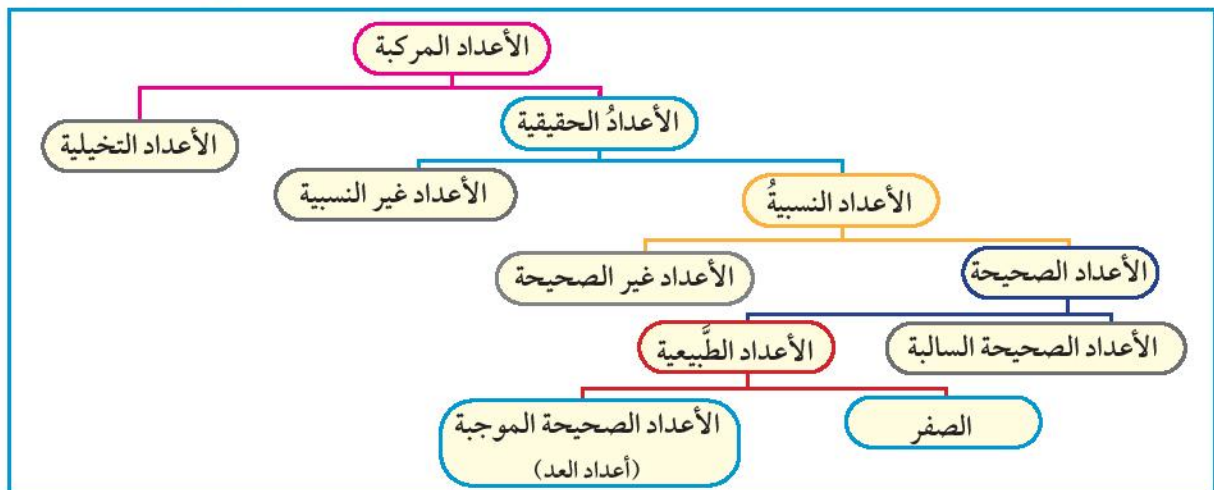
Complex number

العدد المركب

العدد المركب

$$\begin{array}{c} \text{الجزء} \\ \text{الحقيقي} \end{array} + \begin{array}{c} \text{الجزء} \\ \text{التخيلي} \end{array} \times i$$

العدد المركب هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان. و يبين الشكل التالي مجموعات الأعداد التي تُشكل جزءاً من نظام العدد المركب.



إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن العدد ع حيث $ع = أ + ب$ ت يسمى عددًا مركبًا، وتسمى أ بالجزء الحقيقي للعدد المركب ع، ب ت بالجزء التخيلي للعدد المركب ع.

وإذا كانت ب = ٠ فإن العدد ع = أ يكون حقيقيًا، وإذا كانت أ = ٠ فإن العدد ع = ب ت يكون تخيليًا حيث ب ≠ صفر.

مثال

٢ حل المعادلة $٩س^٢ + ١٢٥ = ٦١$

الحل

المعادلة $٩س^٢ + ١٢٥ = ٦١$

بإضافة (- ١٢٥) إلى طرفي المعادلة $٩س^٢ + ١٢٥ - ١٢٥ = ٦١ - ١٢٥$

بقسمة طرفي المعادلة على ٩ $٩س^٢ - ٦٤ = -٢$

$س^٢ = -\frac{٦٤}{٩}$

$س = \pm \sqrt{-\frac{٦٤}{٩}}$

$س = \pm \frac{\sqrt{٦٤}}{٣} ت$

بأخذ الجذر التربيعي

تعريف العدد المركب

حاول أن تحل

٢ حل كلاً من المعادلات الآتية:

أ $٢٧ + س^٢ = ٠$

ب $٢٤٥ + س^٢ = ٠$

ج $١٠٠ + س^٢ = ٧٥$

Equality of two complex numbers

تساوي عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان.
إذا كان: $أ + ب ت = ج + د ت$ فإن: $أ = ج$ ، $ب = د$ والعكس صحيح

مثال

٢ أوجد قيمتي س، ص اللتين تُحققان المعادلة: $س^٢ - ص + (س - ٢ص) ت = ٥ + ت$ حيث س، ص $\in \mathbb{C}$ ، $ت = ١ - ١$

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

$س^٢ - ص = ٥$ ، $س - ٢ص = ١$

$س = ٣$ ، $ص = ١$

بحل المعادلتين ينتج أن

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمتي س، ص اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

أ $(١ + س) + ٤ص ت = ١٢ - ٥ ت$

ب $٢س - ٣ + (١ + ص) ت = ١٠ + ٧ ت$

Operations on complex numbers

العمليات على الأعداد المركبة

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال

٤ أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

أ $(4 - 7t) + (2 + t)$ ب $(2 + 3t)(3 - 2t)$

الحل

أ المقدار

$$(4 - 7t) + (2 + t) =$$

باستخدام خاصيتي الإبدال والتجميع
بالتبسيط

$$(4 - 7t) + (2 + t) = 6 - 6t$$

ب المقدار

$$(2 + 3t)(3 - 2t) =$$

باستخدام خاصية التوزيع
بفك الأقواس
حيث $t^2 = 1$
بالتبسيط

$$\begin{aligned} (2 + 3t)(3 - 2t) &= 6 - 4t + 9t - 6t^2 \\ &= 6 - 4t + 9t - 6 \\ &= 5t \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٤ أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

أ $(12 - 5t) - (7 - 9t)$ ب $(3 - 4t)(3 + 4t)$ ج $(5 - 6t)(2 + 3t)$

Conjugate Numbers

العددان المترافقان

العددان المركبان $a + bi$ و $a - bi$ يسميان بالعددين المترافقين **فمثلاً** $3 + 4i$ و $3 - 4i$ عددان مترافقان، حيث:

$$(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

(الناتج عدد حقيقي)

$$(3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$

(الناتج عدد حقيقي)

تفكير ناقد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائماً عدداً حقيقياً؟ فسر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدداً حقيقياً؟ فسر ذلك.

مثال

٥ أوجد قيمتي س، ص اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{(ت+٢)(ت-٢)}{ت٤+٣} = س + ت ص$$

الحل

بفك الأقواس

$$س + ت ص = \frac{ت٢ - ٤}{ت٤ + ٣}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام (٤ - ٣) (ت)

$$س + ت ص = \frac{ت٤ - ٣}{ت٤ - ٣} \times \frac{١ + ٤}{ت٤ + ٣}$$

بالتبسيط

$$س + ت ص = \frac{(ت٤ - ٣)٥}{٢٥}$$

بتطبيق تساوى عددين مركبين

$$س + ت ص = \frac{٤}{٥} - \frac{٣}{٥}$$

$$س = \frac{٣}{٥} ، ص = \frac{٤}{٥} - س$$

حاول أن تحل

٥ أوجد في أبسط صورة قيمة كل مما يأتي:

٥ $\frac{ت٤ + ٣}{ت٢ - ٥}$

ج $\frac{ت - ٣}{ت - ٢}$

ب $\frac{٢٦}{ت٢ - ٣}$

أ $\frac{ت٦ - ٤}{ت٢}$

مثال

٦ كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار في مقاومتين متصلتين على التوازي في دائرة كهربية مغلقة، إذا كانت شدة التيار في المقاومة الأولى ٥-٣ ت أمبير وفي المقاومة الثانية ٢+ ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار في المقاومتين).

الحل

$$\therefore \text{شدة التيار الكهربى الكلية} = \text{مجموع شدتى التيار المار في المقاومتين.}$$

$$\therefore \text{شدة التيار الكهربى الكلية} = (٣ - ٥) + (٢ + ت)$$

$$= (١ + ٣) + (٢ + ٥) ت$$

$$= ٧ - ٢ ت \text{ أمبير}$$

تحقق من فهمك

١ تفكير ناقد: أوجد في أبسط صورة (١- ت)١٠



تمارين (١ - ١)



١ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

٥ ت $\frac{١}{٤}$

ج ت $\frac{٢}{٤} + \frac{١}{٤}$

ب ت $\frac{٤٥}{٤٠}$

أ ت $\frac{٦٦}{٦٦}$

٢ بسط كلاً مما يأتي:

أ $\frac{١٢-٦}{١٨-٦} \times \frac{١٨-٦}{١٢-٦}$ ب $\frac{٣}{٢} (٢-٢)$ ج $(٤-٢) (٦-٢)$ د $(٢-٢) (٢-٢)$

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ $(٢+٢) + (٥-٢)$ ب $(٤-٢٦) - (٢٠-٩)$ ج $(٢٥+٢٠) - (٢٠-٩)$

٤ ضع كلاً مما يأتي على صورة $\frac{أ}{ب}$

أ $(٢+٢) - (٢-١)$ ب $(٢+٢) (٢+٢) (٢+٢)$

٥ ضع كلاً مما يأتي على صورة $\frac{أ}{ب}$

أ $\frac{٢}{٢+١}$ ب $\frac{٢+٤}{٢}$ د $\frac{(٢-٢)(٢+٢)}{٢-٢}$ ج $\frac{٢-٢}{٢+٢}$

٦ حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٣س + ١٢ = ٠$ ب $٤ص + ٢٠ = ٠$ ج $٤ع + ٧٢ = ٠$ د $\frac{٣}{٥}ص + ١٥ = ٠$

٧ **اكتشف الخطأ:** أوجد أبسط صورة للمقدار: $(٢+٢) (٢-٢)$

إجابة كريم

$$\begin{aligned} (٢+٢) (٢-٢) &= (٢+٢) (٢-٢) \\ (٢+٢) (٢-٢) &= (٢+٢) (٢-٢) \\ (٢+٢) (٢-٢) &= (٢+٢) (٢-٢) \end{aligned}$$

إجابة أحمد

$$\begin{aligned} (٢+٢) (٢-٢) &= (٢+٢) (٢-٢) \\ (٢+٢) (٢-٢) &= (٢+٢) (٢-٢) \\ (٢+٢) (٢-٢) &= (٢+٢) (٢-٢) \end{aligned}$$

أى الحلين صحيح؟ لماذا؟

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

٢ - ١



سوف تتعلم

كيفية تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلاً وحيداً مكرراً، أو لا يوجد حل للمعادلة فى ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية فى ح دون حلها؟



Discriminant

المميز

جذرا المعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ حيث $ا \neq ٠$ ، $ا، ب، ج \in \mathbb{R}$ هما: $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا ج}}{٢ ا}$ ، $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا ج}}{٢ ا}$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^٢ - ٤ ا ج}$.

يسمى المقدار $ب^٢ - ٤ ا ج$ مميز المعادلة التربيعية، ويستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة.

المصطلحات الأساسية

Root

جذر

Discriminant

مميز

مثال

١ حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية:

أ $٥س^٢ + س - ٧ = ٠$ ب $س^٢ - ٢س + ١ = ٠$

ج $س^٢ + ٥س - ٣٠ = ٠$

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

أ $ا = ٥، ب = ١، ج = -٧$

المميز $ب^٢ - ٤ ا ج$

$١٤١ = (٧-) ٥ \times ٤ - ١ =$

∴ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ب $ا = ١، ب = -٢، ج = ١$

المميز $ب^٢ - ٤ ا ج$

$٠ = ١ \times ١ \times ٤ - ٤ =$

∴ المميز يساوى صفراً، إذن الجذران حقيقيان ومتساويان.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

ج ١ = ١، ب = ٥، ج = -٣٠

المميز = ب^٢ - ٤أج

٩٥ = -٣٠ × ١ - ٤ × ٢٥ =

∴ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).

لاحظ أن

المميز	نوع الجذرين	شكل تخطيطى للدالة المرتبطة بالمعادلة
$(ب^٢ - ٤أج) < ٠$	جذران حقيقيان مختلفان	
$ب^٢ - ٤أج = ٠$	جذر حقيقى واحد مكرر (جذران متساويان)	
$ب^٢ - ٤أج > ٠$	جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين)	

حاول أن تحل

١ عيّن نوع جذرى كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:

ب ١٢ س - ٤ س^٢ = ٩

أ ٦ س^٢ = ١٩ س - ١٥

د ٢ (س + ٥) = (س - ٧)

ج ٥ = (س - ٢)

مثال

٢ أثبت أن جذرى المعادلة ٢ س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠ مركبان وغير حقيقيين، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

أ = ٢، ب = -٣، ج = ٢

∴ المميز = ب^٢ - ٤أج = (-٣)^٢ - ٤ × ٢ × ٢ = ٩ - ١٦ = -٧

∴ المميز = ب^٢ - ٤أج

∴ يوجد جذران مركبان (غير حقيقيين).

∴ المميز سالب

القانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$

$س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^٢ - ٤ \times ٢ \times ٢}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤}$

جذرا المعادلة هما: $س = \frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ، $س = \frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$

تفكير ناقداً: هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك.

حاول أن تحل

٢ أثبت أن جذري المعادلة $س^2 - ١١س + ٥ = ٠$ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال

٣ إذا كان جذرا المعادلة $س^2 + ٢(ك - ١)س + ٩ = ٠$ متساويين، فأوجد قيم $ك$ الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

التحقيق: عندما $ك = ٤$
تصبح المعادلة: $س^2 + ٦س + ٩ = ٠$
 ويكون لها جذران متساويان هما: $-٣, -٣$
التحقيق: عندما $ك = ٢$
تصبح المعادلة: $س^2 - ٦س + ٩ = ٠$
 ويكون لها جذران متساويان هما: $٣, ٣$

ب $٤ - ٤ = ٠$
٤ $(١ - ك)س^2 - ٢(ك - ١)س + ٩ = ٠$
٤ $ك - ٨ = ٠$
ك $٢ - ك = ٨$
(ك - ٤)(ك + ٢) = ٠
ك = ٤ أو ك = ٢

حاول أن تحل

٣ إذا كان جذرا المعادلة $س^2 - ٢كس + ٧ك - ٦س + ٩ = ٠$ متساويين، فأوجد قيم $ك$ الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

تمارين (١ - ٢)

أولاً: اختيار من متعدد:

١ يكون جذرا المعادلة $س^2 - ٤س + ك = ٠$ متساويين إذا كانت:

أ $ك = ١$ ب $ك = ٤$ ج $ك = ٨$ د $ك = ١٦$

٢ يكون جذرا المعادلة $س^2 - ٢س + م = ٠$ حقيقيين مختلفين إذا كانت:

أ $م = ١$ ب $م > ١$ ج $م < ١$ د $م = ٤$

٣ يكون جذرا المعادلة $س^2 - ١٢س + ٩ = ٠$ مركبين غير حقيقيين إذا كانت:

أ $ل < ٤$ ب $ل > ٤$ ج $ل = ٤$ د $ل = ١$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٤ حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:

أ $س^2 - ٢س + ٥ = ٠$ ب $س^2 + ٣س + ١٠ = ٤$

ج $س^2 - ١٠س + ٢٥ = ٠$ د $س^2 - ١٩س + ٣٥ = ٠$

٥ أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة باستخدام القانون العام.

أ س $x^2 - 4x + 5 = 0$ ب س $x^2 + 6x + 5 = 0$

ج س $x^2 - 7x + 6 = 0$ د س $x^2 - 4x + 1 = 0$

٦ أوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية:

أ إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$ حقيقيين مختلفين.

ب إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{x}$ متساويين.

ج إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 8x + 16 = 0$ مركبين غير حقيقيين.

٧ **اكتشف الخطأ:** ما عدد حلول المعادلة $x^2 - 6x + 5 = 0$ فى ح

إجابة كريم

$$x^2 - 4x + 5 = (-6) - (-2) \times 4 = (-5)$$

$$76 = 40 + 36 =$$

المميز موجب، فيوجد حلان حقيقيان مختلفان

إجابة أحمد

$$x^2 - 4x + 5 = (-6) - (-2) \times 4 = 5 \times 2 \times 4 =$$

$$4 - = 40 - 36 =$$

المميز سالب، فلا توجد حلول حقيقية

٨ إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + 2(1 - x) + (1 + x) = 0$ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذريين.

٩ **تفكير ناقد:** حل المعادلة $x^2 - 48x + 25 = 0$ فى مجموعة الأعداد المركبة.

العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

٣ - ١

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.



نعلم أن جذري المعادلة $x^2 - 8x + 3 = 0$ هما $\frac{1}{3}$ ، $\frac{3}{4}$

مجموع الجذرين $2 = \frac{3+1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

حاصل ضرب الجذرين $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟
هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟

تعلم

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

Sum and multiply of two roots

جذرا المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هما:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وباعتبار أن الجذر الأول = ل، الجذر الثاني = م فإن:

$$ل + م = \frac{-b}{a} \quad (\text{أثبت ذلك}) \quad ل \cdot م = \frac{c}{a} \quad (\text{أثبت ذلك})$$

تعبير شفهي في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$

أوجد ل + م ، ل م في الحالات الآتية:

أ إذا كان $a = 1$ ب إذا كانت $b = 1$ ج إذا كان $a = -ج$

مثال

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة:

$$x^2 + 5x - 12 = 0$$

الحل

$$a = 1, b = 5, c = -12$$

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

حاول أن تحل

- ١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :
- أ) $٢س^٢ + س - ٦ = ٠$ ب) $٣س^٢ = ٢٣س - ٣٠$ ج) $٠ = (٢ + س)(٣ - س)$

مثال

- ٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٢س^٢ - ٣س + ك = ٠$ يساوى ١ فأوجد قيمة ك، ثم حل المعادلة.

الحل

حاصل ضرب الجذرين $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = ١$
 $٢ = ا$ ، $٣ = -ب$ ، $٢ = ج$

القانون العام:

$$س = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} = \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} = \frac{\sqrt{١٦ - ٩} \pm ٣}{٤} =$$

مجموعة حل المعادلة هي $\left\{ \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} ، \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} \right\}$ ت ، $\frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤}$ ت

حاول أن تحل

- ٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٣س^٢ + ١٠س - ج = ٠$ هو $\frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة ج، ثم حل المعادلة.
- ٣) إذا كان مجموع جذرى المعادلة $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ هو $\frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

مثال

- ٣) إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة $٢س^٢ - ٣س + ا = ٠$ حيث $ا \in \mathbb{C}$ فأوجد:

أ) الجذر الآخر ب) قيمة ا

الحل

$$ا = ١ ، ب = -٢ ، ج = ١$$

أ) $\therefore ١ + ت$ هو أحد جذرى المعادلة

$\therefore$ الجذر الآخر $= ١ - ت$ لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما $= ٢$

ب) $\therefore$ حاصل ضرب الجذرين $= ا$

$$\therefore ا = (١ + ت)(١ - ت)$$

$$\therefore ا = ١ - ت^٢ \quad \therefore ٢ = ا$$

حاول أن تحل

- ٤) إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة $٢س^٢ - ٤س + ب = ٠$ حيث $ب \in \mathbb{C}$ فأوجد

أ) الجذر الآخر. ب) قيمة ب

تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية: $اس^2 + ب س + ج = ٠$ ، $ا \neq ٠$

بقسمة طرفي المعادلة على ا:

$$س^2 + \left(\frac{ب}{ا}\right) س + \frac{ج}{ا} = ٠$$

 $\therefore$ ل، م جذرا المعادلة التربيعية ، $ل + م = -\frac{ب}{ا}$ ، $ل م = \frac{ج}{ا}$
 $\therefore$ المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م هي:

$$س^2 - (ل + م) س + ل م = ٠$$

مثال

٤) كون المعادلة التربيعية التي جذراها ٤، -٣

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

 $\therefore ل + م = ٤ + (-٣) = ١$ ، $ل م = (-٣) \times ٤ = -١٢$ ، $\therefore$ صيغة المعادلة التربيعية هي: $س^2 - (ل + م) س + ل م =$
 $\therefore$ المعادلة هي: $س^2 - س - ١٢ = ٠$

مثال

٥) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{٢-٢-}{ت-٢}$ ، $\frac{٢+٢-}{ت+١}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$$ل = \frac{٢-٢-}{ت-٢} = \frac{٢-١}{ت-١} \times \frac{٢+٢-}{ت+١} = ٢ ت$$

$$م = \frac{٢+٢-}{ت+١} = \frac{١٠-}{٥} = \frac{٢-٢-}{ت-٢} \times \frac{٢+٢-}{ت+١} = ٢ ت - ٢$$

$$ل + م = ٢ ت - ٢ ت = ٠$$

$$ل م = ٢ ت \times ٢ ت - ٢ = ٤ ت^2 - ٢$$

 $\therefore$ المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م: $س^2 - (ل + م) س + ل م = ٠$

$$\therefore س^2 + ٤ س - ٢ = ٠$$

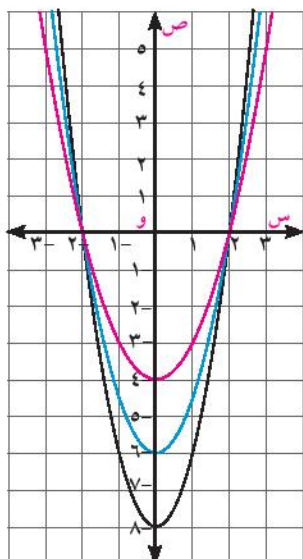
حاول أن تحل

٥) كوّن المعادلة التربيعية في كل مما يأتي بمعلومية جذريها:

أ) ٣ ، -٥

ب) ٩ - ت ، ٩ ت

$$ج) \frac{٣}{ت} ، \frac{٣+٣}{ت-١}$$



تفكير ناقد: الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التي يمر كل منها بالنقطتين (٢، ٠) ، (٠، -٢).

أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation

مثال

٦ إذا كان ل، م جذري المعادلة $x^2 - 3x - 1 = 0$ فكون المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م.

الحل

المعادلة المعلومة بالتعويض عن $1 = 2$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، جـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، لـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، مـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$

المعادلة المطلوبة بالتعويض عن $1 = 2$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، لـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، مـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$

$\therefore 1 = 2$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، لـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$ ، مـ $1 = 3$ ، $3 = 1$ ، $2 = 3$

الذي أن

$\frac{13}{4} = \frac{4}{4} + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4} =$

$$\begin{aligned} mJ^2 - 2(m+J) &= 2m + 2J \\ mJ^2 - 2(m+J) &= 2(m-J) \end{aligned}$$
$$\frac{1}{\varepsilon} = {}^2(\frac{1}{\varepsilon}) = {}^2m \therefore$$

بالتعويض في صيغة المعادلة التربيعية: $s^2 - (\text{مجموع الجذرين})s + \text{حاصل ضربهما} = 0$

$s^2 - \frac{13}{4}s + \frac{1}{4} = 0$ بضرب طرفي المعادلة في 4

∴ المعادلة التربيعية المطلوبة هي: $4s^2 - 13s + 1 = 0$

حاول أن تحل

٦ في المعادلة السابقة $s^2 - 3s - 1 = 0$ كَوِّن المعادلات التربيعية التي جذرا كل منها كالآتي:

أ $\frac{1}{s}, \frac{1}{s}$ ب $\frac{1}{s}, \frac{1}{s}$ ج $s + m, s$

تحقق من فهمك

١) في كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التي جذراها:

أ) $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ب) $3\sqrt{5}$ ، $3\sqrt{5}$ ج) $3\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$ د) $3\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$

٢) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$ فكون المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م.



تمارين (١ - ٣)



أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ إذا كان $s = 3$ أحد جذري المعادلة $s^2 + م - ٢٧ = ٠$ فإن $م =$ ، الجذر الآخر =
- ٢ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة : $s^2 + ٧س + ٣ = ٠$ يساوي مجموع جذري المعادلة: $s^2 - (ك + ٤)س = ٠$ فإن $ك =$
- ٣ المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذري المعادلة $s^2 - ٣س + ٢ = ٠$ هي
- ٤ المعادلة التربيعية التي كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذري المعادلة $s^2 - ٥س + ٦ = ٠$ هي

ثانياً: الاختيار من متعدد

- ٥ إذا كان أحد جذري المعادلة $s^2 - ٣س + ج = ٠$ ضعف الآخر فإن ج تساوي
 أ - ٤ ب - ٢ ج - ٢ د - ٤
- ٦ إذا كان أحد جذري المعادلة $s^2 - ٣س + ٢ = ٠$ معكوساً ضربياً للآخر، فإن أ تساوي
 أ - $\frac{1}{3}$ ب - $\frac{1}{2}$ ج - ٢ د - ٣
- ٧ إذا كان أحد جذري المعادلة $s^2 - (ب - ٣)س + ٥ = ٠$ معكوساً جمعياً للآخر، فإن ب تساوي
 أ - ٥ ب - ٣ ج - ٢ د - ٥

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

- ٨ أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل معادلة فيما يأتي:
 أ $s^2 + ١٩س - ١٤ = ٠$ ب $s^2 + ٤س - ٣٥ = ٠$

٩ أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر للمعادلة في كل مما يأتي:

- أ إذا كان: $s = ١$ أحد جذري المعادلة $s^2 - ٢س + أ = ٠$
 ب إذا كان: $s = ٢$ أحد جذري المعادلة $s^2 - ٥س + أ = ٠$

١٠ أوجد قيمة أ، ب في كل من المعادلات الآتية إذا كان:

- أ ٢، ٥ جذرا المعادلة $s^2 + أس + ب = ٠$
 ب ٣، ٧ جذرا المعادلة $s^2 - ب - ٢١ = ٠$
 ج ١، $\frac{3}{4}$ جذرا المعادلة $s^2 - س + ب = ٠$
 د $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ جذرا المعادلة $s^2 + أس + ب = ٠$

١١) ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية، ثم أوجد مجموعة حل كل منها:

أ) $س^2 + ٢س - ٣٥ = ٠$ ب) $س^2 + ٣س + ٧ = ٠$

ج) $س(س - ٤) + ٥ = ٠$ د) $س^3(س - ٨) + ١٦ = ٠$

١٢) أوجد قيمة ج التي تجعل جذري المعادلة ج-س $س^2 - ١٢س + ٩ = ٠$ متساويين.

١٣) أوجد قيمة ا التي تجعل جذري المعادلة س-س $س^2 - ٣س + ٢ = ٠$ متساويين.

١٤) أوجد قيمة ج التي تجعل جذري المعادلة س-س $س^2 - ٥س + ج = ٠$ متساويين، ثم أوجد الجذرين.

١٥) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة س $س^2 + (١ - ك)س - ٣ = ٠$ هو المعكوس الجمعي للجذر الآخر.

١٦) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة: $٤س^2 + ٧س + ك = ٠$ هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.

١٧) كون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها كآتي:

أ) $٤، ٢$ ب) $٥ - ٥، ٥$ ج) $\frac{٣}{٢}، \frac{٢}{٣}$

د) $١ - ٣، ١ + ٣$ هـ) $٣ - ٢\sqrt{٢}، ٣ + ٢\sqrt{٢}$

١٨) أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها ضعفا جذري المعادلة س $س^2 - ٨س + ٥ = ٠$

١٩) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة: س $س^2 - ٧س - ٩ = ٠$

٢٠) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي مربع نظيره من جذري المعادلة: س $س^2 + ٣س - ٥ = ٠$

٢١) إذا كان ل، م جذري المعادلة س $س^2 - ٧س + ٣ = ٠$ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التي جذراها:

أ) $٢ل، ٢م$ ب) $٢ + ل، ٢ + م$ ج) $\frac{٢}{ل}، \frac{٢}{م}$ د) $ل + م، ل م$

إشارة الدالة

Sign of the Function

٤ - ١

سوف تتعلم

- بحث إشارة كل من:
الدالة الثابتة - دالة الدرجة الأولى - دالة الدرجة الثانية.



سبق أن درست التمثيل البياني لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟ المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير x (مجال x) التي تكون عندها قيم الدالة $f(x)$ على النحو الآتي:

- موجبة، أي $f(x) > 0$
- سالبة، أي $f(x) < 0$
- مساوية للصفر $f(x) = 0$

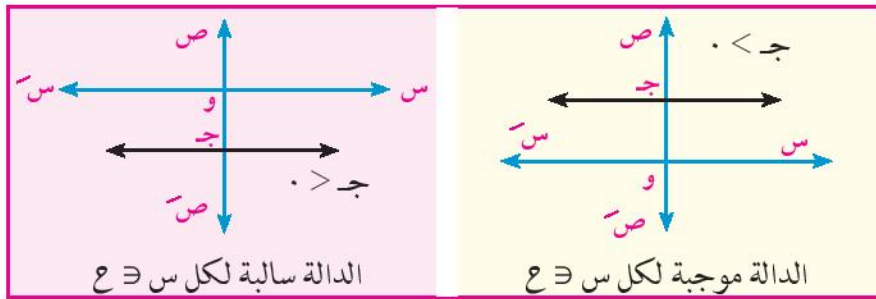


المصطلحات الأساسية

- إشارة دالة Sign of a function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى) Linear Function
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية) Quadratic Function

أولاً: إشارة الدالة الثابتة First: The sign of the Constant Function

إشارة الدالة الثابتة $f(x) = c$ (حيث $c \neq 0$) هي نفس إشارة c لكل $x \in \mathbb{R}$. والشكل التالي يوضح إشارة الدالة c .



مثال

١ عین إشارة كل من الدوال الآتية:

ب $f(x) = -7$

أ $f(x) = 5$

الحل

∴ إشارة الدالة موجبة لكل $x \in \mathbb{R}$

أ ∴ $f(x) > 0$

∴ إشارة الدالة سالبة لكل $x \in \mathbb{R}$

ب ∴ $f(x) < 0$

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

حاول أن تحل

١ عین إشارة کل من الدوال الآتية:

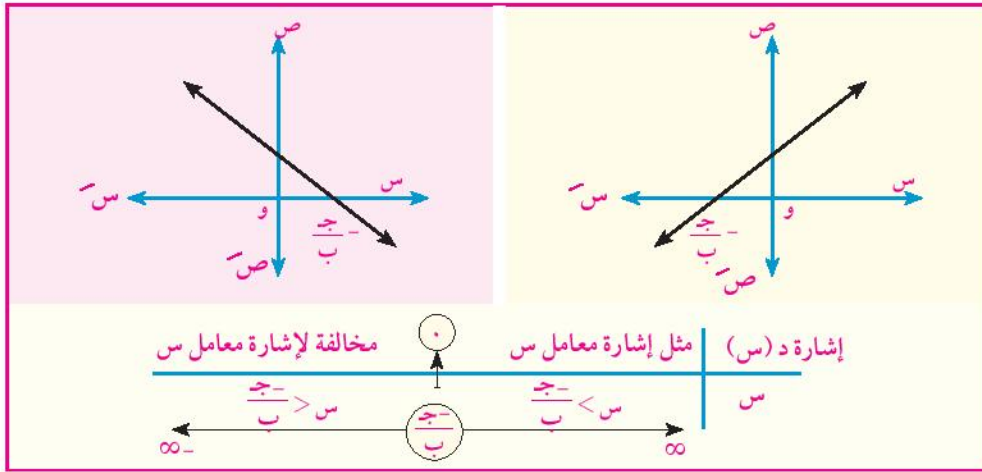
أ د(س) = $\frac{2}{3} -$

ب د(س) = $\frac{5}{6}$

Second: Sign of the Linear Function

ثانيًا: إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

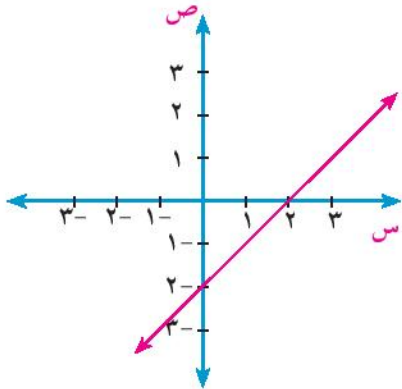
س = $\frac{ج}{ب}$ - عندما د(س) = ٠

قاعدة الدالة د هي د(س) = ب س + ج ، ب ≠ ٠ ،
والشكل البياني التالي يوضح إشارة الدالة د.

مثال

٢ عین إشارة الدالة د حيث د(س) = س - ٢ مع توضيح ذلك بيانيًا:

الحل



قاعدة الدالة: د(س) = س - ٢

رسم الدالة:

عندما د(س) = ٠ فإن س = ٢

عندما س = ٠ فإن د(س) = -٢

من الرسم نجد أن:

الدالة موجبة عندما س > ٢

الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢

الدالة سالبة عندما س < ٢

حاول أن تحل

٢ عین إشارة الدالة د(س) = -٢س - ٤ مع توضيح ذلك بيانيًا.

