



كتاب
الطالب

الرياضيات

للفصل الثالث الإعدادي - الفصل الدراسي الأول



تهدى وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
هذا الكتاب بكل الحب إلى الطلاب والمعلمين والأسره
فى جمهورية مصر العربية



كتاب الطالب

الرياضيات

2026 - 2027

للفصل الثالث الإعدادى - الفصل الدراسى الأول

الاسم: _____

الفصل: _____

المدرسة: _____

تأليف وإعداد
قطاع المحتوى التعليمى
شركة GPS للطبع والنشر والتوزيع



تأليف

- أ. أسامة زيد شريف
- أ. د. سمر عبد الفتاح لاشين
- أ. م. د. أمل الشحات حافظ
- أ. مجدى عبد الفتاح الصفى
- أ. إبراهيم عبد اللطيف الصغير
- أ. باسم مجدى رشدى
- أ. إسلام محمد إبراهيم
- أ. سامح لبيب عطية

مراجعة

- أ. د. جلال محروس معتمد
- أ. د. رضا أبو علوان السيد
- أ. د. هدى كمال محمد السيد
- أ. د. أحمد عبد القادر رمضان
- د. محمد محي الدين عبد السلام
- أ. منال عباس أحمد عزقول
- أ. سمير محمد سعداوى
- أ. عماد حسن عمر الدليل
- أ. سامح عبد الباسط السيد

الإشراف العام

د/ جبريل أنور حميدة

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

جميع الحقوق محفوظة © وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني بجمهورية مصر العربية – ٢٠٢٦ / ٢٠٢٧

لا يجوز نسخ أي جزء من هذا المنتج، أو تخزينه في نظام لاسترجاع المعلومات، أو نقله بأي شكل أو بأي وسيلة – إلكترونية أو تصويرية أو تسجيلية أو غير ذلك – دون الحصول على إذن كتابي مسبق من وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني.

تقديم

فى إطار التطوير المستمر لمنظومة التعليم، واستكمالاً لمنظومة التطوير التى بدأت خططها من مرحلة رياض الأطفال والمستمرة إلى نهاية المرحلة الثانوية وفقاً لرؤية مصر (٢٠٣٠)، وخطة الوزارة لتطوير التعليم - فقد تم إعداد هذا الكتاب لاستكمال وتنفيذ عمليات تطوير مناهج المرحلة الإعدادية لإحداث نقلة نوعية فى طريقة إعداد طلاب مصر لمواجهة تحديات المستقبل.

يُسعدنا أن نقدم هذا الكتاب لمقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادى للفصل الدراسى الأول، والذي يتضمن مجموعة من المهام والأداءات التى تساعد الطلاب على حل المشكلات الرياضية، وذلك لتحقيق نواتج التعلم لمواجهة تحديات القرن الحادى والعشرين، والذي واكبت بدايته ثورة متسارعة فى المعلومات وتكنولوجيا الاتصالات.

يهدف المنهج إلى إحداث نقلة نوعية فى تعليم الرياضيات وتعلّمها، كما يهدف أيضاً إلى توفير وسيلة فعالة لتحقيق أهداف نهج التعليم على نحو تكاملى عن طريق الآتى:

- التأكيد على الدور الإيجابى للطلاب فى عملية التعلم.
- تضمين المنهج المعارف والمهارات والقيم والاتجاهات الإيجابية اللازمة للتعلم والمواطنة الصالحة والعمل المنتج والمشاركة الفاعلة فى تحقيق برامج التنمية المستدامة.
- تضمين المنهج التوجهات الإيجابية الحديثة فى بناء المناهج، مثل مهارات التفكير ومهارات حل المشكلات ومهارات التعلم الذاتى والتعلم التعاونى والتواصل الجيد مع مصادر المعرفة.
- تنمية المهارات الأدائية من خلال التركيز على التعلم الذاتى والعمل التعاونى.
- تحقيق التكامل بين الرياضيات والمواد الدراسية عبر المراحل المختلفة.
- إتاحة الفرصة للطلاب لاختيار الأنشطة المناسبة لقدراتهم وميولهم وحاجاتهم.

ونسأل الله عز وجل أن تعم الفائدة من هذا الكتاب، ونتمنى أن يكون جزءاً من مجهود وطنى كبير ومتواصل للارتقاء بمصر إلى مصاف الدول المتقدمة لضمان مستقبل عظيم لجميع طلابها، كما نتمنى لكم عامّاً دراسيّاً جديداً مليئاً بالنجاحات والتوفيق.

والله وليّ التوفيق،،،

المعدون

محتويات الكتاب (الفصل الدراسي الأول)

الأعداد والعمليات عليها

- 1-1 قُوى القُوى 2
1-2 المعادلات الأسية 7

الوحدة

1

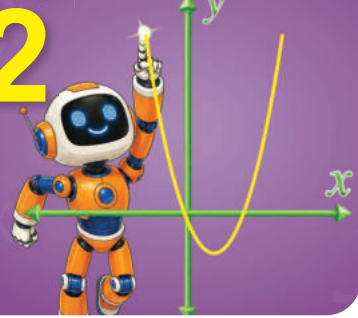


الجبر

- 2-1 الدالة التربيعية 14
2-2 مجموعة الأعداد الحقيقية لدوال كثيرات الحدود 22
2-3 دوال الكسور الجبرية النسبية 27
2-4 المجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية .. 33
2-5 العمليات على الكسور الجبرية النسبية 38

الوحدة

2

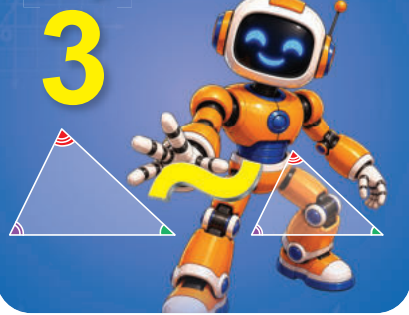


الهندسة

- 3-1 تشابه المضلعات 48
3-2 تشابه المثلثات 55
3-3 التمدد 62
3-4 النسب المثلثية للزاوية الحادة 68
3-5 النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة 74
3-6 العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين 80
3-7 معادلة الخط المستقيم 86

الوحدة

3



الإحصاء

- 4-1 مقاييس التشتت 96

الوحدة

4



الوحدة 1

الأعداد والعمليات عليها

دروس الوحدة

- 1-1 قُوى القُوى
- 1-2 المعادلات الأسية



يسهم مفهوم المعادلات الأسية في تسريع وتطوير تطبيقات الذكاء الاصطناعي، مما يجعل النماذج الذكية أكثر قدرة على التنبؤ بالنتائج بناءً على العلاقات الرياضية بين المتغيرات. **◀ فهل يمكن استخدام مفاهيم وقوانين المعادلات الأسية في تطبيقات الذكاء الاصطناعي؟**

القيم

- التذوق الجمالي.
- العمل الجماعي.
- الوعي السياحي.
- الوعي البيئي.

القضايا والمهارات

- التفكير الرياضي.
- التفكير الإبداعي.
- التفكير الناقد.

قوى القوى (Powers of Powers)

الدرس 1 - 1



متحف الأحياء المائية بالإسكندرية



استعد!

يُعد متحف الأحياء المائية بالإسكندرية أحد أشهر المعالم التعليمية والسياحية بالمدينة، يقع بجوار قلعة قايتباي بالأنفوشي، ويضم مجموعة من الأحواض الزجاجية التي تعرض أسماكًا وسلاحف وكائنات بحرية مختلفة بالإضافة إلى معروضات مُحَنطة.

بفرض أن أحد الأحواض مكعب الشكل طول حرفه 2^7 سم،

فما حجم الماء الذي يمكن أن يستوعبه هذا الحوض؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم قانون قوة القوة؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

أمامك مجموعة من البطاقات تحمل كل منها تعبيرًا رياضيًا، اختر جميع البطاقات التي تحمل تعبيرًا رياضيًا يساوى التعبير الرياضى الذى تحمله البطاقة الحمراء. ناقش.

$$(x^4 y^3)^2$$

$$x^{42} y^{32}$$

$$x^8 y^6$$

$$x^6 y^5$$

$$x^3 y^4 \times x^5 y^2$$

$$(x^2)^4 (y^2)^3$$



تعلم!

قانون قوة القوة

$$(2^3)^4 = \overbrace{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}^{4 \text{ عوامل}} = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$$

لاحظ أن: 12 هي حاصل ضرب الأسين الأصليين: 3، 4 ($12 = 3 \times 4$)
أى أن: لإيجاد قوة القوة نضرب الأسس.

بصفة عامة:

لأى عدد حقيقى a لا يساوى الصفر، وعددين صحيحين m, n يكون:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\bullet (5^4)^2 = 5^{4 \times 2} = 5^8$$

$$\bullet (7^{-2})^5 = 7^{-2 \times 5} = 7^{-10}$$

فمثلاً:

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم قوة القوة.
- توجد قوة القوة لعدد حقيقى.
- تستخدم قانون قوة القوة فى تبسيط تعبيرات رياضية.
- تستخدم قانون قوة حاصل ضرب قوتين / خارج قسمة قوتين فى حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- أس Exponent
- أساس Base
- قوة Power
- قوة القوة Power of a power

■ معلومة سابقة

قوانين الأسس:

لأى عددين حقيقيين a, b

حيث $a \neq 0, b \neq 0$

وعددين صحيحين m, n يكون:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad ①$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad ②$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m \quad ③$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad ④$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ⑤$$

$$a^0 = 1 \quad ⑥$$

مثال 1

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$\frac{4^{x+2} \times 9^{3+x}}{6^{2x+3}} \quad ③$$

$$\frac{(x^2)^{-3} \times (x^{-1})^2}{x^{-3} \times x^{-4}} \quad ②$$

$$\frac{(2^{11})^2 \times 2^3}{(2^6)^3 \times 2^4} \quad ①$$

$$\begin{aligned} \frac{(2^{11})^2 \times 2^3}{(2^6)^3 \times 2^4} &= \frac{2^{11 \times 2} \times 2^3}{2^{6 \times 3} \times 2^4} = \frac{2^{22} \times 2^3}{2^{18} \times 2^4} \\ &= \frac{2^{22+3}}{2^{18+4}} = \frac{2^{25}}{2^{22}} = 2^{25-22} = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x^2)^{-3} \times (x^{-1})^2}{x^{-3} \times x^{-4}} &= \frac{x^{2 \times (-3)} \times x^{-1 \times 2}}{x^{-3} \times x^{-4}} = \frac{x^{-6} \times x^{-2}}{x^{-3} \times x^{-4}} \\ &= \frac{x^{-6+(-2)}}{x^{-3+(-4)}} = \frac{x^{-8}}{x^{-7}} = x^{-8-(-7)} = x^{-1} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4^{x+2} \times 9^{3+x}}{6^{2x+3}} &= \frac{(2^2)^{x+2} \times (3^2)^{3+x}}{(2 \times 3)^{2x+3}} = \frac{2^{2x+4} \times 3^{6+2x}}{2^{2x+3} \times 3^{2x+3}} \\ &= 2^{(2x+4)-(2x+3)} \times 3^{(6+2x)-(2x+3)} \\ &= 2^{2x+4-2x-3} \times 3^{6+2x-2x-3} \\ &= 2^1 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54 \end{aligned}$$



①

②

③

■ تقييم ذاتي ①

اختصر إلى أبسط صورة كلاً من :

$$\frac{(\sqrt{5})^3)^2 \times \sqrt{5}}{(-\sqrt{5})^5} \quad ①$$

$$\frac{a^4 \times (a^{-1})^4}{(a^2)^5 \times (a^5)^{-2}} \quad ②$$

$$\frac{36^n \times 5^{2n}}{30^{2n}} \quad ③$$

■ لاحظ أن :

القسمة على صفر ليس لها معنى، وعلى هذا فإنه عند وجود رموز في المقام يُشترط لهذه الرموز ألا تساوي الصفر.

■ فكر وناقش

$$① \text{ هل } (x^3)^2 = (x^2)^3 ?$$

$$② \text{ هل } (9^2)^2 = 3^8 ?$$

$$③ \text{ هل } (2^2)^3 = 2^{2^3} ?$$

■ لاحظ أن

$$(a^m + b^n)^k \neq a^{mk} + b^{nk}$$

$$(a^m - b^n)^k \neq a^{mk} - b^{nk}$$

قانون قوة خارج قسمة قوتين

لأي عددين حقيقيين a, b لا يساويان الصفر، وثلاثة أعداد صحيحة m, n, k يكون :

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^k = \frac{a^{mk}}{b^{nk}}$$

$$\left(\frac{2^3}{7^2}\right)^5 = \frac{2^{3 \times 5}}{7^{2 \times 5}} = \frac{2^{15}}{7^{10}}$$

فمثلاً :

قانون قوة حاصل ضرب قوتين

$$(a^m \times b^n)^k = a^{mk} \times b^{nk}$$

$$(2^3 \times 3)^4 = 2^{3 \times 4} \times 3^{1 \times 4} = 2^{12} \times 3^4$$

فمثلاً :

مثال 2

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$\left(\frac{2a^2b^2}{b^{-1}a^4}\right)^3 \quad ②$$

$$(-2x^2y)^3 \times (x^{-1}y^2)^{-1} \quad ①$$

■ تقييم ذاتي ②

اختصر إلى أبسط صورة كلاً من :

$$(3xy^4)^{-2} \times ((-2y)^2)^3 \quad ①$$

$$\left(\frac{4m^2n^{-3}}{n^{-4}m^3}\right)^{-2} \quad ②$$

■ لاحظ أن

- $(-a)^n = a^n$
إذا كان n عددًا صحيحًا زوجيًا.
- $(-a)^n = -a^n$
إذا كان n عددًا صحيحًا فرديًا.

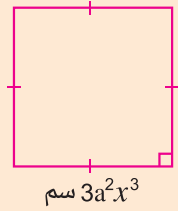
■ تقييم ذاتي 3

اختصر إلى أبسط صورة :

$$\frac{((\sqrt{5})^3)^{2x} \times (15)^{x-1}}{(75)^x}$$

ثم أوجد قيمة الناتج عند :
 $x = 1$

■ تقييم ذاتي 4



أوجد مساحة المربع في أبسط صورة.

$$\begin{aligned} (-2x^2y)^3 \times (x^{-1}y^2)^{-1} &= (-2)^3 x^{2 \times 3} y^3 \times x^{-1 \times (-1)} y^{2 \times (-1)} \\ &= -8x^6 y^3 \times xy^{-2} = -8x^{6+1} y^{3-2} \\ &= -8x^7 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2a^2b^2}{b^{-1}a^4}\right)^3 &= \frac{2^3 a^{2 \times 3} b^{2 \times 3}}{b^{-1 \times 3} a^{4 \times 3}} = \frac{8a^6 b^6}{b^{-3} a^{12}} \\ &= 8a^{6-12} b^{6+3} = 8a^{-6} b^9 = \frac{8b^9}{a^6} \end{aligned}$$

■ مثال 3

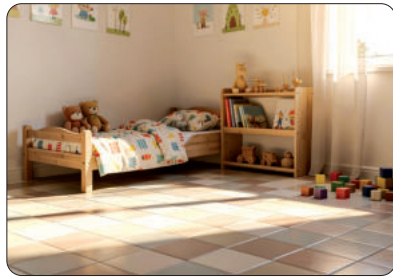
$$\frac{9^{2n-1} \times 18^{1-4n}}{36^{2-3n}}$$

اختصر إلى أبسط صورة

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند : $n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{9^{2n-1} \times 18^{1-4n}}{36^{2-3n}} &= \frac{(3^2)^{2n-1} \times (2 \times 3^2)^{1-4n}}{(2^2 \times 3^2)^{2-3n}} \\ &= \frac{3^{4n-2} \times 2^{1-4n} \times 3^{2-8n}}{2^{4-6n} \times 3^{4-6n}} \\ &= 2^{(1-4n)-(4-6n)} \times 3^{(4n-2)+(2-8n)-(4-6n)} \\ &= 2^{1-4n-4+6n} \times 3^{4n-2+2-8n-4+6n} = 2^{2n-3} \times 3^{2n-4} \\ &\text{قيمة الناتج عند } n = 2 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{2n-3} \times 3^{2n-4} &= 2^{2(2)-3} \times 3^{2(2)-4} \\ &= 2^1 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$



ديكور: غرفة أرضيتها مربعة الشكل طول ضلعها $2x^3y^2$ وحدة طول، يُراد تبليطها ببلاط مربع الشكل طول ضلع كل بلاطة xy^2 وحدة طول. كم بلاطة تحتاجها لتغطية أرضية الغرفة بالكامل ؟

✓ :: مساحة المربع = مربع طول ضلعه

$$(2x^3y^2)^2 = \text{مساحة أرضية الغرفة} \therefore$$

$$2^2 x^6 y^4 =$$

$$4x^6 y^4 = \text{وحدة مساحة}$$

$$(xy^2)^2 = \text{مساحة البلاطة} \therefore$$

$$x^2 y^4 = \text{وحدة مساحة}$$

$$\therefore \text{عدد البلاطات} = \frac{\text{مساحة أرضية الغرفة}}{\text{مساحة البلاطة}} = \frac{4x^6 y^4}{x^2 y^4}$$

$$= 4x^{6-2} = 4x^4 \text{ بلاطة.}$$

■ تنوع الاستراتيجيات

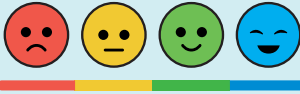
$$\frac{\text{مساحة أرضية الغرفة}}{\text{مساحة البلاطة}} = \text{عدد البلاطات}$$

$$\frac{(2x^3y^2)^2}{(xy^2)^2} =$$

$$\left(\frac{2x^3y^2}{xy^2}\right)^2 =$$

$$(2x^2)^2 =$$

$$4x^4 =$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① أى مما يأتى يساوى $(a^4)^7$ ؟
(أ) a^3 (ب) a^{11} (ج) a^{28} (د) a^{47}
- ② ما قيمة $(3^8)^0$ ؟
(أ) 3^8 (ب) 3^{80} (ج) 1 (د) 24
- ③ أى مما يأتى يساوى $(3^4)^2 \times 3^5$ ؟
(أ) 3^{11} (ب) 3^{13} (ج) 3^{40} (د) 9^{11}
- ④ ما ناتج $\frac{(x^3)^5}{(x^8)^2}$ فى أبسط صورة؟
(أ) $\frac{1}{x}$ (ب) x (ج) x^{-2} (د) x^{31}
- ⑤ ما ناتج $x^2 \times (x^5)^2$ فى أبسط صورة؟
(أ) x^9 (ب) x^{12} (ج) x^{14} (د) x^{20}
- ⑥ ما ناتج $(-a^3 b)^2$ فى أبسط صورة؟
(أ) $a^3 b^3$ (ب) $-a^5 b^3$ (ج) $a^6 b^2$ (د) $-a^6 b^2$
- ⑦ إذا كان $2^x = 5$ فما قيمة 8^x ؟
(أ) 125 (ب) 32 (ج) 27 (د) 15
- ⑧ ما ناتج $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^2$ فى أبسط صورة؟
(أ) $\frac{9a^4}{4b^3}$ (ب) $\frac{9a^4}{4b^2}$ (ج) $\frac{3a^4}{2b^2}$ (د) $\frac{3a^4}{2b^3}$

اكتشف الخطأ :

حل أسماء :

$$(a^2)^3 \times a^4 = a^6 \times a^4 = a^{10}$$

حل خالد :

$$(a^2)^3 \times a^4 = a^5 \times a^4 = a^{20}$$

⑨ قام كل من خالد وأسماء باختصار

$a^4 \times (a^2)^3$ لأبسط صورة، فكانت إجابتهما الموضحة. أى منهما إجابته صحيحة ؟ ناقش.



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑩ أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

- ① $(a^4)^3 \times a^7$
- ② $(a^5)^2 \times (a^3)^3$
- ③ $(\sqrt{5})^3 \times ((-\sqrt{5})^2)^3$
- ④ $((-2)^3)^2 \times (-\sqrt{2})^{-4}$
- ⑤ $\frac{(a^2)^3}{a^4}$
- ⑥ $\frac{(a^4)^3}{(a^2)^5}$
- ⑦ $((\sqrt{3})^3)^{-2}$
- ⑧ $\frac{((-\sqrt{7})^2)^3 \times ((\sqrt{7})^3)^{-1}}{((\sqrt{7})^2)^{-2}}$

⑪ اختصر كلاً مما يأتى إلى أبسط صورة :

- ① $(4a^4 b^3 c)^2$
- ② $(-2m^5 n^4)^3$
- ③ $\left(\frac{2r^2 s^{-1}}{r^3 s}\right)^{-2}$
- ④ $(c^3)^2 \times (-3c^7)^2$
- ⑤ $(-3x^2 y^3 z)^2 \times ((-x^2 y)^3)^2$
- ⑥ $\frac{5qp^{-2}}{(q^{-1}p)^3}$
- ⑦ $\frac{(2a^5)^3 \times (3a^3)^2}{(6a^7)^2 \times (a^{-1})^3}$
- ⑧ $\frac{(16x^2 y^{-2})^0}{(4x^0 y^{-6})^{-2}}$
- ⑨ $\left(\frac{5^0 c^2 d^3 f}{2c^4 d^{-4}}\right)^{-3}$

12) اختصر كلاً مما يأتي لأبسط صورة، ثم أوجد قيمة الناتج عند $X = 1$:

$$\frac{(4)^x \times (49)^{x-1}}{(98)^x} \quad (2)$$

$$\frac{4^x \times 2^{x-4}}{16^{x-2}} \quad (1)$$

14) إذا كان : $3^a = 2$ أوجد قيمة : $9^a + (27)^a$

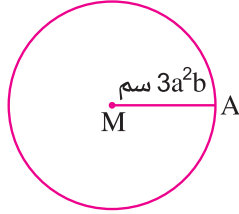
13) أثبت أن : $\frac{27^{x-1} \times 8^x}{(2\sqrt{2})^{2x} \times (3\sqrt{3})^{2x}} = \frac{1}{27}$



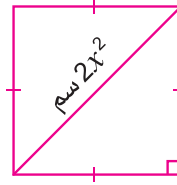
التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

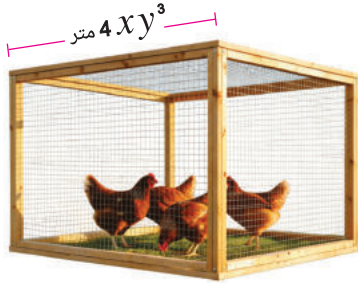
15) هندسة : أوجد مساحة كل شكل مما يأتي فى أبسط صورة :



(2)



(1)



الدواجن من أهم قطاعات الثروة الداجنة بمصر، وتعد مصدراً هاماً للبروتين الحيوانى.

16) ثروة حيوانية : حظيرة للدجاج مكعبة الشكل طول حرفها

$4xy^3$ متر، أوجد حجم الحظيرة فى أبسط صورة.



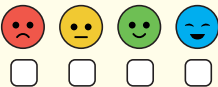
تقليل استهلاك الوقود يساهم فى خفض تلوث الهواء وحماية البيئة.

17) مصادر الطاقة : برميل أسطوانى لتخزين الوقود طول نصف

قطر قاعدته $2kw^2$ متر وارتفاعه $4k$ متر، أوجد حجم البرميل فى أبسط صورة.

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لقوى القوى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



تفكير إبداعى

18) إذا كان : $10^x = 5^{x+1}$ أوجد قيمة 4^x

19) إذا كان : $a = 5^{30}$ ، $b = 3^{45}$ ، $c = 2^{60}$ رتب a ، b ، c ترتيباً تصاعدياً.

المعادلات الأسية (Exponential Equations)



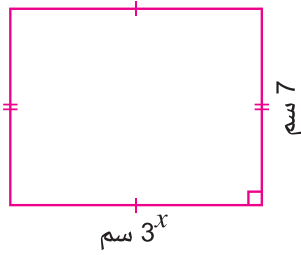
بكتيريا تحت الميكروسكوب



استعد!

تُعد البكتيريا كائنًا حيًا وحيد الخلية، لا يمكن رؤيته بالعين المجردة بل يُرى باستخدام الميكروسكوب. وتتكاثر البكتيريا بطريقة تُسمى الانشطار الثنائي، حيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين كل ساعة. إذا بدأنا بخلية بكتيرية واحدة، فبعد كم ساعة يصل عدد الخلايا الناتجة عن الانقسام إلى 1024 خلية؟

في هذا الدرس، سوف نتعرف على مفهوم المعادلة الأسية وكيفية حلها باستخدام قوانين الأسس؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

إذا كانت مساحة المستطيل المقابل تساوي 63 سم²، فما قيمة x ؟ ناقش.



تعلم!

المعادلة الأسية

المعادلة الأسية هي معادلة تحتوي على متغير في الأس.

أمثلة لمعادلات غير أسية: $x^2 = 9$ $x - 7 = 3^2$	أمثلة لمعادلات أسية: $2^x = 8$ $3^{x-4} = \frac{1}{9}$
--	--

وسوف تقتصر دراستنا هذا العام على دراسة المعادلة الأسية على الصورة $a^x = b$ حيث $a > 0, a \neq 1$

حل المعادلات الأسية

لحل المعادلات الأسية نستخدم خاصية تساوى القوى.

إذا كان $a^x = a^y$ حيث $a > 0, a \neq 1$ فإن: $x = y$

أمثلة: • إذا كان $3^x = 3^4$ ، فإن: $x = 4$

• إذا كان $5^x = 125$ ، فإن: $5^x = 5^3$ ومنها $x = 3$

■ نواتج التعلم

- تحل المعادلات الأسية مستخدمًا قوانين الأسس.
- تستخدم المعادلات الأسية في حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- معادلة أسية
Exponential equation

■ لاحظ أن

يمكنك استخدام التحليل لكتابة الأعداد في صورة أسية

125	5
25	5
5	5
1	

$$125 = 5^3$$

مثال 1

حل كلاً من المعادلات الآتية في R :

$$3^{x+1} = 81 \quad (1) \quad 2^{x-7} = \frac{1}{32} \quad (2) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \frac{27}{8} \quad (3)$$

$$\therefore 2^{x-7} = \frac{1}{32} \quad (2) \quad \therefore 3^{x+1} = 81 \quad (1) \quad \checkmark$$

أعد كتابة 81 في صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 3
أعد كتابة العدد 32 في صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 2

$$\therefore 3^{x+1} = 3^4 \quad (81 = 3^4) \quad \therefore 2^{x-7} = \frac{1}{2^5} \quad (32 = 2^5)$$

الأساسان متساويان، فيكون الأسان متساويين

$$\therefore x+1 = 4 \quad \therefore x = 4 - 1 = 3$$

الأساسان متساويان، فيكون الأسان متساويين

$$\therefore x-7 = -5 \quad \therefore x = 7 - 5 = 2$$

■ لاحظ أن

إذا كان a, b عددين حقيقيين لا يساويان الصفر، n عدداً صحيحاً،

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} \quad \text{فإن:}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \quad \text{فمثلاً:}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \frac{27}{8} \quad \therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \frac{3^3}{2^3} \quad (3)$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$\therefore x+2 = -3 \quad \therefore x = -2 - 3 = -5$$

مثال 2

حل كلاً من المعادلات الآتية في R :

$$9^{x+2} = 3^x \quad (1) \quad (125)^{x+1} = (625)^{x-1} \quad (2)$$

$$2^{x^2} = 16^{3-x} \quad (4) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2x-7} \quad (3)$$

$$\therefore 9^{x+2} = 3^x \quad (1) \quad \checkmark \quad \therefore (125)^{x+1} = (625)^{x-1} \quad (2)$$

أعد كتابة 9 في صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 3
أعد كتابة 125، 625 في صورة أسية بحيث يكون لهما نفس الأساس "5"

$$\therefore (5^3)^{x+1} = (5^4)^{x-1}$$

استخدم قانون قوة القوة

$$\therefore 5^{3x+3} = 5^{4x-4}$$

الأساسان متساويان، فيكون الأسان متساويين

$$\therefore 3x+3 = 4x-4$$

$$\therefore 4x-3x = 3+4$$

$$\therefore x = 7$$

$$\therefore 9^{x+2} = 3^x \quad (1) \quad \checkmark$$

أعد كتابة 9 في صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 3
أعد كتابة 125، 625 في صورة أسية بحيث يكون لهما نفس الأساس "5"

$$\therefore (3^2)^{x+2} = 3^x$$

استخدم قانون قوة القوة

$$\therefore 3^{2x+4} = 3^x$$

الأساسان متساويان، فيكون الأسان متساويين

$$\therefore 2x+4 = x$$

$$\therefore 2x-x = -4$$

$$\therefore x = -4$$

■ تقييم ذاتي 1

حل كلاً من المعادلات الآتية في R :

$$2^{x-2} = 8 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 32 \quad (2)$$

$$\frac{125}{27} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} \quad (3)$$

■ التحقق من صحة الحل

يمكنك التحقق من صحة حل

المعادلة (1) كالتالى:

عوض عن x بـ 3 فى المعادلة الأصلية

$$3^{x+1} = 81$$

$$3^{3+1} = 81$$

$$3^4 = 81$$

الجملة صحيحة $81 = 81$ ✓

أى أن الحل يساوى 3

◀ حاول بنفسك التحقق من

صحة الحل فى كل من

المعادلتين (2)، (3)

بالمثال المجاور.

■ تقييم ذاتي 2

حل كلاً من المعادلات الآتية في R :

$$27^{x-1} = 3^{2x} \quad (1)$$

$$64^{x+1} = 4^{x+7} \quad (2)$$

$$\frac{2^{x^2}}{16^x} = 32 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \therefore 2^{x^2} &= 16^{3-x} \\ \therefore 2^{x^2} &= (2^4)^{3-x} \\ \therefore 2^{x^2} &= 2^{12-4x} \\ \therefore x^2 &= 12 - 4x \\ \therefore x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ \therefore (x+6)(x-2) &= 0 \\ \therefore x+6 &= 0 \quad \text{أو} \quad x-2 = 0 \\ \therefore x &= -6 \quad \text{أو} \quad x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} &= \left(\frac{4}{9}\right)^{2x-7} \\ \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} &= \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{2x-7} \\ \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} &= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{2x-7} \\ \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} &= \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{2x-7} \\ \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x+14} \\ \therefore 5-3x &= -4x+14 \\ \therefore 4x-3x &= 14-5 \\ \therefore x &= 9 \end{aligned}$$

ملاحظة:

• إذا كان $a^x = 1$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ فإن $x = 0$

• إذا كان $a^x = b^x$ حيث $a > 0$ ، $b > 0$ ، $a \neq b$ فإن $x = 0$

مثال 3

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين في $\mathbb{R}$:

$$2^{x+1} = 3^{x+1} \quad (2)$$

$$4^{x^2-9} = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore 2^{x+1} &= 3^{x+1} \\ \therefore x+1 &= 0 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^{x^2-9} &= 1 \\ \therefore x^2-9 &= 0 & \therefore x^2 &= 9 \\ \therefore x &= \pm \sqrt{9} & \therefore x &= \pm 3 \end{aligned}$$

مثال 4

أوجد قيمة n في كل مما يأتي:

$$\frac{2^n \times 9^{n+1}}{18^n} = 3^n \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{12^{n-1}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} &= 1 \quad (2) \\ \therefore \frac{(3 \times 2)^{n-1}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} &= 1 \\ \therefore \frac{3^{n-1} \times 2^{n-2}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} &= 1 \\ \therefore 2^{2n-2-n+1} &= 1 \\ \therefore 2^{n-1} &= 1 \\ \therefore n-1 &= 0 & \therefore n &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2^n \times 9^{n+1}}{18^n} &= 3^n \\ \therefore \frac{2^n \times (3^2)^{n+1}}{(2 \times 3^2)^n} &= 3^n \\ \therefore \frac{2^n \times 3^{2n+2}}{2^n \times 3^{2n}} &= 3^n \\ \therefore 3^{2n+2-2n} &= 3^n \\ \therefore 3^2 &= 3^n \\ \therefore n &= 2 \end{aligned}$$

■ تقييم ذاتي 3

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين في $\mathbb{R}$:

$$2^{x^2} \times 2^x = 1 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1} = 5^{1-2a} \quad (2)$$

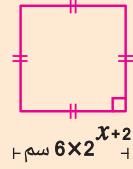
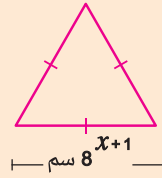
■ تقييم ذاتي 4

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

$$\frac{4^x \times 9^{2-x}}{6^{2x}} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{2^x \times 3^x}{12^x} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

■ تقييم ذاتي 5



إذا كان محيط المثلث المتساوي الأضلاع يساوي محيط المربع، فما طول ضلع كل منهما ؟

مثال 5

في الشكل المقابل :

صندوق من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات حجمه 1 متر مكعب. أوجد أبعاد الصندوق.



✓ ∴ حجم الصندوق $l \times w \times h = 1$

حيث : $h = 2^x$, $w = 2^{x+1}$, $l = 2^{x+2}$

$$\therefore 2^{x+2} \times 2^{x+1} \times 2^x = 1 \quad \therefore 2^{x+2+x+1+x} = 1 \quad \therefore 2^{3x+3} = 1$$

$$\therefore 3x + 3 = 0 \quad \therefore 3x = -3 \quad \therefore x = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\therefore \boxed{l = 2^{-1+2} = 2}, \quad \boxed{w = 2^{-1+1} = 2^0 = 1}, \quad \boxed{h = 2^{-1} = \frac{1}{2}}$$

∴ أبعاد الصندوق هي : 2 متر، 1 متر، $\frac{1}{2}$ متر.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- | | |
|--|---|
| <p>② إذا كان : $2^x = 8$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4</p> | <p>① إذا كان : $2^{x-3} = 1$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3</p> |
| <p>④ إذا كان : $3^{x+2} = 3^{2x-1}$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5</p> | <p>③ إذا كان : $3^{-x} = 3$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) -3 (ب) -1 (ج) 1 (د) 3</p> |
| <p>⑥ إذا كان : $9^x = 27$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) 3</p> | <p>⑤ إذا كان : $5^{x-1} = 3^{x-1}$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) 0 (ب) 1 (ج) 3 (د) 5</p> |
| <p>⑧ إذا كان : $3^x + 3^x = 6$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 9</p> | <p>⑦ إذا كان : $5^{2x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-7}$ فما قيمة x ؟</p> <p>(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5</p> |



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑨ حل كلاً من المعادلات الآتية في R :

- | | | |
|--|---|--|
| $4^{1-2x} = 2$ ③ | $3^{2x-3} = \frac{1}{27}$ ② | $5^{2x-1} = 125$ ① |
| $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \frac{125}{27}$ ⑥ | $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} = \frac{8}{125}$ ⑤ | $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} = 128$ ④ |
| $9 \times 5^{x-1} = 25 \times 3^{x-1}$ ⑨ | $7^{x+2} = 2^x \times 2^{-x}$ ⑧ | $7^{2x+3} = 7^{x-4}$ ⑦ |

١٠ أوجد مجموعة الحل في R لكل من المعادلات الآتية :

$$32^{x-3} = 8^{2x+1} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 8^{x+3} \quad (2)$$

$$(216)^x = \frac{1}{6^3} \quad (1)$$

$$\frac{8^x \times 9^x}{18^x} = 64 \quad (6)$$

$$8^{x-1} \times 4^{2x+1} = 64 \quad (5)$$

$$\frac{36^{x+1}}{6^{x-1}} = \frac{1}{216} \quad (4)$$

$$6^{2n} \text{ إذا كان : } \frac{49^n \times 25^{2n} \times 3^{4n}}{7^{-n} \times 15^{4n}} = 343 \text{ فأوجد قيمة } 6^{2n} \quad (11)$$

ناقش :

١٢ قام كل من مروان ومريم بحل المعادلة :

$$16^{x+1} = 64^{x-1}$$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة
فى الحل ؟

حل مريم :

$$16^{x+1} = 64^{x-1}$$

$$(4^2)^{x+1} = (4^3)^{x-1}$$

$$4^{2x+2} = 4^{3x-3}$$

$$2x + 2 = 3x - 3$$

$$3x - 2x = 2 + 3$$

$$x = 5$$

حل مروان :

$$16^{x+1} = 64^{x-1}$$

$$(2^4)^{x+1} = (2^6)^{x-1}$$

$$2^{4x+4} = 2^{6x-6}$$

$$4x + 4 = 6x - 6$$

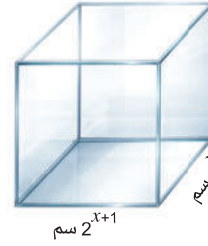
$$4 + 6 = 6x - 4x$$

$$10 = 2x \quad x = 5$$

ثالثاً

التحليل وتكامل المواد

١٣ حجوم :



صندوق زجاجى مكعب
طولا ضلعى قاعدته
 2^{x+1} سم ، 4^x سم
أوجد حجمه بوحدة
السنتمتر المكعب.

١٤ حدائق :



تمنح الزهور الحدائق والمنازل
مظهراً أنيقاً يعكس الذوق والجمال

حوض زهور على شكل
مستطيل أبعاده كما
هو موضح بالشكل.
احسب محيط
الحوض.

١٥ ديكور :

فى الشكل المقابل :

شكل ديكورى معلق على أحد الجدران يتكون من ثلاثة
مضلعات منتظمة خماسى وسداسى وتساعى. فما قيمة x ؟

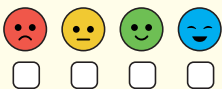


الاهتمام بالديكور يجعل المكان
أكثر راحة وتنظيماً وأناقة

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للمعادلات
الأسية ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



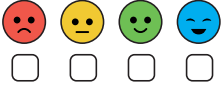
تفكير إبداعى

١٦ أوجد قيمة x فى كل مما يأتى :

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112 \quad (1)$$

$$2 \times 3^{x+1} - 3^x = 5^{x+1} - 2 \times 5^x \quad (2)$$

قيم فهمك!



ما مدى فهمك للوحدة الأولى ؟
ضع علامة في المربع المناسب

تقييم الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① أى مما يأتى يساوى $(a^2)^4 \times a^5$ ؟
(أ) a^{11} (ب) a^{13} (ج) a^{40} (د) a^{30}
- ② إذا كان $\frac{3^x \times 27^x}{81^x} = 2^{-2x}$ فما قيمة x ؟
(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) -1
- ③ إذا كان $3^x = b$ فأى مما يأتى يساوى 9^{x+1} ؟
(أ) $27b^2$ (ب) $3b^2$ (ج) $9b^2$ (د) $3b$
- ④ إذا كان $4^x = 8$ فما قيمة x ؟
(أ) 1 (ب) 2 (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

أكمل كلاً مما يأتى :

- ⑤ إذا كان $7^{x+1} = 5^{x+1}$ فإن $x = \dots\dots\dots$
- ⑥ ناتج $\frac{(-2a^2)^3}{2a}$ فى أبسط صورة هو
- ⑦ إذا كان $5^{x-3} = 1$ فإن $2^x = \dots\dots\dots$
- ⑧ إذا كان $2^a + 2^a + 2^a = 24$ فإن $a = \dots\dots\dots$

أجب عن الأسئلة الآتية :

- ⑨ إذا كان $2^x = 5$ فأوجد قيمة $8^x - 3 \times 2^{x+2}$
- ⑩ اختصر لأبسط صورة : $\frac{4^x \times 9^{2-x}}{6^{2x}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $x = 1$
- ⑪ أوجد فى R مجموعة حل المعادلة : $5^{x^2-4} = 125^x$
- ⑫ أوجد قيمة m إذا كان : $3^{-2m+1} \times 9^{2m} = \frac{1}{27}$

المعادلات الأسية

نشاط الوحدة الأولى

الهدف من النشاط :

فهم حل المعادلة الأسية وطرق حلها.

خطوات التنفيذ :

بالتعاون مع أحد زملائك حاول القيام بالآتى :

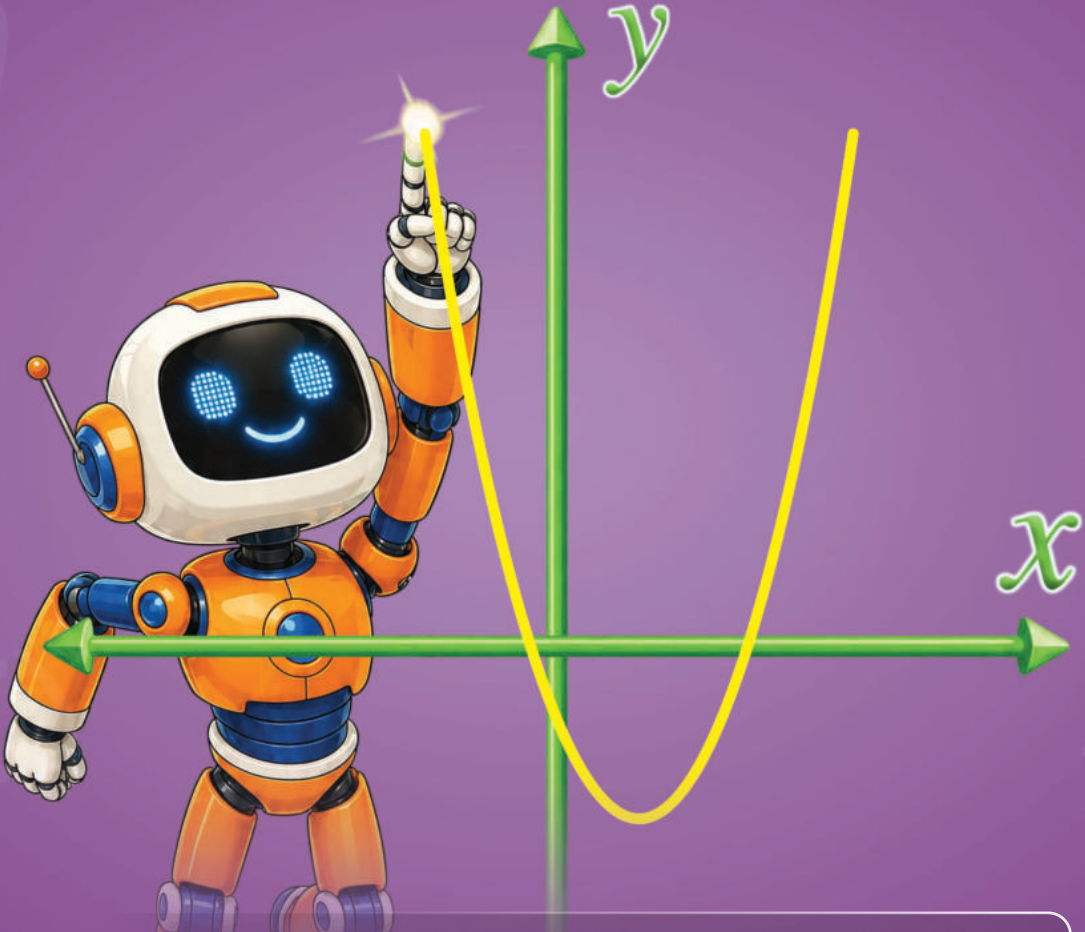
- ① استخدم أى وسيلة (كتاب - إنترنت - أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى ...) لصياغة مشكلة حياتية تعتمد على النمو الأسى (مثل : انتشار فيروس - تضاعف عدد المتابعين - تكاثر البكتيريا ...).
- ② أعد صياغة المشكلة بأسلوبك، واكتب المعادلة التى تمثل المشكلة على الصورة $a^x = b$
- ③ استخدم ما تعلمته لحل المعادلة التى قمت بكتابتها، وتحقق من صحة حلك.
- ④ وضح خطوات حل المشكلة مع التأكيد على كيفية الاستفادة من قوانين الأسس فى حل المشكلة.

الوحدة 2

الجبر

دروس الوحدة

- 2-1 الدالة التربيعية
- 2-2 مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود
- 2-3 دوال الكسور الجبرية النسبية
- 2-4 المجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية
- 2-5 العمليات على الكسور الجبرية النسبية



يسهم مفهوم دوال الكسور الجبرية النسبية فى الذكاء الاصطناعى من خلال تمثيل العلاقات غير الخطية بين البيانات، مما يساعد خوارزميات التعلم الآلى على تحسين دقة اتخاذ القرار وتحليل الأنماط الرياضية بصورة أكثر كفاءة.

◀ فهل يمكن استخدام مفاهيم وقوانين الكسور الجبرية النسبية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى؟

القضايا والمهارات

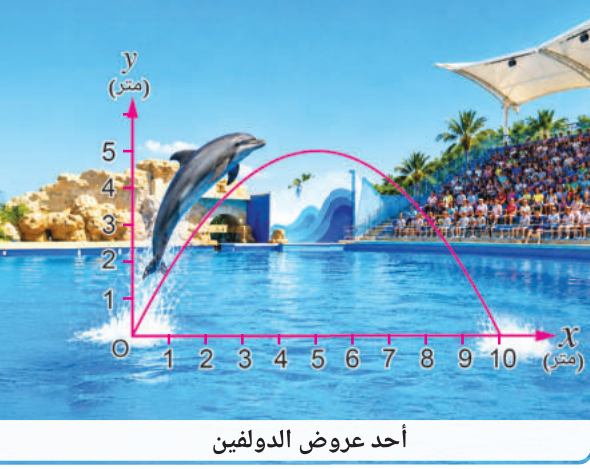
- التفكير الرياضى.
- الاستنتاج الرياضى.

القيم

- العمل الجماعى.
- الوعى الطبى.
- الوعى السياحى.

- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.

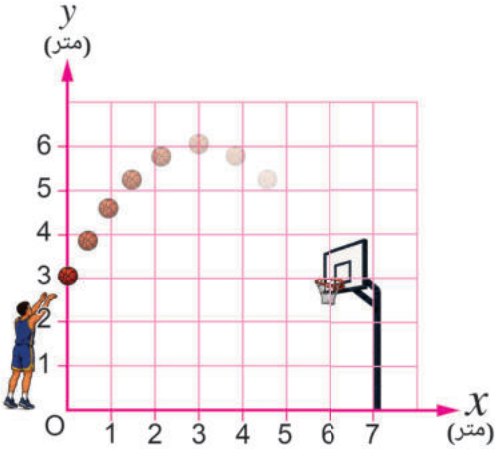
الدالة التربيعية (Quadratic Function)



استعد!

الدلافين من أذكى الكائنات البحرية، وتتميز بقدرتها على السباحة السريعة والقفز العالى فوق سطح الماء. وتعد عروض الدولفين من أكثر العروض البحرية جذبًا للزوار، حيث تظهر الدلافين مهارات مذهلة في القفز والحركات البهلوانية. أثناء أحد العروض قفز الدولفين خارج الماء، وكان مساره يُعطى بالدالة $f(x) = -0.2x^2 + 2x$ ما أقصى ارتفاع يصل إليه الدولفين؟

في هذا الدرس، سوف نتعرف على مفهوم الدالة التربيعية وخواصها وكيفية تمثيلها بيانيًا؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

في الشكل المقابل :
إذا كانت الكرة تسير في مسار منحنى الدالة f حيث :
 $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 6$
فهل ستسقط الكرة داخل السلة ؟ ولماذا ؟ ناقش.



تعلم!

الدالة التربيعية

الدالة التربيعية هي دالة من الدرجة الثانية في متغير واحد، تُمثل بمنحنى يُسمى «قِطْعًا مكافئًا»، وهو منحنى متماثل حول مستقيم رأسى يُسمى محور التماثل ويمر برأس المنحنى.

الصيغة القياسية للدالة التربيعية

الصيغة القياسية للدالة التربيعية f هي : $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

• الإحداثى x لرأس المنحنى : $x = -\frac{b}{2a}$ • الإحداثى y لرأس المنحنى : $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

• رأس المنحنى : $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ • المقطع y يساوى c

■ نواتج التعلم

- تعرف الصيغة القياسية للدالة التربيعية.
- تعرف صيغة الرأس للدالة التربيعية.
- تحدد رأس المنحنى ومحور تماثل الدالة التربيعية.
- تمثل الدالة التربيعية بيانيًا.
- توجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية.
- تستخدم التمثيل البياني للدالة التربيعية في حل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- الدالة التربيعية
- Quadratic function
- قطع مكافئ
- Parabola
- القيمة العظمى
- Maximum value
- القيمة الصغرى
- Minimum value
- المقطع y
- y-intercept
- صيغة الرأس
- Vertex form

■ لاحظ أن

مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

■ لاحظ أن

المقطع y هو الإحداثى y لنقطة تقاطع المنحنى مع محور y ، وللحصول على المقطع y بالدالة f حيث
 $f(x) = ax^2 + bx + c$
نضع $x = 0$ فنجد أن $f(0) = c$

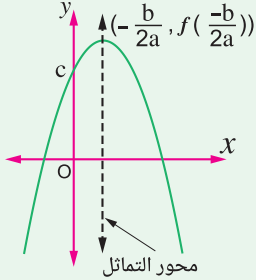
■ لاحظ أن

منحنى الدالة التربيعية متماثل حول محور التماثل وهو المستقيم الرأسى الذى يمر برأس المنحنى، والنقاط الواقعة على جهتي المنحنى المتقابلتين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يمينًا ويسارًا.

التمثيل البياني للدالة التربيعية فى الصيغة القياسية

إذا كان $a < 0$

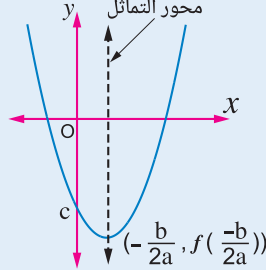
المنحنى مفتوح لأسفل. ويكون للدالة قيمة **عظمى** عند رأس المنحنى.



القيمة العظمى للدالة هي $f(-\frac{b}{2a})$

إذا كان $a > 0$

المنحنى مفتوح لأعلى. ويكون للدالة قيمة **صغرى** عند رأس المنحنى.



القيمة الصغرى للدالة هي $f(-\frac{b}{2a})$

مثال 1

مثل بيانيًا الدالة f فى كل مما يأتى، موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة، ثم أوجد القيمة الصغرى أو العظمى للدالة :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad \text{②}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{①}$$

✓ ① لرسم الدالة التربيعية f اتبع الخطوات الآتية :

- أوجد الإحداثى x لرأس المنحنى

$$\therefore a = 1, b = -2, c = -3$$

$$\therefore x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$$

- اختر عدة قيم حقيقية متماثلة حول الإحداثى x لرأس المنحنى :

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

الإحداثى x لرأس المنحنى

- أوجد الإحداثى y لرأس المنحنى والقيم المختارة كما بالجدول التالى :

x	$f(x) = x^2 - 2x - 3$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$	$(-1, 0)$
0	$f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$	$(1, -4)$
2	$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$	$(2, -3)$
3	$f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$f(4) = (4)^2 - 2(4) - 3 = 5$	$(4, 5)$

رأس
المنحنى

■ تقييم ذاتى ①

مثل بيانيًا الدالة f حيث

$$f(x) = 3x - x^2$$

موضحًا على الرسم محور

تماثل الدالة، ثم أوجد القيمة

الصغرى أو العظمى للدالة.

■ فكر وناقش

① هل النقطة $(6, 21)$ تقع على

منحنى الدالة f حيث :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

② هل النقطة $(-1, -10)$ تقع

على منحنى الدالة f حيث :

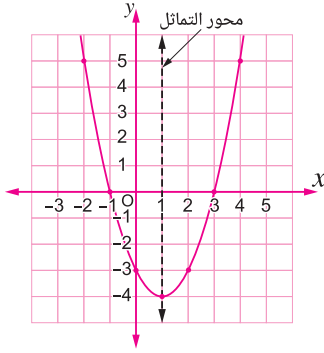
$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

■ توظيف التكنولوجيا

- يمكن استخدام برامج متعددة لتمثيل الدالة التربيعية ودراساتها مثل برنامج GeoGebra



- حاول بنفسك استخدام برنامج GeoGebra لتمثيل الدالتين في مثال (1)

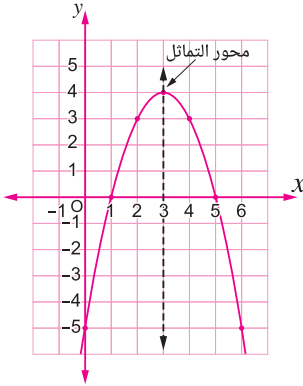


- عين النقط في المستوى الإحداثي، ثم ارسم منحنى يمر بالنقط.

المنحنى مفتوح لأعلى ويكون للدالة قيمة صغرى، وهي -4 - (الإحداثي y لرأس المنحنى).

(2) اتبع نفس الخطوات السابقة على أن يتضمن التمثيل البياني رأس المنحنى

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3$$



x	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	-5	(0, -5)
1	0	(1, 0)
2	3	(2, 3)
3	4	(3, 4)
4	3	(4, 3)
5	0	(5, 0)
6	-5	(6, -5)

رأس
المنحنى

المنحنى مفتوح لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى وهي 4

■ مثال (2)

في كل مما يأتي، أوجد رأس منحنى الدالة التربيعية، ونقطة تقاطع المنحنى مع محور y والقيمة الصغرى أو العظمى للدالة :

$$g(x) = -x^2 + 9 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (1)$$



$$\therefore a = -1, b = 0, c = 9 \quad (2)$$

$$\therefore \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} = 0$$

$$\therefore f(0) = -(0)^2 + 9 = 9$$

$(0, 9)$ رأس المنحنى

$$\therefore c = 9$$

$(0, 9)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y

$$\therefore a < 0$$

$\therefore$ المنحنى مفتوح لأسفل
 $\therefore$ القيمة العظمى للدالة = 9

$$\therefore a = 1, b = -4, c = 3 \quad (1)$$

$$\therefore \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

$$\therefore f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$$

$(2, -1)$ رأس المنحنى

$$\therefore c = 3$$

$(0, 3)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y

$$\therefore a > 0$$

$\therefore$ المنحنى مفتوح لأعلى
 $\therefore$ القيمة الصغرى للدالة = -1

■ تقييم ذاتي (2)

في كل مما يأتي، أوجد رأس منحنى الدالة التربيعية، ونقطة تقاطع المنحنى مع محور y والقيمة الصغرى أو العظمى للدالة :

$$f(x) = x^2 - 2x \quad (1)$$

$$g(x) = 1 - x^2 \quad (2)$$

صيغة الرأس للدالة التربيعية

■ فكر وناقش

كتبت هاجر أن رأس منحنى

الدالة f حيث

$$f(x) = (x + 2)^2 + 4$$

هو النقطة (2, 4) هل ما كتبتة

هاجر صواب ؟ ناقش.

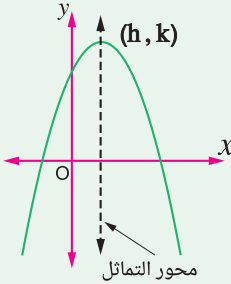
صيغة الرأس للدالة التربيعية f هي :

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \text{ حيث } a, h, k \text{ أعداد حقيقية، } a \neq 0 \text{ رأس المنحنى : } (h, k)$$

التمثيل البياني للدالة التربيعية فى صيغة الرأس

إذا كان $a < 0$

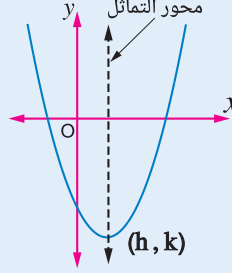
المنحنى مفتوح لأسفل.
ويكون للدالة قيمة عظمى عند رأس المنحنى.



القيمة العظمى للدالة هي $f(h) = k$

إذا كان $a > 0$

المنحنى مفتوح لأعلى.
ويكون للدالة قيمة صغرى عند رأس المنحنى.



القيمة الصغرى للدالة هي $f(h) = k$

مثال 3

مثل بيانيًا الدالة f حيث $f(x) = 5 - 2(x + 1)^2$ موضحة على الرسم محور تماثل

الدالة، ثم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

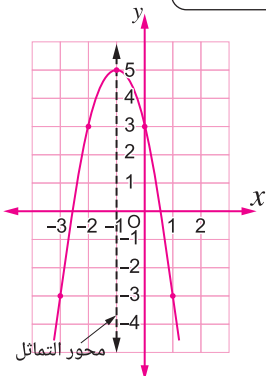
$$\therefore f(x) = 5 - 2(x + 1)^2$$

$$\therefore f(x) = -2(x - (-1))^2 + 5$$

$$\therefore a = -2, h = -1, k = 5$$

$\therefore$ رأس المنحنى $(-1, 5)$

x	$f(x) = 5 - 2(x + 1)^2$	$(x, f(x))$
-3	$f(-3) = 5 - 2(-3 + 1)^2 = -3$	$(-3, -3)$
-2	$f(-2) = 5 - 2(-2 + 1)^2 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$f(-1) = 5 - 2(-1 + 1)^2 = 5$	$(-1, 5)$ ← رأس المنحنى
0	$f(0) = 5 - 2(0 + 1)^2 = 3$	$(0, 3)$
1	$f(1) = 5 - 2(1 + 1)^2 = -3$	$(1, -3)$



$$\therefore a = -2$$

$$\therefore a < 0$$

$\therefore$ المنحنى مفتوح لأسفل

ويكون للدالة قيمة عظمى هي 5

■ تقييم ذاتي 3

مثل بيانيًا الدالة f حيث

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4$$

موضحة على الرسم محور تماثل

الدالة، ثم أوجد القيمة العظمى

أو الصغرى للدالة.

مثال 4

عين رأس المنحنى والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة f حيث :

$f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ ثم أوجد قيمة b إذا كانت النقطة $(b, 9)$ تقع على المنحنى.

$$\therefore f(x) = 2(x-3)^2 + 1$$

$$\therefore h = 3, k = 1$$

$\therefore$ رأس المنحنى $(3, 1)$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore a > 0$$

$\therefore$ المنحنى مفتوح لأعلى. $\therefore$ القيمة الصغرى للدالة $= 1$

$\therefore$ النقطة $(b, 9)$ تقع على المنحنى.

$$\therefore f(b) = 9$$

$$\therefore 2(b-3)^2 + 1 = 9$$

$$\therefore 2(b-3)^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\therefore (b-3)^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore b-3 = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$\therefore b-3 = 2$$

$$b-3 = -2$$

$$\therefore b = 2 + 3 = 5$$

$$b = -2 + 3 = 1$$



مثال 5

يركل لاعب كرة قدم الكرة لأعلى من سطح الأرض، فكان ارتفاعها عن سطح الأرض $h(t)$ بالمتري بعد (t) ثانية يتحدد بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ مثل العلاقة بيانياً وأوجد أقصى ارتفاع والزمن الذي تصل فيه الكرة لأقصى ارتفاع.

$$\therefore a = -4.9, b = 19.6, c = 0$$

$$\therefore \frac{-b}{2a} = \frac{-19.6}{2(-4.9)} = 2$$

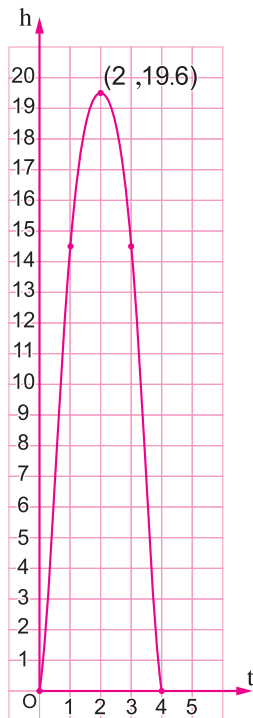
لاحظ عدم اختيار قيم سالبة للرمز t

t	$h(t)$	$(t, h(t))$
0	0	(0, 0)
1	14.7	(1, 14.7)
2	19.6	(2, 19.6)
3	14.7	(3, 14.7)
4	0	(4, 0)

$\therefore$ رأس المنحنى $(2, 19.6)$

$\therefore$ أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة $= 19.6$ متر

وزمن الوصول إلى أقصى ارتفاع $= 2$ ثانية.



■ تقييم ذاتي 4

عين رأس المنحنى والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة f حيث

$$f(x) = -(x+1)^2 + 3$$

وإذا كانت النقطة $(m, -1)$

تقع على المنحنى، فأوجد

قيمة m

■ تقييم ذاتي 5

إذا كانت الدالة h حيث

$$h(x) = -0.5x^2 + 2x + 6$$

تعبر عن العلاقة بين ارتفاع

سيارة $h(x)$ بالمتري تسير على

منحدر جبل والمسافة الأفقية

x بالمتري. ارسم منحنى الدالة،

واذكر أقصى ارتفاع تبدأ فيه

السيارة بالنزول.



نشاط تكنولوجيا استخدام الآلة الحاسبة فى رسم الدالة التربيعية

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى تكوين الجدول المستخدم فى رسم الدالة التربيعية. والخطوات التالية توضح كيفية تكوين جدول رسم الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باستخدام الآلة الحاسبة.

1

يجب أولاً ضبط نظام الآلة على نظام (Table)، وذلك بالضغط على مفتاح  ثم اختيار نظام (Table)

2

أدخل البيانات : اكتب قاعدة الدالة السابقة، وذلك بالضغط على المفاتيح التالية :



3

اضغط على المفتاح  ثم فى بداية الفترة  اكتب  2 ثم اضغط 

4

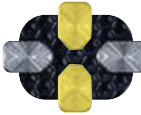
اكتب فى نهاية الفترة END الرقم 4 ثم اضغط 

5

حدد طول الفترة STEP P واختر الرقم 1 ثم اضغط 

	x	$F(x)$
1	-2	5
2	-1	0
3	0	-3

وبذلك يتم إنشاء الجدول كما بالشاشة المقابلة

، ويمكن التنقل باستخدام المفاتيح  إلى أعلى وإلى أسفل.



تقييم الدرس

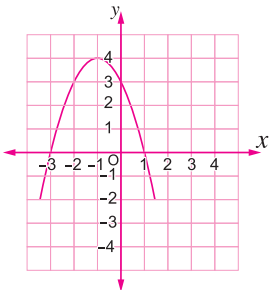


قياس المفاهيم

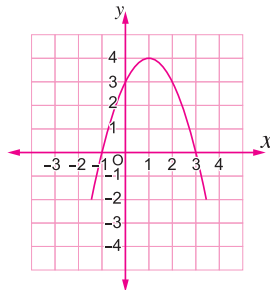
أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

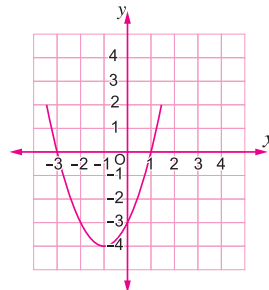
- ① ما رأس المنحنى للدالة $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ حيث $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ ؟
 (أ) $(2, 3)$ (ب) $(2, 1)$ (ج) $(-3, 1)$ (د) $(3, 1)$
- ② إذا كانت (h, k) هي رأس المنحنى للدالة $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$ حيث $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$ ، فما قيمة h ؟
 (أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8
- ③ ما نقطة تقاطع منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 3x - 5$ حيث $f(x) = x^2 - 3x - 5$ مع المحور y ؟
 (أ) $(0, -5)$ (ب) $(0, -3)$ (ج) $(0, 3)$ (د) $(0, 5)$
- ④ ما القيمة الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 14$ حيث $f(x) = x^2 - 6x + 14$ ؟
 (أ) -6 (ب) 5 (ج) 9 (د) 14
- ⑤ إذا كانت الدالة $f(x) = (a+4)x^3 + x^2 - 5x + 6$ حيث $f(x) = (a+4)x^3 + x^2 - 5x + 6$ دالة تربيعية، فما قيمة a ؟
 (أ) -4 (ب) -5 (ج) 5 (د) 6
- ⑥ إذا كان -2 هو الإحداثي x لرأس منحنى الدالة $f(x) = ax^2 + 12x + 7$ حيث $f(x) = ax^2 + 12x + 7$ ، فما قيمة a ؟
 (أ) 3 (ب) 2 (ج) -2 (د) -3
- ⑦ ما المنحنى الذي يمثل الدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3$ حيث $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ؟



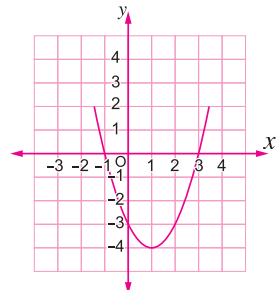
(د)



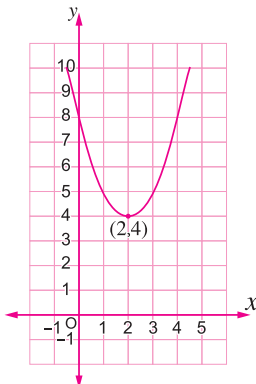
(ج)



(ب)



(أ)



- ⑧ إذا كان المنحنى المقابل يمثل الدالة التربيعية f فما هي قاعدة الدالة f ؟

(أ) $f(x) = (x+2)^2 + 4$

(ب) $f(x) = (x+4)^2 + 2$

(ج) $f(x) = (x-2)^2 + 4$

(د) $f(x) = (x-4)^2 + 2$



تطبيق المفاهيم

ثانيًا

9 مثل بيانيًا كلاً مما يأتي، موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة f ، وأوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة :

$$f(x) = x^2 - 3 \quad ②$$

$$f(x) = 6 + 2x - x^2 \quad ④$$

$$f(x) = (x + 3)^2 - 1 \quad ⑥$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 7 \quad ①$$

$$f(x) = 2x - x^2 \quad ③$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 \quad ⑤$$



التحليل وتكامل المواد

ثالثًا



10 رياضة : ركل لاعب الكرة في الهواء، ويمكن إيجاد ارتفاع الكرة عن

سطح الأرض h بالمتري عند أي لحظة زمنية t بالثانية باستخدام

$$h(t) = -(t - 4)^2 + 16 \quad \text{حيث } h$$

① ارسم الشكل البياني للدالة لقيم $0 \leq t \leq 8$

② استخدم التمثيل البياني لإيجاد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة،

والزمن اللازم لتعود إلى الأرض.

11 رمى السهام : يريد شخص إطلاق سهم فوق غصن شجرة أفقى

يرتفع 15 مترًا عن سطح الأرض. يُعطى ارتفاع السهم عن سطح

الأرض h بالأمتار بعد t ثانية من إطلاقه بالدالة h حيث

$$h(t) = -2t(t - 6)$$

① ارسم الشكل البياني لارتفاع السهم لقيم $0 \leq t \leq 6$

② استخدم التمثيل البياني لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه السهم.

هل السهم تجاوز الغصن ؟



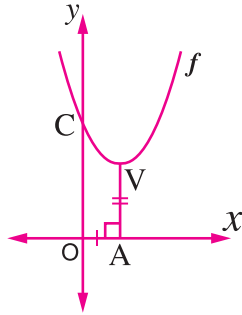
تفكير إبداعى

12 فى الشكل المقابل :

$$f(x) = x^2 - 2x + k + 1 \quad \text{حيث } f$$

يمثلها بيانيًا منحنى رأسه V فإذا كان $OA = \frac{1}{2} VA$

فأوجد قيمة k وإحداثيى النقطة C



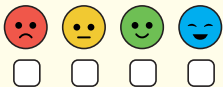
13 إذا كانت f دالة حيث $f(x) = x^2 - 10x + k$

وكانت رأس المنحنى V تبعد عن نقطة الأصل بمقدار 13 وحدة طول

فما قيم k الممكنة ؟

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للدالة التربيعية ؟
ضع علامة في المربع المناسب



مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود (Set of Real Zeros of Polynomial Functions)



العالم البريطاني ألكسندر فلمنج



استعد!

يُعد العالم البريطاني ألكسندر فلمنج من أبرز العلماء في تاريخ الطب، حيث اكتشف عام 1928م أول مضاد حيوي وهو البنسلين. تعتمد فاعلية المضادات الحيوية على الزمن، حيث يقل تركيزها في جسم الإنسان بمرور الزمن بعد تناولها حتى يتلاشي. يُعطى أحد المرضى جرعة من مضاد حيوي، ويُعبر عن كمية الدواء المتبقية في دمه بالمليجرام بعد t ساعة بالدالة c حيث:

$$c(t) = 9 - \frac{1}{4}t^2$$

بعد كم ساعة يختفي تأثير هذا المضاد الحيوي من جسم المريض؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 20x$ أوجد $f(0)$ ، $f(2)$ ماذا تلاحظ؟ وهل يمكنك إيجاد قيمة أخرى تكون عندها $f(x) = 0$ ؟ ناقش.



تعلم!

الدالة كثيرة الحدود

الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ والتي تكون على الشكل:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ أعداد حقيقية وجميع أسس المتغير x أعداد صحيحة موجبة،

$a_n \neq 0$ تكون دالة كثيرة حدود في متغير واحد من الدرجة n .

أمثلة لدوال كثيرات الحدود:

$$f(x) = x^3 - \sqrt{2}x + 1 \quad \bullet$$

$$f(x) = 2x - x^2 \quad \bullet$$

$$f(x) = 9 - 4x \quad \bullet$$

$$f(x) = 7 \quad \bullet$$

$$f(x) = 0 \quad \bullet$$

■ نواتج التعلم

- توجد مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود جبريًا.
- توجد مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات حدود مرسومة بيانيًا.
- تستخدم الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- دالة Function
- دالة كثيرة حدود Polynomial function
- أصفار الدالة Zeros of function
- حل المعادلة Solution of equation

■ فكر مع زملائك

هل كل من الدوال الآتية كثيرة حدود أم لا؟

$$f(x) = x^4 \quad \textcircled{1}$$

$$f(x) = 4x^2 \quad \textcircled{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \textcircled{3}$$

$$f(x) = -2x^{-3} \quad \textcircled{4}$$

■ ملاحظة

إذا كانت f دالة كثيرة حدود وكان a عددًا حقيقيًا بحيث $f(a) = 0$ فإن:

• a هو أحد أصفار كثيرة الحدود f

• $X = a$ هو أحد حلول المعادلة $f(X) = 0$

• $(X - a)$ هو أحد عوامل $f(X)$

مجموعة الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة الحدود

الأصفار الحقيقية لدالة هي قيم X الحقيقية التي تجعل $f(X)$ تساوى الصفر
أي أن: مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f هي $\{X : f(X) = 0, X \in \mathbb{R}\}$

فمثلاً: إذا كانت $f(X) = (X - 5)^2$

فإن 5 يكون صفراً للدالة f لأن: $f(5) = (5 - 5)^2 = 0$

لإيجاد الأصفار الحقيقية للدالة f نحل المعادلة $f(X) = 0$

مثال 1

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلي:

$$p(X) = X^2 - 25 \quad (2)$$

$$f(X) = X^3 + 2X^2 - 15X \quad (4)$$

$$g(X) = 27X^3 + 125 \quad (6)$$

$$f(X) = 3X - 6 \quad (1)$$

$$g(X) = X^2 - X - 12 \quad (3)$$

$$p(X) = 3X^2 + 12 \quad (5)$$

■ تقييم ذاتي 1

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلي:

$$p(X) = 5X - 10 \quad (1)$$

$$g(X) = 2X^2 - 18 \quad (2)$$

$$f(X) = X^3 - 8 \quad (3)$$

$$g(X) = X^3 + 2X^2 - 8X \quad (4)$$

■ لاحظ أن

• إذا كانت f حيث $f(X) = a$ ،
 a عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر
(دالة كثيرة حدود ثابتة)
فإن مجموعة أصفار الدالة f هي $\emptyset$

• إذا كانت f حيث $f(X) = 0$ (دالة كثيرة حدود صفرية)
فإن مجموعة أصفار الدالة f هي $\mathbb{R}$

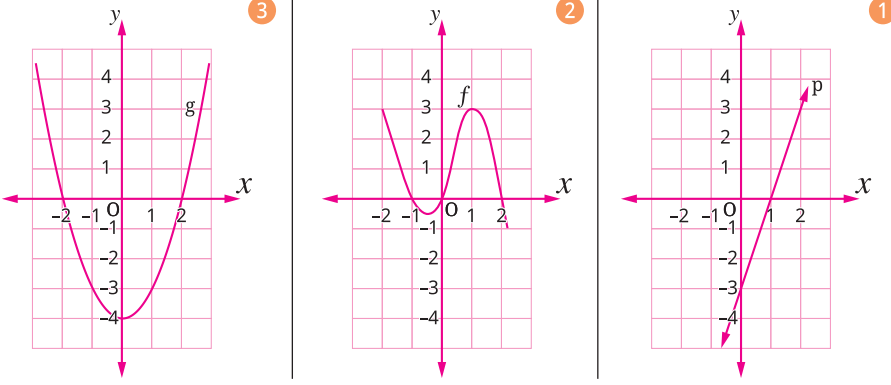
(2) بوضع $X^2 - 25 = 0$ $\therefore X^2 = 25 \quad \therefore X = \pm 5$ $\therefore$ مجموعة أصفار الدالة $p = \{-5, 5\}$	(1) بوضع $3X - 6 = 0$ $\therefore X = \frac{6}{3} = 2$ $\therefore$ مجموعة أصفار الدالة $f = \{2\}$
(4) بوضع $X^3 + 2X^2 - 15X = 0$ $\therefore X(X^2 + 2X - 15) = 0$ $\therefore X(X + 5)(X - 3) = 0$ $\therefore X = 0, \text{ أو } X = -5, \text{ أو } X = 3$ $\therefore$ مجموعة أصفار الدالة $f = \{0, -5, 3\}$	(3) بوضع $X^2 - X - 12 = 0$ $\therefore (X + 3)(X - 4) = 0$ $\therefore X = -3, \text{ أو } X = 4$ $\therefore$ مجموعة أصفار الدالة $g = \{-3, 4\}$
(6) بوضع $27X^3 + 125 = 0$ $\therefore X^3 = -\frac{125}{27}$ $\therefore X = \sqrt[3]{-\frac{125}{27}} = -\frac{5}{3}$ $\therefore$ مجموعة أصفار الدالة $g = \{-\frac{5}{3}\}$	(5) بوضع $3X^2 + 12 = 0$ $\therefore 3X^2 = -12$ $\therefore X^2 = -4$ $\therefore X = \pm\sqrt{-4}$ ليس لها جذور حقيقية $\therefore$ مجموعة أصفار الدالة p هي $\emptyset$

إيجاد الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة حدود مرسومة بيانياً

إذا قطع منحنى دالة كثيرة حدود f محور X فى النقطة $(a, 0)$ فإن a يكون صفراً للدالة f

مثال 2

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل من الدوال الممثلة بالمنحنيات التالية :



1) ∴ منحنى الدالة p يقطع محور X عند $X = 1$
∴ مجموعة أصفار الدالة p هى $\{1\}$

2) ∴ منحنى الدالة f يقطع محور X عند $X = -1, X = 0, X = 2$
∴ مجموعة أصفار الدالة f هى $\{-1, 0, 2\}$

3) ∴ منحنى الدالة g يقطع محور X عند $X = -2, X = 2$
∴ مجموعة أصفار الدالة g هى $\{-2, 2\}$

مثال 3

إذا كان -3 أحد أصفار الدالة كثيرة الحدود f حيث $f(x) = 2x^2 + bx + 3$
أوجد قيمة b ثم أوجد $f(4)$

∴ -3 أحد أصفار الدالة f حيث $f(x) = 2x^2 + bx + 3$

$$\therefore f(-3) = 0$$

$$\therefore 2(-3)^2 + b(-3) + 3 = 0$$

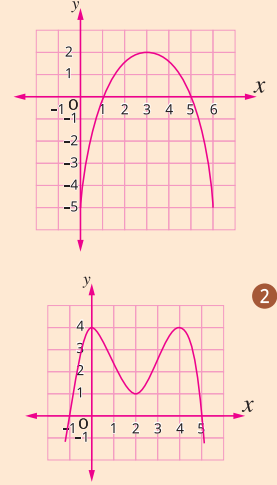
$$\therefore -3b = -21 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 7x + 3$$

$$\therefore f(4) = 2(4)^2 + 7(4) + 3 = 63$$

■ تقييم ذاتى 2

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل من الدالتين الممثلتين بالمنحنيين الآتيين :



■ لاحظ أن

عدد الأصفار الحقيقية المختلفة لدالة كثيرة حدود هو عدد نقاط تقاطع المنحنى الممثل للدالة مع محور X

■ تقييم ذاتى 3

إذا كان $0, 4$ هما صفرا الدالة كثيرة الحدود f حيث :

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

أوجد قيمة كل من a, b

ثم أوجد $f(-2)$



تقييم الدرس

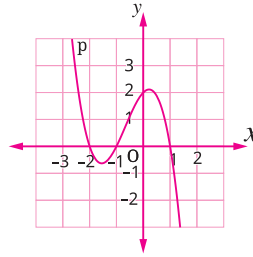


قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① ما مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = -3x$ ؟
 (أ) $\{3\}$ (ب) $\{-3\}$
 (ج) $\{0\}$ (د) $R - \{0\}$
- ② ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة p حيث $p(x) = x^2 + 25$ ؟
 (أ) $\{5\}$ (ب) $\{5, -5\}$
 (ج) $\{0\}$ (د) $\emptyset$
- ③ ما الأصفار الحقيقية للدالة p الموضحة في الشكل البياني ؟
 (أ) $2, 0$
 (ب) $-1, 0, 1$
 (ج) $-2, 2, 1$
 (د) $-2, -1, 1$
- ④ أي مما يلي تكون مجموعة أصفارها $\{-2, 0\}$ ؟
 (أ) $f(x) = x^2 - 2x$
 (ب) $f(x) = x^3 + 8$
 (ج) $f(x) = x^2 + 2x$
 (د) $f(x) = x^2 - 4$
- ⑤ ما مجموعة أصفار الدالة g حيث $g(x) = 3$ ؟
 (أ) $\{3\}$ (ب) $\{0\}$
 (ج) $\emptyset$ (د) R
- ⑥ إذا كان $(x+3)$ أحد عوامل $p(x)$ ، فأى مما يلي صحيح ؟
 (أ) $p(0) = 3$ (ب) $p(0) = -3$
 (ج) $p(3) = 0$ (د) $p(-3) = 0$
- ⑦ إذا كان 1 أحد أصفار الدالة p ، فأى مما يلي صحيح ؟
 (أ) $p(0) = 1$ (ب) $p(0) = -1$
 (ج) $p(1) = 0$ (د) $p(-1) = 0$
- ⑧ إذا كانت $\{-3, 3\}$ هي مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = x^2 + k$ فما قيمة k ؟
 (أ) ± 3 (ب) 9
 (ج) -9 (د) ± 9



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑨ أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلي :

- | | | |
|--------------------------|---------------------|-----------------------|
| $g(x) = 4x^2 + 9$ ③ | $f(x) = x^2 - 36$ ② | $f(x) = 2x - 16$ ① |
| $p(x) = x^2 - 3x + 2$ ⑥ | $p(x) = x^3 - x$ ⑤ | $p(x) = x$ ④ |
| $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ ⑨ | $p(x) = x^3 + 64$ ⑧ | $p(x) = 3x^2 - 12x$ ⑦ |

⑩ إذا كان -2 أحد أصفار الدالة f حيث $f(x) = x^2 + bx - 14$ ، فأوجد قيمة b

11) إذا كان $7 -$ أحد أصفار الدالة p حيث $p(x) = 2x^2 + 6x + c$ ، فأوجد قيمة c ، ومجموعة أصفار p

12) إذا كان 3 أحد أصفار الدالة g حيث $g(x) = x^2 - (k-5)x - 5k$ ، فأوجد قيمة k ، ثم أوجد مجموعة أصفار g



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً



تعد السياحة من أهم ركائز الاقتصاد في مصر، فهي تعد مصدراً مهماً للعملة الأجنبية.