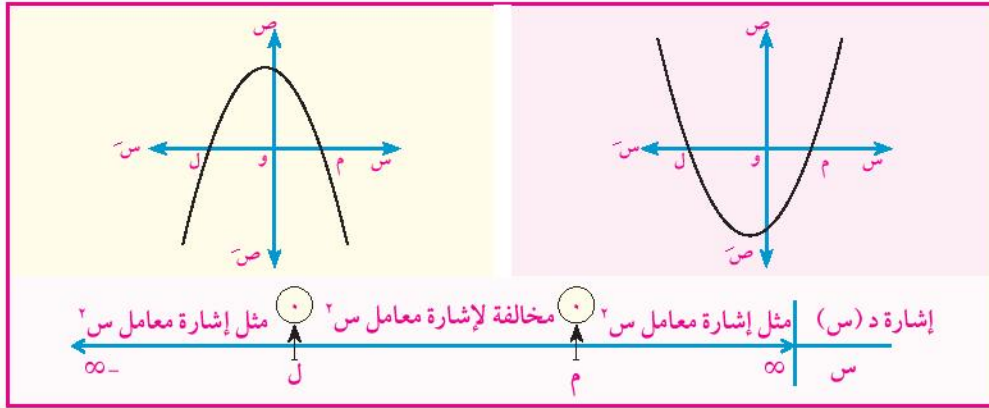
Third: Sign of the Quadratic Function.

ثالثاً: إشارة الدالة التربيعية

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث $D(s) = as^2 + bs + c$ حيث $a > 0$ فإنها تكون إشارة الدالة كما في

نوجد مميز المعادلة $as^2 + bs + c = 0$ فإذا كان:

أولاً: $b^2 - 4ac < 0$ فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان ل، م، وبفرض أن $l > m$ تكون إشارة الدالة كما في الأشكال الآتية:



مثال

٣) مثل بياناً د، حيث $D(s) = s^2 - 2s - 3$ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة: $s^2 - 2s - 3 = 0$

$$0 = (s - 3)(s + 1)$$

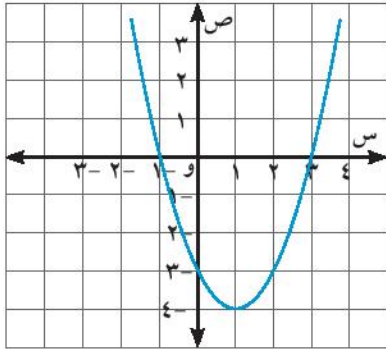
فيكون جذرا المعادلة: ٣، ١-

من الرسم نجد أن:

◀ د(s) < 0 عندما $s \in (-1, 3)$

◀ د(s) > 0 عندما $s \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

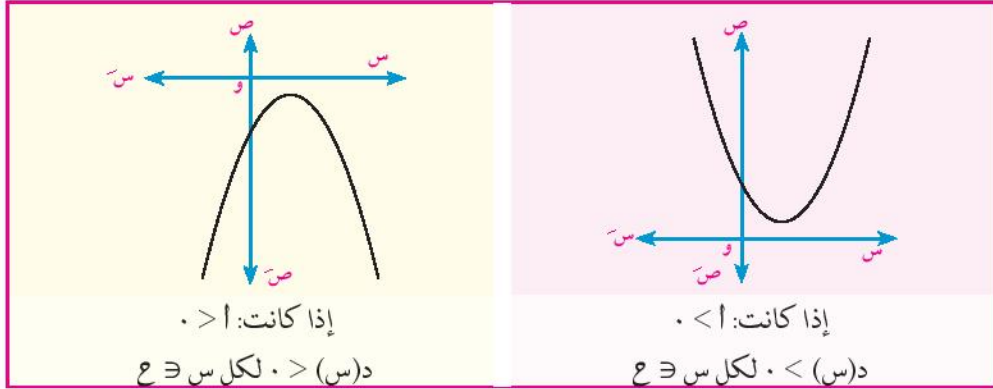
◀ د(s) = 0 عندما $s \in \{-1, 3\}$



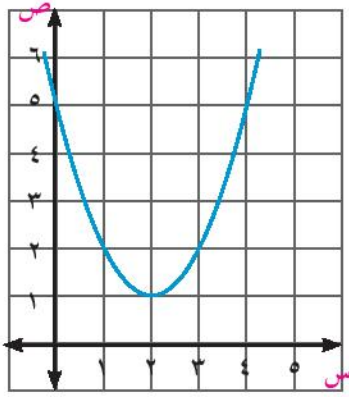
حاول أن تحل

٣) مثل بياناً د، حيث $D(s) = s^2 - 6s + 8$ ثم عين إشارة الدالة د.

ثانيًا: إذا كان: $b^2 - 4ac > 0$ فإنه لا توجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل a ، والأشكال التالية توضح ذلك.



مثال



٤ مثل بيانيًا د حيث $d(س) = س^2 - ٤س + ٥$ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

$$\text{المميز (ب) } ٤ - ٤(٥) = (-٤)^2 - ٤ \times ٥ = ١٦ - ٢٠ = -٤ < ٠$$

$$٠ > ٤ - ٢٠ = -١٦$$

لذلك فإن المعادلة $س^2 - ٤س + ٥ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية
إشارة الدالة موجبة لكل $س \in \mathbb{R}$ (لأن معامل $س^2$ > ٠)

حاول أن تحل

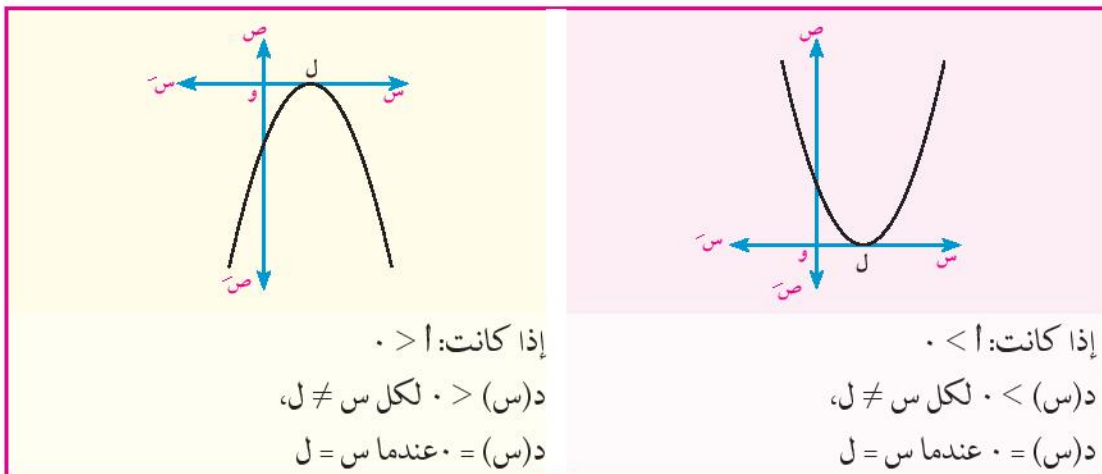
٤ مثل بيانيًا د، حيث $d(س) = -س^2 - ٢س - ٤$ ثم عين إشارة الدالة د.

ثالثًا: إذا كان: $b^2 - 4ac = 0$ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوي $ل$ ، وتكون إشارة الدالة د كالاتي:

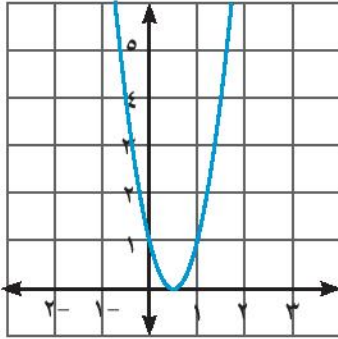
$$\leftarrow \text{مثل إشارة } ا \text{ عندما } س \neq ل$$

$$\leftarrow \text{مثل إشارة } ا \text{ عندما } س \neq ل$$

والأشكال الآتية توضح ذلك.



مثال



٥ مثل بيانياً د حيث د(س) = $٤س^٢ - ٤س + ١$ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

$$\text{المميز (ب) } \Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$$

لذلك فإن المعادلة $٤س^٢ - ٤س + ١ = ٠$ لها جذران متساويان.

بالتحليل: $٠ = (٢س - ١)^٢$

بوضع: $٢س - ١ = ٠$ تكون $س = \frac{١}{٢}$

د(س) < ٠ عندما $س \neq \frac{١}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما $س = \frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

٥ مثل بيانياً د، حيث د(س) = $-٤س^٢ - ١٢س - ٩$ ثم عين إشارة الدالة د.

مثال

٦ اثبت أنه لجميع قيم س $\exists$ يكون جذرا المعادلة $٢س^٢ - كس + ٣ = ٠$ صفر حقيقيين مختلفين

الحل

$$\text{المميز (ب) } \Delta = (-ك)^2 - 4 \times ٢ \times ٣ = ك^2 - ٢٤ + ٨ك$$

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبا

نبحث إشارة المقدار $ص = ك^2 - ٢٤ + ٨ك$

فيكون مميز المعادلة $ك^2 - ٢٤ + ٨ك = ٠$ هو:

$$٠ > ٣٢ - ٩٦ - ٦٤ = ٢٤ \times ١ \times ٤ - (٨ -)$$

ليس لها جذور حقيقية

$$ك^2 - ٢٤ + ٨ك = ٠$$

لذلك فإن المعادلة

موجبة لكل س $\exists$ (لماذا؟)

$$ص = ك^2 - ٢٤ + ٨ك$$

إشارة المقدار

موجب لكل س $\exists$ ع

$$٢س^٢ - كس + ٣ = ٠$$

فيكون مميز المعادلة

حقيقيان مختلفان لكل س $\exists$ ع

$$٢س^٢ - كس + ٣ = ٠$$

جذرا المعادلة

تحقق من فهمك

١ عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

ج د(س) = $٤س^٢ - ٤س + ١$

ب د(س) = $٤س - ٤$

أ د(س) = $٣س^٢ - ٣س + ١$

و د(س) = $٤س^٢ - ٣س + ٤$

ه د(س) = $٤س^٢ + ٤س + ٣$

د د(س) = $١س^٢ - ١س + ١$

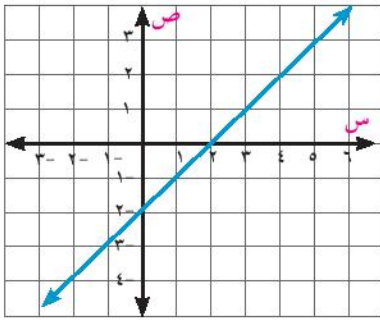


تمارين (١ - ٤)



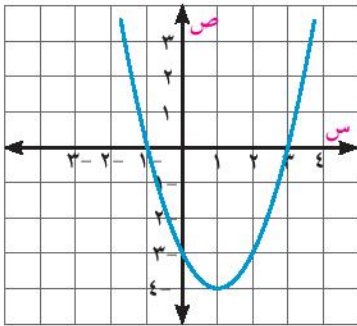
أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ الدالة د، حيث د(س) = -٥ إشاراتها في الفترة
- ٢ الدالة د، حيث د(س) = س^٢ + ١ إشاراتها في الفترة
- ٣ الدالة د، حيث د(س) = س^٢ - ٦ س + ٩ موجبة في الفترة
- ٤ الدالة د، حيث د(س) = س - ٢ موجبة في الفترة
- ٥ الدالة د، حيث د(س) = ٣ - س سالبة في الفترة
- ٦ الدالة د، حيث د(س) = - (س - ١) (س + ٢) موجبة في الفترة
- ٧ الدالة د، حيث د(س) = س^٢ + ٤ س - ٥ سالبة في الفترة



٨ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى في س:

- أ د(س) موجبة في الفترة
- ب د(س) سالبة في الفترة



٩ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الثانية في س:

- أ د(س) = ٠ عندما س ∈
- ب د(س) < ٠ عندما س ∈
- ج د(س) > ٠ عندما س ∈

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ في التمارين من أ إلى ن عين إشارة كل من الدوال الآتية:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| أ د(س) = ٢ | ب د(س) = ٢ س |
| ج د(س) = ٣ - س | د د(س) = ٢ س + ٤ |
| هـ د(س) = ٣ - ٢ س | و د(س) = س ^٢ |
| ز د(س) = ٢ س ^٢ | ح د(س) = س ^٢ - ٤ |

..... د (س) = (س - ٢) (س + ٣) **ط** د (س) = ١ - س^٢

..... د (س) = س^٢ - س - ٢ **ك** د (س) = (٢ - س)^٢

..... د (س) = -٤ س^٢ + ١٠ س - ٢٥ **م** د (س) = س^٢ - ٨ س + ١٦

- ١١ ارسم منحنى الدالة د (س) = س^٢ - ٩ في الفترة [-٣، ٤]، ومن الرسم عين إشارة د (س).
- ١٢ ارسم منحنى الدالة د (س) = -س^٢ + ٢ س + ٤ في الفترة [-٣، ٥]، ومن الرسم عين إشارة د (س).
- ١٣ **اكتشف الخطأ:** إذا كانت د (س) = س + ١، ر (س) = ١ - س^٢ فعين الفترة التي تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

حل أميرة

س = ١ - س^٢ تجعل د (س) = ٠
 د (س) موجبة في الفترة [-١، ١]،
 س = ١ ± س^٢ تجعل ر (س) = ٠
 ر (س) موجبة في الفترة [-١، ١]
 لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا في الفترة
 [-١، ١] ∩ [-١، ١] = [-١، ١]

حل يوسف

س = ١ - س^٢ تجعل د (س) = ٠
 د (س) موجبة في الفترة [-١، ١]،
 س = ١ ± س^٢ تجعل ر (س) = ٠
 ر (س) موجبة في الفترة [-١، ١]
 لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا في الفترة
 [-١، ١] ∪ [-١، ١] = [-١، ١]

أى الإجابتين يكون صحيحًا؟ مثل كلاً من الدالتين بيانيًا وتأكد من صحة الإجابة.

متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

Quadratic Inequalities

سوف تتعلم Quadratic Inequalities

المتباينات التربيعية:

حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد.



سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد، وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية فى مجهول واحد؟

لاحظ أن:

هى متباينة تربيعية كما هو موضح بالشكل التالى

$$س^2 - س - 2 < 0$$

المصطلحات الأساسية

بينما $د(س) = س^2 - س - 2$ هى الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.

Inequality

متباينة

من الشكل المقابل نجد أن:

مجموعة حل المتباينة

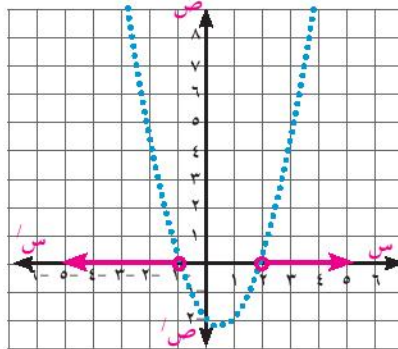
$$س^2 - س - 2 < 0 \text{ فى ح}$$

$$\text{هى }]-\infty, -1] \cup [2, \infty$$

مجموعة حل المتباينة

$$س^2 - س - 2 > 0 \text{ فى ح}$$

$$\text{هما }]-1, 2[$$



الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

تعلم

حل المتباينة التربيعية

مثال

$$١ \text{ حل المتباينة: } س^2 - ٥س - ٦ < 0$$

الحل

لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:
خطوة (١): نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:

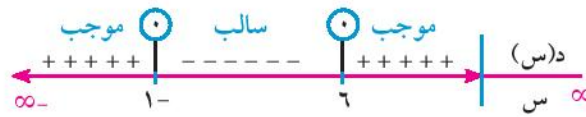
$$د(س) = س^2 - ٥س - ٦$$

خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث $د(س) = س^2 - ٥س - ٦$ ، ونوضحها على خط الأعداد بوضع $د(س) = ٠$

$$٠ = س^2 - ٥س - ٦$$

$$٠ = (س - ٦)(س + ١) \therefore$$

$$س = ٦ \text{ أ } س = -١$$



خطوة (٣): تحدد الفترات التي تحقق المتباينة $س^2 - ٥س - ٦ < ٠$



فيكون مجموعة حل المتباينة هي: $]-١, ٦[$

حاول أن تحل

١ حل كلاً من المتباينات الآتية:

ب $س^2 + س + ١٢ < ٠$

أ $س^2 + ٢س - ٨ < ٠$



ءمارفن (١ - ٥)



أوءء مءموءة الءل للمءبائات الءربعة الآفة:

١ س $٩ > ٢$

٢ س $٠ > ١ - ٢$

٣ س $٠ > ٢س - ٢س$

٤ س $١ > ٥ + ٢$

٥ س $٠ > (٥ - ٢س) (٢س - ٥)$

٦ س $٥ - > ٢(٢س - ٢س)$

٧ س $٩ - ٦س \leq ٦س - ٩$

٨ س $٤ + ١١س > ٣س + ٤$

٩ س $٠ \leq ٤س - ٤س + ٤س$

١٠ س $٠ > ٧س + ٤س - ٤س$

الوحدة

الهندسة

التشابه Similarity

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف النظرية التى تنص على: (إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان).
- يتعرف النظرية التى تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، و تناسب أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
- يتعرف النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ...)
- يتعرف النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على: (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن ...) وعكسه ونتائج عليه.

المصطلحات الأساسية

Tangent	مماس	Corresponding Sides	أضلاع متناظرة	Ratio	نسبة
Diameter	قطر	Congruent Angles	زوايا متطابقة	Proportion	تناسب
	مماس خارجي مشترك	Regular Polygon	مضلع منتظم	Measure of an Angle	قياس زاوية
Common External Tangent		Quadrilateral	شكل رباعي	Length	طول
	مماس داخلي مشترك	Pentagon	شكل خماسي	Area	مساحة
Common Internal Tangent		Postulate/Axiom	بديهية	Cross Product	ضرب تبادلي
	دوائر متحدة المركز	Perimeter	محيط	Extreme	طرف
Concentric Circles		Area of polygon	مساحة مضلع	Mean	وسط
	نسبة التشابه (معامل التشابه)	Chord	وتر	Similar Polygons	مضلعات متشابهة
Similarity Ratio		Secant	قاطع	Similar Triangles	مثلثات متشابهة

دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): تشابه المضلعات.
 الدرس (٢ - ٢): تشابه المثلثات.
 الدرس (٢ - ٣): العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين.
 الدرس (٢ - ٤): تطبيقات التشابه في الدائرة.

الأدوات المستخدمة

حاسب آلي - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - مرآة مستوية - أدوات قياس - آلة حاسبة.

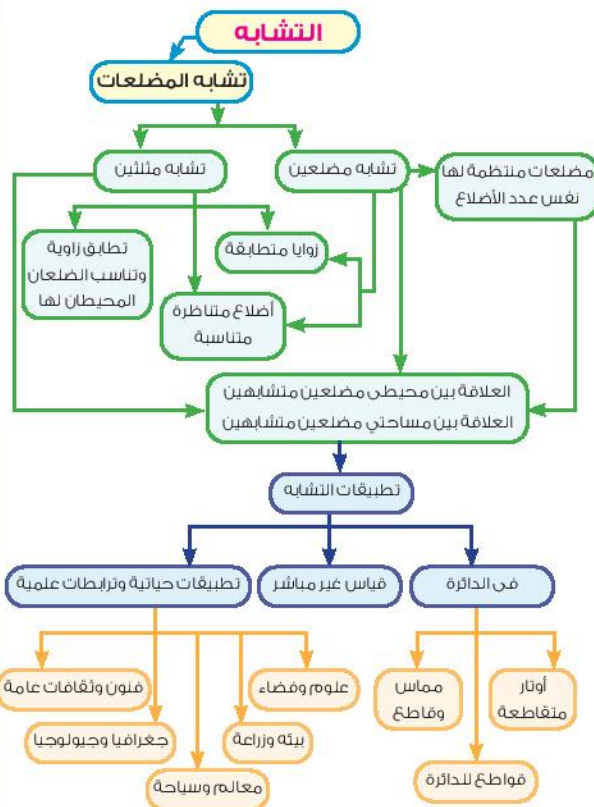


نبذة تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبنى، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسي على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوى قياسات نظائرها في الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح في بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوي على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتعرُّجات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفثافيت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف ندرسها في مراحل تعليمية تالية.

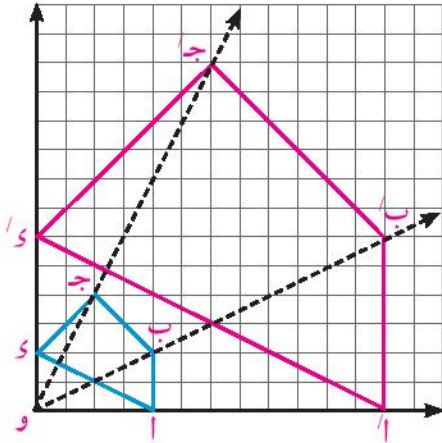
مخطط تنظيمي للوحدة



تشابه المضلعات

Similarity of Polygons

١ - ٢



يوضح الشكل المقابل المضلع أ ب ج د
وصورته أ' ب' ج' د' بتحويل هندسي.
أ) قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

∠أ، ∠أ' - ∠ب، ∠ب'
∠ج، ∠ج' - ∠د، ∠د'
ماذا تستنتج؟

ب) أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة $\frac{أ}{أ'}$ ، $\frac{ب}{ب'}$ ، $\frac{ج}{ج'}$ ، $\frac{د}{د'}$
ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، وإن اختلفت في أطوال أضلاعها، فإنها
تسمى مضلعات متشابهة.

Similar polygons

المضلعات المتشابهة

«يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا
المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

تعريف

لاحظ أن:

١- في الشكل الموضح **بيند فكر وناقش** نجد:

أ) الزوايا المتناظرة متطابقة: $\angle أ \equiv \angle أ'$ ، $\angle ب \equiv \angle ب'$ ، $\angle ج \equiv \angle ج'$ ، $\angle د \equiv \angle د'$

ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة: $\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'} = \frac{د}{د'}$

ولذلك يمكننا القول أن الشكل أ' ب' ج' د' يشابه الشكل أ ب ج د

٢- نستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه مضلعين، ويراعى ترتيب كتابة رؤوسهما
المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

سوف تتعلم

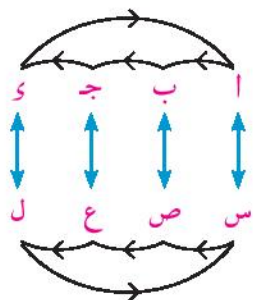
- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- العلاقة بين محيطي مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.

المصطلحات الأساسية

- مضلعات متشابهة
- Similar Polygons
- مثلثات متشابهة
- Similar Triangles
- أضلاع متناظرة
- Corresponding Sides
- زوايا متطابقة
- Congruent Angles
- مضلع منتظم
- Regular Polygon
- شكل رباعي
- Quadrilateral
- شكل خماسي
- Pentagon
- نسبة التشابه (معامل التشابه)
- Similarity Ratio

الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- أدوات قياس
- آلة حاسبة



إذا كان المضلع أب ج د ~ المضلع س ص ع ل فإن:

ا) ل ≡ ز ، ج ≡ ع ، ب ≡ ص ، ا ≡ س

ب) $\frac{اب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{د ا}{ل س} = ك$ (نسبة التشابه)، $ك \neq ٠$

ويكون معامل تشابه المضلع $أ ب ج د$ للمضلع $س ص ع ل = ك$ ،

و معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب ج د $\frac{1}{2}$

مثال

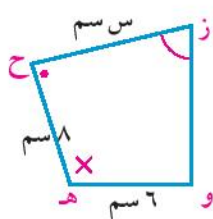
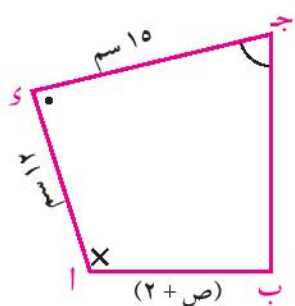
١ في الشكل المقابل: المضلع أ ب ج د ~ المضلع هـ و ز ح.

أ) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب ج د

للمضلع هـ وزح.

ب) أوجد قيم s ، v .

الحل



∴ المضلع أبجد ~ المضلع هوزح

$$\text{فيكون: } \frac{ا ب}{ه و} = \frac{ب ج}{و ز} = \frac{ج د}{ز ح} = \frac{د ا}{ح ه} = \text{معامل التشابه،}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{15}{س} = \frac{ب ج}{وز} = \frac{ص + 2}{6}$$

أ معامل التشابه $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$

ب. $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ ← $س = 10$ اسم ، $\frac{2}{4} = \frac{2+ص}{4}$ ← $ص = 2$ اسم

فکر

هل جميع المربعات متشابهة؟

هل جميع المستطيلات متشابهة؟

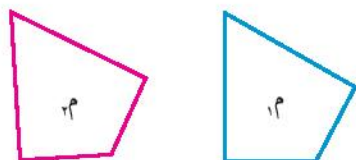
هل جميع المعينات متشابهة؟

هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

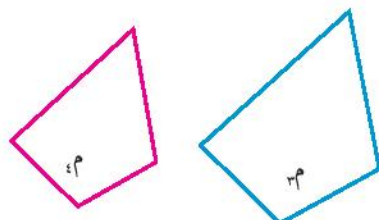
لاحظ أن

١- لكي يتشابه مصلعان يجب أن يتوافر الشرطان معًا، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.

٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرطاً التشابه (المضلع م_١ ~ المضلع م_٢) ويكون معامل التشابه لهما عندئذٍ مساوياً (واحد) ولكن ليس من الضروري أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع م_٣ ≠ المضلع م_٤) كما في الشكل المقابل.



المضلع م_١ ≡ المضلع م_٢



المضلع م_٣ ~ المضلع م_٤

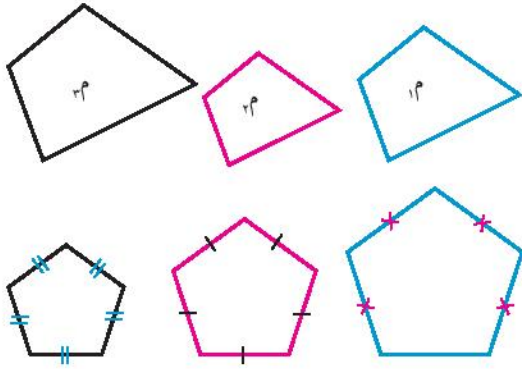
٣- المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

فإذا كان المضلع م_١ ~ المضلع م_٢،

المضلع م_٢ ~ المضلع م_٣

فإن: المضلع م_١ ~ المضلع م_٣

٤- كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟



مثال

٢) في الشكل المقابل: Δ أ ب ج ~ Δ و هـ و،

و هـ = ٨ سم ، و هـ = ٩ سم ، و و = ١٠ سم

إذا كان محيط Δ أ ب ج = ٨١ سم.

أوجد أطوال أضلاع Δ أ ب ج.

الحل

Δ أ ب ج ~ Δ و هـ و

$$\frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب ج}}{\text{محيط } \Delta \text{ و هـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ج أ}}{\text{و و}} = \frac{\text{أ ب} + \text{ب ج} + \text{ج أ}}{\text{و و} + \text{هـ و} + \text{و و}}$$

$$\text{ويكون: } \frac{\text{أ ب}}{8} = \frac{\text{ب ج}}{9} = \frac{\text{ج أ}}{10} = \frac{81}{27}$$

$$\therefore \text{أ ب} = 8 \times \frac{81}{27} = 24 \text{ سم ، ب ج} = 9 \times \frac{81}{27} = 27 \text{ ، ج أ} = 10 \times \frac{81}{27} = 30 \text{ سم}$$

لاحظ أن:

إذا كان المضلع م_١ ~ المضلع م_٢، فإن $\frac{\text{محيط المضلع م}_1}{\text{محيط المضلع م}_2} = \text{نسبة التشابه (معامل التشابه)}$

Similarity ratio of two polygons

معامل التشابه لمضلعين:

ليكن ك معامل تشابه المضلع م_١ للمضلع م_٢

إذا كان: $1 < ك$ فإن المضلع م_١ هو تكبير للمضلع م_٢

$0 < ك < 1$ فإن المضلع م_١ هو تصغير للمضلع م_٢

$ك = 1$ فإن المضلع م_١ يطابق المضلع م_٢

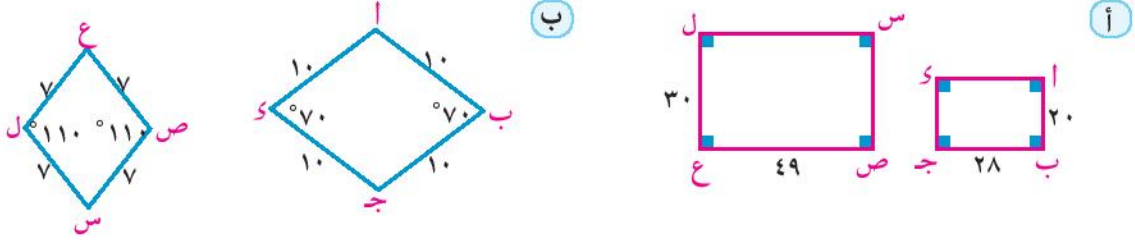
وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه في حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.



تمارين ٢ - ١

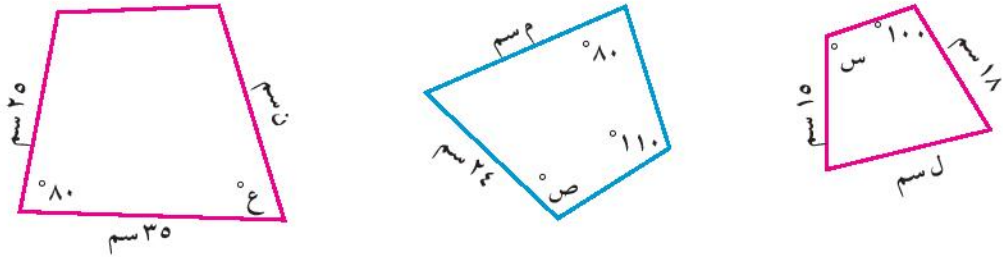


١ بين أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة، وحدد معامل التشابه (الأطوال مقدره بالسنتيمترات).



٢ مستطيل بعده ١٠ سم، ٦ سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان:
 أ معامل التشابه ٣
 ب معامل التشابه ٤, ٠

٣ المضلعات الثلاثة التالية متشابهة. أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم في القياس.



٤ مستطيلان متشابهان بُعد الأول ٨ سم، ١٢ سم، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم. أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته.

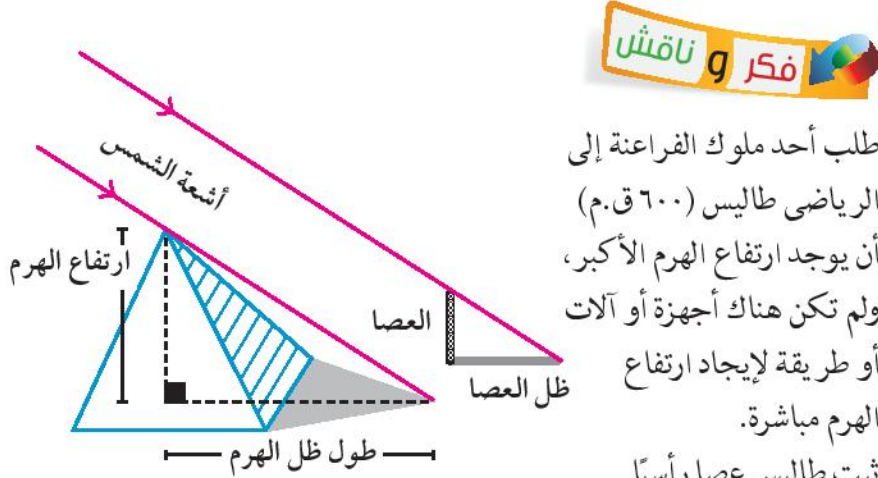
تشابه المثلثات

Similarity of Triangles

٢ - ٢

سوف تتعلم

- حالات تشابه المثلثات.
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في المثلث القائم الزاوية.



طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضي طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة.