13) **سياحة :** إذا كان عدد المشاهدات اليومية لأحد الأفلام القصيرة

للترويج للسياحة في مصر يتبع الدالة :

$$p(t) = -3t^2 + 18t + 165$$

حيث t عدد الأيام منذ عرض الفيلم.

في أي يوم يصل عدد المشاهدات صفراً ؟



تفكير إبداعي

14) أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلي :

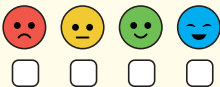
$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \quad ①$$

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 \quad ②$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 6 \quad ③$$

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لمجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود ؟
ضع علامة في المربع المناسب



دوال الكسور الجبرية النسبية (Rational Algebraic Functions)



طريق الجلالة



استعد!

يُعد طريق الجلالة بمصر أحد الإنجازات الهندسية التي أبهرت العالم، فقد تم شقه بين الجبال والصخور بطول 82 كيلو متر يبدأ الطريق بعد نهاية طريق القطامية حتى الزعفرانة.

سيارة تقطع مسافة قدرها $(X^2 + 8X + 12)$ كيلو متر في زمن قدره $(X^2 - X - 6)$ ساعة، أوجد سرعة السيارة في أبسط صورة، علمًا بأن: السرعة = المسافة ÷ الزمن.

في هذا الدرس سوف تتعلم دوال الكسور الجبرية النسبية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

ما قيم X التي تجعل الدالة f غير معرفة حيث $f(X) = \frac{X^2}{X^2 - 9}$ ؟

قام كل من حسن وحنان وأمجد بالإجابة عن السؤال السابق، وكانت إجاباتهم كالتالي :

أمجد
 f معرفة عند جميع قيم X الحقيقية

حنان
 f غير معرفة عند $X = \pm 3$

حسن
 f غير معرفة عند $X = 9$

أي منهم إجابته صحيحة ؟ ناقش.



تعلم!

الكسور الجبرية النسبية

الكسر الجبري النسبي هو نسبة بين كثيرتي حدود، ويكون معرفًا عند جميع الأعداد الحقيقية ما عدا مجموعة أصفار المقام.

أي أنه : إذا كانت $q(X)$ ، $p(X)$ كثيرتي حدود فإن :

$$\frac{p(X)}{q(X)} \text{ يُسمى كسرًا جبريًا نسبيًا حيث } q(X) \neq 0$$

فمثلاً :

$$\text{كسر جبري نسبي معرف عند جميع الأعداد الحقيقية ما عدا عند } X = -2 \text{ الكسر } \frac{X^2 - 1}{X + 2}$$

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم دالة الكسر الجبري النسبي.
- تعرف مجال دالة الكسر الجبري النسبي.
- تبسّط الكسر الجبري النسبي لأبسط صورة.
- تعرف مجموعة أصفار دالة الكسر الجبري النسبي.
- تستخدم دوال الكسور الجبرية النسبية لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- كسر جبري نسبي
- Rational algebraic fraction
- دالة كسر جبري نسبي
- Rational algebraic function
- Domain مجال
- أصفار الدالة
- Zeros of function

■ لاحظ أن :

الكسر الجبري بصفة عامة قد يحتوي كل من بسطه ومقامه على جذور أو أسس كسرية أو كثيرات حدود، أما الكسر الجبري النسبي يحتوي كل من بسطه ومقامه على كثيرات حدود فقط.

■ تقييم ذاتي ①

أوجد مجموعة قيم X التي تجعل الكسر الجبري النسبي غير معرف في كل مما يأتي :

$$\frac{X^2 + X}{X^2 - X - 2} \quad \frac{2X - 6}{X - 3} \quad \text{①}$$

■ التحقق من صحة الحل

يمكنك التحقق من صحة الحل في جزئية ① كما يلي :

بالتعويض عن قيمة $X = 1$:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{X - 3}{X^2 - 3X + 2} &= \frac{1 - 3}{1^2 - 3(1) + 2} \\ &= \frac{-2}{0} \quad (\text{غير معرف}) \end{aligned}$$

تحقق بنفسك بالتعويض عن قيمة $X = 2$

■ ناقش

هل تعتبر الدوال كثيرات الحدود دوال كسور جبرية نسبية أم لا ؟

■ تقييم ذاتي ②

عين مجال الدالة r حيث :

$$r(X) = \frac{2X + 1}{X^2 - 4X - 5}$$

ثم أوجد إن أمكن :

$$r(-1), r(0), r(5)$$

مثال ①

أوجد مجموعة قيم X التي تجعل الكسر الجبري النسبي غير معرف في كل مما يأتي :

$$\frac{X + 4}{X^2 + 16} \quad \frac{X - 3}{X^2 - 3X + 2} \quad \text{①}$$

$$X^2 + 16 = 0 \quad \text{② بوضع}$$

$$\therefore X^2 = -16$$

$$\therefore X = \pm \sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$$

∴ مجموعة أصفار المقام = ∅

∴ مجموعة قيم X التي تجعل الكسر

غير معرف = ∅

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \quad \text{① بوضع}$$

$$\therefore (X - 2)(X - 1) = 0$$

$$\therefore X - 2 = 0 \quad \text{أو} \quad X - 1 = 0$$

$$\therefore X = 2 \quad \text{أو} \quad X = 1$$

∴ مجموعة أصفار المقام = $\{1, 2\}$

∴ الكسر غير معرف عندما $X \in \{1, 2\}$

دوال الكسور الجبرية النسبية

إذا كان $\frac{p(X)}{q(X)}$ كسرًا جبريًا نسبيًا فإن :

الدالة f حيث $f(X) = \frac{p(X)}{q(X)}$ دالة كسر جبري نسبي مجالها هو مجموعة الأعداد

الحقيقية $\mathbb{R}$ ما عدا مجموعة أصفار المقام، ويُرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f

أي أن : $D_f = \mathbb{R} - \{X : q(X) = 0\}$

مثال ②

عين مجال كل من دوال الكسور الجبرية النسبية الآتية :

$$\text{① الدالة } f \text{ حيث } f(X) = \frac{X^2 - 25}{X - 5} \text{ ثم أوجد إن أمكن } f(5), f(-5)$$

$$\text{② الدالة } g \text{ حيث } g(X) = \frac{X^2 - 2X}{X^2 + X - 6} \text{ ثم أوجد إن أمكن } g(-3), g(0)$$

$$X - 5 = 0 \quad \text{① بوضع}$$

$$\therefore X = 5$$

∴ مجموعة أصفار المقام = $\{5\}$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{5\}$$

∴ $f(5)$ غير معرفة لأن : $5 \notin D_f$

$$\therefore -5 \in D_f \quad \therefore f(-5) = \frac{(-5)^2 - 25}{(-5) - 5} = \frac{0}{-10} = 0$$

■ ناقش

ما هو مجال دالة الكسر الجبري النسبي إذا كانت مجموعة أصفار المقام تساوي $\emptyset$ ؟

$$\textcircled{2} \text{ بوضع } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\therefore (x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x - 2 = 0 \quad , \quad x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad | \quad x = -3$$

$$\therefore \text{مجموعة أصفار المقام} = \{-3, 2\}$$

$$\therefore D_g = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$$

$$\therefore (-3) \notin D_g \text{ غير معرفة لأن: } -3 \notin D_g$$

$$\therefore 0 \in D_g \quad \therefore g(0) = \frac{(0)^2 - 2(0)}{(0)^2 + (0) - 6} = 0$$

تبسيط دوال الكسور الجبرية النسبية

يمكن تبسيط دالة الكسر الجبري النسبي بحذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام، مع احتفاظ الدالة بمجالها قبل الحذف.

مثال 3

$$\text{ضع الدالة } f \text{ في أبسط صورة حيث } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 6} \text{ موضعا مجالها،}$$

$$\text{ثم أوجد إن أمكن } f(1), f(2), f(3)$$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x-2)(x-3)} \text{ - حل كلاً من البسط والمقام:}$$

$$\text{- أوجد مجموعة أصفار المقام بوضع المقام = صفر}$$

$$\therefore (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x - 2 = 0 \quad , \quad x - 3 = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad | \quad x = 3$$

$$\therefore \text{مجموعة أصفار المقام} = \{2, 3\}$$

$$\text{- أوجد مجال الدالة } f$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$\text{- احذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام لتبسيط الدالة } f$$

$$\therefore f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x+5)}{(x-2)\cancel{(x-3)}} \quad \therefore f(x) = \frac{x+5}{x-2}$$

$$\therefore f(1) = \frac{1+5}{1-2} = -6$$

$$\therefore 2 \notin D_f, 3 \notin D_f$$

$$\therefore \text{لا يمكن تعيين قيمتي } f(2), f(3) \text{ بالدالة } f$$

■ تقييم ذاتي 3

ضع الدالة f في أبسط صورة حيث

$$f(x) = \frac{x^3 - 64}{x^2 - 3x - 4}$$

موضعا مجالها، ثم أوجد إن أمكن $f(4), f(-1), f(0)$

مجموعة أصفار الدالة f هى قيم x التى تجعل $f(x) = 0$

إذا كانت f دالة كسر جبرى نسبى حيث $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

فإن مجموعة أصفار الدالة f هى مجموعة أصفار البسط $p(x)$ فرق مجموعة أصفار المقام $q(x)$

أى أن : مجموعة أصفار الدالة $f = \{x : p(x) = 0, q(x) \neq 0\}$

مثال 4

أوجد مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 6}$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 6} \quad \therefore f(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+2)}$$

■ تحقق من صحة الحل

عوض عن قيمة $x=4$

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 6} \text{ فى}$$

$$f(4) = 0 \text{ تجد أن}$$

∴ مجموعة أصفار البسط = $\{3, 4\}$

مجموعة أصفار المقام = $\{3, -2\}$

∴ مجموعة أصفار الدالة f هى :

$$\{3, 4\} - \{3, -2\} = \{4\}$$

مثال 5

① إذا كانت : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $f(x) = 5$ فى R

② إذا كانت : $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $g(x) = 4$ فى R

$$\therefore g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$\therefore g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)}$$

$$\therefore D_g = R - \{1\}$$

$$\therefore g(x) = x + 3$$

$$\therefore g(x) = 4$$

$$\therefore x + 3 = 4$$

$$\therefore x = 4 - 3 = 1 \notin D_g$$

∴ مجموعة الحل = $\emptyset$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$\therefore D_f = R - \{2\}$$

$$\therefore f(x) = x + 2$$

$$\therefore f(x) = 5$$

$$\therefore x + 2 = 5$$

$$\therefore x = 5 - 2 = 3 \in D_f$$

∴ مجموعة الحل = $\{3\}$

■ تقييم ذاتى 4

أوجد مجموعة أصفار الدالة f حيث

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 + 2x^2}$$

■ تقييم ذاتى 5

① إذا كانت :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$$

فأوجد مجموعة حل المعادلة

$$f(x) = 3 \text{ فى } R$$

② إذا كانت :

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$$

فأوجد مجموعة حل المعادلة

$$g(x) = -1 \text{ فى } R$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

② أى من القيم الآتية تجعل الدالة f حيث $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ تساوى الصفر ؟

(أ) -3 (ب) 3 (ج) -2 (د) 2

④ ما مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2-25}{7}$ ؟

(أ) $\mathbb{R}$ (ب) $\{7\}$
(ج) $\mathbb{R} - \{7\}$ (د) $\{-5, 5\}$

⑥ إذا كان مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{2x}{x-a}$ يساوى $\mathbb{R} - \{-2\}$ فما قيمة a ؟

(أ) 1 (ب) -1 (ج) 2 (د) -2

⑦ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2-x+a}{x+2}$ هي $\{3\}$ فما قيمة a ؟

(أ) -6 (ب) -2 (ج) 3 (د) 6

① أى من القيم الآتية تجعل الكسر الجبرى $\frac{x-1}{x+2}$ غير معرف ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) -1 (د) -2

③ ما مجال الدالة g حيث $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2+4}$ ؟

(أ) $\mathbb{R} - \{2\}$ (ب) $\mathbb{R} - \{-2\}$
(ج) $\mathbb{R} - \{-4\}$ (د) $\mathbb{R}$

⑤ ما مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+2x}$ ؟

(أ) $\{0\}$ (ب) $\{2\}$ (ج) $\{-2\}$ (د) $\{2, 0\}$

اكتشف الخطأ :

⑧ قام كل من أمل ومجدى بتبسيط

الدالة f إلى أبسط صورة حيث

$$f(x) = \frac{4x+12}{x^2-x-12}$$

وإيجاد مجالها.

أى من الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

حل مجدى :

$$\therefore f(x) = \frac{4x+12}{x^2-x-12}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{x-4}$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

حل أمل :

$$\therefore f(x) = \frac{4x+12}{x^2-x-12}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3, 4\}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{x-4}$$

⑨ أوجد فى أبسط صورة الدالة f موضحاً مجالها فى كل مما يأتى :

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16} \quad ②$$

$$f(x) = \frac{6x+12}{2x^2+7x+6} \quad ④$$

$$f(x) = \frac{4x^2-8x-5}{15-x-2x^2} \quad ⑥$$

$$f(x) = \frac{2x-5}{5-2x} \quad ①$$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{3x-3} \quad ③$$

$$f(x) = \frac{16+16x+3x^2}{x^2-3x-28} \quad ⑤$$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑩ أوجد مجموعة أصفار الدالة f فى كل مما يأتى :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + x - 6} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{9 - 3x - 2x^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} \quad (5)$$

⑪ إذا كان مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{x + 6}{x^2 - ax + 36}$ هو $\mathbb{R} - \{6\}$ فأوجد قيمة a

⑫ إذا كانت : $f(x) = \frac{x + a}{x - b}$ ، وكانت $f(2)$ غير معرفة ، $f(5) = 2$ فأوجد قيمة كل من a ، b

⑬ إذا كانت : $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 15}{2x - 3}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $f(x) = 10$ فى $\mathbb{R}$

⑭ إذا كانت : $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $g(x) = -1$ حيث $x \in \mathbb{R}$



التحليل وتكامل المواد

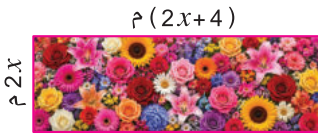
ثالثاً

⑮ زراعة : فى الشكل المقابل، حوضان للزهور على

شكل مستطيل لهما نفس المساحة. عبر عن k كدالة فى x وضعها فى أبسط صورة، ثم أوجد :

① قيمة k عند $x = 2$

② قيمة x عند $k = 4$



تفكير إبداعى

⑯ سؤال مفتوح : اكتب دالة كسر جبرى نسبى مجالها $\mathbb{R} - \{4, -2\}$

⑰ إذا كان حجم صندوق A هو $(x^3 - 2x^2 - 3x)$ وحدة مكعبة

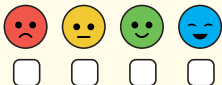
، وكان حجم صندوق B هو $(x^3 + 2x^2 - 15x)$ وحدة مكعبة،

فما نسبة حجم الصندوق A إلى حجم الصندوق B فى أبسط صورة ؟

وهل يمكن أن تكون النسبة بين حجميهما $\frac{1}{2}$ ؟

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لدوال الكسور
الجبرية النسبية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



المجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية (Common Domain and Equivalent Rational Algebraic Functions)



استعد!

إذا كان متوسط أعمار طالبات إحدى مدارس البنات يساوى $\left(\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 8x + 15}\right)$ سنة. وكان متوسط أعمار طلاب إحدى مدارس البنين يساوى $\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}\right)$ سنة. هل المدرستان لهما نفس متوسط الأعمار لجميع قيم x ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم المجال المشترك لدوال الكسور الجبرية النسبية، وشروط تساوى دوال الكسور الجبرية النسبية؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

إذا كانت: $g(x) = x + 2$ ، $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ فهل $f(2) = g(2)$ ؟ ولماذا؟



تعلم!

المجال المشترك لدوال الكسور الجبرية النسبية

المجال المشترك لدالتين هو تقاطع مجاليهما، أى مجموعة القيم التى تكون فيها الدالتان معرفتين معاً.

لأى دالتين f, g من دوال الكسور الجبرية النسبية إذا كان:

مجال f هو $R - Z_1$ حيث Z_1 مجموعة أصفار مقام $f(x)$

ومجال g هو $R - Z_2$ حيث Z_2 مجموعة أصفار مقام $g(x)$

فإن: المجال المشترك للدالتين f, g ، $D_f \cap D_g = R - (Z_1 \cup Z_2)$

أى أن

المجال المشترك لدالتين من دوال الكسور الجبرية النسبية يساوى جميع الأعداد الحقيقية ما عدا مجموعة أصفار المقامين.

■ نواتج التعلم

- توجد المجال المشترك لدالتين أو أكثر من دوال الكسور الجبرية النسبية.
- تعرف شروط تساوى دوال الكسور الجبرية النسبية.

■ المفردات

- المجال المشترك
Common domain
- الدوال المتساوية
Equivalent functions

■ ناقش

إذا كانت f, g دالتين من دوال الكسور الجبرية النسبية وكان:

مجال $f = R - \{1, 2\}$

، مجال $g = R - \{2, 3\}$

فأى العبارتين الآتيتين صحيحة:

① المجال المشترك $= R - \{2\}$

② المجال المشترك $= R - \{1, 2, 3\}$

مثال 1

أوجد المجال المشترك للدالتين f, g حيث :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}, g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \text{ بوضع } \checkmark$$

$$\therefore (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad \vee \quad x = -2$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ بوضع}$$

$$\therefore (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x - 2 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad \vee \quad x = 3$$

$$\therefore D_g = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$\therefore \text{المجال المشترك} = \mathbb{R} - \{-2, 2, 3\}$$

مثال 2

أوجد المجال المشترك للدوال f, g, p حيث :

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}, g(x) = \frac{5}{x^2 + 4}, p(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{2x + 3}$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ بوضع } \checkmark$$

$$\therefore (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$x^2 + 4 = 0 \text{ بوضع}$$

$$\therefore x^2 = -4$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

$$\therefore D_g = \mathbb{R}$$

$$2x + 3 = 0 \text{ بوضع}$$

$$\therefore 2x = -3$$

$$\therefore x = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore D_p = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3}{2}\right\}$$

$$\therefore \text{المجال المشترك للدوال } f, g, p = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3}{2}, -1, 1\right\}$$

■ تقييم ذاتي ①

أوجد المجال المشترك للدالتين f, g حيث :

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 49},$$

$$g(x) = \frac{x - 7}{x^2 - 10x + 21}$$

■ تقييم ذاتي ②

أوجد المجال المشترك للدوال f, g, p حيث :

$$f(x) = \frac{x + 4}{2},$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 4},$$

$$p(x) = \frac{7x}{x^2 - 2x}$$

تساوى دوال الكسور الجبرية النسبية

تتساوى دالتان من دوال الكسور الجبرية النسبية إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

- 1 تطابق المجال (أى الدالتان لهما نفس المجال تمامًا).
- 2 تكافؤ القاعدة (أى عند تبسيط القاعدتين إلى أبسط صورة، تكونان متطابقتين).

أى أن :

لأى دالتين f, g من دوال الكسور الجبرية النسبية تكون $f = g$ إذا تحقق الشرطان :

$$D_f = D_g \quad (1) \quad f(x) = g(x) \text{ لكل } x \in (D_f \cap D_g) \quad (2)$$

مثال 3

إذا كانت : $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$ ، $g(x) = \frac{4x}{4x - 12}$ ، فثبت أن : $f = g$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x-3)}$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{3\} , f(x) = \frac{x}{x-3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{4x}{4x - 12} = \frac{4x}{4(x-3)}$$

$$\therefore D_g = \mathbb{R} - \{3\} , g(x) = \frac{x}{x-3}$$

$$\therefore \text{مجال } f = \text{مجال } g , f(x) = g(x) \text{ لكل } x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\therefore f = g$$

مثال 4

إذا كانت : $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x}$ ، $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$ ، فثبت أن : $f(x) = g(x)$ لكل x تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين f, g وأوجد هذا المجال.

$$\therefore f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x(x-2)}$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\} , f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$\therefore D_g = \mathbb{R} - \{2\} , g(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\therefore \text{المجال المشترك للدالتين } f, g = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

■ لاحظ أن :

$$\therefore f(x) = g(x) \text{ لكل } x \text{ تنتمى إلى المجال المشترك } \mathbb{R} - \{0, 2\} \text{ مجال } f \neq \text{مجال } g$$

■ تقييم ذاتى 3

إذا كانت :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x}$$

$$g(x) = \frac{x^2+2x}{x^3+2x^2}$$

فثبت أن : $f = g$

■ تقييم ذاتى 4

إذا كانت :

$$f(x) = \frac{4}{4x-20}$$

$$g(x) = \frac{x+5}{x^2-25}$$

فثبت أن :

$$f(x) = g(x)$$

لكل x تنتمى إلى المجال المشترك، وأوجد هذا المجال.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختبر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ما المجال المشترك للدالتين g ، f إذا كانت : $f(x) = \frac{3}{x+2}$ ، $g(x) = \frac{-1}{x-2}$

(أ) $R - \{2\}$ (ب) $R - \{-2\}$ (ج) $R - \{-2, 2\}$ (د) R

② إذا كانت : $f(x) = \frac{x}{x(x-3)}$ ، $g(x) = \frac{1}{x-3}$

فأى من المجموعات الآتية تعبر عن مجموعة قيم x التى عندها $f(x) = g(x)$ ؟

(أ) $R - \{3\}$ (ب) $R - \{0\}$ (ج) $R - \{0, 3\}$ (د) R

③ إذا كانت : $f(x) = \frac{x}{x-k}$ ، $g(x) = \frac{-2}{x+3}$ وكان المجال المشترك للدالتين g ، f هو $R - \{-3\}$ فما قيمة k ؟

(أ) 3 (ب) -3 (ج) 0 (د) -2

اكتشف الخطأ :

④ قامت كل من دعاء وإيمان بالإجابة عن السؤال التالى :

إذا كانت : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x-5}$ ، $g(x) = \frac{x^2-x}{x^2-5x}$ فهل $f = g$ ؟

إجابة إيمان :

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)} \\ \therefore f(x) &= \frac{x-1}{x-5} \\ \therefore g(x) &= \frac{x(x-1)}{x(x-5)} \\ \therefore g(x) &= \frac{x-1}{x-5} \\ \therefore f(x) &= g(x) \\ \therefore f &= g \end{aligned}$$

إجابة دعاء :

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)} \\ \therefore D_f &= R - \{-1, 5\}, f(x) = \frac{x-1}{x-5} \\ \therefore g(x) &= \frac{x(x-1)}{x(x-5)} \\ \therefore D_g &= R - \{0, 5\}, g(x) = \frac{x-1}{x-5} \\ \therefore D_f &\neq D_g, f(x) = g(x) \\ \therefore f &\neq g \end{aligned}$$

أى منهما إجابتها صحيحة ؟ ناقش.



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑤ أوجد المجال المشترك للدالتين g ، f فى كل مما يأتى :

① $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$

② $f(x) = \frac{x^2-x-20}{x^2-3x-10}$ ، $g(x) = \frac{x^2-3x-10}{x^2-x-6}$

⑥ أوجد المجال المشترك للدوال f, g, k حيث $f(x) = \frac{x+2}{3}, g(x) = \frac{3}{x^2-9}, k(x) = \frac{5x}{x^2-3x}$

⑦ أثبت أن $f = g$ في كل مما يأتي :

$$g(x) = \frac{3x}{3x^2-12}, f(x) = \frac{x}{x^2-4} \quad ①$$

$$g(x) = \frac{x}{x-2}, f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} \quad ②$$

$$g(x) = \frac{6x}{6x+12}, f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+4x+4} \quad ③$$

⑧ في كل مما يأتي هل $f = g$ ؟ ولماذا ؟

$$g(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}, f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-16} \quad ①$$

$$g(x) = \frac{2x-6}{2x^2-10x+12}, f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6} \quad ②$$

⑨ عين قيم x التي تجعل $f(x) = g(x)$ للدالتين f, g في كل مما يأتي :

$$g(x) = \frac{1}{x+1}, f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad ①$$

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-3x}, f(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad ②$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-4}, f(x) = \frac{x+4}{x^2-16} \quad ③$$



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

⑩ تناسب :

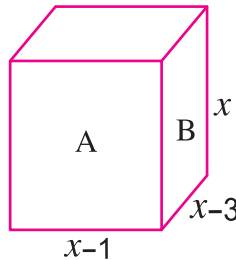
إذا كانت $x^2-9, x+3, x, x^2-3x$ أربع كميات متناسبة فما هي مجموعة قيم x الممكنة ؟



تفكير إبداعي

⑪ في الشكل المقابل : صندوق على شكل متوازي

مستطيلات. إذا كانت الدالة f معرفة بالنسبة بين مساحة الوجه A إلى المساحة الجانبية، الدالة g معرفة بالنسبة بين مساحة الوجه B والمساحة الجانبية، فاكتب كلاً من $f(x), g(x)$ موضعاً مجال كل من الدالتين g, f وأوجد المجال المشترك للدالتين.



قيم فهمك!

ما مدى فهمك للمجال المشترك
وتساوي دوال الكسور الجبرية
النسبية ؟
ضع علامة في المربع المناسب



العمليات على الكسور الجبرية النسبية

(Operations on Rational Algebraic Fractions)



استعد!

لكي يحصل خالد على تقدير ممتاز في امتحان الرياضيات في السنة الأخيرة من دراسته الجامعية لا بد وأن يكون مجموع درجاته 8 على الأقل.

فإذا كانت درجاته في امتحان الفصل الدراسي

$$\frac{3x^2 + 16x + 21}{x^2 + 5x + 6}$$

ودرجاته في امتحان الفصل الدراسي

$$\frac{5x^2 + 34x + 45}{x^2 + 7x + 10}$$

فهل سيحصل خالد على تقدير ممتاز ؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم العمليات على الكسور الجبرية النسبية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

$$f(x) = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3}$$

كتب سامح : إذا كانت $f(x) = 1$ لجميع قيم x الحقيقية. هل ما كتبه سامح صحيح ؟ ولماذا ؟ ناقش.



تعلم!

أولاً جمع وطرح الكسور الجبرية النسبية

عمليتا جمع وطرح الكسور الجبرية النسبية تماثل عمليتي جمع وطرح الأعداد النسبية متبعا الخطوات التالية :

- 1 تحليل بسط ومقام كل كسر ثم اختزاله على حدة إن امكن.
- 2 توحيد المقامات ثم إجراء عملية الجمع أو الطرح.
- 3 وضع الناتج النهائي في أبسط صورة.

فمثلاً : بفرض أن الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة فإن :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{2x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x+1} &= \frac{2x-1+x+3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1} \\ \textcircled{2} \quad \frac{x^2-x}{x^2+2x-3} + \frac{3}{x+3} &= \frac{x(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{3}{x+3} = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3} \\ &= \frac{x+3}{x+3} = 1 \\ \textcircled{3} \quad \frac{2}{x} - \frac{2}{1+x} &= \frac{2(1+x)}{x(1+x)} - \frac{2(x)}{x(1+x)} = \frac{2+2x-2x}{x(1+x)} = \frac{2}{x(1+x)} \end{aligned}$$

■ نواتج التعلم

- تجرى العمليات على الكسور الجبرية النسبية.
- تعرف مفهوم المعكوس الجمعي، والمعكوس الضربي للكسر الجبري النسبي.
- تعرف خواص العمليات على الكسور الجبرية النسبية.

■ المفردات

- الكسور الجبرية النسبية
Rational algebraic fractions
- مقلوب الدالة
Reciprocal of the function

■ معلومة سابقة

جمع وطرح الأعداد النسبية :

إذا كانت $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ ، أعداداً نسبية فإن :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \quad \textcircled{1}$$

فمثلاً :

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd} \quad \textcircled{2}$$

فمثلاً :

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} - \frac{1}{3} &= \frac{3 \times 3}{7 \times 3} - \frac{1 \times 7}{7 \times 3} \\ &= \frac{9}{21} - \frac{7}{21} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

مثال 1

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحًا مجال f في كل مما يأتي :

■ لاحظ أن

مجال دالة جمع أو طرح كسرين جبريين يساوي جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم x التي تجعل مقامى الكسرين يساويان الصفر.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} + \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x + 3} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3x + 3}{x^2 - x - 2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)}$$

① حل كل كسر جبرى :

$$D_f = \mathbb{R} - \{3, -2, 1\}$$

أوجد مجال f :

بسّط كل كسر جبرى واجمع، ثم بسّط الناتج :

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3} + \frac{x-4}{x-3} = \frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)} - \frac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)} \quad (2)$$

② حل كل كسر جبرى :

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 2, -1\}$$

أوجد مجال f :

$$f(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-2} = \frac{-1}{x-2}$$

بسّط كل كسر جبرى واطرح :

مثال 2

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحًا مجال f حيث :

$$f(x) = \frac{2x+4}{x^2-4} + \frac{3x+3}{x^2-1}$$

ثم أوجد : $f(-1)$ ، $f(3)$ ، إن أمكن.

$$f(x) = \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2, -1, 1\}$$

$$f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1) + 3(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{2x-2+3x-6}{(x-2)(x-1)} = \frac{5x-8}{(x-2)(x-1)}$$

$$f(3) = \frac{5 \times 3 - 8}{(3-2)(3-1)} = 3.5$$

$f(-1)$ غير معرفة لأن $-1 \notin D_f$

■ تقييم ذاتى ①

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحًا مجال f في كل مما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x} \quad (1)$$

$$+ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 15}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x - 5} \quad (2)$$

$$- \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x}$$

■ لاحظ أن

يجب إيجاد مجال الدالة قبل التبسيط.

■ تقييم ذاتى ②

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحًا مجال f حيث :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x} - \frac{x+2}{x^2-4}$$

ثم أوجد : $f(-2)$ ، $f(4)$

■ خواص عملية جمع الكسور الجبرية النسبية

① الإبدال.

② الدمج.

③ الصفر هو المحايد الجمعى.

④ توفر المعكوس الجمعى.

■ لاحظ أن

الكسر الجبرى النسبى $\frac{p(x)}{q(x)}$

له معكوس جمعى على الصورة

$$\frac{p(x)}{q(x)} \text{ أو } -\frac{p(x)}{q(x)} \text{ أو } \frac{p(x)}{q(x)}$$

ثانياً ضرب الكسور الجبرية النسبية

عملية ضرب الكسور الجبرية النسبية تماثل تماماً عملية ضرب الأعداد النسبية متبعا الخطوات التالية :

- 1 تحليل بسط ومقام كل كسر تحليلًا كاملاً إن أمكن.
- 2 حذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام كل كسر ، وبين بسط أحد الكسور ومقام كسر آخر.
- 3 إجراء عملية الضرب ووضع الناتج النهائي في أبسط صورة.

فمثلاً : بفرض أن الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة فإن :

$$1 \quad \frac{2x}{x-1} \times \frac{2x-2}{x^2+3x} = \frac{2x}{x-1} \times \frac{2(x-1)}{x(x+3)} = \frac{4}{x+3}$$

$$2 \quad \frac{x^2-25}{x^2+5x} \times \frac{3x^2+18x}{x^2+x-30} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x+5)} \times \frac{3x(x+6)}{(x+6)(x-5)} = 3$$

مثال 3

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحاً مجال f في كل مما يأتي :

■ لاحظ أن

مجال دالة حاصل ضرب كسرين جبريين يساوي جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم x التي تجعل مقامى الكسرين يساويان الصفر.

$$f(x) = \frac{x^2+x-20}{x-3} \times \frac{2x^2-6x}{x^2+3x-10} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} \times \frac{x^2+6x+8}{4-x^2} \quad 2$$

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-4)}{x-3} \times \frac{2x(x-3)}{(x+5)(x-2)} \quad 1 \quad \text{حل كل كسر جبرى :}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3, -5, 2\} \quad \text{أوجد مجال } f :$$

$$f(x) = \frac{2x(x-4)}{x-2} \quad \text{بسط وأجر عملية الضرب :}$$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+4)} \times \frac{(x+4)(x+2)}{(2-x)(2+x)} \quad 2 \quad \text{حل كل كسر جبرى :}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3, -4, 2, -2\} \quad \text{أوجد مجال } f :$$

■ لاحظ أن

بسط وأجر عملية الضرب، ثم بسط الناتج :

$$\begin{aligned} x+2 &= 2+x \\ 2-x &= -(x-2) \end{aligned} \quad f(x) = \frac{x-2}{2-x} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$$

■ معلومة سابقة

ضرب الأعداد النسبية :
إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عددين نسبيين

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{فإن :}$$

فمثلاً :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$$

■ تقييم ذاتي 3

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحاً مجال f في كل مما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-3x-4} \quad 1$$

$$\times \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-15}{9-x^2} \quad 2$$

$$\times \frac{x^2-3x-18}{x^2-7x+6}$$

■ خواص عملية ضرب الكسور الجبرية النسبية

- 1 الإبدال.
- 2 الدمج.
- 3 الواحد هو المحايد الضربى.
- 4 توفر المعكوس الضربى لكل كسر جبرى نسبى لا يساوى الصفر.

مقلوب دالة الكسر الجبري النسبي

إذا كانت $f(x)$ دالة كسر جبري نسبي فإن مقلوب دالة الكسر الجبري النسبي $g(x)$ هو $g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ ومجال دالة المقلوب هو جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم x التي تجعل بسط ومقام الدالة $f(x)$ يساويان الصفر.

فمثلاً:

إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ دالة مجالها $R - \{-3\}$ فإن مقلوب الدالة هو $g(x)$ حيث

$$g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{x+3}{x-2}$$

ومجال الدالة g هو $R - \{-3, 2\}$

مثال 4

أوجد في أبسط صورة $g(x)$ مقلوب الدالة $f(x)$ حيث $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x-10}$ موضعاً مجال g ، ثم أوجد $g(-2)$ ، وإذا كان $g(x) = \frac{1}{2}$ فأوجد قيمة x

$$\therefore f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x-10} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

$$\therefore g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\therefore D_g = R - \{1, -2, 5\}, \quad g(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

$g(-2)$ غير معرفة لأن $-2 \notin D_g$

$$g(x) = \frac{1}{2} \text{ بوضع}$$

$$\therefore \frac{x-5}{x-1} = \frac{1}{2} \quad \therefore 2x-10 = x-1 \quad \therefore x=9 \in D_g$$

القسم الثاني: قسمة الكسور الجبرية النسبية

عملية قسمة الكسور الجبرية النسبية تماثل تماماً عملية قسمة الأعداد النسبية أي أن عملية قسمة كسرين تتحول إلى ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني.

فمثلاً: بفرض أن الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة والكسر الثاني لا يساوي الصفر فإن:

$$① \frac{3}{x} \div \frac{x-2}{x} = \frac{3}{x} \times \frac{x}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$

$$② \frac{x^2+12x+20}{x^2-3x-10} \div \frac{x^2+10x}{x-5} = \frac{(x+2)(x+10)}{(x+2)(x-5)} \div \frac{x(x+10)}{x-5}$$

$$= \frac{(x+2)(x+10)}{(x+2)(x-5)} \times \frac{x-5}{x(x+10)} = \frac{1}{x}$$

■ لاحظ أن

الكسر الجبري النسبي $\frac{p(x)}{q(x)}$ له معكوس ضربي على الصورة $\frac{q(x)}{p(x)}$ ويكون هذا المعكوس معرفاً لكل $p(x) \neq 0, q(x) \neq 0$

■ تقييم ذاتي 4

أوجد في أبسط صورة $g(x)$ مقلوب الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$$

موضعاً مجال g ، ثم أوجد $g(2)$

$$g(x) = \frac{1}{3} \text{ وإذا كان}$$

فأوجد قيمة x

■ معلومة سابقة

قسمة الأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \left(\frac{c}{d} \neq 0\right)$$

فمثلاً:

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

■ لاحظ أن

مجال دالة خارج قسمة كسرين جبريين يساوي جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم X التي تجعل مقامى الكسرين يساويان الصفر وقيم X التي تجعل بسط الكسر المقسوم عليه يساوي الصفر.

مثال 5

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

$$f(X) = \frac{X^2 + 2X + 1}{1 - X^2} \div \frac{X^2 + 5X + 4}{X^2 + 3X - 4} \quad (1)$$

$$f(X) = \frac{2X^2 + 5X + 2}{2X^2 + 3X - 2} \div \frac{3X^2 + 13X + 4}{2X^2 + 7X - 4} \quad (2)$$

$$f(X) = \frac{(X+1)(X+1)}{(1-X)(1+X)} \div \frac{(X+1)(X+4)}{(X-1)(X+4)} \quad (1) \text{ حل كل كسر جبرى :}$$

$$D_f = R - \{1, -1, -4\}$$

أوجد مجال f :

حول القسمة إلى ضرب، وذلك بالضرب فى المعكوس الضربى للمقسوم عليه :

$$f(X) = \frac{(X+1)(X+1)}{(1-X)(1+X)} \times \frac{(X-1)(X+4)}{(X+1)(X+4)} \\ = \frac{X-1}{1-X} = \frac{X-1}{-(X-1)} = -1 \quad \text{أجر عملية الضرب، ثم بسط الناتج :}$$

$$f(X) = \frac{(2X+1)(X+2)}{(2X-1)(X+2)} \div \frac{(3X+1)(X+4)}{(2X-1)(X+4)} \quad (2)$$

$$D_f = R - \left\{\frac{1}{2}, -2, -4, \frac{-1}{3}\right\}$$

$$f(X) = \frac{(2X+1)(X+2)}{(2X-1)(X+2)} \times \frac{(2X-1)(X+4)}{(3X+1)(X+4)} = \frac{2X+1}{3X+1}$$

■ تقييم ذاتى 5

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

$$f(X) = \frac{X^2 - X - 2}{X^2 - 4X - 5} \div \frac{4 - X^2}{X^2 - 3X - 10} \quad (1)$$

$$f(X) = \frac{X^3 - 27}{X^2 + X - 12} \div \frac{X^2 + 3X + 9}{2X + 8} \quad (2)$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} \quad (ب) \quad \frac{1}{(x-2)(x+2)} \quad (أ)$$

$$\frac{2x}{(x-2)(x+2)} \quad (د) \quad \frac{4}{(x-2)(x+2)} \quad (ج)$$

$$f(X) = \frac{X-2}{X+3} \quad \text{ما مجال مقلوب الدالة } f \text{ حيث ؟} \quad (4)$$

$$R - \{-2\} \quad (ب) \quad R - \{2\} \quad (أ)$$

$$R - \{-2, 3\} \quad (د) \quad R - \{2, -3\} \quad (ج)$$

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-2} = \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{2-x}{2(x-2)} \quad (ب) \quad -1 \quad (أ)$$

$$\frac{x+2}{x-2} \quad (د) \quad \frac{x}{x-2} \quad (ج)$$

$$\text{أى مما يأتى لا يمثل المعكوس الجمعى} \quad (3)$$

$$\frac{x+2}{x-3} \quad \text{للكسر الجبرى ؟}$$

$$\frac{x+2}{3-x} \quad (ب) \quad -\frac{x+2}{x-3} \quad (أ)$$

$$\frac{-x-2}{x-3} \quad (د) \quad \frac{x-3}{x+2} \quad (ج)$$

6 ما مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-2}{x+3} \div \frac{x}{x-5}$ ؟

(أ) $R - \{-3\}$ (ب) $R - \{2, -3, 0, 5\}$

(ج) $R - \{2, -3, 5\}$ (د) $R - \{-3, 5, 0\}$

8 إذا كانت $f(x) = \frac{4}{3x} + \frac{5}{3x}$ فإن $[f(x)]^{-1} = \dots\dots\dots$ ؟

(أ) $\frac{3}{x}$ (ب) $\frac{x}{3}$

(ج) $\frac{6}{x}$ (د) $\frac{x}{6}$

5 $\frac{x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{x}{x-1}$ (ب) $\frac{x-1}{x}$

(ج) $\frac{x}{x+1}$ (د) $\frac{x+1}{x}$

7 إذا كانت $g(x)$ هي مقلوب الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-5}{x+7}$ وكانت $g(k) = \frac{3}{2}$ فما قيمة k ؟

(أ) 2 (ب) 3

(ج) 29 (د) -29

9 اكتشف الخطأ في كل مما يأتي :

$$\frac{x}{x+1} - \frac{5}{x+3} = \frac{x-5}{(x+1)(x+3)}$$

$$\frac{2}{x-2} \times \frac{5x}{x^2-5x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{-4}{2-x} + \frac{2x}{x-2} = \frac{-4}{2-x} - \frac{2x}{2-x} = \frac{-4-2x}{2-x} = \frac{-2(2-x)}{2-x} = -2$$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

10 أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة (افرض أن جميع الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة) :

3 $\frac{x}{3} - \frac{4}{x}$

2 $\frac{2}{x-5} + \frac{x^2-27}{x-5}$

1 $\frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2}$

6 $\frac{3x-6}{5x-20} \times \frac{10x-40}{27x-54}$

5 $\frac{x}{x+3} \div \frac{x^2}{x^2+3x}$

4 $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$

11 أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحاً مجال f في كل مما يأتي :

2 $f(x) = \frac{x^2+6x}{x^2+5x} + \frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}$

1 $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+2x}$

4 $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} - \frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$

3 $f(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8} + \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 13x + 42} \times \frac{x^2 + 7x + 10}{20 - x - x^2} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{3x - 15}{x + 4} \div \frac{5 - x}{6x + 24} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{6x^2 + 13x + 6}{4x^2 - 9} \div \frac{6x^2 + x - 2}{4x^2 - 1} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3x + 15}{x^2 + 7x + 10} - \frac{x + 5}{x^2 + 6x + 5} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^2 + 2x - 15} \times \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 + 3x - 28} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^2 + 7x + 3} \times \frac{x^2 - 7x - 30}{x^2 - 6x - 40} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - x - 6} \div \frac{2x^2 - 3x}{4x^2 - 9} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x^2 + 2x - 8} + \frac{3x + 6}{x^2 - 4} \quad (12)$$

أوجد $f(x)$ في أبسط صورة موضحة مجال f حيث

ثم أوجد إن أمكن $f(5)$ ، $f(-2)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \div \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3} \quad (13)$$

أوجد $f(k) = \frac{3}{4}$ ، وإذا كانت $f(k)$ أوجد قيمة k



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x} \quad \text{وحدة مساحة} \quad \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 2} \quad \text{وحدة ارتفاع} \quad (14)$$

أوجد طول قاعدته بدلالة x في أبسط صورة.



تفكير إبداعي

$$\frac{x^2 + ax - b}{x^2 - 2x - 15} \times \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 16} = \frac{x - 7}{x + 3} \quad (15)$$

إذا كان $a + b$ أوجد قيمة :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{b - x} \quad (16)$$

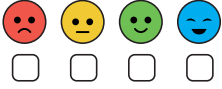
إذا كان مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{b - x}$ هو $R - \{0, 4\}$ وكانت $f(2) = 3$

أوجد قيمة كل من a ، b

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للعمليات على
الكسور الجبرية النسبية ؟
ضع علامة في المربع المناسب





ما مدى فهمك للوحدة الثانية ؟
ضع علامة في المربع المناسب

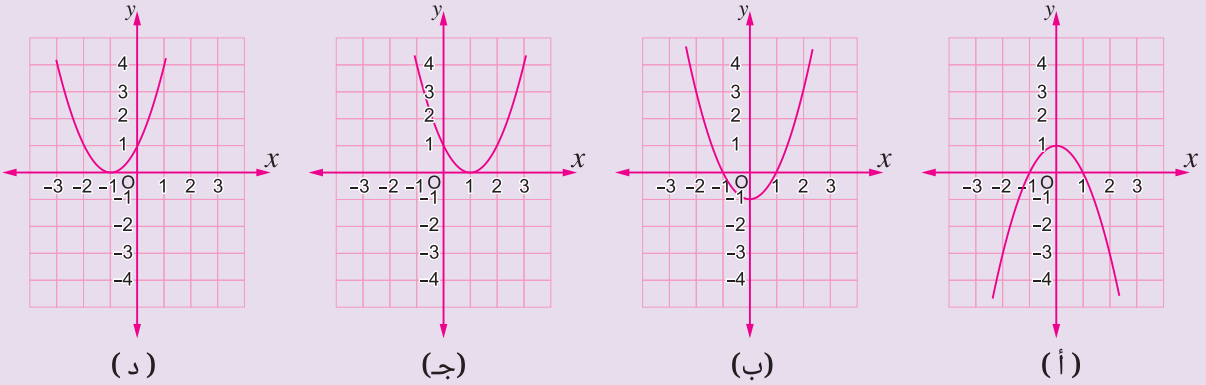
تقييم الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f حيث $f(x) = x^2 + 4$ ؟

- (أ) $\{-2\}$ (ب) $\{2\}$ (ج) $\{-2, 2\}$ (د) $\emptyset$

② ما الشكل البياني الذي يمثل الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 1$ ؟



③ ما مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$ ؟

- (أ) $\mathbb{R}$ (ب) $\mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$ (ج) $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ (د) $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

④ ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 + x}{x^2}$ ؟

- (أ) $\emptyset$ (ب) $\mathbb{R}$ (ج) $\{0, 1, -3\}$ (د) $\{0, 1\}$

أكمل كلاً مما يأتي :

⑤ إذا كانت : $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$ فإن مجموعة قيم x التي تجعل $f(x) = \frac{3}{5}$ هي

⑥ رأس المنحنى للدالة f حيث $f(x) = (x - 3)^2 + 1$ هو

⑦ المجال المشترك للدالتين f_1, f_2 حيث $f_1(x) = \frac{x - 7}{x + 1}$ ، $f_2(x) = \frac{x + 3}{x(x - 7)}$ هو

⑧ الدالة f حيث $f(x) = x^2 + 3x - 4$ تقطع محور y في النقطة

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

9) إذا كانت : $f_1(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2}$ ، $f_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - x}$ فأثبت أن : $f_1 = f_2$

10) أوجد في أبسط صورة $f(x)$ موضحًا مجال f إذا كانت : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x} + \frac{x-2}{x^2 - 4}$

11) إذا كانت : $p(x) = \frac{x^2 - 25}{5x - x^2}$ فأوجد مجال $[p(x)]^{-1}$

12) مثل بيانيًا الدالة f حيث $f(x) = (x-1)^2 + 3$ موضحًا على الرسم محور التماثل

وأوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.



الدالة التربيعية

نشاط الوحدة الثانية

◀ الهدف من النشاط :

فهم الدالة التربيعية، واستخدام التكنولوجيا في رسمها
ودراسة منحناها.

◀ خطوات التنفيذ :

بالتعاون مع أحد زملائك حاول القيام بما يلي :

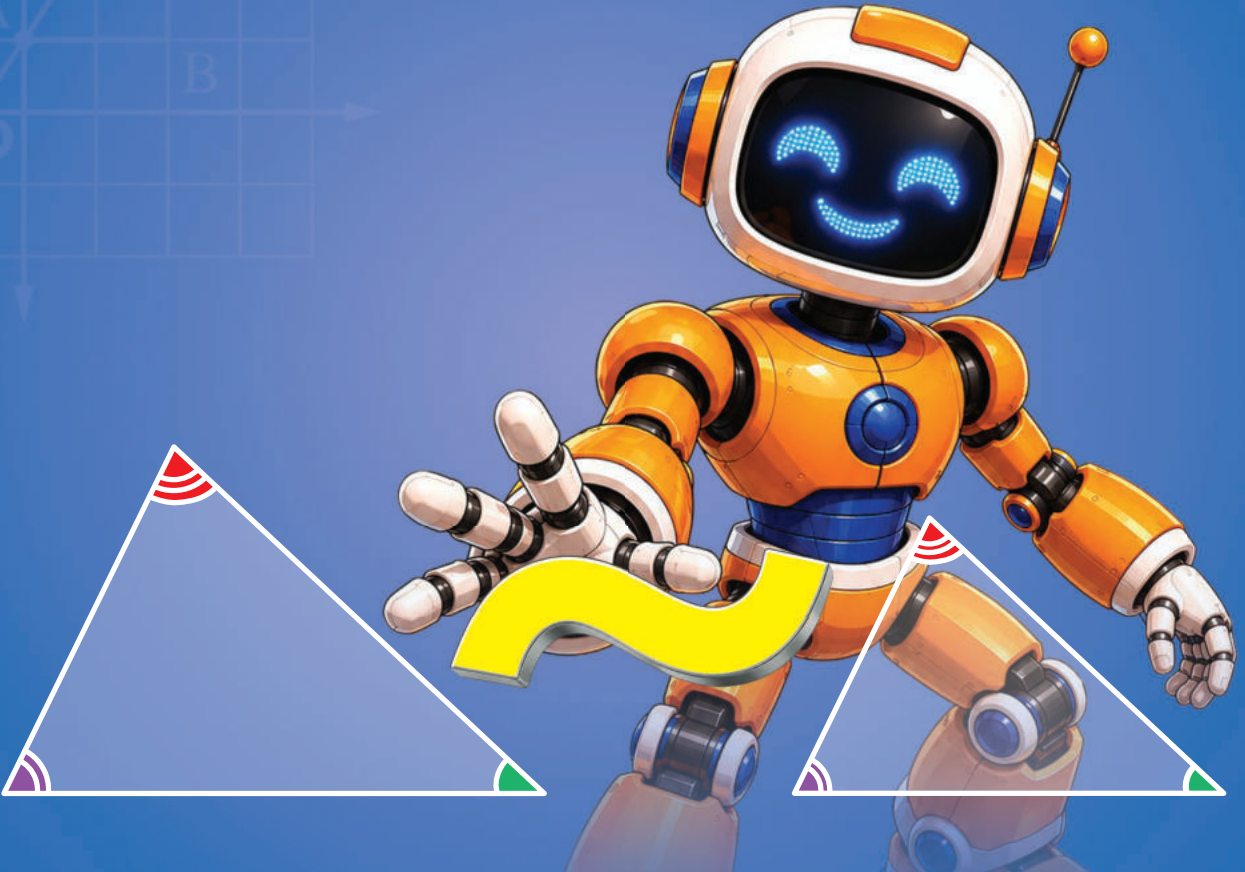
- 1) ابحث باستخدام مصادر مختلفة مثل (كتب مكتبة مدرستك - الإنترنت - أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعي - ...) عن مواقف في مجالات مختلفة يمكن تمثيلها بدالة تربيعية، مثل : حركة المقذوفات - تصميم الجسور والأقواس - تصميم أنظمة رش المياه في الأراضي الزراعية.
- 2) اختر أيًا منها، ثم استخدم أحد البرامج التفاعلية مثل **GeoGebra** في رسم هذه الدالة.
- 3) استخدم ما تعلمته عن الدالة التربيعية وارسم منحنى الدالة، ثم حدد رأس المنحنى وفسر معناه في سياق المشكلة.
- 4) وضح خطوات الحل، مع التأكيد على كيفية الاستفادة من طريقة رسم منحنى الدالة التربيعية في حالة عدم إتاحة برامج تفاعلية لرسم الدوال.

الوحدة 3

الهندسة

دروس الوحدة

- 3-1 تشابه المضلعات
- 3-2 تشابه المثلثات
- 3-3 التمدد
- 3-4 النسب المثلثية للزاوية الحادة
- 3-5 النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
- 3-6 العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين
- 3-7 معادلة الخط المستقيم



تُعد معادلة الخط المستقيم من الأسس الرياضية التى تساعد أنظمة الذكاء الاصطناعى على فهم الأنماط واتخاذ القرارات بشكل دقيق، والوصول لحل بعض من المشكلات الهندسية. **هل يمكن استخدام القوانين الهندسية فى الوصول إلى حلول أكثر تعقيداً فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى؟**

القيم

- الوعى البيئى.
- الوعى الحضارى.
- التذوق الجمالى.
- العمل الجماعى.

القضايا والمهارات

- التواصل الرياضى.
- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.
- التنمية المستدامة.

تشابه المضلعات

(Similarity of Polygons)



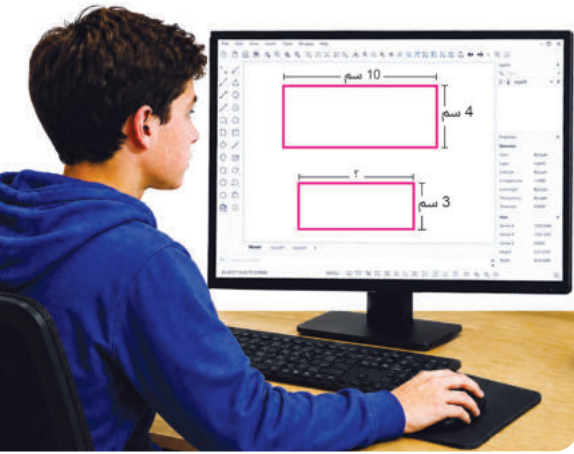
استعد!

برع المصريون القدماء في نحت تماثيل ضخمة لملوكهم لتزيين المعابد. ولتنشيط السياحة، يصنع المصريون اليوم نماذج تذكارية مصغرة تحاكي تلك التماثيل الأصلية بدقة عالية. أمامك تمثال الملك تحتمس الثالث أحد أعظم حكام الدولة الحديثة بمصر القديمة، كم يبلغ ارتفاع نموذج مصغر له عرضه 5 سم؟

في هذا الدرس سوف تتعرف على شروط تشابه المضلعات؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

■ نواتج التعلم

- تعرف شروط تشابه مضلعين.
- تعرف نسبة التشابه.
- تستخدم خواص التشابه في حل بعض المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

استخدم مروان أحد برامج الرسم الهندسي للحصول على نسخة مصغرة من المستطيل فكم يكون طول المستطيل في النسخة المصغرة؟



تعلم!

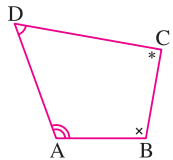
■ المفردات

- Similarity التشابه
- Similarity ratio نسبة التشابه

تشابه مضلعين

يتشابه المضلعان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

- 1 زواياهما المتناظرة متساوية في القياس. 2 أضلاعهما المتناظرة أطوالها متناسبة.



إذا كان المضلعان ABCD ، EFGH فيهما :

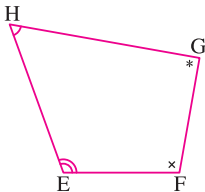
$$m(\angle A) = m(\angle E) , m(\angle B) = m(\angle F) \quad 1$$

$$m(\angle C) = m(\angle G) , m(\angle D) = m(\angle H)$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k \quad 2$$

فإن : المضلع ABCD ~ المضلع EFGH

حيث k هي نسبة تشابه المضلع ABCD إلى المضلع EFGH



■ لاحظ أن

عند كتابة المضلعين المتشابهين يجب كتابتهما بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة.

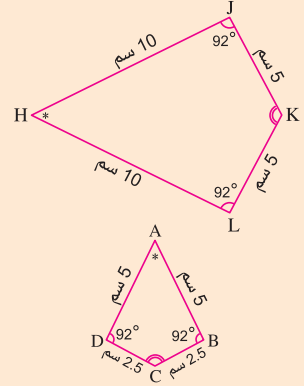
A	B	C	D	المضلع
↓	↓	↓	↓	~
E	F	G	H	المضلع

■ الترميز في الرياضيات

يستخدم الرمز ~ للتعبير عن تشابه المضلعات.

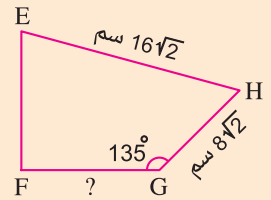
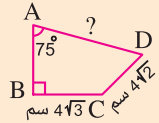
■ تقييم ذاتي ①

في الشكل التالي :
أثبت أن المثلثين متشابهان
واكتب نسبة تشابه المثلث
ABCD إلى المثلث HLKJ



■ تقييم ذاتي ②

في الشكل التالي :
إذا كان $ABCD \sim EFGH$

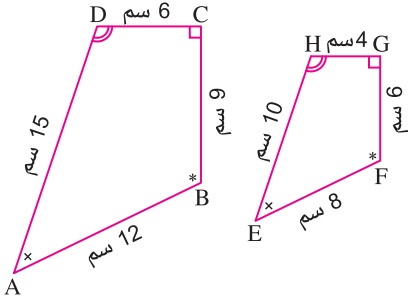


- ① أوجد : $m(\angle D)$, $m(\angle C)$
② أوجد طول كل من $\overline{AD}$, $\overline{FG}$

■ مثال 1

في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين $ABCD$, $EFGH$ متشابهان
واكتب نسبة تشابه المثلث $ABCD$ إلى المثلث
 $EFGH$



∴ المثلثان $ABCD$, $EFGH$ فيهما :

① $m(\angle A) = m(\angle E)$, $m(\angle B) = m(\angle F)$, $m(\angle C) = m(\angle G)$,
 $m(\angle D) = m(\angle H)$

② $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{BC}{FG} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{CD}{GH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{DA}{HE} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

∴ $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{3}{2}$

∴ المثلث $ABCD \sim$ المثلث $EFGH$

ونسبة تشابه المثلث $ABCD$ إلى المثلث $EFGH$ هي $\frac{3}{2}$

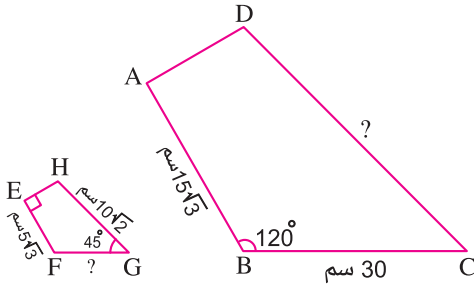
■ مثال 2

في الشكل المقابل :

إذا كان المثلث $ABCD \sim$ المثلث $EFGH$

① أوجد $m(\angle H)$, $m(\angle C)$

② أوجد طول كل من $\overline{DC}$, $\overline{FG}$



∴ $ABCD \sim EFGH$

∴ $m(\angle A) = m(\angle E) = 90^\circ$, $m(\angle B) = m(\angle F) = 120^\circ$,

$m(\angle C) = m(\angle G) = 45^\circ$

∴ $m(\angle D) = m(\angle H) = 360^\circ - (90^\circ + 120^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

∴ $ABCD \sim EFGH$

∴ $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$

∴ $\frac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{30}{FG}$

∴ $FG = \frac{5\sqrt{3} \times 30}{15\sqrt{3}} = 10$

أي أن طول $\overline{FG}$ هو 10 سم

$\frac{AB}{EF} = \frac{DC}{HG}$

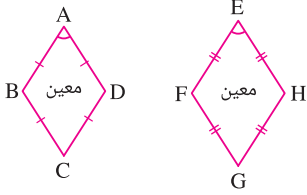
∴ $\frac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{DC}{10\sqrt{2}}$

∴ $DC = \frac{15\sqrt{3} \times 10\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = 30\sqrt{2}$

أي أن طول $\overline{DC}$ هو $30\sqrt{2}$ سم

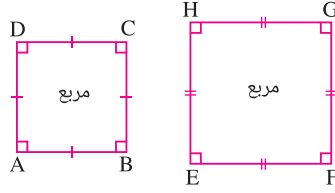
شروط تشابه الأشكال الرباعية الخاصة

يتشابه المعينان إذا تساوى قياسا
زاويتين متناظرتين فيهما



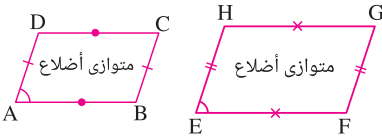
إذا كان $m(\angle A) = m(\angle E)$
فإن $EFGH \sim ABCD$

جميع المربعات متشابهة



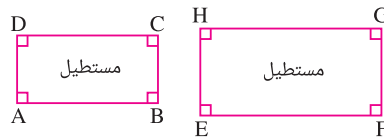
$ABCD \sim EFGH$

يتشابه متوازي الأضلاع إذا ساوى قياس زاوية
في أحدهما قياس زاوية فى الآخر، وتناسبت
أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان



إذا كان $m(\angle A) = m(\angle E)$
 $\frac{AD}{EH} = \frac{AB}{EF}$
فإن $EFGH \sim ABCD$

يتشابه المستطيلان إذا تناسبت
بعدهما المتناظران

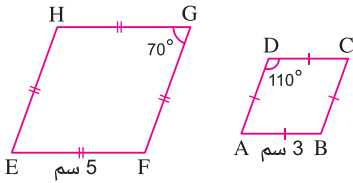


إذا كان $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$
فإن $EFGH \sim ABCD$

مثال 3

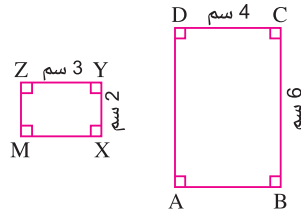
فى كل مما يأتى أثبت أن المضلعين متشابهان، واكتب نسبة تشابه :

1) المستطيل ABCD إلى المستطيل XYZM 2) المعين ABCD إلى المعين EFGH



2) فى المعين ABCD :

$m(\angle C) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
∴ المعينان ABCD ، EFGH فيهما :
 $m(\angle C) = m(\angle G) = 70^\circ$
∴ $ABCD \sim EFGH$
∴ $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{5}$
∴ نسبة تشابه المعين ABCD
إلى المعين EFGH تساوى $\frac{3}{5}$



1) ∴ المستطيلان ABCD ، XYZM

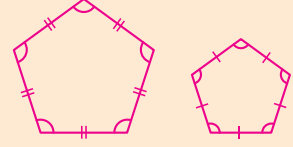
فيهما :

$\frac{BC}{YZ} = \frac{6}{3} = 2$ ، $\frac{CD}{XM} = \frac{4}{2} = 2$
∴ $\frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{XM} = 2$
∴ $ABCD \sim XYZM$

ونسبة تشابه المستطيل ABCD
إلى المستطيل XYZM تساوى 2

■ لاحظ أن

المضلعات المنتظمة التى لها
نفس عدد الأضلاع تكون
متشابهة دائماً.



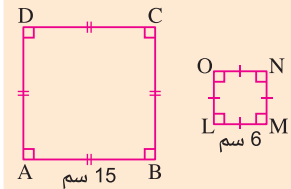
■ ناقش مع زملائك

ناقش مع زملائك شروط تشابه
الأشكال الرباعية الخاصة،
وكيف تستنتجها من شرطى
تشابه المضلعين السابق ذكرهما.

■ تقييم ذاتى 3

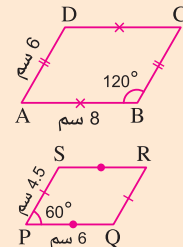
فى كل مما يأتى، أثبت أن
المضلعين متشابهان، واكتب
نسبة تشابه :

1) المربع ABCD
إلى المربع LMNO

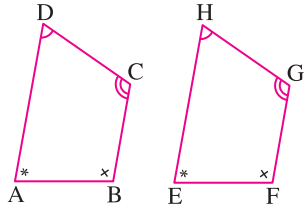


2) متوازي الأضلاع ABCD

إلى متوازي الأضلاع PQRS



ملاحظة:



إذا كان المضلع $ABCD \sim$ المضلع $EFGH$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k \quad \text{فإن:}$$

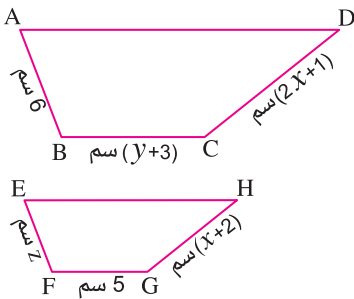
ومن خواص التناسب تستنتج أن:

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{EF + FG + GH + HE} = k$$

$$\therefore k = \frac{\text{محيط المضلع } ABCD}{\text{محيط المضلع } EFGH} \quad (\text{نسبة التشابه})$$

أي أن:

النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



مثال 4

فى الشكل المقابل:

إذا كان المضلع $ABCD \sim$ المضلع $EFGH$

$$\frac{3}{2} = \frac{\text{محيط المضلع } ABCD}{\text{محيط المضلع } EFGH}$$

فأوجد قيمة كل من x, y, z

$$\frac{3}{2} = \frac{\text{محيط المضلع } ABCD}{\text{محيط المضلع } EFGH}, \quad \text{المضلع } ABCD \sim \text{المضلع } EFGH \quad \checkmark$$

$$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{6}{z} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore z = \frac{2 \times 6}{3} = 4$$

$$\frac{BC}{FG} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{y+3}{5} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore y+3 = \frac{5 \times 3}{2}$$

$$\therefore y+3 = 7.5$$

$$\therefore y = 7.5 - 3 = 4.5$$

$$\frac{CD}{GH} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x+2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 4x+2 = 3x+6$$

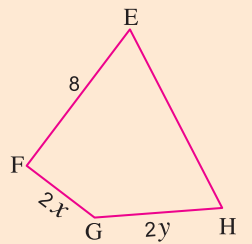
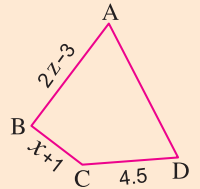
$$\therefore 4x-3x = 6-2 \quad \therefore x = 4$$

■ تقييم ذاتى 4

فى الشكل التالى:

إذا كان $EFGH \sim ABCD$

$$\frac{3}{4} = \frac{\text{محيط المضلع } ABCD}{\text{محيط المضلع } EFGH}$$



فأوجد قيمة كل من x, y, z



نشاط تعاونى



تعاون مع أحد زملائك بالفصل فى قياس أبعاد ملعب مدرستك، ثم ارسم فى كراستك مستطيلاً يشابه هذا الملعب، واكتب نسبة التشابه بين هذا المستطيل وملعب مدرستك.



تقييم الدرس

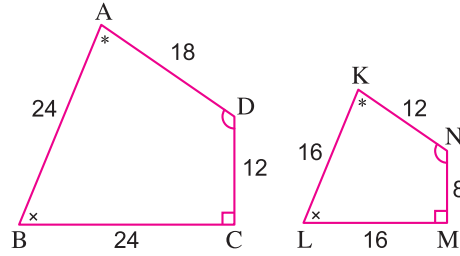


قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 في الشكل التالي :

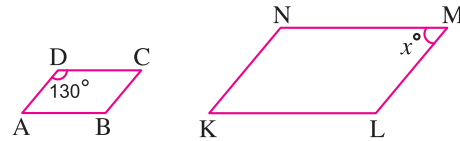


ما نسبة تشابه المضلع KLMN إلى المضلع ABCD ؟

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$

(ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{1}$

3 في الشكل التالي :



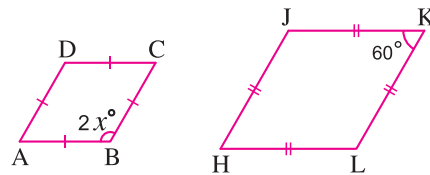
متوازي الأضلاع ABCD ~ متوازي الأضلاع KLMN

فما قيمة x ؟

(أ) 50 (ب) 130

(ج) 60 (د) 70

5 في الشكل التالي :



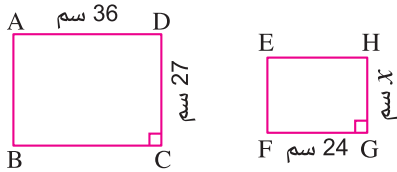
إذا كان المعين ABCD ~ المعين HLKJ

فما قيمة x ؟

(أ) 60 (ب) 120

(ج) 100 (د) 80

2 في الشكل التالي :

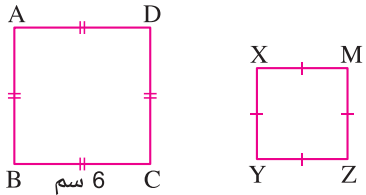


إذا كان المستطيل ABCD ~ المستطيل EFGH فما قيمة x ؟

(أ) 27 (ب) 9

(ج) 18 (د) 24

4 في الشكل التالي :



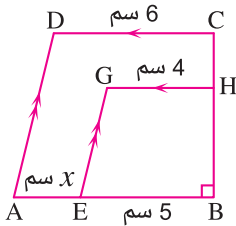
إذا كان $\frac{3}{2} = \frac{\text{محيط المربع ABCD}}{\text{محيط المربع XYZM}}$

فما مساحة المربع XYZM ؟

(أ) 36 سم^2 (ب) 24 سم^2

(ج) 16 سم^2 (د) 8 سم^2

6 في الشكل التالي :



إذا كان المضلع ABCD ~ المضلع EBHG فما قيمة x ؟

(أ) 5 (ب) 2.5

(ج) 7.5 (د) 4

- 7) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما 3 : 2 ومحيط المضلع الأصغر 34 سم، فما محيط المضلع الأكبر ؟
 (أ) 17 سم (ب) 34 سم (ج) 51 سم (د) 68 سم

اكتشف الخطأ :

- 8) سأل المعلم تلاميذه السؤال التالي :

هل كل المضلعات المنتظمة متشابهة ؟

فكانت إجابة كل من أحمد ونورهان كما بالشكل المقابل.

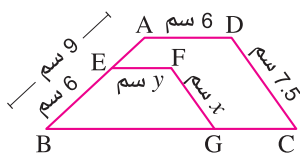
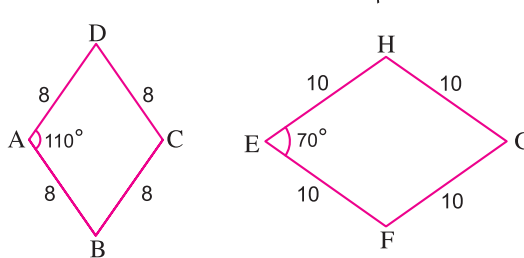
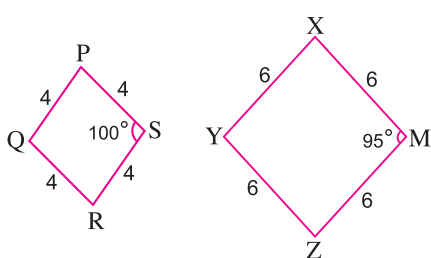
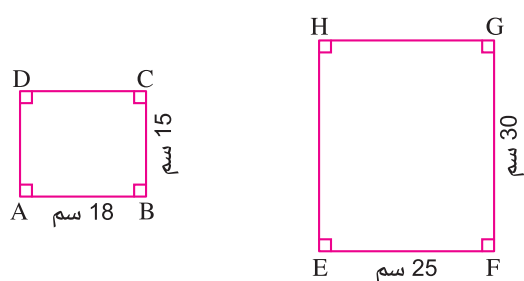
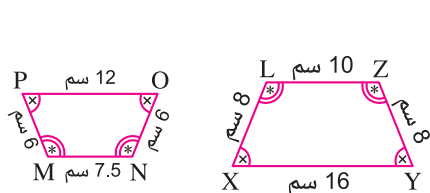
فأى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟



تطبيق المفاهيم

ثانياً

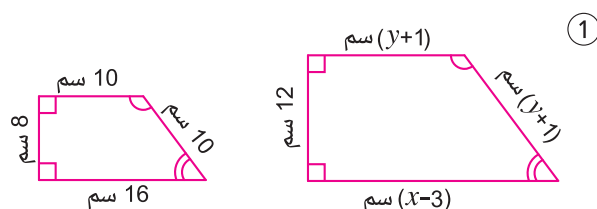
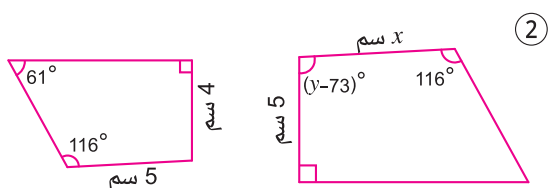
- 9) بين أيًا من أزواج المضلعات الآتية متشابهة، وأيها غير متشابهة :



- 10) فى الشكل المقابل : إذا كان المضلع $ABCD \sim$ المضلع $EBGF$

فأوجد قيمة كل من : y ، x ،

- 11) إذا كان كل زوج من أزواج المضلعات الآتية متشابهة ، فأوجد قيمة كل من y ، x ؟

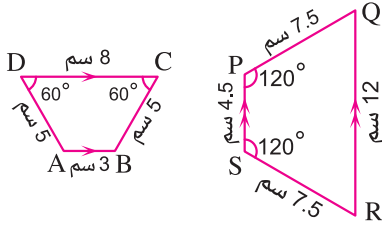


- 12) مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه 3 سم ، 5 سم ، 6 سم ، 8 سم ، 10 سم ، والآخر محيطه 80 سم، فأوجد أطوال أضلاع المضلع الثانى.

13 في الشكل المقابل :

أثبت أن :

المضلع ABCD ~ المضلع SPQR



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

14 ترفيه : شاشة سينما مستطيلة الشكل،

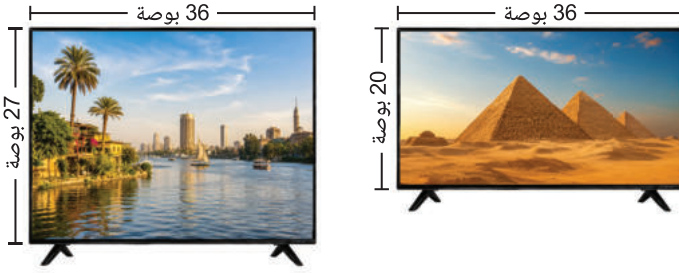
عرضها 45 قدماً وارتفاعها 25 قدماً.

اشرح أيّاً من تنسيقات شاشات التلفزيون

الموضحة بالرسم تعتقد أنه سيعرض المشهد

الأكثر اكتمالاً من فيلم يعرض على شاشة

السينما.



15 تكنولوجيا : عرض أحمد عرضاً تقديمياً على حائط فصله.

يبلغ عرض شاشة الحاسوب الخاص به 13.25 بوصة

وارتفاعها 10.6 بوصة، أما الصورة المعروضة على

الحائط فيبلغ عرضها 53 بوصة وارتفاعها 42.4 بوصة.