ثبت طاليس عصا رأسياً

وبدأ يقيس ظل العصا ويقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوي الطول الحقيقي للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

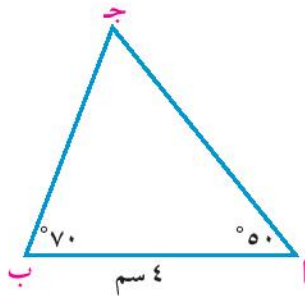
المصطلحات الأساسية

Postulate / Axiom

بديهية

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساوياً لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم في أي وقت من يوم مشمس؟ فسر إجابتك.

عمل تعاوني



١- ارسم $\triangle أ ب ج$ الذي فيه:

و (أ) = ٥٠° ، و (ب) = ٧٠° ، $أ ب = ٤$ سم

٢- ارسم $\triangle ز ه و$ الذي فيه:

و (ز) = ٥٠° ، و (هـ) = ٧٠° ، $ز ه = ٥$ سم

٣- أوجد بالقياس لأقرب ملليمتر أطوال كل من: $\overline{أ ج}$ ، $\overline{ب ج}$ ، $\overline{ز و}$ ، $\overline{هـ و}$

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب $\frac{أ ج}{ز و}$ ، $\frac{ب ج}{هـ و}$ ، $\frac{أ ب}{ز هـ}$

هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟

قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى واكتب ملاحظاتك.

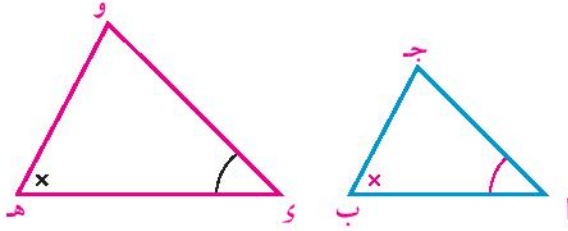
الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- مراة مستوية
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

postulate (or axiom)

إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائريهما في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

مسلمة



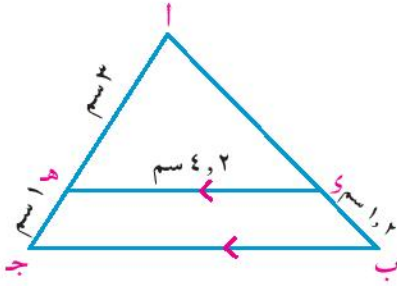
في الشكل المقابل:

إذا كان $\angle و \equiv \angle ا$ ، $\angle ي \equiv \angle ج$ ،
فإن $\triangle ا ب ج \sim \triangle و هـ ي$

لاحظ أن

- ١- المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان.
- ٢- يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث الآخر: أو إذا تساوى قياسا زاويتي رأسيهما.
- ٣- يتشابه المثلثان القائمة الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في المثلث الآخر.

مثال



١) في المثلث ا ب ج، $د \in ا ب$ ، $هـ \in ا ج$ حيث $د هـ \parallel ب ج$ ،
ب د = ٢ سم، ا هـ = ٣ سم، ا ج = ٤ سم، د هـ = ٢ سم، ٤ سم.

- أ) أثبت أن $\triangle ا د هـ \sim \triangle ا ب ج$
- ب) أوجد طول كل من: $ا د$ ، $ب ج$

الحل

أ) $\because د هـ \parallel ب ج$ ، $ا ب$ قاطع لهما.

$$\therefore \angle ا د هـ \equiv \angle ا ب ج$$

في المثلثين ا د هـ، ا ب ج

$$\therefore \angle ا د هـ \equiv \angle ا ب ج$$

$$\angle د هـ \equiv \angle ب ج$$

$$\therefore \triangle ا د هـ \sim \triangle ا ب ج$$

ب) $\because \triangle ا د هـ \sim \triangle ا ب ج$

$$\therefore \frac{ا د}{ا ب} = \frac{ا هـ}{ا ج} = \frac{د هـ}{ب ج} \text{ ويكون:}$$

$$\frac{ا د}{١, ٢ + ا د} = \frac{٣}{٤} = \frac{٢}{٤, ٢ + ٢}$$

$$٣ (١, ٢ + ا د) = ٤ ا د$$

$$٣, ٦ + ا د ٣ = ٤ ا د$$

$$ا د = ٣, ٦ \text{ سم}$$

$$٣ ب ج = ٤, ٢ \times ٤$$

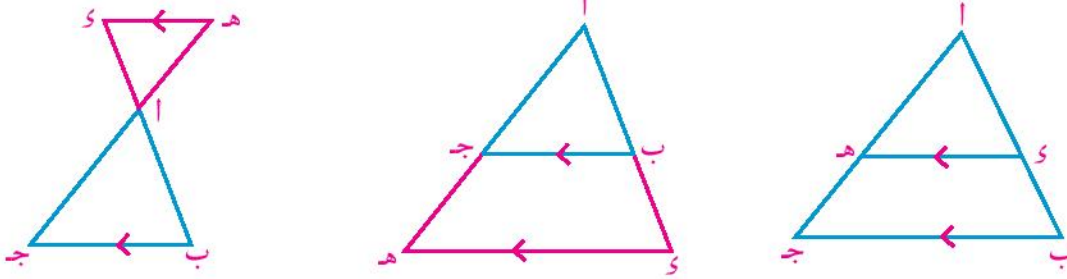
$$ب ج = \frac{٤, ٢ \times ٤}{٣}$$

$$ب ج = ٥, ٦ \text{ سم}$$

نتائج هامة

نتيجة ١

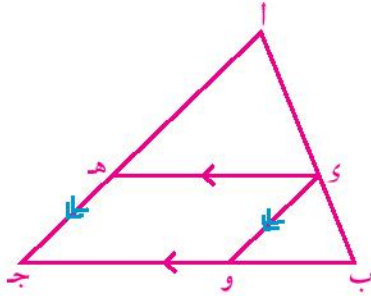
إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.



إذا كان $\overline{ك ه} \parallel \overline{ب ج}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ج}$ في $ه$ ، $و$ على الترتيب كما في الأشكال الثلاثة السابقة:
فإن: $\triangle أ ه \sim \triangle أ ب ج$.

مثال

٢) في الشكل المقابل: $أ ب ج$ مثلث، $و \in \overline{أ ب}$ ، رسم $\overline{ك ه} \parallel \overline{ب ج}$ ويقطع $\overline{أ ج}$ في $ه$ ، $و \parallel \overline{أ ج}$ ويقطع $\overline{ب ج}$ في $و$.
برهن أن: $\triangle أ ه \sim \triangle أ ب ج$ و



الحل

$$(١) \quad \therefore \overline{ك ه} \parallel \overline{ب ج} \quad \therefore \triangle أ ه \sim \triangle أ ب ج$$

$$(٢) \quad \therefore \overline{و} \parallel \overline{أ ج} \quad \therefore \triangle ب و \sim \triangle أ ب ج$$

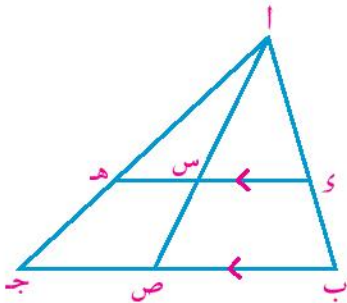
من (١)، (٢) ينتج أن: $\triangle أ ه \sim \triangle أ ب ج$ (وهو المطلوب)

حاول أن تحل

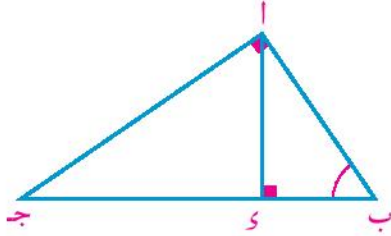
١) في الشكل المقابل: $أ ب ج$ مثلث، $و \in \overline{أ ب}$ ، رسم $\overline{ك ه} \parallel \overline{ب ج}$ ويقطع $\overline{أ ج}$ في $ه$ ، رسم $\overline{أ س}$ يقطع $\overline{ك ه}$ ، $\overline{ب ج}$ في $س$ ، $ص$ على الترتيب.

أ) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

$$ب) \quad \text{أثبت أن: } \frac{ك ه}{ب ج} = \frac{س ه}{ص ج} = \frac{ك س}{ب ص}$$



نتيجة ٢ إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.



في الشكل المقابل: Δ ب ج Δ قائم الزاوية في أ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

Δ ب ج Δ ، Δ ب ج Δ فيهما

$\angle (A) = \angle (B) = \angle (C) = 90^\circ$ ، Δ ب ج Δ مشتركة في المثلثين.

$\therefore \Delta$ ب ج $\Delta \sim \Delta$ ب ج Δ (مسلمة التشابه) (١)

وبالمثل Δ ب ج $\Delta \sim \Delta$ ب ج Δ (٢)

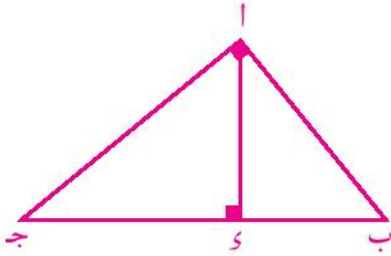
$\therefore$ المثلثان المشابهان لثالث متشابهان

$\therefore \Delta$ ب ج $\Delta \sim \Delta$ ب ج $\Delta \sim \Delta$ ب ج Δ

مثال

٣) Δ ب ج Δ قائم الزاوية في أ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ أثبت أن $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ وسط متناسب بين $\frac{1}{AB}$ و $\frac{1}{AC}$.

الحل



المعطيات: في Δ ب ج Δ قائم الزاوية في أ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

البرهان: في Δ ب ج Δ

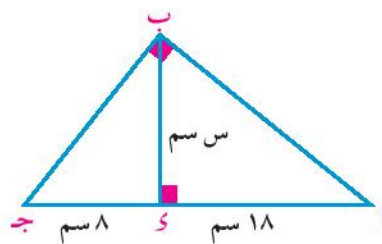
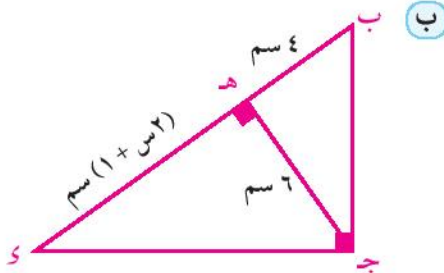
$\therefore \Delta$ ب ج $\Delta \sim \Delta$ ب ج Δ ، $\angle (A) = \angle (B) = \angle (C) = 90^\circ$

$\therefore \Delta$ ب ج $\Delta \sim \Delta$ ب ج Δ (نتيجة)

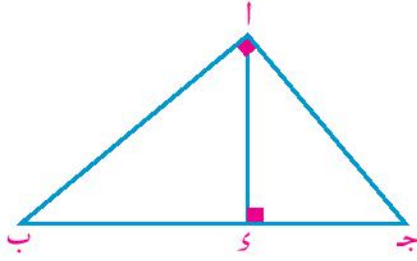
ويكون: $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ أي أن $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

حاول أن تحل

٢) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية:



مثال



٤ في الشكل المقابل أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ،

أ ب ج $\perp$ أ ب ج أثبت أن:

أ (أ ب) $=$ ب ج $\times$ ب ج

ب (أ ج) $=$ ج ب $\times$ ج ج

الحل

في $\triangle$ أ ب ج:

$\angle$ أ = 90° ، $\angle$ أ ب ج $\perp$ أ ب ج

$\therefore \triangle$ أ ب ج $\sim \triangle$ أ ج ب (نتيجة)

ويكون: (أ ب) $=$ ب ج $\times$ ب ج

$\therefore \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج}$

$\triangle$ أ ج ب $\sim \triangle$ أ ب ج

$\therefore \frac{أ ج}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج}$

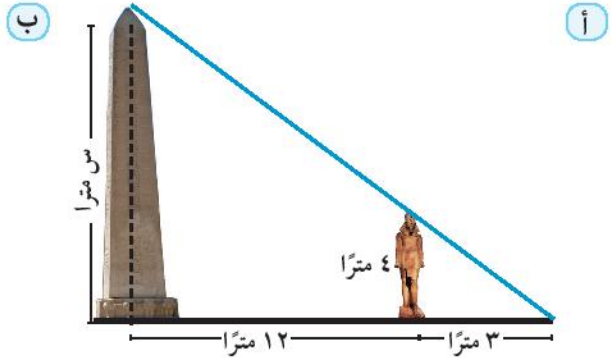
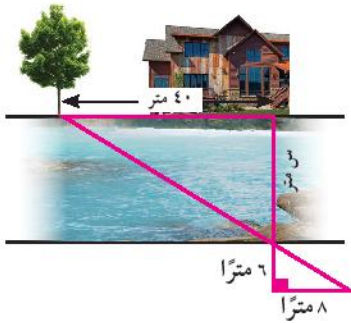
ويكون: (أ ج) $=$ ج ب $\times$ ج ج

معلومات
أضف إلى
معلوماتك

تعد النتائج التي تم إثبات
صحتها في مثالي ٣، ٤ برهاناً
لنظرية أقليدس التي سبق لك
دراستها في المرحلة الإعدادية.

حاول أن تحل

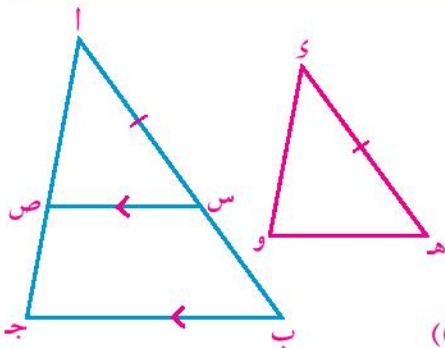
٢ أوجد المسافة س في كل من الحالات الآتية:



نظرية

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

(برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)



المعطيات: المثلثان أ ب ج، د ه و فيهما $\frac{أ ب}{د ه} = \frac{ب ج}{ه و} = \frac{ج ا}{و د}$

المطلوب: $\triangle$ أ ب ج $\sim \triangle$ د ه و

البرهان : عين س $\in$ أ ب حيث أ س = د ه،

ارسم س ص $\parallel$ ب ج ويقطع أ ج في ص.

$\therefore$ س ص $\parallel$ ب ج

$\therefore \triangle$ أ ب ج $\sim \triangle$ أ س ص

((١)) نتيجة

ويكون $\frac{اب}{اس} = \frac{بج}{سص} = \frac{جا}{صا}$
 $\therefore اس = زه$

(عملاً)

(١)

(٢) (معطيات)

$$\frac{اب}{زه} = \frac{بج}{سص} = \frac{جا}{صا}$$

$$\therefore \frac{اب}{زه} = \frac{بج}{هو} = \frac{جا}{وؤ}$$

من (١)، (٢) ينتج أن: $سص = هو$ ، $صا = وؤ$

(تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها في الآخر)

ويكون $\triangle اسص \equiv \triangle زهو$ $\therefore \triangle زهو \sim \triangle اسص$ $\therefore \triangle ابج \sim \triangle اسص$ $\therefore \triangle ابج \sim \triangle زهو$

(برهاناً)

(وهو المطلوب)

مثال

٥ في الشكل المقابل: ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:

أ $\triangle ابج \sim \triangle اسبص$

ب $\overrightarrow{بج}$ ينصف $\triangle ابس$

الحل

أ في المثلثين ابج، سبص نجد أن:

$$\frac{اب}{سب} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣} \quad ، \quad \frac{بج}{بص} = \frac{٦+١٨}{١٨} = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{اج}{سص} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$$

أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

$$\text{ويكون } \frac{اب}{سب} = \frac{بج}{بص} = \frac{اج}{سص}$$

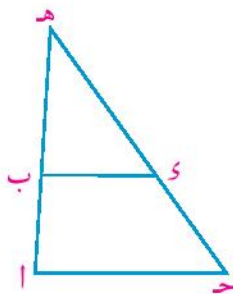
$$\therefore \triangle ابج \sim \triangle اسبص$$

$$\therefore (\triangle ابج) = (\triangle سبص) \quad \text{وهـ}$$

ب $\therefore \triangle ابج \sim \triangle اسبص$

أي أن: $\overrightarrow{بج}$ ينصف $\triangle ابس$ ٦ في الشكل المقابل: $\overrightarrow{اب} \cap \overrightarrow{جـد} = \{هـ\}$ حيث $\frac{اهـ}{جـهـ} = \frac{بـهـ}{زـهـ}$ ، $\frac{اجـ}{زـهـ} = \frac{بـد}{زـهـ}$ أثبت أن $\overrightarrow{اجـ} \parallel \overrightarrow{بـد}$

الحل



(١) (من خواص التناسب)

(٢) (من خواص التناسب)

$$\therefore \frac{اهـ}{جـهـ} = \frac{بـهـ}{زـهـ} \quad \therefore \frac{اجـ}{زـهـ} = \frac{بـد}{زـهـ}$$

$$\therefore \frac{اجـ}{جـهـ} = \frac{بـد}{زـهـ} \quad \therefore \frac{اجـ}{جـهـ} = \frac{بـد}{زـهـ}$$

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{اهـ}{جـهـ} = \frac{بـهـ}{زـهـ} = \frac{اجـ}{جـهـ} = \frac{بـد}{زـهـ}$

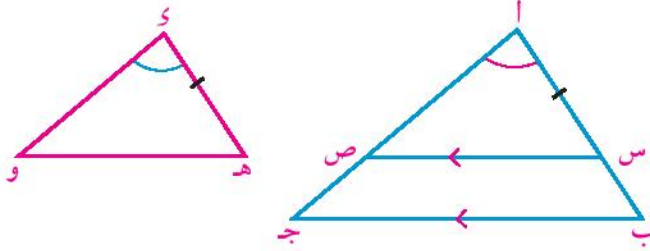
أي أن $\triangle اهـ جـ \sim \triangle بـ هـ و$

$$\therefore \angle (اهـ جـ) = \angle (بـ هـ و) \quad (\angle بـ هـ و)$$

وهما في وضع تناظر بالنسبة للقاطع $\overleftrightarrow{جـ هـ}$

$$\therefore \overleftrightarrow{اجـ} \parallel \overleftrightarrow{بـ و}$$

نظرية ٢ إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين.
(برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)



$$\text{المعطيات: } \angle س \equiv \angle و, \frac{اب}{و} = \frac{اج}{و}$$

المطلوب: $\triangle اب جـ \sim \triangle س هـ و$

البرهان: خذ $\overleftrightarrow{اب} \ni \overleftrightarrow{اس}$ حيث $اس = و$

وارسم $\overleftrightarrow{س ص} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}$

ويقطع $\overleftrightarrow{اجـ}$ في ص

$$\therefore \overleftrightarrow{س ص} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}$$

$$\therefore \triangle اب جـ \sim \triangle اس ص \quad (\text{نتيجة (١)})$$

$$\text{ويكون } \frac{اب}{اس} = \frac{اج}{اص}$$

$$\therefore \frac{اب}{و} = \frac{اج}{و} \quad (\text{معطى}), \quad اس = و \quad (\text{عملا})$$

$$\therefore \frac{اب}{اس} = \frac{اج}{و} \quad \text{ويكون } اص = و$$

$$\therefore \triangle اس ص \equiv \triangle س هـ و \quad (\text{ضلعان وزاوية محصورة})$$

$$\text{ويكون } \triangle اس ص \sim \triangle س هـ و \quad (\text{٢})$$

من (١)، (٢) ينتج أن: $\triangle اب جـ \sim \triangle س هـ و$ وهو المطلوب.

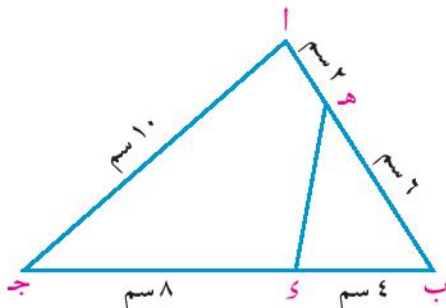
مثال

٧) $اب جـ$ مثلث، $اب = ٨$ سم، $اج = ١٠$ سم، $ب جـ = ١٢$ سم، $هـ \in \overleftrightarrow{اب}$ حيث $اهـ = ٢$ سم، $و \in \overleftrightarrow{ب جـ}$ حيث $ب و = ٤$ سم.

أ) برهن أن $\triangle ب و هـ \sim \triangle ب جـ$ واستنتج طول $و هـ$.

ب) برهن أن الشكل $اج و هـ$ رباعي دائري.

الحل



$$\therefore ب هـ = ٦ \text{ سم}$$

(١)

$$\therefore اب = ٨ \text{ سم}, \quad اهـ = ٢ \text{ سم}$$

أ) المثلثان $ب و هـ$ ، $ب جـ$ فيهما:

$$\angle ب هـ \equiv \angle ب جـ$$

$$\frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{ب هـ}{ب ج} , \quad \frac{1}{4} = \frac{4}{8} = \frac{ب ي}{ب ا} ,$$

$$\frac{ب هـ}{ب ج} = \frac{ب ي}{ب ا} \therefore$$

(٢)

من (١)، (٢) $\therefore \Delta ب ي هـ \sim \Delta ب ا ج$ (نظرية)

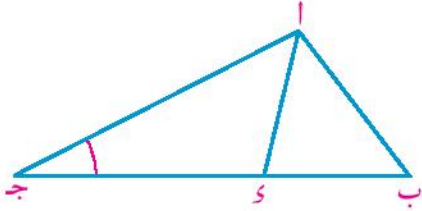
$$\text{من التشابه } \frac{1}{4} = \frac{ب هـ}{ب ج} \therefore ب هـ = \frac{1}{4} \times ١٠ = ٢.٥ \text{ سم}$$

ب) من التشابه أيضًا $\Delta ب ي هـ \equiv \Delta ب ا ج$ $\therefore \angle ب ي هـ = \angle ب ا ج$ $\therefore \Delta ب ي هـ$ خارجة عن الشكل الرباعي $ا ج ي هـ$ $\therefore$ الشكل $ا ج ي هـ$ رباعي دائري.

مثال

٨) ا ب ج مثلث، و $\overline{ب ج}$ حيث $(ا ج) = ٢$ ج ي $\times$ ج ب أثبت أن: $\Delta ا ج ي \sim \Delta ب ج ا$

الحل

(١) المثلثان ا ب ج، و ا ج ي فيهما $\angle$ ج مشتركة

$$\therefore (ا ج) = ٢ ج ي = ج ب \times ج ي$$

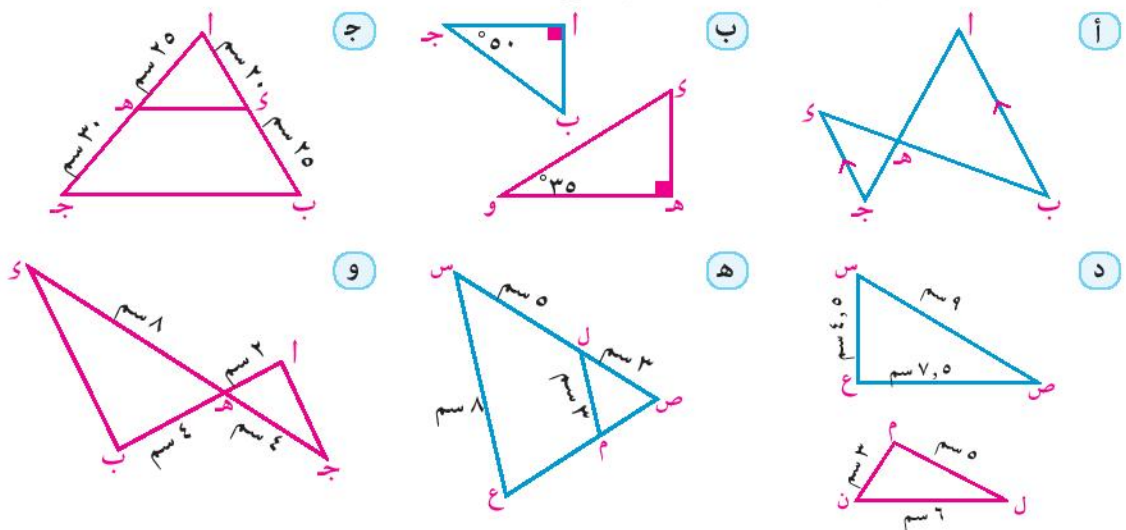
(٢)

$$\therefore \frac{ا ج}{ج ب} = \frac{ج ي}{ا ج}$$

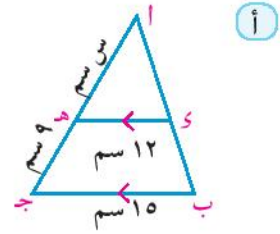
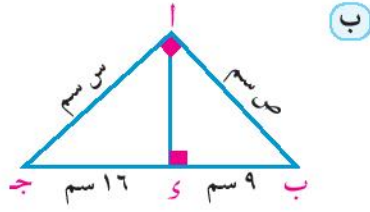
من (١)، (٢) ينتج أن $\Delta ا ج ي \sim \Delta ب ج ا$ (نظرية)

تمارين ٢ - ٢

١) اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه.

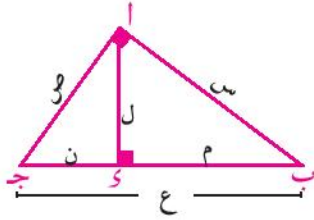


٢ أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:



٣ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث قائم الزاوية أ و $\perp$ ب ج

أولاً: أكمل: Δ أ ب ج $\sim$ Δ $\Delta \sim$



ثانياً: إذا كان س، ص، ع، ل، م، ن هي أطوال القطع المستقيمة بالسنتيمترات والمعيّنة بالشكل: فأكمل التناسبات التالية:

د $\frac{\text{ل}}{\text{ج}} = \frac{\text{ل}}{\text{ج}}$

ج $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{م}}{\text{ل}}$

ب $\frac{\text{ل}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}}$

أ $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{\text{م}}{\text{ع}}$

ح $\frac{\text{ل}}{\text{ص}} = \frac{\text{ل}}{\text{ص}}$

ز $\frac{\text{ل}}{\text{ع}} = \frac{\text{ل}}{\text{ع}}$

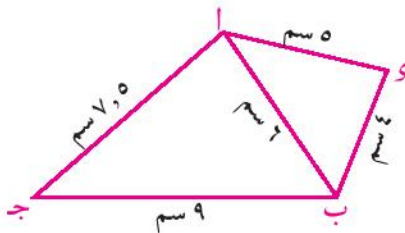
و $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$

هـ $\frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}}$

٤ أ ب، و ج وتران في دائرة، أ ب $\cap$ و ج = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة، أ ب = ٤ سم، و ج = ٧ سم، ب هـ = ٦ سم. أثبت أن Δ أ هـ $\sim$ Δ ج ب هـ، ثم أوجد طول ج هـ

٥ في المثلث أ ب ج، أ ج < أ ب، م $\in$ أ ج حيث و (أ ب م) = و (أ ج) أثبت أن (أ ب) = ٢ أ م $\times$ أ ج.

٦ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ، رسم أ و $\perp$ ب ج ليقطعه في و. إذا كان $\frac{\text{ب و}}{\text{و ج}} = \frac{1}{4}$ ، أ و = ٣٦ سم أوجد طول كل من ب و، أ ب، أ ج.



٧ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٦ سم، ب ج = ٩ سم،

أ ج = ٥ سم، و نقطة خارجة عن المثلث أ ب ج

حيث و ب = ٤ سم، و أ = ٥ سم. أثبت أن:

أ Δ أ ب ج $\sim$ Δ و ب أ

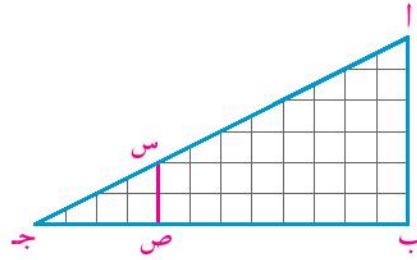
ب ب أ ينصف و ب ج

العلاقة بين مساحتي سطحي مضعين متشابهين

The Relation Between the Area of two Similar Polygons

سوف تتعلم

- العلاقة بين مساحتي مثلثين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- مقياس الرسم
- العلاقة بين مساحتي سطحي مضعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.



على ورق مربعات رسم كل من المثلثين
أ ب ج ، س ص ج .

١- بين لماذا يكون:

Δ س ص ج $\sim$ Δ أ ب ج ؟ أوجد معامل التشابه عندئذٍ.

٢- احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص ج إلى مساحة المثلث الأصلي أ ب ج

٣- عين نقطة أخرى مثل Δ أ ب ج ، ثم ارسم Δ س' ص' ج' // Δ أ ب ج ويقطع Δ س' ص' ج' في Δ س ص ج .
لتحصل على المثلث Δ س' ص' ج' ، هل Δ س' ص' ج' $\sim$ Δ س ص ج ؟

٤- أكمل الجدول التالي:

المصطلحات الأساسية

- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول إلى مساحة المثلث الثاني
Δ س ص ج $\sim$ Δ أ ب ج	$\frac{1}{3}$	٤	٣٦	$\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$
Δ س' ص' ج' $\sim$ Δ أ ب ج				
Δ س ص ج $\sim$ Δ س' ص' ج'				

٥- ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

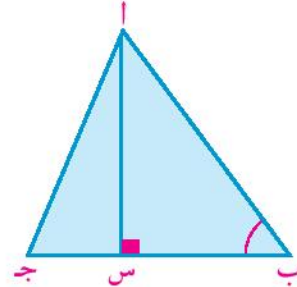
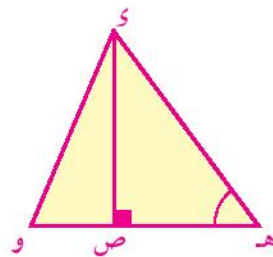
أولاً: النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين:

النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما. (برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)

نظرية ٣

الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- آلة حاسبة



المعطيات: Δ أ ب ج $\sim$ Δ س' ص' ج'

لاحظ
الرمز م يعبر عن مساحة
سطح المضلع (المثلث)

$$\text{المطلوب: } \frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \left(\frac{اب}{و ه}\right)^2 = \left(\frac{ب ج}{ه و}\right)^2 = \left(\frac{ا ج}{و ي}\right)^2$$

البرهان: ارسم $\overleftrightarrow{اس} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ حيث $اس \cap \overleftrightarrow{ب ج} = \{س\}$ ،
 $\overleftrightarrow{وص} \perp \overleftrightarrow{ه و}$ حيث $وص \cap \overleftrightarrow{ه و} = \{ص\}$

$\therefore \triangle اب ج \sim \triangle و ه و$

$$(١) \quad \frac{ا و}{و ه} = \frac{ب و}{ه و} = \frac{اب}{و ه}$$

في المثلثين $اب س$ ، $و ه ص$:

$$\angle و(س) = \angle و(ص) = 90^\circ, \quad \angle و(ب) = \angle و(ه)$$

(مسلمة التشابه)

$\therefore \triangle اب س \sim \triangle و ه ص$

$$(٢) \quad \text{ويكون: } \frac{اب}{و ه} = \frac{اس}{وص}$$

$$\frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \frac{\frac{1}{2} ب ج \times اس}{\frac{1}{2} ه و \times وص} = \frac{ب ج}{ه و} \times \frac{اس}{وص}$$

بالتعويض من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \frac{اب}{و ه} \times \frac{اب}{و ه} = \left(\frac{اب}{و ه}\right)^2 = \left(\frac{ب ج}{ه و}\right)^2 = \left(\frac{ا ج}{و ي}\right)^2 \text{ وهو المطلوب.}$$

$$\text{لاحظ أن: } \frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \left(\frac{اب}{و ه}\right)^2, \quad \frac{اب}{و ه} = \frac{اس}{وص}$$

$$\text{فيكون: } \frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \left(\frac{اس}{وص}\right)^2$$

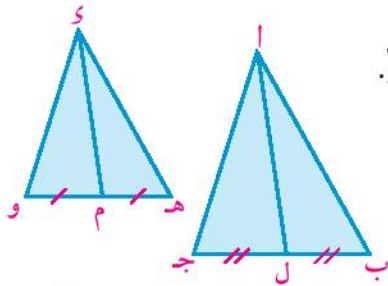
أى أن النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

تفكير ناقد:

١- إذا كان $\triangle اب ج \sim \triangle و ه و$ ، ل منتصف $\overleftrightarrow{ب ج}$ ، م منتصف $\overleftrightarrow{ه و}$.

$$\text{هل } \frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \left(\frac{ال}{م}\right)^2 ?$$

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.