هل الشكلان متشابهان ؟

إذا كانا متشابهين، فما نسبة تشابه شاشة الحاسوب إلى

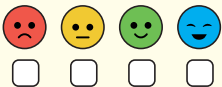
الصورة المعروضة ؟



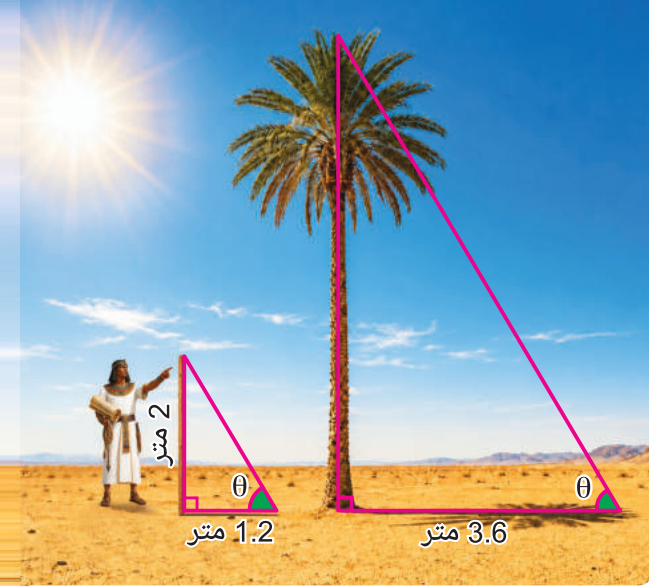
قيم فهمك!

ما مدى فهمك لتشابه المضلعات ؟

ضع علامة في المربع المناسب



تشابه المثلثات (Similarity of Triangles)



استعد!

المصريون القدماء أول الشعوب التي استخدمت الظل لحساب ارتفاعات الأشياء العالية، وتعتمد هذه الفكرة على معرفة طول ظل جسم معروف الارتفاع مثل عصا، وطول ظل الجسم المراد معرفة ارتفاعه. في الصورة يستخدم شخص عصا عمودية على الأرض لمعرفة ارتفاع النخلة. فهل يمكنك إيجاد ارتفاع النخلة؟

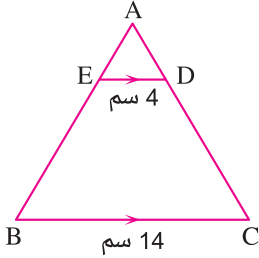
في هذا الدرس سوف تتعرف على مفهوم تشابه المثلثات وحالات تشابه مثلثين؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

■ نواتج التعلم

- تعرف شروط تشابه مثلثين.
- تستخدم تشابه المثلثين في إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع.
- تثبت تشابه مثلثين.
- تستخدم تشابه المثلثين في حل بعض المشكلات الحياتية.

فكر وناقش!

في الشكل المقابل : إذا علمت أن محيط $\triangle ABC$ يساوي 49 سم، فما محيط المثلث AED ؟
أى من الإجابتين التاليتين صحيحة :



إجابة مريم :

محيط $\triangle AED = 14$ سم

إجابة على :

محيط $\triangle AED = 35$ سم

■ المفردات

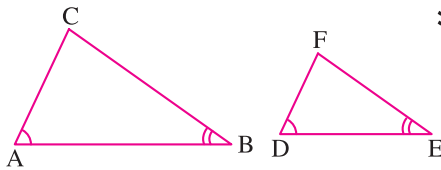
- تشابه المثلثات
- Similarity of triangles

تعلم!

حالات تشابه مثلثين

الحالة الأولى : زاويتان (AA)

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.



إذا كان المثلثان ABC ، DEF فيهما :

- $m(\angle A) = m(\angle D)$
- $m(\angle B) = m(\angle E)$

فإن : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

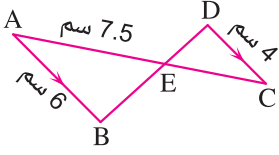
■ لاحظ أن

في هذه الحالة يمكن من التشابه استنتاج أن :

- $m(\angle C) = m(\angle F)$
- $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

مثال 1

في الشكل المقابل :



$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}, \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\overline{AB} = 6 \text{ سم}, \overline{AE} = 7.5 \text{ سم}, \overline{DC} = 4 \text{ سم}, \overline{BD} = 7 \text{ سم}$$

أثبت أن : $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ وأوجد طول كل من $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$\therefore m(\angle A) = m(\angle C) \text{ (بالتبادل)}, m(\angle B) = m(\angle D) \text{ (بالتبادل)}$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$$

$$\therefore BE + DE = 7 \quad \therefore BE = 7 - DE$$

$$\therefore \frac{6}{4} = \frac{7 - DE}{DE} = \frac{7.5}{CE} \quad \therefore \frac{6}{4} = \frac{7.5}{CE} \quad \therefore CE = \frac{4 \times 7.5}{6} = 5$$

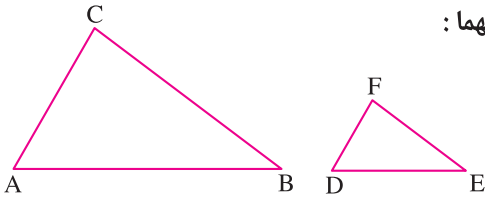
$$\frac{6}{4} = \frac{7 - DE}{DE} \quad \therefore 6 DE = 28 - 4 DE \quad \therefore 10 DE = 28$$

$$\therefore DE = 2.8 \quad \therefore BE = 7 - 2.8 = 4.2$$

$$\therefore \text{طول } \overline{EC} = 5 \text{ سم}, \text{طول } \overline{DE} = 2.8 \text{ سم}, \text{طول } \overline{BE} = 4.2 \text{ سم}$$

الحالة الثانية : ثلاثة أضلاع (SSS)

إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.



إذا كان المثلثان ABC , DEF فيهما :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

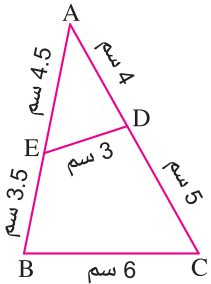
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ فإن :}$$

مثال 2

في الشكل المقابل :

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

موضحًا نسبة تشابه $\triangle ABC$ إلى $\triangle ADE$



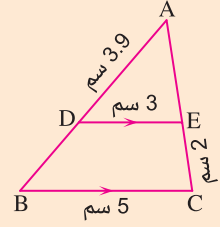
$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{4.5 + 3.5}{4} = 2, \quad \frac{BC}{DE} = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{AC}{AE} = \frac{4 + 5}{4.5} = 2$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = 2 \quad \therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\therefore \frac{2}{1} = \triangle ABC \text{ تشابه } \triangle ADE \text{ إلى}$$

تقييم ذاتي 1

في الشكل التالي :



$$D \in \overline{AB}, \overline{DE} \parallel \overline{BC},$$

$$E \in \overline{AC}$$

أثبت أن : $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

ثم أوجد طول كل من :

$$\overline{BD}, \overline{AE}$$

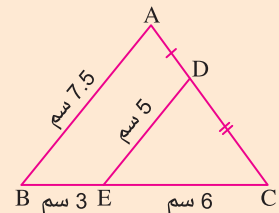
لاحظ أن

في هذه الحالة يمكن من التشابه استنتاج أن :

- $m(\angle A) = m(\angle D)$
- $m(\angle B) = m(\angle E)$
- $m(\angle C) = m(\angle F)$

تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي :



إذا كان :

$$DC = 2 AD$$

أثبت أن :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC$$

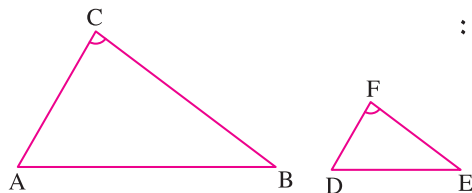
$$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$$

1

2

الحالة الثالثة : ضلعان وزاوية محصورة (SAS)

إذا طابقت زاوية في مثلث زاوية في مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، فإن المثلثين متشابهان.

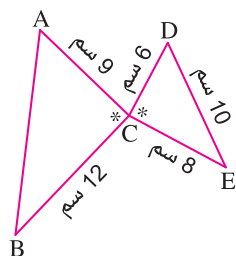


إذا كان المثلثان ABC ، DEF فيهما :

$$m(\angle C) = m(\angle F)$$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

فإن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



مثال 3

في الشكل المقابل :

$$m(\angle ACB) = m(\angle DCE)$$

استخدم الأطوال الموضحة في إثبات أن :

$\Delta ABC \sim \Delta DEC$ ، ثم أوجد طول $\overline{AB}$

$$\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{BC}{EC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

$$\therefore m(\angle ACB) = m(\angle DCE)$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEC$$

وينتج من التشابه أن :

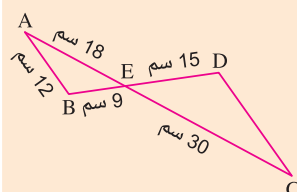
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{AB}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore AB = \frac{3 \times 10}{2} = 15$$

$\therefore$ طول $\overline{AB} = 15$ سم



$$\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{E\}$$

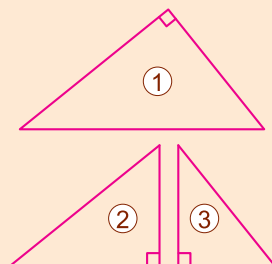
استخدم الأطوال الموضحة على الرسم في إثبات أن :

$$\Delta ABE \sim \Delta CDE$$

ثم أوجد طول $\overline{DC}$

لاحظ أن

المثلثان المشابهان لثالث متشابهان.



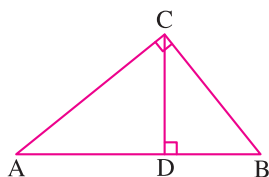
فإذا كان :

$$\Delta 2 \sim \Delta 1, \Delta 3 \sim \Delta 1$$

فإن :

$$\Delta 2 \sim \Delta 3$$

في المثلث القائم الزاوية، العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.



إذا كان ΔABC قائم الزاوية في C ، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ، فإن :

$$\Delta ACB \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB$$

ويمكن استنتاج ذلك باستخدام الحالة الأولى من تشابه المثلثات كالتالي :

المثلثان ADC ، ACB فيهما :

$$m(\angle ADC) = m(\angle ACB) \text{ (كل منهما زاوية قائمة)}$$

$$m(\angle A) = m(\angle A) \text{ (زاوية مشتركة)}$$

$$\therefore \Delta ADC \sim \Delta ACB \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

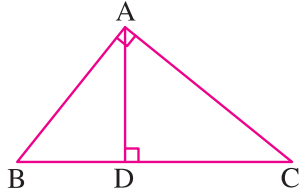
المثلثان $\triangle CDB$ ، $\triangle ACB$ فيهما :

$$m(\angle CDB) = m(\angle ACB) \text{ (كل منهما زاوية قائمة)}$$

$$m(\angle B) = m(\angle B) \text{ (زاوية مشتركة)}$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle ACB \text{ (2)}$$

من (1) ، (2) تستنتج أن : $\triangle ADC \sim \triangle ACB \sim \triangle CDB$



مثال 4

في الشكل المقابل :

$\triangle ABC$ قائم الزاوية في A ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

أثبت أن : $(AD)^2 = BD \times DC$

$$\therefore m(\angle BAC) = 90^\circ , \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

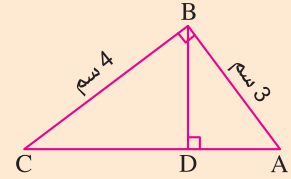
$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle CDA$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA} \quad \therefore (AD)^2 = DB \times CD$$

■ تقييم ذاتي 4

في الشكل التالي :



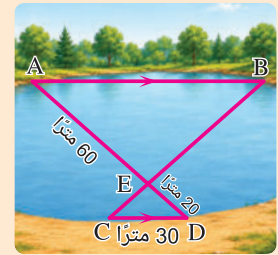
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ بحيث $D \in \overline{AC}$

أوجد طول كل من :

$\overline{DC}$ ، $\overline{AD}$

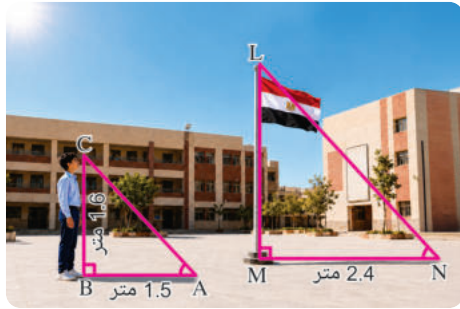
■ تقييم ذاتي 5

في الشكل التالي :



ما البعد بين الشجرتين A ، B

على جانبي البحيرة ؟



مثال 5

أراد طالب طوله 1.6 متر استخدام تساوي قياسات زوايا ميل أشعة الشمس الساقطة على الأرض لمعرفة ارتفاع العلم في مدرسته فإذا كان طول ظل الطالب 1.5 متر وطول ظل سارية العلم 2.4 متر فما ارتفاع العلم ؟

$\therefore$ المثلثان $\triangle NML$ ، $\triangle ABC$ فيهما :

$$m(\angle A) = m(\angle N) , m(\angle B) = m(\angle M) = 90^\circ$$

$\therefore \triangle NML \sim \triangle ABC$ وينتج من التشابه أن :

$$\frac{AB}{NM} = \frac{BC}{ML} \quad \therefore \frac{1.5}{2.4} = \frac{1.6}{ML}$$

$$\therefore ML = \frac{2.4 \times 1.6}{1.5} = 2.56$$

أي أن ارتفاع العلم = 2.56 متر.



تقييم الدرس

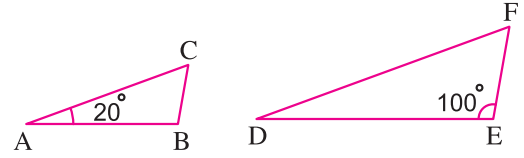


قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 في الشكل التالي :

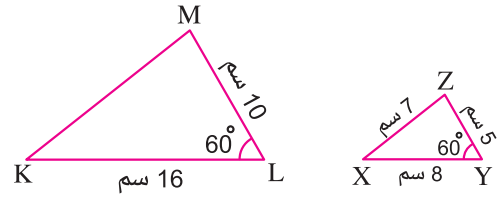


إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ فما قياس $\angle F$ ؟

(أ) 20° (ب) 60°

(ج) 80° (د) 100°

3 في الشكل التالي :

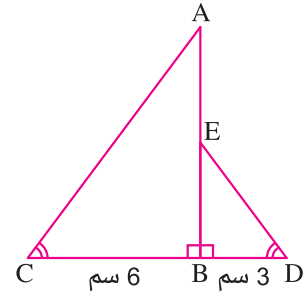


ما طول $\overline{KM}$ ؟

(أ) 7 سم (ب) 8 سم

(ج) 14 سم (د) 16 سم

5 في الشكل التالي :



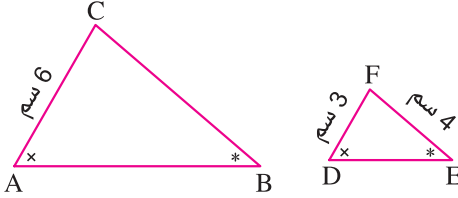
إذا كان محيط المثلث ABC يساوي 24 سم

فما محيط المثلث EBD ؟

(أ) 8 سم (ب) 12 سم

(ج) 24 سم (د) 48 سم

2 في الشكل التالي :

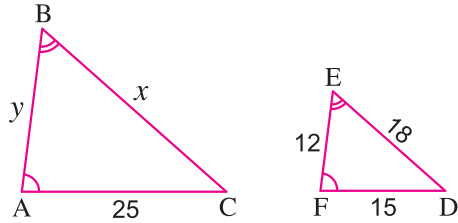


ما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 4 سم (ب) 6 سم

(ج) 8 سم (د) 10 سم

4 في الشكل التالي :

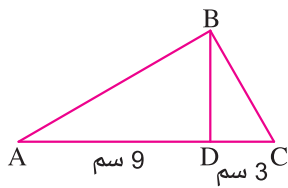


ما قيمة المقدار $x + y$ ؟

(أ) 18 (ب) 30

(ج) 45 (د) 50

6 في الشكل التالي :

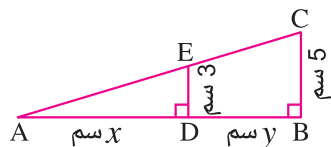


إذا كان $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ فما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 6 سم (ب) $3\sqrt{3}$ سم

(ج) 9 سم (د) $2\sqrt{3}$ سم

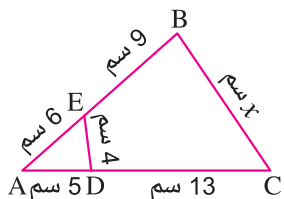
7 في الشكل التالي :



ما النسبة التي تساوي $\frac{x}{y}$ ؟

- (أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{5}{3}$
(ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{3}{2}$

8 في الشكل التالي :



ما قيمة x ؟

- (أ) 12 (ب) 8
(ج) 16 (د) 24

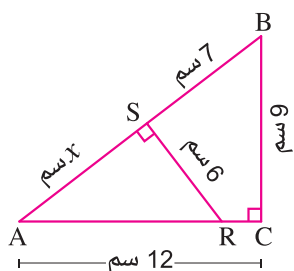


تطبيق المفاهيم

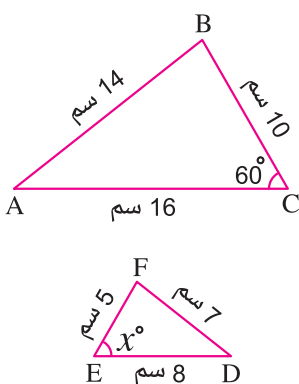
ثانياً

9 في كل مما يأتي أثبت أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد قيمة x :

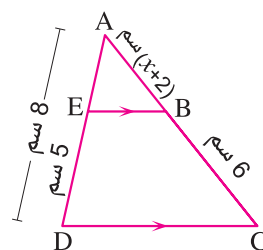
③ $\triangle ABC$, $\triangle ARS$



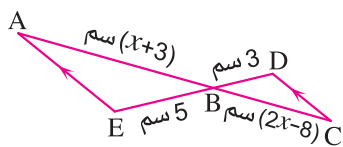
② $\triangle ABC$, $\triangle DFE$



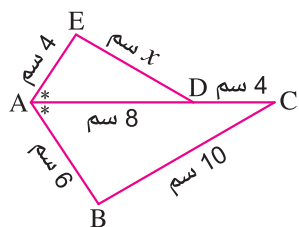
① $\triangle ADC$, $\triangle AEB$



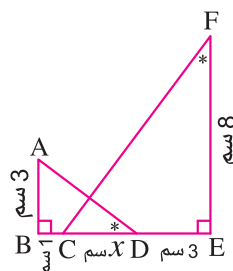
⑥ $\triangle AEB$, $\triangle CDB$



⑤ $\triangle ABC$, $\triangle AED$



④ $\triangle ABD$, $\triangle CEF$

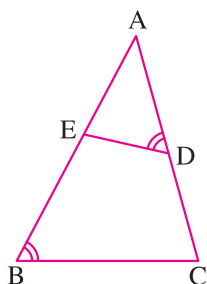


10 في الشكل المقابل :

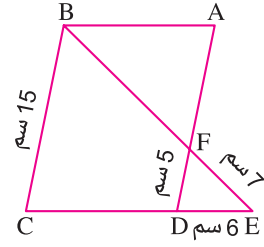
$D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$, $m(\angle ADE) = m(\angle B)$

أثبت أن : $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

ثم أثبت أن $AB \times AE = AC \times AD$



11 في الشكل التالي :

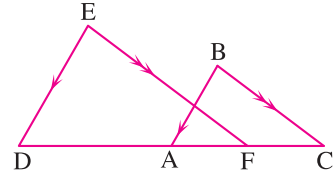


$E \in \overline{CD}$ متوازي أضلاع ، $ABCD$

أثبت أن $\triangle ABF \sim \triangle DEF$

وأوجد محيط $\triangle ABF$

13 في الشكل التالي :



$\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

النقط D, A, F, C على استقامة واحدة

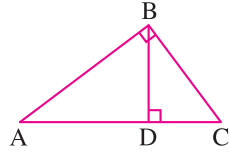
أثبت أن : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

وإذا كان $3 : 2 = EF : BC$

ومحيط المثلث $ABC = 24$ سم

فأوجد محيط المثلث DEF

12 في الشكل التالي :



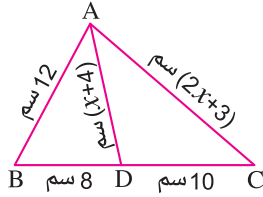
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $m(\angle ABC) = 90^\circ$ مثلث فيه ABC

أثبت أن : $\triangle ADB \sim \triangle BDC$

وإذا كان : $BD = 4.8$ سم ، $AD = 6.4$ سم

فأوجد طول $\overline{DC}$

14 في الشكل التالي :



$D \in \overline{BC}$

إذا كان : $AB = 12$ سم ، $BD = 8$ سم ، $DC = 10$ سم

أثبت أن : $\triangle ABD \sim \triangle CBA$

ثم أوجد قيمة x



التحليل وتكامل المواد

ثالثا

15 **سياحة :** أراد رجل معرفة طول تمثال رمسيس الثاني بالمتحف

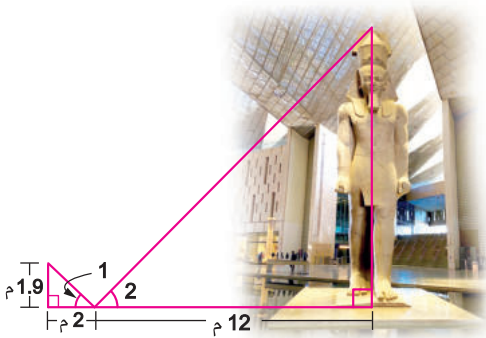
المصري الكبير، فوضع مرآة في وضع أفقي على الأرض على

بعد 12 متراً من قدم التمثال ورجع إلى الخلف حتى استطاع

مشاهدة رأس التمثال في المرآة فكانت المسافة التي رجعها

للخلف 2 متر فإذا كان طول الرجل 1.9 متر

وإذا علمت أن : $m(\angle 1) = m(\angle 2)$ فما ارتفاع التمثال ؟



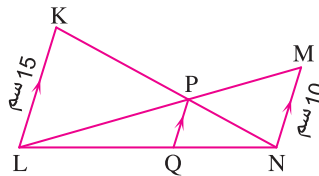
تفكير إبداعي

16 في الشكل المقابل :

$\overline{KL} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{MN}$

إذا كان : $KL = 15$ سم ، $MN = 10$ سم

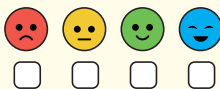
أوجد : طول $\overline{PQ}$



قيم فهمك!

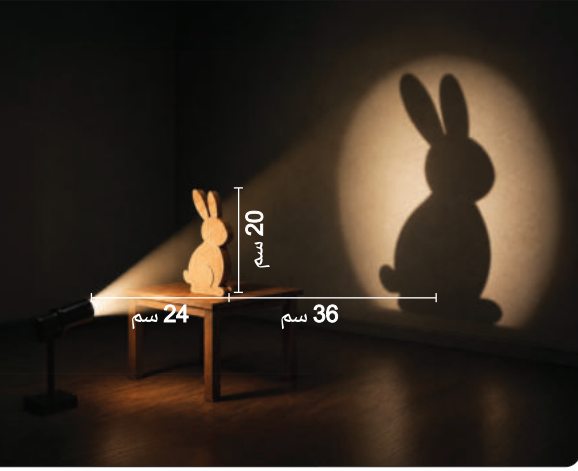
ما مدى فهمك لتشابه المثلثات ؟

ضع علامة في المربع المناسب



التمدد (Dilation)

الدرس 3 - 3



استعد!

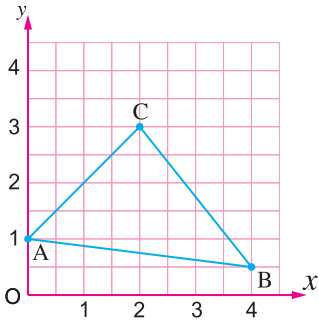
عند وضع جسم معتم بين مصدر ضوء وحائط تتكون صورة للجسم على الحائط، وتتغير أبعادها كلما اقترب الجسم أو ابتعد عن مصدر الضوء. في الصورة مجسم على شكل أرنب طوله 20 سم يبعد 24 سم عن مصدر الضوء، 36 سم عن الحائط، فما طول الأرنب في الصورة؟

في هذا الدرس سوف تتعلم مفهوم التمدد؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

استخدم هاني أحد البرامج الهندسية في رسم المثلث ABC ، فإذا أراد تكبيره بنسبة 2 : 1 فأى مما يأتي هي إحداثيات رؤوس المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بهذا التكبير؟



$A'(2, 3)$	$A'(0, 2)$
$B'(6, 2.5)$	$B'(8, 1)$
$C'(4, 5)$	$C'(4, 6)$



تعلم!

مفهوم التمدد

- التمدد هو تحويل هندسي يكبر الشكل أو يصغره بنسبة محددة، هي نسبة أحد أطوال صورة الشكل إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي، وتسمى هذه النسبة معامل التمدد.
- الشكل وصورته بالتمدد يكونان متشابهين، أى لا تتغير قياسات الزوايا المتناظرة فيهما، بينما تتغير أطوال الأضلاع المتناظرة بنسبة ثابتة.

تعريف التمدد

التمدد الذى مركزه C ومعامله يساوى k هو تحويل هندسي يحول كل نقطة P فى المستوى إلى نقطة P' ، بحيث تكون له الخواص التالية :

- 1 النقطة C هي صورة نفسها.
 - 2 إذا كانت P لا تنطبق على C ، $\overline{CP}$ لا تطابق $\overline{CP'}$ فإن : $CP' = k(CP)$
- التمدد يكون تكبيرًا إذا كان : $k > 1$ ، ويكون تصغيرًا إذا كان : $0 < k < 1$

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم التمدد.
- تعرف التمدد الموجب.
- تستخدم الإحداثيات فى تكبير أو تصغير شكل معلوم.

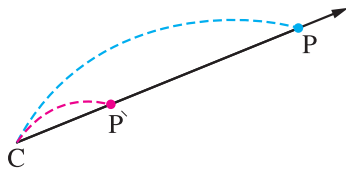
■ المفردات

- التمدد Dilation
- مركز التمدد Center of dilation
- معامل التمدد Dilation factor
- تكبير Enlargement
- تصغير Reduction

■ لاحظ أن

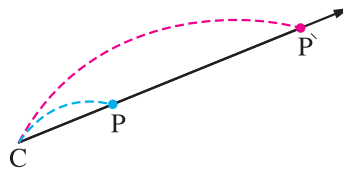
- سوف نكتفى بدراسة التمدد بمعامل تمدد موجب فقط.

النقطة P' هي صورة النقطة P بتمدد مركزه C ، ومعامله k



$$k = \frac{CP'}{CP} < 1$$

تصغير

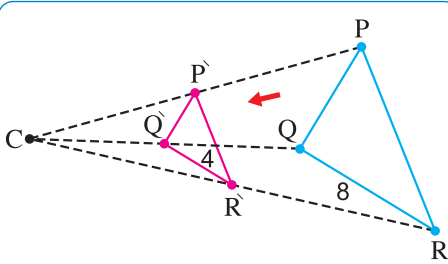


$$k = \frac{CP'}{CP} > 1$$

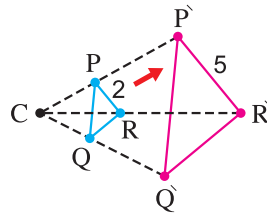
تكبير

لاحظ في التكبير أن $P \in \overline{CP'}$ ، بينما في التصغير تكون $P' \in \overline{CP}$

أمثلة :



$\Delta P'Q'R'$ صورة ΔPQR
بتمدد مركزه C ، ومعامله $k = \frac{1}{2}$
لاحظ أن: $\Delta P'Q'R'$ تصغير ΔPQR

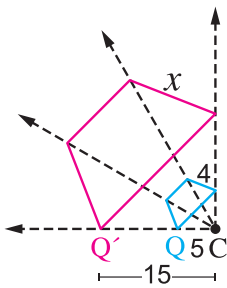


$\Delta P'Q'R'$ صورة ΔPQR
بتمدد مركزه C ، ومعامله $k = \frac{5}{2}$
لاحظ أن: $\Delta P'Q'R'$ تكبير ΔPQR

في كل من الشكلين :

$$\Delta PQR \sim \Delta P'Q'R' \quad ①$$

② كل ضلع من أضلاع $\Delta P'Q'R'$ يوازي نظيره في ΔPQR



$$\therefore Q \in \overline{CQ'}$$

$$\therefore k = \frac{CQ'}{CQ} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{x}{4} = 3$$

∴ التمدد الذي يحول Q إلى Q' هو تكبير معاملته k

$$\therefore x = 4 \times 3 = 12$$

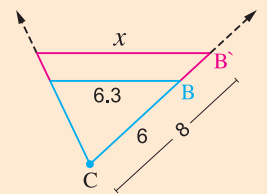
مثال ①

في الشكل المقابل :

حدد ما إذا كان التمدد الذي مركزه C ويحول Q إلى Q' تكبيراً أم تصغيراً.
ثم أوجد معامل التمدد، وأوجد قيمة x

تقييم ذاتي ①

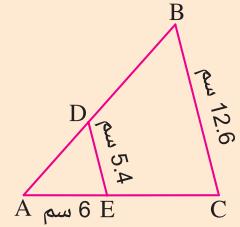
في الشكل التالي :



حدد ما إذا كان التمدد الذي مركزه C ويحول B إلى B' تكبيراً أم تصغيراً.
ثم أوجد معامل التمدد، وأوجد قيمة x

■ تقييم ذاتي ②

في الشكل التالي :



ΔADE صورة ΔABC

بتمدد مركزه A

أوجد معامل التمدد وأثبت أن :
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ وأوجد طول $\overline{AC}$

■ مثال 2

في الشكل المقابل :

ΔADE صورة ΔABC بتمدد مركزه A

أوجد معامل التمدد وأثبت أن : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

ثم أوجد طول $\overline{BC}$

✓ ΔADE صورة ΔABC بتمدد مركزه A

$\therefore D$ صورة B

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$\therefore$ معامل التمدد $k = \frac{3}{5}$

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC} \therefore$ صورة $\overline{BC}$ بالتمدد

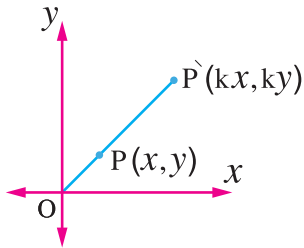
$$\therefore \frac{7.5}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = k$$

$$\therefore BC = \frac{5 \times 7.5}{3} = 12.5$$

$\therefore$ طول $\overline{BC} = 12.5$ سم

■ التمدد في المستوى الإحداثي



لأي نقطة $P(x, y)$ في المستوى الإحداثي،

صورة النقطة P بتمدد مركزه نقطة الأصل $O(0, 0)$

ومعامله k هي النقطة $P'(kx, ky)$

قاعدة التمدد : $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

■ مثال 3

ارسم في المستوى الإحداثي ΔABC الذي رؤوسه $A(1, 3)$ ، $B(2, -1)$ ، $C(5, 0)$

وارسم صورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله 2

✓ تستخدم قاعدة التمدد في المستوى الإحداثي

لإيجاد صورة كل نقطة من النقط

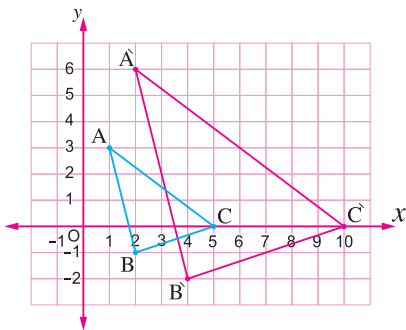
A، B، C بتمدد مركزه O ومعامله $k = 2$

$$(x, y) \rightarrow (2x, 2y)$$

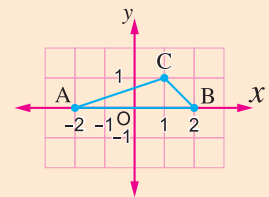
$$A(1, 3) \rightarrow A'(2, 6)$$

$$B(2, -1) \rightarrow B'(4, -2)$$

$$C(5, 0) \rightarrow C'(10, 0)$$



■ تقييم ذاتي ③



استخدم المستوى الإحداثي

السابق في إيجاد صورة

ΔABC بتمدد مركزه O

ومعامله 2

■ لاحظ من المثال السابق أن :

$\Delta A'B'C'$ صورة ΔABC بتمدد معامله $= 2$ لذلك فإن :

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \quad (1)$$

(2) $k > 1$ لذلك المثلث $A'B'C'$ تكبير للمثلث ABC ، وكل ضلع من أضلاع المثلث $A'B'C'$

طوله يساوى ضعف طول الضلع المناظر له فى المثلث ABC

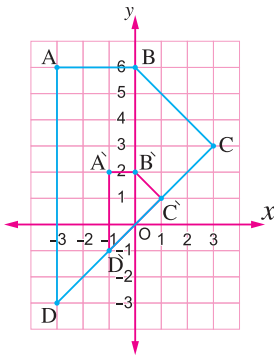
(3) كل ضلع من أضلاع $\Delta A'B'C'$ يوازي نظيره فى ΔABC

مثال (4)

ارسم فى المستوى الإحداثى المضلع $ABCD$ الذى رؤوسه

$$D(-3, -3), C(3, 3), B(0, 6), A(-3, 6)$$

ثم ارسم صورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله $k = \frac{1}{3}$



$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right)$$

$$A(-3, 6) \rightarrow A'(-1, 2)$$

$$B(0, 6) \rightarrow B'(0, 2)$$

$$C(3, 3) \rightarrow C'(1, 1)$$

$$D(-3, -3) \rightarrow D'(-1, -1)$$

■ لاحظ من المثال السابق أن :

$0 < k < 1$ لذلك المضلع $A'B'C'D'$ تصغير للمضلع $ABCD$

■ تقييم ذاتى (4)

ارسم فى المستوى الإحداثى

ΔABC الذى رؤوسه

$$B(4, 0), A(-4, 4)$$

$C(-2, -6)$ ثم ارسم صورته

بتمدد مركزه نقطة الأصل O

$$\text{ومعامله } k = \frac{1}{2}$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل المقابل :

إذا كانت P' صورة P

بتمدد مركزه C ، فما معامل التمدد ؟

$$(أ) \frac{1}{3} \quad (ب) 3$$

$$(ج) \frac{1}{4} \quad (د) 4$$

(2) فى الشكل المقابل :

إذا كانت $A'B'$ صورة AB

بتمدد مركزه C ، فما معامل التمدد ؟

$$(أ) \frac{3}{4} \quad (ب) \frac{4}{3}$$

$$(ج) \frac{3}{7} \quad (د) \frac{4}{7}$$

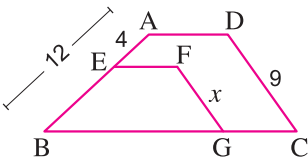
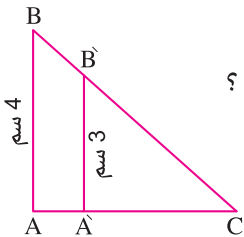
(3) إذا كان المضلع $EBGF$ صورة المضلع $ABCD$ بتمدد مركزه B ومعامله k فإن :

$$x = 6, k = \frac{2}{3} \quad (ب)$$

$$x = 3, k = \frac{2}{3} \quad (د)$$

$$x = 3, k = \frac{1}{3} \quad (أ)$$

$$x = 6, k = \frac{1}{3} \quad (ج)$$



4 ما صورة النقطة $P(-1, 3)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 4 ؟

(أ) $P'(3, 7)$ (ب) $P'(-4, 7)$ (ج) $P'(-4, 12)$ (د) $P'(-4, 3)$

5 ما النسبة التي تعبر عن معامل التمدد الذي مركزه نقطة الأصل O ويحول النقطة $A(6, -2)$ إلى النقطة $B(3, -1)$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{3}$

6 إذا كانت A' صورة A بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{3}{4}$ ، فما معامل التمدد الذي يجعل A صورة A' ومركزه نقطة الأصل ؟

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{3}{7}$ (د) $\frac{4}{7}$

7 إذا كانت $A'(12, -6)$ صورة A بتمدد مركزه نقطة الأصل وقاعدته $(\frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y) \rightarrow (x, y)$ فإن النقطة A هي

(أ) $(8, -4)$ (ب) $(18, -9)$ (ج) $(-8, 4)$ (د) $(-18, 9)$

8 أي من النسب الآتية تمثل معامل تمدد لتصغير شكل ما ؟

(أ) 120% (ب) $\frac{5}{4}$ (ج) 2 (د) 50%

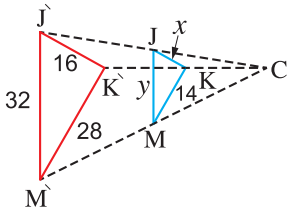


تطبيق المفاهيم

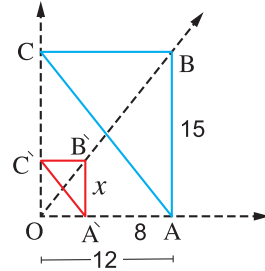
ثانياً

9 في كل من الأشكال الآتية أوجد معامل التمدد، ويُن ما إذا كان تكبيراً أم تصغيراً، وأوجد قيمة كل من x, y :

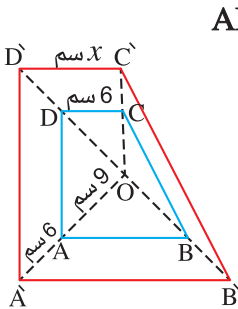
② تمدد مركزه C ويجعل $\Delta J'K'M'$ صورة ΔJKM



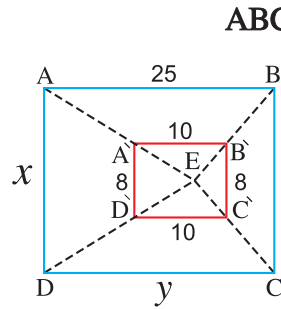
① تمدد مركزه O ويجعل $\Delta A'B'C'$ صورة ΔABC



④ تمدد مركزه O ويجعل المضلع $A'B'C'D'$ صورة المضلع $ABCD$



③ تمدد مركزه E ويجعل المضلع $A'B'C'D'$ صورة المضلع $ABCD$

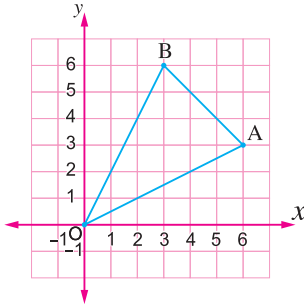


10 في كل مما يأتي، ارسم في المستوى الإحداثي المضلع وصورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله k حيث :

① $k=2, C(-2, 1), B(0, 3), A(2, -1)$

② $k=0.5, D(-6, -2), C(-4, 2), B(2, 0), A(-2, -4)$

11 في الشكل المقابل :



ارسم صورة ΔOAB بتمدد مركزه O

وقاعدته $(x, y) \longrightarrow (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$



التحليل وتكامل المواد

ثالثا

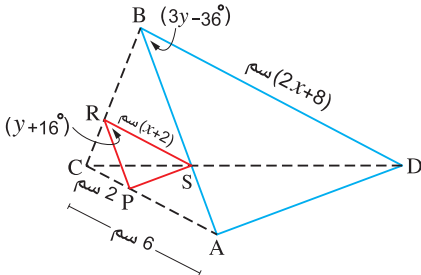
12 علوم :

عند فحص إحدى الحشرات تحت المجهر ظهر طول الحشرة كما هو موضح في الصورة. إذا علمت الطول الفعلي للحشرة، فما هو معامل التمدد المستخدم ؟ اشرح استنتاجك.



تفكير إبداعي

13 مستطيل بعده x سم، y سم فما مساحة صورة المستطيل بتمدد معاملته $\frac{1}{3}$ بدلالة x, y ؟



14 في الشكل المقابل :

إذا كان ΔPSR صورة ΔADB

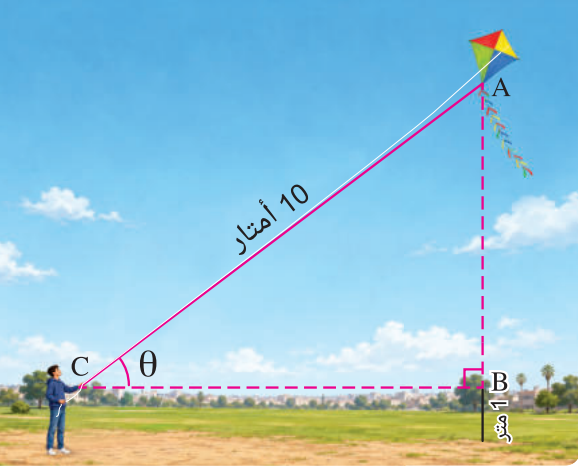
بتمدد مركزه C فأوجد قيمة كل من x, y

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للتمدد ؟
ضع علامة في المربع المناسب


☐
☐
☐
☐

النسب المثلثية للزاوية الحادة (Trigonometric Ratios of Acute Angle)



استعد!

تعد الطائرة الورقية من أقدم الاختراعات في الصين، حيث أستخدمت منذ أكثر من ألفي عام في الألعاب والاحتفالات.

في الشكل المقابل: إذا كان $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

وكان طول الخيط 10 أمتار، فما ارتفاع الطائرة الورقية عن سطح الأرض؟

في هذا الدرس، سوف نتعرف على النسب المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية واستخدامها

في حساب أطوال الأضلاع؛ مما يمكننا من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

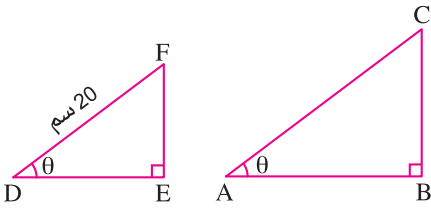


فكر وناقش!

في الشكل المقابل:

$AB : CB = 4 : 3$

أي مما يلي هو طول $\overline{FE}$ ؟



9 سم

12 سم

16 سم

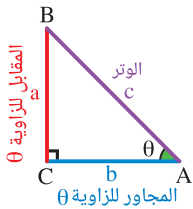


تعلم!

النسب المثلثية

النسبة المثلثية هي نسبة بين طولى ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

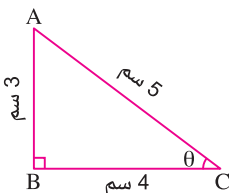
• جيب الزاوية θ ($\sin \theta$) • جيب تمام الزاوية θ ($\cos \theta$) • ظل الزاوية θ ($\tan \theta$)



$$\frac{b}{c} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \cos \theta$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin \theta$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \tan \theta$$



فمثلاً: في الشكل المقابل:

$$\frac{4}{5} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \cos \theta, \quad \frac{3}{5} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin \theta$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \tan \theta$$

■ نواتج التعلم

- تعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية.
- تعين جيب الزاوية ($\sin$)
- تعين جيب تمام الزاوية ($\cos$)
- تعين ظل الزاوية ($\tan$)
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة في تعيين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة في حل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- Sine جيب الزاوية
- Cosine جيب تمام الزاوية
- Tangent ظل الزاوية

■ الترميز في الرياضيات

- تستخدم بعض الحروف اليونانية للإشارة إلى الزوايا، مثل: الحرف "θ" ويُقرأ "ثيتا"، والحرف "β" ويُقرأ "بيتا".
- "الزاوية θ" تُكتب اختصاراً للعبارة "الزاوية التي قياسها θ"

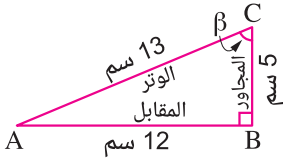
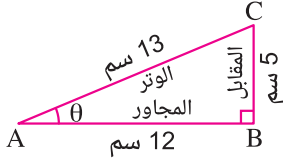
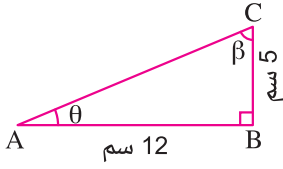
■ لاحظ أن

من التعريف المجاور لاحظ أن:

$$\sin \theta \div \cos \theta = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan \theta$$

أي أن:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



مثال 1

في الشكل المقابل :

أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين θ ، β

$$\because m(\angle B) = 90^\circ$$

$$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2$$

$$\therefore (AC)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$$

$$\therefore AC = \sqrt{169} = 13$$

$\therefore$ النسب المثلثية للزاوية θ :

$$\sin \theta = \frac{5}{13} , \cos \theta = \frac{12}{13} , \tan \theta = \frac{5}{12}$$

النسب المثلثية للزاوية β :

$$\sin \beta = \frac{12}{13} , \cos \beta = \frac{5}{13} , \tan \beta = \frac{12}{5}$$

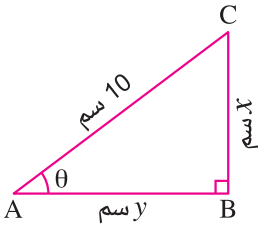
لاحظ أن

في مثال 1 :

$$\sin \theta = \cos \beta = \frac{5}{13} , \cos \theta = \sin \beta = \frac{12}{13}$$

وبصفة عامة :

$$\sin \theta = \cos \beta , \cos \theta = \sin \beta \text{ لـ } \theta , \beta \text{ زاويتين متتامتين يكون}$$



$$\therefore \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{x}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{CB}{AC} = \frac{x}{10}$$

$$\therefore x = \frac{10 \times 3}{5} = 6$$

ومن نظرية فيثاغورس :

$$AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \quad \therefore y = 8$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

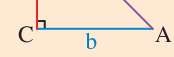
$$\therefore \tan \theta = \frac{BC}{BA}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \tan \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

تذكر نظرية فيثاغورس

إذا كان ABC مثلثاً قائم الزاوية في C

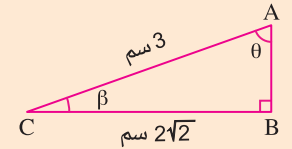


$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ فإن :}$$

تقييم ذاتي 1

في الشكل التالي :

ABC مثلث قائم الزاوية في B



أوجد :

النسب المثلثية لكل من

الزاويتين θ ، β

مثال 2

في الشكل المقابل :

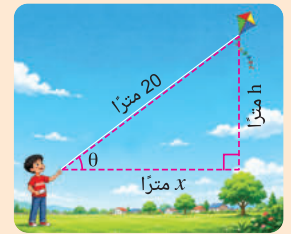
إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{5}$ فأوجد قيمة كل من x ، y

ثم أوجد قيمة : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \tan \theta$

تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي :

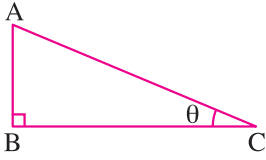
طائرة ورقية مربوطة بخيط طوله 20 متراً، يميل على الأفقي بزاوية θ بحيث $\sin \theta = \frac{3}{5}$



أوجد قيمة كل من x ، h

إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة معلوم إحدى نسبها المثلثية

مثال 3



في الشكل المقابل :

إذا كانت $\cos \theta = \frac{12}{13}$ فأوجد $\tan \theta$ ، $\sin \theta$

وإذا كان طول $\overline{BC} = 24$ سم فأوجد طول كل من $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$

$$\therefore \cos \theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$



وبفرض أن :

$$BC = 12k , AC = 13k$$

من نظرية فيثاغورس :

$$\therefore AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2} = \sqrt{(13k)^2 - (12k)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{169k^2 - 144k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13} , \tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

عند $BC = 24$ سم :

$$\therefore \cos \theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore \frac{24}{AC} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore AC = \frac{24 \times 13}{12} = 26$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

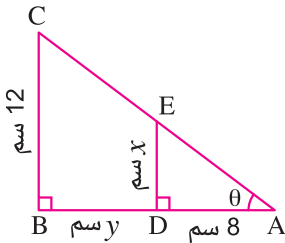
$$\therefore \frac{AB}{24} = \frac{5}{12}$$

■ تنوع الاستراتيجيات

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore AB = \frac{24 \times 5}{12} = 10$$

$\therefore$ طول $\overline{AC} = 26$ سم ، طول $\overline{AB} = 10$ سم



مثال 4

في الشكل المقابل :

إذا كانت $\tan \theta = \frac{3}{4}$

فأوجد قيمة كل من x ، y

✓ $\therefore \triangle ADE$ فيه : $m(\angle ADE) = 90^\circ$

$$\therefore \tan \theta = \frac{ED}{AD}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = \frac{8 \times 3}{4} = 6$$

$\therefore \triangle ABC$ فيه : $m(\angle B) = 90^\circ$

$$\therefore \tan \theta = \frac{CB}{AB}$$

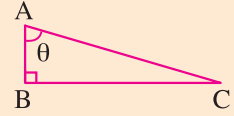
$$\therefore \frac{12}{y+8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore y+8 = \frac{4 \times 12}{3} = 16$$

$$\therefore y = 16 - 8 = 8$$

■ تقييم ذاتي 3

في الشكل التالي :



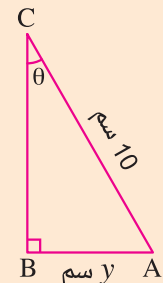
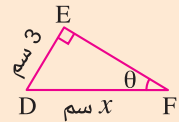
إذا كانت $\tan \theta = \frac{24}{7}$

فأوجد $\cos \theta$ ، $\sin \theta$

وإذا كان طول $\overline{AC} = 12.5$ سم فأوجد طول كل من $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$

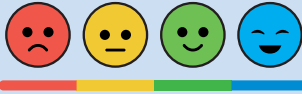
■ تقييم ذاتي 4

في الشكل التالي :



إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$

فأوجد قيمة كل من x ، y



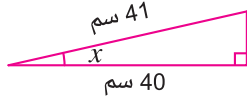
تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



2 في الشكل المقابل :

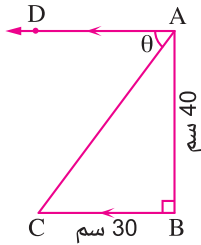
ما قيمة $\tan X$ ؟

- (أ) $\frac{40}{41}$ (ب) $\frac{9}{41}$
(ج) $\frac{9}{40}$ (د) $\frac{40}{9}$

4 إذا كان : A ، B قياسى زاويتين متتامتين وكان :

$\sin A = \frac{12}{13}$ فما قيمة $\cos B$ ؟

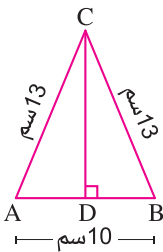
- (أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{5}{13}$
(ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{13}{12}$



6 في الشكل المقابل :

ما قيمة $\cos \theta$ ؟

- (أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{3}{5}$
(ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$



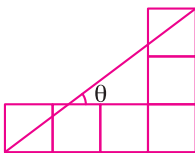
8 في الشكل المقابل :

ما قيمة $\sin B$ ؟

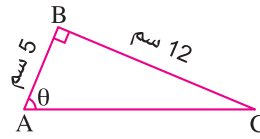
- (أ) $\frac{5}{13}$ (ب) $\frac{12}{13}$
(ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{12}{5}$

10 في الشكل التالى :

6 مربعات متطابقة فما قيمة $\sin \theta$ ؟



- (أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$
(ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{5}$



1 في الشكل المقابل :

ما قيمة $\sin \theta$ ؟

- (أ) $\frac{5}{12}$ (ب) $\frac{12}{13}$
(ج) $\frac{5}{13}$ (د) $\frac{12}{5}$

3 إذا كانت : $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin \theta = \frac{1}{2}$:

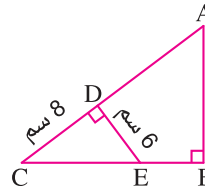
ما قيمة $\tan \theta$ ؟

- (أ) 1 (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(ج) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

5 في المثلث ABC القائم الزاوية فى B إذا كان :

$26 AB = 10 AC$ فما قيمة $\tan C$ ؟

- (أ) $\frac{12}{5}$ (ب) $\frac{5}{12}$
(ج) $\frac{12}{13}$ (د) $\frac{5}{13}$



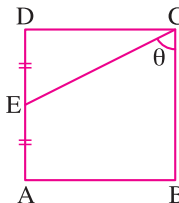
7 في الشكل المقابل :

ما قيمة $\sin A$ ؟

- (أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$
(ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$

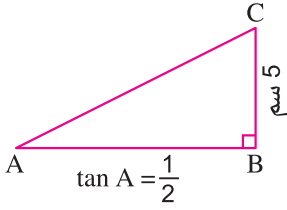
9 في الشكل التالى :

ABCD مربع، E منتصف $\overline{AD}$ ما قيمة $\tan \theta$ ؟



- (أ) 2 (ب) $\frac{1}{2}$
(ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{4}$

اكتشف الخطأ :



11) قام كل من وائل وسارة بحساب طول كل من $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$

فكانت إجابتاهما كما يلي ، فأى منهما أوجد الأطوال بطريقة صحيحة ؟

حل سارة :

$$\begin{aligned} \therefore \tan A &= \frac{AB}{BC} & \therefore \frac{AB}{5} &= \frac{1}{2} \\ \therefore AB &= \frac{5}{2} = 2.5 \\ \therefore AC &= \sqrt{(5)^2 + (2.5)^2} = 2.5\sqrt{5} \\ \therefore \text{طول } \overline{AB} &= 2.5 \text{ سم} , \text{ طول } \overline{AC} = 2.5\sqrt{5} \text{ سم} \end{aligned}$$

حل وائل :

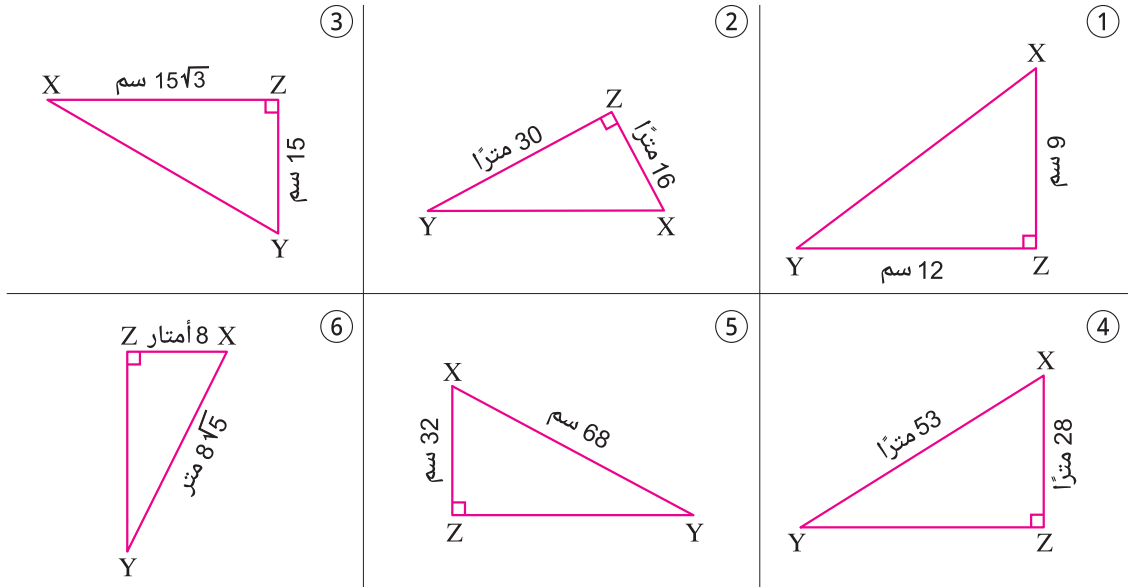
$$\begin{aligned} \therefore \tan A &= \frac{CB}{AB} & \therefore \frac{5}{AB} &= \frac{1}{2} \\ \therefore AB &= 2 \times 5 = 10 \\ \therefore AC &= \sqrt{(5)^2 + (10)^2} = 5\sqrt{5} \\ \therefore \text{طول } \overline{AB} &= 10 \text{ سم} , \text{ طول } \overline{AC} = 5\sqrt{5} \text{ سم} \end{aligned}$$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

12) فى كل مما يأتى أوجد : $\sin X$, $\cos X$, $\tan X$, $\sin Y$, $\cos Y$, $\tan Y$

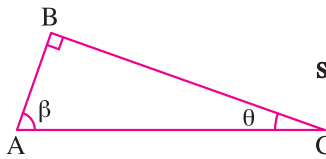


13) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\sin \theta = \frac{1}{3}$ فأوجد :

① $\cos \theta$

③ $\cos \beta$



② $\tan \theta$

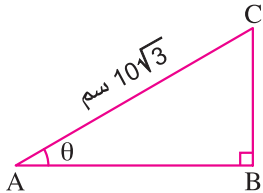
④ $\tan \beta$

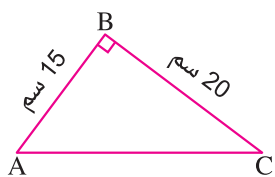
14) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

فأوجد طول كل من :

$\overline{BC}$, $\overline{AB}$





16 في الشكل المقابل :

ABC مثلث فيه

$$m(\angle B) = 90^\circ$$

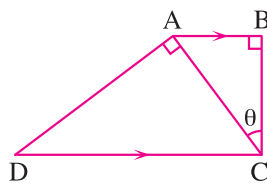
وطول $\overline{AB} = 15$ سم

وطول $\overline{BC} = 20$ سم أثبت كلاً مما يأتي :

$$\tan A \times \tan C = 1 \quad (1)$$

$$\sin^2 A + \sin^2 C = 1 \quad (2)$$

$$\cos A \cos C - \sin A \sin C = 0 \quad (3)$$



15 في الشكل المقابل :

ABCD شكل رباعي فيه

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$m(\angle B) = m(\angle CAD) = 90^\circ$$

طول $\overline{AD} = 16$ سم فإذا كانت :

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \text{ فأوجد طول } \overline{DC}$$



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

17 في الشكل التالي :

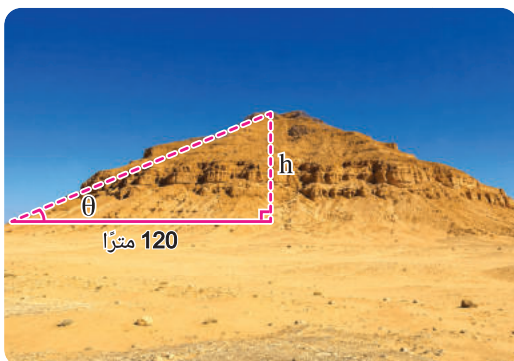
أوجد كلاً من :

$$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$$

18 في الشكل التالي :

$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$

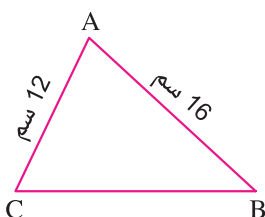
إذا كانت : فأوجد ارتفاع الجبل (h) بالمتر.



تفكير إبداعي

19 في الشكل المقابل :

إذا كان : $\frac{\sin C}{\sin B}$ مثلثاً حاد الزوايا أوجد قيمة :



قيم فهمك!

ما مدى فهمك للنسب المثلثية
للزاوية الحادة ؟
ضع علامة في المربع المناسب



النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة (Trigonometric Ratios of Some Special Angles)



استعد!

المسلات المصرية القديمة هي عبارة عن أبراج حجرية عالية تزين المعابد، قاعدتها تأخذ شكلًا رباعيًا ويعلوها رأس هرمي صغير، وكانت تُعد أول ساعة شمسية حيث كان المصري القديم يراقب الظل الذي تلقيه المسلة على الأرض ويتحرك الظل ويتغير طوله واتجاهه فيشير إلى أجزاء اليوم المختلفة.

فإذا كانت أشعة الشمس تصنع زاوية قياسها 45° مع سطح الأرض، فكم يكون طول ظل المسلة التي ارتفاعها 40 مترًا؟

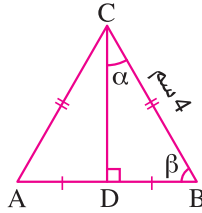
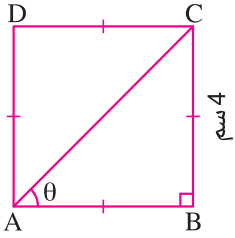
في هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية حساب النسب المثلثية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

■ نواتج التعلم

- تعرف النسب المثلثية للزوايا الخاصة (30° , 60° , 45°).
- تستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزاوية معلوم قياسها.
- توجد قياس الزاوية إذا غُلمت إحدى نسبها المثلثية باستخدام الآلة الحاسبة.
- تستخدم النسب المثلثية في حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- الزوايا الخاصة
Special angles



فكر وناقش!

في الشكل المقابل :
ما قيمة θ في المربع ؟
وما قيمة كل من α , β في المثلث ؟
هل يمكنك التعرف على النسب المثلثية الثلاث لكل من α , β , θ ؟



تعلم!

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

يمكن استخدام المثلث القائم الزاوية الذي قياسات زواياه (30° , 60° , 90°)، والمثلث القائم الزاوية الذي قياسات زواياه (45° , 45° , 90°) لاستنتاج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مثل 30° , 60° , 45° كما يلي :

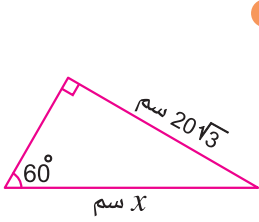
المثلث	الجيب (sin)	جيب التمام (cos)	الظل (tan)
	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

■ فكر مع زملائك

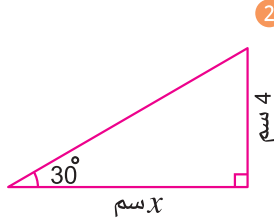
- في المثلث الثلاثيني ستينى إذا كان طول الضلع المقابل للزاوية 30° هو 1 سم فكيف يمكنك استنتاج طول الوتر وطول الضلع المقابل للزاوية 60° ؟
- في المثلث القائم الزاوية، وإحدى زواياه الحادة 45° إذا كان طول أحد ضلعي القائمة 1 سم فكيف يمكنك استنتاج طولى الضلعين الآخرين ؟

مثال 1

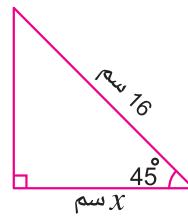
أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية :



$$\begin{aligned}\therefore \sin 60^\circ &= \frac{20\sqrt{3}}{x} \\ \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{20\sqrt{3}}{x} \\ \therefore x &= 40\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \tan 30^\circ &= \frac{4}{x} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{4}{x} \\ \therefore x &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \cos 45^\circ &= \frac{x}{16} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{x}{16} \\ \therefore x &= \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية

إيجاد النسب المثلثية لأي زاوية معلوم قياسها باستخدام الآلة الحاسبة باستخدام المفاتيح :

$\tan$ ، $\cos$ ، $\sin$

مثال 2

باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج لأقرب أربعة أرقام عشرية :

$\tan 74^\circ 12' 36''$ 3

$\cos 15^\circ 17'$ 2

$\sin 42^\circ$ 1

$\sin$ 4 2 =

$\therefore \sin 42^\circ \approx 0.6691$

$\cos$ 1 5 . . . 1 7 . . . =

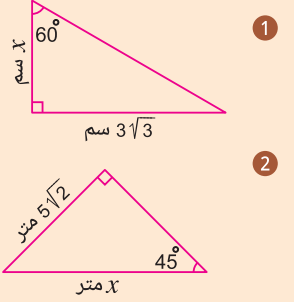
$\therefore \cos 15^\circ 17' \approx 0.9646$

$\tan$ 7 4 . . . 1 2 . . . 3 6 . . . = 3

$\therefore \tan 74^\circ 12' 36'' \approx 3.5363$

■ تقييم ذاتي 1

أوجد قيمة x في كل مما يأتي :



■ فكر مع زملائك

متى تستخدم $\tan$ ، $\cos$ ، $\sin$ لإيجاد طول ضلع مجهول في المثلث القائم الزاوية ؟

■ تذكر أن

- وحدات قياس الزاوية هي الدرجة والدقيقة والثانية حيث :
- الدرجة تساوي 60 دقيقة ($1^\circ = 60'$)
- الدقيقة تساوي 60 ثانية ($1' = 60''$)

■ تقييم ذاتي 2

باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية :

$\tan 12^\circ$ 1

$\sin 32^\circ 14'$ 2

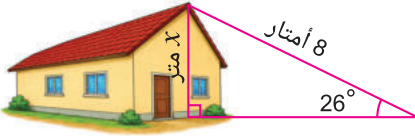
$\cos 47^\circ 15' 39''$ 3

■ فكر

هل يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لكل من الزاويتين 0° ، 90° ؟

مثال 3

في كل مما يأتي، أوجد قيمة X لأقرب رقمين عشريين :



$$\therefore \sin 26^\circ = \frac{X}{8}$$

$$\therefore X = 8 \sin 26^\circ \approx 3.51$$



$$\therefore \tan 54^\circ = \frac{6}{X}$$

$$\therefore X = \frac{6}{\tan 54^\circ} \approx 4.36$$

إيجاد قياس زاوية بمعرفة إحدى نسبها المثلثية

إذا كانت θ زاوية حادة وكانت :

$$\sin \theta = X \quad \text{فإن} \quad \theta = \sin^{-1}(X)$$

$$\cos \theta = X \quad \text{فإن} \quad \theta = \cos^{-1}(X)$$

$$\tan \theta = X \quad \text{فإن} \quad \theta = \tan^{-1}(X)$$

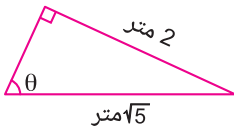
فمثلاً: إذا كانت $\sin \theta = 0.834$ فإن θ هي الزاوية التي جيبها 0.834
ولإيجاد قياس هذه الزاوية نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع التالي :



ف نجد أن قياس الزاوية يساوي تقريباً $56^\circ 30' 43''$

مثال 4

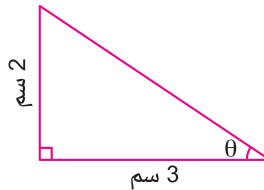
أوجد قيمة θ في كل مما يأتي :



$$\therefore \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\therefore \theta \approx 63^\circ 26' 6''$$



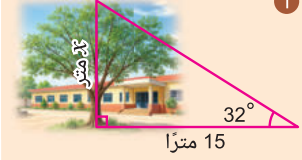
$$\therefore \tan \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \theta \approx 33^\circ 41' 24''$$

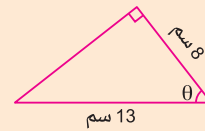
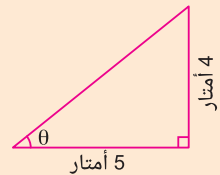
تقييم ذاتي 3

في كل مما يأتي،
أوجد قيمة X لأقرب رقمين
عشريين :



تقييم ذاتي 4

أوجد قيمة θ في كل مما يأتي :



■ تقييم ذاتي 5

أوجد قيمة θ إذا كان :

$$\sqrt{3} \sin (\theta - 16^\circ) = \sin 60^\circ$$

حيث $(\theta - 16^\circ)$ زاوية حادة.

■ تقييم ذاتي 6

أوجد قيمة θ في كل مما يأتي،
حيث θ زاوية حادة :

$$\sin 75^\circ = \cos \theta \quad 1$$

$$\sin (\theta - 20^\circ) = \cos (\theta + 20^\circ) \quad 2$$

■ لاحظ أن

لأي زاويتين حادتين θ ، β

إذا كانت : $\sin \theta = \cos \beta$

فإن : $\theta + \beta = 90^\circ$

مثال 5

أوجد قيمة θ إذا كان :

$$2 \cos (\theta + 20^\circ) = \tan 45^\circ \text{ حيث } (\theta + 20^\circ) \text{ زاوية حادة.}$$

$$\therefore 2 \cos (\theta + 20^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$\therefore 2 \cos (\theta + 20^\circ) = 1 \quad \therefore \cos (\theta + 20^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta + 20^\circ = 60^\circ \quad \therefore \theta = 40^\circ$$

مثال 6

إذا كان ABC مثلثًا فيه : $m(\angle B) = 72^\circ$ ، $\sin A = \cos 2A$ حيث $(2A)$ زاوية حادة ، أوجد : $m(\angle C)$

$$\therefore \sin A = \cos 2A \quad \therefore A + 2A = 90^\circ$$

$$\therefore 3A = 90^\circ \quad \therefore A = 30^\circ$$

$$\therefore m(\angle C) = 180^\circ - (72^\circ + 30^\circ) = 78^\circ$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① إذا كانت $\sin 40^\circ = \cos y$ حيث y قياس زاوية حادة
فما قيمة y ؟
(أ) 30 (ب) 40 (ج) 50 (د) 60
- ② ما قيمة $(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2$ ؟
(أ) $\sin 60^\circ$ (ب) $\sin 45^\circ$
(ج) $\tan 45^\circ$ (د) $\cos 60^\circ$

- ③ إذا كان ABC مثلثًا متساوي الساقين وقائم الزاوية في C ، فما قيمة $\tan B$ ؟
(أ) 1 (ب) 2 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

- ④ في المثلث ABC الحاد الزوايا إذا كان : $m(\angle A) = 70^\circ$ ، $\cos B = \sin B$ فما قياس $\angle C$ ؟
(أ) 65° (ب) 70° (ج) 40° (د) 30°

- ⑤ إذا كانت θ زاوية حادة، وكانت $\sin (\theta - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ فما قيمة θ ؟
(أ) 65° (ب) 55° (ج) 45° (د) 35°

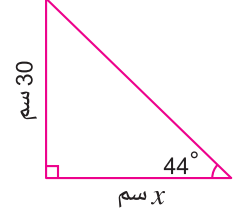
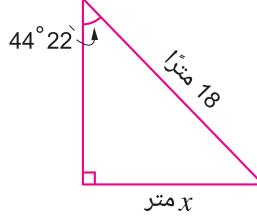
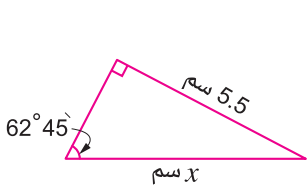
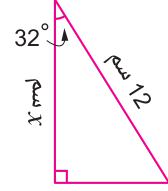
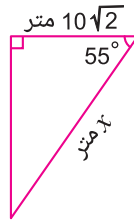
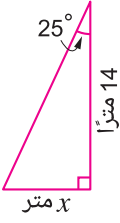
- ⑥ إذا كانت $\sin 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث 4θ زاوية حادة فما قيمة θ ؟
(أ) 15° (ب) 30° (ج) 45° (د) 60°



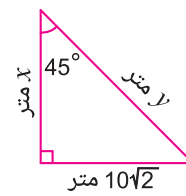
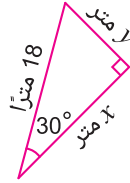
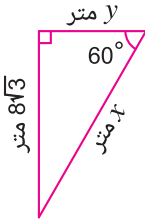
تطبيق المفاهيم

ثانياً

7 في كل مما يأتي أوجد قيمة x لأقرب رقمين عشريين :



8 في كل مما يأتي أوجد قيمة كل من x, y :



9 أوجد قيمة x في كل مما يأتي :

$$x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = (\tan 45^\circ)^2 - (\cos 60^\circ)^2 \quad (2)$$

$$x \tan 45^\circ \cos 30^\circ = \tan 60^\circ \quad (1)$$

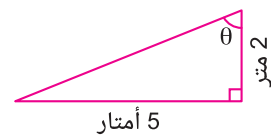
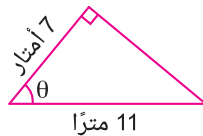
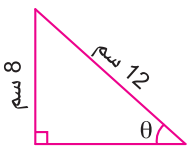
10 أوجد قيمة θ في كل مما يأتي :

$$\tan 3\theta = \sqrt{3} \quad (2) \text{ حيث } 3\theta \text{ زاوية حادة.}$$

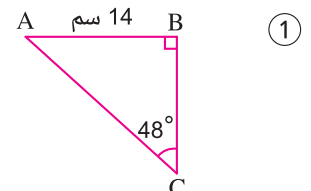
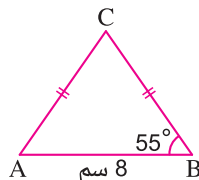
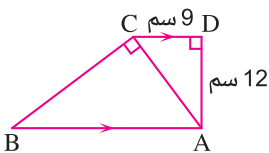
$$\cos 4\theta = \frac{1}{2} \quad (1) \text{ حيث } 4\theta \text{ زاوية حادة.}$$

$$\frac{\cos 4\theta}{\sin 2\theta} = 1 \quad (3) \text{ حيث } 4\theta \text{ زاوية حادة.}$$

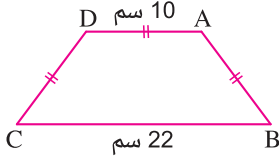
11 أوجد قيمة θ في كل مما يأتي :



12 في كل مما يأتي أوجد محيط المثلث ABC لأقرب رقمين عشريين :

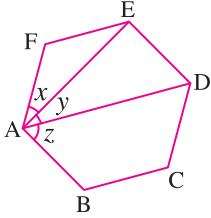


13 في الشكل المقابل :



ABCD شبه منحرف فيه $AB = DC = AD = 10$ سم ، $BC = 22$ سم
أوجد $m(\angle C)$ لأقرب دقيقة ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف ABCD

14 في الشكل المقابل :



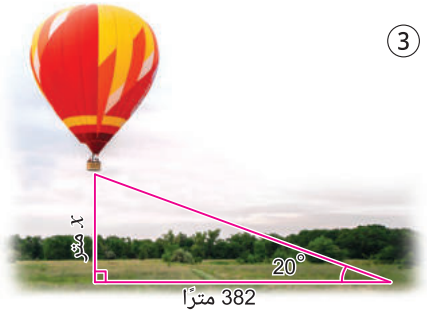
إذا كان ABCDEF شكلًا سداسيًا منتظمًا، فأوجد : $2 \sin x + 4 \sin y - 6 \cos z$



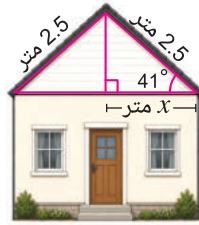
التحليل وتكامل المواد

ثالثًا

15 أوجد قيمة x في كل مما يأتي لأقرب رقم عشري :



3



2

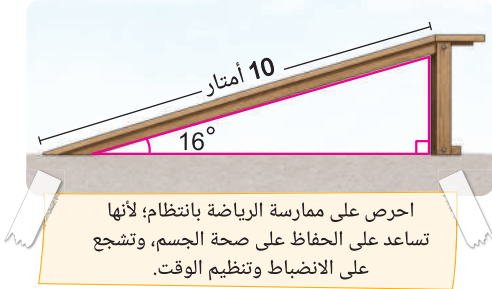


1

16 رياضة :

في الشكل المقابل :

عند بناء منحدر للدراجات، كانت زاوية ميل المنحدر 16°
فإذا كان طول المنحدر 10 أمتار، فما ارتفاعه ؟

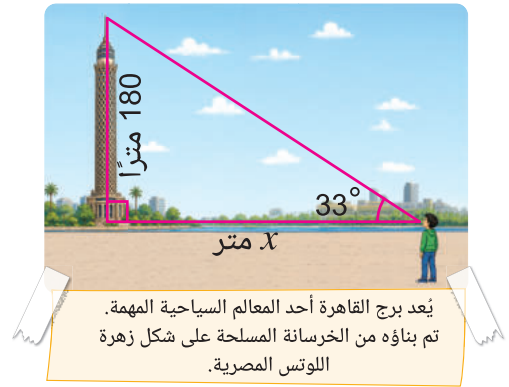


أحرص على ممارسة الرياضة بانتظام؛ لأنها تساعد على الحفاظ على صحة الجسم، وتشجع على الانضباط وتنظيم الوقت.

17 سياحة :

في الشكل المقابل :

إذا كان ارتفاع برج القاهرة 180 مترًا، وكان أحمد ينظر إلى قمة
البرج بزاوية قياسها 33°
فما المسافة بين أحمد وقاعدة البرج ؟



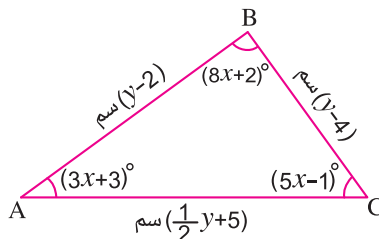
يعد برج القاهرة أحد المعالم السياحية المهمة. تم بناؤه من الخرسانة المسلحة على شكل زهرة اللوتس المصرية.



تفكير إبداعي

18 في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\sin 54^\circ \approx 0.8$
أوجد محيط المثلث ABC



قيم فهم!

ما مدى فهمك للنسب المثلثية
لبعض الزوايا الخاصة ؟
ضع علامة في المربع المناسب



العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين

(The Relation between the Slopes of Two Parallel and Perpendicular Straight Lines)

الدرس 3 - 6



استعد!

فى السادس من أكتوبر من كل عام تحتفل مصر بذكرى انتصارات أكتوبر المجيدة، يوم العزة والكرامة، وثقام فى هذه المناسبة عروض جوية مبهرة تزين سماء الوطن. فى أحد العروض الجوية تطير الطائرات فى مسارات متوازية، فإذا كانت إحدى الطائرات تتبع مسارًا يمر بالنقطتين $(201, 100\sqrt{3})$ ، $(401, 300\sqrt{3})$

وكانت طائرة أخرى تتبع مسارًا يصنع زاوية موجبة θ مع الاتجاه الموجب لمحور X ، أوجد قياس زاوية θ

فى هذا الدرس، سوف نتعرف على العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

إذا رسم مجدى مستقيمين l_1 ، l_2 وكان المستقيم l_1 يمر بالنقطتين $(5, 7)$ ، $(-1, 6)$ والمستقيم l_2 يمر بالنقطتين $(4, -4)$ ، $(3, 2)$ فأى مما يأتى صحيح؟

l_2 ، l_1 متقاطعا وغير متعامدين

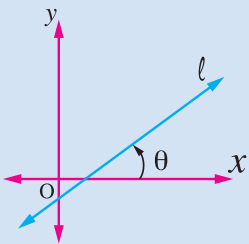
$l_1 \perp l_2$

$l_1 \parallel l_2$



تعلم!

زاوية ميل الخط المستقيم



زاوية ميل الخط المستقيم هى الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور X ، عند قياسها عكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من الاتجاه الموجب لمحور X .

زاوية ميل الخط المستقيم $\theta = l$

ميل الخط المستقيم

$$m = \tan \theta$$

ميل الخط المستقيم هو ظل زاوية ميل الخط المستقيم.

فمثلاً: ميل المستقيم الذى قياس زاوية ميله 45° هو $\tan 45^\circ$

$$m = \tan 45^\circ = 1 \text{ أى أن}$$

■ نواتج التعلم

- تستنتج ميل الخط المستقيم من خلال ظل زاوية ميله.
- تعرف العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين.
- تعرف العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين.
- تحل مسائل حياتية باستخدام ميل الخط المستقيم.

■ المفردات

- ميل المستقيم
- Slope of straight line
- المستقيمان المتوازيان
- Two parallel straight lines
- المستقيمان المتعامدان
- Two perpendicular straight lines

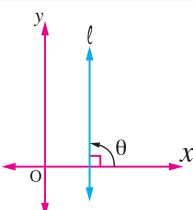
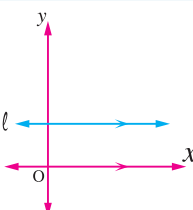
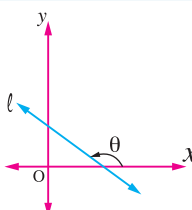
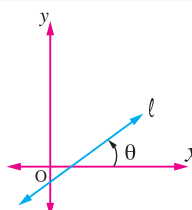
■ تذكر أن

- ميل المستقيم (m) المار بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)
- يعطى بالعلاقة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ملاحظة:

تذكر أن

- ميل أى مستقيم أفقى (يوازى محور x) يساوى الصفر.
- ميل أى مستقيم رأسى (يوازى محور y) غير معرف.

الميل غير معرف	الميل صفر	الميل سالب	الميل موجب
			
$\theta = 90^\circ$ $\tan \theta$ غير معرف	$\theta = 0^\circ$ $\tan \theta = 0$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\tan \theta < 0$	$0^\circ < \theta < 90^\circ$ $\tan \theta > 0$

فمثلاً:

- ميل المستقيم الذى قياس زاوية ميله (60°) هو $(\tan 60^\circ = \sqrt{3})$
- ميل المستقيم الذى قياس زاوية ميله (150°) هو $(\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3})$

مثال 1

أوجد قياس زاوية ميل المستقيم l إذا كان:

① ميل المستقيم l يساوى $\frac{3}{7}$ ② المستقيم l يمر بالنقطتين $(5, 6)$ ، $(4, 7)$

$$\therefore m = \frac{3}{7} \quad \therefore \theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{7} \right)$$

$$\text{SHIFT} \quad \tan \quad 3 \quad \div \quad 7 \quad = \quad \circ \circ \circ$$

$$\therefore \theta \approx 23^\circ 11' 55''$$

$\therefore$ قياس زاوية ميل المستقيم $l \approx 23^\circ 11' 55''$

$$\therefore m = \frac{6-7}{5-4} = -1 \quad \therefore \theta = 180^\circ + \tan^{-1}(-1)$$

$$1 \quad 8 \quad 0 \quad + \quad \text{SHIFT} \quad \tan \quad - \quad 1 \quad =$$

$$\therefore \theta = 135^\circ$$

$\therefore$ قياس زاوية ميل المستقيم $l = 135^\circ$

مثال 2

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $A(2k+1, -5)$ ، $B(-3, k)$ زاوية ميله قياسها 45° فأوجد قيمة k

$\therefore$ ميل المستقيم $= \tan 45^\circ$ ✓

$$\therefore \frac{-5-k}{2k+1+3} = \tan 45^\circ \quad \therefore \frac{-5-k}{2k+4} = 1 \quad \therefore 2k+4 = -5-k$$

$$\therefore 2k+k = -5-4 \quad \therefore 3k = -9 \quad \therefore k = -3$$

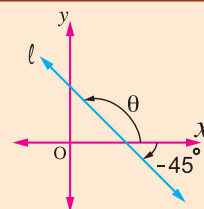
تقييم ذاتى ①

أوجد قياس زاوية ميل المستقيم l إذا كان:

① ميل المستقيم l يساوى $\frac{5}{6}$

② المستقيم l يمر بالنقطتين $(-1, 3\sqrt{3})$ ، $(3, -\sqrt{3})$

لاحظ أن



عند استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية الميل السالب نجد أن: $\tan^{-1}(-1) = -45^\circ$ وهو قياس الزاوية بين الاتجاه الموجب لمحور x والمستقيم عند القياس فى اتجاه عقارب الساعة وليس زاوية الميل لذلك فإن:

$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}(-1) = 135^\circ$$

تقييم ذاتى ②

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين

$(1, k)$ ، $(2k, 5)$ زاوية ميله قياسها 135° أوجد قيمة k

■ لاحظ أن

أي مستقيمين رأسيين متوازيين.

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

إذا كان l_1 ، l_2 مستقيمين غير رأسيين ميلهما m_1 ، m_2 على الترتيب.

$$\text{وكان } l_1 \parallel l_2 \text{ فإن } m_1 = m_2$$

أي أن : إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين.

والعكس صحيح.

$$\text{إذا كان } m_1 = m_2 \text{ فإن } l_1 \parallel l_2$$

أي أن : إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

مثال 3

أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين $A(2, 1)$ ، $B(4, -1)$ يوازي المستقيم الذي زاوية ميله قياسها 135°

$$\checkmark \text{ بفرض أن ميل } \overrightarrow{AB} = m_1$$

$$\therefore m_1 = \frac{1 - (-1)}{2 - 4} = -1$$

ميل المستقيم الثانى m_2

$$\therefore m_2 = \tan 135^\circ = -1$$

$$\therefore m_1 = m_2$$

$\therefore$ المستقيمان متوازيان.

مثال 4

أثبت باستخدام الميل أن النقط $A(4, 3)$ ، $B(2, 7)$ ، $C(8, -5)$ على استقامة واحدة.

$$\checkmark \text{ بفرض أن ميل } \overrightarrow{AB} = m_1$$

$$\therefore m_1 = \frac{7 - 3}{2 - 4} = -2$$

وبفرض أن ميل $\overrightarrow{AC} = m_2$

$$\therefore m_2 = \frac{3 + 5}{4 - 8} = -2$$

$$\therefore m_1 = m_2$$

والنقطة A مشتركة بين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

$\therefore$ النقط A، B، C على استقامة واحدة.

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

إذا كان l_1 ، l_2 مستقيمين ميلهما m_1 ، m_2 على الترتيب ولا يوازي أحدهما أحد المحورين.

$$\text{وكان } l_1 \perp l_2 \text{ فإن } m_1 \times m_2 = -1$$

أي أن : حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين يساوى -1

والعكس صحيح.

$$\text{إذا كان } m_1 \times m_2 = -1 \text{ فإن } l_1 \perp l_2$$

أي أن : إذا كان حاصل ضرب ميلي مستقيمين يساوى -1 فإن المستقيمين يكونان متعامدين.

■ تقييم ذاتى 3

إذا كان المستقيم l_1 يمر

بالنقطتين $(4, 9)$ ، $(1, 2)$

والمستقيم l_2 يمر بالنقطتين

$(2, -2)$ ، $(7, 5)$

أثبت أن : $l_1 \parallel l_2$

■ تقييم ذاتى 4

إذا كانت النقط

$B(4, k)$ ، $A(1, -2)$

$C(7, 3k - 1)$ ،

تقع على استقامة واحدة أوجد

قيمة k

■ لاحظ أن

• إذا كان أحد المستقيمين رأسيًا والآخر أفقيًا فإن المستقيمين متعامدان.

• إذا كان ميل المستقيم l_1

هو $\frac{a}{b}$ (حيث $a \neq 0$)

فإن ميل المستقيم l_2

العمودى عليه هو $-\frac{b}{a}$

■ تقييم ذاتي 5

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $A(\sqrt{3}, -1)$ ، $B(3\sqrt{3}, 1)$ عمودي على المستقيم الذي زاوية ميله قياسها 120°

■ مثال 5

إذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطتين $(-1, 6)$ ، $(5, 2)$ ، والمستقيم l_2 يمر بالنقطتين $(6, 8)$ ، $(-2, -4)$ أثبت أن $l_1 \perp l_2$

$$\therefore m_1 = \frac{6-2}{-1-5} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \quad , \quad m_2 = \frac{8+4}{6+2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1 \quad \therefore l_1 \perp l_2$$



■ تقييم ذاتي 6

إذا كانت النقط $A(6, 2)$ ، $B(4, 8)$ ، $C(-12, k)$ ، $D(2, 1)$ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في A أوجد قيمة k

■ مثال 6

أثبت أن النقط $A(0, -1)$ ، $B(-3, 2)$ ، $C(-1, 4)$ ، $D(2, 1)$ هي رؤوس مستطيل.

$$\therefore m_1 = \frac{2-(-1)}{-3-0} = -1 \quad , \quad m_2 = \frac{4-1}{-1-2} = -1$$

$$\therefore m_1 = m_2 \quad \therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$



$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad (1)$$

$$1 = \frac{4-2}{-1-(-3)} = \frac{2}{-2} = -1 \quad , \quad 1 = \frac{2-(-1)}{-3-0} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\therefore m_1 = m_2 \quad \therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC} \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \times 1 = -1 \quad \therefore \overline{AB} \perp \overline{AD}$$

$\therefore$ الشكل $ABCD$ مستطيل.

■ فكر مع زملائك

كيف تثبت أن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع أو مستطيلاً أو مربعاً باستخدام ميل الخط المستقيم ؟



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ وكان ميل $\overline{AB} = \frac{2}{3}$ فما ميل $\overline{CD}$ ؟

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $-\frac{2}{3}$ (د) $-\frac{3}{2}$

③ ما ميل المستقيم الذي زاوية ميله قياسها 60° ؟

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\sqrt{3}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

② ما ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(6, 3)$ ، $(-2, -4)$ ؟

(أ) $-\frac{7}{8}$ (ب) $\frac{7}{8}$ (ج) $-\frac{8}{7}$ (د) $\frac{8}{7}$

④ ما ميل المستقيم العمودي على محور X ؟

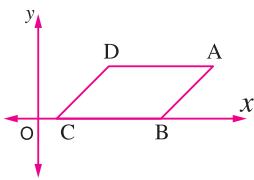
(أ) صفر (ب) 1 (ج) -1 (د) غير معرف

⑥ إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية في B وكانت $A = (2, 4)$ ،
 $B = (4, 0)$ فما ميل $\overrightarrow{BC}$ ؟

- (أ) -2 (ب) 2 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

⑧ المعين $ABCD$ فيه ميل $\overrightarrow{BD}$ يساوي $\frac{3}{4}$
 فما ميل $\overrightarrow{AC}$ ؟

- (أ) $-\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $-\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$



⑩ في الشكل المقابل :

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع

وكانت $B(4, 0)$ ، $A(6, 2)$

فما قياس $\angle BCD$ ؟

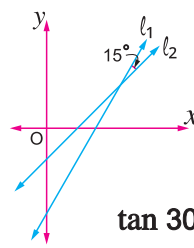
- (أ) 75° (ب) 60°
 (ج) 45° (د) 30°

⑤ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{k}{6}$ ، $-\frac{5}{3}$
 متوازيين فما قيمة k ؟

- (أ) 10 (ب) -10 (ج) 5 (د) -5

⑦ المربع $ABCD$ فيه ميل $\overrightarrow{AB}$ يساوي $\sqrt{3}$
 فما ميل $\overrightarrow{BC}$ ؟

- (أ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ب) $-\sqrt{3}$ (ج) $\sqrt{3}$ (د) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



⑨ في الشكل المقابل :

إذا كان ميل المستقيم l_1

يساوي $\sqrt{3}$ فما ميل

المستقيم l_2 ؟

- (أ) $\tan 15^\circ$ (ب) $\tan 30^\circ$
 (ج) $\tan 45^\circ$ (د) $\tan 60^\circ$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

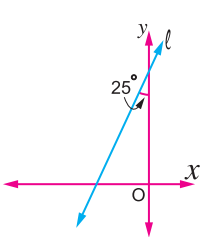
⑪ أوجد ميل الخط المستقيم الذي زاوية ميله قياسها θ إذا كانت θ تساوي :

- (أ) 0° (ب) 30° (ج) 75° (د) 135°

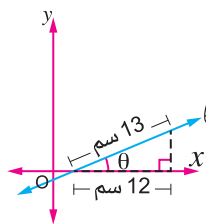
⑫ أوجد قياس زاوية ميل المستقيم الذي ميله (m) إذا كانت m تساوي :

- (أ) 0.4 (ب) $-\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{4}{9}$

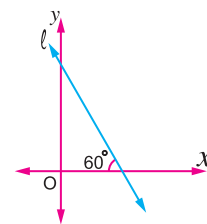
⑬ في كل من الأشكال الآتية أوجد ميل المستقيم l :



③



②



①

⑭ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $A(3k, 1)$ ، $B(1, 2)$ زاوية ميله قياسها θ وكان $\tan \theta = \frac{1}{2}$ أوجد قيمة k

⑮ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $A(-4\sqrt{3}, k-6)$ ، $B(2\sqrt{3}, 2k+1)$ زاوية ميله قياسها 60° أوجد قيمة k

⑯ بين ما إذا كان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ متوازيين ، أو متعامدين ، أو متقاطعين وغير متعامدين :

① $A(-1, -4)$ ، $B(2, 11)$ ، $C(1, 1)$ ، $D(4, 10)$

② $A(2, 8)$ ، $B(-1, -2)$ ، $C(3, 7)$ ، $D(0, -3)$

③ $A(-3, 3)$ ، $B(0, 2)$ ، $C(1, 3)$ ، $D(-2, -6)$

④ $A(-1, 3)$ ، $B(4, 8)$ ، $C(-6, 0)$ ، $D(2, 8)$

17 أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $A(4, -3)$ ، $B(5, -4)$ عمودى على المستقيم الذى زاوية ميله قياسها 45°

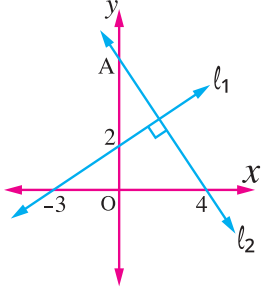
18 إذا كانت النقط $A(1, 4)$ ، $B(5, 5)$ ، $C(13, k)$ على استقامة واحدة أوجد قيمة k

19 أثبت أن النقط $A(6, -5)$ ، $B(4, -7)$ ، $C(3, -3)$ ، $D(5, -1)$ هى رؤوس متوازي أضلاع.

20 أثبت أن النقط $A(3, -1)$ ، $B(5, 4)$ ، $C(3, 9)$ ، $D(1, 4)$ هى رؤوس معين.

21 فى الشكل المقابل :

إذا كان $l_1 \perp l_2$ أوجد إحداثي النقطة A



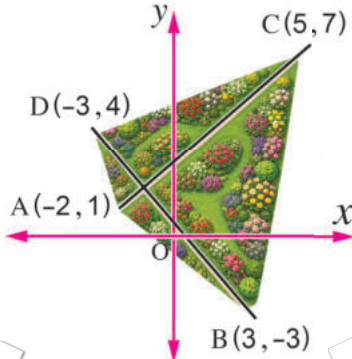
التحليل وتكامل المواد

ثالثًا

22 زراعة : حديقة رؤوسها النقط $A(-2, 1)$ ، $B(3, -3)$ ،

$D(-3, 4)$ ، $C(5, 7)$ المساران $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ يمران بالحديقة،

أثبت أن المسارين متعامدان.



زراعة الحدائق لها أهمية كبيرة فى تحسين جودة الهواء وتنقيته من التلوث، كما أنها مصدر للشعور بالراحة والبهجة.

23 حفريات : رسم علماء الحفريات خريطة لديناصور باستخدام الإحداثيات المتعامدة، فكانت إحدى العظام يقع طرفها

عند النقطتين $(-5, 8)$ ، $(-1, 10)$ وعظمة أخرى يقع طرفها عند النقطتين $(-3, -10)$ ، $(-6, -5)$

هل العظمتان متوازيتان ؟

24 فى الشكل الذى أمامك تم تمثيل القطع الخشبية لكرسى شاطئ بالخطوط

l_1 الذى يمر بالنقطتين $A(4, k)$ ، $B(1, 2)$ عمودى على l_2 الذى يمر

بالنقطتين $C(1, 4)$ ، $D(-4, 1)$ أوجد قيمة k



قيم فهمك!

ما مدى فهمك للعلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



معادلة الخط المستقيم (Equation of the Straight Line)



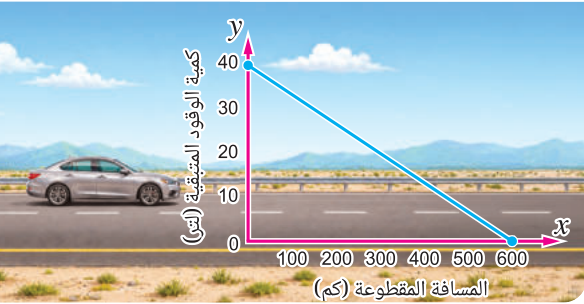
محلات لبيع الهدايا التذكارية



استعد!

تُعد محافظة الأقصر من أهم المقاصد السياحية في العالم، حيث تضم معابد الكرنك والأقصر ووادي الملوك. بفرض أن أحد محلات بيع الهدايا التذكارية بالقرب من معبد الأقصر سجل إيراداته السنوية فكانت العلاقة خطية بين إجمالي المبيعات (بالألف جنيه) وسنة البيع. وفي عام 2020 بلغت المبيعات 800 ألف جنيه وتزداد بمعدل 40 ألف جنيه كل عام بسبب زيادة أعداد السياح، فهل يمكنك إيجاد المعادلة التي تعبر عن المبيعات y

بدلالة سنة البيع x (باعتبار أن: $x = 0$ تمثل عام 2020، $x = 1$ تمثل عام 2021، وهكذا ...) في هذا الدرس سوف تتعلم الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

انطلق سامح بسيارته في رحلة وكان خزان الوقود ممتلئاً بـ 40 لترًا، إذا كانت السيارة تستهلك 1 لتر من الوقود لكل 15 كم. أي من العلاقات الآتية تمثل العلاقة بين كمية الوقود المتبقية (y) والمسافة المقطوعة (x) ؟

أ) $y = x^2 - 40$

ب) $y = 15x + 40$

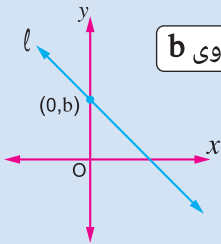
ج) $y = 40 - \frac{x}{15}$



تعلم!

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله m والمقطع y



إذا قطع المستقيم l محور y في النقطة $(0, b)$ فإن: المقطع y يساوي b وتكتب معادلة المستقيم l بدلالة ميله m والمقطع y على الصورة:

$$y = mx + b$$

المقطع y الميل

فمثلاً: إذا كان ميل المستقيم $\frac{4}{5}$ ، المقطع y يساوي -3

فإن معادلة هذا المستقيم هي: $y = \frac{4}{5}x - 3$

■ نواتج التعلم

- توجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والمقطع y .
- توجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل ونقطة.
- تعرف الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم.
- تستخدم ميل الخط المستقيم والمقطع y في تمثيل الخط المستقيم بيانياً.
- تستخدم معادلة الخط المستقيم في حل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- معادلة الخط المستقيم
- Equation of straight line
- المقطع y
- y -intercept

■ لاحظ أن

معادلة المستقيم الذي ميله m ويمر بنقطة الأصل $(0, 0)$ هي:

$$y = mx$$

■ تقييم ذاتي ①

اكتب معادلة الخط المستقيم
فى كل مما يأتى :

① المستقيم يمر بالنقطة $(0, -3)$

وظل زاوية ميله $\frac{5}{8}$

② المستقيم يوازي المستقيم

الذى معادلته $y = \frac{1}{3}x$

والمقطع $y = -4$

■ مثال 1

اكتب معادلة الخط المستقيم فى كل مما يأتى :

① زاوية ميل المستقيم قياسها 135° ، والمستقيم يمر بالنقطة $(0, -4)$

② المستقيم يمر بنقطة الأصل ، وعمودى على المستقيم الذى معادلته $y = -2x + 3$

② ∴ المستقيم يمر بنقطة الأصل $(0, 0)$

∴ معادلة المستقيم على الصورة :

$$y = mx$$

∴ ميل المستقيم $y = -2x + 3$

يساوى -2

∴ ميل المستقيم العمودى $\frac{1}{2}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

$$y = \frac{1}{2}x$$

① ∴ قياس زاوية ميل المستقيم 135°

$$\therefore m = \tan 135^\circ = -1$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(0, -4)$

∴ المقطع $y = -4$

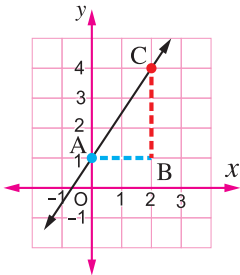
∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

$$y = -x - 4$$

■ مثال 2

اكتب معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{3}{2}$ ويقطع محور y فى النقطة $(0, 1)$

ثم مثله بيانياً باستخدام الميل ، المقطع y



∴ الميل $\frac{3}{2}$ ، المقطع $y = 1$

∴ معادلة المستقيم هى : $y = \frac{3}{2}x + 1$

ولتمثيل المستقيم بيانياً :

نمثل النقطة $A(0, 1)$

∴ الميل $\frac{3}{2} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

∴ نتحرك من النقطة A أفقيًا نحو اليمين وحدتين فنصل إلى النقطة B ، ثم نتحرك

رأسياً لأعلى ثلاث وحدات فنصل إلى C ، فيكون المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ هو التمثيل البيانى

المطلوب.

■ لاحظ أن

① معادلة محور x هى $y = 0$

② معادلة محور y هى $x = 0$

③ معادلة المستقيم الذى يمر
بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي

محور x هى $y = y_1$

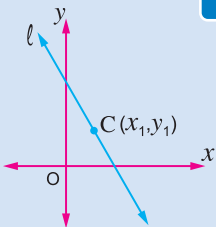
④ معادلة المستقيم الذى يمر
بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي

محور y هى $x = x_1$

■ معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله m وأى نقطة عليه

إذا كان المستقيم l ميله m ، ويمر بالنقطة $C(x_1, y_1)$

فإن معادلة المستقيم هى : $y - y_1 = m(x - x_1)$



فمثلاً إذا كان ميل المستقيم $\frac{2}{3}$ والمستقيم يمر بالنقطة $(3, 4)$

فإن معادلة هذا المستقيم هى : $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3)$

■ تقييم ذاتي 3

اكتب بصورة الميل والمقطع y
معادلة المستقيم الذي يمر
بالنقطتين $(-3, -7)$ ، $(2, -2)$

■ مثال 3

اكتب معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-4, 5)$ ، $(4, 1)$ على الصورة :
 $y = m x + b$

■ **تنوع الاستراتيجيات** $\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{-4 - 4} = \frac{-1}{2}$ ✓

بفرض أن معادلة المستقيم هي :

$$y = m x + b$$

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{-4 - 4} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{-1}{2} x + b$$

■ المستقيم يمر بالنقطة $(4, 1)$:

$$\therefore 1 = \frac{-1}{2} (4) + b$$

$$\therefore b = 3$$

$$\therefore \text{معادلة المستقيم : } y = \frac{-1}{2} x + 3$$

■ معادلة المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة

(x_1, y_1) هي :

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

■ معادلة المستقيم هي :

$$y - 1 = \frac{-1}{2} (x - 4)$$

$$\therefore y - 1 = \frac{-1}{2} x - \frac{-1}{2} \times 4$$

$$\therefore y - 1 = \frac{-1}{2} x + 2$$

$$\therefore y = \frac{-1}{2} x + 3$$

■ لاحظ أن

يمكنك استخدام النقطة $(-4, 5)$ بدلاً من النقطة $(4, 1)$ في تكوين المعادلة، وتحصل
على نفس الصورة لمعادلة المستقيم وهي : $y = \frac{-1}{2} x + 3$

■ الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم

$$A x + B y = C$$

حيث $A \geq 0$ ، A ، B لا يساويان الصفر معاً،

A ، B ، C أعداد صحيحة العامل المشترك الأكبر بينهم $= 1$

■ ملاحظة :

إذا كانت : $A x + B y = C$ هي الصورة القياسية لمعادلة المستقيم فإن :

$$\bullet \text{ ميل المستقيم} = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-A}{B}$$

$$\bullet \text{ المقطع } y \text{ يساوي } \frac{C}{B} \quad \bullet \text{ المقطع } x \text{ يساوي } \frac{C}{A}$$

■ **فمثلاً :** المستقيم الذي معادلته $2x + 3y = 6$

$$\bullet \text{ المقطع } x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\bullet \text{ المقطع } y = \frac{6}{3} = 2$$

$$\bullet \text{ ميله } = \frac{-2}{3}$$

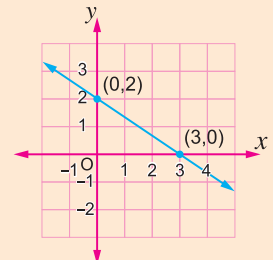
■ لاحظ أن

يمكن استخدام المقطع x
والمقطع y لتمثيل المستقيم
بيانياً فمثلاً إذا كان المستقيم :

$$2x + 3y = 6$$

المقطع $x = 3$ ، المقطع $y = 2$

أى أن المستقيم يقطع محور x
في النقطة $(3, 0)$ ، ويقطع
محور y في النقطة $(0, 2)$



مثال 4

اكتب الصورة القياسية لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(-4, 3)$ ، وعمودي على المستقيم الذي معادلته : $4x + y + 1 = 0$

$$-4 = \frac{-4}{1} = \frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \text{ميل المستقيم المعلوم}$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \text{ميل المستقيم المطلوب}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) : \text{معادلة المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore y - 3 = \frac{1}{4}(x - (-4)) \quad \therefore 4(y - 3) = x + 4$$

$$\therefore 4y - 12 = x + 4 \quad \therefore x - 4y = -16$$

مثال 5

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(7, -9)$ ، $(3, 3)$ عموديًا على المستقيم الذي معادلته : $2x + ky - 16 = 0$ أوجد قيمة k

بفرض أن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(7, -9)$ ، $(3, 3)$ هو m_1

$$\therefore m_1 = \frac{-9 - 3}{7 - 3} = -3$$

بفرض أن ميل المستقيم $2x + ky - 16 = 0$ هو m_2

$$\therefore m_2 = \frac{-2}{k}$$

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \quad \therefore -3 \times \frac{-2}{k} = -1 \quad \therefore k = -6$$

مثال 6

الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر من نقطة ثابتة، والزمن (t) بالساعة لحركة سيارة بسرعة منتظمة بين المدينتين A ، B أوجد :

① مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.

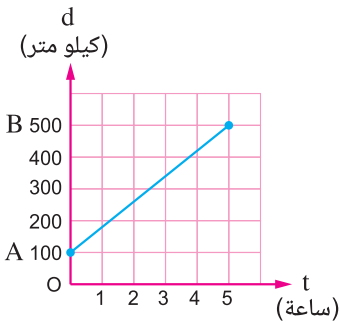
② بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة.

③ معادلة الخط المستقيم الممثل للعلاقة بين

المسافة والزمن.

④ المسافة التي تبعتها السيارة عن نقطة الأصل

بعد مرور 3 ساعات من بداية الحركة.



■ تقييم ذاتي 4

اكتب الصورة القياسية لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, -5)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته :

$$3x - 4y + 12 = 0$$

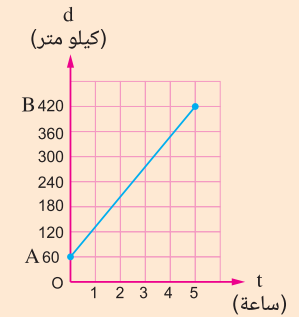
■ تقييم ذاتي 5

أوجد الصورة القياسية لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 3)$ موازيًا للمستقيم

$$4x - 5y = 6$$

■ تقييم ذاتي 6

الشكل التالي يمثل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر والزمن (t) بالساعة لحركة سيارة بسرعة منتظمة بين المدينتين A ، B



أوجد :

① مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.

② بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة.

③ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة السيارة.

✓ ① ∴ المستقيم يمر بالنقطتين (0, 100)، (5, 500)،

ميل الخط المستقيم يعبر عن مقدار السرعة المنتظمة (V) للسيارة

$$\therefore V = \frac{500 - 100}{5 - 0} = 80$$

∴ مقدار السرعة المنتظمة للسيارة = 80 كيلو متر/ ساعة

② بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة = 100 كيلو متر

③ معادلة الخط المستقيم هي: $d = mt + b$

$$\therefore d = 80t + 100$$

④ عند $t = 3$ فإن: $d = 80(3) + 100 = 340$

∴ المسافة التي تبعتها السيارة عن نقطة الأصل بعد مرور 3 ساعات = 340 كيلو متر.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

② ما ميل المستقيم الموازي للمستقيم $3x - 4y = 7$ ؟

(أ) $-\frac{4}{3}$ (ب) $-\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

① ما المقطع y بالخط المستقيم $2x - y - 5 = 0$ ؟

(أ) -5 (ب) $-\frac{5}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) 5

④ ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين (4, -1)، (5, -4) ؟

(أ) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ (ب) $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$

(ج) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ (د) $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$

③ ما ميل المستقيم العمودي على المستقيم $3x - 4y = 7$ ؟

(أ) $-\frac{4}{3}$ (ب) $-\frac{3}{4}$

(ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

⑥ إذا كان المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها 45° مع

الاتجاه الموجب لمحور x عمودياً على المستقيم الذي

معادلته $kx + 2y = 5$ فما قيمة k ؟

(أ) -1 (ب) 1 (ج) 2 (د) -2

⑤ إذا كان المستقيم الذي معادلته $3y - kx = 13$

يوازي المستقيم الذي معادلته $(k-1)x - 2y = 8$

فما قيمة k ؟

(أ) 3 (ب) 2 (ج) 1 (د) -2

⑧ ما قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $y - \sqrt{3}x + 5 = 0$

مع الاتجاه الموجب لمحور x ؟

(أ) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 75°

⑦ ما معادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل

وعمودي على المستقيم $y = \frac{1}{3}x - 7$ ؟

(أ) $y = 3x$ (ب) $y = -3x$

(ج) $y = \frac{1}{3}x$ (د) $y = -\frac{1}{3}x$

⑨ ما معادلة المستقيم الموازي لمحور y ويمر

بالنقطة (1, -2) ؟

(أ) $x = -2$ (ب) $y = 1$

(ج) $x = 1$ (د) $y = -2$

⑩ ما مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات $5x - 6y - 30 = 0$

، $x = 0$ ، $y = 0$ ؟

(أ) 7.5 وحدة مربعة (ب) 15 وحدة مربعة

(ج) 30 وحدة مربعة (د) 60 وحدة مربعة



11 في كل مما يأتي أوجد ميل المستقيم والمقطع X والمقطع Y :

$$4X - 2Y + 8 = 0 \quad (2)$$

$$-2X + 5Y = 20 \quad (1)$$

$$Y = \frac{-2}{3}X - 4 \quad (4)$$

$$Y = 7X \quad (3)$$

12 في كل مما يأتي أوجد معادلة المستقيم بصورة الميل والمقطع Y :

1 مستقيم ميله -2 والمقطع Y يساوي 3

2 مستقيم ميله $\frac{5}{2}$ والمقطع X يساوي -2

3 مستقيم ميله $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(6, 4)$

4 مستقيم يمر بالنقطتين $(6, 1)$ ، $(8, -4)$

5 مستقيم يمر بالنقطة $(0, -2)$ وعمودي على المستقيم $Y = X - 2$

6 مستقيم يمر بالنقطة $(-1, 2)$ ويوازي المستقيم $2X + 5Y = 10$

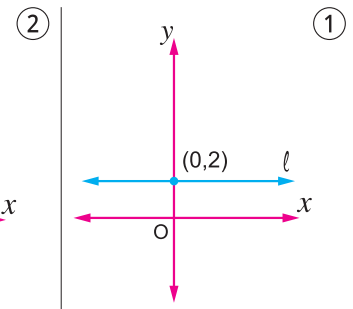
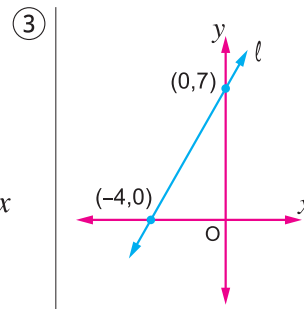
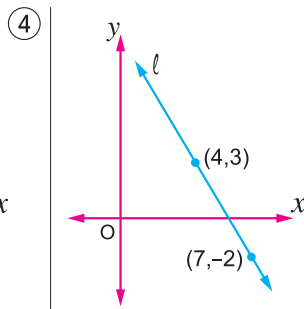
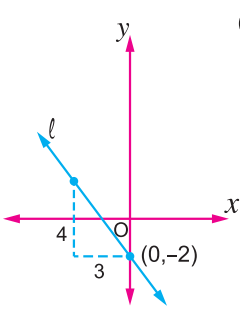
13 في كل مما يأتي أوجد معادلة المستقيم بالصورة القياسية إذا كان :

1 المقطع Y يساوي 4 ، المقطع X يساوي 3

2 المستقيم يمر بنقطة الأصل ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)$ ، $(5, -3)$

3 المستقيم عمودي على $\overline{AB}$ من نقطة منتصفها حيث $A(2, 5)$ ، $B(8, -3)$

14 في كل مما يأتي أوجد معادلة المستقيم l :



15 في كل مما يأتي مثل بياناً المستقيم باستخدام الميل والمقطع Y :

$$3X - 4Y - 12 = 0 \quad (3)$$

$$Y = \frac{-2}{5}X + 2 \quad (2)$$

$$Y = 2X - 3 \quad (1)$$

16 إذا كان ABC مثلثاً رؤوسه هي النقط $A(-6, -8)$ ، $B(6, 4)$ ، $C(-6, 10)$ وكان $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$

اكتب معادلة $\overrightarrow{AD}$

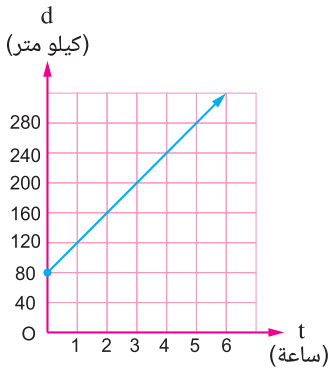


17 شركة اتصالات تفرض 25 جنيهاً اشتراكاً شهرياً ثابتاً، ثم 1.5 جنية لكل جيجا بايت يتم استخدامها.

اكتب معادلة تمثل التكلفة الكلية حسب عدد الجيجا بايت المستخدمة.

18 مبيعات: يتقاضى مندوب مبيعات راتباً يومياً بالإضافة إلى عمولة.

عندما تصل مبيعاته 1,000 جنية في اليوم، فإن إجمالي ما يتقاضاه 100 جنية، وعندما تصل مبيعاته 1,400 جنية، فإن إجمالي ما يتقاضاه 120 جنيهاً. حيث إن العلاقة بين ما يتقاضاه والمبيعات خطية، اكتب معادلة تربط المبيعات X ، بما يتقاضاه المندوب Y ، واستنتج ما يتقاضاه عندما تصل مبيعاته 2,000 جنية في اليوم.



19 الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر من نقطة ثابتة، والزمن (t) بالساعة لحركة سيارة بسرعة منتظمة. أوجد:

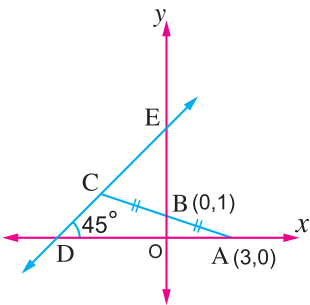
- ① مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.
- ② بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة.
- ③ معادلة الخط المستقيم الممثل للعلاقة بين المسافة والزمن.
- ④ المسافة التي تبعتها السيارة عن نقطة الأصل بعد مرور 7 ساعات من بداية الحركة.



تفكير إبداعي

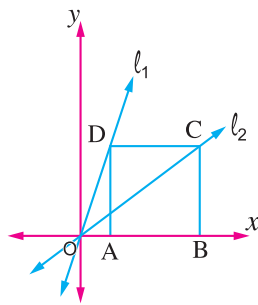
20 أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل من الأشكال التالية:

③ إذا كانت النقطة B هي منتصف $\overline{AC}$



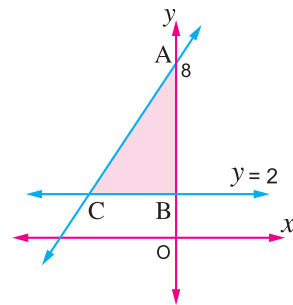
أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{DE}$

② إذا كان ABCD مربعاً وكانت معادلة المستقيم l_1 هي $y = 3x$



أوجد معادلة المستقيم l_2

① إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي 12 وحدة مربعة

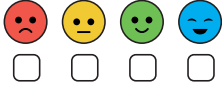


أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لمعادلة الخط المستقيم؟
ضع علامة في المربع المناسب.





ما مدى فهمك للوحدة الثالثة ؟
ضع علامة في المربع المناسب

تقييم الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

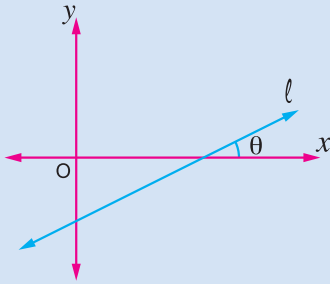
① إذا كانت $\tan X \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$ فما قيمة X حيث X قياس زاوية حادة ؟

(د) 75°

(ج) 60°

(ب) 45°

(أ) 30°



② في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم l هي $2y = x - 4$

فأى من النسب الآتية تساوى $\tan \theta$ ؟

(ب) $\frac{1}{2}$

(أ) 1

(د) $-\frac{1}{2}$

(ج) 2

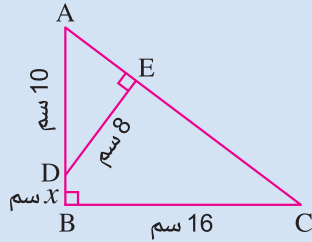
③ ما معامل التمدد الذي مركزه نقطة الأصل O ويحول النقطة $P(-3, 6)$ إلى النقطة $P'(-2, 4)$ ؟

(د) $\frac{3}{2}$

(ج) $\frac{2}{3}$

(ب) 2

(أ) $\frac{1}{3}$



④ في الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(ب) 2

(أ) 12

(د) 4

(ج) 8

أكمل كلاً مما يأتي :

⑤ ميل المستقيم الذي معادلته $2x - 3y - 3 = 0$ يساوى

⑥ إذا كانت النقطة A صورة النقطة $B(2, 4)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله 2 فإن نقطة A هي



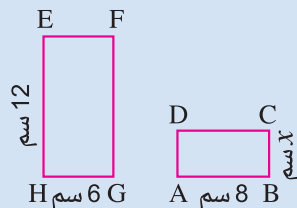
⑦ في الشكل المقابل :

$\sin A + \cos C = \dots\dots\dots$

⑧ في الشكل المقابل :

إذا كان المستطيل $ABCD \sim$ المستطيل $EHGF$

فإن : $x = \dots\dots\dots$

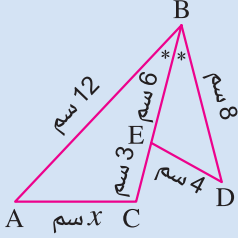


◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

9) مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC = 10$ سم ، $BC = 12$ سم. أوجد $\cos \frac{A}{2}$ ، $m(\angle B)$

10) أوجد معادلة المستقيم في الصورة القياسية إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $A(-3, 5)$ ، $B(-1, 4)$

11) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overrightarrow{BC}$ ينصف $\angle ABD$

فأثبت أن : $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ وأوجد قيمة x

12) إذا كانت $A(0, 1)$ ، $B(3, 2)$ ، $C(2, -2)$ مثل بياناً المثلث ABC وعين على الرسم صورته بتمدد معامله 2 ومركزه نقطة الأصل.

استخدام تشابه المثلثات في استنتاج علاقات نظرية إقليدس

نشاط الوحدة الثالثة

◀ الهدف من النشاط :

إثبات صحة علاقات نظرية إقليدس من خلال تشابه المثلثات.

◀ خطوات التنفيذ :

بالاستعانة بما تعلمته عن مفهوم تشابه المثلثات نفذ الخطوات التالية،

ثم قارن استنتاجك بما توصل إليه أحد زملائك :

1) ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في C

2) ارسم $\overline{CD}$ عمودية على $\overline{AB}$ تقطعها في نقطة D

3) لاحظ المثلثات ABC ، ACD ، CBD ، ثم أثبت أن : $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ ، $\triangle ABC \sim \triangle CBD$

4) باستخدام تشابه المثلثات استنتج أن : $(AC)^2 = AB \times AD$ ، $(BC)^2 = AB \times BD$ ، $(CD)^2 = AD \times BD$

5) وضح كيف يمكن استخدام هذه العلاقات لإيجاد أطوال مجهولة.

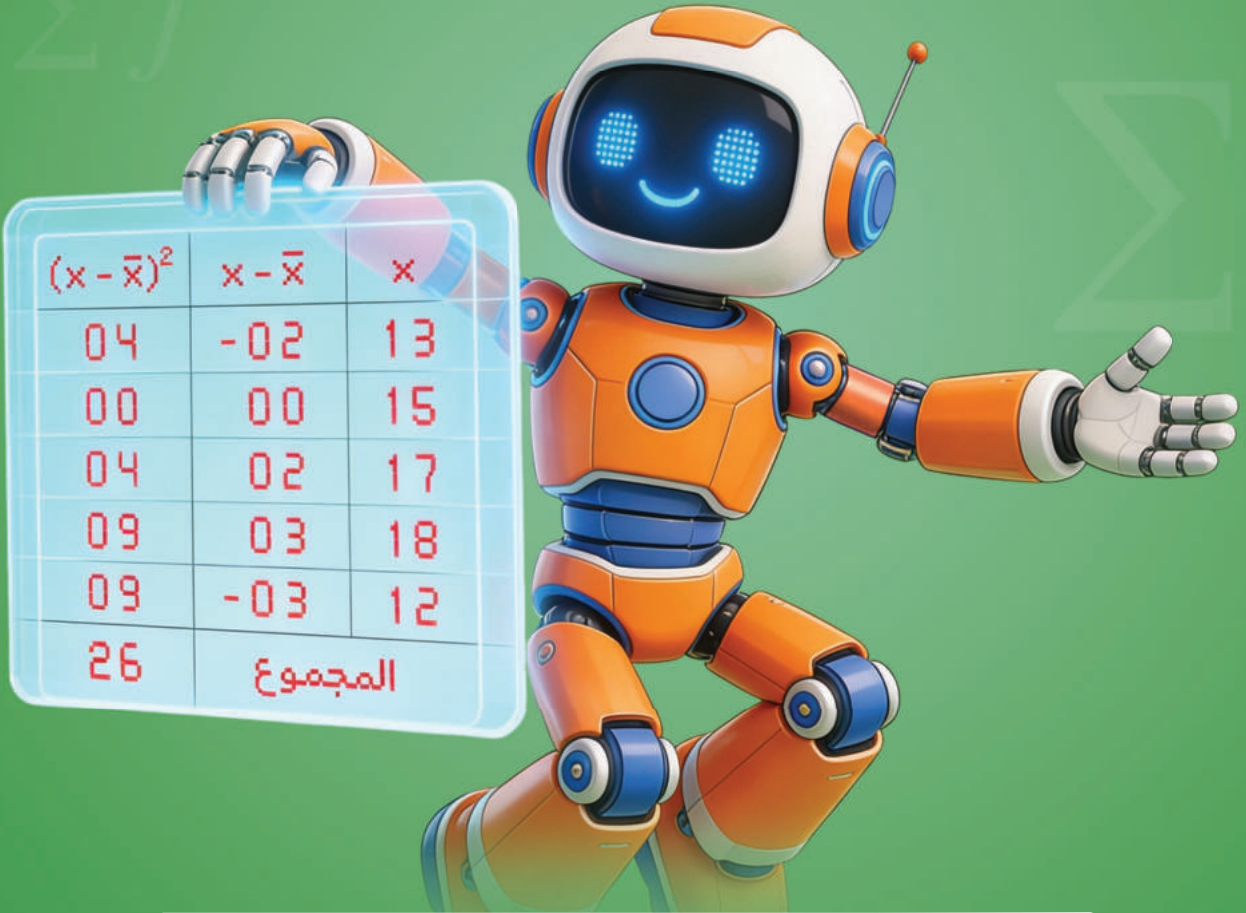


الوحدة 4

الإحصاء

درس الوحدة

4-1 مقاييس التشتت



ترتبط مقاييس النزعة المركزية والتشتت ارتباطًا وثيقًا بالذكاء الاصطناعي، إذ تُستخدم في التنبؤ وتحليل النتائج التي تعتمد عليها خوارزميات الذكاء الاصطناعي، مما يساعد على الوصول إلى جودة التنبؤ واتخاذ القرار بشكل أكثر دقة.

◀ فهل يمكن تطوير أساليب وطرق مقاييس النزعة المركزية والتشتت في مساعدة الذكاء الاصطناعي للحصول على نتائج أكثر دقة؟

القيم

- الوعى الرياضى.
- احترام المواعيد.
- الوعى البيئى.

القضايا والمهارات

- التواصل الرياضى.
- التفكير الناقد.
- اتخاذ القرار.
- التنبؤ.

مقاييس التشتت (Measures of Dispersion)



استعد!

يعتبر النوم من أهم العمليات الحيوية التي يحتاجها الإنسان لاستعادة نشاطه وتركيزه، ويُعد الحفاظ على عدد ساعات كافٍ ومنتظم يوميًا في النوم أساسًا للأداء اليومي الفعال. سجل أحمد عدد ساعات نومه يوميًا لمدة أسبوعين، فكانت النتائج كالتالي :

الجمعة	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الاثنين	الأحد	السبت	
8	6	7	6	7	7	8	الأسبوع الأول
10	5	6	7	8	5	8	الأسبوع الثاني

هل نام أحمد بنفس المعدل خلال الأسبوعين ؟ وأى من الأسبوعين كان عدد ساعات نوم أحمد أكثر تقاربًا ؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم مقاييس التشتت؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

المجموعة الأولى: 24، 27، 33، 33، 33

المجموعة الثانية: 6، 33، 33، 35، 43

مجموعتان من التلاميذ، تتكون كل منهما من 5 تلاميذ، أعطيت كل مجموعة اختبارًا نهايته العظمى 50 درجة فكانت درجات التلاميذ في كل مجموعة كما هو موضح أمامك :

أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مجموعة. أی المجموعتين درجاتها أكثر تقاربًا وأيهما تظهر اختلافًا أكبر ؟ هل مقاييس النزعة المركزية وحدها كافية للحكم على مستوى كل مجموعة ؟



تعلم!

- درست سابقًا مقاييس النزعة المركزية كالوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وهى مقاييس تعطى وصفًا للبيانات الإحصائية من خلال تعيين قيمة تتجمع حولها باقى القيم.
- فعند المقارنة بين درجات المجموعتين المذكورة فى بند فكر وناقش نجد أن :
- الوسط الحسابى = 30 لكل من المجموعتين.
- الوسيط = 33 لكل من المجموعتين.
- المنوال = 33 لكل من المجموعتين.
- وبالرغم من أن كلاً من المجموعتين لها نفس مقاييس النزعة المركزية إلا أن المجموعتين يظهر بينهما اختلاف فى الدرجات، ولذلك نحتاج إلى نوع آخر من المقاييس ليصف درجة تجانس (تقارب) أو تشتت (تباعد) البيانات عن بعضها البعض.

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم التشتت.
- تعرف مقاييس التشتت لمجموعة من القيم.
- تعرف مفهوم المدى.
- تعرف مفهوم المدى الربيعي.
- تعرف مفهوم الانحراف المعياري.
- توجد المدى والمدى الربيعي لمجموعة من البيانات معروضة بأشكال مختلفة.
- توجد الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات.
- توجد الانحراف المعياري لتوزيع تكرارى بسيط، وذى مجموعات.

■ المفردات

- التشتت Dispersion
- مقاييس التشتت Measures of dispersion
- المدى Range
- المدى الربيعي Interquartile range
- الانحراف المعياري Standard deviation

■ معلومة سابقة

- من مقاييس النزعة المركزية :
- $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$ = الوسط الحسابى
- الوسيط هو القيمة التى تتوسط القيم بعد ترتيبها.
- المنوال هو القيمة الأكثر شيوعًا أو الأكثر تكرارًا.

■ لاحظ أن

عند مقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

■ فكر

كم يكون التشتت إذا تساوت جميع قيم المفردات؟

• وبما أن درجات المجموعة الأولى لا تقل عن 24 ولا تزيد عن 33، ودرجات المجموعة الثانية لا تقل عن 6 ولا تزيد عن 43، فتكون درجات المجموعة الأولى أكثر تقارباً من درجات المجموعة الثانية أو نقول درجات المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من درجات المجموعة الأولى.

مقاييس التشتت

تصف مقاييس التشتت مدى تشابه أو اختلاف مجموعة من القيم أو البيانات وتقيس مدى اقتراب أو ابتعاد هذه القيم عن المركز، أى توضح مدى انتشار البيانات حول المركز. ومن مقاييس التشتت: المدى (R) والمدى الربيعي (IQR) والانحراف المعياري (σ).

1 المدى

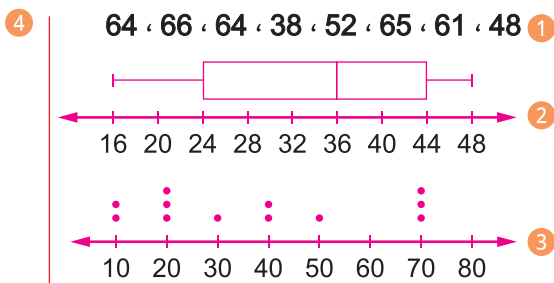
مدى مجموعة من المفردات (R) هو الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة، وهو يعتبر أبسط وأسهل طرق قياس التشتت، ولكنه يعتمد على مفردتين فقط (قيمتى الطرفين) مع إهمال باقى المفردات؛ ولذلك فهو يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال 1

أوجد المدى لكل مجموعة من البيانات المعطاة فى كل مما يأتى :

الساق	الأوراق
1	3 6 6 7
2	0 0 1 2 5 5 6 8
3	1 2

المفتاح 8 | 2 تعنى 28



$$R = 48 - 16 = 32 \text{ ②}$$

$$R = 32 - 13 = 19 \text{ ④}$$

$$R = 66 - 38 = 28 \text{ ①}$$

$$R = 70 - 10 = 60 \text{ ③}$$

2 مثال

أوجد قيمة k التى تجعل مدى مجموعة القيم : 11 ، 15 ، 18 ، k ، 19 ، 12 ، 17 ، يساوى 13

✓ نلاحظ أن أصغر قيمة هى 11 ، وأكبر قيمة هى 19

• إذا كانت $11 \leq k \leq 19$ سوف يصبح المدى = 8 (مرفوض)

• إذا كانت $k > 19$ فإن :

$$k - 11 = 13$$

$$\therefore k = 24$$

$$19 - k = 13$$

$$\therefore k = 6$$

• إذا كانت $k < 11$ فإن :

■ تقييم ذاتى ②

أوجد قيمة k التى تجعل مدى مجموعة القيم :

14 ، 8 ، k ، 20 ، 11 ، 15 ، 18

يساوى 18

③

الساق	الأوراق
3	2 5 7 9
4	1 3 3 4 5 5
5	4 7

المفتاح 4 | 1 تعنى 41

2 المدى الربيعي

المدى الربيعي (IQR) هو الفرق بين الربع الأعلى ("Q₃") والربع الأدنى ("Q₁")

$$\text{أي أن } IQR = Q_3 - Q_1$$

المدى الربيعي هو مدى النصف الأوسط من البيانات، وهو مقياس أكثر دقة لانتشار البيانات في حالة وجود قيم متطرفة، ولكن من عيوبه أنه يعتمد على قيمتين فقط هما Q₃، Q₁ ولا يأخذ كل القيم.

3 مثال

أوجد الربيعات الثلاثة للقيم التالية، ثم احسب المدى الربيعي :

5 ، 18 ، 10 ، 23 ، 16 ، 9 ، 6 ، 12 ، 19 ، 20 ، 23

رتب القيم تصاعدياً :

5 ، 6 ، 9 ، 10 ، 12 ، 16 ، 18 ، 19 ، 20 ، 23 ، 23

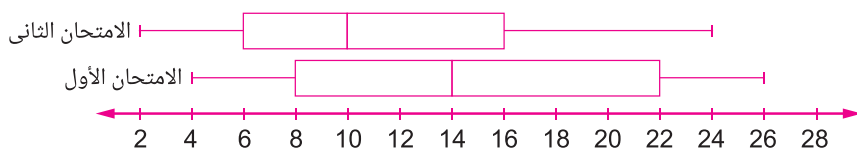
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 Q₁ Q₂ Q₃

$$\therefore Q_1 = 9 , Q_2 = 16 , Q_3 = 20$$

$$\therefore IQR = Q_3 - Q_1 = 20 - 9 = 11$$

4 مثال

الشكل التالي يوضح توزيع درجات امتحانين لمجموعة من الطلاب. أوجد المدى الربيعي لدرجات كل من الامتحانين.



$$\text{بالنسبة للامتحان الأول: } Q_1 = 8 , Q_3 = 22 \therefore IQR = 22 - 8 = 14$$

$$\text{بالنسبة للامتحان الثاني: } Q_1 = 6 , Q_3 = 16 \therefore IQR = 16 - 6 = 10$$

3 الانحراف المعياري

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، ويُرمز له بالرمز (σ) وتقرأ (سيجما). ويعتبر أهم وأدق مقاييس التشتت وأكثرها انتشاراً.

أولاً حساب الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}}$$

حيث $\bar{X}$ هي المفردة ، n هي عدد المفردات
 $\sum$ هي عملية الجمع ،

■ تقييم ذاتي 3

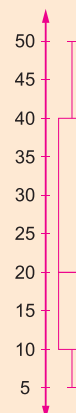
احسب المدى الربيعي لكل مما يأتي :

① 108 ، 106 ، 122 ، 107 ، 94 ، 105

② 58 ، 71 ، 73 ، 64 ، 66 ، 57 ، 68 ، 67

■ تقييم ذاتي 4

أوجد الربيعات الثلاثة من المخطط الصندوقي التالي ثم احسب كلاً من المدى، والمدى الربيعي.



■ لاحظ أن

كلما قلت قيمة الانحراف المعياري أصبحت القيم أكثر تقارباً وبالتالي أكثر تجانساً.

■ تقييم ذاتي 5

أوجد الانحراف المعياري للقيم الآتية :

8 ، 11 ، 13 ، 6 ، 7

■ مثال 5

أوجد الانحراف المعياري للقيم الآتية : 12 ، 18 ، 17 ، 15 ، 13

✓ 1 أوجد الوسط الحسابي

$(x - \bar{x})^2$	$x - \bar{x}$	x
4	-2	13
0	0	15
4	2	17
9	3	18
9	-3	12
26	المجموع	

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{13 + 15 + 17 + 18 + 12}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

2 كَوْن الجدول المقابل.

3 احسب الانحراف المعياري (σ) كما يلي :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{26}{5}} \approx 2.28$$

ثانيًا حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري بسيط :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \cdot (x - \bar{x})^2}{\sum f}}$$

حيث x هي القيمة ، f هي تكرار القيمة

$$\bar{x} = \frac{\sum (f \cdot x)}{\sum f}$$

$\sum f$ هي مجموع التكرارات ، $\bar{x}$ هي الوسط الحسابي حيث

■ مثال 6

التوزيع التكراري الآتي يبين أعمار 14 شخصًا يجلسون في مطعم :

العمر	34	16	12	10	5	2
التكرار	1	3	2	5	2	1

أوجد الانحراف المعياري لأعمار المتواجدين بالمطعم.

✓ بفرض أن العمر (x) ، التكرار (f)

$f \cdot (x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2$	$x - \bar{x}$	$f \cdot x$	f	x
100	100	-10	2	1	2
98	49	-7	10	2	5
20	4	-2	50	5	10
0	0	0	24	2	12
48	16	4	48	3	16
484	484	22	34	1	34
750			168	14	المجموع

$$\bar{x} = \frac{\sum (f \cdot x)}{\sum f} = \frac{168}{14} = 12$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \cdot (x - \bar{x})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{750}{14}} \approx 7.32$$

■ تقييم ذاتي 6

التوزيع التكراري التالي يبين مبيعات السيارات في إحدى صالات البيع خلال عدة أيام :

عدد السيارات المباعة	التكرار
0	4
1	4
2	3
3	6
4	3

أوجد الانحراف المعياري لعدد السيارات المباعة.

حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي مجموعات : ثالثاً

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \cdot (x_m - \bar{x})^2}{\sum f}}$$

الانحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي مجموعات هو :

حيث x_m هي مركز المجموعة وتساوي $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة} + \text{الحد الأعلى لها}}{2}$
 f هي تكرار المجموعة ، $\sum f$ هي مجموع التكرارات
 $\bar{x} = \frac{\sum (f \cdot x_m)}{\sum f}$ هي الوسط الحسابي حيث

مثال 7

الجدول التالي يوضح كتل 50 شخصاً :

مجموعات الكتل بالكيلو جرام	عدد الأشخاص
100 –	7
90 –	9
80 –	18
70 –	11
60 –	5

أوجد الانحراف المعياري للكتلة.

■ تقييم ذاتي 7

أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري التالي :

المجموعات	التكرار
5 –	4
15 –	5
25 –	8
35 –	7
45 –	6

المجموعات	التكرار f	مراكز المجموعات x_m	$f \cdot x_m$	$x_m - \bar{x}$	$(x_m - \bar{x})^2$	$f \cdot (x_m - \bar{x})^2$
60 –	5	65	325	-20.4	416.16	2080.8
70 –	11	75	825	-10.4	108.16	1189.76
80 –	18	85	1530	-0.4	0.16	2.88
90 –	9	95	855	9.6	92.16	829.44
100 –	7	105	735	19.6	384.16	2689.12
المجموع	50		4270			6792

$$\bar{x} = \frac{\sum (f \cdot x_m)}{\sum f} = \frac{4270}{50} = 85.4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \cdot (x_m - \bar{x})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{6792}{50}} \approx 11.66$$



نشاط تعاوني

تعاون مع أصدقائك واستخدم أحد تطبيقات الطقس، وسجل في جدول درجات الحرارة العظمى والصغرى في 10 مدن مصرية خلال أحد الأيام. استخدم البيانات التي ستحصل عليها في حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الحرارة العظمى ودرجات الحرارة الصغرى.



نشاط تكنولوجيا استخدام الآلة الحاسبة في حساب الانحراف المعياري

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية في حساب الانحراف المعياري، والخطوات التالية توضح كيفية حل المثال السابق باستخدام الآلة الحاسبة.

1

يجب أولاً ضبط نظام الآلة بالضغط على المفاتيح التالية من اليسار



	x	FREQ
1		
2		
3		

تظهر الشاشة المقابلة :

2

إدخال قيم مراكز المجموعات (x_m) في العمود الأول وذلك بالضغط على الأزرار التالية من اليسار



	x	FREQ
4		
5	95	1
6	105	1

تظهر الشاشة المقابلة :

3

استخدم الأزرار  للانتقال للعمود الثاني (FREQ) ثم أدخل التكرارات (f) وذلك بضغط الأزرار التالية من اليسار.



ثم أوجد الانحراف المعياري بالضغط على الأزرار التالية من اليسار

σx
11.65504183

تظهر الشاشة المقابلة :

فتكون قيمة الانحراف المعياري هي $\sigma \approx 11.66$



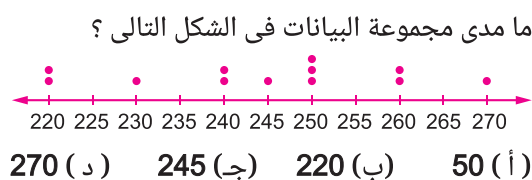
تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



- ① أى مما يلى لا يعتبر مقياساً للتشتت ؟
 (أ) المدى
 (ب) المدى الربيعى
 (ج) الوسيط
 (د) الانحراف المعيارى

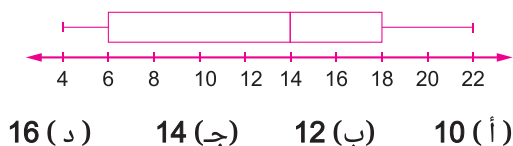
③ سجل القائمون على المتحف المصرى الكبير عدد الزوار بالآلاف فى عدة أيام ، لعمل دراسة إحصائية ، وكانت النتائج فى جدول تكرارى بسيط كالتالى :

الأيام	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
عدد الزوار	19	17	11	18	22	23	15

ما مدى عدد الزوار خلال هذه الأيام ؟

- (أ) 12 (ب) 15 (ج) 12000 (د) 15000

④ إذا كان المدى الربيعى = 8.5 وكان الربيع الأدنى = 29 فما قيمة الربيع الأعلى ؟



⑤ ما قيمة المدى الربيعى من المخطط الصندوقى التالى ؟

- (أ) 12 (ب) 21.5

- (ج) 37.5 (د) 41.5

⑦ ما الانحراف المعيارى للقيم 8 ، 8 ، 8 ، 8 ، 8 ؟

- (أ) 0 (ب) 4

- (ج) 8 (د) 16

⑥ إذا كان $\sum (X - \bar{X})^2 = 36$ لمجموعة من القيم

عددها 9 فما قيمة σ ؟

- (أ) 16 (ب) 8

- (ج) 4 (د) 2

⑧ فى مخطط الساق والأوراق المقابل :

إذا كان المدى = 4.6

فما قيمة $k + m$ ؟

- (أ) 8 (ب) 37

- (ج) 45 (د) 37.8

⑨ إذا كان المدى لمجموعة القيم 55 ، 61 ، 56 ، 59 ، a ، 54 يساوى 9 فأى مما يلى إحدى قيم a ؟

- (أ) 64 (ب) 62 (ج) 56 (د) 52

الأوراق	الساق
2 3	35
4 6 7 8	36
8 9 9	m
0 1 5	38
4 k	39

المفتاح 4 | 36 تعنى 36.4

◀ اكتشاف الخطأ :

⑩ عند إيجاد الانحراف المعياري للقيم 8 ، 12 ، 6 ، 10 ، 4 كانت إجابة وائل وهاني كما يلي :

حل هاني :

$$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{2}$$

$(x - \bar{x})^2$	$x - \bar{x}$	x
0	0	8
16	4	12
4	-2	6
4	2	10
16	-4	4
40		المجموع

حل وائل :

$$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{0}{5}} = 0$$

$(x - \bar{x})^2$	$x - \bar{x}$	x
0	0	8
16	4	12
-4	-2	6
4	2	10
-16	-4	4
0		المجموع

أي منهما اتبع الطريقة الصحيحة في الحل ؟ ناقش.



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑪ أوجد المدى لكل مما يأتي :

① 20 ، 16 ، 17 ، 25 ، 24

② 47 ، 52 ، 41 ، 59 ، 49 ، 61 ، 76 ، 48

③

الأوراق	الساق
4 5	0
2 3 3 4 9	1
3 4 7	2

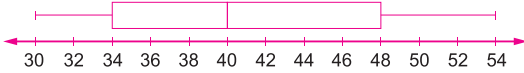
المفتاح 2 | 7 تعني 27

⑫ أوجد المدى الربيعي لكل مما يأتي :

① 33 ، 32 ، 16 ، 29 ، 17 ، 46 ، 25 ، 34

② 3.7 ، 2.1 ، 8.4 ، 5.1 ، 1.2 ، 2.3 ، 5.4

③



⑬ بأكمل الجدول، أوجد الانحراف المعياري لمجموعة القيم المعطاة :

$(x - \bar{x})^2$	$x - \bar{x}$	x
		12
		14
		15
		19

⑭ أوجد الانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات القيم الآتية :

① 17 ، 12 ، 18 ، 13 ، 16 ، 14

② $a + 3$ ، $a + 8$ ، $a + 7$ ، $a + 2$ ، $a + 5$

③

الأوراق	الساق
2 2 5 7	2
3 5 8	3
0 0 8	4

المفتاح 3 | 5 تعني 35

⑮ إذا كان الوسط الحسابي للقيم x ، $x + 1$ ، x ، 8 ، 4 ، 5 يساوي x ، فأوجد الانحراف المعياري لهذه القيم.



16) رياضة: إذا كان الوسط الحسابي لأطوال مجموعة من الطلاب في فريق كرة السلة في إحدى المدارس الثانوية يساوي 187 سم والانحراف المعياري 7 سم، وكان الجدول التالي يوضح أطوال مجموعة أخرى من الطلاب في فريق كرة اليد بالمدرسة:

طول الطالب بالسنتيمتر	184	186	188	189
عدد الطلاب	1	4	3	2

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال طلاب فريق كرة اليد، ثم قارنهما بالوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال طلاب فريق كرة السلة. أي الفريقين أطوالهم أكثر تجانسًا؟ ولماذا؟

17) إنترنت: إذا كان الجدول التالي يوضح استهلاك الإنترنت بال GB لأسرة خلال شهر:

استهلاك الإنترنت بال GB	10	16	18	19	23	24
عدد الأيام	3	7	8	6	4	2

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لاستهلاك الإنترنت اليومي لهذه الأسرة.

18) أجور: الجدول التالي يوضح الأجر اليومي لمجموعة من العمال بأحد المصانع:

مجموعات الأجر بالجنيه	120 –	130 –	140 –	150 –	160 –	170 –
عدد العمال	18	21	20	15	16	10

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأجر اليومي.



تفكير إبداعي

« اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

19) ما الانحراف المعياري لخمس أعداد زوجية متتالية ؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt{6}$ (ج) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{8}$

20) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة البيانات $7X$ ، $4X$ ، $5X$ ، $6X$ ، $3X$ حيث X عدد صحيح موجب هو $4\sqrt{2}$ فما قيمة X ؟

قيم فهمك!

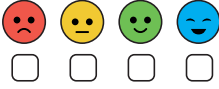
ما مدى فهمك لمقاييس التشتت ؟
ضع علامة في المربع المناسب



(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

21) إذا كان الانحراف المعياري لسبعة أعداد موجبة متتالية يساوي $\frac{\sqrt{k}}{3}$ فما قيمة k ؟

(أ) 14 (ب) 21 (ج) 36 (د) 42



تقييم الوحدة الرابعة

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

الساق	الأوراق
26	1 4
27	4 6 7
28	7 8 9
29	2 3
المفتاح 6 27 تعنى 27.6	

① من مخطط الساق والأوراق المقابل ما قيمة المدى ؟

(أ) 3.6 (ب) 3.4

(ج) 3.2 (د) 3

② إذا كان المدى للقيم $7 - 3k$ ، $7 + 6k$ ، $7 - k$ ، $7 + k$ يساوى 18 ، حيث k عدد صحيح موجب فما قيمة k ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

③ ما الانحراف المعياري لخمس أعداد صحيحة متتالية أصغرها 3 ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{2}$ (ج) 2 (د) 1

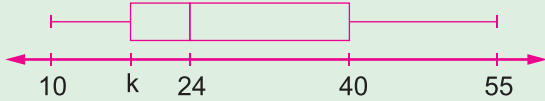
④ أى من مجموعات القيم الآتية لها أكبر انحراف معياري ؟

(أ) 8 ، 9 ، 7 ، 10 (ب) 5 ، 5 ، 5 ، 5 (ج) 3 ، 4 ، 5 ، 6 (د) 2 ، 6 ، 20 ، 16

◀ أكمل كلاً مما يأتى :

⑤ مدى مجموعة القيم : 23 ، 61 ، 43 ، 20 ، 17 ، 35 ، 29 يساوى

⑥ من المخطط الصندوقى المقابل :



إذا كان المدى الربيعى = 22 فإن الربيع الأدنى =

⑦ الانحراف المعياري للقيم : $17 - b$ ، $15 - b$ ، $12 - b$ ، $16 - b$ هو

⑧ إذا كان : $\sum (X - \bar{X})^2 = 60$ ، $n = 12$ ، فإن الانحراف المعياري يساوى

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

⑨ إذا كان التوزيع التكرارى الآتى يبين عدد الأهداف التى سجلها 30 لاعباً من 5 ضربات جزاء لكل منهم فى أحد التدريبات :

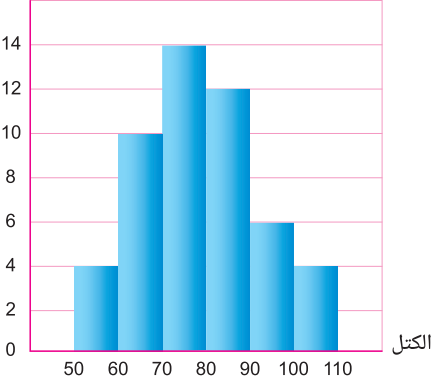
عدد الأهداف التى تم تسجيلها	0	1	2	3	4	5
عدد اللاعبين	1	6	5	5	6	7

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعياري لعدد الأهداف المسجلة.

⑩ إذا كان المدى للقيم 21 ، $X + 15$ ، 2 ، 5 ، 4 ، 7 يساوى 20 حيث X عدد صحيح موجب أوجد قيمة X .

⑪ أوجد المدى الربيعى للقيم : 15 ، 18 ، 22 ، 5 ، 29 ، 21 ، 17

التكرار



12 إذا كان الشكل المقابل يمثل المدرج التكرارى لكتل مجموعة من اللاعبين فى أحد النوادى الرياضية. أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكتل اللاعبين.

اكتشاف مقاييس النزعة المركزية والتشتت فى حياتنا اليومية

نشاط الوحدة الرابعة

أهداف النشاط :

- إثراء تطبيق الطلاب لمقاييس النزعة المركزية والتشتت
- إكساب الطلاب مهارات جمع البيانات وتنظيمها.
- تنمية مهارات العمل الجماعى والتفكير التحليلي.

خطوات التنفيذ :

1 قسم الطلاب إلى مجموعات (2-4 طلاب فى كل مجموعة مثلاً).

2 اطلب من كل مجموعة اختيار موقف من الحياة اليومية لجمع البيانات مثل :

- عدد ساعات استخدام تطبيقات التواصل الاجتماعى خلال أسبوع.
- عدد ساعات المذاكرة خلال 5 أيام.
- درجات اختبار قصير فى إحدى المواد الدراسية.
- عدد ساعات ممارسة النشاط الرياضى المفضل لطلاب الفصل خلال أسبوع.

3 تقوم كل مجموعة بحساب ما يلى :

الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال - المدى - الانحراف المعيارى

ثم يجيب الطلاب عن أسئلة مثل :

- أى القيم تمثل البيانات بشكل أفضل ؟ ولماذا ؟
- هل البيانات متقاربة أم متباعدة ؟

4 تقارن كل مجموعة النتائج التى حصلت عليها مع المجموعات الأخرى.



قيم فهمك!
ما مدى فهمك لموضوعات
الصف الثالث الإعدادي؟
ضع علامة في المربع المناسب

تقييم نهائي

الأوراق	الساق
1 2 3	3
5 5 7 8	4
1 3 4	5
7	6
المفتاح	3 1 تعنى 3.1

9 ما المدى الربيعي للبيانات

الممثلة بمخطط الساق

والأوراق المقابل؟

36 (أ) 3.6 (ب)

4.7 (ج) 2 (د)

المجموعة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية:

1 أوجد في الصورة القياسية معادلة المستقيم المار

بالنقطتين (0, 1)، (3, -4)

2 بدون استخدام الآلة الحاسبة

أثبت أن: $\tan 60^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

3 في الشكل المقابل:

أوجد قيمة X مقرباً الناتج

لأقرب رقم عشري واحد.

4 في الشكل المقابل:

إذا كانت D نقطة منتصف $\overline{AB}$

فأثبت أن:

1 $\triangle ABC \sim \triangle DAE$

2 $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$

5 اختصر لأبسط صورة $f(X)$ موضعاً مجال الدالة f

حيث $f(X) = \frac{X^2 + X}{X^2 - 1} - \frac{5 - X}{X^2 - 6X + 5}$

6 مثل بيانياً الدالة التربيعية f حيث $f(X) = (X - 2)^2 + 3$

موضحاً على الرسم محور تماثلها وأوجد القيمة الصغرى

أو العظمى للدالة f

7 التوزيع التكرارى التالى يبين أعمار 10 أطفال بالسنوات.

العمر بالسنوات	7	10	11	12	14	المجموع
عدد الأطفال	1	2	3	3	1	10

احسب الانحراف المعياري للعمر بالسنوات.

المجموعة الأولى

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 ما معادلة محور تماثل الدالة التربيعية f

حيث $f(X) = (X - 3)^2 + 1$

(أ) $X = 1$ (ب) $Y = 1$

(ج) $X = 3$ (د) $Y = 3$

2 في الشكل المقابل:

إذا كانت: $\sin \theta = \frac{3}{5}$

فما طول $\overline{AB}$ ؟

(أ) 4 سم

(ب) 9 سم

(ج) 12 سم

(د) 15 سم

3 ما صورة النقطة (6, -3) بتمدد مركزه نقطة الأصل

ومعامله يساوى 3؟

(أ) (-1, 2) (ب) (-9, 6)

(ج) (-3, 2) (د) (-9, 18)

4 ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f

حيث $f(X) = \frac{X^2 - 4}{X^2 - 5X + 6}$

(أ) {2, 3} (ب) {-2, 2}

(ج) {-2} (د) {3}

5 ما الصورة القياسية لمعادلة المستقيم الذى زاوية ميله

قياسها 45° ، والمقطع Y يساوى 3؟

(أ) $X - Y = -3$ (ب) $X + Y = -3$

(ج) $X - Y = 3$ (د) $X + Y = 3$

6 إذا كان: $2 \sin \theta = \tan \theta$ حيث θ قياس زاوية حادة

فما قيمة θ ؟

(أ) 60° (ب) 45° (ج) 30° (د) 15°

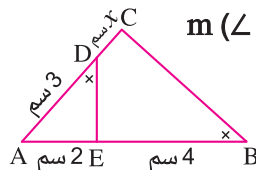
7 في الشكل المقابل:

إذا كان: $m(\angle ADE) = m(\angle B)$

فما قيمة X ؟

(أ) 1 (ب) 2

(ج) 3 (د) 4



8 ما ميل العمودى على المستقيم الذى معادلته:

$X = 3Y + 1$ ؟

(أ) -3 (ب) 3 (ج) $-\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{3}$



تأليف وإعداد: شركة GPS للطبع والنشر والتوزيع

مقاس الكتاب	ورق المتن	ورق الغلاف	ألوان الكتاب	عدد الصفحات بالغلاف	التجليد	تاريخ الطبعة	كود الكتاب
27x 19 سم	٧٠ جراماً	١٨٠ جراماً	٤ ألوان	116 صفحة	دبوس	2027 - 2026	٣٠/٣/١١/٢/١١/٢٤٠

رقم الإيداع: ٢٠٢١/١٤٨٠٣
التقييم الدولي: 978-633-8530-22-8

يحظر طبع أو نشر أو تصوير أو تخزين أو توزيع أي جزء من هذا الكتاب بأية وسيلة إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو خلاف ذلك،
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني



كتاب
الطالب

الرياضيات

للف الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الأول