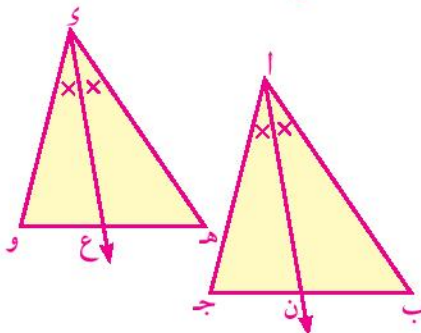
٢- إذا كان $\triangle اب ج \sim \triangle و ه و$ ،

أن ينصف $\triangle$ او يقطع $\overleftrightarrow{ب ج}$ في ن،

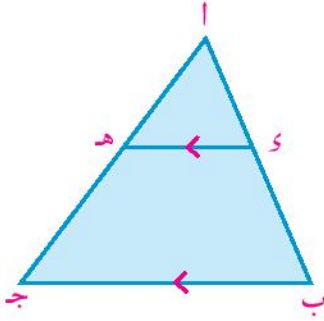
وع ينصف $\triangle$ ويقطع $\overleftrightarrow{ه و}$ في ع.

$$\text{هل } \frac{م(\triangle اب ج)}{م(\triangle و ه و)} = \left(\frac{ان}{وع}\right)^2 ?$$

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.



مثال



١) في الشكل المقابل: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

حيث $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ ، و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ويقطع $\overline{AC}$ في هـ.

إذا كانت مساحة $\triangle ABC = 784$ سم². أوجد:

أ) مساحة $\triangle ADE$ هـ.

ب) مساحة شبه المنحرف $BCDE$ هـ.

الدل

في $\triangle ABC$ جـ: $\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

(نتيجة) $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

(نظرية) $\therefore \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{\text{مر}(\triangle ADE)}{\text{مر}(\triangle ABC)}$

ويكون $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{\text{مر}(\triangle ADE)}{784}$

$\therefore$ مساحة شبه المنحرف $BCDE$ = مساحة $\triangle ABC$ - مساحة $\triangle ADE$ هـ

$\therefore$ مساحة شبه المنحرف $BCDE = 784 - 144 = 640$ سم²

مثال

٢) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠ سم أوجد محيط المثلث الأصغر.

الدل

بفرض أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ هـ و

$\therefore \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{\text{مر}(\triangle ABC)}{\text{مر}(\triangle DEF)}$ ويكون $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$ هـ

$\therefore \frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$ هـ

ويكون $\frac{\text{محيط } (\triangle ABC)}{90} = \frac{2}{3}$ هـ $\therefore$ محيط $\triangle ABC = 60$ سم

حاول أن تحل

١) $\triangle ABC$ هـ و $\triangle DEF$ متشابهان، $\frac{AB}{DE} = \frac{3}{4}$

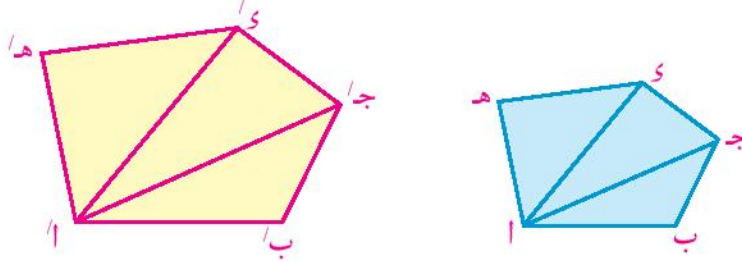
أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر ٣٤٥ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.

ب) إذا كان هـ و 28 سم أوجد طول $\overline{BC}$.

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

نظرية ٤

(برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)



المعطيات: المضلع أ ب ج د هـ ~ المضلع أ' ب' ج' د' هـ'

$$\text{المطلوب: } \frac{\text{مر (المضلع أ ب ج د هـ)}}{\text{مر (المضلع أ' ب' ج' د' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \right)^2$$

البرهان: من أ، أ' نرسم أ ج، أ ج'، أ د، أ د'.

∴ المضلع أ ب ج د هـ ~ المضلع أ' ب' ج' د' هـ'

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره (حقيقة). ويكون:

$$\frac{\text{مر (أ ب ج)}}{\text{مر (أ' ب' ج')}} = \frac{\text{مر (أ ج د)}}{\text{مر (أ' ج' د')}} = \frac{\text{مر (أ د هـ)}}{\text{مر (أ' د' هـ')}} = \frac{\text{مر (أ ب ج د هـ)}}{\text{مر (أ' ب' ج' د' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \right)^2$$

(من تشابه المضلعين)

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج' د'}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{د' هـ'}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{أ' ج'}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ' د'}}$$

$$\frac{\text{مر (أ ب ج)}}{\text{مر (أ' ب' ج')}} = \frac{\text{مر (أ ج د)}}{\text{مر (أ' ج' د')}} = \frac{\text{مر (أ د هـ)}}{\text{مر (أ' د' هـ')}} = \frac{\text{مر (أ ب ج د هـ)}}{\text{مر (أ' ب' ج' د' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \right)^2$$

ومن خواص التناسب

$$\frac{\text{مر (أ ب ج)}}{\text{مر (أ' ب' ج')}} = \frac{\text{مر (أ ج د)}}{\text{مر (أ' ج' د')}} = \frac{\text{مر (أ د هـ)}}{\text{مر (أ' د' هـ')}} = \frac{\text{مر (أ ب ج د هـ)}}{\text{مر (أ' ب' ج' د' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \right)^2$$

ويكون: $\frac{\text{مر (المضلع أ ب ج د هـ)}}{\text{مر (المضلع أ' ب' ج' د' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \right)^2$ وهو المطلوب

ملاحظة

$$\frac{\text{مر (أ ب)}}{\text{مر (أ' ب')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} \right)^2$$

حاول أن تحل

٢ ا إذا كان المضلع أ ب ج د ~ المضلع أ ب ج د / هـ ، $\frac{1}{3} = \frac{أ ب}{أ ب}$ فاكتب ما يساويه كل من:

$$\frac{\text{محيط المضلع أ ب ج د}}{\text{محيط المضلع أ ب ج د / هـ}} ، \frac{\text{م (المضلع أ ب ج د)}}{\text{م (المضلع أ ب ج د / هـ)}}$$

ب إذا كان المضلعان أ ب ج د هـ ، أ ب ج د / هـ متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥

$$\frac{\text{محيط المضلع أ ب ج د هـ}}{\text{محيط المضلع أ ب ج د / هـ}} ، \frac{أ ب}{أ ب}$$

ج

إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٤ ، مساحة المضلع الأول ٢٥ سم^٢ . أوجد مساحة المضلع الثاني.

د

إذا كان طولاً ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم ، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم^٢ . فأوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤ أ ب ج د ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما: و (أ ب) = ٤٠° ، س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ، ج د = ١٦ سم . احسب: أولاً: و (س) ثانياً: طول ع ل ثالثاً: م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل)

الحل

∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

∴ و (أ ب) = و (س) فيكون و (س) = ٤٠° (المطلوب أولاً)

∴ س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ∴ $\frac{س ص}{أ ب} = \frac{٣}{٤}$ (من خواص التناسب)

من تشابه المضلعين نجد أيضاً $\frac{أ ب}{س ص} = \frac{ج د}{ع ل}$

∴ $\frac{١٦}{ع ل} = \frac{٣}{٤}$ فيكون ع ل = $\frac{١٦ \times ٤}{٣} = ٢١ \frac{١}{٣}$ سم (المطلوب ثانياً)

م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل) = (أ ب)^٢ : (س ص)^٢

$$١٦ : ٩ = ٢١ \frac{١}{٣} : ٩$$

(المطلوب ثالثاً) ٩ : ١٦

لاحظ أن

$$أ ب = ٤ ك$$

$$س ص = ٣ ك$$

$$ك \neq ٠$$

مثال

٥ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٤ : ٣ . إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥ سم^٢ فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

∴ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٤ : ٣

∴ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٤ : ٣

بفرض أن مساحة المضلع الأول = ٩ سم^٢ ، مساحة المضلع الثاني = ١٦ سم^٢

∴ ٩ سم + ١٦ سم = ٢٥ سم ويكون $9 = \frac{225}{16+9}$

∴ مساحة المضلع الأول = $9 \times 9 = 81$ سم^٢

∴ مساحة المضلع الثاني = $9 \times 16 = 144$ سم^٢

حاول أن تحل

٣ الربط مع الزراعة: مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ ، إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ فدانا، فأوجد مساحة كل منهما.



تمارين ٢ - ٣



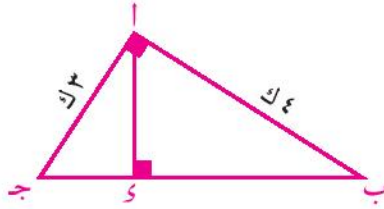
١ أكمل:

أ إذا كان $\triangle ا ب ج \sim \triangle س ص ع$ ، وكان $ا ب = ٣$ سم فإن $\frac{\text{مر}(\triangle س ص ع)}{\text{مر}(\triangle ا ب ج)} = \dots$

ب إذا كان $\triangle ا ب ج \sim \triangle ي ه و$ ، مر $(\triangle ا ب ج) = ٩$ مر $(\triangle ي ه و)$ وكان $ي ه = ٤$ سم فإن:
 $ا ب = \dots$ سم

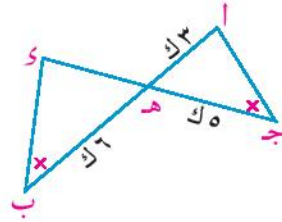
٢ ادرس كلاً من الأشكال التالية، حيث ك ثابت تناسب، ثم أكمل:

ب



و $(\triangle ا ب ج) = ٩٠^\circ$ ، $ا ي \perp ب ج$
 مر $(\triangle ا ي ج) = ١٨٠$ سم^٢ فإن:
 مر $(\triangle ا ب ج) = \dots$ سم^٢

أ



$ا ب \cap ج د = \{ه\}$
 مر $(\triangle ا ج ه) = ٩٠٠$ سم^٢
 فإن: مر $(\triangle ي ه ب) = \dots$ سم^٢

٣ ا ب ج مثلث، $ي \in ا ب$ حيث $ا ي = ٢$ ب ي، $ه \in ا ج$ حيث $ي ه \parallel ب ج$
 إذا كانت مساحة $\triangle ا ي ه = ٦٠$ سم^٢. أوجد مساحة شبه المنحرف ي ب ج ه.

٤ ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع ا ب س، ب ج ص، ا ج ع
 أثبت أن: مر $(\triangle ا ب س) + \text{مر}(\triangle ب ج ص) = \text{مر}(\triangle ا ج ع)$.

٥ ا ب ج مثلث فيه $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه. من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع

$ا ج$ في ه. أثبت أن: $\frac{\text{مر}(\triangle ا ب ج)}{\text{مر}(\triangle ا ب ه)} = \frac{٧}{١٦}$

٦ ا ب ج ي متوازي أضلاع $س \in ا ب$ ، $س \notin ا ب$ حيث $ب س = ٢$ ا ب، $ص \in ج ب$ ، $ص \notin ج ب$

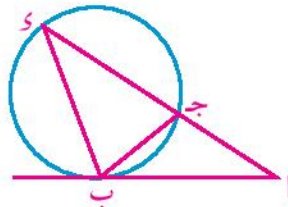
حيث $ب ص = ٢$ ب ج، رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص أثبت أن: $\frac{\text{مر}(ا ب ج ي)}{\text{مر}(س ب ص ع)} = \frac{١}{٤}$

سوف تتعلم

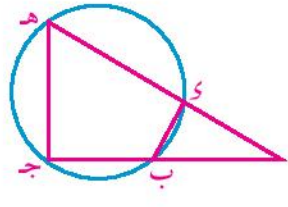
- العلاقة بين وترين متقاطعين في دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- العلاقة بين طول مماس وطول جزأي قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات في الدائرة.



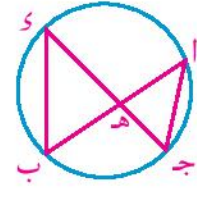
في كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

◀ في شكل (١): هل توجد علاقة بين $هـ أ \times هـ ب$ ، $هـ ج \times هـ د$ ؟

◀ في شكل (٢): هل توجد علاقة بين $هـ أ \times هـ د$ ، $هـ ج \times هـ ب$ ؟

◀ في شكل (٣): هل توجد علاقة بين $هـ أ \times هـ د$ ، $(هـ ب)^2$ ؟

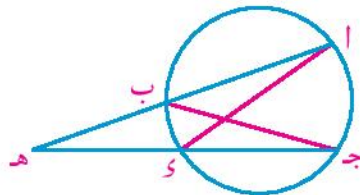
المصطلحات الأساسية

- وتر
- قاطع
- مماس
- قطر
- مماس خارجي مشترك
- Common External Tangent
- مماس داخلي مشترك
- Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز
- Concentric Circles

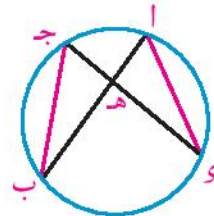
تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويز للوترين $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ لدائرة في نقطة $هـ$ فإن:

$$هـ أ \times هـ ب = هـ ج \times هـ د$$



شكل (٢)



شكل (١)

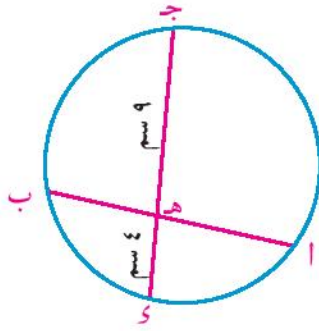
لاستنتاج ذلك:

◀ ارسم $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$

◀ في كل من الشكلين أثبت أن المثلثين $هـ أ$ ، $هـ ج$ متشابهان فيكون:

$$\therefore هـ أ \times هـ ب = هـ ج \times هـ د \quad \frac{هـ أ}{هـ ج} = \frac{هـ ب}{هـ د}$$

مثال



١) في الشكل المقابل: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$

وإذا كان $\frac{AH}{HB} = \frac{CH}{HD}$ ، $HD = 9$ سم، $HD = 5$ سم، $CH = 3$ سم، $CH = 5$ سم، أوجد طول HB

الدل

$$\therefore \frac{AH}{HB} = \frac{CH}{HD} \quad \therefore HA = 4 \text{ ك} \quad ، \quad HB = 3 \text{ ك} \quad \text{حيث } K \neq 0$$

(تمرين مشهور)

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\} \quad \therefore HA \times HB = HD \times HC$$

$$\text{فيكون: } 4 \times 9 = 3 \times K$$

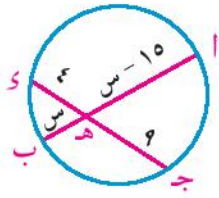
$$36 = 3K$$

$$K = 12$$

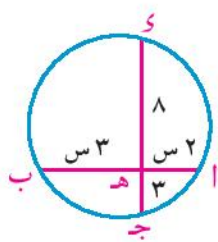
$$K = 12 \quad ، \quad HB = 36$$

حاول أن تحل

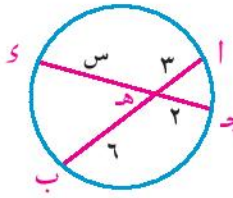
١) أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



ج

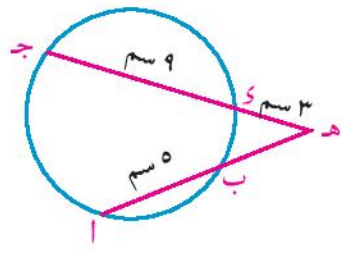


ب



أ

مثال



٢) في الشكل المقابل: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$ ، $AB = 9$ سم، $CD = 3$ سم، $AD = 5$ سم، $AE = 3$ سم، أوجد طول BE

الدل

بفرض أن $BE = س$ سم.

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\} \quad \therefore AB \times AC = AD \times AE$$

$$\text{فيكون: } س(س + 5) = 3(9 + 3)$$

$$س^2 + 5س = 36 - 36 = \text{صفر}$$

$$(س - 4)(س + 9) = \text{صفر}$$

$$\therefore س = 4 \quad ، \quad س = -9 \text{ مرفوض}$$

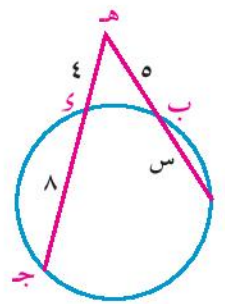
$$\therefore \text{طول } BE = 4 \text{ سم.}$$

(تمرين مشهور)

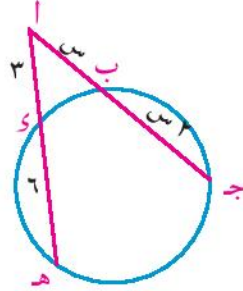
حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية

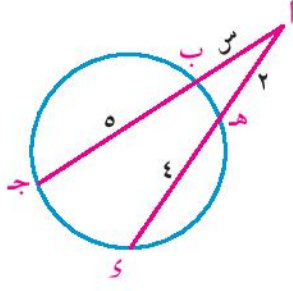
أ



ب



ج

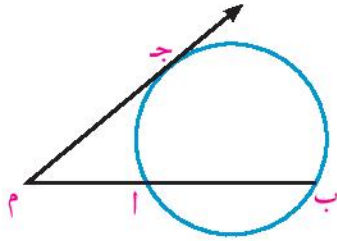


(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

نتيجة ١

إذا كانت م نقطة خارج دائرة، م جـ يمس الدائرة في جـ، م ب يقطعها في أ، ب فإن
(م جـ) = م^٢ = م أ × م ب.

في الشكل المقابل: م جـ مماس للدائرة
، م ب يقطع الدائرة في أ، ب
∴ (م جـ) = م^٢ = م أ × م ب



مثال

٣ في الشكل المقابل: هـ أ مماس للدائرة،

هـ جـ يقطع الدائرة في ٤، جـ على الترتيب.

حيث هـ ٤ = ٤ سم، جـ ٥ = ٥ سم، أوجد طول هـ أ

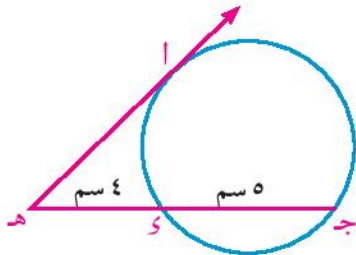
الحل

∴ هـ أ مماس، هـ جـ قاطع للدائرة

∴ (هـ أ) = هـ ٤ × هـ جـ (نتيجة)

$$(هـ أ) = ٤ × (٥ + ٤) = ٣٦$$

∴ هـ أ = ٦ سم



عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويزان للقطعتين $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ في نقطة H (مختلفة عن A ، B ، C ، D) وكان $HA \times HB = HD \times HC$ فإن: النقط A ، B ، C ، D تقع على دائرة واحدة.

لاحظ أن:

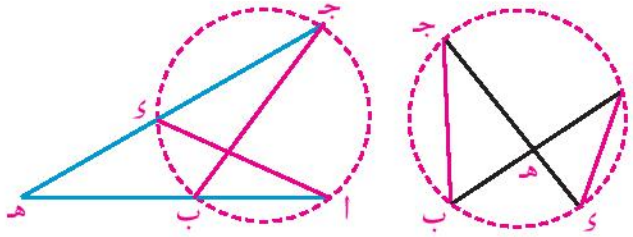
$$HA \times HB = HD \times HC$$

$$\frac{HA}{HD} = \frac{HB}{HC}$$

هل $\triangle HAD \sim \triangle HBC$ ؟ لماذا؟

هل $\angle A = \angle C$ (أو $\angle B = \angle D$)؟ لماذا؟

هل النقط A ، B ، C ، D تقع على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



مثال

٤) AB جزء مثلث فيه $AB = 15$ سم، $AC = 12$ سم، $AD = 4$ سم، $AE = 5$ سم، حيث $A \in \overline{BC}$ حيث $AE = 5$ سم. أثبت أن الشكل $ABCE$ رباعي دائري.

الحل

$$10 = 15 \times 4 = AB \times AC$$

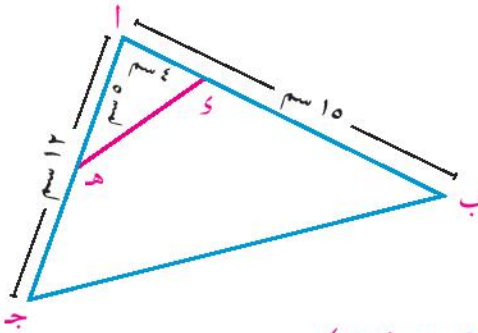
$$60 = 12 \times 5 = AC \times AE$$

$$\therefore AB \times AC = AC \times AE$$

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CE} = \{A\}, AB \times AC = AC \times AE$$

$\therefore$ النقط A ، B ، C ، E تقع على دائرة واحدة

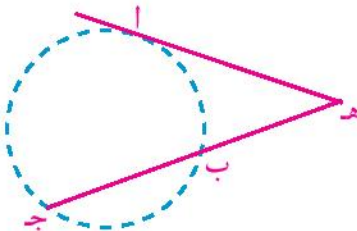
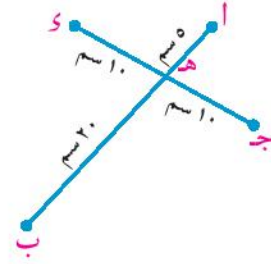
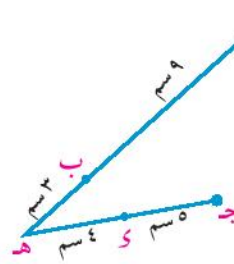
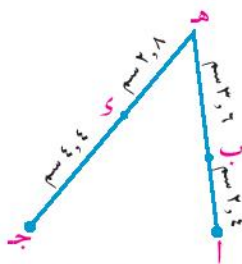
ويكون الشكل $ABCE$ رباعيًا دائريًا



(عكس تمرين مشهور)

حاول أن تحل

٢) في أي من الأشكال التالية تقع النقط A ، B ، C ، D على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



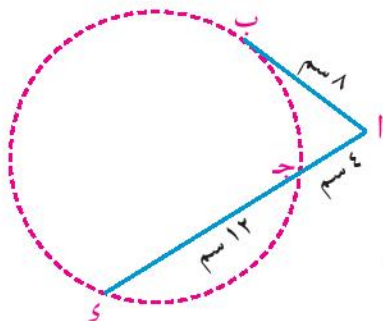
إذا كان $HA^2 = HB \times HC$ فإن H تماس الدائرة المارة بالنقط A ، B ، C

نتيجة

مثال

٥) $\overline{AB}$ ممثل في $\overline{AB} = 8$ سم، $\overline{AJ} = 4$ سم، $\overline{J} \in \overline{AB}$ ، $\overline{J} \notin \overline{AC}$ حيث $\overline{J} = 12$ سم. أثبت أن $\overline{AB}$ تماس الدائرة المارة بالنقط B ، J ، و

الحل



$$\therefore \overline{AJ} \times \overline{AB} = \overline{JC} = 4 \times 8 = 32$$

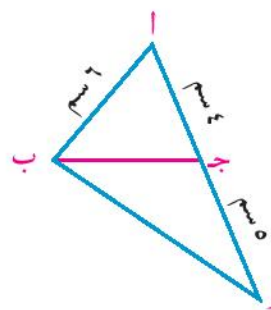
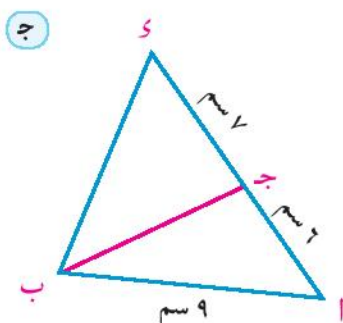
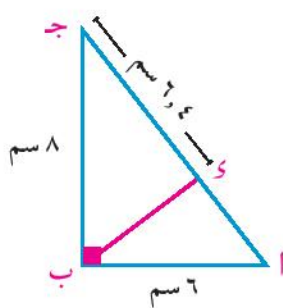
$$32 = \overline{JC}^2 = (\overline{AB})^2$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{JC} = 8$$

$\therefore \overline{AB}$ تماس الدائرة المارة بالنقط B ، J ، و عند النقطة B .

حاول أن تحل

٤) في أي من الأشكال الآتية يكون $\overline{AB}$ مماساً للدائرة المارة بالنقط B ، J ، و

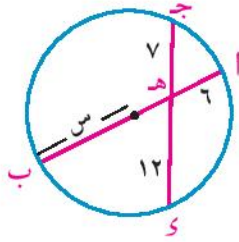




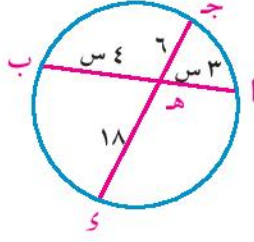
تمارين ٢ - ٤



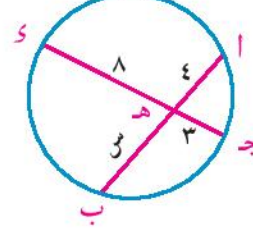
١ باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلي، أوجد قيمة س العددية في كل من الأشكال التالية.
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



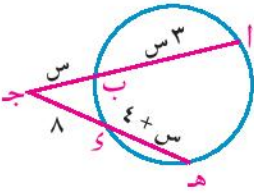
ب



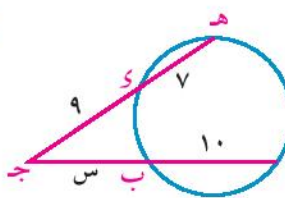
ج



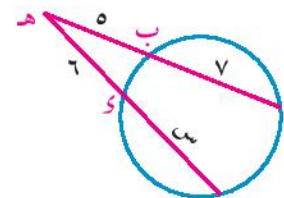
د



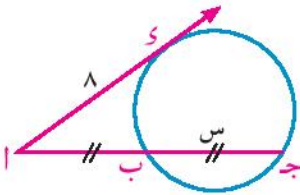
هـ



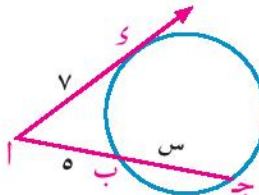
و



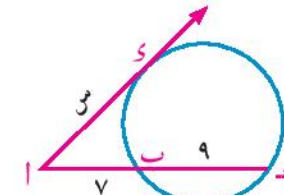
ز



ح

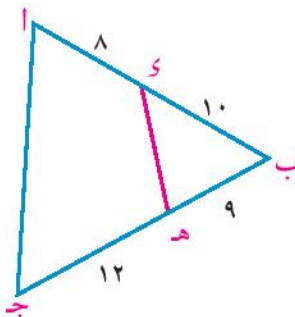


ط

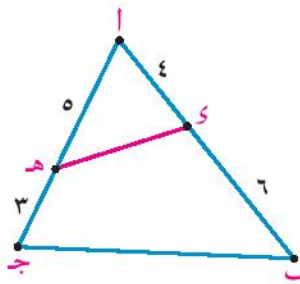


ي

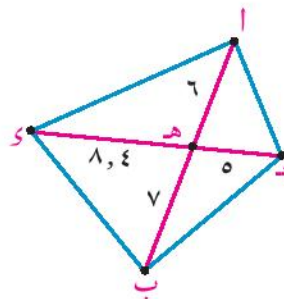
٢ في أي من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، ج، د على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



ب

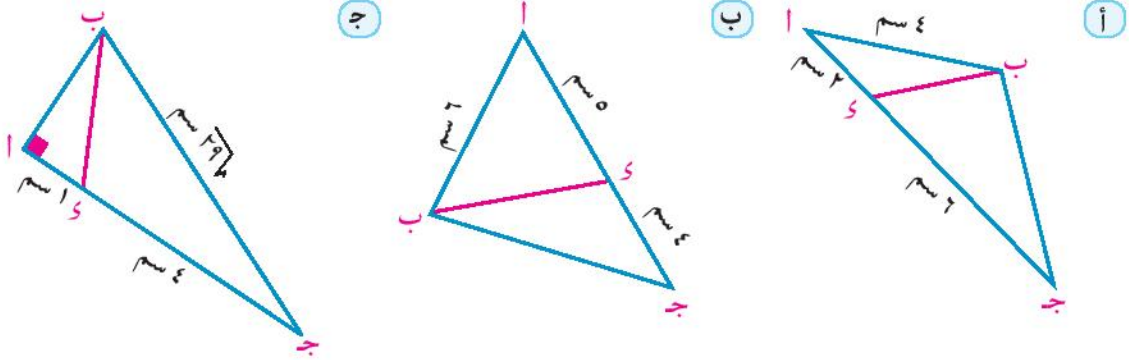


ج

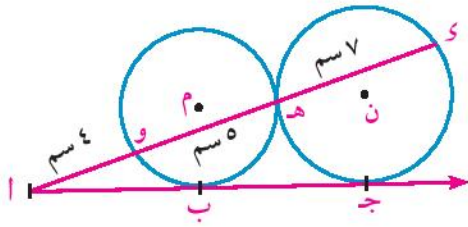


د

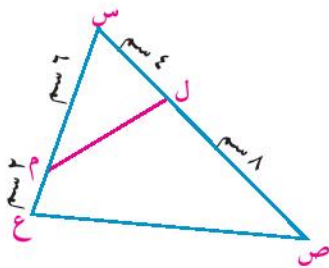
٢ في أي من الأشكال التالية $\overline{AB}$ مماس للدائرة المارة بالنقط B ، J ، S .



٤ دائرتان متقاطعتان في A ، B . $J \in \overline{AB}$ ، J رؤس من J القطعتان $\overline{JS}$ ، $\overline{JS}$ مماستان للدائرتين عند S ، V . أثبت أن $J S = J S$.



٥ في الشكل المقابل: الدائرتان M ، N متماستان عنده $\overline{AJ}$ يمس الدائرة M عند B ، ويمس الدائرة N عند J ، $\overline{AH}$ يقطع الدائرتين عند O ، S على الترتيب حيث $AO = ٤سم$ ، $OH = ٥سم$ ، $HS = ٧سم$. أثبت أن B منتصف $\overline{AJ}$.



٦ في الشكل المقابل: $L \in \overline{SV}$ حيث $SL = ٤سم$ ، $VL = ٨سم$ ، $M \in \overline{SV}$ حيث $SM = ٦سم$ ، $ML = ٢سم$. أثبت أن:

- $\triangle SLM \sim \triangle SVE$
- الشكل LVE مربع رباعي دائري.

٧ $\overline{AB} \cap \overline{JS} = \{H\}$ ، $AH = \frac{١}{١٣} AB$ ، $H \in \overline{JS}$ ، $H \in \overline{JS}$ ، $H \in \overline{JS}$ ، $H \in \overline{JS}$. أثبت أن النقط A ، B ، J ، S تقع على دائرة واحدة.

٨ AB جـ مثلث، $S \in \overline{AB}$ حيث $BS = ٥سم$ ، $AS = ٤سم$. إذا كان $AS = ٦سم$. أثبت أن:

- $\overline{AS}$ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط A ، B ، S .
- $\triangle ASB \sim \triangle ASB$
- مر $(\triangle ASB) : مر (\triangle ASB) = ٩ : ٥$

٩ دائرتان متحدتا المركز M ، طولاً نصفى قطريهما $١٢سم$ ، $٧سم$ ، رسم الوتر AO في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في B ، J على الترتيب. أثبت أن: $AB \times BS = ٩٥$

الوحدة

٣

الهندسة

نظريات التناسب في المثلث

The Triangle Proportionality Theorems

معبد حتشيبسوت بالأقصر

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف النظرية التي تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف نظرية تاليس العامة التي تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر). وحالات خاصة منها.
- يتعرف النظرية التي تنص على: (إذا نصفت رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلي والخارجي.

المصطلحات الأساسية

منصف خارجي	Bisector	منصف	Midpoint	نقطة تنصيف	Ratio	نسبة
Exterior Bisector		منصف داخلي	Median	متوسط	Proportion	تناسب
Perpendicular	عمودي على	Interior Bisector	Transversal	قاطع	Parallel	يوازي

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): المستقيمات المتوازية

والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ - ٢): منصف الزاوية والأجزاء

المتناسبة.

الأدوات المستخدمة

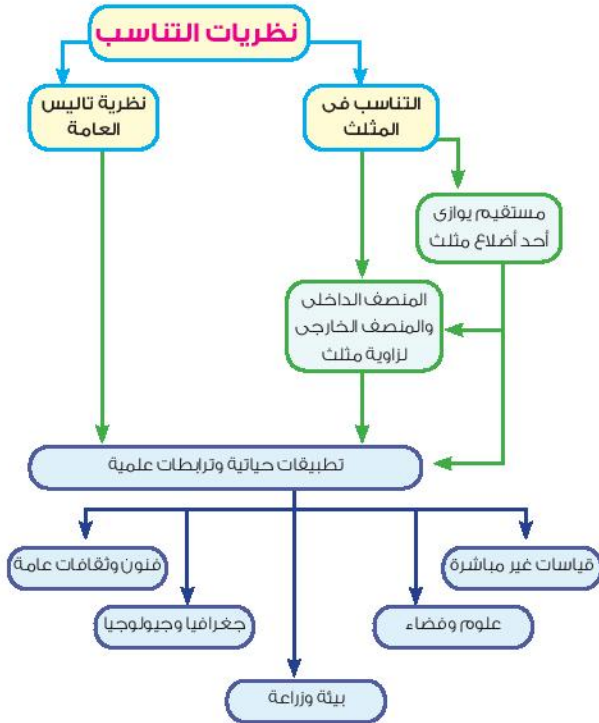
أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلى -
برامج رسومية - جهاز عرض بيانات - ورق مربعات
- خيوط - مقص

نبذة تاريخية

الرياضيات نشاط فكري ممتع يجعل الذهن متفتحاً، والعقل صحواً، وتسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها؛ لئتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازي والآخر قاطع لها، كما حرقوا الأراضى الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاماً هندسياً متكاملًا عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسلمات خمس، أهمها: مسلمة التوازي وهى: "من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي مستقيماً معلوماً". وتُعني الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات - المضلعات - الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازي المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

مخطط تنظيمي للوحدة



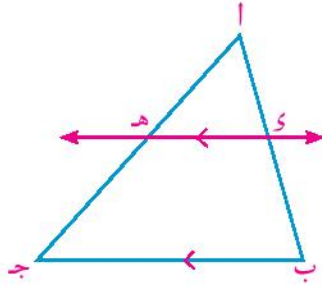
المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

Parallel Lines and Proportional Parts

١ - ٣

سوف تتعلم

- خصائص المستقيم الموازي لأي ضلع من أضلاع مثلث.
- استخدام التناسب في حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيمات متوازية.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيمات المتوازية وقواطعها.



١- ارسم المثلث ABC ج، عين نقطة D على AB ثم ارسم $DE \parallel BC$ ويقطع AC في E .

٢- أوجد بالقياس طول كل من: AD ، DB ، AE ، EC

٣- احسب النسبتين $\frac{AD}{DB}$ ، $\frac{AE}{EC}$ وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

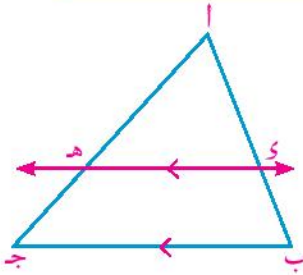
إذا تغير موقع DE محافظاً على توازيه مع BC .

هل تتغير العلاقة بين $\frac{AD}{DB}$ ، $\frac{AE}{EC}$ ؟ ماذا نستنتج؟

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

(برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)

نظرية ١



المعطيات: AB جـ مثلث، $DE \parallel BC$

المطلوب: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

البرهان: $\therefore DE \parallel BC$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (١)

$\therefore AD \div AB = AE \div AC$

$\therefore AB = AD + DB$ ، $AC = AE + EC$ (٢)

من (١)، ينتج أن:

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC}$$

ويكون: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

المصطلحات الأساسية

Parallel	يوازي
Midpoint	منتصف
Median	متوسط
Transversal	قاطع

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلي.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

$$\frac{ب}{ا} + ١ = \frac{ب}{ا} + ١$$

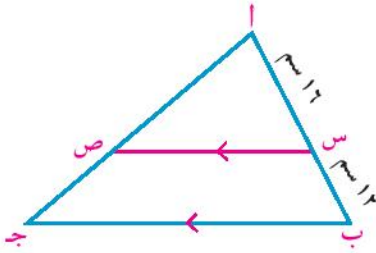
$$\therefore \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$$

ومن خواص التناسب نجد أن: $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$ (وهو المطلوب)

$$\therefore \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \quad \therefore \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \quad \therefore \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

مثال



١) في الشكل المقابل: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $AD = ١٢$ سم، $DB = ١٦$ سم، $DE = ١٢$ سم.

أ) إذا كان $AC = ٢٤$ سم، أوجد EC جـ.

ب) إذا كان $EC = ٢١$ سم، أوجد AC جـ.

الحل

$$\text{أ) } \therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC} \quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

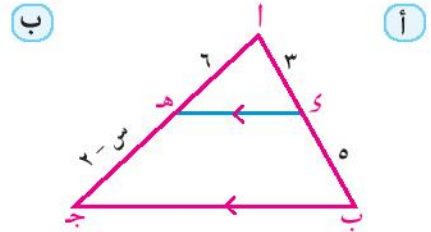
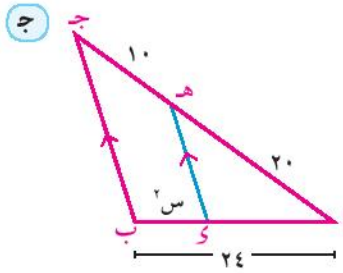
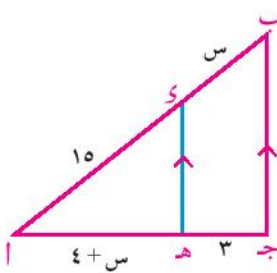
$$\text{ويكون: } \frac{١٢}{١٦} = \frac{٢٤}{EC} \quad \therefore EC = \frac{٢٤ \times ١٦}{١٢} = ٣٢ \text{ سم}$$

$$\text{ب) } \therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC} \quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{ويكون: } \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٢ + ٢١}{EC} \quad \therefore EC = \frac{(١٢ + ٢١) \times ١٦}{١٢} = ٤٩ \text{ سم}$$

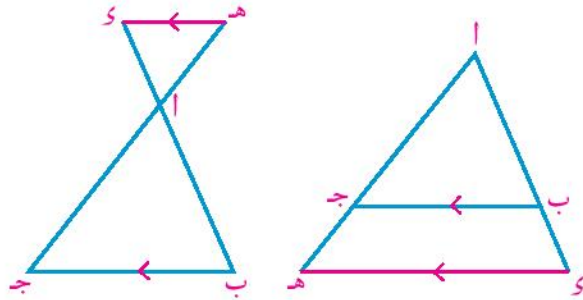
حاول أن تحل

١) في كل من الأشكال التالية: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. أوجد قيمة s العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



نتيجة

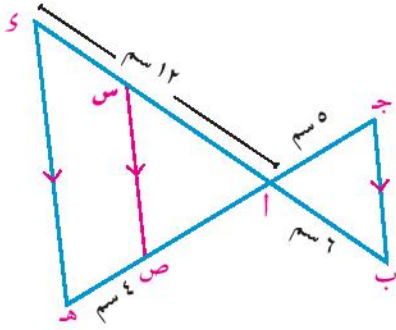
إذا رسم مستقيم خارج مثلث $اب$ ج يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث، وليكن $\overline{ب ج}$ ، ويقطع $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا ج}$ في $ي$ ، $هـ$ على الترتيب فإن: $\frac{ا ب}{ب ي} = \frac{ا ج}{ج هـ}$ (كما في الشكل).



بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$$\frac{ا ب}{ب ي} = \frac{ا ج}{ج هـ} , \frac{ا هـ}{هـ ي} = \frac{ا ب}{ب ي}$$

مثال



٢ في الشكل المقابل: $\overline{ج هـ} \cap \overline{ب ي} = \{ا\}$ ، $س \ni \overline{ا ي}$
 $ص \ni \overline{ا هـ}$ حيث $\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج} \parallel \overline{هـ ي}$.
 فإذا كان $ا ب = 6$ سم، $ا ج = 5$ سم، $ا ي = 12$ سم، $هـ ص = 4$ سم.
 أوجد طول كل من $\overline{ا هـ}$ ، $\overline{ي س}$.

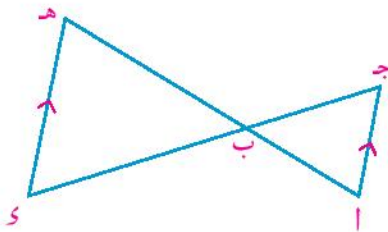
الحل

$$\begin{aligned} \because \overline{هـ ي} \parallel \overline{ب ج} , \quad \overline{ج هـ} \cap \overline{ب ي} = \{ا\} , \\ \therefore \frac{ا ب}{ب ي} = \frac{ا ج}{ج هـ} \text{ ويكون: } \frac{ا هـ}{هـ ي} = \frac{ا ي}{ي س} \end{aligned}$$

في $\triangle ا هـ ي$:

$$\begin{aligned} \because \overline{س ص} \parallel \overline{هـ ي} \therefore \frac{ا هـ}{هـ ص} = \frac{ا ي}{ي س} \\ \text{ويكون } \frac{ا هـ}{4} = \frac{12}{ي س} \therefore ي س = 8, 4 \text{ سم} \end{aligned}$$

حاول أن تحل



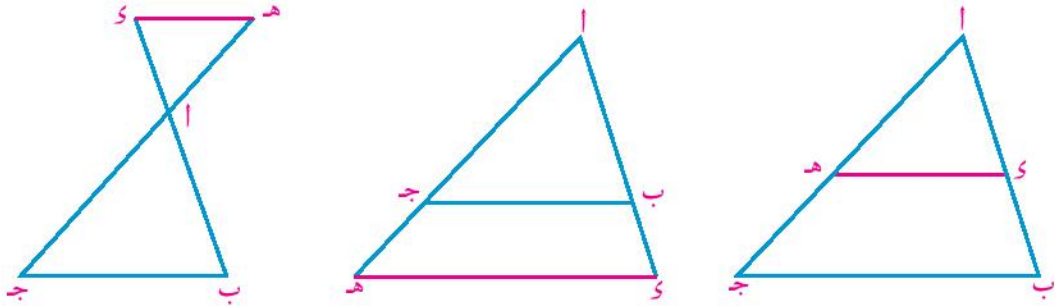
٢ في الشكل المقابل: $\overline{ي هـ} \parallel \overline{ا ج}$ ، $\overline{ا هـ} \cap \overline{ج ي} = \{ب\}$

أ إذا كان: $ا ب = 8$ سم، $ب ج = 9$ سم، $ب هـ = 12$ سم.
 أوجد طول $\overline{ب ي}$.

ب إذا كان: $ا ب = 6$ سم، $ب هـ = 9$ سم، $ج ي = 18$ سم.
 أوجد طول $\overline{ب ج}$.

عكس
نظرية
١

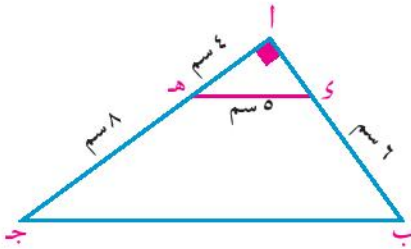
إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.



في الأشكال الثلاثة السابقة: $اب$ جـ مثلث، $\overleftrightarrow{و هـ}$ يقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ في $ز$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في $هـ$. وكان $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{أ ز}{ز ب}$ فإن $\overleftrightarrow{و هـ} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}$

تفكير منطقي: هل $\triangle أ ز هـ \sim \triangle أ ب جـ$ ؟ ولماذا؟ - هل $\triangle أ ز هـ \equiv \triangle ب جـ$ ؟ فسر إجابتك.

مثال



٣ في الشكل المقابل: $اب$ جـ مثلث قائم الزاوية في $أ$

أ أثبت أن: $\overleftrightarrow{و هـ} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}$. ب أوجد طول $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

الحل

أ ∴ المثلث $أ ز هـ$ قائم الزاوية في $أ$

(نظرية فيثاغورث)

$$\therefore أ هـ = \sqrt{١٦ - ٢٥} = ٣ \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{أ ز}{ز ب} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} ، \frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

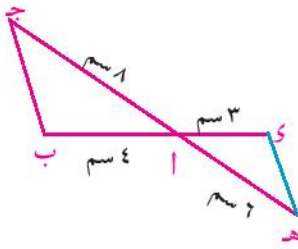
$$\therefore \frac{أ ز}{ز ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ} \text{ ويكون } \overleftrightarrow{و هـ} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}.$$

ب ∴ $\triangle أ ز هـ \sim \triangle أ ب جـ$ (لماذا) ∴ $\frac{أ ز}{ز ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{١}{٢}$

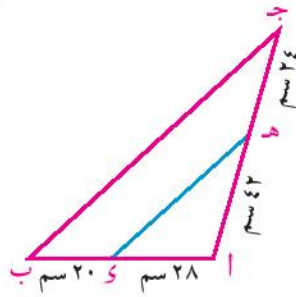
$$\text{ويكون } \overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{١}{٢} \therefore ب جـ = ١٥ \text{ سم}$$

حاول أن تحل

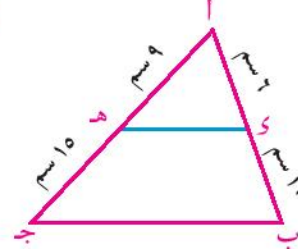
٣ في كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان $\overline{هـ} \parallel \overline{ب ج}$ أم لا.



ج



ب



ا

مثال

٤ ا ب ج د شكل رباعي فيه $س \in \overline{ا ب}$ ، $ص \in \overline{ا ج}$ حيث $\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$ ،

رسم $\overline{ص ع} \parallel \overline{ج د}$ ويقطع $\overline{ا د}$ في ع. أثبت أن $\overline{س ع} \parallel \overline{ب د}$.

الحل

في $\triangle ا ب ج$:

$$(١) \quad \therefore \overline{س ص} \parallel \overline{ب ج} \quad \because \frac{ا س}{س ب} = \frac{ا ص}{ص ج}$$

في $\triangle ا ج د$:

$$(٢) \quad \therefore \overline{ص ع} \parallel \overline{ج د} \quad \because \frac{ا ص}{ص ج} = \frac{ا ع}{ع د}$$

$$\text{من (١)، (٢) نستنتج أن: } \frac{ا س}{س ب} = \frac{ا ع}{ع د}$$

في $\triangle ا ب د$:

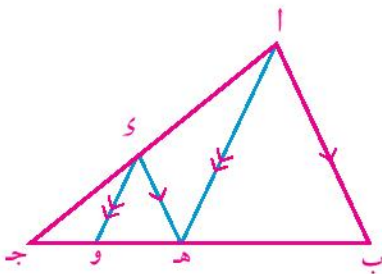
$$\therefore \frac{ا س}{س ب} = \frac{ا ع}{ع د} \quad \therefore \overline{س ع} \parallel \overline{ب د}$$

حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل: ا ب ج مثلث، $و \in \overline{ا ج}$ ،

$$\overline{و هـ} \parallel \overline{ا ب}، \quad \overline{و ز} \parallel \overline{ا هـ}$$

إثبت أن $(ج هـ)^2 = ج و \times ج ب$.

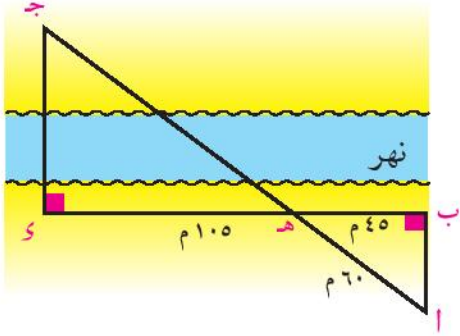


مثال

٥ تحديد المواقع: لتحديد الموقع ج، قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع ج عن الموقع أ

الحل



$$\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{AC} \perp \overline{BC} \therefore \overline{AB} \parallel \overline{AC}$$

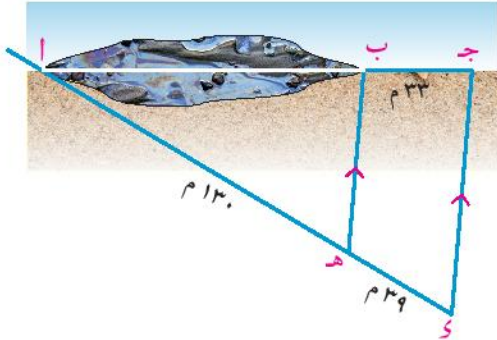
$$\therefore \overline{AC} \cap \overline{BC} = \{C\}, \overline{AB} \parallel \overline{AC}$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CB} \quad \text{ويكون} \quad \frac{45}{105+45} = \frac{60}{x}$$

$$\therefore x = \frac{105 \times 60}{45} = 140 \text{ متر.}$$

حاول أن تحل

٥ مكافحة التلوث: قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطئ كما في الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.



فكر q ناقش

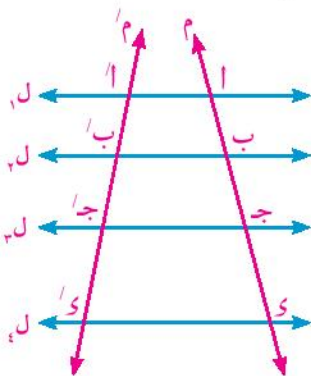
لعلك لاحظت إمكانية استخدام توازي مستقيم لأحد أضلاع مثلث في تطبيقات حياتية كثيرة. يوضح الشكل المقابل بوابة أحد المشاتل الزراعية، وهي مكونة من قطع خشبية متوازية وأخرى قاطعة لها. هل توجد علاقة بين أطوال أجزاء قواطع هذه القطع المتوازية؟



نمذجة

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجاً رياضياً للمشكلة) كما يلي:

١- ارسم المستقيمات l_1, l_2, l_3, l_4 // l_1, l_2, l_3, l_4 ، م، م قاطعان لها في أ، ب، ج، د، أ، ب، ج، د، على الترتيب كما بالشكل المقابل.



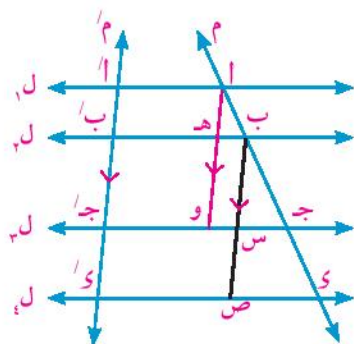
٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:

$$\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \frac{CD}{C'D'}, \frac{AD}{A'D'}, \dots$$

ماذا نستنتج؟

نظرية تاليس العامة

نظرية

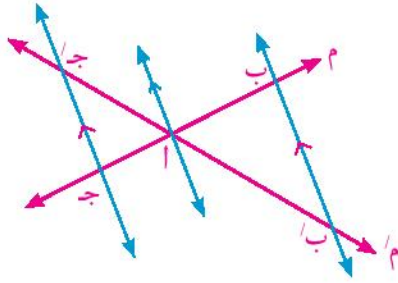


∴ ا ب : ب ج : ج د = ا / ب : ب / ج : ج / د وهو المطلوب.

الحل

$$\therefore \text{ب ی} = ۲۱ \text{ سم، ه س} = ۴۴ \text{ سم.}$$

حالات خاصة

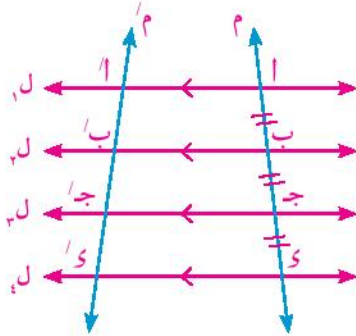


١- إذا تقاطع المستقيمان م، ن في النقطة أ

وكان: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ، فإن: $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{CE}$

وبالعكس: إذا كان: $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{CE}$

فإن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



نظرية تاليس الخاصة

٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن

أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

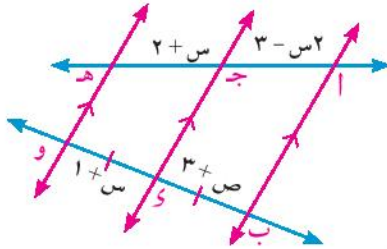
في الشكل المقابل ل، م // ن، قطعها المستقيمان م، ن

وكان: $AB = BC = CD$ فإن: $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{CE}$

مثال

٧ في الشكل المقابل أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.

الحل



$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ، $AB = CD = EF$

$\therefore AC = CE$

ويكون: $2s - 3 = s + 2$ $\therefore s = 5$

$\therefore AB = CD = EF = 5$ ، $1 + 5 = 3 + v$ $\therefore v = 3$

مثال

٨ الربط بالصناعة: تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد

المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى

مراكز التوزيع كما في الشكل المقابل.

فإذا كانت د، هـ، و مساقط النقط أ، ب، ج على الأفقي

بنفس الترتيب، $AB = 2$ م، $DE = 80$ سم، $HO = 12$ مترًا

أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

الحل

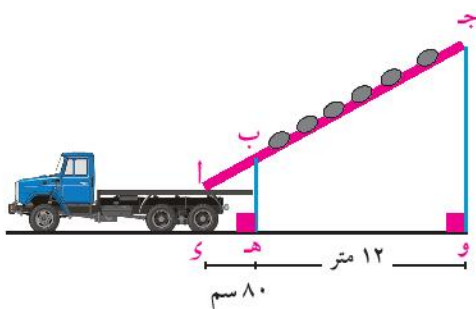
$\therefore$ د، هـ، و مساقط النقط أ، ب، ج على الأفقي

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CO}$ ، $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DO}$ قاطعان لها

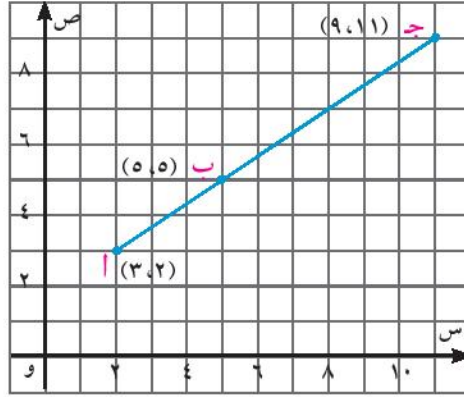
ويكون: $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DO}$

$\therefore AC = \frac{AB \times DO}{DE} = \frac{2 \times 12}{0.8} = 30$ مترًا

$\therefore AC = 30$ مترًا

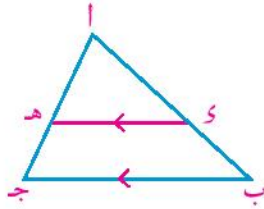


٦ تفكير ناقد



أوجد من الشكل $\frac{أب}{بج}$ بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟

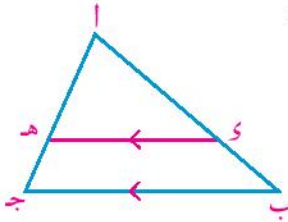
تمارين ٣ - ١



١ في الشكل المقابل و $\overline{هـ} // \overline{بج}$ أكمل:

أ إذا كان $\frac{اي}{بج} = \frac{٥}{٣}$ فإن: $\frac{أب}{بج} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{جـهـ}{هـا} = \frac{.....}{.....}$

ب إذا كان $\frac{اهـ}{جـا} = \frac{٤}{٧}$ فإن: $\frac{جـهـ}{هـا} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{بج}{أب} = \frac{.....}{.....}$



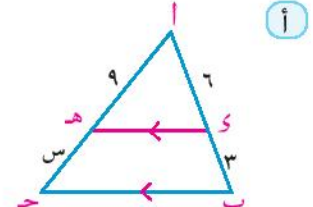
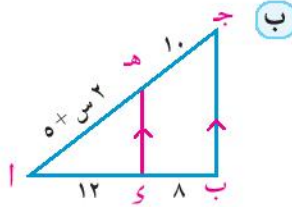
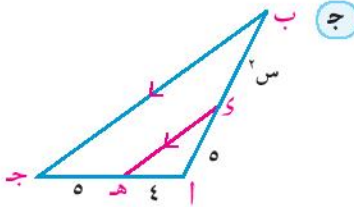
٢ في الشكل المقابل و $\overline{هـ} // \overline{بج}$. حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:

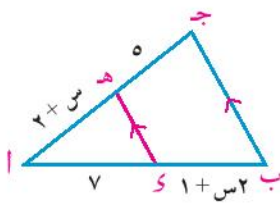
أ $\frac{أب}{بج} = \frac{اهـ}{جـا}$ ب $\frac{اي}{هـجـ} = \frac{بج}{جـهـ}$

ج $\frac{أب}{بج} = \frac{اجـ}{هـا}$ د $\frac{أب}{جـهـ} = \frac{اجـ}{بج}$

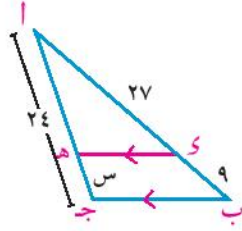
هـ $\frac{أب}{اي} = \frac{اجـ}{اهـ}$ و $\frac{جـهـ}{أب} = \frac{اجـ}{بج}$

٣ في كل من الأشكال التالية و $\overline{هـ} // \overline{بج}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

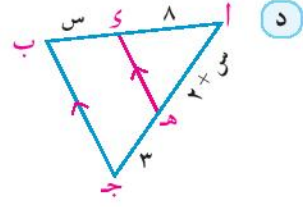




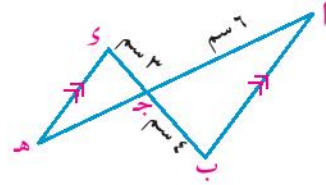
٩



١٠



١١

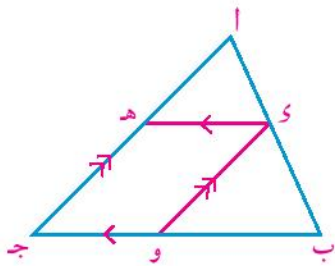


٤ في الشكل المقابل: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ، $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{G\}$

أ ج د = ٦ سم، ب ج د = ٤ سم، ج د = ٣ سم
أوجد طول ج د

٥ $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$ ، حيث $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، فإذا كان $AE = ٩$ سم، $BE = ١٥$ سم، $CE = ٣٦$ سم.

أوجد طول ع م.

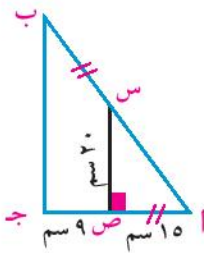


٦ لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

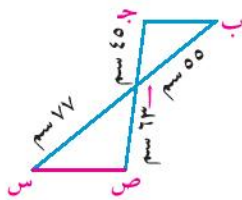
أ $AE = ٤$ ، $BE = ٨$ ، $CE = ٦$ ، $DE = ٨$.

ب $AE = ٨$ ، $BE = ٥$ ، $CE = ٢$ ، $DE = ٣$.

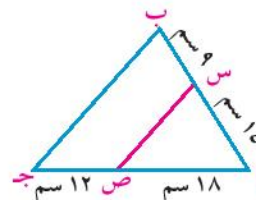
٧ في كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$



ج



ب



أ

٨ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ فيه $AE = ٤$ سم، $BE = ١٤$ سم، $CE = ٢١$ سم، $DE = ٥$ سم،

م $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ حيث $AE = ٨$ سم، $BE = ٤$ سم، $CE = ٨$ سم، $DE = ٤$ سم.

٩ في المثلث أ ب ج، $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ ، $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ ، $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{G\}$ ، $\overline{AE} \cap \overline{BD} = \{H\}$.

إذا كان $AE = ١٠$ سم، $BE = ٨$ سم، حدد ما إذا كان $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$. فسر إجابتك.

١٠ أ ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ. فإذا كان $AE = ٦$ سم، $BE = ١٣$ سم، $CE = ١٠$ سم،

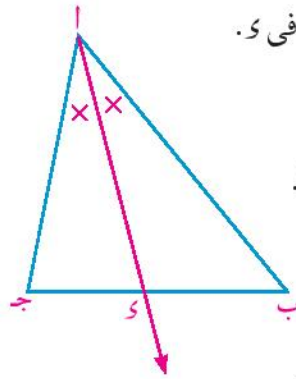
هـ $AE = ٧$ سم، $BE = ٨$ سم، أثبت أن الشكل أ ب ج د شبه منحرف.

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

Angle Bisectors and Proportional Parts

٢ - ٣

عمل تعاوني



- ١- ارسم المثلث ABC ، وارسم AD ليقطع BC في D .
- ٢- قس كلًا من AB ، AC ، BD ، DC ، AD .
- ٣- احسب كل من النسبتين $\frac{AB}{AC}$ ، $\frac{BD}{DC}$ وقارن بينهما. ماذا تستنتج؟
- ٤- كرر العمل السابق عدة مرات. هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.

سوف تتعلم

- خصائص منصفات زوايا المثلث.
- استخدام التناسب في حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية في مثلث.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث.

Bisector of an Angle of a Triangle

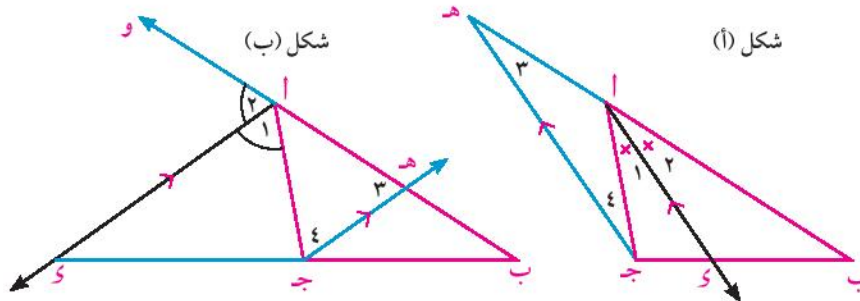
منصف زاوية مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين فإن النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين. (برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)

نظرية ٣

المصطلحات الأساسية

Bisector	منصف
Interior Bisector	منصف داخلي
Exterior Bisector	منصف خارجي
Perpendicular	عمودي



المعطيات: AB مثلث، AD ينصف $\angle A$

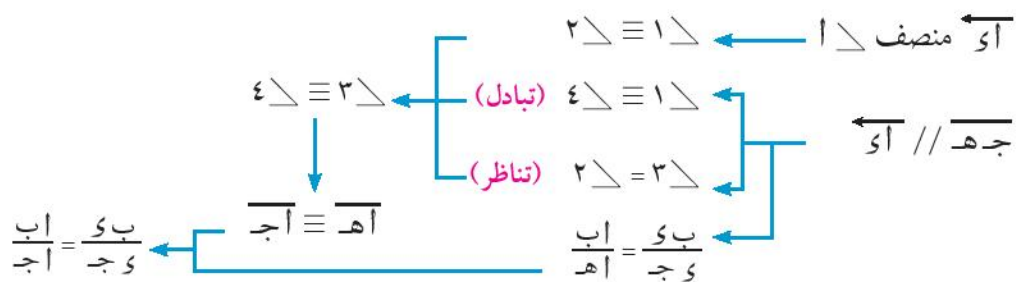
(من الداخل في شكل أ، من الخارج في شكل ب).

المطلوب: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

البرهان : ارسم $DE \parallel AD$ ويقطع BC في E . اتبع المخطط التالي واكتب البرهان.

الأدوات والوسائل

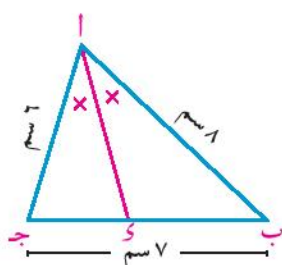
- أدوات هندسية للرسم.
- حاسب آلي وبرامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.



مثال

١) اب ج مثلث فيه اب = ٨سم، اج = ٦سم، ب ج = ٧سم، رسم آي ينصف $\triangle$ اب اج ويقطع ب ج في د. أوجد طول كل من $\overline{ب د}$ ، $\overline{د ج}$

الحل



∴ $a \mid b$ ينصف $\triangle b \mid a$ ∴ $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ (نظرية)

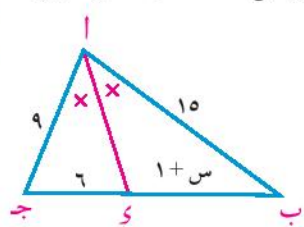
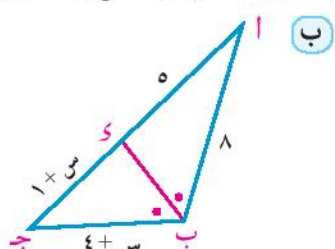
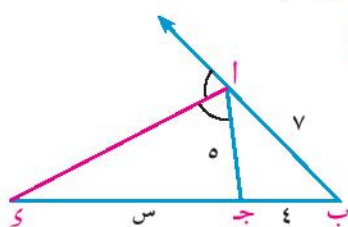
$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{5}{3} \therefore \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{5}{3}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{5}{5 - v} \therefore 4(5 - v) = 3 \times 5 \therefore 20 - 4v = 15 \therefore 4v = 20 - 15 = 5 \therefore v = \frac{5}{4} \text{ م.س.م}$$
$$5\text{ب}٤ - ٢٨ = 5\text{ب}٣$$

(ضرب تبادلی)

۲۸ = ۷ ب ۵ ، ∴ ۵ ب ۴ = ۴ سم ، ۵ ج ۳ = ۳ سم

حاول أن تحل

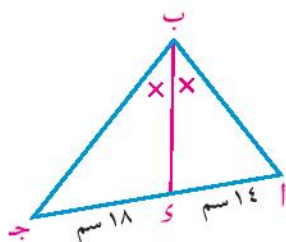
❶ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة s العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



مثال

٢) اب ج مثلث. رسم ب ر ينصف Δ ب، ويقطع $\overline{اج}$ في ر، حيث $ار = ١٤$ سم، $ر ج = ١٨$ سم. إذا كان محيط Δ اب ج = ٨٠ سم، فأوجد طول كل من: $\overline{ب ج}$ ، $\overline{اب}$.

الحل



فی Δ ا ب ج

$$\therefore \frac{اب}{بج} = \frac{اى}{جى} \therefore \frac{اب}{بج} = \frac{اى}{جى}$$
$$\frac{V}{9} = \frac{14}{11} = \frac{AB}{CB} \therefore$$

∴ محيط Δ أ ب ج = ٨٠ سم، أ ج = ١٤ + ١٨ = ٣٢ سم

$$\therefore \text{ا ب} + \text{ب ج} = ۸۰ - ۳۲ = ۴۸ \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{7}{9} = \frac{AB}{AB+J} \quad \therefore \frac{9+7}{9} = \frac{AB+J}{J} \quad (\text{خواص التناسب})$$

$$\text{ويكون } \frac{16}{9} = \frac{48}{J} \quad \therefore B+J=27 \text{ سم} , \quad AB=21 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

- ٢) AB مثلث قائم الزاوية في B . رسم AK ينصف $\angle A$ ، ويقطع BC في K .
إذا كان طول $BK=24$ سم، $BA:AK=3:5$ فأوجد محيط $\triangle ABC$.

ملاحظة هامة

- ١- في المثلث ABC حيث $AB \neq AC$:

إذا كان AK ينصف $\angle A$ ،

$\overrightarrow{AK}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند A .

$$\text{فإن: } \frac{BK}{KA} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{BK}{KA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{ويكون } \frac{BK}{KA} = \frac{AB}{AC}$$

أي أن BK تنقسم من الداخل في K ومن الخارج في H بنسبة واحدة

ويكون المنصفين AK ، $\overrightarrow{AH}$ متعامدين. (لماذا؟)

- ٢- إذا كان $AB < AC$ ، قطع منصف $\angle A$ الضلع BC في K حيث $BK < KC$ ، أما منصف الزاوية الخارجة عند A فيقطع BC في H حيث $BH < HC$.

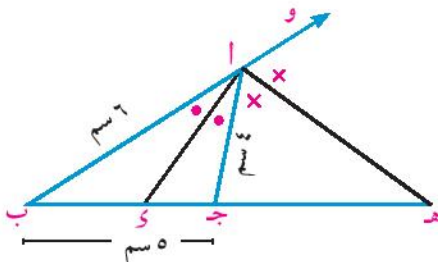
تفكير ناقد

- ◀ كلما كبر AB ماذا يحدث للنقطة K ؟
- ◀ إذا كان $AB=AC$ أين تقع النقطة K ؟ وما وضع $\overrightarrow{AH}$ بالنسبة إلى BC عندئذٍ؟
- ◀ عندما يصبح $AB > AC$ ما العلاقة بين K و H ؟ وأين تقع H عندئذٍ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

مثال

- ٣) ABC مثلث فيه $AB=6$ سم، $AC=4$ سم، $BC=5$ سم. رسم AK ينصف $\angle A$ ويقطع BC في K ، ورسم $\overrightarrow{AH}$ ينصف $\angle A$ الخارجة ويقطع BC في H . احسب طول KH .

الحل



$$\therefore AK \text{ ينصف } \angle A, \quad \overrightarrow{AH} \text{ ينصف } \angle A \text{ الخارجة}$$

$\therefore K, H$ تقسمان BC من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

$$\text{أي أن: } \frac{BK}{KA} = \frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KA}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{BK}{KA} = \frac{BK}{KA}$$

$$\therefore BK=3, KC=2, \quad BH=6, HC=4, \quad BC=5$$

من خواص التناسب نجد

$$\begin{aligned} \frac{0}{2} &= \frac{0}{2} \quad \therefore \text{ج} = 2 \\ \frac{1}{4} &= \frac{0}{4} \quad \therefore \text{هـ} = 10 \\ \text{ج} + \text{هـ} &= 10 + 2 = 12 \text{ سم} \end{aligned}$$

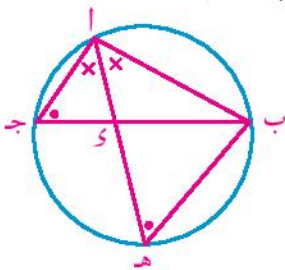
$$\begin{aligned} \frac{2+3}{2} &= \frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{ج}} \\ \frac{2-3}{2} &= \frac{\text{ب} - \text{هـ}}{\text{هـ}} \end{aligned}$$

ويكون $\text{ج} = \text{هـ}$ و $\text{ج} + \text{هـ} = 12$

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث.

تمرين مشهور

إذا كان $\overleftrightarrow{أى}$ ينصف $\triangle$ في Δ $أب$ جـ من الداخل ويقطع $\overline{ب ج}$ في $ى$
فإن: $أى = \sqrt{أب \times أج - بى \times جى}$ (برهان التمرين المشهور لا يمتحن فيه الطالب)



المعطيات: $أب$ جـ مثلث، $\overleftrightarrow{أى}$ ينصف $\triangle$ $أب$ جـ من الداخل، $\overleftrightarrow{أى} \cap \overline{ب ج} = \{ى\}$

المطلوب: (أى) $= \sqrt{أب \times أج - بى \times جى}$

البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث $أب جـ$

وتقطع $\overleftrightarrow{أى}$ في $هـ$ ، ارسم $\overline{ب هـ}$

فيكون: $\triangle أجى \sim \triangle أهـ ب$ (لماذا؟) $\frac{أى}{أب} = \frac{جى}{أهـ}$

$\therefore أى \times أهـ = أب \times أج$

$أى \times (أى + هـ) = أب \times أج$

$(أى)^2 = أب \times أج - أى \times هـ$

$(أى)^2 = أب \times أج - بى \times جى$

أي أن: $أى = \sqrt{أب \times أج - بى \times جى}$

تذكر

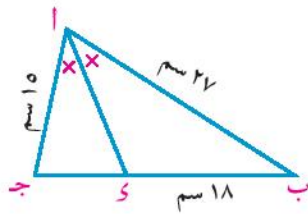
$أى \times هـ = بى \times جى$

مثال

٤) $أب$ جـ مثلث فيه $أب = 27$ سم، $أج = 15$ سم. رسم $\overleftrightarrow{أى}$ ينصف $\triangle$ أو يقطع $\overline{ب ج}$ في $ى$.

إذا كان $بى = 18$ سم احسب طول $أى$.

الحل



$\therefore \overleftrightarrow{أى}$ ينصف $\triangle$ $أب جـ$ $\therefore \frac{أب}{أج} = \frac{بى}{جى}$

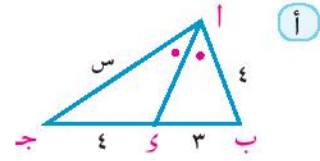
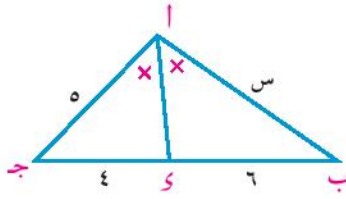
ويكون $\frac{27}{15} = \frac{بى}{جى}$ $\therefore \text{جى} = 10$ سم

$\therefore أى = \sqrt{أب \times أج - بى \times جى}$

$\therefore أى = \sqrt{27 \times 15 - 18 \times 10} = 10$ سم

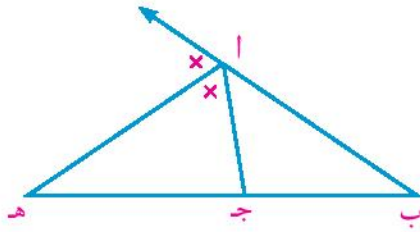
حاول أن تحل

٣ في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{آو}$



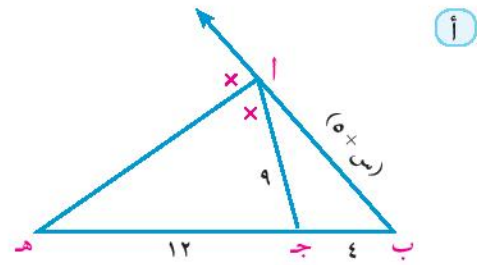
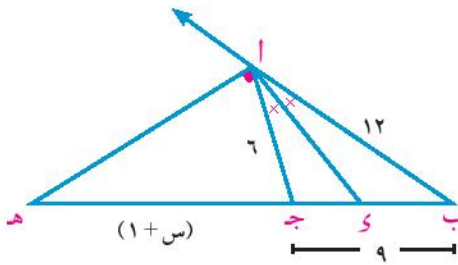
لاحظ أن: في الشكل المقابل: $\overline{آه}$ ينصف $\triangle ب أ ج$ من الخارج

ويقطع $\overline{ب ج}$ في هـ. فإن: $أه = ب هـ \times هـ ج - أ ب \times أ ج$



حاول أن تحل

٤ في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س، وطول $\overline{آه}$



مثال

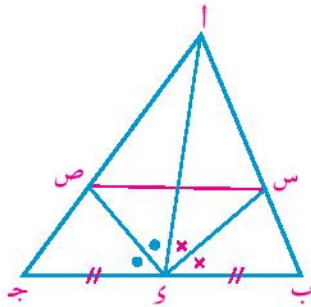
٥ في الشكل المقابل: $\overline{آو}$ متوسط في $\triangle أ ب ج$

$\overline{آو}$ ينصف $\triangle أ ب ج$. ويقطع $\overline{أ ب}$ في س.

$\overline{آو}$ ينصف $\triangle أ ب ج$. ويقطع $\overline{أ ج}$ في ص.

أثبت أن: $\overline{آو} \parallel \overline{ب ج}$.

الحل



(١) $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ج}{ب ج}$ $\therefore$

(٢) $\frac{أ ص}{ص ج} = \frac{أ ج}{ب ج}$ $\therefore$

(٣) $\therefore ب ج = ص ج$

ويكون $\overline{آو} \parallel \overline{ب ج}$.

في $\triangle أ ب ج$: $\therefore \overline{آو}$ ينصف $\triangle أ ب ج$

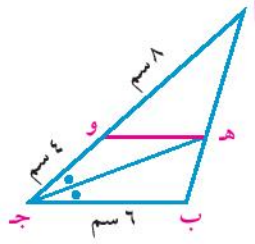
في $\triangle أ ب ج$: $\therefore \overline{آو}$ ينصف $\triangle أ ب ج$

في $\triangle أ ب ج$: $\therefore \overline{آو}$ متوسط

من (١)، (٢)، (٣) $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص ج}$

حاول أن تحل

٥ في الشكل التالي أثبت أن: $\overline{هـ} \parallel \overline{و}$ // $\overline{ب ج}$



حالات خاصة

١- في $\triangle ا ب ج$:

إذا كان $و \in \overline{ب ج}$ ، حيث $\frac{ب و}{و ج} = \frac{ا ب}{ا ج}$
فإن: $\overline{ا هـ}$ ينصف $\triangle ا ب ج$

وإذا كان $هـ \in \overline{ب ج}$ ، حيث $\frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{ا ب}{ا ج}$
فإن: $\overline{ا هـ}$ ينصف $\triangle ا ب ج$ الخارجة عن المثلث $\triangle ا ب ج$
ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- في الشكل المقابل:

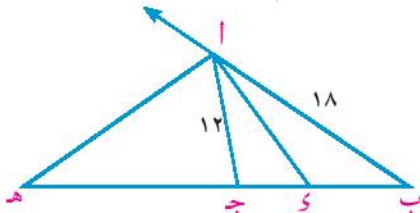
$\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ج هـ}$ منصف زاويتا $ب$ ، $ج$

يتقاطعا في نقطة $هـ \in \overline{ا و}$. ماذا تستنتج؟

حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

مثال

٦ $ا ب ج$ مثلث فيه $ا ب = ١٨$ سم، $ب ج = ١٥$ سم، $ا ج = ١٢$ سم، $و \in \overline{ب ج}$ ، حيث $ب و = ٩$ سم
رسم $\overline{ا هـ} \perp \overline{ا و}$ فقطع $\overline{ب ج}$ في $هـ$. أثبت أن $\overline{ا و}$ ينصف $\triangle ا ب ج$ ثم أوجد طول $ج هـ$.



الحل

في $\triangle ا ب ج$: $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

$ج و = ب ج - ب و = ١٥ - ٩ = ٦$ سم

$\therefore \frac{ب و}{و ج} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ب و}{و ج}$ $\overline{ا و}$ ينصف $\triangle ا ب ج$

$\therefore \overline{ا هـ} \perp \overline{ا و}$ ويقطع $\overline{ب ج}$ في $هـ$

$\therefore \overline{ا هـ}$ ينصف $\triangle ا ب ج$ الخارجة عن $\triangle ا ب ج$

$\therefore ب هـ = ب ج + ج هـ \therefore \frac{١٨}{١٢} = \frac{١٥ + ج هـ}{ج هـ}$

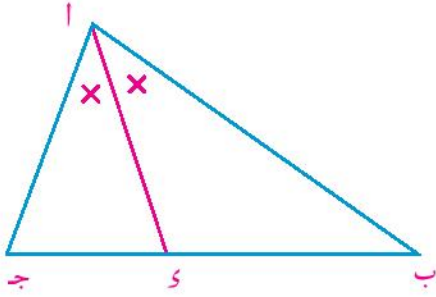
ويكون $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ب هـ}{هـ ج}$
ج هـ = ٣٠ سم



تمارين ٣ - ٢



١) في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{AI}$ ينصف $\triangle ABC$. أكمل:



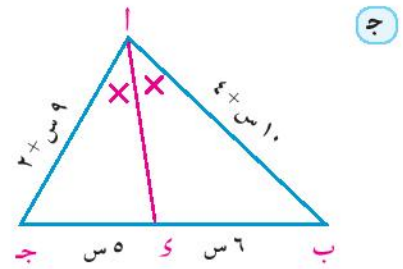
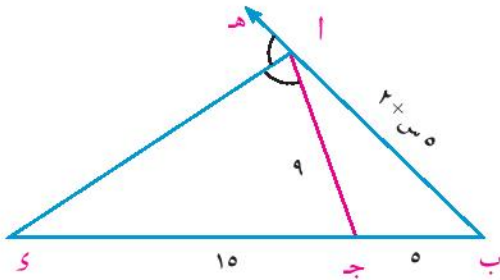
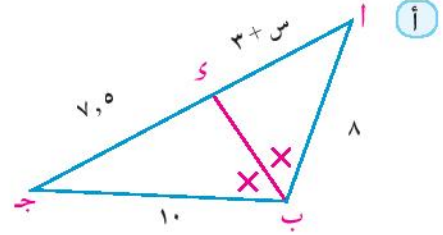
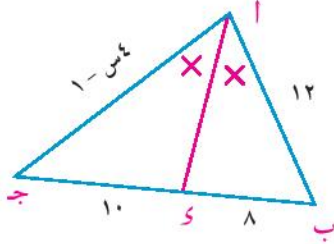
أ) $\frac{BI}{CI} = \frac{AI}{AI}$

ب) $\frac{BI}{CI} = \frac{AI}{AI}$

ج) $\frac{BI}{CI} = \frac{AI}{AI}$

د) $AB \times CI = BI \times AI$

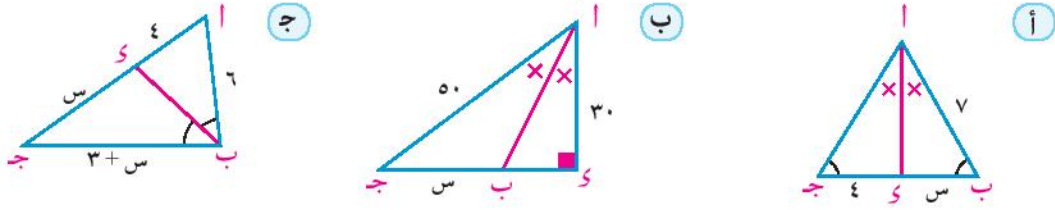
٢) في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



٣) ا ب ج مثلث محيطه ٢٧ سم، رسم $\overleftrightarrow{BI}$ ينصف $\triangle ABC$ ويقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في D .

إذا كان $AD = ٤$ سم، $BD = ٥$ سم، أوجد طول كل من AB ، BC ، AC

٤) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة s ، ثم أوجد محيط $\triangle اب ج$.



٥) $اب ج$ مثلث فيه $ا ب = ٨$ سم، $ا ج = ٤$ سم، $ب ج = ٦$ سم، رسم $ا و$ ينصف $\triangle$ ويقطع $ب ج$ في $ز$ ، ورسم $ا هـ$ ينصف $\triangle$ الخارجة ويقطع $ب ج$ في $هـ$ أوجد طول كل من $و هـ$ ، $ا و$ ، $ا هـ$.

٦) في كل من الأشكال التالية: أثبت أن $س ص // ب ج$



٧) في كل من الأشكال التالية، أثبت أن $ب هـ$ ينصف $\triangle اب ج$.



الوحدة



حساب المثلثات

Trigonometry

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- ✚ يتعرف الزاوية الموجهة.
- ✚ يتعرف الوضع القياسي للزاوية الموجهة.
- ✚ يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- ✚ يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستيني والدائري).
- ✚ يتعرف القياس الدائري للزوايا المركزية في دائرة.
- ✚ يستخدم الآلة الحاسبة في إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني والعكس.
- ✚ يتعرف الدوال المثلثية.
- ✚ يحدد إشارات الدوال المثلثية في الأرباع الأربعة.
- ✚ يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- ✚ يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- ✚ يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ✚ يتعرف الزوايا المنتسبة $(\theta \pm 180^\circ)$ ، $(\theta \pm 360^\circ)$.
- ✚ يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة: $(\theta \pm 90^\circ)$ ، $(\theta \pm 270^\circ)$.
- ✚ يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة: $\text{جا } \theta = \text{جتا } \phi$ $\leftarrow$ $\text{ظا } \theta = \text{ظتا } \phi$
- ✚ $\text{قا } \theta = \text{قتا } \phi$
- ✚ يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم النسب المثلثية لها.
- ✚ يتعرف التمثيل البياني لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- ✚ يستخدم الآلة الحاسبة العلمية في حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ✚ يمدج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتي تمثلها دوال مثلثية.
- ✚ يستخدم تكنولوجيا المعلومات في التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

المصطلحات الأساسية

Secant	قاطع	✚	دالة مثلثية	✚	قياس موجب	✚	Degree Measure	✚	قياس ستيني
Cotangent	ظل تمام	✚	Trigonometric Function	✚	Positive Measure	✚	Radian Measure	✚	قياس دائري
Circular Function	دالة دائرية	✚	Sine	✚	قياس سالب	✚	Directed Angle	✚	زاوية موجهة
Related Angles	الزوايا المنتسبة	✚	Cosine	✚	Negative Measure	✚		✚	زاوية نصف قطرية (راديان)
		✚	Tangent	✚	Equivalent Angle	✚	Radian	✚	
		✚	Cosecant	✚	Quadrant Angle	✚	Standard Position	✚	وضع قياسي
		✚		✚	زاوية ربعية	✚		✚	

دروس الوحدة

- الدرس (٤ - ١): الزاوية الموجهة.
الدرس (٤ - ٢): القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
الدرس (٤ - ٣): الدوال المثلثية.
الدرس (٤ - ٤): الزاوية المنتسبة.
الدرس (٤ - ٥): التمثيل البياني للدوال المثلثية.
الدرس (٤ - ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلي -
برامج رسم بياني.

نبذة تاريخية

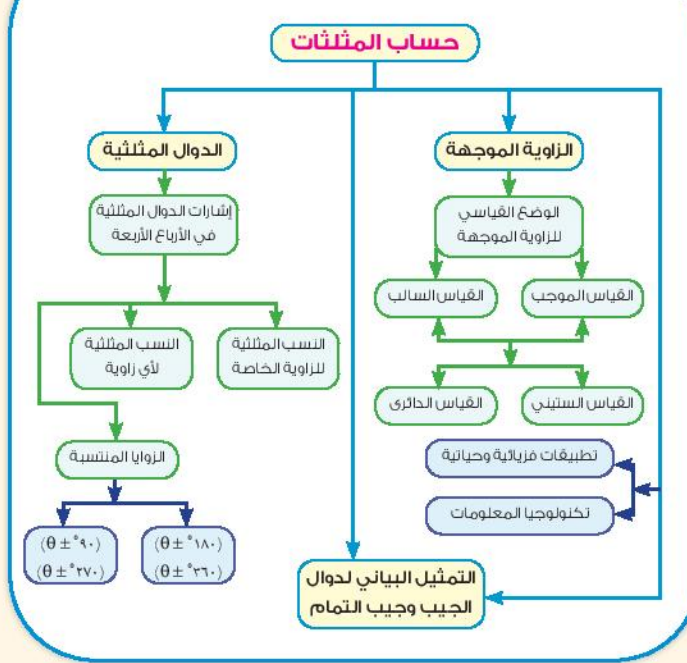
حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، فهو يختص بالحسابات الخاصة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه. وقد نشأ هذا العلم ضمن الرياضيات القديمة خصوصا فيما يتعلق بحسابات علم الفلك التي اهتم بها الإنسان القديم لما يتأمله ويشاهده في الكون من حركة الشمس والقمر والنجوم والكواكب.

ويعد الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك.

وكان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب، ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجاني (٩٤٠ - ٩٩٨ م) فى القرن العاشر الميلادى، وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكروى (نسبة إلى سطح الكرة) وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة، وأضافوا إليها أيضا الكثير. حتى أصبح حساب المثلثات متضمنا العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المعارف العلمية والعملية، وساهم فى دفع عجلة التقدم والازدهار.

مخطط تنظيمي للوحدة



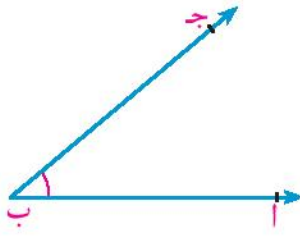
الزاوية الموجهة

Directed Angle

١ - ٤

سوف تتعلم

- مفهوم الزاوية الموجهة.
- الوضع القياسي للزاوية الموجهة.
- القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد.
- مفهوم الزوايا المتكافئة.



سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.
في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «رأس الزاوية»
والشعاعان $\vec{BA}$ ، $\vec{BC}$ **ضلعاً الزاوية**.
أي أن: $\vec{BA} \cup \vec{BC} = \angle A$ (ب ج)
وتكتب كذلك $\angle B$.

Degree Measure System

القياس الستيني للزاوية

علمت أن القياس الستيني يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية في الطول.
وبالتالي فإن:

- الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران بنهايتي أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)
 - تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءاً، كلُّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (')
 - تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءاً، كلُّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (//')
- أي أن: $1^\circ = 60'$ ، $1' = 60''$

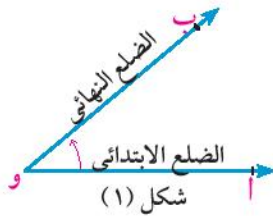
المصطلحات الأساسية

- Degree Measure قياس ستيني
- Directed angle زاوية موجهة
- Standard Position وضع قياسي
- Positive measure قياس موجب
- Negative measure قياس سالب
- Equivalent Angle زاوية مكافئة
- Quadrantal Angle زاوية ربعية



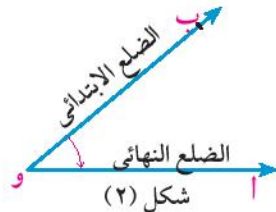
Directed Angle

الزاوية الموجهة



شكل (١)

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب ($\vec{OA}$ ، $\vec{OB}$) حيث
العنصر الأول $\vec{OA}$ هو الضلع الابتدائي للزاوية،
العنصر الثاني $\vec{OB}$ هو الضلع النهائي للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).



شكل (٢)

أما إذا كان الضلع الابتدائي $\vec{OB}$ ، الضلع النهائي $\vec{OA}$
فتكتب عندئذ ($\vec{OB}$ ، $\vec{OA}$) كما في شكل (٢).

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

تعريف
الزاوية الموجهة هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.

تفكير ناقد:

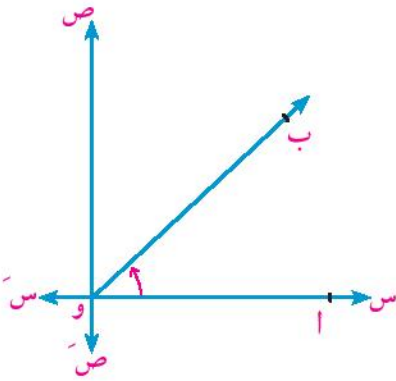
هل $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OA})$ ؟ فسر إجابتك.

Standard position of the directed angle

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

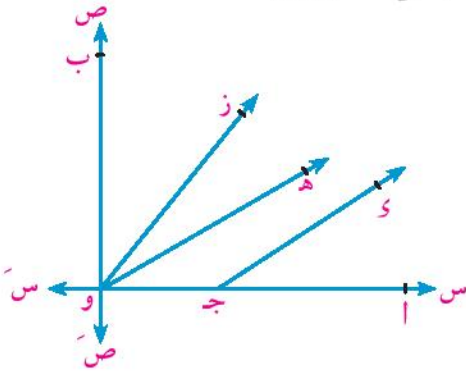
تكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد، وضلعا الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

هل $\angle AOB$ الموجهة في الوضع القياسي؟ فسر إجابتك.



تعبير شفهي

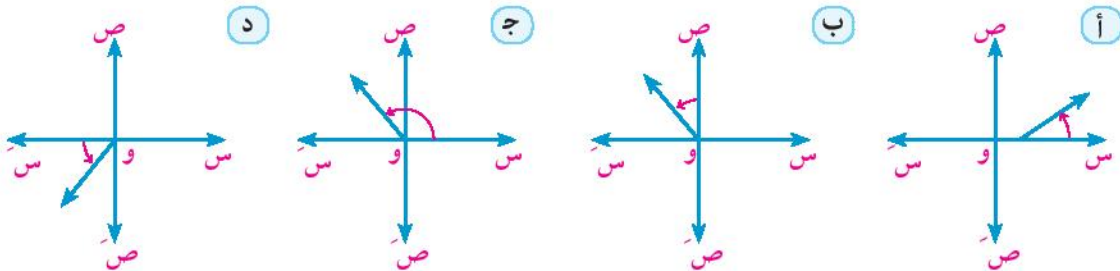
أيُّ من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.



- | | |
|-------------|-------------|
| أ (جأ، جـز) | ب (وأ، وهـ) |
| ج (وهـ، وأ) | د (وأ، وز) |
| هـ (وب، وز) | و (وأ، وب) |

حاول أن تحل

١ أي الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.

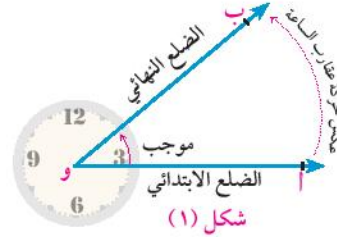
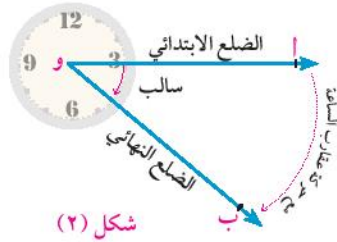


القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

Positive and negative measures of a directed angle

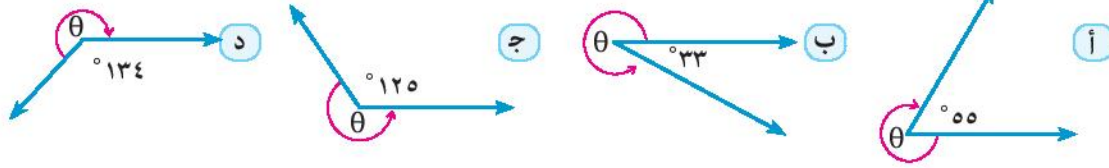
في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ إلى الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ إلى الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



مثال

١ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:



الحل

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي 360°

$$\text{أ } \theta = 360^\circ - 55^\circ = 305^\circ$$

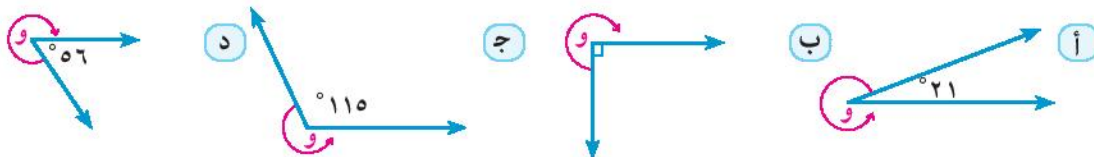
$$\text{ب } \theta = 360^\circ - 33^\circ = 327^\circ$$

$$\text{ج } \theta = 360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$$

$$\text{د } \theta = 360^\circ - 134^\circ = 226^\circ$$

حاول أن تحل

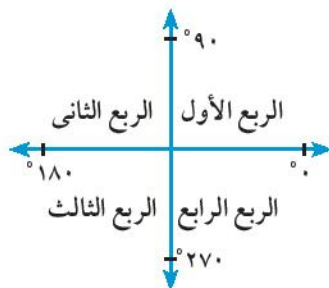
٢ أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:



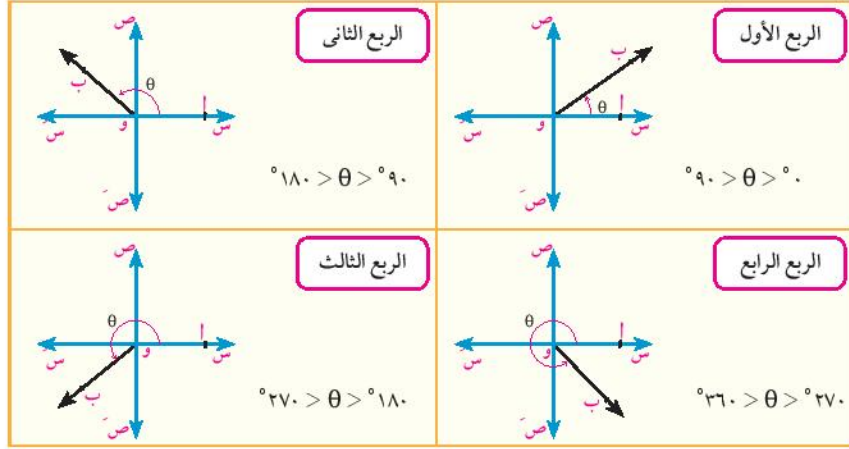
موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد:

Angle's position in the orthogonal coordinate plane

يقسم المستوى الإحداثي المتعامد إلى أربعة أرباع كما في الشكل المقابل.



إذا كانت $\angle$ أو θ الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو (θ) فإن ضلعها النهائي $\overrightarrow{OB}$ يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



إذا وقع الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة **بالزاوية الربعية (Quadrantal angle)**، فتكون الزوايا التي قياساتها $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ هي زوايا ربعية.

مثال

٢ عین الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

- أ 48° ب 217° ج 135° د 295° هـ 270°

الحل

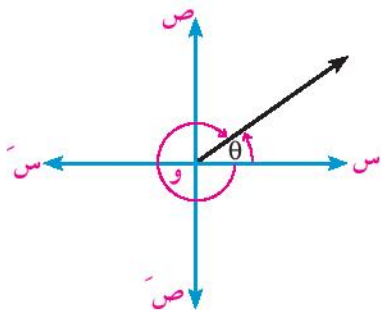
- أ $90^\circ > 48^\circ > 0^\circ$ ب $270^\circ > 217^\circ > 180^\circ$ ج $180^\circ > 135^\circ > 90^\circ$ د $360^\circ > 295^\circ > 270^\circ$ هـ زاوية ربعية.
- فهى تقع فى الربع الأول.
فهى تقع فى الربع الثالث.
فهى تقع فى الربع الثانى.
فهى تقع فى الربع الرابع.

حاول أن تحل

٣ عین الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

- أ 88° ب 152° ج 180° د 300° هـ 196°

ملاحظة:



- إذا كان (θ) هو القياس الموجب لزاوية موجهة
فإن القياس السالب لها يساوي $(\theta - 360^\circ)$
- وإذا كان $(-\theta)$ هو القياس السالب لزاوية موجهة
فإن القياس الموجب لها يساوي $(-\theta + 360^\circ)$

مثال

٣ عین القیاس السالب لزاوية قیاسها 270° .

الحل

القیاس السالب للزاوية $(270^\circ) = 360^\circ - 270^\circ = 80^\circ$

التحقیق: $360^\circ = 80^\circ + 270^\circ = |80^\circ| + |270^\circ|$

حاول أن تحل

٤ عین القیاس السالب للزاويا التي قیاساتها كالآتی:

٥ د 310°

٦ ج 210°

٧ ب 270°

٨ أ 32°

مثال

٤ عین القیاس الموجب للزاوية 230°

الحل

القیاس الموجب للزاوية $(230^\circ) = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$

التحقیق: $360^\circ = 130^\circ + 230^\circ = |130^\circ| + |230^\circ|$

حاول أن تحل

٥ عین القیاس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

٥ د 320°

٦ ج 90°

٧ ب 126°

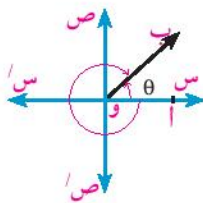
٨ أ 52°

٦ **الربط بالألعاب الرياضية:** يدور أحد لاعبي القرص بزاوية قیاسها 150° ارسم هذه الزاوية في الوضع القیاسی.

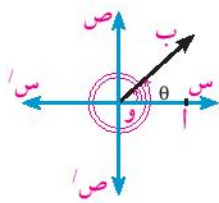
Equivalent angles

الزوايا المتكافئة

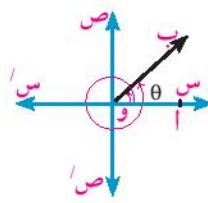
تأمل الأشكال الآتية وحدد الزاوية الموجهة (θ) في الوضع القیاسی لكل شكل. ماذا تلاحظ؟



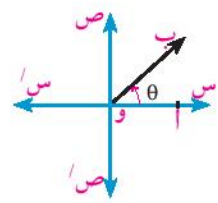
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

في الأشكال (١)، (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية (θ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائي وب.

شكل (١): الزاوية التي قیاسها θ في الوضع القیاسی.

شكل (٢): الزاويتان θ ، $360^\circ + \theta$ متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان θ ، $360^\circ \times 2 + \theta$ متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان θ ، $(\theta - 360^\circ) = 360^\circ - \theta$ متكافئتان.

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة قياسها θ في الوضع القياسي فإن جميع الزوايا التي قياساتها:
 $\theta + 1 \times 360^\circ$ أو $\theta + 2 \times 360^\circ$ أو $\theta + 3 \times 360^\circ$ أو أو $\theta + n \times 360^\circ$ حيث $n \in \mathbb{Z}$
 يكون لها نفس الضلع النهائي، وتسمى **زوايا متكافئة**.

مثال

٥ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركيتين في الضلع النهائي لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ 120° ب -230°

الحل

أ زاوية بقياس موجب: $120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$ (بإضافة 360°)

زاوية بقياس سالب: $120^\circ - 360^\circ = -240^\circ$ (بطرح 360°)

ب زاوية بقياس موجب: $-230^\circ + 360^\circ = 130^\circ$ (بإضافة 360°)

زاوية بقياس سالب: $-230^\circ - 360^\circ = -590^\circ$ (بطرح 360°)

فكر: هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

حاول أن تحل

٧ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركيتين في الضلع النهائي لكل من الزوايا الآتية:

أ 40° ب 150° ج -120° د -240° هـ -180°

٨ **اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية 75° في الوضع القياسي ما عدا الإجابة:

أ -280° ب -645° ج 280° د 430°

تحقق من فهمك

١ عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

أ 56° ب 320° ج 570° د 166° هـ 390°

٢ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

أ 43° ب 214° ج 120° د 90° هـ 312°

٣ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ -56° ب -210° ج -490° د -930° هـ -450°



تمارين ٤ - ١



١ أكمل:

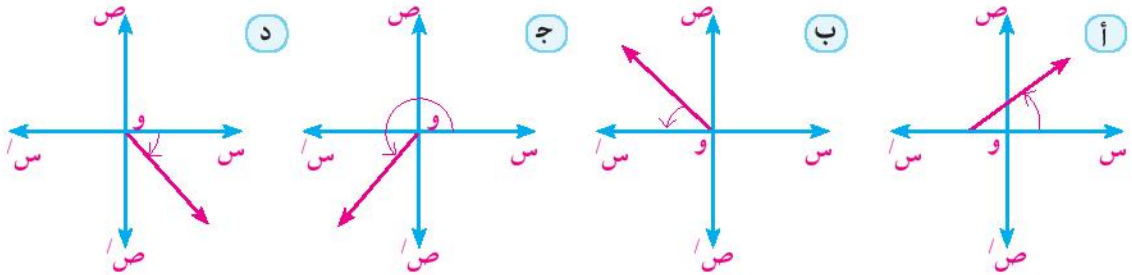
- أ تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسى إذا كان
 ب يقال للزاوية الموجهة في الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان
 ج تكون الزاوية موجبة إذا كان دوران الزاوية وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية
 د إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات تسمى
 هـ إذا كان θ قياس زاوية موجهة في الوضع القياسى، $n \in \mathbb{Z}$ فإن $(\theta + n \times 360^\circ)$ تسمى بالزوايا

و أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها 530° هو

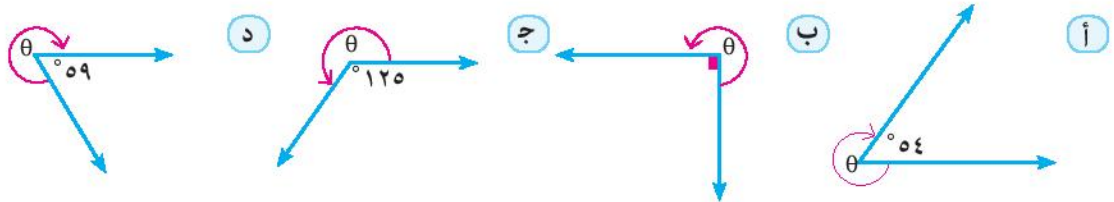
ز الزاوية التى قياسها 930° تقع فى الربع

ح أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها -690° هو

٢ أي من الزوايا الموجهة الآتية فى الوضع القياسى



٣ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال التالية:



٤ عین الربع الذی تقع فیہ کل من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

- أ °٢٤ ب °٢١٥ ج °٤٠ د °٢٢٠ هـ °٦٤٠

٥ ضع كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، موضحاً ذلك بالرسم:

- أ °٣٢ ب °١٤٠ ج °٨٠ د °١١٠ هـ °٣١٥

٦ عین أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ °٨٣ ب °١٣٦ ج °٩٠

- د °٢٦٤ هـ °٩٦٤ و °١٠٧٠

٧ عین أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ °١٨٣ ب °٢١٧ ج °٣١٥ د °٥٧٠

القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

Degree Measure and Radian Measure of an Angle

٢ - ٤

سوف تتعلم

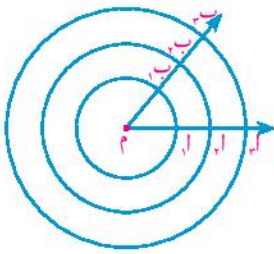
- مفهوم القياس الدائري للزاوية.
- العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.



سبق أن علمت أن القياس الستيني ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = ٦٠ دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = ٦٠ ثانية.
هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

Radian Measure

القياس الدائري



عمل تعاوني

١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما في الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة - ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا.

$$\text{أي أن: } \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}_1}{r_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}_2}{r_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}_3}{r_3} = \text{مقدار ثابت.}$$

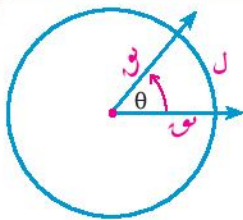
وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائري للزاوية.
القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$
ويرمز لها بالرمز (θ)

المصطلحات الأساسية

- قياس ستيني Degree Measure
- قياس دائري Radian Measure
- زاوية نصف قطرية Radian Angle

الأدوات والوسائل

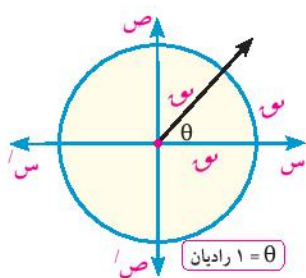
- آلة حاسبة علمية.



تعريف

إذا كان θ هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها r ، تقابل قوسًا من الدائرة طوله l فإن: $\theta = \frac{l}{r}$ من الزاوية نصف قطرية

$$\text{من التعريف نستنتج أن: } l = \theta \times r, \quad r = \frac{l}{\theta}$$



هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله
بساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

تفكير ناقد: هل القياس الدائري لزاوية مركزية يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسر إجابتك.

١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد لأقرب رقمين عشريين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله يساوي $\frac{\pi}{12}$

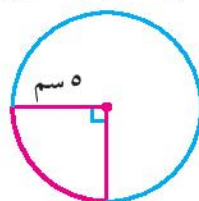
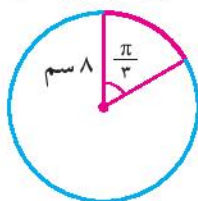
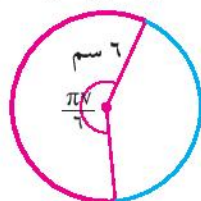
الحل

$$\mu \times \theta = 1$$

بالتعويض عن $\theta = \frac{\pi^0}{12}$ سم λ فيكون: $\lambda \times \frac{\pi^0}{12} = l$ $\therefore l \approx 47, 10$ سم

حاول أن تحل

١ أوجد طول القوس الذي يحصر الزاوية المعلومة في كل من الدوائر الآتية مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة .



Relation between degree measure and radian measure of an angle

تعلم أن: قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوي قياس قوسها.

أى أن: الزاوية المركزية التي قياسها الستيني 360° يكون طول قوسها 2π م

وفي دائرة الوحدة

فإن: π^2 (راديان) بالتقدير الدائري يكافئ 360° بالتقدير الستيني.

أى أن: π (راديان) يكافئ 180° $1^\circ \simeq \frac{180}{\pi}$ (راديان) $17^\circ 40' \simeq \frac{180}{\pi}$

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري θ وقياسها الستيني s فإن:

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\text{س}}{۱۸۰}$$

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة.

مثال

٢ حول ٣٠° إلى قياس دائري بدلالة π .

الحل

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\text{س}^\circ}{\text{۱۸۰}^\circ}$$

$$\frac{\pi}{7} = \frac{\pi \times 30}{180} = \theta$$

مثال

٣ حول قياس الزاوية ١، ٢ إلى قياس ستيني.

الحل

$$\frac{180 \times 1.2}{\pi} = \text{س}^{\circ}$$

$$^{\circ} 68^{\circ} 40' 18'' = 68,70493042^{\circ} = \text{س}^{\circ}$$

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي:

ابدأ

ابدأ → 1 . 2 × 1 8 0 ÷ π = ° , , ,

D **MATH**
68° 45" 17.77"

حاول أن تحل

٢ حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس سيني مقرباً الناتج لأقرب ثانية:

51.0- (5)

52.00 2

ب ۶۱

s. v. **i**



تمارين ٤ - ٢



أولاً: اختيار من متعدد:

- ١) الزاوية التي قياسها 60° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها:

أ) 120° ب) 240° ج) 300° د) 420°
- ٢) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع:

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع
- ٣) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع:

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع
- ٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى 180° (ن - ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية الخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوى:

أ) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{5}$ د) $\frac{\pi}{6}$
- ٥) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ قياسها الستيني يساوى:

أ) 10.5° ب) 21° ج) 42° د) 84°
- ٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو 48° فإن قياسها الدائري يساوى:

أ) 0.84 ب) 0.86 ج) 0.88 د) 0.90
- ٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها 30° يساوى:

أ) 2π سم ب) 3π سم ج) 4π سم د) 5π سم
- ٨) القوس الذى طوله 5π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى:

أ) 30° ب) 60° ج) 90° د) 180°
- ٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث 75° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{4}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوى:

أ) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{2}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالتالي:

- | | |
|----------------|--------------|
| أ ٢٢٥° | ب ٢٤٠° |
| ج ١٣٥° - | د ٣٠٠° |
| هـ ٣٩٠° | و ٧٨٠° |

١١ أوجد القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالتالي، مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

- | | | |
|---------------|---------------|-----------------------|
| أ ٥٦,٦° | ب ٢٥١٨° | ج ٤٨٠° ٥٠' ١٦٠" |
|---------------|---------------|-----------------------|

١٢ أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالتالي، مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| أ ٤٩,٥° | ب ٢٧,٢° | ج ٣١° - |
|---------------|---------------|---------------|

١٣ إذا كان θ قياس زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وتحصر قوسًا طوله ل:

- | | |
|---|---------------------|
| أ إذا كان ٢٠ سم، $\theta = ٢٠^\circ ١٥' ٧٨''$ أوجد ل. | (لأقرب جزء من عشرة) |
| ب إذا كان ل = ٢٧,٣ سم، $\theta = ٢٤^\circ ٧٨' ٠''$ أوجد ١٠. | (لأقرب جزء من عشرة) |

١٤ زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوسًا طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

١٥ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوسًا طوله ٨,٧ سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

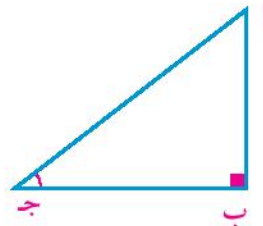
١٦ **الربط بالهندسة:** مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوي $\frac{\pi}{4}$ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاويته الثالثة.

سوف تتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.



سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة. وفي Δ أ ب ج القائم الزاوية في ب نجد:



$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

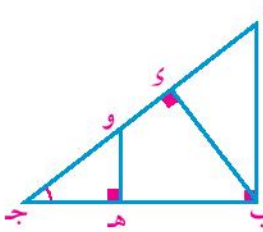
$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$$

١- في الشكل المقابل عبر عن

جا ج بثلاث نسب مختلفة.

★ هل تساوى هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟



المصطلحات الأساسية

Trigonometric Function	دالة مثلثية
Sine	جيب
Cosine	جيب تمام
Tangent	ظل
Cosecant	قاطع تمام
Secant	قاطع
Cotangent	ظل تمام

الاحظ أن:

المثلثات ب أ ج ، هـ و ج ، ز ب ج متشابهة (لماذا؟)

ومن التشابه يكون: $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{و ج}} = \frac{\text{ز ب}}{\text{ب ج}} = \text{جا ج}$ لماذا؟

أي أن: النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

٢- يمين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها هو سم

حيث: $\theta = (\angle \text{و ج})$

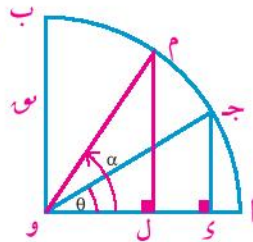
$$\text{جا } \theta = \frac{\text{ج ز}}{\text{و ج}}$$

وعندما يزداد $\theta = (\angle \text{و ج})$ إلى α

$$\text{فإن جا } \alpha = \frac{\text{م ل}}{\text{و ج}}$$

أي أن النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها،

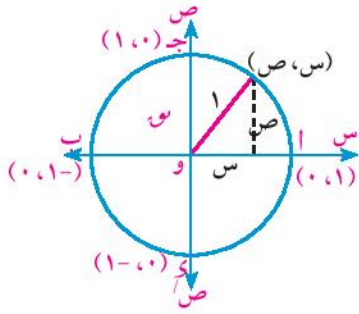
وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.



الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

The unit circle



في أى نظام إحداثى متعامد تسمى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (1، 0)، ب (0، 1)، وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (0، -1)، د (1، 0).

★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:

$$س \in [-1, 1] ، ص \in [-1, 1]$$

$$\text{حيث } س^2 + ص^2 = 1$$

نظرية فيثاغورث

The basic trigonometric functions of an angle

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س، ص) وقياسها θ يمكن تعريف الدوال الآتية:

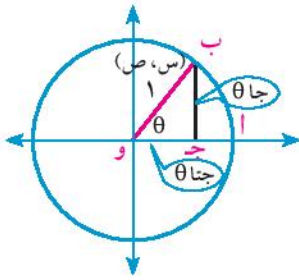
١- جيب تمام الزاوية θ = الإحداثى السينى للنقطة ب

$$\text{أى أن: جتا } \theta = س$$

٢- جيب الزاوية θ = الإحداثى الصادى للنقطة ب

$$\text{أى أن: جا } \theta = ص$$

٣- ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$



$$\text{أى أن: ظا } \theta = \frac{ص}{س} \text{ حيث } س \neq 0 ، \text{ ظا } \theta = \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} \text{ حيث جتا } \theta \neq 0$$

لاحظ أن: يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا θ ، جا θ)

إذا كانت النقطة جـ $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ مع دائرة الوحدة

$$\text{فإن: جتا } \theta = \frac{3}{5} ، \text{ جا } \theta = \frac{4}{5} ، \text{ ظا } \theta = \frac{4}{3}$$

The reciprocals of the basic trigonometric functions

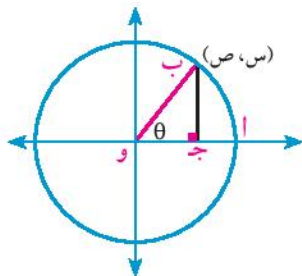
مقلوبات الدوال الأساسية

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س، ص) وقياسها θ توجد الدوال الآتية:

١- قاطع الزاوية θ : $\frac{1}{\text{جتا } \theta} = \frac{1}{س} = \text{قا } \theta$ حيث $س \neq 0$

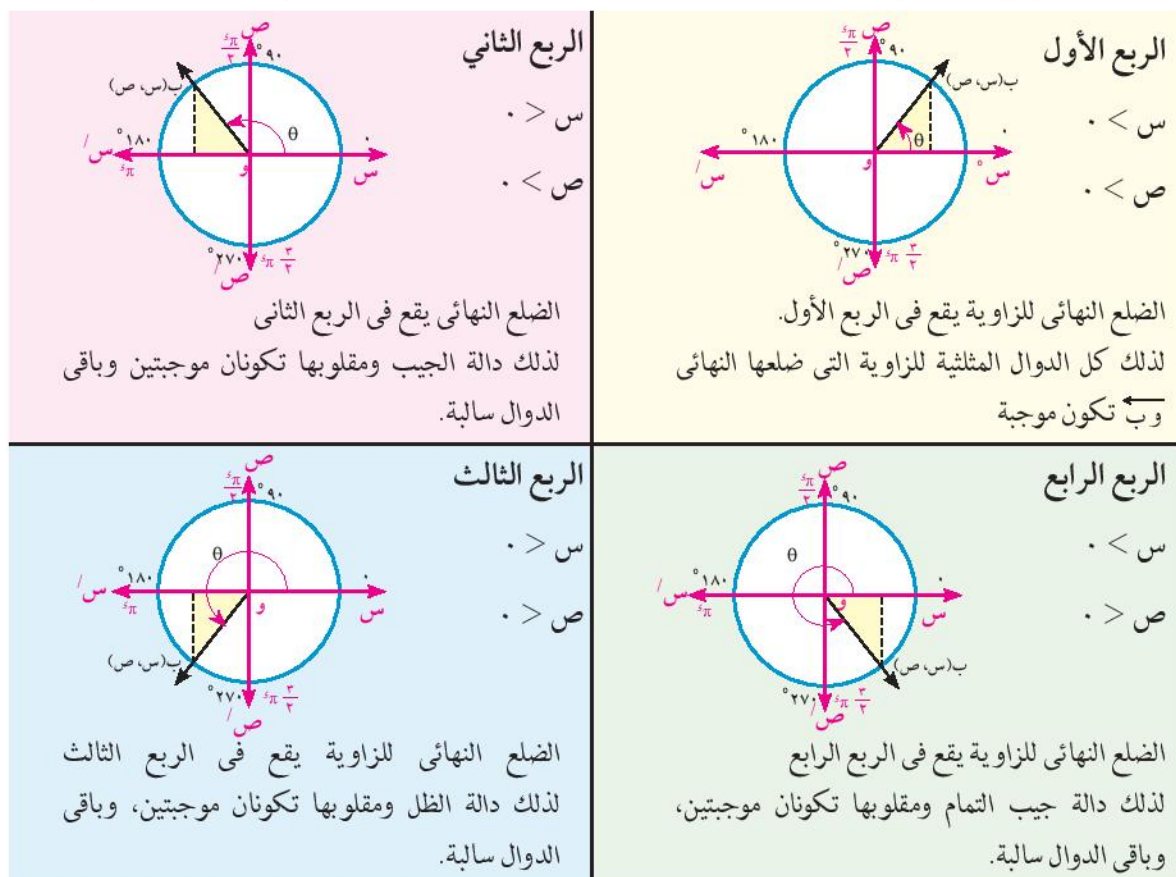
٢- قاطع تمام الزاوية θ : $\frac{1}{\text{جا } \theta} = \frac{1}{ص} = \text{قتا } \theta$ حيث $ص \neq 0$

٣- ظل تمام الزاوية θ : $\frac{1}{\text{ظا } \theta} = \frac{ص}{س} = \text{ظتا } \theta$ حيث $ص \neq 0$



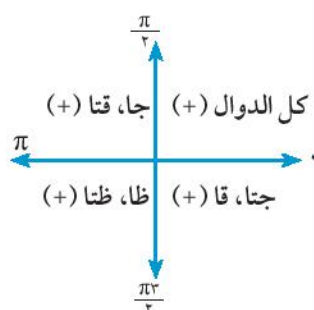
The signs of The Trigonometric Functions

إشارات الدوال المثلثية



ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها في الجدول الآتي:

الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية	الفترة التي يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	$0, \frac{\pi}{2}]$	+	+	+
الثاني	$\frac{\pi}{2}, \pi]$	+	-	-
الثالث	$\pi, \frac{3\pi}{2}]$	-	-	+
الرابع	$\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	-	+	-



مثال

١ عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

- أ) جا ١٣٠ ب) ظا ٣١٥ ج) جتا ٦٥٠ د) قا (-٣٠)

الحل

أ) الزاوية التي قياسها ١٣٠ تقع في الربع الثاني .∴ جا ١٣٠ موجبة

- ب) الزاوية التي قياسها 210° تقع في الربع الرابع
 ج) الزاوية التي قياسها 60° تكافئ زاوية قياسها $60^\circ - 360^\circ = 290^\circ$
 د) الزاوية التي قياسها 60° تقع في الربع الرابع
 هـ) الزاوية التي قياسها (-30°) تكافئ زاوية قياسها $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$
 و) الزاوية التي قياسها (-30°) تقع في الربع الرابع
 ز) قـا (-30°) موجبة.
 ح) ظـا 310° سالبة.

حاول أن تحل

- ١) عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:
 أ) جتا 210° ب) جا 740° ج) ظـا 300° د) جا 1230°

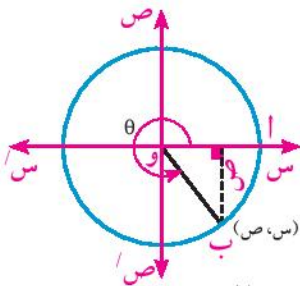
مثال

- ٢) إذا كانت $\triangle$ أو ب في وضعها القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب وقياسها θ .
 أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أو ب إذا كان إحداثيا النقطة ب هي:
 أ) $(1, 0)$ ب) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ج) $(-1, 0)$ د) $(0, 1)$
 حيث $\sin \theta < 0$ ، $\cos \theta < 0$

الحل

- أ) جتا $\theta = 0$ ، جا $\theta = 1$ ، ظـا $\theta = \frac{1}{0}$ (غير معرف)
 ب) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ، بالتعويض عن $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ فيكون $\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\therefore \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\therefore \tan \theta = 1$
 ج) $(-1, 0)$: $\sin \theta = 0$ ، $\cos \theta = -1$ ، $\tan \theta = 0$
 د) $(0, 1)$: $\sin \theta = 1$ ، $\cos \theta = 0$ ، $\tan \theta = \frac{1}{0}$ (غير معرف)
 ويكون: جتا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ظـا $\theta = 1$
 إذا كانت $270^\circ < \theta < 360^\circ$ وكان جا $\theta = -\frac{1}{3}$ أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها θ

الحل



- نفرض أن $\theta = (\triangle$ أو ب) حيث θ في الربع الرابع
 وأن إحداثيي النقطة ب هما $(\cos \theta, \sin \theta)$
 $\therefore \cos \theta = -\frac{1}{3}$ ، $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$
 $\therefore \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ ، $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -3$ ، $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

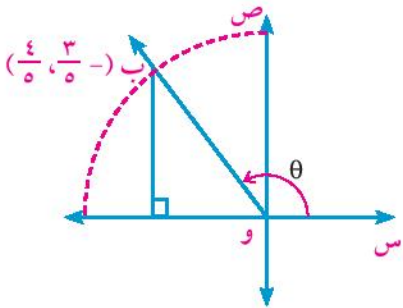
$$\text{جتا } \theta = \frac{12}{13} \text{ (لماذا؟) } \quad \text{طا } \theta = \frac{5}{13}$$

حاول أن تحل

٢ إذا كانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، جا $\theta = \frac{4}{5}$ أوجد جتا θ ، طا θ حيث θ زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة.

مثال

٤ إذا كانت الزاوية التي قياسها θ و المرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ .



الحل

$$\begin{aligned} \text{جا } \theta &= \frac{4}{5} & \text{جتا } \theta &= \frac{-3}{5} & \text{طا } \theta &= \frac{4}{-3} & \text{ظتا } \theta &= \frac{3}{4} \\ \text{قنا } \theta &= \frac{5}{4} & \text{قجا } \theta &= \frac{5}{-3} & \text{ظجا } \theta &= \frac{4}{-5} & \text{ظظا } \theta &= \frac{3}{-4} \end{aligned}$$

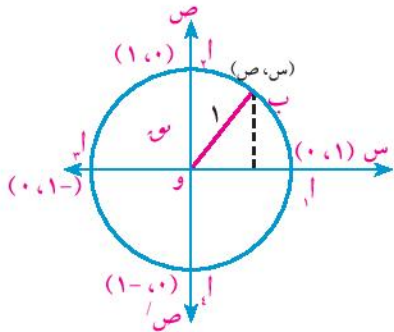
حاول أن تحل

٣ أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب حيث:

$$\begin{aligned} \text{أ} & \text{ب } (\frac{12}{13}, \frac{5}{13}) & \text{ب} & \text{ب } (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) & \text{ج} & \text{ب } (-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}) \end{aligned}$$

The trigonometric functions of some special angles

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محوري الإحداثيات في النقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,0)$ ، $(0,-1)$.

وكانت θ قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسي، والذي يقطع ضلعها النهائي و ب دائرة الوحدة في ب.

أولاً: إذا كانت $\theta = 0^\circ$ أو $\theta = 360^\circ$ فإن: ب $(1,0)$

ويكون: جتا $0^\circ = \text{جتا } 360^\circ = 1$ ، جا $0^\circ = \text{جتا } 360^\circ = \text{صفر}$ ،

ظا $0^\circ = \text{ظا } 360^\circ = \text{صفر}$

ثانياً: إذا كانت $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ فإن: ب $(0,1)$

جتا $90^\circ = \text{صفر}$ ، جا $90^\circ = 1$ ، ظا $90^\circ = \frac{1}{0}$ (غير معرف)

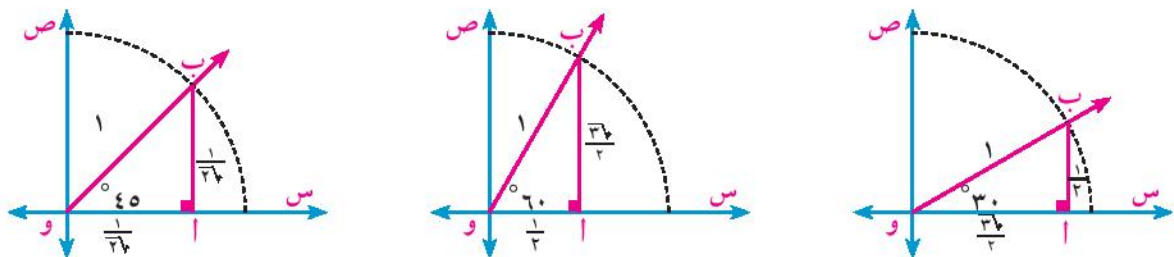
ثالثاً: إذا كانت $\theta = 180^\circ = \pi$ فإن: ب $(-1,0)$

جتا $180^\circ = -1$ ، جا $180^\circ = \text{صفر}$ ، ظا $180^\circ = \text{صفر}$

رابعاً: إذا كانت $\theta = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ فإن: ب (٠، -١) ، جتا $270^\circ = 0$ ، جا $270^\circ = -1$ ، ظا $270^\circ = \frac{-1}{0}$ (غير معرف)

حاول أن تحل

٤ في الأشكال التالية حدد إحداثي النقطة ب لكل شكل واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا 30° ، 60° ، 45°



مثال

٥ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جا 60° جتا 30° - جتا 60° جا 30° = جا $\frac{\pi}{4}$

الحل

تعلم أن جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ ، جتا $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جا $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا $60^\circ = \frac{1}{2}$

(١) الطرف الأيمن = $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

∴ $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ، جا $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(٢) الطرف الأيسر = جا $\frac{\pi}{4}$ = جا $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

من (١)، (٢) ∴ الطرفان متساويان.

حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة: جا 30° جا 60° - جتا 30° جتا 60° + جا 270° جتا 45°

تفكير ناقد: إذا كانت الزاوية التي قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي، وكان جتا $\theta = \frac{1}{2}$ ، جا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ هل من الممكن أن يكون $\theta = 240^\circ$ ؟ وضح ذلك.

تحقق من فهمك

أثبت صحة كل من المتساويات التالية:

أ ١ - ٢ جا 90° = جتا 180° ب جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا $\frac{\pi}{4}$ - جا $\frac{\pi}{4}$



تمارين ٣ - ٤



أولاً: الاختيار من متعدد:

١ إذا كان θ قياس زاوية في الوضع القياسي و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ فإن θ تساوي:

- أ $\frac{1}{3}$ ب $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ج $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د $\frac{2}{\sqrt{3}}$

٢ إذا كانت $\theta = \frac{1}{4}$ حيث θ زاوية حادة فإن θ تساوي

- أ 30° ب 45° ج 60° د 90°

٣ إذا كانت $\theta = -1$ ، جتا $\theta = 0$ فإن θ تساوي

- أ $\frac{\pi}{4}$ ب π ج $\frac{\pi}{2}$ د π^2

٤ إذا كانت قتا $\theta = 2$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوي

- أ 15° ب 30° ج 45° د 60°

٥ إذا كانت جتا $\theta = \frac{1}{4}$ ، جا $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن θ تساوي

- أ $\frac{\pi}{3}$ ب $\frac{\pi}{6}$ ج $\frac{\pi}{5}$ د $\frac{\pi}{11}$

٦ إذا كانت ظا $\theta = 1$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ تساوي

- أ 10° ب 30° ج 45° د 60°

٧ ظا $45^\circ +$ ظا $45^\circ -$ قا 60° تساوي

- أ صفر ب $\frac{1}{2}$ ج $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د ١

٨ إذا كانت جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوي

- أ $\frac{1}{2}$ ب $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ج $\frac{2}{\sqrt{3}}$ د $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

- أ $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ ب $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ج $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ د $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

١٠ إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاه فأوجد جميع الدوال المثلثية لهذه الزاوية في الحالات الآتية:

أ (١٣، -١٤) حيث $0 < \theta$

ب (١٣، -١٢) حيث $\frac{\pi}{2} > \theta > \pi$

١١ اكتب إشارات النسب المثلثية الآتية:

أ جا 240°

ب ظا 360°

ج قتا 410°

د ظلثا $\frac{\pi}{4}$

هـ قا $\frac{\pi}{4}$

و ظلثا $\frac{\pi}{9}$

١٢ أوجد قيمة ما يأتي:

أ جتا $\frac{\pi}{4} \times$ جتا $0 +$ جا $\frac{\pi}{2} \times$ جا $\frac{\pi}{2}$

ب ظا $30^\circ + 2$ جا $45^\circ +$ جتا 90°

١٣ **اكتشف الخطأ:** طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج 2 جا 45° .

إجابة أحمد

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = 45^\circ$$

إجابة كريم

$$2 \text{ جا } 45^\circ = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

أى الإجابتين صحيح؟ ولماذا؟

١٤ **تفكير ناقد:** إذا كانت θ قياس زاوية مرسومة في الوضع القياسي، حيث ظلثا $\theta = -1$ ، قتا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. هل من الممكن أن يكون $\theta = \frac{\pi}{4}$ ؟ فسر إجابتك.

سوف تتعلم

- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $\theta \pm 180^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $\theta - 360^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $\theta \pm 90^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $\theta \pm 270^\circ$
- الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة:

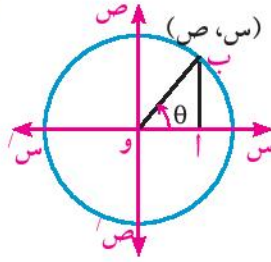
جا α = جتا β

قا α = قتا β

طا α = ظتا β

المصطلحات الأساسية

زاويتان منتسبتان Related Angles



سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه .
يبيّن الشكل المقابل الزاوية الموجهة أ ب في الوضع
القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة
ب(س، ص). قياسها θ حيث $90^\circ > \theta > 0^\circ$

عيّن النقطة ب' صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثيها.

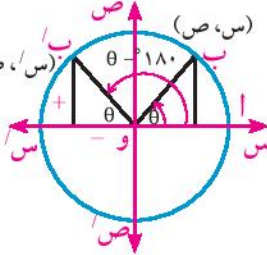
ما قياس $\angle$ أ ب'؟ هل $\angle$ أ ب' في الوضع القياسي؟

١- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - 180^\circ)$

من الشكل المقابل ب' (س'، ص') صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس حول

محور الصادات فيكون س' = -س، ص' = ص

لذلك فإن:



جا $(\theta - 180^\circ) = -\text{جا } \theta$ ، قتا $(\theta - 180^\circ) = \text{قتا } \theta$

جتا $(\theta - 180^\circ) = -\text{جتا } \theta$ ، قا $(\theta - 180^\circ) = \text{قا } \theta$

ظا $(\theta - 180^\circ) = -\text{ظا } \theta$ ، ظتا $(\theta - 180^\circ) = \text{ظتا } \theta$

فمثلاً: جتا $120^\circ = \text{جتا } (120^\circ - 180^\circ) = -\text{جتا } 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{جا } 135^\circ = \text{جا } (135^\circ - 180^\circ) = \text{جا } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

حاول أن تحل

١ أوجد ظا 135° ، جا 120° ، جتا 150°

لاحظ أن: $180^\circ = (\theta - 180^\circ) + \theta$

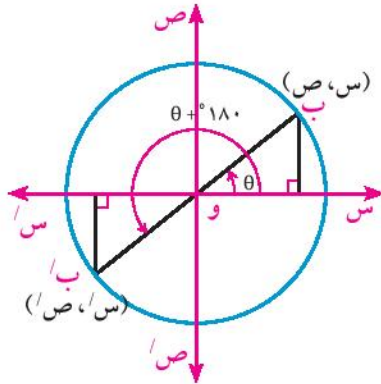
يقال إن الزاويتين θ ، $\theta - 180^\circ$ زاويتان منتسبتان.

تعريف
الزاويتان المنتسبتان: هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع
قياسيهما يساوي عددًا صحيح من القوائم.

٢- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta + ١٨٠)$

في الشكل المقابل نجد:

ب/ (س، /ص) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس في نقطة الأصل و فيكون س' = -س ، ص' = -ص
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{جا } \theta & \text{قتا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{قتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{جتا } \theta & \text{قا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{قا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + ١٨٠) &= \text{ظا } \theta & \text{ظلتا } (\theta + ١٨٠) &= \text{ظلتا } \theta \end{aligned}$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \text{جا } ٢١٠^\circ &= \text{جا } (٣٠^\circ + ١٨٠^\circ) = -\text{جا } ٣٠^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{جتا } ٢٢٥^\circ &= \text{جتا } (٤٥^\circ + ١٨٠^\circ) = -\text{جتا } ٤٥^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ظا } ٢٤٠^\circ &= \text{ظا } (٦٠^\circ + ١٨٠^\circ) = \text{ظا } ٦٠^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

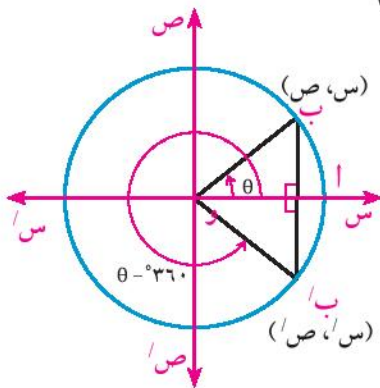
حاول أن تحل

٢ أوجد جا ٢٢٥ ، جتا ٢١٠ ، قا ٦٠٠ ، ظلتا ٢٢٥.

٣- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - ٣٦٠)$

في الشكل المقابل:

ب/ (س، /ص) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس حول محور السينات فيكون س' = س ، ص' = -ص
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - ٣٦٠) &= \text{جا } \theta & \text{قتا } (\theta - ٣٦٠) &= -\text{قتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - ٣٦٠) &= \text{جتا } \theta & \text{قا } (\theta - ٣٦٠) &= -\text{قا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - ٣٦٠) &= -\text{ظا } \theta & \text{ظلتا } (\theta - ٣٦٠) &= \text{ظلتا } \theta \end{aligned}$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \text{جا } ٣٣٠^\circ &= \text{جا } (٣٠^\circ - ٣٦٠^\circ) = \text{جا } ٣٠^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{جتا } ٣١٥^\circ &= \text{جتا } (٤٥^\circ - ٣٦٠^\circ) = \text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٣ أوجد: جا ٣١٥ ، قتا ٣١٥ ، ظا ٣٣٠ ، ظا ٣٠٠.

لاحظ أن

الدوال المثلثية للزاوية $(\theta -)$ هي نفسها الدوال المثلثية للزاوية $(\theta - ٣٦٠)$

تفكير ناقد: كيف يمكنك إيجاد جا (-٤٥) ، جتا (-٦٠) ، ظا (-٣٠) ، جا -٦٩٠ .

مثال

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة المقدار

$$\text{جا } ١٥٠^\circ \text{ جتا } (-٣٠^\circ) + \text{جتا } ٩٣٠^\circ \text{ ظتا } ٢٤٠^\circ$$

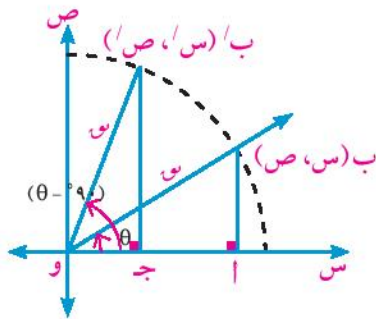
الحل

$$\begin{aligned} \text{جا } ١٥٠^\circ &= \text{جا } (١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = \text{جا } ٣٠^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{جتا } (-٣٠^\circ) &= \text{جتا } (٣٦٠^\circ + ٣٠^\circ) = \text{جتا } ٣٦٠^\circ = ١ \\ \text{جتا } ٩٣٠^\circ &= \text{جتا } (٩٠^\circ \times ٢ - ٣٠^\circ) = \text{جتا } ١٥٠^\circ \\ \text{وتكون جتا } ١٥٠^\circ &= \text{جتا } (١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = -\text{جتا } ٣٠^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ظتا } ٢٤٠^\circ &= \text{ظتا } (١٨٠^\circ + ٦٠^\circ) = -\text{ظتا } ٦٠^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{المقدار} &= \frac{1}{2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٤ أثبت أن $\text{جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } (-٣٠^\circ) + \text{جا } ١٥٠^\circ \text{ جتا } (-٢٤٠^\circ) = ١$

٤- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - ٩٠^\circ)$



يبين الشكل المجاور جزءاً من دائرة مركزها و. الزاوية التي قياسها θ مرسومة في الوضع القياسى لدائرة طول نصف قطرها و.

من تطابق المثلثين و أ ب ، و ج ب ؛
نجد أن: $\text{س} = \text{ص}$ ، $\text{ص} = \text{س}$

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta - ٩٠^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - ٩٠^\circ) &= \text{جتا } \theta ، \text{ قتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - ٩٠^\circ) &= \text{جا } \theta ، \text{ قتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{قتا } \theta \\ \text{ظتا } (\theta - ٩٠^\circ) &= \text{ظتا } \theta ، \text{ ظتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

مثال

٢ إذا كانت الزاوية التي قياسها θ في الوضع القياسى، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

فأوجد الدوال المثلثية: $\text{جا } (\theta - ٩٠^\circ)$ ، $\text{ظتا } (\theta - ٩٠^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{جا } (\theta - 90^\circ) &= \text{جتا } \theta \\ \therefore \text{ظنا } (\theta - 90^\circ) &= \text{ظا } \theta \\ \therefore \text{جا } (\theta - 90^\circ) &= \frac{3}{5} \\ \therefore \text{ظنا } (\theta - 90^\circ) &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

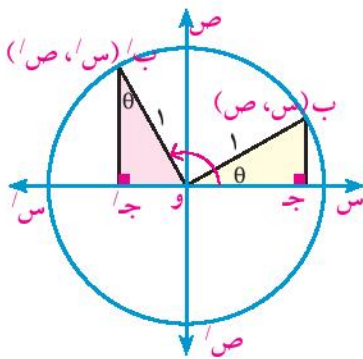
حاول أن تحل

٥ في المثال السابق أوجد جتا $(\theta - 90^\circ)$ ، قتا $(\theta - 90^\circ)$

٥- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta + 90^\circ)$

من تطابق المثلثين ب/ج/و ، وجب

نجد أن $\text{ص} = \text{ص}$ ، $\text{س} = -\text{س}$



ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta + 90^\circ)$ كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 90^\circ) &= \text{جتا } \theta \quad , \quad \text{قتا } (\theta + 90^\circ) = \text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{جا } \theta \quad , \quad \text{قا } (\theta + 90^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{ظنا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظنا } \theta \quad , \quad \text{ظا } (\theta + 90^\circ) = \text{ظا } \theta \end{aligned}$$

مثال

٣ إذا كانت الزاوية التي قياسها θ في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ أوجد الدوال المثلثية ظا $(\theta + 90^\circ)$ ، قتا $(\theta + 90^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظنا } \theta \\ \therefore \text{قتا } (\theta + 90^\circ) &= \text{قا } \theta \\ \therefore \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \therefore \text{قتا } (\theta + 90^\circ) &= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

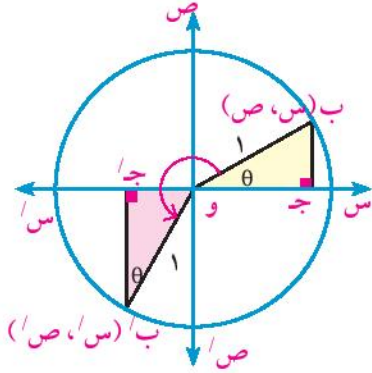
حاول أن تحل

٦ في المثال السابق أوجد: جا $(\theta + 90^\circ)$ ، قا $(\theta + 90^\circ)$

٦- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - 270^\circ)$

من تطابق المثلثين ب/ج' و ، و ج ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta - 270^\circ)$ كالآتى:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta , \quad \text{قتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 270^\circ) &= -\text{جا } \theta , \quad \text{قا } (\theta - 270^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 270^\circ) &= \text{ظتا } \theta , \quad \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظا } \theta \end{aligned}$$

مثال

٤ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ فأوجد الدوال المثلثية: جتا $(\theta - 270^\circ)$ ، ظتا $(\theta - 270^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{جتا } (\theta - 270^\circ) &= -\text{جا } \theta & \therefore \text{جتا } (\theta - 270^\circ) &= -\frac{1}{3} \\ \therefore \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) &= \text{ظتا } \theta & \therefore \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

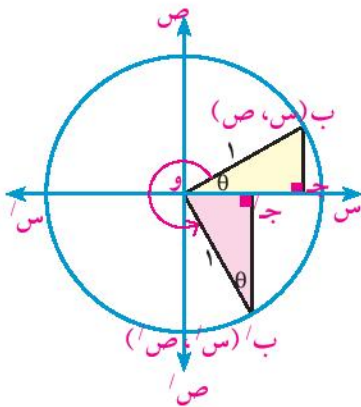
حاول أن تحل

٧ فى المثال السابق أوجد ظا $(\theta - 270^\circ)$ ، قتا $(\theta - 270^\circ)$

٧- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta + 270^\circ)$

من تطابق المثلثين: ب/ج' و ، و ج ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta + 270^\circ)$ كالآتى:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta , \quad \text{قتا } (\theta + 270^\circ) = \text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{جا } \theta , \quad \text{قا } (\theta + 270^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{ظتا } \theta , \quad \text{ظتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{ظا } \theta \end{aligned}$$

مثال

٥ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ فأوجد الدوال المثلثية: جا $(\theta + 270^\circ)$ ، قا $(\theta + 270^\circ)$

$$\begin{aligned} \therefore \text{جا } (\theta + ^\circ 270) = -\text{جتا } \theta \\ \therefore \text{قا } (\theta + ^\circ 270) = \text{قتا } \theta \\ \therefore \frac{\sqrt{5}}{3} = \text{جا } (\theta + ^\circ 270) \\ \frac{2}{3} = \text{قا } (\theta + ^\circ 270) \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٨ في المثال السابق أوجد ظلًا $(\theta + ^\circ 270)$ ، قتا $(\theta + ^\circ 270)$.

الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة: (جا α = جتا β ، قا α = قتا β ، ظا α = ظلًا β)

General solution of trigonometric equations as the form $[\tan \alpha = \cot \beta, \sec \alpha = \csc \beta, \sin \alpha = \cos \beta]$

فكر g ناقش

سبق أن درست أنه إذا كان α, β هما قياسا زاويتين متتامتين (أي مجموع قياسيهما 90°) فإن جا α = جتا β ، قا α = قتا β ، ظا α = ظلًا β ومن ذلك فإن $\alpha + \beta = 90^\circ$ حيث α, β زاويتان حادتان فإذا كانت جا θ = جتا 105° فما هي قيم زاوية θ المتوقعة؟

تعلم

١- إذا كان جا α = جتا β (حيث α, β قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \beta - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:}$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:}$$

وبإضافة $2\pi n$ (حيث $n \in \mathbb{Z}$) إلى الزاوية $\frac{\pi}{2}$ فإن:

(حيث $n \in \mathbb{Z}$)، بالمثل:

$$\text{عندما جا } \alpha = \text{جتا } \beta \quad \text{فإن } \alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

(حيث $n \in \mathbb{Z}$)،

$$\text{عندما قتا } \alpha = \text{قتا } \beta \quad \text{فإن } \alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

٢- إذا كان ظا α = ظلًا β (حيث α, β قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \beta - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:}$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:}$$

وبإضافة $2\pi n$ (حيث $n \in \mathbb{Z}$) إلى الزاويتين $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ فإن:

$$\text{عندما ظا } \alpha = \text{ظلًا } \beta \quad \text{فإن } \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

(حيث $n \in \mathbb{Z}$)،

$$\alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

مثال

٦ حل المعادلة: جا $\theta_2 = \theta$ جتا θ

الحل

المعادلة: جا $\theta_2 = \theta$ جتا θ

من تعريف المعادلة (ن $\exists$ ص) $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta \pm \theta_2$

(١) إما $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta + \theta_2$ أى أن: $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta_2$

بقسمة الطرفين على ٣ $\pi \frac{2}{4} + \frac{\pi}{4} = \theta$

(٢) أو $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta - \theta_2$ أى أن: $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$

حل المعادلة هو: $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$ أو $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$

حاول أن تحل

٩ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ) جا $\theta_2 = \theta$ جتا θ ب) جا $\theta_2 = (\theta - \frac{\pi}{4})$ ج) جتا $\theta = \theta$

١٠ اكتشف الخطأ: فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزيد إيجاد قيمة جا $(\frac{\pi}{4} - \theta)$ فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر ذلك.

إجابة زياد

$$\begin{aligned} \text{جا } (\frac{\pi}{4} - \theta) &= \text{جا } [(\theta - \frac{\pi}{4}) -] \\ &= -\text{جا } (\theta - \frac{\pi}{4}) \\ &= -(-\text{جتا } \theta) = \text{جتا } \theta \end{aligned}$$

إجابة كريم

$$\begin{aligned} \text{جا } (\frac{\pi}{4} - \theta) &= \text{جا } (\frac{\pi}{4} - \theta + \pi_2) \\ &= \text{جا } (\theta + \frac{\pi_2}{4}) \\ &= -\text{جتا } \theta \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ والى تحقق كل من المعادلات الآتية :

أ) جا $\theta - \theta = 0$ ب) قتا $(\frac{\pi}{4} - \theta) = \theta$ ج) جتا $\theta_2 = (\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$



تمارين ٤ - ٤



أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ جتا $(\theta + 180^\circ) = \dots$ ٢ ظا $(\theta - 180^\circ) = \dots$
 ٣ قتا $(\theta - 360^\circ) = \dots$ ٤ جا $(\theta + 360^\circ) = \dots$
 ٥ جا $(\theta + 90^\circ) = \dots$ ٦ ظتا $(\theta - 90^\circ) = \dots$
 ٧ قا $(\theta + 270^\circ) = \dots$ ٨ جتا $(\theta - 270^\circ) = \dots$

ثانياً: أكمل كلاً مما يأتي بقياس زاوية حادة

- ٩ جا $20^\circ = \dots$ ١٠ جتا $67^\circ = \dots$
 ١١ ظا $42^\circ = \dots$ ١٢ قتا $13^\circ = \dots$
 ١٣ إذا كان ظتا $\theta = \theta_2$ حيث $\theta > 0^\circ$ فإن $\theta > 90^\circ$ ()
 ١٤ إذا كان جا $\theta = \theta_2$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن $\theta = \dots$
 ١٥ إذا كان قا $\theta = \theta_2$ () فإن ظتا $\theta = \dots$
 ١٦ إذا كان ظا $\theta_2 = \theta_3$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ فإن $\theta = \dots$
 ١٧ إذا كان جتا $\theta = \theta_2$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا $\theta_3 = \dots$

ثالثاً: الاختيار من متعدد:

- ١٨ إذا كانت ظا $(\theta + 180^\circ) = 1$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوي
 أ 40° ب 30° ج 60° د 130°
 ١٩ إذا كان جتا $\theta_2 = \theta_3$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ فإن جتا θ_2 تساوي
 أ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ب $\frac{1}{4}$ ج $\frac{\sqrt{3}}{4}$ د 1
 ٢٠ إذا كان جا $\alpha = \beta$ جتا β ، حيث α, β زاويتان حادتان فإن ظا $(\beta + \alpha)$ تساوي
 أ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ب 1 ج $\sqrt{3}$ د غير معروف
 ٢١ إذا كان جا $\theta_2 = \theta_4$ جتا θ_4 حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا $(\theta_2 - 90^\circ)$ تساوي
 أ $1 -$ ب $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ج 1 د $\sqrt{3}$
 ٢٢ إذا كان جتا $(\theta + 90^\circ) = \frac{1}{4}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوي
 أ 150° ب 210° ج 240° د 330°

رابعاً: أجب عن الأسئلة الآتية

٢٣ أوجد إحدى قيم θ حيث $0 < \theta < 90^\circ$ التي تحقق كلاً من الآتي:

أ $\sin(\theta + 10^\circ) = \sin(\theta - 20^\circ)$

ب $\cos(\theta + 20^\circ) = \cos(\theta + 10^\circ)$

ج $\tan(\theta + 20^\circ) = \tan(\theta + 30^\circ)$

د $\sin \theta = \frac{20 + \theta}{40 + \theta}$

٢٤ أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\sin 10^\circ$

ب $\cos 225^\circ$

ج $\cos 300^\circ$

د $\tan 780^\circ$

هـ $\cos \frac{11\pi}{6}$

و $\sin \frac{7\pi}{4}$

ز $\tan \frac{2\pi}{3}$

ح $\sin \frac{7\pi}{4}$

٢٥ إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ والمرسومة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة ب $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ فأوجد:

أ $\sin(\theta + 180^\circ)$

ب $\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

ج $\tan(\theta - 360^\circ)$

د $\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

Graphing of Trigonometric Functions

٥ - ٤

سوف تتعلم

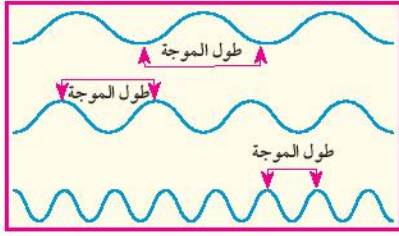
سوف تتعلم:

رسم دالة الجيب واستنتاج

خواصها.

رسم دالة جيب التمام واستنتاج

خواصها.



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف في طول الموجة. كما تستخدم في التصوير الطبي، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل في أعماق المحيطات. وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:

Represent sine function graphically التمثيل البياني لدالة الجيب

عمل تعاوني

١ أكمل الجدول التالي بالاشتراك مع زملائك:

θ	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
جا θ	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	٠	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-١

Sine Function دالة الجيب

Cosine Function دالة جيب التمام

Maximum Value قيمة عظمى

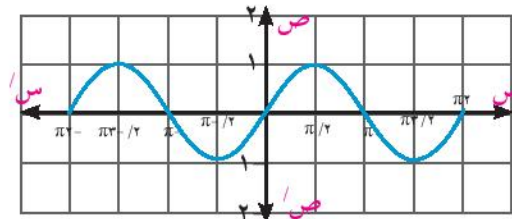
Minimum Value قيمة صغرى

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولاً آخر مستخدماً قيم المعكوس الجمعي للقيم الموجودة في الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التي حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



٦ هل لاحظت وجود قيم عظمى أو قيم صغرى لهذا المنحنى. فسر إجابتك؟

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة رسومية

حاسب آلى

برامج رسومية

Properties of the sine function

خواص دالة الجيب

في الدالة د حيث $\theta = (\theta)$ فإن:

- ★ مجال دالة الجيب هو $[-\infty, \infty]$ ، ومداها $[-1, 1]$
- ★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة 2π أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة $[0, 2\pi]$ إلى اليمين أو اليسار 2π وحدة، 4π وحدة، 6π وحدة، ... وهكذا.
- ★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$
- ★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى -١ وتحدث عند النقاط $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$

Represent cosine function graphically

التمثيل البياني لدالة جيب التمام

عمل تعاوني

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

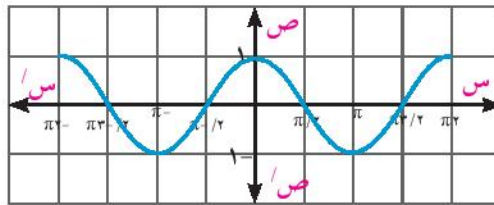
θ	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
جتا θ	١	٠,٨								

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولاً آخر مستخدماً قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



Properties of cosine function

خواص دالة جيب التمام

في الدالة د حيث $\theta = (\theta)$ جتا θ فإن:

- ★ مجال دالة جيب التمام هو $[-\infty, \infty]$ ، ومداها $[-1, 1]$
- ★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة 2π ، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة $[0, 2\pi]$ إلى اليمين أو اليسار 2π وحدة، 4π وحدة، 6π وحدة، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوى ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \pm 2\pi$ ن $\Rightarrow$ ص

★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوى -١ وتحدث عند النقاط $\theta = \pm \pi$ ن $\Rightarrow$ ص

مثال

① **الربط بالفيزياء:** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعاً نتيجة حركة المد والجذر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجذر في ذلك اليوم تخضع للعلاقة $f = 6$ جا (١٥ ن) $+ 10$ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعاً لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا. ارسم مخططاً بيانياً يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

الحل

العلاقة بين الزمن (ن) بالساعات وعمق المياه (ف) بالأمتار هى

من العلاقة: $f = 6$ جا (١٥ ن) $+ 10$

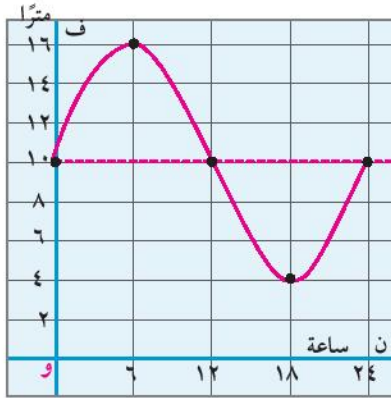
عندما $n = 0$ ف $f = 6$ جا (١٥ $\times 0$) $+ 10 = 10$ جا $f = 10$ جا $0 = 10$

عندما $n = 6$ ف $f = 6$ جا (١٥ $\times 6$) $+ 10 = 16$ جا $f = 16$ جا $90^\circ = 16$

عندما $n = 12$ ف $f = 6$ جا (١٥ $\times 12$) $+ 10 = 10$ جا $f = 10$ جا $180^\circ = 10$

عندما $n = 18$ ف $f = 6$ جا (١٥ $\times 18$) $+ 10 = 4$ جا $f = 4$ جا $270^\circ = 4$

عندما $n = 24$ ف $f = 6$ جا (١٥ $\times 24$) $+ 10 = 10$ جا $f = 10$ جا $360^\circ = 10$



ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	١٠	١٦	١٠	٤	١٠

من الجدول نجد أن: عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار

عندما $n = 0, 12, 24$ ساعة

حاول أن تحل

① فى المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

تحقق من فهمك

حيث $s \in [0, 2\pi]$

حيث $s \in [0, 2\pi]$

① ارسم منحنى الدالة $v = 3 \cos s$

② ارسم منحنى الدالة $v = 2 \cos s$



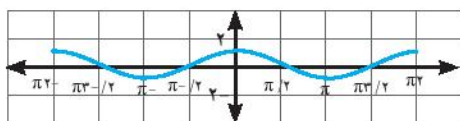
تمارين ٤ - ٥



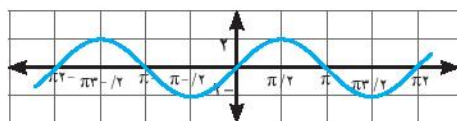
أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ مدى الدالة $y = \sin(\theta)$ حيث θ هو
.....
- ٢ مدى الدالة $y = \cos(\theta)$ حيث θ هو
.....
- ٣ القيمة العظمى للدالة $y = \sin(\theta)$ حيث θ هو
.....
- ٤ القيمة الصغرى للدالة $y = \cos(\theta)$ حيث θ هو
.....

ثانياً: اكتب قاعدة كل دالة مثلثية بجوار الشكل المناظر لها.



شكل (٢) القاعدة هي:



شكل (١) القاعدة هي:

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٥ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى، ثم احسب المدى لكل دالة من الدوال الآتية:

أ

$$y = \sin \theta$$

ب

$$y = \cos 2\theta$$

ج

$$y = \sin \frac{3}{4}\theta$$

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value
of one of its Trigonometric Ratios

٦ - ٤

سوف تتعلم



إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة
مثلثية.

علمت أنه إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ فإنه يمكن إيجاد قيمة $\sin \theta$ بمعلومية الزاوية θ ،
وعندما تعطى قيمة $\sin \theta$ فهل يمكنك إيجاد قيمة θ ؟



إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$

فإنه يمكن إيجاد قيم θ إذا علمت قيمة $\sin \theta$.

مثال

١ أوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق كلاً مما يأتي:

أ) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ب) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

المصطلحات الأساسية

دالة مثلثية.

Trigonometric Function

الحل

أ) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ جيب الزاوية $\frac{1}{2}$

الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني.

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ $\rightarrow$ $\sin^{-1}$ 0 . 6 3 2 5 = 39.18°

الربع الأول: $\theta = 39.18^\circ$

الربع الثاني: $\theta = 180^\circ - 39.18^\circ = 140.82^\circ$

ب) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ظل تمام الزاوية $-\frac{1}{2}$

الزاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ $\rightarrow$ $\cos^{-1}$ 1 . 6 2 0 4 = 104.72°

الربع الثاني: $\theta = 104.72^\circ$

الربع الرابع: $\theta = 360^\circ - 104.72^\circ = 255.28^\circ$

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

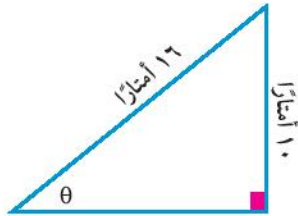
الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

حاول أن تحل

- ١ أوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق كلاً مما يأتي:
- أ جتا $\theta = 0,6205$ ب ظا $\theta = (2,3615)$ ج قتا $\theta = (-1,036)$

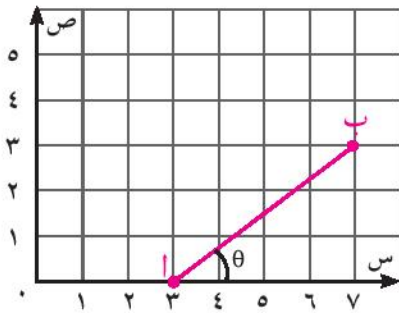
تحقق من فهمك



- ١ **الربط بالألعاب الرياضية:** توجد لعبة التزحلق في مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللغات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما في الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات. لأقرب جزء من ألف.



- ٢ **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ . أوجد θ بالتقدير الستيني.



- ٣ **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ(٣، ٠)، ب(٧، ٣) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{AB}$ ومحور السينات.



تمارين ٤ - ٦



أولاً: الاختيار من متعدد:

- ١ إذا كان $\theta = ٤٣٥^\circ$ ، حيث θ زاوية حادة موجبة فإن $\theta \leq$ تساوى
- أ $٢٥, ٦٢٦$ ب $٦٤, ٣٤٧$ ج $٣٢, ٣٨٨$ د $٤٦, ٣١٦$

- ٢ إذا كان $\theta = ١, ٨$ وكانت $٩٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ فإن $\theta \leq$ تساوى
- أ $٦٠, ٩٤٥$ ب $١١٩, ٠٥٥$ ج $٢٤٠, ٩٤٥$ د $٢٩٩, ٠٥٥$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من θ ، جتا θ ، جا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ب $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ج ب $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ د $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

- ٢ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من θ ، قتا θ ، فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ب $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ج ب $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ د $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

- ٣ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من θ ، ظا θ ، ظتا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ ب $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ ج ب $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ د $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$

- ٤ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب فأوجد: θ و $\theta \leq$ حيث $٠ < \theta < ٣٦٠^\circ$ عندما:

أ ب $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ب $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ج ب $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ د $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

٥ أوجد بالقياس الستيني أصغر زاوية موجبة تحقق كلاً من:

ج ظلـ^١ ١,٤٥٥٢

ب جتاـ^١ ٠,٤٣٦

أ جاـ^١ ٠,٦

و قتاـ^١ (١,٦٠٠٤-)

ه ظلـ^١ ٣,٦٢١٨

د قـ^١ (٢,٢٣٦٤-)

٦ إذا كانت $0^\circ < \theta < 360^\circ$ فأوجد قياس زاوية θ لكل مما يأتي:

ج ظلـ^١ (٢,١٤٥٦-)

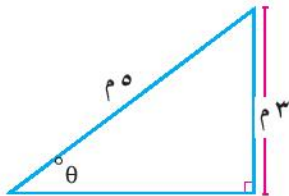
ب جتاـ^١ (٠,٦٤٢-)

أ جاـ^١ (٠,٢٣٥٦)

٧ إذا كان جا $\theta = \frac{1}{3}$ وكانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$

أ احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية

ب أوجد قيمة كل من: جتا θ ، ظل θ ، قـ θ .



٨ **سالم:** سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوي ٣ أمتار فأوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأفقى.

٩ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستيني فى كل شكل من الأشكال الآتية:

