



كتاب
الطالب

الرياضيات

للمصف الثاني الإعدادي - الفصل الدراسي الأول



تهدى وزارة التربية و التعليم و التعليم الفنى هذا الكتاب بكل حب
إلى الطلاب و المعلمين و الأسرة فى جمهورية مصر العربية



الرياضيات

للفف الثانى الأعدادى

الفصل الدراسى الأول

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية و التعليم و التعليم الفنى

الاسم:

الفصل:

المدرسة:

الاسم :

الفصل :

المدرسة :

تقديم

فى إطار التطوير المستمر لمنظومة التعليم، واستكمالاً لمنظومة التطوير التى بدأت خططها من مرحلة رياض الأطفال والمستمرة إلى نهاية المرحلة الثانوية وفقاً لرؤية مصر (٢٠٣٠)، وخطة الوزارة لتطوير التعليم - فقد تم إعداد هذا الكتاب لاستكمال وتنفيذ عمليات تطوير مناهج المرحلة الإعدادية لإحداث نقلة نوعية فى طريقة إعداد طلاب مصر لمواجهة تحديات المستقبل.

يسعدنا أن نقدم هذا الكتاب لمقرر الرياضيات للصف الثانى الإعدادى للفصل الدراسى الأول، والذي يتضمن مجموعة من المهام والأداءات التى تساعد الطلاب على حل المشكلات الرياضية، وذلك لتحقيق نواتج التعلم لمواجهة تحديات القرن الحادى والعشرين، والذي واكبت بدايته ثورة متسارعة فى المعلومات وتكنولوجيا الاتصالات.

يهدف المنهج الحالى إلى إحداث نقلة نوعية فى تعليم الرياضيات وتعلّمها، كما يهدف أيضاً إلى توفير وسيلة فعالة لتحقيق أهداف نهج التعليم على نحو تكاملى عن طريق الآتى:

- التأكيد على الدور الإيجابى للطلاب فى عملية التعلم.
- تضمين المنهج المعارف والمهارات والقيم والاتجاهات الإيجابية اللازمة للتعلم والمواطنة الصالحة والعمل المنتج والمشاركة الفاعلة فى تحقيق برامج التنمية المستدامة.
- تضمين المنهج التوجهات الإيجابية الحديثة فى بناء المناهج، مثل مهارات التفكير ومهارات حل المشكلات ومهارات التعلم الذاتى والتعلم التعاونى والتواصل الجيد مع مصادر المعرفة.
- تنمية المهارات الأدائية من خلال التركيز على التعلم الذاتى والعمل التعاونى.
- تحقيق التكامل بين الرياضيات والمواد الدراسية عبر المراحل المختلفة.
- إتاحة الفرصة للطلاب لاختيار الأنشطة المناسبة لقدراتهم وميولهم وحاجاتهم.

ونسأل الله عز وجل أن تعم الفائدة من هذا الكتاب، ونتمنى أن يكون جزءاً من مجهود وطنى كبير ومتواصل للارتقاء بمصر إلى مصاف الدول المتقدمة لضمان مستقبل عظيم لجميع طلابها، كما نتمنى لكم عامّاً دراسيّاً جديداً مليئاً بالنجاحات والتوفيق.

والله وليّ التوفيق،،،

المعدون

محتويات الكتاب (الفصل الدراسي الأول)

الأعداد والعمليات عليها

- 1-1 الأعداد الحقيقية 2
- 1-2 الفترات والعمليات عليها 8
- 1-3 العمليات على الأعداد الحقيقية 14
- 1-4 قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية 20
- 1-5 قوانين الأسس في الأعداد الحقيقية 25

الوحدة

1



الجبر

- 2-1 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر 33
- 2-2 تحليل ثلاثية الحدود 39
- 2-3 تحليل الحالات الخاصة 46
- 2-4 التحليل بالتقسيم 53

الوحدة

2



الهندسة

- 3-1 التطابق 62
- 3-2 نظرية فيثاغورس وعكسها 70
- 3-3 تطبيقات التوازي 78
- 3-4 متوسطات المثلث 83
- 3-5 المثلث المتساوي الساقين 89
- 3-6 الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع 97

الوحدة

3



الإحصاء

- 4-1 الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا 106
- 4-2 مقاييس النزعة المركزية للجدول التكراري ذي المجموعات ... 112

الوحدة

4



الوحدة 1

الأعداد والعمليات عليها

دروس الوحدة -

- 1-1 الأعداد الحقيقية
- 1-2 الفترات والعمليات عليها
- 1-3 العمليات على الأعداد الحقيقية
- 1-4 قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية
- 1-5 قوانين الأسس في الأعداد الحقيقية



تمثل الأعداد الحقيقية البنية الأساسية لجميع العمليات الرياضية داخل أنظمة الذكاء الاصطناعي، ومن دونها لا نستطيع تمثيل العالم الواقعي بدقة ، لذا فإن العلاقة بين الذكاء الاصطناعي والأعداد الحقيقية هي علاقة تكامل أساسي بين الرياضيات والتكنولوجيا.

◀ فهل يمكن تطوير دور الأعداد الحقيقية في بناء وتدريب خوارزميات الذكاء الاصطناعي؟

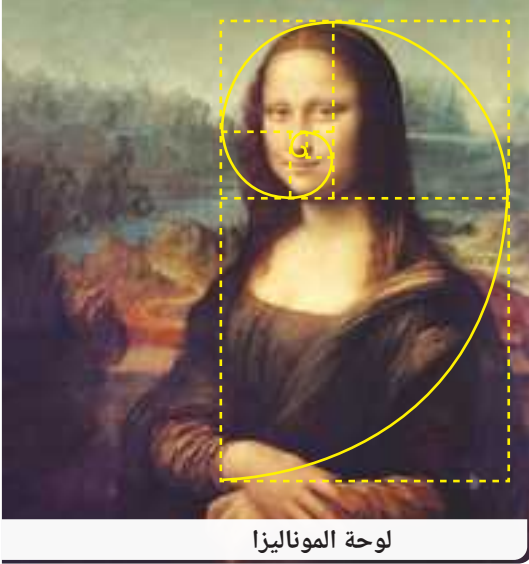
القضايا والمهارات الحياتية

- التفكير الناقد
- التفكير الإبداعي
- التنمية المستدامة
- التواصل الرياضي

القيم

- احترام الآخر
- المسؤولية
- الوعي البيئي
- الوعي بالأمن الغذائي

الأعداد الحقيقية (Real Numbers)



لوحة الموناليزا



استعد!

المستطيل الذهبي هو المستطيل الذي نسبة طوله إلى عرضه تساوي $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ، وهذه النسبة تُسمى بـ «النسبة الذهبية» ويُرمز لها بالرمز ϕ ، وهي نسبة تظهر في العديد من جوانب الطبيعة، وقد استخدمها الفنانون في تصميماتهم لما تتميز به من إعطاء الحس الجمالي والانسجام في التصميم، وتعتبر لوحة الموناليزا للفنان ليوناردو دافنشي أحد أشهر التصميمات الفنية التي طبقت هذه النسبة. لماذا لا تعتبر هذه النسبة الذهبية عددًا نسبيًا؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم العدد غير النسبي، كما ستتعرف على مجموعة جديدة من الأعداد وهي مجموعة الأعداد الحقيقية، مما يمكنك من الإجابة على مثل هذه الأسئلة.



فكر وناقش!

أمامك مجموعة من الأعداد، وضح كيف يمكنك ترتيبها من الأصغر إلى الأكبر. ناقش مع زملائك.

 $\sqrt{40}$

6

4

 $\sqrt{12}$ 

تعلم!

الأعداد غير النسبية

العدد غير النسبي هو عدد لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان، $b \neq 0$ ، ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز Q

■ لاحظ أن

تغطي الآلة الحاسبة قيمًا تقريبية للأعداد غير النسبية مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{5}$ ، حيث يكون الكسر العشري غير منتهٍ وغير دائر، لذلك لا يمكن كتابة مثل هذه الأعداد على صورة عدد نسبي.

■ أمثلة لأعداد غير نسبية :

◀ الجذر التربيعي لأي عدد ليس مربعًا كاملاً مثل : $\sqrt{2}$

حيث ... $\sqrt{2} \approx 1.414213562$

◀ الجذر التكعيبي لأي عدد ليس مكعبًا كاملاً مثل : $\sqrt[3]{5}$

حيث ... $\sqrt[3]{5} \approx 1.709975947$

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم العدد غير النسبي.
- تقدّر قيمة تقريبية للعدد غير النسبي وتمثلها على خط الأعداد.
- تعرف مجموعة الأعداد الحقيقية.
- ترتب مجموعة من الأعداد الحقيقية تنازليًا أو تصاعديًا.
- تحل معادلات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

■ المفردات

- العدد غير النسبي
- Irrational number
- الأعداد الحقيقية
- Real numbers

■ معلومة سابقة

العدد النسبي هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان، $b \neq 0$

ويرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز Q

◀ أعط أمثلة لأعداد نسبية.

■ تقييم ذاتي ①

أى من الأعداد التالية نسبي، وأيها غير نسبي؟

$-\sqrt{4}$	17	$\sqrt{8}$
$0.\bar{2}$	0.3	$1\frac{1}{2}$
0	25%	$\sqrt[3]{25}$
$\sqrt{5} + 1$	$\sqrt[3]{ -64 }$	

■ معلومة إثرائية

ليست كل الأعداد غير النسبية هي فقط جذور، إنما توجد هناك أعداد غير نسبية أخرى مثل :

◀ العدد π حيث

$$\pi \approx 3.141592654 \dots$$

ويساوي النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

◀ النسبة الذهبية φ حيث :

$$\varphi \approx 1.618033989 \dots$$

وهي نسبة مميزة ترتبط بجمال وتناسق التصميمات.

■ مثال 1

أى من الأعداد التالية عدد نسبي، وأيها عدد غير نسبي؟ مع ذكر السبب.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{1} -12 & \textcircled{2} \sqrt{25} & \textcircled{3} \sqrt{13} & \textcircled{4} \sqrt[3]{-27} \\ \hline \textcircled{5} 2\frac{2}{5} & \textcircled{6} -\sqrt[3]{10} & \textcircled{7} 0.125 & \textcircled{8} 3.\bar{6} \\ \hline \end{array}$$

■ فكر هل يمكن لعدد أن يكون نسبيًا وغير نسبي معًا؟

◀ كل من الأعداد التالية هو عدد نسبي.

$$-12, \sqrt{25}, \sqrt[3]{-27}, 2\frac{2}{5}, 0.125, 3.\bar{6}$$

لأنه يمكن كتابة كل منها على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عدنان صحيحان، $b \neq 0$ كالتالي :

$$\sqrt{25} = 5 = \frac{5}{1}$$

$$-12 = \frac{-12}{1}$$

$$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 = \frac{-3}{1}$$

$$3.\bar{6} = \frac{11}{3}$$

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

■ تذكر أن

العدد $3.\bar{6}$ هو عدد عشري غير منته (دائر) وهو عدد نسبي

$$3.\bar{6} = 3.6666 \dots = \frac{11}{3}$$

◀ كل من العددين $\sqrt{13}$ ، $-\sqrt[3]{10}$ هو عدد غير نسبي.

لأن : العدد 13 ليس مربعًا كاملاً، العدد 10 ليس مكعبًا كاملاً،

وبالتالي لا يمكن كتابة أى منهما على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عدنان صحيحان، $b \neq 0$

■ إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبي

أى عدد غير نسبي يقع بين عددين نسبيين، ويمكن تمثيله على خط الأعداد بنقطة تقع بين هذين العددين.

■ مثال 2

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من العددين الآتين، وعيّن موقعه التقريبي على خط الأعداد.

$$\textcircled{2} \sqrt[3]{20}$$

$$\textcircled{1} \sqrt{11}$$

✓ ① أوجد عددين صحيحين متتاليين كل منهما مربع كامل يقع بينهما العدد 11.

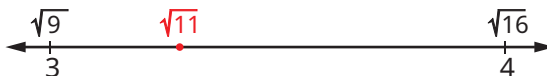
◀ العدد 11 يقع بين العددين 9، 16

$$\therefore 9 < 11 < 16 \quad \therefore \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} \quad \therefore 3 < \sqrt{11} < 4$$

∴ العدد $\sqrt{11}$ يقع بين العددين 3 و 4

وحيث إن العدد 11 أقرب إلى العدد 9 منه إلى العدد 16

فإن العدد $\sqrt{11}$ أقرب إلى العدد 3



■ لاحظ أن

$$9 < 11 < 16$$

هي متباينة من ثلاثة أطراف تعنى أن :

العدد 11 أكبر من العدد 9 ($9 < 11$)

والعدد 11 أقل من العدد 16 ($11 < 16$)

أى أن : العدد 11 يقع بين العددين 9، 16

■ تقييم ذاتي ②

أوجد قيمة n الصحيحة التي تحقق أن :

$$n < \sqrt{17} < n+1$$

ثم أوجد قيمة تقريبية لأقرب جزء من عشرة للعدد $\sqrt{17}$ ، وعيّن موقعه التقريبي على خط الأعداد.

② أوجد عددين صحيحين متتاليين كل منهما مكعب كامل يقع بينهما العدد 20.

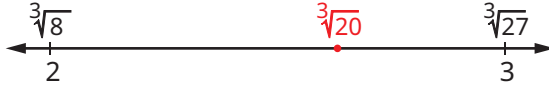
◀ العدد 20 يقع بين العددين 8 ، 27

$$\therefore 8 < 20 < 27 \quad \therefore \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27} \quad \therefore 2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

∴ العدد $\sqrt[3]{20}$ يقع بين العددين 2 و 3

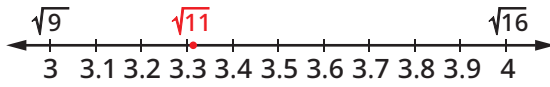
وحيث إن العدد 20 أقرب إلى العدد 27 منه إلى العدد 8

فإن العدد $\sqrt[3]{20}$ أقرب إلى العدد 3

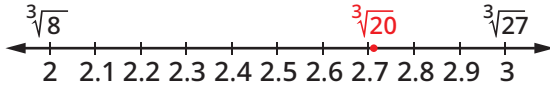


■ استخدام التكنولوجيا

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيم تقريبية أفضل لعدد غير نسبي، فمثلاً :



$$\sqrt{11} \approx 3.3$$



$$\sqrt[3]{20} \approx 2.7$$

■ لاحظ أن

نسبة طول المستطيل الذهبي إلى

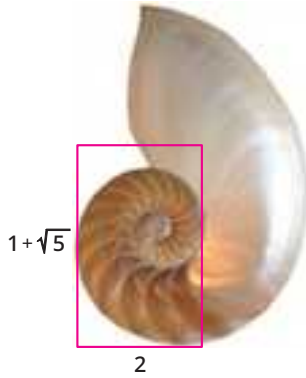
$$\text{عرضه تساوى } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6$$

وتم تقديرها فى مثال (3)

تقريبًا بـ 1.5، أى أن طول

المستطيل الذهبى يساوى

تقريبًا مرة ونصف من عرضه.



الطبيعة : يوجد المستطيل الذهبى فى محار أحد الكائنات البحرية، ونسبة طوله إلى عرضه تساوى $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
قدّر هذه القيمة.

✓ قدّر أولاً قيمة $\sqrt{5}$ كالتالى :

∴ العدد 5 يقع بين العددين المربعين الكاملين 4 ، 9

$$\therefore 4 < 5 < 9 \quad \therefore \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \quad \therefore 2 < \sqrt{5} < 3$$

∴ العدد 5 أقرب إلى العدد 4 منه إلى العدد 9

استخدم « $\sqrt{5} \approx 2$ » لتقدير قيمة التعبير $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

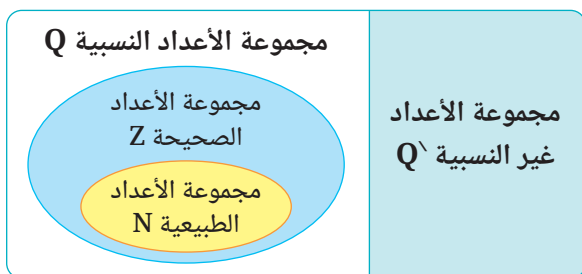
$$\therefore \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \frac{1 + 2}{2} \quad \therefore \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.5$$

الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة التى تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية، ويُرمز لها بالرمز R

$$R = Q \cup Q' \quad \text{حيث} \quad Q \cap Q' = \emptyset$$

مجموعة الأعداد الحقيقية R



شكل فن المقابل يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد، حيث :

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

$$Q' \subset R$$

■ لاحظ أن

لا يوجد جذر تربيعي لعدد حقيقي سالب

مثال 4

ضع فى المربع الخالى رمزًا مناسبًا من الرمزين $\in$ أو $\notin$:

$$|-4| \quad \square \quad N \quad 3$$

$$\sqrt{5} \quad \square \quad R \quad 2$$

$$0.\overline{63} \quad \square \quad Q' \quad 1$$

$$\sqrt{-1} \quad \square \quad R \quad 6$$

$$\sqrt[3]{3} \quad \square \quad Q \quad 5$$

$$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \quad \square \quad Z \quad 4$$

$$\notin 6$$

$$\notin 5$$

$$\notin 4$$

$$\in 3$$

$$\in 2$$

$$\notin 1$$



حل المعادلات

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

$$X \in Q' \quad \text{حيث} \quad 4X^3 = -32 \quad 2 \quad \quad X \in Q' \quad \text{حيث} \quad X^2 - 3 = 2 \quad 1$$

$$X \in R \quad \text{حيث} \quad 5X^3 - 1 = 4X^3 + 8 \quad 4 \quad \quad X \in R \quad \text{حيث} \quad \frac{1}{2}X^2 + 1 = -4 \quad 3$$

$$\therefore 4X^3 = -32 \quad 2$$

$$\therefore X^2 - 3 = 2 \quad 1$$

$$\therefore X^3 = \frac{-32}{4} = -8$$

$$\therefore X^2 = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore X = \sqrt[3]{-8} = -2 \notin Q'$$

$$\therefore X = \pm \sqrt{5} \in Q'$$

$$\therefore \emptyset = \text{مجموعة الحل}$$

$$\therefore \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$\therefore 5X^3 - 1 = 4X^3 + 8 \quad 4$$

$$\therefore \frac{1}{2}X^2 + 1 = -4 \quad 3$$

$$\therefore 5X^3 - 4X^3 = 8 + 1$$

$$\therefore \frac{1}{2}X^2 = -4 - 1 = -5$$

$$\therefore X^3 = 9$$

$$\therefore X^2 = -5 \times 2 = -10$$

$$\therefore X = \sqrt[3]{9} \in R$$

$$\therefore X = \pm \sqrt{-10} \notin R$$

$$\therefore \{\sqrt[3]{9}\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$\therefore \emptyset = \text{مجموعة الحل}$$

■ تقييم ذاتى 5

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

$$\frac{1}{3}X^3 + 9 = 0 \quad 1$$

$$\frac{3}{4}X^2 = \frac{9}{2} \quad 2$$

$$2(X^2 - 1) = -10 \quad 3$$

إذا كانت مجموعة التعويض هى :
أولاً : Q' ثانياً : R



نشاط تعاونى

استخدم مصادر مختلفة (مثل : شبكة الإنترنت أو مكتبة مدرستك أو ...) وتعاون مع زملائك تحت إشراف معلمك للتعرف على مزيد من المعلومات عن النسبة الذهبية Φ ، وتاريخها، واستخداماتها المختلفة فى العمارة والفنون.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

② إذا كان : $X < \sqrt{29} < X+1$, $X \in \mathbb{Z}$ فما قيمة X ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7

④ ما تقدير العدد $\sqrt[3]{25}$ لأقرب عدد صحيح ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 12.5

⑥ إذا كان : $1 < \sqrt{n} < 2$ فأى مما يلي قيمة محتملة للعدد n ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 4 (د) 8

⑧ إذا كان X , Y عددين صحيحين متتاليين،

فما قيمة $Y + X$ ؟



(أ) 11 (ب) 13 (ج) 15 (د) 17

① أى من الأعداد التالية عدد غير نسبي ؟

(أ) $0.\bar{3}$ (ب) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ (ج) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt[3]{-125}$

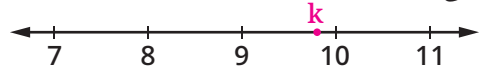
③ ما تقدير العدد $\sqrt{41}$ لأقرب عدد صحيح ؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 36 (د) 49

⑤ أى من الأعداد التالية عدد غير نسبي يقع بين 2 ، 3 ؟

(أ) $2.\bar{5}$ (ب) $\sqrt{10}$ (ج) $\sqrt{6.25}$ (د) $\sqrt[3]{9}$

⑦ أى من الأعداد التالية تمثله النقطة k على خط الأعداد التالي ؟



(أ) $\sqrt{86}$ (ب) $\sqrt{96}$ (ج) $\sqrt{81}$ (د) $\sqrt{78}$

ناقش :

⑨ قام كل من حمزة وآسر بالإجابة عن السؤال التالي :

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما العدد غير النسبي $-\sqrt{5}$

حل آسر :

$$-9 < -5 < -4$$

$$-\sqrt{9} < -\sqrt{5} < -\sqrt{4}$$

$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

حل حمزة :

$$4 < 5 < 9$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل ؟



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑩ صنف كلاً من الأعداد فى الجدول

المقابل إلى نسبي أو غير نسبي

موضحاً سبب تصنيفك :

0.323232...	$-\sqrt[3]{64}$	$1.\bar{6}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$\frac{12}{31}$	$\sqrt{6}$
$\sqrt[3]{16}$	17%	$2\frac{2}{3}$	$\sqrt[3]{-27}$	$-\sqrt{121}$	0

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من الأعداد الآتية، وعيّن موقعه التقريبي على خط الأعداد :

⑭ $\sqrt[3]{14}$

⑬ $-\sqrt{11}$

⑫ $\sqrt{13}$

⑪ $\sqrt{5}$

◀ ضع في كل مربع أحد الرموز < أو > أو = لتكون العبارة صحيحة :

15 $\sqrt{96} \square 14$ 16 $-\sqrt{7} \square -2.6$ 17 $\sqrt[3]{25} \square \sqrt{9}$

18 رتب الأعداد : $6.3\bar{6}$ ، $6\frac{4}{5}$ ، 7 ، $\sqrt{40}$ من الأصغر للأكبر.

◀ أوجد في R مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

19 $X^3 - 11 = 5$ 20 $2X^3 + 13 = 67$ 21 $3X^2 - 1 = -13$

◀ أوجد في Q مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

22 $2X^2 - 3 = 9$ 23 $6X^2 - 3 = 4X^2 + 7$ 24 $2(X^3 + 1) = 18$



التحليل وتكامل المواد

ثالثا

25 هندسة : مربع مساحته 29 سم²، إلى أي مجموعات الأعداد الآتية ينتمي طول ضلعه ؟ حدد كل المجموعات الممكنة.

N ☐

Z ☐

Q' ☐

Q ☐

R ☐



تساعد الفنون على تنمية الإبداع والابتكار لدى الفرد.

26 فنون : شكّلت سمر قطعة من الصلصال على

شكل مكعب مساحته الكلية 300 سم²

أوجد طول حرفه، هل طول الحرف عدد نسبي؟



تعمل الحقائق على تنقية الهواء، وتحسين الصحة النفسية لدى الأفراد.

27 هندسة : أيهما أكبر : طول ضلع مربع مساحته 16 سم²

أم طول قطر مربع مساحته 9 سم²؟

28 زراعة : حديقة مستطيلة الشكل مساحتها 80 م²،

طولها ضعف عرضها. أوجد كلاً من الطول والعرض لأقرب متر.

29 ما أقل قيمة صحيحة للمتغير n تجعل كلاً من العددين

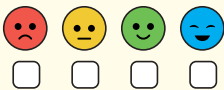
$\sqrt{41+n}$ و $\sqrt{2n+20}$ عدداً نسبياً ؟



تفكير إبداعي

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للأعداد الحقيقية ؟
ضع علامة في المربع المناسب



30 أوجد عدداً غير نسبي يقع بين العددين $0.\bar{3}$ ، $0.\bar{6}$

31 إذا كان $10 < \sqrt{x} < 13$ ، $12 < \sqrt{y} < 13$ ، عدنان صحيحان موجبان.

أوجد أكبر قيمة للمقدار $y - x$

الفترات والعمليات عليها (Intervals and Their Operations)



الشعاب المرجانية والأسماك بالبحر الأحمر



استعد!

تُعد مدينة الغردقة واحدة من أبرز مناطق الغطس في العالم، حيث يمكن للسياح الاستمتاع بتجربة الغطس في مياه البحر الأحمر لمشاهدة الشعاب المرجانية الجميلة والأسماك المتنوعة. في إحدى رحلات الغوص في الغردقة، أراد الغواصون مشاهدة نوعين من الأسماك معًا، فإذا علمت أن:

- النوع الأول يعيش في أعماق تتراوح بين 15 م و 60 م.
 - النوع الثاني يعيش في أعماق تتراوح بين 10 م و 25 م.
 - غاص مجدى إلى عمق 30 م، وغاصت أمل إلى عمق 12 م، بينما غاص باسم إلى عمق 20 م، أى منهم يستطيع رؤية النوعين معًا؟
- في هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الفترة وأنواع الفترات والعمليات على الفترات، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

في أحد الأيام كانت مواعيد محاضرات مصطفى بالجامعة كالتالى:

من الساعة 9:00 صباحًا إلى الساعة 12:00 ظهرًا.

ثم من الساعة 2:00 ظهرًا إلى الساعة 4:00 عصرًا.

إذا كانت مواعيد المركز الرياضى بالجامعة يوميًا من الساعة 10:00 صباحًا إلى الساعة 1:00 ظهرًا، فما الفترة المناسبة ليستطيع مصطفى ممارسة الرياضة بالمركز الرياضى بالجامعة فى هذا اليوم دون أن يؤثر ذلك على حضور محاضراته؟ ناقش.



تعلم!

الفترات

- أى عددين حقيقيين ينحصر بينهما عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية.
- لا يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية والمجموعات الجزئية منها بطريقة السرد، لأنه لا يمكن سرد جميع عناصرها، ولذلك تستخدم طريقة أخرى للتعبير عنها وهى «الفترات».

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم الفترة كمجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- تمثل فترة على خط الأعداد.
- تجرى عمليات التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة على الفترات.
- تؤطّف مفهوم الفترات فى حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- فترة Interval
- فترة محدودة Bounded interval
- فترة غير محدودة Unbounded interval
- فترة مغلقة Closed interval
- فترة مفتوحة Open interval
- تقاطع Intersection
- اتحاد Union
- فرق Difference
- مكملة Complement
- المجموعة الشاملة Universal set
- ما لا نهاية Infinity

إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$ ، فإن :

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأصغر من b
 $\{X : X \in \mathbb{R}, a < X < b\} =]a, b[$



مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأصغر من أو تساوي b
 $\{X : X \in \mathbb{R}, a < X \leq b\} =]a, b]$



مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي a وأصغر من أو تساوي b
 $\{X : X \in \mathbb{R}, a \leq X \leq b\} = [a, b]$



مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي a وأصغر من b
 $\{X : X \in \mathbb{R}, a \leq X < b\} = [a, b[$



◀ فترة مغلقة. $[a, b]$

$b \in [a, b], a \in [a, b]$

◀ فترة مفتوحة. $]a, b[$

$b \notin]a, b[, a \notin]a, b[$

◀ فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة $[a, b[$ أو $]a, b]$

$b \notin [a, b[, a \in [a, b[$

◀ فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة $]a, b]$ أو $]a, b[$

$b \in]a, b[, a \notin]a, b[$

مثال 1

② اكتب على صورة فترة، ثم مثل على

خط الأعداد المجموعة B :

$$B = \{X : X \in \mathbb{R}, -2 < X < 2\}$$

$$\text{هل } \sqrt[3]{-9} \in B \text{ ؟}$$

① اكتب على صورة فترة، ثم مثل على

خط الأعداد المجموعة A :

$$A = \{X : X \in \mathbb{R}, 1 < X \leq 3\}$$

$$\text{هل } \sqrt{2} \in A \text{ ؟}$$

$$\textcircled{1} A =]1, 3]$$



باستخدام الآلة الحاسبة :

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\therefore 1 < \sqrt{2} \leq 3$$

$$\therefore \sqrt{2} \in]1, 3]$$

$$\textcircled{2} B =]-2, 2[$$



باستخدام الآلة الحاسبة :

$$\therefore \sqrt[3]{-9} \approx -2.08$$

$$\therefore \sqrt[3]{-9} < -2$$

$$\therefore \sqrt[3]{-9} \notin]-2, 2[$$

■ تقييم ذاتي ①

اكتب على صورة فترة، ثم مثل على خط الأعداد كلاً من المجموعتين الآتيتين

$$\textcircled{1} \{X : X \in \mathbb{R}, -1 < X < 5\}$$

$$\textcircled{2} \{X : X \in \mathbb{R}, 0.5 \leq X < \sqrt{9}\}$$

ثانياً الفترات غير المحدودة

- تمتد مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد في الاتجاه الموجب إلى ما لا نهاية (∞) وتمتد في الاتجاه السالب إلى ما لا نهاية ($-\infty$)
- يُستخدم الرمز ∞ و $-\infty$ في التعبير عن المجموعات غير المحدودة كما يلي :
إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن :

مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي a $\{X : X \in \mathbb{R}, X \leq a\} =]-\infty, a]$	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي a $\{X : X \in \mathbb{R}, X \geq a\} = [a, \infty[$
مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من a $\{X : X \in \mathbb{R}, X < a\} =]-\infty, a[$	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a $\{X : X \in \mathbb{R}, X > a\} =]a, \infty[$

■ لاحظ أن

الفترة $]-\infty, \infty[$ تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ،
 $-\infty \notin \mathbb{R}$ و $\infty \notin \mathbb{R}$

■ تاريخ الرياضيات



العالم الإنجليزي
جون واليس
(John Wallis)
هو أول من
استخدم رمز
ما لا نهاية (∞) .

مثال 2

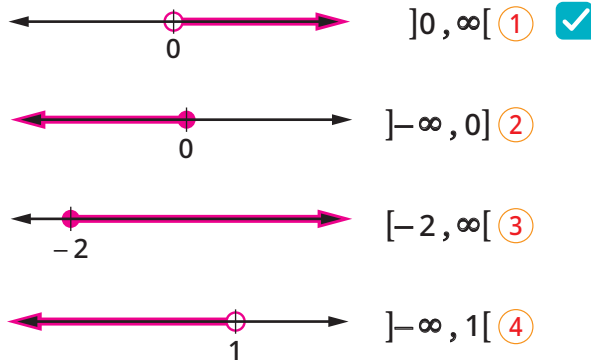
اكتب على صورة فترة كلاً من المجموعات الآتية ومثلها على خط الأعداد :

② مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة

① مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

④ $\{X : X \in \mathbb{R}, X < 1\}$

③ $\{X : X \in \mathbb{R}, X \geq -2\}$



■ لاحظ أن

• $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$
حيث : $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة،
 $\mathbb{R}^-$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$

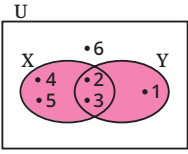
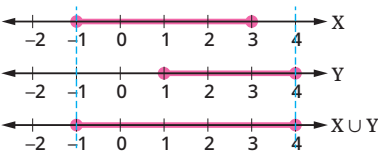
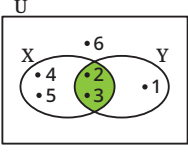
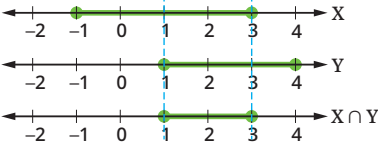
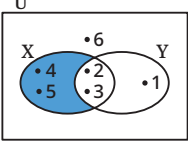
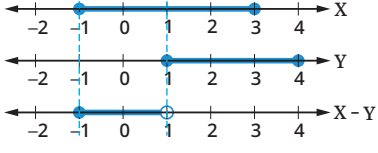
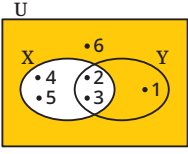
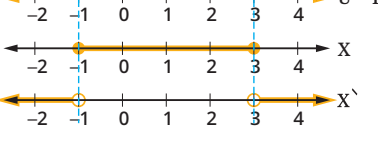
■ تقييم ذاتي ②

اكتب على صورة فترة ومثل على خط الأعداد :

- ① مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $\mathbb{R}^-$
- ② مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
- ③ $\{X : X \in \mathbb{R}^+, X < 3\}$

العمليات على الفترات

الفترات هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، ولذلك يمكن إجراء عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة عليها بنفس طريقة إجرائها على المجموعات كالتالي :

المجموعات	الفترات
بفرض أن : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حيث U المجموعة الشاملة $X = \{2, 3, 4, 5\}$ $Y = \{1, 2, 3\}$	بفرض أن : $U = \mathbb{R}$ حيث U المجموعة الشاملة $X = [-1, 3]$ $Y = [1, 4]$
الاتحاد $(X \cup Y)$: مجموعة العناصر التي تنتمي إلى X أو Y  $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	 $X \cup Y = [-1, 4]$
التقاطع $(X \cap Y)$: مجموعة العناصر التي تنتمي إلى X و Y  $X \cap Y = \{2, 3\}$	 $X \cap Y = [1, 3]$
الفرق $(X - Y)$: مجموعة العناصر التي تنتمي إلى X ولا تنتمي إلى Y  $X - Y = \{4, 5\}$	 $X - Y = [-1, 1[$
المكملة X^c : مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولا تنتمي إلى X  $X^c = U - X = \{1, 6\}$	 $X^c = \mathbb{R} - X =]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$

■ لاحظ أن

المجموعة الشاملة هي مجموعة تحتوي جميع المجموعات الجزئية منها، ويرمز لها بالرمز U .

■ فكر وناقش

هل $X - Y = Y - X$ ؟

■ تقييم ذاتي ③

أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

① $[4, 9] \cap [7, 10]$

② $] -3, 2[\cup]0, \infty[$

③ $]0, 5[-]3, 7[$

④ X^c حيث $X = [-5, \infty[$

مثال ③

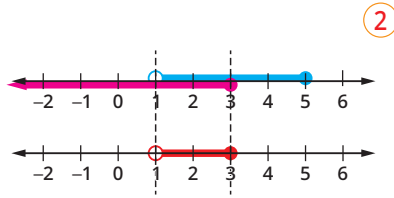
أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلاً مما يلي :

② $]1, 5] \cap]-\infty, 3]$

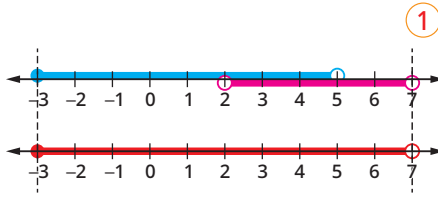
④ X^c حيث $X =]-\infty, 3]$

① $] -3, 5[\cup]2, 7[$

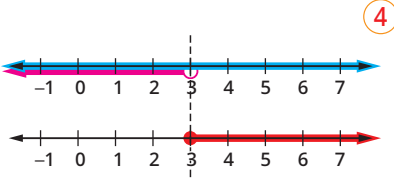
③ $] -\infty, 6[-]4, \infty[$



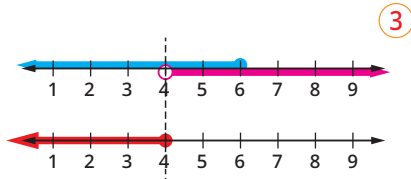
$$]1, 5] \cap]-\infty, 3] =]1, 3]$$



$$[-3, 5[\cup]2, 7[= [-3, 7[$$



$$X^c = \mathbb{R} -]-\infty, 3[= [3, \infty[$$



$$]-\infty, 6] -]4, \infty[=]-\infty, 4]$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

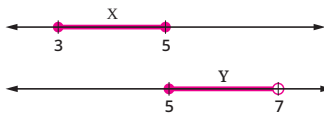
أول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

2 إذا كانت $a \notin]-1, 3]$

فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلي ؟

(أ) -1 (ب) 0 (ج) 2 (د) 3



4 أي مما يلي

يمثل $X \cap Y$ ؟

(أ) $\emptyset$ (ب) $\{5\}$

(ج) $[3, 7[$ (د) $[3, 5[$

6 أي الفترات الآتية ينتمي إليها العدد $-\sqrt{7}$ ؟

(أ) $[-2, -1]$ (ب) $[-3, -2]$

(ج) $[-4, -3]$ (د) $[-7, -6]$

1 إذا كانت $a \in]2, 5[$

فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلي ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 4 (د) 5

3 إذا كانت $X = [-5, 7[$ ، فأى مما يلي صحيح ؟

(أ) $7 \in X$ (ب) $-5 \notin X$

(ج) $0 \notin X$ (د) $-2 \in X$

5 ما الفترة الناتجة عن $\{2\} \cup]2, 5[$ ؟

(أ) $]2, 5[$ (ب) $[2, 5]$

(ج) $]2, 5]$ (د) $[2, 5[$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

7 إذا كانت $X =]-2, 2[$ ، $Y = [1, 4]$ ، أوجد مستعينا بخط الأعداد :

$X \cap Y$ ، $X \cup Y$ ، $Y - X$ ، $X - Y$

9 إذا كانت $A = [-1, 3]$ ، $B =]-\infty, 3[$

فأوجد ما يأتي :

B^c ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $B - A$ ، $A - B$

8 إذا كانت $A =]-5, \infty[$ ، $B =]-\infty, 2]$

أوجد مستعينا بخط الأعداد :

A^c ، $B - A$ ، $A - B$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$

10 أوجد كلاً مما يأتي :

- ① $[2, 5[\cup]-2, 3]$ ② $[2, 7] - [3, 8[$ ③ $] -1, 3[\cap]-5, 1[$
 ④ $X = [4, 8[$ حيث $X \setminus$ ⑤ $[3, \infty[\cap]-\infty, 7[$ ⑥ $]2, 5] \cup]5, \infty[$

11 أوجد كلاً مما يأتي :

- ① $R \cap [2, 5[$ ② $R^+ \cup]0, 2[$ ③ $R^- - [-2, 0[$ ④ $R^- \cup R^+$

12 أوجد كلاً مما يأتي :

- ① $N \cap [-3, 0[$ ② $Z^+ \cap]-1, 2[$ ③ $Z^- \cap]-2, 3[$ ④ $\{3, 5\} \cup]3, 5[$
 ⑤ $\{3, 7\} \cap [3, 7[$ ⑥ $[2, 5] - \{2, 5\}$ ⑦ $[0, 5] - \{5\}$



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

13 عبر عن كل من الموقفين الآتيين بمتباينة مناسبة، ثم اكتبها على صورة فترة ومثلها على خط الأعداد.

- ① **عمل :** يُشترط أن لا يقل عُمرُك عن 25 سنة ولا يزيد عن 45 سنة لتلتحق بوظيفة ما.
 ② **جغرافيا :** تتراوح درجات الحرارة في إحدى مدن أمريكا الشمالية من -2°C إلى 10°C



يُعد حفظ الأطعمة أمراً حيوياً لتحقيق التنمية المستدامة، وتعزيز الأمن الغذائي.

14 **تغذية :** قررت ليلي حفظ نوعين من الأغذية في الثلاجة :

- النوع الأول هو اللبن الطازج، ويُفضل حفظه في درجة حرارة من 1°C إلى 4°C
 - النوع الثاني هو اللحوم الطازجة، ويفضل حفظها في درجة حرارة من -2°C إلى 2°C
- ما الفترة التي يمكن أن تضبط ليلي الثلاجة عليها حتى تحفظ النوعين معاً في نفس الوقت دون أن يتلف أي منهما ؟

15 **مسئولية اجتماعية :** أمل وإيمان أختان أرادتا تنظيم وقتهن يوم

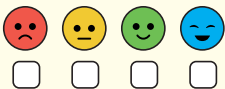
- السبت لرعاية والدتهن المسنة؛ لتتأكد كلٌ منهما أن والدتهن لن تبقى وحدها في أي وقت من اليوم حتى موعد عودة أبيهن للمنزل.
 • أمل تستطيع التفرغ من الساعة 10:00 صباحاً إلى الساعة 2:00 ظهراً.
 • أما إيمان فتستطيع التفرغ من الساعة 12:00 ظهراً إلى الساعة 4:00 عصرًا.
 ما الفترة الزمنية التي تضمن وجود إحداهن على الأقل مع والدتهن ؟



رعاية الوالدين والاهتمام بهما ليست خدمة بل واجب ومسئولية.

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للفترات والعمليات عليها ؟
 ضع علامة في المربع المناسب



تفكير إبداعي

16 إذا كانت a, b, c, d أعداداً حقيقية، $a < c < b < d$ ، فأوجد كلاً من :

$$[a, b] - [c, d], \quad [a, b] \cap [c, d]$$

17 إذا كانت $[-2, a] \cap [b, 7] = [2, 4]$ فما قيمة $\frac{b^a}{a^b}$ ؟

العمليات على الأعداد الحقيقية

(Operations on Real Numbers)

■ نواتج التعلم

- تجرى العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الأعداد الحقيقية.
- تعرف خواص جمع وضرب الأعداد الحقيقية.
- تحل بعض المشكلات الحياتية مستخدماً العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.

■ المفردات

- الانغلاق Closure
- الإبدال Commutative
- الدمج Associative
- المحايد الجمعي Additive identity
- المحايد الضربي Multiplicative identity
- المعكوس الجمعي Additive inverse
- المعكوس الضربي Multiplicative inverse
- الحد الجذري Radical term



استعد!

تنطلق الحمم البركانية من خزان الصهارة الموجود في أعماق الأرض عبر قناة تُسمى قناة الصهارة، حتى تصل إلى فوهة البركان، حيث تنفجر وتندفع إلى الخارج على شكل حمم وغازات ورماد بركاني.

في الشكل الذي أمامك، كم تبعد فوهة البركان عن مستوى سطح البحر؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إجراء

العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

سجادة مستطيلة الشكل بُعدها

$$(\sqrt{5} + 1) \text{ م، } (\sqrt{5} - 1) \text{ م.}$$

وسجادة مربعة الشكل طول ضلعها $\sqrt{5}$ م.

أي من السجادتين أكبر في المساحة ؟

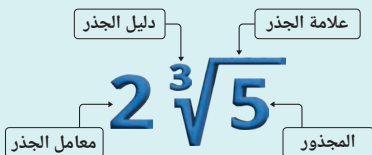
وأيهما أكبر في المحيط ؟ ناقش.



تعلم!

العمليات على الأعداد الحقيقية

قبل دراسة كيفية إجراء العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الأعداد الحقيقية، سنتعرف أولاً على مفهوم الحدود الجذرية المتشابهة.



الحدود الجذرية المتشابهة هي حدود تحتوي على جذور لها نفس دليل الجذر ونفس المجذور (العدد أسفل الجذر)

أمثلة لحدود جذرية غير متشابهة :

$$2\sqrt{3} \text{ ، } 3\sqrt{2} .$$

$$2\sqrt{5} \text{ ، } 2\sqrt[3]{5} .$$

أمثلة لحدود جذرية متشابهة :

$$4\sqrt{3} \text{ ، } 2\sqrt{3} .$$

$$\sqrt[3]{5} \text{ ، } -3\sqrt[3]{5} .$$

■ تقييم ذاتي ①

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \quad ①$$

$$-5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \quad ②$$

$$\frac{(\sqrt{7})^2 \times 3\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} \quad ③$$

■ لاحظ أن

• إذا كانت $X \geq 0$ فإن :

$$\sqrt{X} \times \sqrt{X} = (\sqrt{X})^2 = X$$

• إذا كانت $X \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\sqrt[3]{X} \times \sqrt[3]{X} \times \sqrt[3]{X} = (\sqrt[3]{X})^3 = X$$

■ تفكير ناقد

① كتبت دينا أن :

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{5}$$

هل ما كتبتة دينا صواب ؟
ناقش.

② كتب إسلام أن :

$$2\sqrt{5} + 5 = 7\sqrt{5}$$

هل ما كتبه إسلام صواب ؟
ناقش.

■ تقييم ذاتي ②

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

$$\frac{-5}{\sqrt{2}} \quad ② \quad \frac{6}{\sqrt{3}} \quad ①$$

$$\frac{9}{5\sqrt{3}} \quad ③$$

مثال ①

إذا كانت : $z = \sqrt[3]{5}$ ، $y = \sqrt{3}$ ، $x = -4\sqrt{3}$ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$2x - z^3 \quad ④ \quad \frac{x}{2y} \quad ③ \quad x \times y \quad ② \quad x + y \quad ①$$

■ لاحظ أن ① $x + y = -4\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$$= (-4 + 1)\sqrt{3}$$

$$= -3\sqrt{3}$$

■ لاحظ أن ② $x \times y = -4\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$$= (-4 \times 1) \times (\sqrt{3})^2$$

$$= -4 \times 3 = -12$$

$$\frac{x}{2y} = \frac{-4\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3}} \quad ③$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-4}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= -2 \times 1 = -2$$

■ لاحظ أن

الحد الجذري $-8\sqrt{3}$ لا يشابه
الحد 5 لذلك لا يتم طرحهما.

$$2x - z^3 = 2 \times (-4\sqrt{3}) - (\sqrt[3]{5})^3 \quad ④$$

$$= -8\sqrt{3} - 5$$

مثال ②

اكتب كلاً من الأعداد الآتية في أبسط صورة بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

$$\frac{12}{5\sqrt{2}} \quad ③ \quad \frac{-15}{\sqrt{5}} \quad ② \quad \frac{7}{\sqrt{3}} \quad ①$$

① لكي يكون المقام عدداً صحيحاً، اضرب كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

② لكي يكون المقام عدداً صحيحاً، اضرب كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{5}$

$$\therefore \frac{-15}{\sqrt{5}} = \frac{-15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-15\sqrt{5}}{5} = -3\sqrt{5}$$

③ لكي يكون المقام عدداً صحيحاً، اضرب كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{12}{5\sqrt{2}} = \frac{12}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5 \times 2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

خواص العمليات على الأعداد الحقيقية

إذا كانت : a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية، فإن :

الخاصية	عملية الجمع	عملية الضرب
الانغلاق	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \times b \in \mathbb{R}$
الإبدال	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
الدمج (التجميع)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
توزيع الضرب على الجمع	$a(b + c) = ab + ac$	
المحايد	المحايد الجمعي هو 0 $a + 0 = 0 + a = a$	المحايد الضربي هو 1 $a \times 1 = 1 \times a = a$
المعكوس	المعكوس الجمعي للعدد a هو $(-a)$ حيث : $a + (-a) = 0$	المعكوس الضربي للعدد a هو $\frac{1}{a}$ (حيث $a \neq 0$) حيث : $a \times \frac{1}{a} = 1$

■ فكر وناقش

لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

① هل $a - b = b - a$ ؟

② هل $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ ؟

③ هل $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ ؟

④ هل $a(b - c) = ab - ac$ ؟

مثال ③

أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

$$\textcircled{2} (\sqrt{7} - 1)(2\sqrt{7} + 3)$$

$$\textcircled{4} (2\sqrt{5} - 5)^2$$

$$\textcircled{1} 2\sqrt{3}(4 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{3}$$

$$\textcircled{3} (2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 1)$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} 2\sqrt{3}(4 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{3} &= 2\sqrt{3} \times 4 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} + 2 \times 3 - 4\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} + 6 - 4\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6 = 4\sqrt{3} + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (\sqrt{7} - 1)(2\sqrt{7} + 3) &= \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} + \sqrt{7} \times 3 - 1 \times 2\sqrt{7} - 1 \times 3 \\ &= 14 + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 3 \\ &= (14 - 3) + (3\sqrt{7} - 2\sqrt{7}) \\ &= 11 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 1) = (2\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 8 - 1 = 7$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} (2\sqrt{5} - 5)^2 &= (2\sqrt{5})^2 + (2 \times 2\sqrt{5} \times (-5)) + (-5)^2 \\ &= 20 - 20\sqrt{5} + 25 \\ &= 45 - 20\sqrt{5} \end{aligned}$$

■ تقييم ذاتي ③

إذا كانت $X = (\sqrt{5} - 2)$ ،

$$y = (\sqrt{5} + 2)$$

فأوجد في أبسط صورة قيمة

$$x^2 - y^2 \text{ المقدار}$$

■ معلومة سابقة

$$\bullet (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$\bullet (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\bullet (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

■ حاول بنفسك

حاول إيجاد ناتج الضرب مباشرة بمجرد النظر كالتالي :

$$\begin{array}{c} \text{الأخيرين} \\ \text{الأوليين} \\ \text{الوسيطين} \\ \text{الطرفين} \\ (X + 3)(X + 2) \\ = X^2 + 5X + 6 \end{array}$$

■ تقييم ذاتي 4

أوجد في أبسط صورة
المعكوس الجمعي، والمعكوس
الضربي لكل من :

$$\begin{array}{ll} 1 & -4\sqrt{2} \\ 2 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 3 & 3\sqrt{7}-4 \end{array}$$

■ مثال 4

أوجد في أبسط صورة المعكوس الجمعي، والمعكوس الضربي لكل من :

$$1 \quad 3\sqrt{2} \quad 2 \quad 2-\sqrt{3}$$

$$1 \quad \checkmark \quad \text{المعكوس الجمعي} = -3\sqrt{2}$$

$$\text{المعكوس الضربي} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{6} = \text{المعكوس الضربي في أبسط صورة}$$

$$2 \quad \text{المعكوس الجمعي} = -(2-\sqrt{3})$$

$$-2+\sqrt{3}$$

$$\text{المعكوس الضربي} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

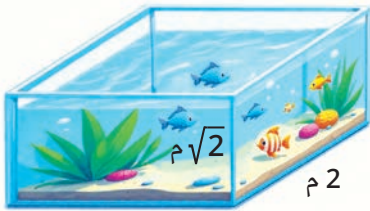
$$\therefore \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$$

$$\therefore 2+\sqrt{3} = \text{المعكوس الضربي في أبسط صورة}$$

■ لاحظ أن

لجعل العدد $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ في أبسط صورة، اضرب كلا من البسط والمقام في $(2+\sqrt{3})$



$$2\sqrt{2} \text{ م}$$

$$2 \text{ م}$$

■ مثال 5

في الشكل المقابل :

حوض زجاجي مغطى على شكل متوازي مستطيلات لعرض الأسماك، أوجد :

1 حجم الحوض الزجاجي.

2 المساحة الكلية للحوض لأقرب م².

$$1 \quad \checkmark \quad \therefore \text{حجم الحوض (V)} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$\therefore V = 2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2}$$

$$= 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$$

$$\therefore \text{حجم الحوض} = 8 \text{ م}^3$$

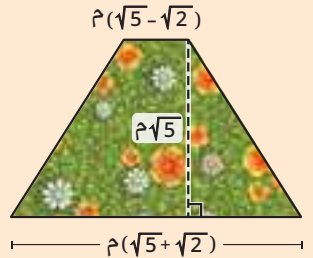
$$2 \quad \therefore \text{المساحة الكلية (A)} = 2(\text{الطول} \times \text{العرض} + \text{الارتفاع} \times \text{العرض} + \text{الارتفاع} \times \text{الطول})$$

$$\therefore A = 2(2\sqrt{2} \times 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2})$$

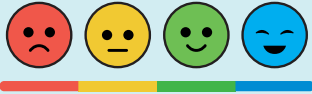
$$= 2(4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}) = 2(6\sqrt{2} + 4) = 12\sqrt{2} + 8 \approx 24.97$$

$$\therefore \text{مساحة الحوض الكلية} \approx 25 \text{ م}^2$$

■ تقييم ذاتي 5



في الشكل حوض زهور قاعدته على شكل شبه منحرف. أوجد مساحة قاعدة الحوض.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① إذا كان : $a + \sqrt{5} = 0$ فما قيمة a ؟
 (أ) 0 (ب) $\sqrt{5}$ (ج) $-\sqrt{5}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- ② إذا كان : $a \times \sqrt{2} = 1$ فما قيمة a ؟
 (أ) 1 (ب) $\sqrt{2}$ (ج) $-\sqrt{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ③ ما قيمة : $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ ؟
 (أ) $\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (ج) $\sqrt{6}$ (د) 3
- ④ إذا كان : $\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ فإن a ؟
 (أ) $a = -1$ (ب) $a = 1$ (ج) $a = 7$ (د) $a = 10$
- ⑤ إذا كان : $(2\sqrt{3})^n = 12$ فإن :
 (أ) $n = 2$ (ب) $n = 3$ (ج) $n = 4$ (د) $n = 6$
- ⑥ إذا كان : $3\sqrt{5} + 3a = 4\sqrt{5}$ فإن :
 (أ) $a = 1$ (ب) $a = \sqrt{5}$ (ج) $a = \sqrt[3]{5}$ (د) $a = 5$
- ⑦ ما المعكوس الجمعي للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ في أبسط صورة ؟
 (أ) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ب) 7 (ج) $-\sqrt{7}$ (د) -7
- ⑧ ما المعكوس الضربي للعدد : $\sqrt{3} - 2$ ؟
 (أ) $2 - \sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3} + 2$ (ج) $-\sqrt{3} - 2$ (د) $\sqrt{3} - 2$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

اجعل المقام في كل مما يأتي عدداً صحيحاً، واكتب العدد في أبسط صورة :

- ① $\frac{1}{\sqrt{15}}$ ② $\frac{30}{\sqrt{10}}$ ③ $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ ④ $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$
- ⑤ $\frac{1}{2+\sqrt{6}}$ ⑥ $\frac{20}{5-\sqrt{15}}$ ⑦ $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

⑩ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

- ① $2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} + \sqrt{7} + 2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5} - 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$
- ③ $(\sqrt[3]{5})^3 \times 2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{5}(2 - \sqrt{5}) - 2(1 + \sqrt{5})$
- ⑤ $(\sqrt{7} - 1)^2 + (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 3)$ ⑥ $(3 + 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})$

⑪ إذا كانت : $X = \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$ ، $y = \sqrt{3} + 2$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة :

$$x^2 + y^2 \text{ ③}$$

$$x y \text{ ②}$$

$$(x + y)^2 \text{ ①}$$

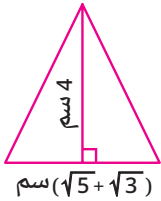
⑫ إذا كان : $\frac{X}{3\sqrt{2}} = \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1$ ، فأوجد قيمة $x^2 + y^2$



التحليل وتكامل المواد

ثالثا

⑬ هندسة : أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية في أبسط صورة :



③



سم $(2\sqrt{5} + \sqrt{3})$

سم $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})$

②



سم $3\sqrt{5}$

①

⑭ زراعة :



زراعة الورود تساعد في تنقية الهواء، وتعمل على تحسين المزاج وتقليل التوتر.

أنشأ عمر في حديقة منزله حوضين لزراعة الورود، أحدهما مستطيل الشكل بعده $(5 - \sqrt{7})$ م ، $(5 + \sqrt{7})$ م ، والآخر مربع الشكل له نفس مساحة الحوض الأول، أوجد محيط كل من الحوضين، أيهما له المحيط الأكبر؟

⑮ حرف يدوية :

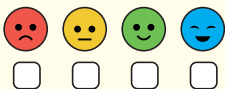
يعمل أحمد مشروعًا صغيرًا لإنتاج هياكل اللعب، فإذا كان لدى أحمد سلك نحاسي طوله 90 سم ويريد صناعة هيكليْن، أحدهما لمكعب حجمه 27 سم³ والآخر لمتوازي مستطيلات أبعاده $4\sqrt{3}$ سم ، 4 سم ، $2\sqrt{3}$ سم، فهل ما لدى أحمد من السلك يكفي لصناعة الهيكليْن؟



تعلم الحرف اليدوية ينمي المهارات الحركية الدقيقة، ويعزز الإبداع والابتكار.

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للعمليات على الأعداد الحقيقية ؟
ضع علامة في المربع المناسب



تفكير إبداعي

⑯ عند إنشاء مخزن على شكل متوازي مستطيلات، كانت أبعاده a ، b ، c متر.

فإذا كان $a = 3\sqrt{3}$ ، $b = 5\sqrt{3}$ ، $c = 5$

فأوجد حجم المخزن.

قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية

(Laws of Square and Cube Roots)



استعد!

في إطار مشروع مدرسي، قرر أسامة مع أصدقائه بالفصل إنشاء مشتل صغير داخل المدرسة، يتكون من مربعين متلاصقين.

• المربع الأول مخصص لزراعة شتلات الزينة ومساحته 48 م^2 .

• المربع الثاني مخصص لزراعة النباتات العطرية ومساحته 12 م^2 .

■ نواتج التعلم

- تعرف قوانين ضرب وقسمة الجذور التربيعية.
- تعرف قوانين ضرب وقسمة الجذور التكعيبية.
- تستخدم قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية في تبسيط الأعداد.
- تستخدم قوانين الجذور في حل المشكلات الحياتية.

أراد أسامة وأصدقاؤه بناء سور حول المشتل بالكامل لحمايته، فما طول هذا السور؟
في هذا الدرس، سوف تتعلم قوانين الجذور، مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

في لعبة اختيار بطاقتين تحملان عددين متساويين، قامت كل من سارة وأمل باختيار بطاقة صفراء وبطاقة خضراء.

• اختارت سارة البطاقتين A , C

• بينما اختارت أمل البطاقتين B , C

أيهما اختارت بشكل صحيح؟ ولماذا؟

■ المفردات

- الجذر التربيعي
Square root
- الجذر التكعيبى
Cube root



تعلم!

ضرب وقسمة الجذور

الجذور التكعيبية	الجذور التربيعية
إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن: $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$ مثال: $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{3 \times (-4)} = \sqrt[3]{-12}$	إذا كان a, b عددين حقيقيين غير سالبين فإن: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ مثال: $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$
بشرط $b \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ مثال: $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$	بشرط $b \neq 0$: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ مثال: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$

■ تفكير ناقد

- إذا كان a, b عددين حقيقيين غير سالبين:
هل: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ ؟
- هل: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b}$ ؟
- إذا كان a, b عددين حقيقيين:
هل: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a + b}$ ؟
- هل: $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a - b}$ ؟

مثال 1

ضع في أبسط صورة كلاً من الأعداد التالية :

$$\sqrt{32} \quad \sqrt[3]{24} \quad 2\sqrt{\frac{5}{2}} \quad 3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$$

✓ حل العدد 32 إلى عاملين أحدهما 16 وهو أكبر عامل مربع كامل (32 = 16 × 2)

$$\therefore \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

② حل العدد 24 إلى عاملين أحدهما 8 وهو أكبر عامل مكعب كامل (24 = 8 × 3)

$$\therefore \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

تنوع الاستراتيجيات

$$\therefore 2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$\therefore 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{5}{2}} &= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}} &= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3}} \\ &= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \\ &= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-2 \times 3 \times 3}}{3} \\ &= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-18}}{3} = -\sqrt[3]{18} \end{aligned}$$

مثال 2

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$\frac{\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} \quad 2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - \sqrt{48}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - \sqrt{48} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{16 \times 3} \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} - \sqrt{16} \times \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \times 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 13\sqrt{3} \end{aligned}$$

تقييم ذاتي ①

ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

$$\sqrt{50} \quad 4\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \quad 2\sqrt[3]{16}$$

تذكر أن

لجعل مقام العدد غير النسبي

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ عدداً صحيحاً اضرب كلاً من بسطه ومقامه في } \sqrt{b} \text{ كالتالي :}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}$$

تذكر أن

لجعل مقام العدد غير النسبي

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ عدداً صحيحاً اضرب كلاً من بسطه ومقامه في } \sqrt[3]{b} \text{ كالتالي :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a \cdot b^2}}{b} \end{aligned}$$

لاحظ أن

عند جمع وطرح الحدود الجذرية غير المتشابهة، قم بتبسيط كل حد على حدة، فإذا حصلت على حدود جذرية متشابهة يمكنك جمعها أو طرحها.

■ تنوع الاستراتيجيات

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} - \frac{2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{40}{5}} - 2\sqrt[3]{\frac{135}{5}} \\ &= \sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{27} \\ &= 2 - 2 \times 3 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 5} - 2\sqrt[3]{27 \times 5}}{\sqrt[3]{5}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{5} - 2 \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{5} - 2 \times 3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} \\ &= \frac{-4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = -4 \end{aligned}$$

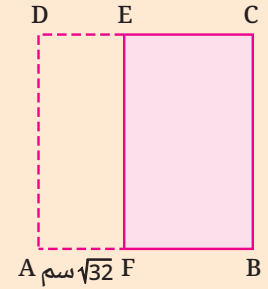
■ تقييم ذاتي ②

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$2\sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{50} \quad ①$$

$$2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} \quad ②$$

■ تقييم ذاتي ③



مساحة المربع ABCD تساوي 200 سم².

قُطِعَ منه المستطيل AFED الذي عرضه $\sqrt{32}$ سم، فما مساحة الشكل FBCE ؟

■ تقييم ذاتي ④

$$x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad \text{إذا كانت :}$$

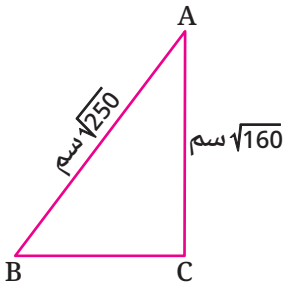
فأوجد في أبسط صورة قيمة : $x + \frac{1}{x}$

■ لاحظ أن

لتبسيط y اجعل المقام عددًا نسبيًا بضرب البسط والمقام في $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

■ مثال 3

هندسة : في الشكل المقابل، ABC مثلث محيطه $\sqrt{1440}$ سم. أوجد طول $\overline{BC}$



✓ ∴ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$\therefore \sqrt{250} + \sqrt{160} + BC = \sqrt{1440}$$

$$\therefore \sqrt{25 \times 10} + \sqrt{16 \times 10} + BC = \sqrt{144 \times 10}$$

$$\therefore 5\sqrt{10} + 4\sqrt{10} + BC = 12\sqrt{10}$$

$$\therefore 9\sqrt{10} + BC = 12\sqrt{10}$$

$$\therefore BC = 12\sqrt{10} - 9\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

أي أن طول $\overline{BC}$ يساوي $3\sqrt{10}$ سم.

■ مثال 4

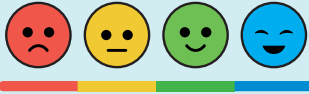
إذا كانت : $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ ، $y = \frac{3}{x}$ ، فأوجد في أبسط صورة :

$$x - y \quad ①$$

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \sqrt{5} - \sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$x - y = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad ①$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{5 - 2} = \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{3} \\ &= \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10} \quad ② \end{aligned}$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① أى مما يلي صحيح ؟
 (أ) $\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$
 (ج) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{48} = 3\sqrt{6}$
- ② ما قيمة : $\sqrt{18} + \sqrt{32}$ ؟
 (أ) $\sqrt{50}$ (ب) $7\sqrt{2}$
 (ج) $7\sqrt{4}$ (د) $5\sqrt{4}$
- ③ أى مما يلي يكافئ $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$ ؟
 (أ) $\sqrt[3]{30}$ (ب) 5 (ج) $5\sqrt[3]{5}$ (د) 125
- ④ أى مما يلي يكافئ $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ؟
 (أ) $2\sqrt{6}$ (ب) $6\sqrt{2}$ (ج) 6 (د) $\sqrt{70}$
- ⑤ أى مما يلي يكافئ $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{15}}$ ؟
 (أ) $\frac{5}{15}$ (ب) $\frac{5}{3}$
 (ج) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (د) $\frac{\sqrt{15}}{3}$
- ⑥ إذا كان : $\sqrt{160} = X\sqrt{10}$ فما قيمة X ؟
 (أ) 8 (ب) 6
 (ج) 4 (د) 3
- ⑦ إذا كان : $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{10}$ فما قيمة a ؟
 (أ) 30 (ب) $\sqrt[3]{30}$
 (ج) 15 (د) $\sqrt[3]{15}$
- ⑧ إذا كان : $2\sqrt{3} \times 4a = 8\sqrt{6}$ فما قيمة a ؟
 (أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}$
 (ج) 2 (د) $\sqrt{6}$
- ⑨ إذا كان : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ فما قيمة a ؟
 (أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6}$
 (ج) 3 (د) 9
- ⑩ إذا كان : $X + \sqrt{28} = \sqrt{7}$ فما قيمة X ؟
 (أ) $\sqrt{21}$ (ب) $-\sqrt{21}$
 (ج) $\sqrt{7}$ (د) $-\sqrt{7}$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑪ اختصر كلاً مما يأتى إلى أبسط صورة :

- | | | |
|--|--|---|
| $\frac{2\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{10}} \quad \text{③}$ $3\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} \quad \text{⑥}$ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{256} + \frac{12}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[3]{32} \quad \text{⑨}$ | $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{16} \quad \text{②}$ $\frac{3\sqrt[3]{32} - 3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} \quad \text{⑤}$ $\sqrt[3]{192} - 3\sqrt[3]{375} + 2\sqrt[3]{24} \quad \text{⑧}$ | $3\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{27} \quad \text{①}$ $\frac{\sqrt{98} + \sqrt{8}}{\sqrt{18}} \quad \text{④}$ $4\sqrt{48} + \frac{4}{3}\sqrt{27} + \sqrt{75} \quad \text{⑦}$ |
|--|--|---|

⑫ فى كل مما يأتى أوجد قيمة X :

$$X\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{270} \quad \text{②} \quad X\sqrt{32} = 2\sqrt{50} + \sqrt{72} \quad \text{①}$$

13 أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان : $2\sqrt{24} = b\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{5} = 2\sqrt{a}$ فأوجد $a + b$.

② إذا كانت : $X = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ، $Y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ فأوجد في أبسط صورة كلاً مما يأتي :

$$(1) X \times Y \quad (2) \frac{X}{Y} \quad (3) (X - \frac{1}{X})^2$$

③ إذا كانت : $a = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$ ، $b = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$ فأوجد في أبسط صورة كلاً مما يأتي :

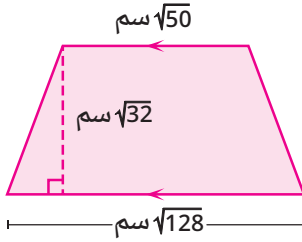
$$(1) (a + b)^3 \quad (2) a \times b \quad (3) a^2 - b^2$$



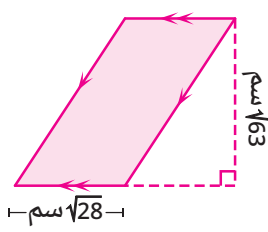
التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

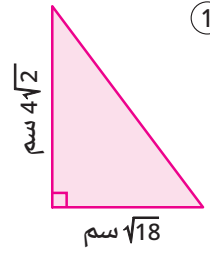
14 هندسة : احسب مساحة كل من الأشكال المظلة الآتية :



③



②

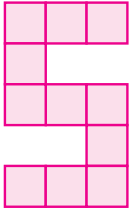


①

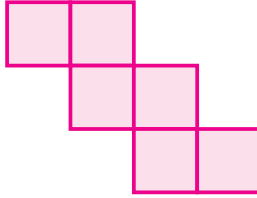
15 هندسة : كل شكل من الشكلين المقابلين يتكون من

مربعات متساوية في المساحة.

أوجد محيط كل شكل (مساحة الشكل معطاة أسفله).



المساحة = 132 سنتيمترًا مربعًا



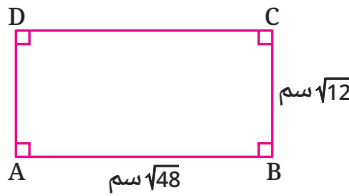
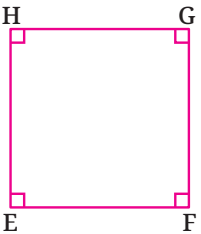
المساحة = 300 سنتيمتر مربع

16 بناء : قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها 500 م².

أُستخدمت منها قطعة مربعة الشكل مساحتها 180 م²

في بناء منزل، وتُركت باقى المساحة كحديقة كما بالشكل،

فما طول السور الخارجى للحديقة بالمتراً؟



17 هندسة : إذا كانت مساحة المستطيل ABCD

تساوى مساحة المربع EFGH

فما طول EF ؟

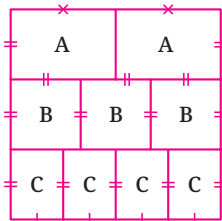
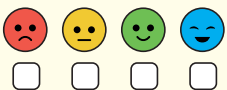


قيم فهمك!

ما مدى فهمك لقوانين الجذور

التربيعية والتكعيبية ؟

ضع علامة في المربع المناسب



تفكير إبداعى

18 مربع مساحته 432 سم² قُسم إلى

مستطيلات ومربعات كما بالشكل،

فما هو الفرق بين محيطى الشكلين A ، B ؟

قوانين الأسس في الأعداد الحقيقية

(Laws of Exponents in Real Numbers)

الدرس 1 - 5



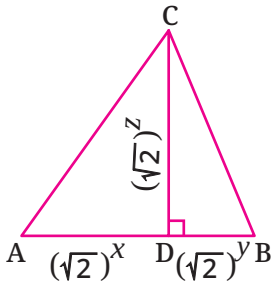
استعد!

شركة متخصصة في تصنيع ألعاب تعليمية للأطفال، قررت إنتاج لعبة على شكل مكعب ملون مصنوع من البلاستيك الآمن، على أن يكون طول حرف المكعب $4\sqrt{3}$ سم. ما حجم هذا المكعب؟

■ نواتج التعلم

- تعرف الضرب المتكرر في مجموعة الأعداد الحقيقية.
- تعرف قوانين الأسس في الأعداد الحقيقية.
- تستخدم قوانين الأسس في تبسيط تعبيرات رياضية.
- تستخدم قوانين الأسس في حل مشكلات حياتية.

في هذا الدرس، سوف تتعرف على قوانين الأسس في الأعداد الحقيقية؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

إذا كانت: $y + z = 2$ ، $x + z = 4$ فما مساحة المثلث ABC حيث $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ؟ ناقش.

■ المفردات

- الضرب المتكرر
- Repeated multiplication
- أس Exponent
- أساس Base
- قوة Power



تعلم!

الضرب المتكرر في مجموعة الأعداد الحقيقية

يستخدم التعبير الرياضي a^n للتعبير عن حاصل ضرب العدد الحقيقي a في نفسه n من المرات.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_\text{عدد حقيقي مكرر n مرة} = \overset{\text{الأس}}{a^n} \quad \text{الأساس}$$

■ لاحظ أن

- $(-a)^n = a^n$ إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً.
- $(-a)^n = -a^n$ إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً.

مثال:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \quad \begin{matrix} \text{الأس} = 5 \\ \text{الأساس} = \sqrt{2} \end{matrix}$$

■ تقييم ذاتي ①

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\begin{aligned} ① & (-\sqrt{2})^5 & ② & -(\sqrt{2})^5 & ③ & (-\sqrt{2})^6 \end{aligned}$$

■ مثال 1

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\begin{aligned} ① & (-\sqrt{5})^4 = -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \\ & = 5 \times 5 = 5^2 = 25 \\ ② & -(\sqrt{5})^4 = -(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}) \\ & = -(5 \times 5) = -(5)^2 = -25 \\ ③ & (-\sqrt{5})^3 = -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \\ & = 5 \times -\sqrt{5} = -5\sqrt{5} \end{aligned}$$

■ الأس الصفرى والأس السالب

أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر مرفوع للأس صفر يساوى 1

أى أن : $a^0 = 1$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر

$$5^0 = 1, \quad (\sqrt{3})^0 = 1, \quad (-\sqrt[3]{4})^0 = 1 \quad \text{أمثلة :}$$

أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر مرفوع للأس $(-n)$ حيث n عدد صحيح، يساوى المعكوس الضربى للعدد نفسه مرفوع للأس n

أى أن : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر

$$(\sqrt{3})^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{(\sqrt{3})^4} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-3} = (\sqrt[3]{4})^3 = 4 \quad \text{أمثلة :}$$

■ قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية

أولاً قوانين الضرب

عند ضرب القوى التى لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونجمع الأسس.

حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر، m, n عدنان صحيحان $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}, \quad a^{-3} \times a^5 = a^{-3+5} = a^2 \quad \text{أمثلة :}$$

عند إيجاد قوة حاصل ضرب عددين يُوزع الأس على كل من العددين.

أى أن : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ حيث a, b عدنان حقيقيان لا يساويان الصفر، n عدد صحيح

$$(3\sqrt{2})^2 = (3)^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \quad \text{مثال :}$$

■ فكر مع زملائك

إذا كان a عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر، n عددًا صحيحًا، فكيف تثبت كلاً مما يأتي :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ① \quad a^0 = 1 \quad ②$$

■ لاحظ أن :

القسمة على صفر ليس لها معنى، وعلى هذا فإنه عند وجود رموز فى المقام يُشترط لهذه الرموز ألا تساوى الصفر.

■ لاحظ أن :

$$\begin{aligned} (a+b)^n &\neq a^n + b^n \\ (a-b)^n &\neq a^n - b^n \end{aligned}$$

ثانياً قوانين القسمة

عند قسمة القوى التي لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونطرح الأسس.

أي أن : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ حيث a عدد حقيقي لا يساوي الصفر، m ، n عدنان صحيحان.

$$\frac{(\sqrt[3]{7})^5}{(\sqrt[3]{7})^2} = (\sqrt[3]{7})^{5-2} = (\sqrt[3]{7})^3 = 7$$

مثال :

عند إيجاد قوة خارج قسمة عددين يُوزع الأس على كل من العددين.

أي أن : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ حيث a ، b عدنان حقيقيان لا يساويان الصفر، n عدد صحيح.

$$\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{6^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{36}{3} = 12$$

مثال :

مثال 2

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5} \quad 3$$

$$\frac{(-\sqrt{3}ab)^4}{3a^4b^2} \quad 2$$

$$\frac{(6a)^2}{2a} \quad 1$$

$$1) \frac{(6a)^2}{2a} = \frac{6^2 \times a^2}{2 \times a} = \frac{36a^2}{2a} = 18a^{2-1} = 18a$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{(-\sqrt{3}ab)^4}{3a^4b^2} &= \frac{(-\sqrt{3})^4 \times a^4 \times b^4}{3 \times a^4 \times b^2} \\ &= \frac{9}{3} \times a^{4-4} \times b^{4-2} \\ &= 3 \times a^0 \times b^2 \\ &= 3 \times 1 \times b^2 = 3b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5} &= \frac{(2\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5} = \frac{2^4 \times (\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{2^5 \times (\sqrt{2})^5} \\ &= (2)^{4-5} \times (\sqrt{2})^{4+3-5} \\ &= (2)^{-1} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

■ تقييم ذاتي 2

اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$\frac{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-1}}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^{-2}} \quad 1$$

$$\frac{(\sqrt{18})^5 \times (\sqrt{2})^3}{(\sqrt{12})^4} \quad 2$$



مثال 3

اختصر لأبسط صورة كلاً مما يأتي :

$$① (\sqrt{6})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n} \quad \text{ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند } n = 1$$

$$② \frac{(10)^{2n} \times 0.001}{(10)^{-n+1} \times 100} \quad \text{ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند } n = 2$$

$$\begin{aligned} ① (\sqrt{6})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n} &= (\sqrt{3} \times \sqrt{2})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n} \\ &= (\sqrt{3})^n \times (\sqrt{2})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n} \\ &= (\sqrt{3})^{n+n-1} \times (\sqrt{2})^{n-n} \\ &= (\sqrt{3})^{2n-1} \times (\sqrt{2})^0 \\ &= (\sqrt{3})^{2n-1} \times 1 \\ &= (\sqrt{3})^{2n-1} \end{aligned}$$

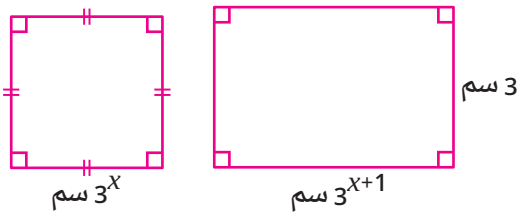
عند $n = 1$:

$$\therefore (\sqrt{3})^{2n-1} = (\sqrt{3})^{2 \times 1 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} ② \frac{10^{2n} \times 0.001}{10^{-n+1} \times 100} &= \frac{10^{2n} \times 10^{-3}}{10^{-n+1} \times 10^2} \\ &= \frac{10^{2n-3}}{10^{-n+1+2}} = \frac{10^{2n-3}}{10^{-n+3}} \\ &= 10^{(2n-3) - (-n+3)} = 10^{2n-3+n-3} = 10^{3n-6} \end{aligned}$$

عند $n = 2$:

$$\therefore 10^{3n-6} = 10^{3 \times 2 - 6} = 10^{6-6} = 10^0 = 1$$



مثال 4

في الشكل المقابل :

مربع طول ضلعه 3^x سم
ومستطيل بعده 3^{x+1} سم ، 3 سم.
إذا كان محيط المربع = 20 سم،
فأوجد مساحة المستطيل.

∴ محيط المربع = 20 سم

$$\therefore 4 \times 3^x = 20$$

$$\therefore 3^x = \frac{20}{4} = 5$$

∴ مساحة المستطيل A = الطول × العرض

$$\therefore A = 3^{x+1} \times 3 = 3^x \times 3 \times 3 = 5 \times 9 = 45$$

∴ مساحة المستطيل = 45 سم².

■ تقييم ذاتي 3

اختصر لأبسط صورة :

$$① \frac{(\sqrt{5})^n \times (\sqrt{3})^{2-n}}{3 \times (\sqrt{15})^{-n}}$$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج
عند $n = -2$

$$② \frac{1000 \times 0.1^n \times 10^{n-1}}{10^{n+2}}$$

■ لاحظ أن

$10 = 10^1$	$0.1 = 10^{-1}$
$100 = 10^2$	$0.01 = 10^{-2}$
$1000 = 10^3$	$0.001 = 10^{-3}$
$10000 = 10^4$	$0.0001 = 10^{-4}$

وهكذا

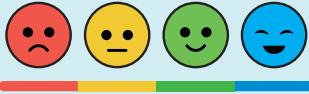
■ تقييم ذاتي 4

إذا كان : $3^x = 4$

فأوجد القيمة العددية لكل من :

$$① 3^{x+1} \quad ② 3^{x-1}$$

$$③ 3^{x+2} + 3^{x+3}$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- 1 ما ناتج $\frac{(a b)^3}{b^3}$ ؟
(أ) a^3 (ب) $\frac{a}{b}$ (ج) $\frac{a^3}{b^2}$ (د) $\frac{a^2}{b^3}$
- 2 ما قيمة $(\frac{7}{\sqrt{7}})^0 - \frac{7}{(\sqrt{7})^0}$ ؟
(أ) 0 (ب) 6 (ج) 1 (د) -6
- 3 ما ناتج $(\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^{-4}$ ؟
(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ج) 3 (د) $\frac{1}{3}$
- 4 ما ناتج $(\frac{\sqrt{5}}{10})^{-1}$ ؟
(أ) $2\sqrt{5}$ (ب) $5\sqrt{2}$ (ج) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ (د) 2
- 5 ما محيط المربع الذي مساحته a سم² ؟
(أ) a^4 سم (ب) $(\sqrt{a})^4$ سم (ج) $4\sqrt{a}$ سم (د) $4a$ سم
- 6 ما قيمة $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ ؟
(أ) 4^2 (ب) 4^3 (ج) 4^8 (د) 4^{16}
- 7 إذا كان : $2^{X-1} = 1$ فما قيمة X ؟
(أ) 0 (ب) 1 (ج) -1 (د) -2
- 8 إذا كان : $(\sqrt{6})^X \times \sqrt{6} = 1$ فما قيمة X ؟
(أ) 0 (ب) 1 (ج) -1 (د) -2
- 9 ما العدد $\frac{1}{5}$ $(\sqrt[3]{5})^6$ ؟
(أ) 5 (ب) 25 (ج) $\sqrt[3]{5}$ (د) $(\sqrt[3]{5})^8$
- 10 إذا كانت : $2^X = 3$ فما قيمة 2^{X+1} ؟
(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 9



تطبيق المفاهيم

ثانياً

11 اختصر كلاً مما يأتي لأبسط صورة :

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^4 \quad (3)$$

$$\frac{(2)^{2n+1} \times (3)^{2n+1}}{(6)^{2n}} \quad (6)$$

$$\frac{-3a^2b \times 4a^{-1}b^{-2}}{12(ab)^{-2}} \quad (2)$$

$$\frac{(\sqrt{18})^2 \times (\sqrt{2})^{-1}}{(\sqrt{8})^{-1}} \quad (5)$$

$$\frac{(-2Xy)^{-3}}{X^{-4}y^{-3}} \quad (1)$$

$$\frac{(\sqrt{3})^3 \times 27}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^4} \quad (4)$$

12) اختصر كلاً مما يأتي لأبسط صورة :

$$\textcircled{1} \frac{(\sqrt{6})^{n+2} \times (\sqrt{3})^n}{4 \times (\sqrt{2})^{n-2}} \text{ ثم أوجد قيمة الناتج عند } n = 1$$

$$\textcircled{2} \frac{10^{-n} \times 0.01}{10^{-n-6} \times 10^n} \text{ ثم أوجد قيمة الناتج عند } n = 3$$

$$\textcircled{13} \text{ إذا كانت : } X = \sqrt{2}, y = \sqrt{6}, \text{ فما قيمة } \frac{y^6 X^{-4}}{X^2} ?$$

$$\textcircled{14} \text{ إذا كانت : } X = 2\sqrt{3}, y = 3\sqrt{2}, \text{ فأوجد القيمة العددية للمقدار } (X^2 - y^2)^{-1}$$

$$\textcircled{15} \text{ إذا كانت : } 2^X = 5 \text{ فأوجد قيمة كل من :}$$

$$\textcircled{3} 2^{X+2} + 2^{X+3}$$

$$\textcircled{2} 2^{1-X}$$

$$\textcircled{1} 2^{X+1}$$

$$\textcircled{16} \text{ إذا كانت : } X = \sqrt{5}, y = 5 \text{ فأوجد قيمة } X^{-10} y^{10}$$



التحليل وتكامل المواد

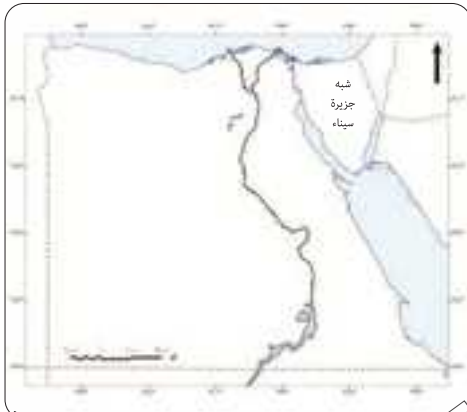
ثالثاً

17) **جغرافيا :** إذا علمت أن مساحة شبه جزيرة سيناء تبلغ

حوالى 6% من مساحة جمهورية مصر العربية التى

تبلغ حوالى 10^6 كم² تقريباً ، فكم تبلغ مساحة شبه

جزيرة سيناء بالكيلو متر مربع تقريباً ؟



تشهد سيناء - أرض الفيروز - ومدن القناة طفرة حقيقية وإنجازات فى كافة قطاعات التنمية بما يدعو للفخر.

18) **نجارة :** صنع نجار صندوقاً خشبياً على شكل متوازي

مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $2\sqrt{7}$ قدم ،

وارتفاعه $3\sqrt{7}$ قدم ، فما حجم الصندوق ؟



يجب اتباع تعليمات الأمن والسلامة داخل بيئة العمل حفاظاً على سلامة الأفراد.

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لقوانين الأسس

فى الأعداد الحقيقية ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



تفكير إبداعى

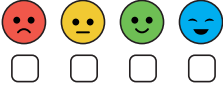
19) أى مما يأتى يعبر عن الوسط الحسابى للعددين 2^X ، 2^{X+1} حيث $X \in \mathbb{Z}$ ؟

$$\textcircled{ب} 2^{2X+1}$$

$$\textcircled{أ} 2$$

$$\textcircled{د} 2^{X+1} + 2^X$$

$$\textcircled{ج} 2^{X-1} + 2^X$$



تقييم الوحدة الأولى

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت $a = 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ فما قيمة a ؟

(أ) -1 (ب) 1

(ج) $\sqrt[3]{2}$ (د) 0

③ إذا كان : $\sqrt{3} = (\sqrt{2})^{X-1}$ فما قيمة $(\sqrt{2})^X$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ (ب) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(ج) $\sqrt{6}$ (د) $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

◀ أكمل كلاً مما يأتي بالإجابة الصحيحة :

⑤ مجموعة الحل للمعادلة $\frac{1}{2}X^2 + 2 = 0$

في R هي

⑦ المعكوس الضربي للعدد $\sqrt{10} - 3$ في أبسط صورة

يساوى

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

⑨ اختصر لأبسط صورة المقدار : $\frac{(\sqrt{15})^{n-2} \times (\sqrt{6})^n}{2 \times (\sqrt{10})^{n-2}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 1$

⑩ إذا كانت $X = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ فأوجد في أبسط صورة $X - \frac{1}{X}$

⑪ إذا كانت $A =]-\infty, 1]$ ، $B =]-2, 2]$ فأوجد على صورة فترة $B - A$

⑫ رتب تصاعدياً الأعداد : $2\sqrt{3}$ ، 3.5 ، $\frac{1}{2}$

② ما الفترة التي تمثل $R \cap]-2, 3]$ ؟

(أ) $] -2, 0[$ (ب) $] -2, 0]$

(ج) $] -2, 1]$ (د) $] 0, 3]$

④ أى من الأعداد الآتية عدد غير نسبي ؟

(أ) $\sqrt[3]{-27}$ (ب) $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$

(ج) $0.\bar{5}$ (د) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$

⑥ إذا كان n عدداً صحيحاً، $n + 1 > \sqrt{29} > n$

فإن $n = \dots\dots\dots$

⑧ إذا كانت : $X =]-1, \infty[$ فإن الفترة التي تعبر عن

مكاملة X تساوى



المثلث الذهبي

نشاط الوحدة الأولى

◀ الهدف من النشاط :

تعرف نماذج وأشكالاً جديدة كأمثلة في الرياضيات على النسبة الذهبية.

◀ خطوات التنفيذ :

بالتعاون مع أحد أصدقائك حاول القيام بالآتي :

① استخدم أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعي للبحث عن أمثلة في الرياضيات على النسبة الذهبية.

② اذكر عدداً من الأشكال التي يمكن أن توجد بها النسبة الذهبية.

③ هل يمكن أن توجد النسبة الذهبية في المثلث ؟

اجمع بيانات عن هذه الحالة، واذكر نوع المثلث الذي يمكن أن يُطلق عليه (المثلث الذهبي).

④ وضح خطوات الإجابة عن الأسئلة السابقة، مع عرض بعض الصور للأشكال التي توصلت إليها.

الوحدة 2

الجبر

دروس الوحدة

- 2-1 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
- 2-2 تحليل ثلاثية الحدود
- 2-3 تحليل الحالات الخاصة
- 2-4 التحليل بالتقسيم



التحليل هو عملية رياضية مهمة تُستخدم في بعض خوارزميات الذكاء الاصطناعي، حيث يتكامل كل نوع من أنواع التحليل مع جانب معين من تصميم وتدريب النماذج الذكية (تطبيقات الذكاء الاصطناعي).
◀ فهل يمكن تطوير دور التحليل بأنواعه المختلفة في بناء وتطوير نماذج وتطبيقات الذكاء الاصطناعي؟

القيم

- الوعي البيئي
- تقدير الفن والجمال
- الاحترام
- المسؤولية
- الوعي الثقافي

القضايا والمهارات الحياتية

- التفكير الناقد
- التفكير الإبداعي
- التواصل الرياضي
- التنمية المستدامة

التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر (Factorizing by Taking Out Greatest Common Factor GCF)

الدرس 2 - 1



أبطال مصر فى لعبة الإسكواش



استعد!

تحتل مصر مراكز متقدمة على مستوى العالم فى رياضة الإسكواش، حيث حقق اللاعبون المصريون من الرجال والنساء العديد من البطولات الكبرى فى السنوات الأخيرة. بفرض أن مساحة ملعب الإسكواش تساوى $(4X^5 + 12X)^2$ م²، فهل يمكن أن يكون بعده $(4X^5)$ م، $(12X)$ م ؟

أو يمكن أن يكون بعده $(X^4 + 3)$ م، $4X$ م ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.



فكر وناقش!

يمكن كتابة المقدار $(12X^4 + 18X^3)$ كحاصل ضرب عاملين بأكثر من طريقة كما يلى :

$$6X^3(2X + 3)$$

$$2X^2(6X^2 + 9X)$$

$$3X(4X^3 + 6X^2)$$

$$3X^2(4X^2 + 6X)$$

$$6X(2X^3 + 3X^2)$$

أي من حواصل الضرب السابقة هو تحليل للمقدار $(12X^4 + 18X^3)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر ؟ ناقش.



تعلم!

تحليل كثيرة الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ.)

كثيرة الحدود هى تعبير رياضى فيه جميع أسس متغيراته أعداد صحيحة موجبة.

أمثلة لكثيرات الحدود :

• كثيرة حدود (وحيدة الحد) : $-3xy$

• كثيرة حدود (ثنائية حدود) : $4xy^2 + 2x$

• كثيرة حدود (ثلاثية حدود) : $2x^2 + 3y + 8$

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- تحلل كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- تستخدم التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر فى حل المشكلات.
- تحل المعادلات باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

■ المفردات

- التحليل Factorization
- كثيرة الحدود Polynomial
- وحيدة الحد Monomial
- ثنائية حدود Binomial
- ثلاثية حدود Trinomial

■ فكر مع زملائك

لماذا $2X^3 - 3X^2$ كثيرة حدود، بينما $3X^{-2}$ ليست كثيرة حدود، $2 + 3X^{\frac{1}{2}}$ ليست كثيرة حدود؟

كيفية تحليل كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر

عند تحليل كثيرة الحدود $6X^2 - 15X$ بإخراج ع. م. أ. اتبع الخطوات التالية :

① حل كل حد كحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس 1 كما يلي :

$$6X^2 = 2 \times 3 \times X \times X$$

$$15X = 3 \times 5 \times X$$

∴ العامل المشترك الأكبر هو $3X$.

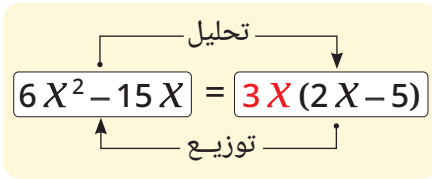
② اقسم ($6X^2 - 15X$) على العامل المشترك الأكبر ($3X$) ،

فيكون خارج القسمة ($2X - 5$)

③ اكتب العامل المشترك الأكبر خارج قوسين ،

واكتب خارج القسمة داخل القوسين

كما بالشكل المقابل.



مثال 1

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

$$15X^2y^2 - 30Xy^3 \quad ②$$

$$8X^2 - 16 \quad ①$$

$$-4X^4 + 12X^3 - 8X^2 \quad ④$$

$$2a^3b^2 + 8a^2b^3 - 16ab \quad ③$$

لاحظ أن

لإيجاد ع. م. أ. بين حدود كثيرات الحدود :

① نوجد ع. م. أ. للعوامل العددية.

② نأخذ كل متغير مكرر في كل

الحدود بأصغر أس له.

① حيث إن ع. م. أ. هو 8

$$\therefore 8X^2 - 16 = 8(X^2 - 2)$$

② حيث إن ع. م. أ. هو $15Xy^2$

$$\therefore 15X^2y^2 - 30Xy^3 = 15Xy^2(X - 2y)$$

$$2a^3b^2 + 8a^2b^3 - 16ab = 2ab(a^2b + 4ab^2 - 8) \quad ③$$

$$-4X^4 + 12X^3 - 8X^2 = -4X^2(X^2 - 3X + 2) \quad ④$$

ملاحظات

◀ إذا كان معامل الحد الأول في كثيرة الحدود سالبًا فيفضل أخذ (1-) عاملاً مشتركاً من كل حد من حدود كثيرة الحدود،

$$\text{فمثلاً: } -a + b - c = -(a - b + c)$$

◀ كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها تسمى "كثيرة حدود أولية".

$$\text{مثل: } 2X^4 + 7, \quad 3X^2 + 4y^2$$

معلومة سابقة

• يمكن توزيع الضرب على

الجمع، مثال :

$$2X(X + 4) = 2X^2 + 8X$$

• يمكن توزيع الضرب على

الطرح، مثال :

$$3X(2X - 5) = 6X^2 - 15X$$

تقييم ذاتي ①

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

$$12X^2 + 16 \quad ①$$

$$6a^4 - 5a^2 \quad ②$$

$$4X^3 - 8X^2 + 12X \quad ③$$

$$36ab - 24a^2b - 18ab^2 \quad ④$$

التحقق من صحة التحليل

يمكنك التحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها ببعض للحصول على كثيرة الحدود الأصلية.

■ تقييم ذاتي ②

أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر :
العامل المشترك الأكبر :

$$83 \times 57 + 83 \times 43 \quad ①$$

$$43 \times 87 - 43 \times 30 + (43)^2 \quad ②$$

$$13 \times 115 - 13 \times 16 + 13 \quad ③$$

■ مثال ②

أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

$$19 \times 23 + 19 \times 27 \quad ①$$

$$25 \times 158 - 25 \times 57 - 25 \quad ③$$

$$19 \times 23 + 19 \times 27 = 19 (23 + 27) = 19 \times 50 = 950 \quad ①$$

$$37 \times 163 - 37 \times 26 - 37 \times 37 = 37 (163 - 26 - 37) \quad ②$$

$$= 37 \times 100 = 3700$$

$$25 \times 158 - 25 \times 57 - 25 \times 1 = 25 (158 - 57 - 1) \quad ③$$

$$= 25 \times 100 = 2500$$

■ تقييم ذاتي ③

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

$$16a(a-b) + 24b(a-b) \quad ①$$

$$(X+2)^2 + 3(X+2) \quad ②$$

$$(X-5)^2 - X + 5 \quad ③$$

■ مثال ③

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

$$12X(X+Y) - 18Y(X+Y) \quad ①$$

$$(X+3)^2 - X - 3 \quad ③$$

■ لاحظ أن

يمكن أخذ القوس المكرر الذي بداخله كثيرة حدود كعامل مشترك.

$$① \text{ حيث إن ع. م. أ هو } 6(X+Y)$$

$$\therefore 12X(X+Y) - 18Y(X+Y) = 6(X+Y)(2X-3Y)$$

$$② \text{ حيث إن ع. م. أ هو } (X-5)$$

$$\therefore (X-5)^2 - 2(X-5) = (X-5)(X-5-2) = (X-5)(X-7)$$

$$③ (X+3)^2 - X - 3 = (X+3)^2 - (X+3) \quad ③$$

$$= (X+3)(X+3-1)$$

$$= (X+3)(X+2)$$

■ تقييم ذاتي ④

$$\text{إذا كان } (5a+4b) = 65 ,$$

$$5a(2a-3b)$$

$$+ 4b(2a-3b) = 195$$

$$\text{أوجد القيمة العددية للمقدار}$$

$$(2a-3b)$$

■ مثال ④

$$\text{إذا كان } 2X+Y=7 , \quad X+2Y=8$$

$$\text{فأوجد القيمة العددية للمقدار : } 2X(X+2Y) + Y(X+2Y)$$

يمكن استخدام التحليل بإخراج ع. م. أ لتبسيط المقدار المعطى كالتالي :

$$2X(X+2Y) + Y(X+2Y) = (X+2Y)(2X+Y)$$

$$= 8 \times 7 = 56$$

خاصية :

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وكان $a \times b = 0$ فإن :
إما $a = 0$ أو $b = 0$ أو كليهما يساوي صفرًا.

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في R :

$$X^2 = 3X \quad (3) \quad 10X^3 - 25X^2 = 0 \quad (2) \quad 3X^2 + 6X = 0 \quad (1)$$

$$\therefore 3X^2 + 6X = 0 \quad (1) \quad \therefore 3X(X + 2) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} X = 0 \\ X = -2 \end{cases} \text{ ومنها } 3X = 0 \text{ إما } 3X = 0$$

$$\text{أو } X + 2 = 0 \text{ ومنها } X = -2$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0, -2\}$$

$$(2) \quad \therefore 10X^3 - 25X^2 = 0$$

$$\therefore 5X^2(2X - 5) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} X = 0 \\ X = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ ومنها } 5X^2 = 0 \text{ إما } 5X^2 = 0$$

$$\text{أو } 2X - 5 = 0 \text{ ومنها } X = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0, \frac{5}{2}\}$$

تفكير ناقد

عند حل المعادلة $X^2 = 3X$ هل يجوز قسمة طرفي المعادلة على المتغير X ؟

$$(3) \quad \therefore X^2 = 3X \quad \therefore X^2 - 3X = 0$$

$$\therefore X(X - 3) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} X = 0 \\ X = 3 \end{cases} \text{ إما } X = 0$$

$$\text{أو } X - 3 = 0 \text{ ومنها } X = 3$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0, 3\}$$

■ تقييم ذاتي 5

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في R :

$$(1) \quad X^2 + 2X = 0$$

$$(2) \quad 2X^2 - 3X = 0$$

$$(3) \quad 15X^3 + 12X^2 = 0$$

■ التحقق من صحة الحل

للتحقق من صحة حل المعادلة

$$3X^2 + 6X = 0 \text{ ، عوض عن } X \text{ بقيمة } 0, -2 \text{ في}$$

المعادلة الأصلية كالتالي :

◀ عوض عن X بـ 0 :

$$3(0)^2 + 6(0) \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 + 0 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

أي أن 0 حلٌّ للمعادلة.

◀ عوض عن X بـ -2 :

$$3(-2)^2 + 6(-2) \stackrel{?}{=} 0$$

$$12 + (-12) \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

أي أن -2 حلٌّ للمعادلة.

◀ حاول بنفسك التحقق من صحة

الحل في كل من المعادلتين

$(2), (3)$ بالمثل المجاور.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

② أي مما يلي يمثل تحليلاً لكثيرة الحدود $16X^2 - 24X^3$ بإخراج ع. م. أ ؟

(أ) $8X(2X - 3X^2)$ (ب) $4X^2(4 - 6X)$

(ج) $8X^2(2 - 3X)$ (د) $8(2X^2 - 3X^3)$

④ $x^2y - xy^2 = \dots\dots\dots$

(أ) $xy(x - y)$ (ب) $x^2y(1 - y)$

(ج) $xy^2(x - 1)$ (د) $xy(y - x)$

⑥ إذا كان $a - b = 7$ ، $X + y = 10$ فإن :

$X(a - b) - y(b - a) = \dots\dots\dots$

(أ) 3 (ب) 17

(ج) 51 (د) 70

① ما العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود

$12X^2 - 8X$ ؟

(أ) 2 (ب) 4

(ج) $2X$ (د) $4X$

③ $6a - 8b = \dots\dots\dots$

(أ) $6(a - 2b)$ (ب) $4(2a - 4b)$

(ج) $2(3a - 4b)$ (د) $14(a - b)$

⑤ $X(a + b) + y(a + b) = \dots\dots\dots$

(أ) $(X - y)(a - b)$ (ب) $(X + y)(a + b)$

(ج) $(X - y)(a + b)$ (د) $(X + y)(a - b)$

اكتشف الخطأ :

⑦ قام كل من سامح وإسلام بحل المعادلة

$4X^2 = 8X$ كما هو موضح أمامك :

أي منهما حله صحيح ؟ ناقش.

حل إسلام :

$$4X^2 = 8X$$

$$4X^2 - 8X = 0$$

$$4X(X - 2) = 0$$

إما $4X = 0$ ومنها $X = 0$

أو $X - 2 = 0$ ومنها $X = 2$

حل سامح :

$$4X^2 = 8X$$

$$\frac{4X^2}{4X} = \frac{8X}{4X}$$

$$X = 2$$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑧ حل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع. م. أ) :

③ $15a - 25b$

⑥ $9a^2b - 6ab^2 + 3ab$

⑩ $16a^6 - 4a^4 + 12a^2$

② $4m - mn$

⑤ $-7k - 49m$

⑧ $x^2y^3 + x^2y^2 + x^3y^2$

① $12y + 4$

④ $18a + 27ab$

⑦ $2a - 4ab - 6abc$

⑨ $-4X^5 + 6X^4 - 8X^3 + 12X^2$

9 حل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

$$(2X-3)^2 - 2(2X-3) \quad (3)$$

$$(4X-1) - y(4X-1) \quad (2)$$

$$a(b+5) + 2(b+5) \quad (1)$$

$$3X+6 - (X+2)^2 \quad (6)$$

$$(X+2)^3 - 2(X+2)^2 \quad (5)$$

$$(7X-5)^2 - 7X+5 \quad (4)$$

10 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في R :

$$5X - X^2 = 0 \quad (3)$$

$$4X^2 + 8X = 0 \quad (2)$$

$$X^2 - X = 0 \quad (1)$$

$$12X^2 - 4X = 0 \quad (6)$$

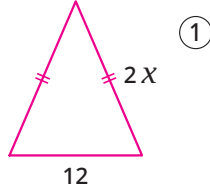
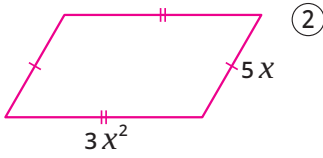
$$2X^2 - 3X = 0 \quad (5)$$

$$X^2 = 5X \quad (4)$$



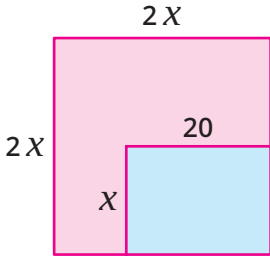
التحليل وتكامل المواد

ثالثاً



11 هندسة : أوجد محيط كل من

الشكلين المجاورين في صورة عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.



12 هندسة : مهندس لديه قطعة أرض على شكل مربع طول ضلعه (2X) م ،

أراد أن يبنى عليها بيتاً على شكل مستطيل بُعدها X م ، 20 م ، وأن يستخدم المساحة المتبقية كحديقة كما بالشكل ، أوجد مساحة الحديقة واكتب الناتج كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

13 الأحياء المائية : يقفز الدولفين لأعلى بحيث يكون ارتفاعه

بالمتر بعد زمن (t) ثانية مساوياً $(32t - 16t^2)$. اكتب ارتفاع الدولفين كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر ، ثم أوجد ارتفاعه عند $t = 1$



يجب الحفاظ على البيئة المائية من التلوث لحماية الأحياء المائية



تعمل الصناعات الصغيرة والمتوسطة على خلق فرص العمل، ودعم الاقتصاد المحلي

14 صناعة : يُنتج مصنع أدوات مدرسية نوعين من المنتجات ، كراسات

وأقلام، تكلفة الكراسة الواحدة $(6X^2y)$ جنيهاً، وتكلفة القلم الواحد $(9Xy^2)$ جنيهاً، إذا أنتج المصنع 300 من الكراسات، وأنتج 200 من الأقلام. اكتب التعبير الرياضي الذي يمثل إجمالي تكلفة التصنيع كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.



تفكير إبداعي

$$6X + 9 = c(2X + d) \quad , \quad 14X + 10 = a(7X + b) \quad (15)$$

أوجد القيمة العددية للمقدار $d^c + b^a$

مسألة مفتوحة

$$3X^2 \quad (16)$$

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للتحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر؟
ضع علامة في المربع المناسب



تحليل ثلاثية الحدود (Factorizing Trinomial)



استعد!

مع التطور الهائل في صناعة الهواتف الذكية، تتنافس الشركات العالمية على تصميم شاشات بأبعاد دقيقة تحقق راحة الاستخدام وجودة العرض. خلال مرحلة تصميم هاتف ذكي جديد، قرر المصممون أن تكون شاشة الهاتف مستطيلة الشكل، بحيث يكون طول الشاشة أكبر من عرضها بمقدار 7 سم، وأن تكون المساحة الكلية للشاشة 120 سم².

فما طول وعرض الشاشة المقترحة ؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحليل ثلاثية الحدود، ومن ثم استخدام التحليل في حل المعادلات التربيعية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

■ نواتج التعلم

- تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $X^2 + bX + c$
- تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $aX^2 + bX + c$ (حيث $a \neq \pm 1$)
- تستخدم التحليل في حل معادلات تربيعية.
- تستخدم التحليل في حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- تحليل Factorizing
- ثلاثية الحدود Trinomial
- معادلة تربيعية Quadratic equation



فكر وناقش!

يخطط عمر لإنشاء حمام سباحة مستطيل الشكل بحيث تكون مساحة أرضيته 40 م²، ومحيطها 26 م. هل يمكنك معرفة بعدي أرضية هذا الحمام ؟
◀ فكر في إيجاد عددين حاصل ضربهما 40 ومجموعهما 13 (نصف محيط أرضية الحمام).



تعلم!

أولاً تحليل ثلاثية الحدود على الصورة $X^2 + bX + c$

عند ضرب ثنائيتي الحدود $(X + 3)$ ، $(X + 2)$ نجد أن الناتج ثلاثية حدود كالتالي :

$$(X + 2)(X + 3) = X^2 + 5X + 6$$

لاحظ أن :

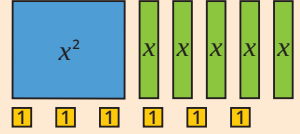
- الحد الأخير 6 في ثلاثية الحدود هو حاصل ضرب الحدين الأخيرين في ثنائيتي الحدود 3، 2.
- معامل الحد الأوسط 5 في ثلاثية الحدود هو ناتج جمع الحدين الأخيرين في ثنائيتي الحدود 3، 2.

■ نمذجة

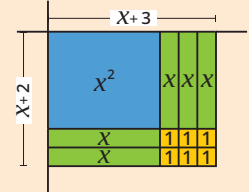
يمكنك استخدام نماذج البطاقات لتحليل

$$X^2 + 5X + 6$$

استخدم البطاقات التالية :



كون مستطيلًا مستخدمًا جميع البطاقات كالتالي :



$$\therefore X^2 + 5X + 6 = (X + 2)(X + 3)$$

عملية تحليل ثلاثية الحدود هي عملية عكسية لعملية الضرب.

فمثلاً :

$$X^2 + 5X + 6$$

ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما 6 ومجموعهما 5 ، تجد أن العددين هما 2 و 3

$$\text{حيث إن : } (2 \times 3 = 6) , (2 + 3 = 5)$$

$$\text{أي أن : } X^2 + 5X + 6 = (X + 2)(X + 3)$$

■ كيفية تحليل ثلاثية الحدود على الصورة $X^2 + bX + c$

لتحليل ثلاثية الحدود على الصورة : $X^2 + bX + c$ حيث b, c عدنان صحيحان

أوجد عددين صحيحين l, m بحيث يكون : $b = l + m$ ، $c = lm$

$$\text{ثم اكتب : } X^2 + bX + c = (X + l)(X + m)$$

■ مثال 1

حل كلًا مما يأتي :

$$X^2 - 6X + 8 \quad 2$$

$$X^2 - 7X - 18 \quad 4$$

$$X^2 + 7X + 12 \quad 1$$

$$X^2 + X - 12 \quad 3$$

■ تقييم ذاتي 1

حل كلًا مما يأتي :

$$X^2 + 5X + 4 \quad 1$$

$$X^2 - 11X + 24 \quad 2$$

$$X^2 - 3X - 28 \quad 3$$

$$X^2 + X - 42 \quad 4$$

■ لاحظ أن

عند تحليل ثلاثية الحدود $X^2 + bX + c$ على الصورة : $(X + l)(X + m)$ فإن :

1 إذا كانت c موجبة فإن l, m لهما نفس إشارة b .

2 إذا كانت c سالبة فإن l, m مختلفان في الإشارة وأكبرهما عددًا له نفس إشارة b .

1 لتحليل ثلاثية الحدود : $X^2 + 7X + 12$

ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما $(+12)$ ومجموعهما $(+7)$ $\therefore$ العدنان موجبان

$$\therefore X^2 + 7X + 12 = (X + 4)(X + 3)$$

2 لتحليل ثلاثية الحدود : $X^2 - 6X + 8$

ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما $(+8)$ ومجموعهما (-6) $\therefore$ العدنان سالبان

$$\therefore X^2 - 6X + 8 = (X - 2)(X - 4)$$

3 لتحليل ثلاثية الحدود : $X^2 + X - 12$

ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (-12) ومجموعهما $(+1)$ $\therefore$ العدنان مختلفان في الإشارة وأكبرهما عددًا إشارته موجبة

$$\therefore X^2 + X - 12 = (X + 4)(X - 3)$$

المجموع المناظر	حواصل الضرب الممكنة
X 13	(1) (12)
X 8	(2) (6)
✓ 7	(3) (4)

$\therefore$ العدنان هما $(+3)$ ، $(+4)$

المجموع المناظر	حواصل الضرب الممكنة
X -9	$(-1)(-8)$
✓ -6	$(-2)(-4)$

$\therefore$ العدنان هما (-4) ، (-2)

المجموع المناظر	حواصل الضرب الممكنة
X +11	$(-1)(12)$
X +4	$(-2)(6)$
✓ +1	$(-3)(4)$

$\therefore$ العدنان هما (-3) ، $(+4)$

المجموع المناظر	حواصل الضرب الممكنة
$\times$ -17	(1) (-18)
$\checkmark$ -7	(2) (-9)
$\times$ -3	(3) (-6)
$\therefore$ العددين هما $+2$ ، -9	

④ لتحليل ثلاثية الحدود: $X^2 - 7X - 18$
 ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما (-18) ومجموعهما (-7)
 $\therefore$ العددين مختلفان في الإشارة وأكبرهما عددياً إشارته سالبة.
 $\therefore X^2 - 7X - 18 = (X - 9)(X + 2)$

مثال 2

حل كل مما يأتي تحليلًا تامًا :

$$12X - 3X^3 - 9X^2 \quad ②$$

$$y(y + 1) - 30 \quad ④$$

$$3X^2 + 6X - 72 \quad ①$$

$$X^2 - 5Xy + 6y^2 \quad ③$$

$$X^6 - 10b^4 - 3X^3b^2 \quad ⑤$$

$$① \quad 3X^2 + 6X - 72 = 3(X^2 + 2X - 24) = 3(X + 6)(X - 4)$$

$$② \quad 12X - 3X^3 - 9X^2 = -3X^3 - 9X^2 + 12X \quad \text{«ترتيب الحدود تنازليًا حسب أسس X»}$$

$$= -3X(X^2 + 3X - 4) \quad \text{«إخراج ع. م. أ.»}$$

$$= -3X(X - 1)(X + 4) \quad \text{«تحليل ثلاثية الحدود»}$$

$$③ \quad X^2 - 5Xy + 6y^2 = (X - 3y)(X - 2y)$$

$$④ \quad y(y + 1) - 30 = y^2 + y - 30 \quad \text{«فك الأقواس»}$$

$$= (y + 6)(y - 5)$$

$$⑤ \quad X^6 - 10b^4 - 3X^3b^2 = X^6 - 3X^3b^2 - 10b^4 \quad \text{«ترتيب الحدود تنازليًا حسب أسس X»}$$

$$= (X^3 + 2b^2)(X^3 - 5b^2)$$

■ لاحظ أن

التحليل التام هو كتابة كثيرة الحدود في صورة حاصل ضرب كثيرات حدود أولية.

ثانيًا تحليل ثلاثية الحدود على الصورة $aX^2 + bX + c$ حيث $a \neq \pm 1$

مثال 3

حل كل مما يأتي :

$$2X^4 + 9X^2 + 10 \quad ③$$

$$4X^2 + X - 3 \quad ②$$

$$2X^2 + 7X + 6 \quad ①$$

$$① \quad \text{حل } 2X^2 \text{ إلى } 2X, X \leftarrow (2X \quad) (X \quad)$$

$$\text{حل 6 إلى } +1, +6 \text{ أو } +2, +3$$

مع استبعاد العوامل السالبة لأن معامل X إشارته موجبة.

■ تقييم ذاتي 3

حل كل مما يأتي :

$$① \quad 3X^2 - 11X + 6$$

$$② \quad 6X^2 + 7X + 2$$

$$③ \quad 2X^2 + X - 10$$

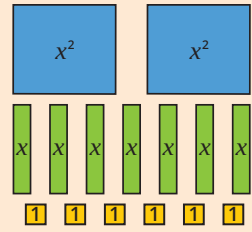
$$④ \quad 5X^2 - 28X - 12$$

■ نمذجة

يمكن استخدام نماذج البطاقات

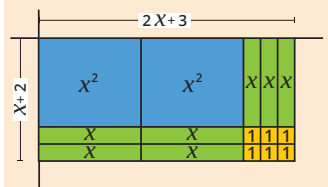
لتحليل $2X^2 + 7X + 6$

استخدم البطاقات التالية :



كون مستطيلاً مستخدماً

جميع البطاقات كالتالي :



$$\therefore 2X^2 + 7X + 6$$

$$= (2X + 3)(X + 2)$$

■ فكر مع زملائك

هل يمكن تحليل

$$3X^4 + 11X + 6$$

■ تقييم ذاتي

أوجد مجموعة حل كل من

المعادلات الآتية في R :

$$X^2 - 8X + 15 = 0 \quad (1)$$

$$X^2 - 3X = 10 \quad (2)$$

$$-X^2 + 24 = 5X \quad (3)$$

$$3X^2 + 11X - 20 = 0 \quad (4)$$

• حدد الحد الأوسط المناظر كما يلي :

$$\therefore 2X^2 + 7X + 6 = (X + 2)(2X + 3)$$

ويمكن استخدام طريقة التقاطع (المقص)

لإجراء المحاولات السابقة كما يلي :

الحد الأوسط المناظر	التحليل الممكن
$6X + 2X = 8X$ ✗	$(X + 1)(2X + 6)$
$X + 12X = 13X$ ✗	$(X + 6)(2X + 1)$
$3X + 4X = 7X$ ✓	$(X + 2)(2X + 3)$
$2X + 6X = 8X$ ✗	$(X + 3)(2X + 2)$

$$\begin{array}{c} (2X + 6) \\ \diagup \quad \diagdown \\ (X + 1) \\ 2X + 6X = 8X \\ \neq 7X \\ (X) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (2X + 1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ (X + 6) \\ 12X + X = 13X \\ \neq 7X \\ (X) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (2X + 3) \\ \diagup \quad \diagdown \\ (X + 2) \\ 4X + 3X = 7X \\ \text{(الحد الأوسط)} \\ (\checkmark) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (2X + 2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ (X + 3) \\ 6X + 2X = 8X \\ \neq 7X \\ (X) \end{array}$$

$$\therefore 2X^2 + 7X + 6 = (2X + 3)(X + 2)$$

$$(2X \quad) (2X \quad) \longleftarrow (2X, 2X) \text{ حل } 4X^2 \text{ إلى } (2)$$

$$(X \quad) (4X \quad) \longleftarrow (X, 4X) \text{ أو}$$

$$\text{حل } -3 \text{ إلى } (-1, +3) \text{ أو } (+1, -3)$$

حدد الحد الأوسط المناظر كما يلي :

الحد الأوسط المناظر	التحليل الممكن
$4X$ ✗	$(2X - 1)(2X + 3)$
$-4X$ ✗	$(2X + 1)(2X - 3)$
$-X$ ✗	$(X - 1)(4X + 3)$
X ✓	$(X + 1)(4X - 3)$
$-11X$ ✗	$(X - 3)(4X + 1)$
$11X$ ✗	$(X + 3)(4X - 1)$

$$\therefore 4X^2 + X - 3 = (X + 1)(4X - 3)$$

$$2X^4 + 9X^2 + 10 = (2X^2 + 5)(X^2 + 2) \quad (3)$$

حل المعادلات باستخدام التحليل

مثال 4

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في R :

$$6X^2 - 13X + 6 = 0 \quad (3) \quad X^2 + 30 = -13X \quad (2) \quad X^2 + 5X - 36 = 0 \quad (1)$$

$$\therefore X^2 + 5X - 36 = 0 \quad \therefore (X - 4)(X + 9) = 0 \quad (1)$$

$$X = 4 \text{ ومنها } X - 4 = 0$$

$$X = -9 \text{ ومنها } X + 9 = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{4, -9\}$$

$$\therefore X^2 + 30 = -13X$$

$$\therefore X^2 + 13X + 30 = 0 \quad (2)$$

$$\therefore (X + 3)(X + 10) = 0$$

$$\boxed{X = -3} \text{ ومنها } \quad \therefore X + 3 = 0$$

$$\boxed{X = -10} \text{ ومنها } \quad \text{أو } X + 10 = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{-3, -10\}$$

$$\therefore 6X^2 - 13X + 6 = 0$$

$$\therefore (2X - 3)(3X - 2) = 0 \quad (3)$$

$$\boxed{X = \frac{3}{2}} \text{ ومنها } \quad 2X - 3 = 0 \therefore$$

$$\boxed{X = \frac{2}{3}} \text{ ومنها } \quad \text{أو } 3X - 2 = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$$

■ التحقق من صحة الحل

يمكنك التحقق من صحة الحل بالتعويض بكل قيمة لـ X في المعادلة الأصلية للتحقق من تساوى طرفي المعادلة.

مثال 5



لدى سارة حديقة مستطيلة الشكل، مساحتها $(3X^2 + 4X - 7)$ م².

استخدم التحليل لإيجاد بُعدين ممكنين للحديقة، وإذا أرادت سارة توسيع الحديقة بحيث يكون كل بُعد أكبر مما كان عليه بمقدار 3 م،

فما هي مساحة الحديقة بعد توسيعها ؟



$$\therefore \text{مساحة الحديقة} = (3X^2 + 4X - 7) \text{ م}^2$$

$$(3X + 7)(X - 1) =$$

$$\therefore \text{عرض الحديقة} = (X - 1) \text{ م، طول الحديقة} = (3X + 7) \text{ م}$$

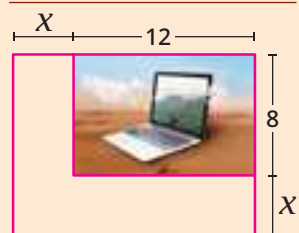
$$\text{وبعد توسيع الحديقة يكون عرضها} = (X - 1 + 3) = (X + 2) \text{ م}$$

$$\text{وطولها} = (3X + 7 + 3) = (3X + 10) \text{ م}$$

$$\therefore \text{مساحة الحديقة بعد توسيعها} = (3X + 10)(X + 2) =$$

$$= (3X^2 + 16X + 20) \text{ م}^2$$

■ تقييم ذاتي 5



طلب أحد الرعاة لحقل المدرسة السنوى زيادة طول وعرض إحدى الصور فى إعلانهم بنفس المقدار من أجل مضاعفة مساحة الصورة. إذا كانت الصورة فى الأصل بعرض 8 سم وطول 12 سم، فما هى الأبعاد الجديدة للصورة المكبرة ؟



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى مما يلي يمثل تحليل كثيرة الحدود $X^2 + X - 20$ ؟

- (أ) $(X-4)(X+5)$ (ب) $(X+4)(X+5)$ (ج) $(X-4)(X-5)$ (د) $(X+4)(X-5)$

② أى المخططات الآتية يمثل تحليل كثيرة الحدود : $9X^2 - 9X - 4$ ؟

$$\begin{array}{r} (9X - 4) \\ \times (X + 1) \\ \hline \end{array}$$

(د)

$$\begin{array}{r} (9X - 1) \\ \times (X + 4) \\ \hline \end{array}$$

(ج)

$$\begin{array}{r} (3X - 2) \\ \times (3X + 2) \\ \hline \end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{r} (3X - 4) \\ \times (3X + 1) \\ \hline \end{array}$$

(أ)

③ إذا كان : $(X-3)(X+5) = 0$ ، فأى مما يلي صحيح ؟

- (أ) $X=3$ أو $X=5$ (ب) $X=3$ أو $X=-5$
(ج) $X=-3$ أو $X=5$ (د) $X=-3$ أو $X=-5$

④ إذا كان : $X^2 + aX + 15 = (X+3)(X+b)$ ، فما قيمة a ؟

- (أ) 5 (ب) 8 (ج) 13 (د) 40

⑤ إذا كان : $X^2 - 11X + 28 = (X-a)(X-b)$ ، فما قيمة $a+b$ ؟

- (أ) -16 (ب) -11 (ج) 11 (د) 16

⑥ إذا كان : $(X-5)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(2X^2 - 7X - 15)$ ، فما العامل الآخر ؟

- (أ) $X+3$ (ب) $2X-3$ (ج) $2X+3$ (د) $X-3$

⑦ إذا كان : $3X - 2Y = 6$ ، $2X + 3Y = 5$ ، فما القيمة العددية لكثيرة الحدود $(6X^2 + 5XY - 6Y^2)$ ؟

- (أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 30

اكتشف الخطأ :

⑧ اكتشف الخطأ فى كل مما يلي وقم بتصويبه.

$$X^2 + 5X = 24 \quad \text{③}$$

$$X(X+5) = 24$$

$$\therefore X = 24 \text{ إما}$$

$$\text{أو } X+5 = 24 \text{ ومنها } X = 19$$

$$2X^2 - 5X - 3 = 9 \quad \text{②}$$

$$(2X+1)(X-3) = 0$$

$$\therefore 2X+1 = 0 \text{ ومنها } X = \frac{-1}{2}$$

$$\text{أو } X-3 = 0 \text{ ومنها } X = 3$$

$$3X^2 + 7X - 6 = 0 \quad \text{①}$$

$$(3X+2)(X-3) = 0$$

$$\therefore 3X+2 = 0 \text{ ومنها } X = \frac{-2}{3}$$

$$\text{أو } X-3 = 0 \text{ ومنها } X = 3$$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

٩ حل كلاً مما يأتي تحليلًا تامًا :

$$-X^2 + 3X + 40 \text{ ③}$$

$$y^2 + 42 + 13y \text{ ②}$$

$$X^2 - 7X + 12 \text{ ①}$$

$$5n^2 - 20n - 105 \text{ ⑥}$$

$$3X^2 + 6X - 45 \text{ ⑤}$$

$$14X - 32 + X^2 \text{ ④}$$

$$3X^2 + 14X + 15 \text{ ⑨}$$

$$2X^2 - 7X + 6 \text{ ⑧}$$

$$3a^2 - 6a - 9 \text{ ⑦}$$

$$(X + 2)(X - 5) - 8 \text{ ⑫}$$

$$5X^2 - 4y(7X + 3y) \text{ ⑪}$$

$$6X^2 + 7Xy - 3y^2 \text{ ⑩}$$

$$42X^2y^2 - 30X^2y^4 + 12X^2y^3 \text{ ⑮}$$

$$18 - 21X^2 - 9X^4 \text{ ⑭}$$

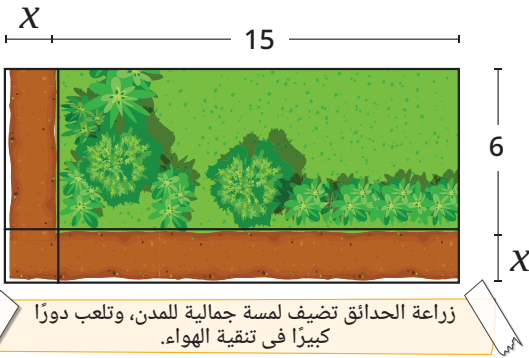
$$6X^3 - 60X - 2X^2 \text{ ⑬}$$

١٠ حل كلاً من المعادلات الآتية في R :

$$3y^2 + 17y + 10 = 0 \text{ ③}$$

$$X^2 - 21 = 4X \text{ ②}$$

$$m^2 - 14m + 45 = 0 \text{ ①}$$



زراعة الحقائق تضيف لمسة جمالية للمدن، وتلعب دورًا كبيرًا في تنقية الهواء.



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

١١ زراعة : يوسف لديه حديقة مستطيلة الشكل

بُعدها 6 م ، 15 م ، ويريد زيادة مساحتها بمقدار

46 م². فإذا زاد طول وعرض الحديقة بنفس المقدار ،

فما هي الأبعاد الجديدة للحديقة ؟



وضع السجاد في المكان المناسب بالألوان المناسبة يعكس ذوقاً رفيعاً ووعياً بأهمية التناغم البصري.

١٢ ديكور : غرفة مستطيلة الشكل مساحة أرضيتها 48 م².

أرادت فاطمة تغطية أرضيتها بسجادة طولها 6 م وعرضها

4 م مع ترك شريط عرضه X بين السجادة والحائط من جميع

الجهات. أوجد عرض هذا الشريط.

١٣ هندسة : مثلث مساحته 35 سم²، فإذا كان طول قاعدته يزيد 9 سم عن الارتفاع المناظر لها،

فما ارتفاع المثلث ؟



تفكير إبداعي

١٤ أوجد قيم b الصحيحة الموجبة التي تجعل كلاً مما يأتي قابلاً للتحليل :

$$X^2 + bX - 14 \text{ ②}$$

$$X^2 + bX + 12 \text{ ①}$$

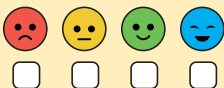
$$X^2 + 8X + b \text{ ③}$$

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لتحليل ثلاثية

الحدود ؟

ضع علامة في المربع المناسب



تحليل الحالات الخاصة (Factorizing Special Cases)



أهرامات الجيزة



استعد!

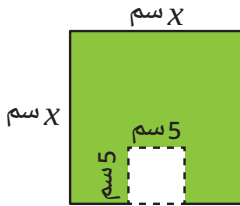
تعد أهرامات الجيزة بمصر من أعظم عجائب العالم القديم، قاعدة الهرم الأكبر مربعة الشكل وبفرض أن مساحتها $(X^2 + 6X + 9) م^2$ ، فهل يمكنك إيجاد محيطها بدلالة X ؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحليل

المربع الكامل وبعض الحالات الخاصة الأخرى، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

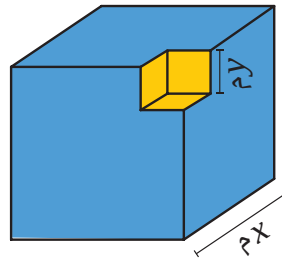


فكر وناقش!



• إذا كان لديك مربع طول ضلعه X سم، وقررت أن تقطع منه مربعًا أصغر طول ضلعه 5 سم كما بالشكل المقابل، فهل يمكنك التعبير عن مساحة الجزء المتبقى كحاصل ضرب عاملين؟ ناقش.

• إذا كان لديك مكعب طول حرفه X م، وقررت أن تقطع منه مكعبًا أصغر طول حرفه y م كما بالشكل المقابل، فهل يمكنك التعبير عن حجم الجزء المتبقى كحاصل ضرب عاملين؟ ناقش.



تعلم!

أولاً تحليل ثلاثية الحدود التي تمثل مربعًا كاملاً

إذا كانت ثلاثية الحدود مرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا حسب أسس أحد رموزها فإنها تمثل مربعًا كاملاً إذا كان :

- الحد الأول مربع كامل.
- الحد الثالث مربع كامل.
- الحد الأوسط يساوي $(\sqrt{\text{الحد الثالث}} \times \sqrt{\text{الحد الأول}}) \times 2$.

■ نواتج التعلم

- تحليل ثلاثية الحدود التي تمثل مربعًا كاملاً.
- تحليل الفرق بين مربعين.
- تحليل الفرق بين مكعبين.
- تحليل مجموع مكعبين.
- تستخدم التحليل لتسهيل إجراء العمليات الحسابية.
- تستخدم التحليل لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- المربع الكامل
- Perfect square
- الفرق بين مربعين
- Difference of two squares
- الفرق بين مكعبين
- Difference of two cubes
- مجموع مكعبين
- Sum of two cubes

• تحليل ثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً هو كتابتها على صورة حاصل ضرب عاملين متساويين (أي مربع أحد عامليها المتساويين).

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned} \quad \text{أي أن :}$$

مثال 1

بين أيًا من كثيرات الحدود الآتية تمثل مربعاً كاملاً وأيها ليست مربعاً كاملاً، ثم حلل كثيرة الحدود التي على صورة مربع كامل :

$$\begin{aligned} &X^2 - 6X - 9 \quad ② \\ &25X^4 - 30X^2y + 9y^2 \quad ④ \end{aligned} \quad \begin{aligned} &4X^2 + 20X + 25 \quad ① \\ &X^2 + 9X + 81 \quad ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore &4X^2 = (2X)^2 \quad \text{«مربع كامل»} \\ &25 = (5)^2 \quad \text{«مربع كامل»} \\ &2(2X)(5) = 20X \quad \text{«الحد الأوسط»} \end{aligned} \quad ①$$

∴ كثيرة الحدود $(4X^2 + 20X + 25)$ تمثل مربعاً كاملاً ويكون :

$$4X^2 + 20X + 25 = (\sqrt{4X^2} + \sqrt{25})^2 = (2X + 5)^2$$

نفس إشارة
الحد الأوسط

② كثيرة الحدود $(X^2 - 6X - 9)$ ليست مربعاً كاملاً لأن الحد الثالث (-9) سالب أي ليس مربعاً كاملاً.

$$\begin{aligned} \therefore &X^2 = (X)^2 \quad \text{«مربع كامل»} \\ &81 = (9)^2 \quad \text{«مربع كامل»} \\ &2(X)(9) = 18X \quad \text{«لا يساوي الحد الأوسط»} \end{aligned} \quad ③$$

∴ كثيرة الحدود $(X^2 + 9X + 81)$ ليست مربعاً كاملاً.

لأن الحد الأوسط لا يساوي $(\pm 2 \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}})$

$$\begin{aligned} \therefore &25X^4 = (5X^2)^2 \quad \text{«مربع كامل»} \\ &9y^2 = (3y)^2 \quad \text{«مربع كامل»} \\ &-2(5X^2)(3y) = -30X^2y \quad \text{«الحد الأوسط»} \end{aligned} \quad ④$$

∴ كثيرة الحدود $(25X^4 - 30X^2y + 9y^2)$ تمثل مربعاً كاملاً ويكون :

$$25X^4 - 30X^2y + 9y^2 = (\sqrt{25X^4} - \sqrt{9y^2})^2 = (5X^2 - 3y)^2$$

نفس إشارة
الحد الأوسط

■ تقييم ذاتي ①

بين أيًا من كثيرات الحدود الآتية تمثل مربعاً كاملاً وأيها ليست مربعاً كاملاً، ثم حلل كثيرة الحدود التي على صورة مربع كامل :

$$\begin{aligned} &16b^2 - 8b + 1 \quad ① \\ &5x^2 + 20x + 4 \quad ② \\ &x^2 + 2xy - y^2 \quad ③ \\ &9x^4 - 12x^2y + 4y^2 \quad ④ \end{aligned}$$

■ تقييم ذاتي ②

أوجد قيمة a التي تجعل كلاً مما يأتي مربعاً كاملاً :
 $X^2 - 10X + a$ ①
 $4X^2 + aX + 49$ ②

■ مثال 2

أوجد قيمة a التي تجعل كلاً مما يأتي مربعاً كاملاً :

$$X^2 - aX + 64 \quad ② \quad X^2 + 14X + a \quad ①$$

■ لاحظ أن

- ① الحد الأوسط يساوي
 $\pm 2 \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$
- ② $\frac{\text{الحد الأول}}{\text{مربع الحد الأوسط}}$
 $\frac{\text{الحد الثالث}}{4 \times (\text{الحد الأوسط})}$
- ③ $\frac{\text{الحد الثالث}}{\text{مربع الحد الأوسط}}$
 $\frac{\text{الحد الأول}}{4 \times (\text{الحد الأوسط})}$

① ✓ لكي تكون كثيرة الحدود مربعاً كاملاً

$$a = \frac{(14X)^2}{4(X^2)} = \frac{196X^2}{4X^2} = 49$$

② لكي تكون كثيرة الحدود مربعاً كاملاً

$$\begin{aligned} -aX &= \pm 2(\sqrt{X^2})(\sqrt{64}) \\ &= \pm 16X \\ \therefore a &= \pm 16 \end{aligned}$$

■ ثانيًا تحليل الفرق بين مربعين

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

■ مثال 3

حل كلاً مما يأتي :

$$1 - 100X^2Y^2 \quad ③ \quad 9X^4 - 16Y^2 \quad ② \quad X^2 - 9 \quad ①$$

$$X^2 - 9 = (X - 3)(X + 3) \quad ① \quad \checkmark$$

$$9X^4 - 16Y^2 = (3X^2 - 4Y)(3X^2 + 4Y) \quad ②$$

$$1 - 100X^2Y^2 = (1 - 10XY)(1 + 10XY) \quad ③$$

■ ثالثًا تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

■ مثال 4

حل كلاً مما يأتي :

$$1 + 512X^3Y^3 \quad ③ \quad a^6 - 8b^3 \quad ② \quad X^3 - 27 \quad ①$$

$$X^3 - 27 = (X - 3)(X^2 + 3X + 9) \quad ① \quad \checkmark$$

$$a^6 - 8b^3 = (a^2 - 2b)(a^4 + 2a^2b + 4b^2) \quad ②$$

$$1 + 512X^3Y^3 = (1 + 8XY)(1 - 8XY + 64X^2Y^2) \quad ③$$

■ تقييم ذاتي ③

حل كلاً مما يأتي :

$$X^2 - 1 \quad ①$$

$$16X^2 - 9 \quad ②$$

$$25X^2 - 36Y^2 \quad ③$$

$$X^2Y^2 - 4 \quad ④$$

■ فكر

هل يمكن تحليل مجموع مربعين $(X^2 + Y^2)$ ؟

■ تقييم ذاتي ④

حل كلاً مما يأتي :

$$X^3 + 1 \quad ①$$

$$m^3 - 343n^3 \quad ②$$

$$8X^6 - 27Y^3 \quad ③$$

$$27 - a^3b^3 \quad ④$$

■ تقييم ذاتي 5

حل كل ما يأتي :

$$y^2 - \frac{1}{9} \quad (1)$$

$$27x^3 - \frac{1}{64} \quad (2)$$

$$c^3 + \frac{1}{8} \quad (3)$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} \quad (4)$$

■ مثال 5

حل كل ما يأتي :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{25}y^2 \quad (1)$$

$$a^3b^3 + \frac{1}{216} \quad (3)$$

$$8y^3 - \frac{1}{27} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} \quad (4)$$

■ لاحظ أن

يمكن تحليل كثيرات حدود
تحتوى على معاملات وثوابت
نسبية إلى حاصل ضرب
عوامل كل عامل منها عبارة
عن كثيرة حدود تحتوى أيضًا
على معاملات وثوابت نسبية.

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{25}y^2 = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y) \quad (1)$$

$$8y^3 - \frac{1}{27} = (2y - \frac{1}{3})(4y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}) \quad (2)$$

$$a^3b^3 + \frac{1}{216} = (ab + \frac{1}{6})(a^2b^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{36}) \quad (3)$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = (\frac{1}{2}x + \frac{2}{3})^2 \quad (4)$$

■ تقييم ذاتي 6

حل كل ما يأتي تحليلًا تامًا :

$$8x^3 - 18x \quad (1)$$

$$75x^3y + 60x^2y + 12xy \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 \quad (3)$$

$$32x^3(3a+b) - 50x(3a+b) \quad (4)$$

■ مثال 6

حل كل ما يأتي تحليلًا تامًا :

$$5x^5 - 320x^2 \quad (1)$$

$$12x - 9x^2 - 4 \quad (3)$$

$$16x^4 - y^4 \quad (2)$$

$$64 - (a+b)^2 \quad (4)$$

■ لاحظ أن

يتم أخذ العامل المشترك
الأكبر أولًا ثم نحلل
القوس الناتج إن أمكن.

$$5x^5 - 320x^2 = 5x^2(x^3 - 64) \quad (1)$$

$$= 5x^2(x-4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$16x^4 - y^4 = (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2) \quad (2)$$

$$= (2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$$

$$رتب أولًا كثيرة الحدود تنازليًا حسب أسس x كالتالى : \quad (3)$$

$$-9x^2 + 12x - 4 = -(9x^2 - 12x + 4)$$

$$= -(3x - 2)^2$$

$$64 - (a+b)^2 = (8 + (a+b))(8 - (a+b)) \quad (4)$$

$$= (8 + a + b)(8 - a - b)$$

■ لاحظ أن

كثيرة الحدود
($-9x^2 + 12x - 4$)
ليست مربعًا كاملاً،
أما كثيرة الحدود
($9x^2 - 12x + 4$)
فهى مربع كامل.

■ تقييم ذاتي 7

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتي :

$$\begin{aligned} & 1 \quad (49)^2 - 2(49)(39) + (39)^2 \\ & 2 \quad (87)^2 - (13)^2 \end{aligned}$$

■ مثال 7

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتي :

$$1 \quad (57)^2 + 2(57)(43) + (43)^2 \quad 2 \quad (99)^2 - 1$$

$$1 \quad (57)^2 + 2(57)(43) + (43)^2 = (57 + 43)^2 = (100)^2 = 10000$$

$$2 \quad (99)^2 - 1 = (99 + 1)(99 - 1) = 100 \times 98 = 9800$$

■ مثال 8

إذا كان : $4x^2 - 9y^2 = 115$ ، $2x - 3y = 5$

أوجد القيمة العددية للمقدار : $2x + 3y$

$$\therefore 4x^2 - 9y^2 = 115$$

$$\therefore 5(2x + 3y) = 115$$

$$\therefore (2x - 3y)(2x + 3y) = 115$$

$$\therefore 2x + 3y = 23$$

■ تقييم ذاتي 8

إذا كان :

$$b - a = -3 \quad , \quad a^2 - b^2 = 12$$

أوجد القيمة العددية للمقدار :

$$a + b$$



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$2 \quad \text{إذا كان : } aX^2 - b = (3X - 2)(3X + 2) \text{ فما قيمة } a + b ؟$$

- (أ) -13 (ب) 13
(ج) -5 (د) 5

$$4 \quad \text{إذا كانت كثيرة الحدود } (4X^2 + kX + 1) \text{ مربعاً كاملاً، فما قيمة } k ؟$$

- (أ) 1 (ب) 2
(ج) 4 (د) 8

$$6 \quad \text{إذا كان : } X^2 - y^2 = -16 \text{ ، } X - y = -2 \text{ فما الوسط الحسابي للعددين } X \text{ ، } y ؟$$

- (أ) 2 (ب) 4
(ج) 8 (د) 16

$$1 \quad \text{إذا كان : } X^2 - b^2 = (X - 3)(X + 3) \text{ فما قيمة } b ؟$$

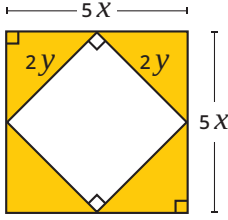
- (أ) 1 (ب) 3
(ج) 6 (د) 9

$$3 \quad \text{إذا كان : } aX^3 - 27 = (2X - 3)(4X^2 + bX + 9) \text{ فما قيمة } a \text{ ، } b ؟$$

- (أ) 6 (ب) 12
(ج) 24 (د) 48

$$5 \quad \text{إذا كانت كثيرة الحدود } (kX^2 - 12X + 9) \text{ مربعاً كاملاً، فما قيمة } k ؟$$

- (أ) 4 (ب) 4
(ج) 2 (د) 2



7) أى العبارات الآتية تمثل مساحة المنطقة الملونة بالشكل المقابل ؟

- (أ) $5X^2 - 2y^2$ (ب) $25X - 4y$ (ج) $(5X - 2y)^2$ (د) $(5X - 2y)(5X + 2y)$

◀ اكتشف الخطأ :

8) قام كل من عمر وخالد بتحليل $(X^3 - 8)$ كالآتى :

حل خالد :

$$X^3 - 8 = (X - 2)(X^2 - 4X + 4)$$

حل عمر :

$$X^3 - 8 = (X - 2)(X^2 - 2X + 4)$$

أى منهما كان حله صحيحًا ؟ قم بتصويب الخطأ إن وُجد.



تطبيق المفاهيم

ثانياً

9) حل كلاً مما يأتى :

③ $9X^2 + 6X + 1$

② $b^2 - 14b + 49$

① $a^2 + 18a + 81$

⑥ $k^2 - 36m^2$

⑤ $1 - 4a^2b^2$

④ $25 - 9X^2$

⑨ $64X^3 - 125y^3$

⑧ $X^3 + 27$

⑦ $y^3 - 8$

10) حل كلاً مما يأتى تحليلًا تامًا :

③ $121y - y^3$

② $2Xy^4 - 16yX^4$

① $X^4 + 8X^3 + 16X^2$

⑥ $X^4 - 81$

⑤ $-27X^2 + 75$

④ $20X^3 - 45X$

⑨ $4X^4 + 4000X$

⑧ $aX^4 - 343aXb^3$

⑦ $54X^3 + 16$

11) حل كلاً مما يأتى تحليلًا تامًا :

③ $\frac{1}{5}X^2 - 5$

② $125X^3 + \frac{1}{8}$

① $X^2 - \frac{4}{81}$

⑥ $6a^2(X + 2y) - 24b^2(X + 2y)$

⑤ $(X + 3)^2 - 16$

④ $(X + 3)^3 + 64$

⑨ $m^6 - 64n^3$

⑧ $X^6 - 7X^3 - 8$

⑦ $X^4 - 13X^2 + 36$

⑪ $X^6 - 64y^6$

⑩ $4X^{16} - 16y^4$

12) حل كلاً من المعادلات الآتية فى R :

③ $X^2 + 6X = -9$

② $X^3 = 25X$

① $4X^2 + 1 = 4X$

13) إذا كان : $a - b = 3$ ، $ab = 10$

أوجد القيمة العددية للمقدار : $a^3 - b^3$



تخزين البيانات وتنظيمها بصورة صحيحة
يسهل إدارتها ويعزز أمن المعلومات.

14) تكنولوجيا : يتم تخزين البيانات فى وحدات تخزين

على شكل وحدات مكعبة.
وحدة تخزين من الجيل الأول تسع $216 X^3$ وحدة بيانات،
ووحدة تخزين من الجيل الثانى تسع $343 Y^3$ وحدة بيانات.
أوجد مجموع سعتيهما فى صورة حاصل ضرب عاملين.

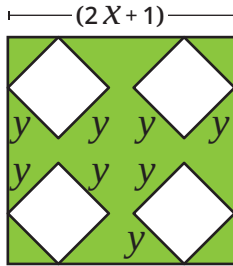


يسهم السفر فى تعزيز التفاهم والتسامح بين الثقافات
المختلفة، ويعمق الوعى بقيمة التنوع الثقافى.

15) علوم : تُوصف صيغة فرق الضغط P أعلى وأسفل جناح الطائرة

$$P = \frac{1}{2} d v^2 - \frac{1}{2} d u^2$$

بالصيغة
حيث d هى كثافة الهواء، v هى سرعة الهواء المار أعلى
الجناح، u هى سرعة الهواء المار أسفله.
اكتب هذه الصيغة فى صورة حاصل ضرب كثيرات حدود أولية.



16) استثمار : قامت شركة مقاولات بتقسيم قطعة أرض مربعة الشكل طول

ضلعها $(2X + 1)$ م إلى 4 قطع مربعة طول ضلع كل منها y م كما بالشكل
المقابل وترك باقى الأرض مساحة خضراء.
اكتب مساحة المنطقة الملونة كحاصل ضرب عدة عوامل.

17) هندسة : إذا كان حجم متوازي مستطيلات هو $X^4 - 625$ وحدة مكعبة.

باستخدام التحليل كيف يمكنك إيجاد الأبعاد الممكنة له ؟

18) زراعة : حديقة تتكون من قطعتى أرض متجاورتين، الكبرى

على شكل مربع مساحته $(25X^2 + 10X + 1)$ م²، والصغرى
على شكل مربع مساحته $(4X^2 + 4X + 1)$ م²، ويراد عمل
سور حول الحديقة.

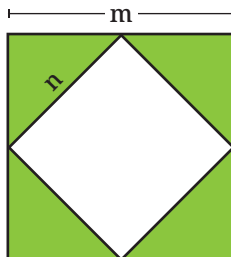
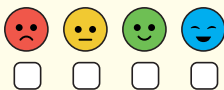
أوجد طول السور بدلالة X ، ثم أوجد محيط الحديقة إذا كانت
 X تساوى 10 م.



قيم فهمك!

ما مدى فهمك لتحليل الحالات
الخاصة ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



تفكير إبداعى

19) فى الشكل المقابل :

مجموع محيطى المربعين يساوى 76 سم،
ومساحة المنطقة الملونة تساوى 57 سم².
كم يساوى $(m - n)$ ؟

التحليل بالتقسيم (Factorizing by Grouping)



جامعة القاهرة



استعد!

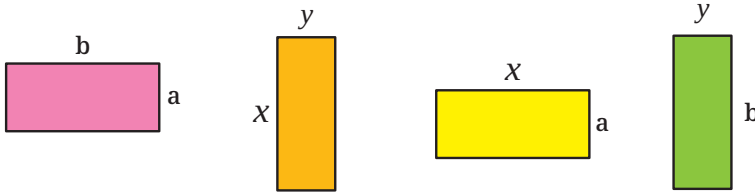
تعد المكتبة المركزية في جامعة القاهرة من أهم المنشآت التعليمية والثقافية داخل الجامعة، وهي واحدة من أكبر المكتبات الجامعية في العالم العربي. وهي تستوعب أكثر من ألف قارئ في نفس الوقت، فإذا كانت مساحة الأرض المستطيلة المقامة عليها هي $(3X^3 - 6X^2 + 4X - 8) \text{ م}^2$ فكيف يمكن تحديد أبعاد ممكنة لهذه الأرض؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية التحليل بالتقسيم؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

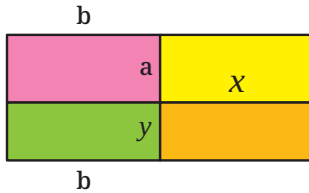


فكر وناقش!

فيما يلي أربعة مستطيلات بأبعادهم كالتالي :



تم ترتيب هذه المستطيلات الأربعة لتكون مستطيلًا كبيرًا كما بالشكل. ما هي مساحة المستطيل الكبير؟



إجابة مريم :

مساحة المستطيل تساوي
 $(b + X)(a + y)$

إجابة باسم :

مساحة المستطيل تساوي
 $a b + X y + a X + b y$

من منهم على صواب؟ ناقش، وماذا تستنتج؟



تعلم!

التحليل بالتقسيم

يمكن تحليل كثيرة الحدود المكونة من أربعة حدود باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى

قسّم كثيرة الحدود إلى ثنائيتي حدود، بحيث تستطيع تحليل كل ثنائية حدود، ثم أخرج ثنائية الحدود المكررة كعامل مشترك.

■ نواتج التعلم

- تحليل كثيرة حدود عن طريق التقسيم.
- تعرف إكمال المربع.
- تستخدم إكمال المربع في التحليل، وحل المعادلات.
- تستخدم التحليل بالتقسيم في حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- التحليل بالتقسيم
- Factorizing by grouping
- إكمال المربع
- Completing the square

■ تقييم ذاتي ①

حلل كلاً مما يأتي تحليلًا تاماً :

$$x^2 + 4x + b x + 4b \quad ①$$

$$xy + 12 - 3x - 4y \quad ②$$

$$2x^2y^2 + 24xy \quad ③$$

$$-6xy^2 - 8x^2y$$

$$x^3 + 6x^2 - 4x - 24 \quad ④$$

■ مثال 1

حلل كلاً مما يأتي تحليلًا تاماً :

$$ax + by + ay + bx \quad ①$$

$$3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \quad ③$$

$$2x^3y - 6x^2y - 18xy + 54y \quad ⑤$$

$$3x^2 - 3y + xy - 9x \quad ②$$

$$x^2 - 5x - y^2 + 5y \quad ④$$

■ حل آخر

$$\begin{aligned} ax + by + ay + bx \\ &= (ax + bx) + (by + ay) \\ &= x(a + b) + y(b + a) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + by + ay + bx \\ &= (ax + ay) + (bx + by) \\ &= a(x + y) + b(y + x) \\ &= (x + y)(a + b) \end{aligned}$$

■ لاحظ أن

في رقم ② إذا تم التقسيم كالتالي :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y + xy - 9x \\ &= (3x^2 - 3y) + (xy - 9x) \\ &= 3(x^2 - y) + x(y - 9) \end{aligned}$$

لا يوجد عامل مشترك

ولذلك يفشل هذا التقسيم ونحاول التقسيم بترتيب آخر.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y + xy - 9x \\ &= (3x^2 - 9x) + (xy - 3y) \\ &= 3x(x - 3) + y(x - 3) \\ &= (x - 3)(3x + y) \end{aligned} \quad ②$$

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \\ &= (3x^3 + 2x^2) + (-3x - 2) \\ &= x^2(3x + 2) - (3x + 2) \\ &= (3x + 2)(x^2 - 1) \\ &= (3x + 2)(x - 1)(x + 1) \end{aligned} \quad ③$$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - y^2 + 5y &= (x^2 - y^2) + (5y - 5x) \\ &= (x - y)(x + y) + 5(y - x) \\ &= (x - y)(x + y) - 5(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 5) \end{aligned} \quad ④$$

■ لاحظ أن

$$y - x = -(x - y)$$

$$\begin{aligned} 2x^3y - 6x^2y - 18xy + 54y &= 2y(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) \quad ⑤ \\ &= 2y[(x^3 - 3x^2) + (-9x + 27)] \\ &= 2y[x^2(x - 3) - 9(x - 3)] \\ &= 2y(x - 3)(x^2 - 9) \\ &= 2y(x - 3)(x - 3)(x + 3) \\ &= 2y(x - 3)^2(x + 3) \end{aligned}$$

ملاحظة

يمكن تحليل ثلاثية الحدود التي على الصورة : $aX^2 + bX + c$ ، حيث $(a \neq 1)$ باستخدام التحليل بالتقسيم كما يلي :

- ① أوجد عاملين حاصل ضربهما (ac) ومجموعهما (b) .
- ② أعد كتابة (bX) في صورة ناتج جمع هذين العاملين.
- ③ استخدم التحليل بالتقسيم.

مثال 2

حل $3X^2 + 8X + 4$ باستخدام التحليل بالتقسيم.

$$\because a=3, b=8, c=4$$

أوجد عددين حاصل ضربهما $(a \cdot c)$ 12 ومجموعهما (b) 8 . العددين هما 2 ، 6 .
أعد كتابة $8X$ في صورة جمع $(6X + 2X)$ ثم استخدم التحليل بالتقسيم كما يلي :

$$3X^2 + 8X + 4 = 3X^2 + 6X + 2X + 4 = (3X^2 + 6X) + (2X + 4)$$

$$= 3X(X + 2) + 2(X + 2)$$

$$= (X + 2)(3X + 2)$$

الطريقة الثانية

قسّم كثيرة الحدود إلى ثلاثية حدود تمثل مربعاً كاملاً والحد الرابع يجب أيضاً أن يكون مربعاً كاملاً، بحيث يتم تحليل كثيرة الحدود الأصلية كفرق بين مربعين.

مثال 3

حلل كلاً مما يأتي تحليلًا تاماً :

$$4m^2 - n^2 + 10nk - 25k^2 \quad ② \quad x^2 + 16y^2 - 8xy - 49 \quad ①$$

$$x^2 + 16y^2 - 8xy - 49 = (x^2 - 8xy + 16y^2) - 49$$

$$= (x - 4y)^2 - (7)^2$$

$$= (x - 4y - 7)(x - 4y + 7)$$

$$4m^2 - n^2 + 10nk - 25k^2 = 4m^2 - (n^2 - 10nk + 25k^2) \quad ②$$

$$= 4m^2 - (n - 5k)^2$$

$$= [2m - (n - 5k)][2m + (n - 5k)]$$

$$= (2m - n + 5k)(2m + n - 5k)$$

■ تقييم ذاتي ②

استخدم التحليل بالتقسيم لتحليل كل من ثلاثيتي الحدود الآتيتين :

$$2X^2 - X - 28 \quad ①$$

$$6X^2 + 19X + 15 \quad ②$$

■ تقييم ذاتي ③

حلل كلاً مما يأتي تحليلًا تاماً :

$$x^2 - 12xy + 36y^2 - 4 \quad ①$$

$$x^2 + y^2 - 64 + 2xy \quad ②$$

■ فكر

عند تحليل كثيرتي الحدود الآتيتين بالتقسيم :

$$x^2 + 4x - y^2 + 4 \quad ①$$

$$x^2 + 4x - y^2 + 4y \quad ②$$

ناقش طريقة تقسيم كل منهما.

إكمال المربع

إكمال المربع هو عملية إضافة حد إلى ثنائية حدود لتصبح ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

يمكن أن يتم إكمال المربع بإحدى الطريقتين الآتيتين :

1 **إما إضافة (الحد الأوسط) = (الحد الثالث × الحد الأول) × 2**

فمثلاً: $(X^2 + 49)$ يُضاف إليها $\pm 14X = \pm 2\sqrt{X^2} \sqrt{49}$

فيكون $(X^2 \pm 14X + 49)$ مربعاً كاملاً أى يكتب على الصورة $(X \pm 7)^2$

2 **وإما إضافة (الحد الثالث) = مربع الحد الأوسط**
الحد الأول × 4

فمثلاً: $(X^2 + 10X)$ يُضاف إليها $25 = \frac{(10X)^2}{4X^2}$

فيكون $(X^2 + 10X + 25)$ مربعاً كاملاً أى يكتب على الصورة $(X + 5)^2$

والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال 4

حل كلاً مما يأتى :

2 $X^4 + 15X^2y^2 + 64y^4$

1 $81X^4 + 4$



1

$81X^4 + 4 = 81X^4 + 4 + 36X^2 - 36X^2$

« إضافة وطرح $36X^2 = 2\sqrt{81X^4} \sqrt{4}$ »

$= (81X^4 + 36X^2 + 4) - (36X^2)$

$= (9X^2 + 2)^2 - (6X)^2$

$= (9X^2 + 2 - 6X)(9X^2 + 2 + 6X)$

$= (9X^2 - 6X + 2)(9X^2 + 6X + 2)$

2

$X^4 + 15X^2y^2 + 64y^4 = X^4 + 15X^2y^2 + 64y^4 + 16X^2y^2 - 16X^2y^2$

« إضافة وطرح $16X^2y^2 = 2\sqrt{X^4} \sqrt{64y^4}$ »

$= (X^4 + 16X^2y^2 + 64y^4) + 15X^2y^2 - 16X^2y^2$

$= (X^2 + 8y^2)^2 - X^2y^2$

$= (X^2 + 8y^2 - Xy)(X^2 + 8y^2 + Xy)$

■ تقييم ذاتى 4

حل كلاً مما يأتى :

1 $X^4 + 64$

2 $4X^4 + 11X^2 + 9$

■ لاحظ أن

لتحليل كثيرات الحدود التى تشتمل على حدين على الأقل كل منهما مربع كامل، وأسس متغيراتها تكون 4 أو مضاعفاتهما، نستخدم طريقة إكمال المربع وذلك بإضافة وطرح (ضعف حاصل ضرب جذرى الحدين المربعين) حتى لا تؤثر على قيمة كثيرة الحدود، ثم يتم التحليل بالتقسيم.

■ تقييم ذاتي ⑤

أوجد مجموعة حل المعادلة :
 $X^2 - 2X - 4 = 0$ في R

■ مثال 5

أوجد مجموعة حل المعادلة : $X^2 - 8X + 3 = 0$ في R



■ لاحظ أن

لا نستطيع حل هذا المثال باستخدام تحليل ثلاثية الحدود، ولكن يمكن حله باستخدام إكمال المربع.

$$\therefore X^2 - 8X + 3 = 0$$

$$\therefore X^2 - 8X = -3$$

$$\text{بإضافة } 16 = \frac{(-8X)^2}{4X^2} \text{ إلى طرفي المعادلة}$$

$$\therefore X^2 - 8X + 16 = -3 + 16$$

$$\therefore (X-4)^2 = 13 \quad \therefore X-4 = \pm\sqrt{13}$$

$$\therefore X = 4 \pm \sqrt{13}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{4 - \sqrt{13}, 4 + \sqrt{13}\}$$

■ مثال 6

إذا كان $X^2 + 3Y = 31$ ، $2X - Y = 8$ ،

فما القيمة العددية للمقدار : $2X^3 - X^2Y + 6XY - 3Y^2$ ؟

$$2X^3 - X^2Y + 6XY - 3Y^2 = (2X^3 - X^2Y) + (6XY - 3Y^2)$$

$$= X^2(2X - Y) + 3Y(2X - Y)$$

$$= (2X - Y)(X^2 + 3Y) = 8 \times 31 = 248$$



■ تقييم ذاتي ⑥

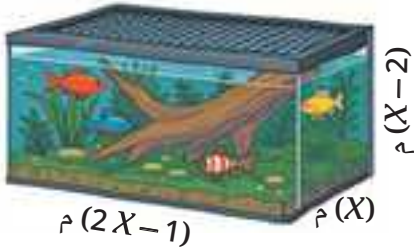
إذا كان $3b - 2a = 1$ ،

$$a^2 - 2b = 10$$
 ،

أوجد القيمة العددية للمقدار :

$$2a^3 - 3a^2b - 4ab + 6b^2$$

■ مثال 7



حوض زجاجي يُستخدم للزينة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالمتري كما هي بالشكل، إذا كان حجم الحوض يساوي 5 م³، فأوجد أبعاده بالمتري.

حجم الحوض = 5 م³ ✓

$$\therefore X(X-2)(2X-1) = 5$$

$$\therefore X(2X^2 - 5X + 2) = 5$$

$$\therefore (2X^3 - 5X^2) + (2X - 5) = 0$$

$$\therefore (2X - 5)(X^2 + 1) = 0$$

$$\therefore 2X^3 - 5X^2 + 2X - 5 = 0$$

$$\therefore X^2(2X - 5) + (2X - 5) = 0$$

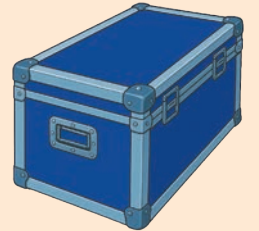
$$\therefore \text{إما } 2X - 5 = 0 \text{ ومنها } X = \frac{5}{2}$$

$$\text{أو } X^2 + 1 = 0 \text{ ومنها } X^2 = -1 \text{ (مرفوض)}$$

$\therefore$ أبعاد الحوض هي 0.5 م ، 2.5 م ، 4 م.

■ تقييم ذاتي ⑦

تصنع إحدى الشركات وحدات تخزين أدوات التصوير للرحلات، الوحدة على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $(X-1)$ قدم وارتفاعه X قدم.



إذا كان حجم الوحدة يساوي 2 قدم مكعب، أوجد أبعاد وحدة التخزين.



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 $X^2 - aX + bX - a b = \dots\dots\dots$

(أ) $(X - a)(X - b)$ (ب) $(X - a)(X + b)$ (ج) $(X + a)(X - b)$ (د) $(X + a)(X + b)$

2 إذا كان : $(X + a)(Y + b) = X^2 + 5X + 7Y + 35$ ، فما قيمة $a - b$ ؟

(أ) 2 (ب) -2 (ج) 12 (د) -12

3 إذا كان : $(X + a)(X + b)(X + c) = X^3 + 5X^2 - 4X - 20$ ، فما قيمة $a + b + c$ ؟

(أ) 2 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

4 إذا كان : $X + b = 5$ ، $X^2 + a = 12$ ، فما القيمة العددية للمقدار $(X^3 + bX^2 + aX + a b)$ ؟

(أ) 7 (ب) 17 (ج) 30 (د) 60

5 عند إكمال المربع للمقدار : $(X^2 + 9)$ نضيف إليه

(أ) $\pm 3X$ (ب) $\pm 6X$ (ج) $\pm 9X$ (د) $\pm 12X$

6 عند إكمال المربع للمقدار : $(X^2 + 12X)$ نضيف إليه

(أ) ± 9 (ب) ± 36 (ج) 9 (د) 36

7 إذا كان : $(X^2 + 2X + 2)$ أحد عاملي المقدار $(X^4 + 4)$ فما العامل الآخر ؟

(أ) $X^2 - 2X + 2$ (ب) $X^2 - 2X - 2$ (ج) $X^2 + X + 2$ (د) $X^2 - X + 2$



تطبيق المفاهيم

ثانياً

8 حل كل ما يأتي تحليلًا تامًا :

1 $aX + bX + b + a$ 2 $12y + 2X - 8Xy - 3$ 3 $6m - n + 3mn - 2$

4 $x^2 - 2x - xy + 2y$ 5 $11x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 6 $45x^3 + 20x^2 + 9x + 4$

9 حل كلًا من ثلاثيات الحدود الآتية باستخدام التحليل بالتقسيم :

1 $2x^2 + 5x + 3$ 2 $4x^2 - 7x - 2$ 3 $2x^2 + 13x + 15$

10 حل كلاً مما يأتي تحليلًا تامًا :

$$\begin{aligned} X^2 - a^2 - 2X + 1 & \textcircled{2} \\ 4X^2 - 12Xy + 9y^2 - 49 & \textcircled{4} \\ m^3 + n^3 - m - n & \textcircled{6} \\ 16X^2 - 25a^2 + y^2 + 8Xy & \textcircled{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^2 - y^2 - 6X - 6y & \textcircled{1} \\ X^4 + 2X^3 - 9X^2 - 18X & \textcircled{3} \\ 5a^2b - 10a^2b^2 + 4b^2 - 8b^3 & \textcircled{5} \\ 4k^4 - 49k^2 + 14k - 1 & \textcircled{7} \end{aligned}$$

11 حل كلاً مما يأتي تحليلًا تامًا :

$$\begin{aligned} 64X^4 + y^4 & \textcircled{3} \\ X^4 - 11X^2 + 1 & \textcircled{6} \\ 4X^2(4X^2 - 7y^2) + y^4 & \textcircled{9} \end{aligned}$$

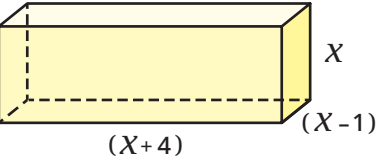
$$\begin{aligned} 4m^4 + 1 & \textcircled{2} \\ y^4 - 23y^2 + 1 & \textcircled{5} \\ k^5 + 5k^3 + 9k & \textcircled{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^4 + 4y^4 & \textcircled{1} \\ a^4 + a^2b^4 + b^8 & \textcircled{4} \\ 16a^4 + 20a^2b^2 + 9b^4 & \textcircled{7} \end{aligned}$$

12 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في R :

$$X^2 + 12X + 15 = 0 \textcircled{2}$$

$$X^3 + X^2 - 4X = 4 \textcircled{1}$$



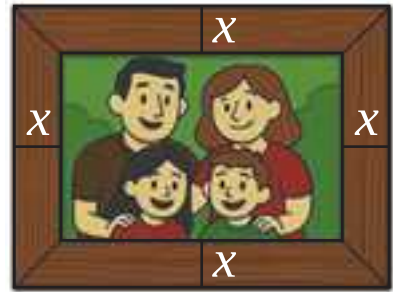
13 هندسة : إذا كان حجم الصندوق المقابل 12 وحدة مكعبة، فأوجد أبعاده.

14 هندسة : إذا كان حجم متوازي مستطيلات هو $(X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 6X)$ قدم مكعب.

أوجد الأبعاد الممكنة لمتوازي المستطيلات بدلالة X ، ثم أوجد القيمة العددية للأبعاد عند $X = 4$

15 ديكور : صورة يحيط بها إطار سمكه X بوصة كما بالشكل.

إذا كانت مساحة الصورة $(4X^3 + 6X^2 + 2X + 3)$ بوصة مربعة، فأوجد الأبعاد الممكنة للصورة والإطار معًا بدلالة X .



تفكير إبداعي

16 إذا كان $a + b = 3$ أوجد قيمة $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

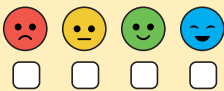
17 حل تحليلًا تامًا : $X^8 - 16y^8$

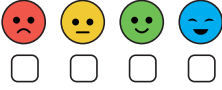
قيم فهمك!

ما مدى فهمك للتحليل

بالتقسيم؟

ضع علامة في المربع المناسب





تقييم الوحدة الثانية

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- 1 إذا كانت كثيرة الحدود : $(9X^2 + kX + 49)$ مربعًا كاملاً، فما قيمة k ؟
(أ) 7 ± (ب) 21 ±
(ج) 42 ± (د) 72 ±
- 2 إذا كان : $X^2 - 14X + 24 = (X - a)(X - b)$ فما قيمة $a + b$ ؟
(أ) 10 - (ب) 14 - (ج) 10 (د) 14
- 3 إذا كان : $m - n = 5$ ، $X + Y = 7$ فإن :
 $X(m - n) - Y(n - m) = \dots\dots\dots$
(أ) 2 (ب) 12 (ج) 35 (د) 70
- 4 $X^3 + Y^3 = (\dots\dots\dots)(X^2 - XY + Y^2)$
(أ) $(X - Y)$ (ب) $(X + Y)$
(ج) $(X^2 - Y^2)$ (د) $(X^2 + Y^2)$

◀ أكمل كلاً مما يأتي بالإجابة الصحيحة :

- 5 العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود
 $16X^3 + 8X^2 - 32X$ هو
6 عند إكمال المربع للمقدار $(X^2 + 24X)$ نضيف
7 إذا كان : $(m^2 + 4m + 8)$ أحد عاملي المقدار
 $(m^4 + 64)$ فإن العامل الآخر هو
8 إذا كان :
 $X^3 - 3X^2 - X + 3 = (X + a)(X + b)(X + c)$
فإن $(a \times b \times c)$ تساوى

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

- 9 أوجد مجموعة حل المعادلة : $X^2 - 6X = -8$ في R
- 10 حل كلاً مما يأتي تحليلًا تامًا :
(1) $3X^2 + 2X - 5$ (2) $k^2 - 64m^2$ (3) $X^3Y^3 - 27$
- 11 متوازي أضلاع مساحته 60 سم²، وطول قاعدته يزيد عن الارتفاع المناظر لها بمقدار 7 سم ،
فما ارتفاع متوازي الأضلاع ؟
- 12 حل كلاً مما يأتي تحليلًا تامًا :
(1) $X^2 - 6X - Y^2 + 6Y$ (2) $8X^5 - 10X^3Y^2 + 2XY^4$



النشأة التاريخية لتحليل المقادير الجبرية

نشاط الوحدة الثانية

◀ الهدف من النشاط :

تقدير دور العلماء المسلمين في تطوير علم الجبر والمقادير الجبرية.

◀ خطوات التنفيذ :

بالتعاون مع أحد أصدقائك حاول القيام بالآتي :

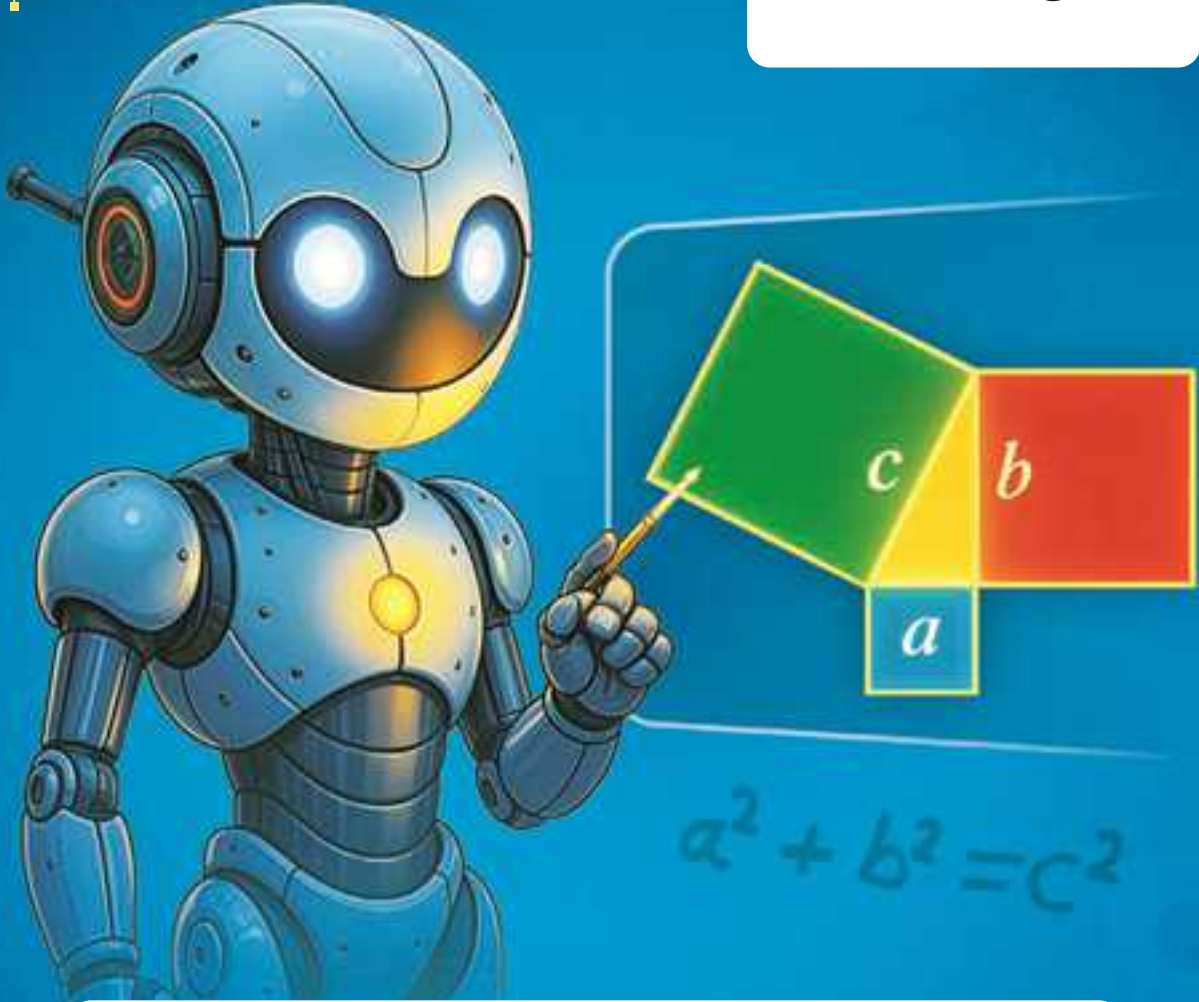
- استخدم أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعي للوصول إلى اسم أحد العلماء المسلمين الذين أسهموا في تطوير علم الجبر.
- اكتب دور هذا العالم في موضوع تحليل المقادير الجبرية.
- هل توجد اختلافات بين طريقة تحليل المقادير الجبرية قديماً وحديثاً؟

الوحدة 3

الهندسة

دروس الوحدة

- 3-1 التطابق
- 3-2 نظرية فيثاغورس وعكسها
- 3-3 تطبيقات التوازي
- 3-4 متوسطات المثلث
- 3-5 المثلث المتساوي الساقين
- 3-6 الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات



تستخدم النظريات الهندسية فى كثير من حسابات الذكاء الاصطناعى خاصة فى تحليل الأشكال الهندسية وتصميم الروبوتات الصناعية.

◀ فهل يمكن تطوير خوارزميات التعلم الآلى لحل مشكلات هندسية فى حياتنا اليومية ؟

القيم

- جمال الطبيعة - الوعى الصحى
- تذوق الفن - الوعى البيئى

القضايا والمهارات الحياتية

- التواصل الرياضى
- التفكير الناقد
- التفكير الإبداعى
- لغة الرياضيات

التطابق (Congruence)



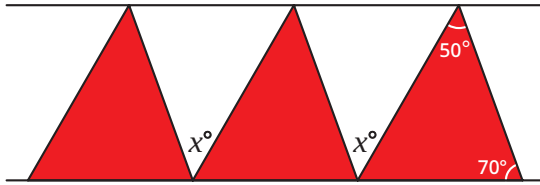
استعد!

يستخدم المهندسون في بناء الكبارى الفولاذية مثلثات متطابقة لضمان التوازن والمتانة، حيث تساهم المثلثات المتطابقة في توزيع الأحمال بشكل متساو.
في صورة الكوبرى المقابلة، هل يمكنك تحديد قيمة x ؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم تطابق الأشكال الهندسية المستوية، وحالات تطابق المثلثات، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.



فكر وناقش!



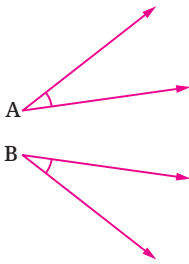
قام إبراهيم بنسخ المثلث الأحمر ولصقه عدة مرات لتكوين شريط زخرفى باستخدام أحد برامج الكمبيوتر.
هل يمكنك تحديد قيمة x في هذا الشكل ؟



تعلم!

تطابق زاويتين

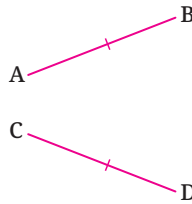
تتطابق الزاويتان إذا تساويتا في القياس.



إذا كان : $m(\angle A) = m(\angle B)$
فإن : $\angle A \cong \angle B$

تطابق قطعتين مستقيمتين

تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا تساويتا في الطول.



إذا كان : طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{CD}$
فإن : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم تطابق الأشكال الهندسية المستوية.
- تعرف شروط تطابق مضلعين.
- تعرف حالات تطابق مثلثين.
- تستخدم التطابق في إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع.
- تثبت تطابق مثلثين.
- تستخدم تطابق الأشكال الهندسية المستوية في حل المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- التطابق Congruence
- الوتر Hypotenuse
- المثلث القائم الزاوية Right-angled triangle
- زاوية محصورة Included angle
- ضلع واصل بين رأسين Included side

■ الترميز في الرياضيات

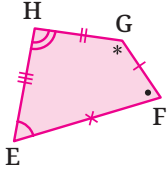
الرمز $\cong$ يستخدم للتعبير عن تطابق شكلين هندسيين.

تطابق مضلعين

يتطابق المضلعان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

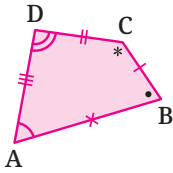
- 1 أضلاعها المتناظرة متساوية في الطول.
- 2 زواياها المتناظرة متساوية في القياس.

إذا كان $ABCD$ ، $EFGH$ مضلعين فيهما :



$$1 \quad AB = EF, BC = FG,$$

$$CD = GH, AD = EH$$



$$2 \quad m(\angle A) = m(\angle E), m(\angle B) = m(\angle F),$$

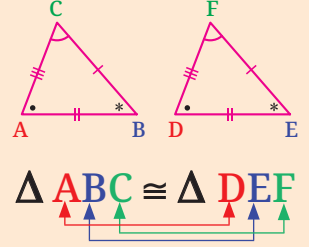
$$m(\angle C) = m(\angle G), m(\angle D) = m(\angle H)$$

فإن : المضلع $ABCD \cong$ المضلع $EFGH$

■ لاحظ أن

يجب كتابة المضلعين المتطابقين بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة.

مثال :



■ تذكر أن

الانعكاس والانتقال والدوران هي تحويلات هندسية تعطي صورة مطابقة للشكل الهندسي لأنها تحافظ على ما يلي :

- قياسات الزوايا.
- أطوال الأضلاع.
- التوازي.

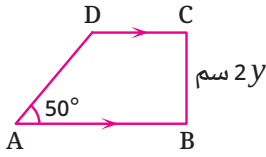
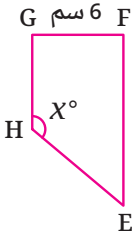
■ مثال 1

في الشكل المقابل :

إذا كان المضلع $EFGH$ صورة

المضلع $ABCD$ بدوران ما حول نقطة،

فما قيمة كل من X ، Y ؟



$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\therefore m(\angle A) + m(\angle D) = 180^\circ \quad (\text{زاويتان داخليتان وفي جهة واحدة من القاطع } \overrightarrow{AD})$$

$$\therefore m(\angle D) = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$\therefore$ المضلع $EFGH$ صورة المضلع $ABCD$ بالدوران

$\therefore$ المضلع $EFGH \cong$ المضلع $ABCD$

$$\therefore m(\angle H) = m(\angle D) = 130^\circ$$

$$\therefore X = 130$$

$$BC = FG = 6$$

$$\therefore 2y = 6$$

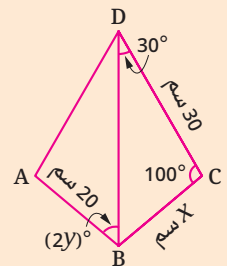
$$\therefore y = 3$$

■ تقييم ذاتي 1

في الشكل التالي :

ΔBCD صورة ΔBAD

بالانعكاس في $\overleftrightarrow{DB}$



أوجد قيمة كل من X ، Y

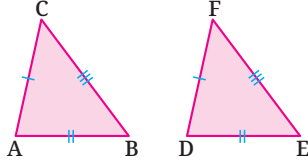
تطابق مثلثين

المثلث هو مضلع ثلاثي يحتوي على 6 عناصر (3 أضلاع و 3 زوايا)، ولإثبات تطابق مثلثين لا يُشترط إثبات تطابق كل العناصر المتناظرة، بل يُكتفى بثلاثة عناصر بينهم ضلع واحد على الأقل.

حالات تطابق مثلثين

الحالة الأولى: ثلاثة أضلاع (SSS)

يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع في أحد المثلثين مع نظيره في المثلث الآخر.



إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

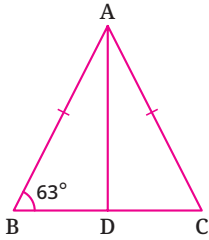
مثال 2

في الشكل المقابل:

النقطة D منتصف $\overline{BC}$, $AB = AC$, $m(\angle B) = 63^\circ$

1 أثبت أن: $\triangle ADB \cong \triangle ADC$

2 أوجد بالبرهان: $m(\angle DAC)$



∴ النقطة D منتصف $\overline{BC}$

∴ $BD = DC$

∴ المثلثين ADB , ADC فيهما:

(ضلع مشترك) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (إثباتاً) $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ (معطى) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

∴ $\triangle ADB \cong \triangle ADC$

(المطلوب 1)

ومن التطابق ينتج أن:

$m(\angle C) = m(\angle B) = 63^\circ$, $m(\angle DAC) = m(\angle DAB)$

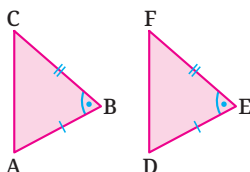
في المثلث ABC:

∴ $m(\angle CAB) = 180^\circ - (63^\circ + 63^\circ) = 54^\circ$

∴ $m(\angle DAC) = m(\angle DAB) = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ$ (المطلوب 2)

الحالة الثانية: ضلعان وزاوية محصورة (SAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.



إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

الترميز في الرياضيات

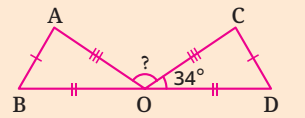
في حالات تطابق المثلثات يُستخدم حرف S للدلالة على ضلع في المثلث، وحرف A للدلالة على زاوية في المثلث، وحرف R للدلالة على الزاوية القائمة، وحرف H للدلالة على وتر المثلث القائم الزاوية.

تفكير ناقد

هل يتطابق المثلثان في حالة تطابق الزوايا الثلاث في أحدهما مع نظائرها في المثلث الآخر؟

تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي:



1 برهن أن:

$\triangle OAB \cong \triangle OCD$

2 أوجد: $m(\angle AOC)$

تفكير ناقد

هل يتطابق المثلثان في حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة في أحدهما مع نظائرها في المثلث الآخر؟

■ تقييم ذاتي 3

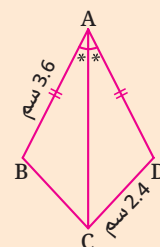
في الشكل التالي :

$$\overline{AB} \cong \overline{AD}$$

$$AB = 3.6 \text{ سم}$$

$$CD = 2.4 \text{ سم}$$

$\overline{AC}$ ينصف $\angle BAD$



1 برهن أن :

$$\triangle ACB \cong \triangle ACD$$

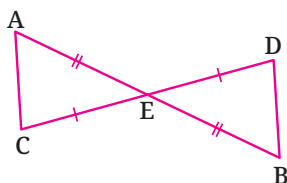
2 أوجد محيط المضلع ABCD

■ مثال 3

في الشكل المقابل :

E نقطة منتصف كل من $\overline{CD}$, $\overline{AB}$

برهن أن : 1 $\triangle AEC \cong \triangle BED$ 2 $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$



✓ E نقطة منتصف كل من $\overline{CD}$, $\overline{AB}$

$$\therefore \overline{AE} \cong \overline{BE} , \overline{CE} \cong \overline{DE}$$

$$\therefore m(\angle AEC) = m(\angle BED) \text{ (بالتقابل بالرأس)}$$

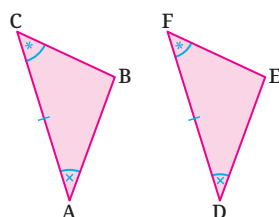
$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BED \text{ (المطلوب 1)}$$

ومن تطابق المثلثين ينتج أن : $m(\angle A) = m(\angle B)$ وهما زاويتان في وضع تبادل

$$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{DB} \text{ (المطلوب 2)}$$

الحالة الثالثة : زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما (ASA)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.



$$\text{إذا كان : } \angle A \cong \angle D , \overline{AC} \cong \overline{DF} , \angle C \cong \angle F$$

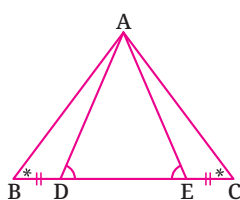
$$\text{فإن : } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

■ مثال 4

في الشكل المقابل :

$$\angle B \cong \angle C , \angle ADE \cong \angle AED , \overline{BD} \cong \overline{CE}$$

أثبت أن : $\triangle ABD \cong \triangle ACE$



$$\therefore m(\angle ADB) + m(\angle ADE) = 180^\circ , m(\angle AEC) + m(\angle AED) = 180^\circ$$

$$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle AED) \therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC)$$

$$\therefore \angle ADB \cong \angle AEC$$

في المثلثين ABD , ACE :

$$\angle B \cong \angle C \text{ (معطى) , } \overline{BD} \cong \overline{CE} \text{ (معطى) , } \angle ADB \cong \angle AEC \text{ (إثباتاً)}$$

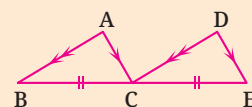
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

■ تقييم ذاتي 4

في الشكل التالي :

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC} , \overline{AC} \parallel \overline{DE}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{CE}$$

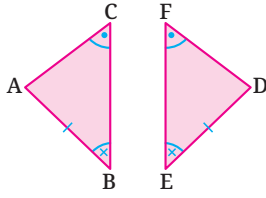


برهن أن :

$$\triangle ABC \cong \triangle DCE$$

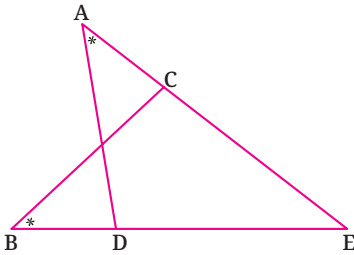
الحالة الرابعة : زاويتان وضلع غير واصل بين الرأسين (AAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير واصل بين رأسيهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.



إذا كان : $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



مثال 5

في الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle B$

أثبت أن : $AE = BE$

في المثلثين ADE , BCE :

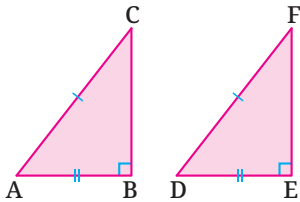
$\therefore \angle A \cong \angle B$ (معطى) , $\angle E \cong \angle E$ (زاوية مشتركة) , $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (معطى)

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCE$

وينتج من التطابق أن : $AE = BE$

الحالة الخامسة : وتر وأحد ضلعي القائمة (RHS)

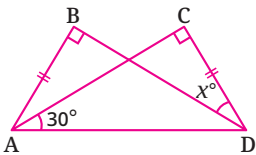
يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعي القائمة في أحد المثلثين مع نظيريهما في المثلث الآخر.



إذا كان : $m(\angle B) = m(\angle F) = 90^\circ$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



مثال 6

في الشكل المقابل :

أوجد قيمة X

$\therefore$ المثلثين ABD , DCA فيهما :

$m(\angle B) = m(\angle C) = 90^\circ$ (معطى) , $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (معطى) , $\overline{AD} \cong \overline{DA}$ (ضلع مشترك)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$

وينتج من التطابق أن : $m(\angle BDA) = m(\angle CAD) = 30^\circ$

في المثلث DCA :

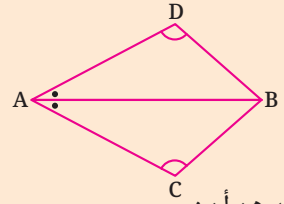
$\therefore m(\angle CDA) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$ $\therefore X = 60 - 30 = 30$

■ تقييم ذاتي 5

في الشكل التالي :

$\overline{AB}$ ينصف $\angle DAC$

$\angle ADB \cong \angle ACB$



برهن أن :

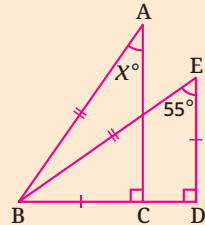
$\triangle ACB \cong \triangle ADB$

■ لاحظ أن

في المثلث القائم الزاوية الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 90° يسمى وتر المثلث وهو أكبر الأضلاع طولاً في المثلث.

■ تقييم ذاتي 6

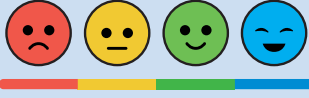
في الشكل التالي :



$BC = DE$, $AB = BE$

1 أثبت أن : $\triangle ACB \cong \triangle BDE$

2 أوجد قيمة X :



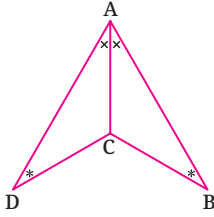
تقييم الدرس



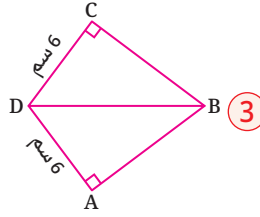
قياس المفاهيم

أولاً

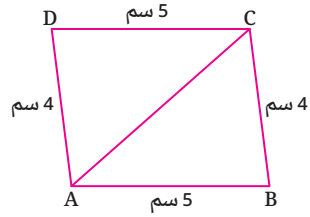
ما هي الحالة المستخدمة في إثبات تطابق المثلثين في كل مما يأتي؟



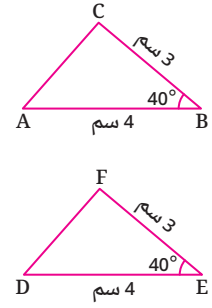
4



3

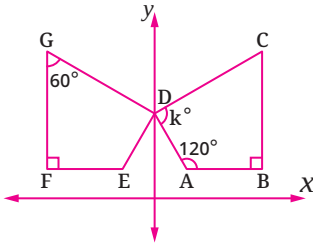


2



1

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



5 في الشكل المقابل : المضلع EFGD صورة

المضلع ABCD بالانعكاس في محور y.

ما قيمة k ؟

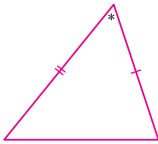
60 (ب)

90 (أ)

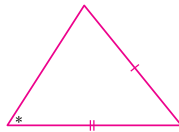
70 (د)

120 (ج)

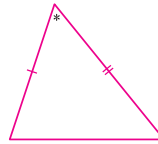
6 أي من المثلثات التالية لا يطابق المثلثات الأخرى؟



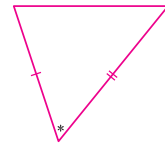
(د)



(ج)



(ب)



(أ)

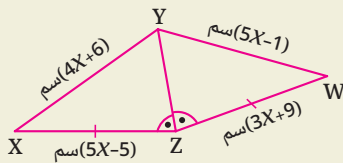
اكتشف الخطأ :

7 قام أحمد باستخدام تطابق المثلثين

لإيجاد قيمة X.

اكتشف الخطأ في حل أحمد،

ثم قم بتصويبه.



حل أحمد :

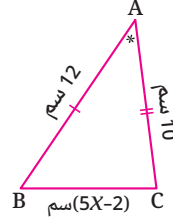
$$4X + 6 = 3X + 9$$

$$X + 6 = 9$$

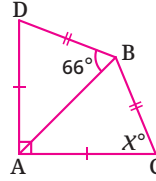
$$X = 3$$



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

8 في الشكل التالي : ما طول $\overline{EF}$ ؟

- (أ) 6 سم
(ب) 8 سم
(ج) 10 سم
(د) 12 سم

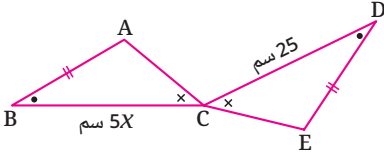
10 في الشكل التالي : ما قيمة X ؟

- (أ) 66
(ب) 45
(ج) 34
(د) 69

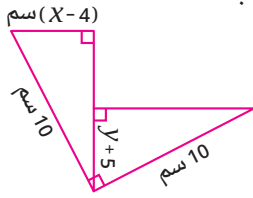
12 في الشكل المقابل : إذا كان المضلع EFGH صورة

المضلع ABCD بانتقال ما، فما قيمة $X + Y$ ؟

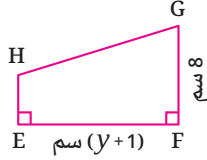
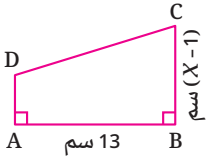
- (أ) 9
(ب) 12
(ج) 21
(د) 22

9 في الشكل التالي : ما قيمة X ؟

- (أ) 5
(ب) 10
(ج) 20
(د) 25

11 في الشكل التالي : ما قيمة $X - Y$ ؟

- (أ) 9
(ب) 6
(ج) 5
(د) 1

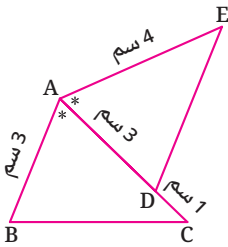


أجب عن الأسئلة الآتية :

14 في الشكل المقابل :

برهن أن :

$$\triangle ABC \cong \triangle ADE$$

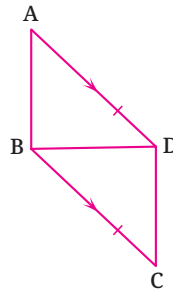


13 في الشكل المقابل :

$$\overline{AD} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

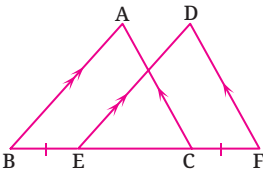
برهن أن :

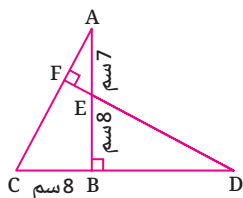
$$\triangle ABD \cong \triangle CDB$$



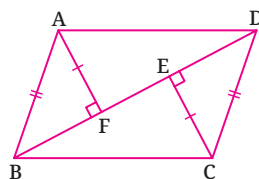
15 في الشكل المقابل :

$$\overline{BA} \parallel \overline{ED}, \overline{CA} \parallel \overline{FD}, \overline{BE} \cong \overline{FC}$$

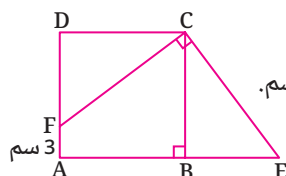
برهن أن : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 



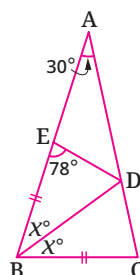
17 في الشكل المقابل :
أوجد طول $\overline{BD}$



16 في الشكل المقابل :
برهن أن :
① $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
② $DF = BE$



19 في الشكل المقابل :
ABCD مربع طول ضلعه 12 سم.
 $\overline{CF} \perp \overline{CE}$ ، $3 = AF$
① أثبت أن : $\triangle CBE \cong \triangle CDF$
② أوجد طول $\overline{BE}$



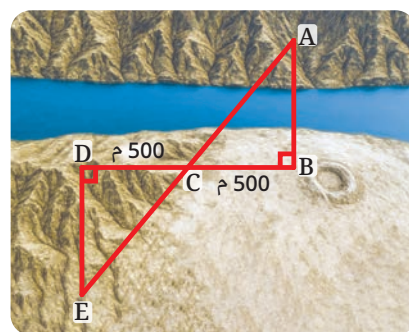
18 في الشكل المقابل :
① أثبت أن : $\triangle BCD \cong \triangle BED$
② أوجد قيمة X



التحليل وتكامل المواد

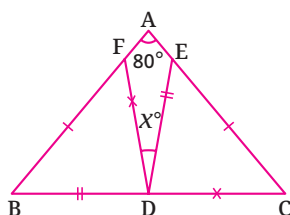
20 استزراع سمكى : قطعة أرض على شكل مستطيل ABCD تم تقسيمها
إلى أحواض مستطيلة الشكل ومتطابقة لاستزراع 4 أنواع من الأسماك.
فما محيط قطعة الأرض ؟

21 هندسة : لإنشاء جسر مثل $\overline{AB}$ فوق نهر عليك إيجاد المسافة من
النقطة A إلى النقطة B .
حدد النقاط A ، C ، E على استقامة واحدة كما هو موضح في الشكل ،
إذا كانت $DE = 600$ م ،
فما المسافة من النقطة A إلى النقطة B ؟



تفكير إبداعي

22 في الشكل المقابل :
① أثبت أن : $\triangle BFD \cong \triangle ECD$
② أوجد قيمة X



قيم فهمك!

ما مدى فهمك للتطابق ؟
ضع علامة في المربع المناسب



نظرية فيثاغورس وعكسها

(Pythagoras' Theorem and Its Converse)



استعد!

لديك سلم طوله 13 قدمًا يستند إلى حائط رأسى. إذا كانت قاعدة السلم تبعد 5 أقدام عن الحائط، فما هو الارتفاع الذى يصل إليه السلم على الحائط؟

في هذا الدرس، سوف نتعرف على نظرية فيثاغورس وعكسها؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

إذا كانت لديك أربع قطع من الخشب أطوالها 15 سم، 12 سم، 10 سم، 9 سم. فأى ثلاث منها يمكنك أن تستخدمها لعمل مثلث قائم الزاوية؟

9 سم

10 سم

12 سم

15 سم



تعلم!

نظرية فيثاغورس

نظرية فيثاغورس هي معادلة تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية. سُميت نسبةً إلى عالم الرياضيات اليونانى «فيثاغورس»، الذى عاش فى القرن السادس قبل الميلاد.

نظرية فيثاغورس

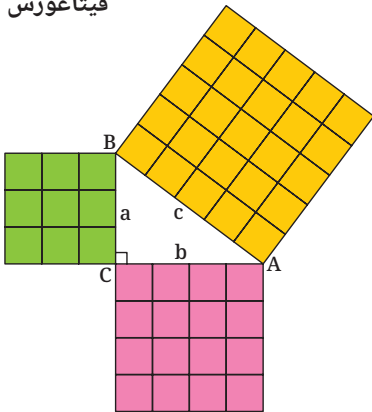
مساحة المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية تساوى مجموع مساحتي المربعين المنشأين على ضلعي القائمة.

صيغة أخرى لنظرية فيثاغورس :

فى المثلث القائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{أى أن :}$$

فيثاغورس



حيث a, b طولاه ضلعي القائمة فى المثلث، c طول وتر المثلث.

■ نواتج التعلم

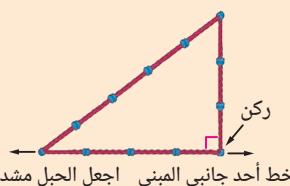
- تعرف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- توجد طول أحد ضلعي القائمة فى مثلث قائم الزاوية إذا عُلم طول الوتر وطول ضلع القائمة الآخر.
- توجد طول الوتر فى مثلث قائم الزاوية إذا عُلم طولاه ضلعي القائمة.
- تثبت أن المثلث قائم الزاوية إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة.
- تحدد نوع المثلث بالنسبة لزوياه إذا عُلم أطوال أضلاعه.

■ المفردات

- نظرية فيثاغورس
- Pythagoras' Theorem
- Hypotenuse
- الوتر

■ معلومة تاريخية

استخدم المصريون القدماء حبلًا موصولًا ذى 12 عقدة بينها مسافات متساوية لتشكيل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه 3 : 4 : 5، يحتوى هذا المثلث على زاوية قائمة بين ضلعي طولاهما 3، 4 وحدات. استخدم المصريون هذا الإجراء لبناء زواياهم القائمة.



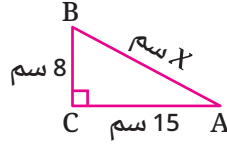
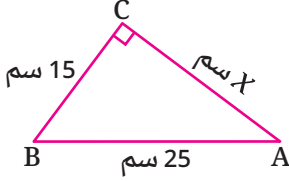
خط أحد جانبي المبنى اجعل الحبل مشدودًا

استخدام نظرية فيثاغورس

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع في مثلث قائم الزاوية بمعلومية طولي الضلعين الآخرين.

مثال 1

أوجد قيمة X في كل مما يأتي ، ثم أوجد مساحة المثلث في الشكل الثاني.



$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore (25)^2 = (15)^2 + X^2$$

$$\therefore X^2 = (25)^2 - (15)^2 = 400$$

$$\therefore X = \sqrt{400} = 20$$

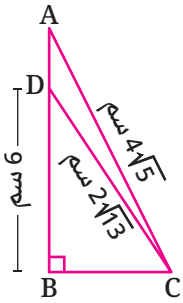
$$\therefore \text{المساحة} = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = 150 \text{ سم}^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore X^2 = (8)^2 + (15)^2$$

$$= 64 + 225 = 289$$

$$\therefore X = \sqrt{289} = 17$$



مثال 2

في الشكل المقابل :

$$AC = 4\sqrt{5} \text{ سم} , m(\angle B) = 90^\circ$$

$$BD = 6 \text{ سم} , DC = 2\sqrt{13} \text{ سم}$$

أوجد مع البرهان طول $\overline{AD}$

في المثلث DBC القائم الزاوية في B :

$$(BC)^2 = (DC)^2 - (DB)^2 = (2\sqrt{13})^2 - (6)^2 = 16$$

$$\therefore BC = \sqrt{16} = 4$$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B :

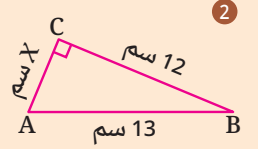
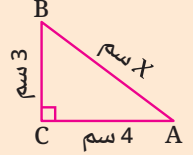
$$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2 = (4\sqrt{5})^2 - (4)^2 = 64$$

$$\therefore AB = \sqrt{64} = 8 \quad \therefore AD = AB - BD = 8 - 6 = 2$$

$\therefore$ طول $\overline{AD} = 2$ سم

■ تقييم ذاتي 1

أوجد قيمة X في كل مما يأتي،
ثم أوجد مساحة المثلث في
الشكل الثاني.

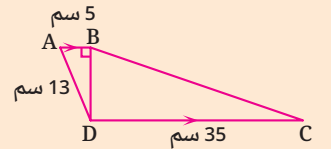


■ تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي :

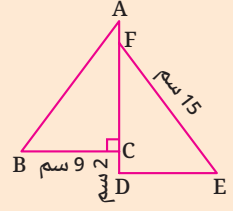
إذا كان : $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

أوجد محيط المضلع ABCD



■ تقييم ذاتي ③

في الشكل التالي :



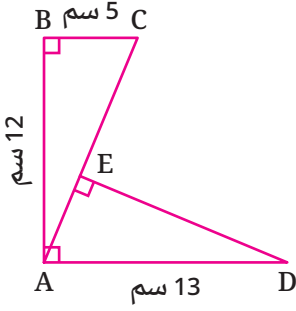
$$\triangle ACB \cong \triangle FDE$$

أوجد طول $\overline{AF}$

■ مثال 3

في الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{EC}$



∴ المثلث ABC قائم الزاوية في B

$$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$$

$$\therefore AC = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore m(\angle C) + m(\angle BAC) = 90^\circ, m(\angle DAE) + m(\angle BAC) = 90^\circ$$

$$\therefore m(\angle C) = m(\angle DAE)$$

∴ المثلثان ABC , DEA فيهما :

$$m(\angle ABC) = m(\angle DEA), AC = DA, m(\angle C) = m(\angle DAE)$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEA$$

$$\therefore AE = CB = 5$$

$$\therefore EC = AC - AE = 13 - 5 = 8$$

∴ طول $\overline{EC} = 8$ سم.

■ تقييم ذاتي ④

■ مثال 4

تصميم : صمم أسامة حديقة منزلية على شكل مستطيل، ويخطط لعمل ممر بشكل قطري كما بالشكل. أوجد طول هذا الممر.



$$\therefore m(\angle A) = 90^\circ \quad \text{ABCD مستطيل}$$

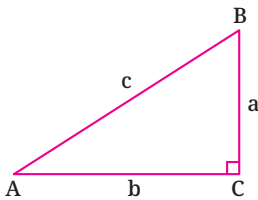
∴ في المثلث ABD :

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = (20)^2 + (15)^2 = 625$$

$$\therefore \text{طول الممر} = \sqrt{625} = 25 \text{ م.}$$

عكس نظرية فيثاغورس

إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث كان المثلث قائم الزاوية.

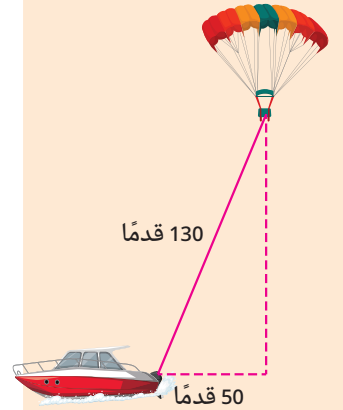


إذا كان المثلث ABC فيه :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

فإن : $m(\angle C) = 90^\circ$

أي أن : المثلث ABC يكون قائم الزاوية في C



يمثل الشكل تحليل عمر بمنطاد أثناء سحبه باستخدام قارب في البحر. فما ارتفاع عمر عن مستوى القارب الأفقي؟

■ تقييم ذاتي 5

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائمة الزاوية؟

1 41 سم ، 40 سم ، 9 سم

2 5 سم ، $3\sqrt{2}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم

1 60 سم ، 40 سم ، 30 سم

■ مثال 5

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائمة الزاوية؟

1 15 سم ، 13 سم ، 8 سم

2 طول أكبر ضلع = 25

$$\therefore (7)^2 + (24)^2 = 625 ,$$

$$\therefore (25)^2 = 625$$

$$\therefore (7)^2 + (24)^2 = (25)^2$$

∴ المثلث قائم الزاوية.

1 طول أكبر ضلع = 15

$$\therefore (13)^2 + (8)^2 = 233 ,$$

$$\therefore (15)^2 = 225$$

$$\therefore (13)^2 + (8)^2 \neq (15)^2$$

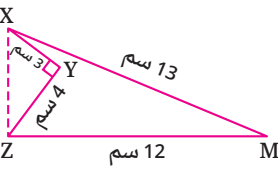
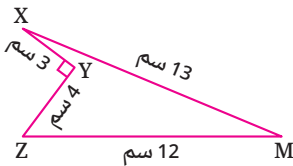
∴ المثلث غير قائم الزاوية.

■ مثال 6

فى الشكل المقابل :

$m(\angle XYZ) = 90^\circ$ ، شكل رباعى غير محدب ، XYZM

أوجد مساحة الشكل الرباعى XYZM



العمل : ارسم $\overline{XZ}$

فى المثلث XYZ القائم الزاوية فى Y :

$$\therefore (XZ)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25 \quad \therefore XZ = 5$$

فى المثلث XZM :

$$\therefore (XZ)^2 + (ZM)^2 = (5)^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169 ,$$

$$(XM)^2 = (13)^2 = 169$$

$$\therefore (XM)^2 = (XZ)^2 + (ZM)^2 \quad \therefore m(\angle XZM) = 90^\circ$$

∴ مساحة الشكل الرباعى XYZM = مساحة $\triangle XYZ$ - مساحة $\triangle XZM$

$$\therefore A = \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) - \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 12\right) = 6 - 30 = -24$$

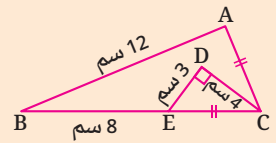
أى أن مساحة الشكل الرباعى XYZM تساوى 24 سم².

■ تقييم ذاتي 6

فى الشكل التالى :

$EC = AC$

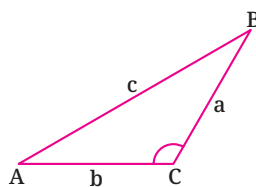
أثبت أن : $m(\angle A) = 90^\circ$



■ متباينة فيثاغورس

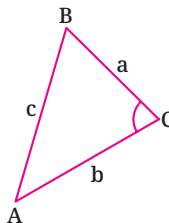
فى المثلث ABC : إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث، وكان :

$$c^2 > a^2 + b^2$$



كان $\triangle ABC$ منفرج الزاوية

$$c^2 < a^2 + b^2$$



كان $\triangle ABC$ حاد الزوايا

■ لاحظ أن

- تستخدم متباينة فيثاغورس للتعرف على ما إذا كان المثلث حاد الزوايا أم منفرج الزاوية.
- بينما عكس نظرية فيثاغورس تستخدم فى التعرف على ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

■ تقييم ذاتي 7

حدد نوع المثلث بالنسبة لزواياه
إذا كانت أطوال أضلاعه كما
يلي :

① 5 سم ، 5 سم ، $5\sqrt{2}$ سم

② 11 سم ، 12 سم ، 16 سم

③ 4.5 سم ، 20 سم ، 21 سم

■ مثال 7

عين نوع كل مثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلي :

① 9 سم ، 10 سم ، 11 سم

② 3 سم ، $2\sqrt{3}$ سم ، $3\sqrt{3}$ سم

③ 1.5 سم ، 2 سم ، 2.5 سم

① ∴ طول أكبر ضلع في المثلث = 11 سم

$$\therefore (11)^2 = 121 , (9)^2 + (10)^2 = 81 + 100 = 181$$

$$\therefore (11)^2 < (9)^2 + (10)^2$$

∴ المثلث حاد الزوايا.

② ∴ طول أكبر ضلع في المثلث = $3\sqrt{3}$ سم

$$\therefore (3\sqrt{3})^2 = 27 , (3)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12 = 21$$

$$\therefore (3\sqrt{3})^2 > (3)^2 + (2\sqrt{3})^2$$

∴ المثلث منفرج الزاوية.

③ ∴ طول أكبر ضلع في المثلث = 2.5 سم

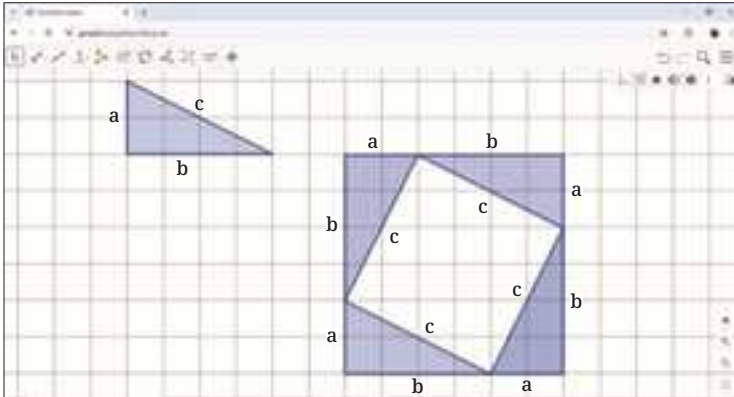
$$\therefore (2.5)^2 = 6.25 , (1.5)^2 + (2)^2 = 2.25 + 4 = 6.25$$

$$\therefore (2.5)^2 = (1.5)^2 + (2)^2$$

∴ المثلث قائم الزاوية.

■ نشاط تكنولوجيا

استخدم برنامج GeoGebra وارسم مثلثًا كما بالشكل أطوال أضلاعه a ، b ، c
انسخ المثلث لتحصل على أربعة مثلثات متطابقة، وأعد ترتيبهم لتكوين مربع كما بالشاشة التالية.



أوجد مساحة المربع الكبير بطريقتين :

• مساحة المربع الكبير تساوي مجموع مساحات المثلثات الأربعة والمربع الصغير.

$$\therefore A = 4 \left(\frac{1}{2} a b \right) + c^2 \quad ①$$

• مساحة المربع الكبير تساوي مربع طول ضلعه.

$$\therefore A = (a + b)^2 \quad ②$$

$$4 \left(\frac{1}{2} a b \right) + c^2 = (a + b)^2 : ② , ① \text{ من}$$

اختصر لتتحقق بنفسك من أن : $c^2 = a^2 + b^2$

■ معلومة إثرائية

ثلاثيات فيثاغورس هي ثلاثة
أعداد صحيحة تحقق الصيغة
الرياضية :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

حيث c هو العدد الأكبر.

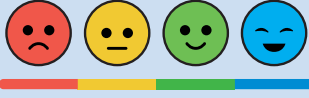
◀ فيما يلي ثلاثيات فيثاغورس
الشائعة، وبعض مضاعفاتهما :

3 , 4 , 5
6 , 8 , 10
9 , 12 , 15
$3X , 4X , 5X$

5 , 12 , 13
10 , 24 , 26
15 , 36 , 39
$5X , 12X , 13X$

8 , 15 , 17
16 , 30 , 34
24 , 45 , 51
$8X , 15X , 17X$

7 , 24 , 25
14 , 48 , 50
21 , 72 , 75
$7X , 24X , 25X$



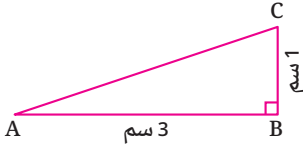
تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

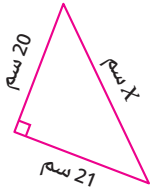
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① في الشكل المقابل : ما مساحة المربع المنشأ على $\overline{AC}$ ؟

(أ) 4 سم² (ب) 2 سم²

(ج) 8 سم² (د) 10 سم²

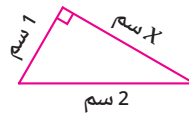


③ في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

(أ) 41 (ب) 29

(ج) $\sqrt{41}$ (د) $\sqrt{29}$



② في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

(أ) 1 (ب) 3

(ج) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt{3}$

④ أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ؟

(أ) 4, 7, 7 (ب) 12, 5, 13 (ج) 5, 8, 7 (د) 3, 7, 5

⑤ أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث حاد الزوايا ؟

(أ) $4, 4, 4\sqrt{2}$ (ب) 6, 8, 10 (ج) 7.5, 3.7, 8 (د) 6, 6, 9

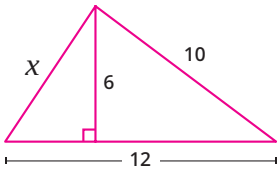
⑥ أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث منفرج الزاوية ؟

(أ) 24, 10, 27 (ب) 2.5, 2, 1.5 (ج) 7, 7, 7 (د) $20, 10, 10\sqrt{3}$

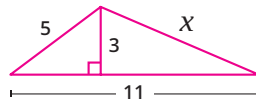


تطبيق المفاهيم

ثانياً



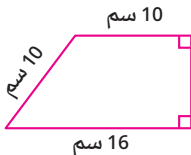
شكل (2)



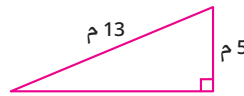
شكل (1)

⑦ أوجد قيمة X في كل

من الشكلين المقابلين.



شكل (2)



شكل (1)

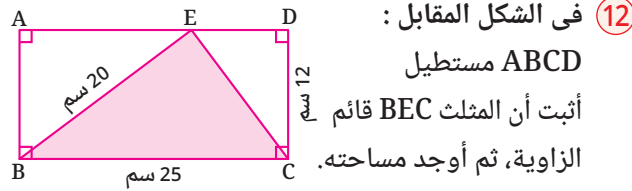
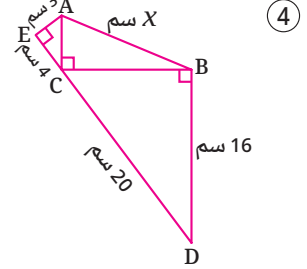
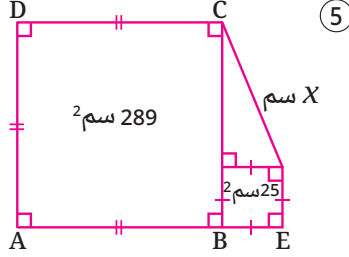
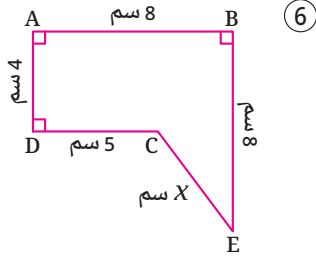
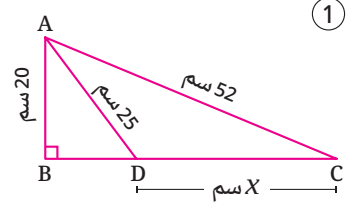
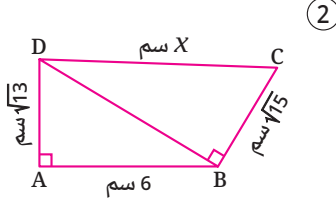
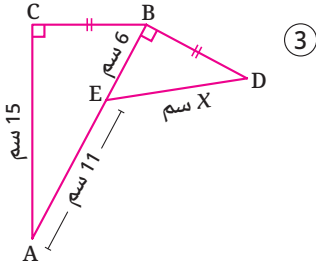
⑧ أوجد مساحة كل شكل

من الشكلين المقابلين.

⑨ في كل مما يأتي، اذكر نوع المثلث بالنسبة لزاويه إذا كانت أطوال أضلاعه كالتالي :

① 6 سم ، 3 سم ، 5 سم ② $\sqrt{6}$ سم ، $\sqrt{5}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم ③ 35 سم ، 28 سم ، 21 سم

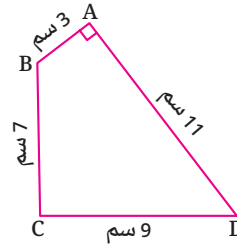
10 في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة X :



11 في الشكل المقابل :

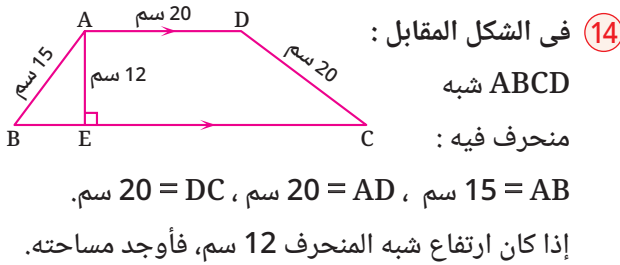
مستطيل ABCD

أثبت أن المثلث BEC قائم الزاوية، ثم أوجد مساحته.



12 في الشكل المقابل :

أثبت أن $m(\angle C) = 90^\circ$



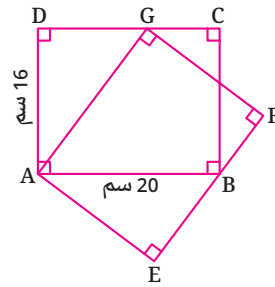
13 في الشكل المقابل :

شبه ABCD

منحرف فيه :

$AB = 15$ سم ، $AD = 20$ سم ، $BC = 20$ سم ، $DC = 20$ سم.

إذا كان ارتفاع شبه المنحرف 12 سم، فأوجد مساحته.

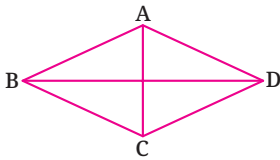


14 في الشكل المقابل :

المستطيل ABCD يطابق

المستطيل AGFE

أوجد مع البرهان طول $\overline{BF}$



15 في الشكل المقابل :

ABCD معين محيطه 52 م، طول قطره $\overline{BD}$ يساوي 24 م.

أوجد مساحة المعين ABCD بالمتري المربع.

16 اكتشف الخطأ :

أمل ومريم تحددان ما إذا كانت الأعداد 5، 12، 13 تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا، أي منهما اتبعت الطريقة الصحيحة في الحل؟ ناقش، و صوّب الخطأ إن وُجد.

حل مريم :

$$a^2 + b^2 = 13^2 + 5^2$$

$$= 194$$

$$c^2 = 12^2 = 144$$

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

لا تصلح

حل أمل :

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2$$

$$= 169$$

$$c^2 = 13^2 = 169$$

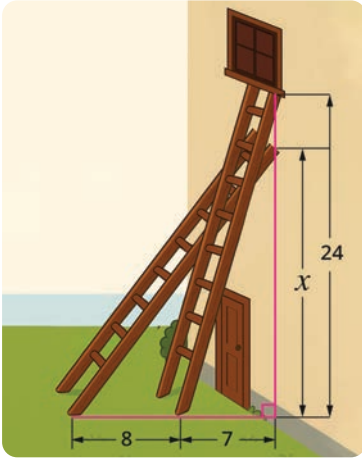
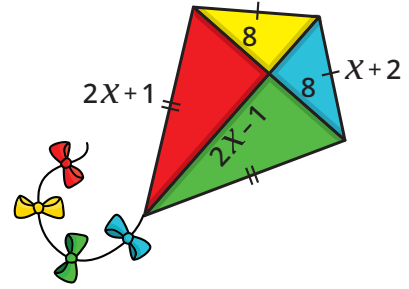
$$a^2 + b^2 = c^2$$

تصلح



17 ألعاب :

أمامك طائرة ورقية أبعادها كما بالشكل.
أوجد محيط الطائرة الورقية.



يجب اتباع قواعد الأمن والسلامة عند القيام بعمل الصيانات المنزلية.

18 فنون : وضع رسام سلماً للوصول إلى أسفل نافذة على ارتفاع

24 قدماً عن الأرض، فكانت قاعدة السلم تبعد 7 أقدام عن حائط المنزل. أثناء خلطه للطلاء انزلق السلم، مما أدى إلى ابتعاد قاعدته 8 أقدام أخرى عن حائط المنزل. ما الارتفاع الذي يصل إليه السلم حينئذ ؟



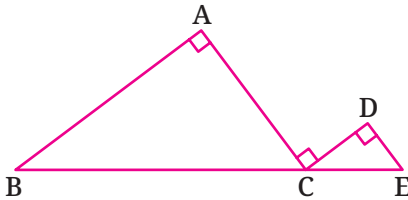
تفكير إبداعي

20 في الشكل التالي :

إذا كان : $CD + AB = 16$ سم،

$DE + AC = 12$ سم

أوجد مع البرهان طول $\overline{BE}$



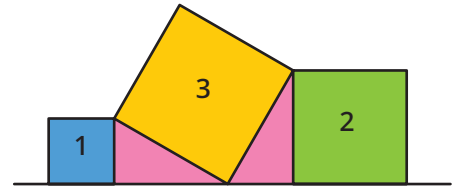
19 في الشكل التالي :

ثلاثة مربعات،

مساحة المربع (1) $= 16$ سم²

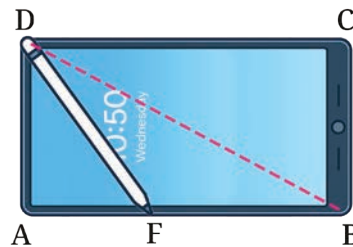
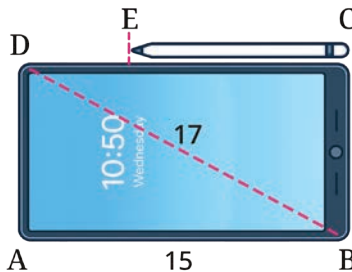
ومساحة المربع (2) $= 48$ سم²

أوجد مع البرهان طول ضلع المربع (3)



21 تفكير ناقد : يستخدم خالد قلم جهاز لوحى (تابلت) على شكل مستطيل ABCD ،

طول أحد أضلاعه 15 وحدة طول، وطول قطره 17 وحدة طول.



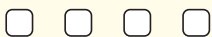
إذا كان طول $\overline{FB}$ يزيد عن طول $\overline{DE}$ أربع وحدات طول، فأوجد طول القلم.

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لنظرية

فيثاغورس وعكسها ؟

ضع علامة في المربع المناسب



تطبيقات التوازي (Applications of Parallelism)



استعد!

يخطط أحد مهندسي الطرق لإنشاء طريق جديد يربط بين المدرسة والمستشفى، بحيث يكون موازيًا للطريق الرئيسي، إذا علمت أن المدرسة تقع في منتصف الطريق $\overline{AB}$ ، والمستشفى تقع في منتصف الطريق $\overline{AC}$

فما طول هذا الطريق الجديد؟

■ نواتج التعلم

- تعرف العلاقة بين أطوال أجزاء القواطع المحصورة بين المستقيمتين المتوازيتين.
- تستخدم الشعاع المرسوم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين.
- تعرف القطعة المتوسطة في المثلث.
- تعرف العلاقة بين القطعة المتوسطة في المثلث والضلع المقابل لها.
- تستخدم التوازي في حل المسائل في الهندسة.

■ المفردات

- التوازي Parallelism
- نقطة المنتصف Midpoint
- القطعة المتوسطة Midsegment



فكر وناقش!

في الشكل المقابل :

إذا كان طول العارضة الأفقية عند منتصف السلم 0.75 م، فهل تستطيع تحديد المسافة بين طرفي السلم على الأرض؟ ناقش.

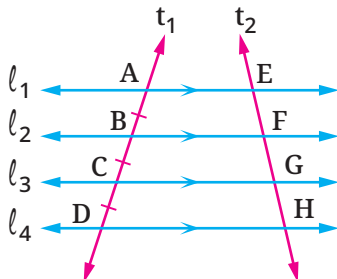


تعلم!

بعض تطبيقات التوازي

نظرية 3-1

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمتين متوازيتين، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمتين متساوية في الطول، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر تكون متساوية في الطول.



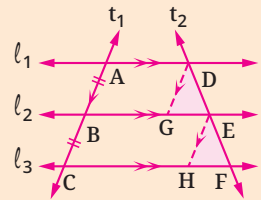
إذا كانت : $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$ ،

t_1, t_2 قاطعين لهم

بحيث $AB = BC = CD$

فإن : $EF = FG = GH$

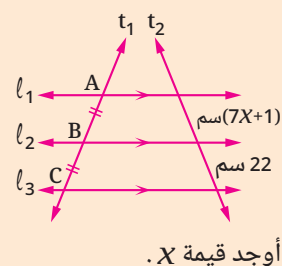
■ ناقش إثبات صحة نظرية (3-1)



برسم $\overline{EH}$ ، $\overline{DG}$ توازيان المستقيم t_1 ، واستخدام خواص متوازي الأضلاع والتوازي لإثبات تطابق المثلثين FEH ، EDG ، يمكن إثبات صحة النظرية (3-1)، ناقش ذلك.

■ تقييم ذاتي ①

في الشكل التالي :



أوجد قيمة X .

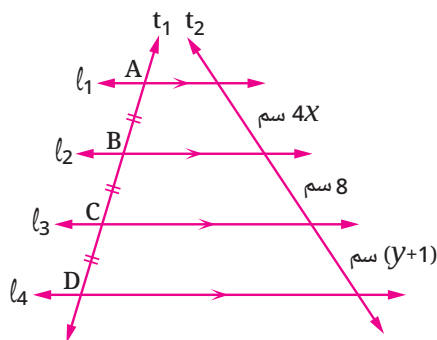
■ مثال 1

في الشكل المقابل :

$$l_1 // l_2 // l_3 // l_4$$

المستقيمان t_1, t_2 قاطعان لهم.

أوجد قيمة كل من X, Y .



$$\therefore l_1 // l_2 // l_3 // l_4, AB = BC = CD$$

$$\therefore 4X = 8$$

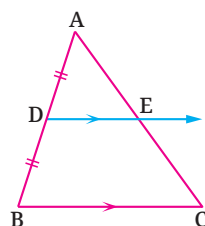
$$\therefore X = \frac{8}{4} = 2$$

$$y + 1 = 8$$

$$\therefore y = 8 - 1 = 7$$

■ نظرية 3-2

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

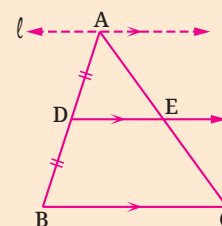


إذا كانت D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{DE} // \overline{BC}$ ،

فإن E نقطة منتصف $\overline{AC}$

أي أن : $AE = EC$

■ ناقش إثبات صحة نظرية (3-2)



برسم مستقيم من النقطة A

يوازي كلاً من $\overline{BC}$ ، $\overline{DE}$ ،

وملاحظة أن $AD = DB$

وباستخدام النظرية (1 - 3)

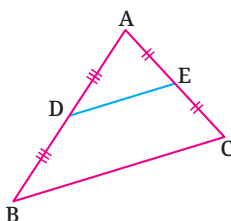
يمكن إثبات صحة النظرية

(2 - 3) ، ناقش ذلك.

■ القطعة المتوسطة في المثلث

القطعة المتوسطة في المثلث هي القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفين

ضلعين في المثلث.



إذا كانت D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ،

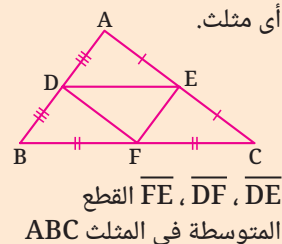
E نقطة منتصف $\overline{AC}$.

فإن $\overline{DE}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$

■ لاحظ أن

توجد ثلاث قطع متوسطة في

أي مثلث.



$\overline{FE}$ ، $\overline{DF}$ ، $\overline{DE}$ القطع

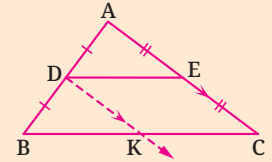
المتوسطة في المثلث ABC

■ ناقش

كيف يمكنك إثبات أن طول القطعة المتوسطة في المثلث يساوى نصف طول الضلع المقابل لها؟

• إرشاد:

ارسم $\overrightarrow{DK}$ يوازي $\overrightarrow{AC}$ ويقطع $\overrightarrow{BC}$ في K ، ثم أثبت أن الشكل $DKCE$ متوازي أضلاع.

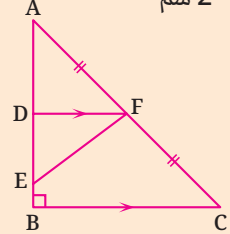


■ تقييم ذاتي ②

في الشكل التالي:

$$AB = BC = 16 \text{ سم}$$

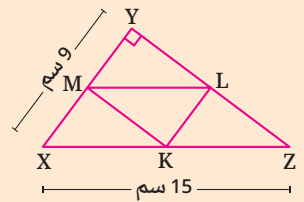
$$EB = 2 \text{ سم}$$



أوجد طول $\overline{EF}$

■ تقييم ذاتي ③

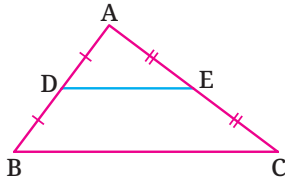
في الشكل التالي:



أضلاع المثلث KLM هي القطع المتوسطة في المثلث XYZ القائم الزاوية في Y احسب محيط المثلث KLM

نظرية 3-3 (نظرية القطعة المتوسطة في المثلث)

القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.



إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC

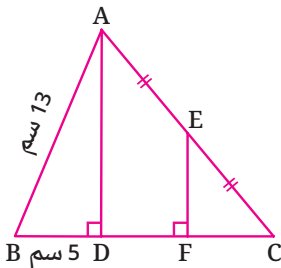
فإن: ① $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$$DE = \frac{1}{2} BC \quad \text{②}$$

مثال 2

فى الشكل المقابل:

أوجد مع البرهان طول $\overline{EF}$



∴ المثلث ABD قائم الزاوية فى D

$$\therefore (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$$

$$\therefore AD = \sqrt{144} = 12$$

∴ $m(\angle ADB) = m(\angle EFB) = 90^\circ$ (وهما زاويتان فى وضع تناظر)

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{EF}$$

∴ F منتصف $\overline{DC}$

فى المثلث ADC : E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AD$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

أى أن طول $\overline{EF} = 6$ سم.

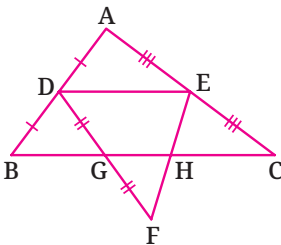
مثال 3

فى الشكل المقابل:

إذا كانت D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$ ،

G منتصف $\overline{DF}$ ،

برهن أن $BC = 4 GH$



فى المثلث ABC :

∴ D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$

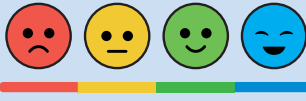
$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}, DE = \frac{1}{2} BC$$

فى المثلث FDE :

∴ H منتصف $\overline{EF}$

∴ G منتصف $\overline{DF}$ ، $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$

$$\therefore GH = \frac{1}{2} DE \quad \therefore GH = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) = \frac{1}{4} BC \quad \therefore BC = 4 GH$$



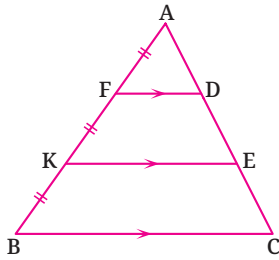
تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

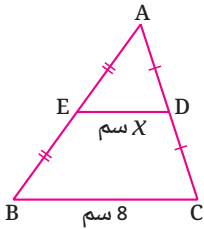


② في الشكل المقابل :

إذا كان $AC = 12$ سم

فما طول AE ؟

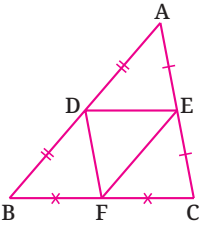
- (أ) 3 سم (ب) 4 سم
(ج) 6 سم (د) 8 سم



④ في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

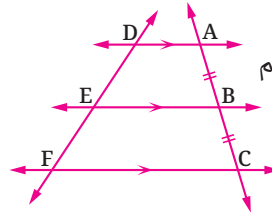
- (أ) 16 (ب) 8
(ج) 4 (د) 2



⑥ في الشكل المقابل :

إذا كان محيط $\triangle ABC$ يساوي 18 سم
فما محيط $\triangle DEF$ ؟

- (أ) 6 سم (ب) 12 سم
(ج) 36 سم (د) 9 سم

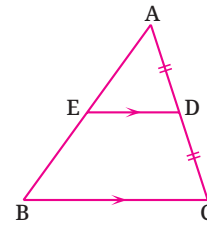


① في الشكل المقابل :

إذا كان طول $DF = 15$ سم

ما طول EF ؟

- (أ) 10 سم (ب) 7.5 سم
(ج) 5 سم (د) 2.5 سم

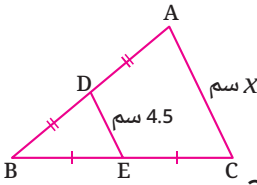


③ في الشكل المقابل :

إذا كان طول $EB = 10$ سم

ما طول AB ؟

- (أ) 20 سم (ب) 10 سم
(ج) 7.5 سم (د) 5 سم



⑤ في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

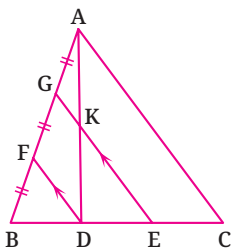
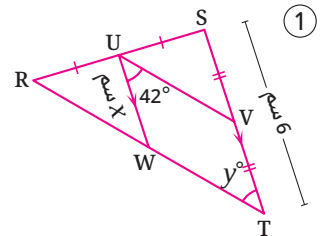
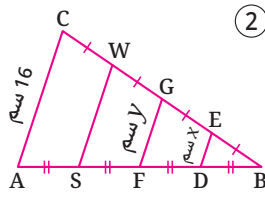
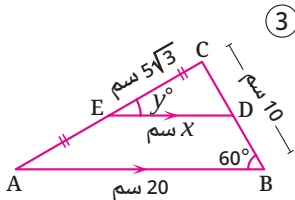
- (أ) 9 (ب) 4.5
(ج) 13.5 (د) 2.25



تطبيق المفاهيم

ثانياً

⑦ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من X ، Y :

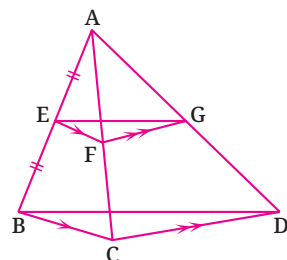


⑨ في الشكل المقابل :

$FD \parallel GE$ ، $GK = 8$ سم

$AG = GF = FB$

أوجد طول KE

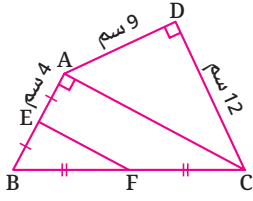


⑧ في الشكل المقابل :

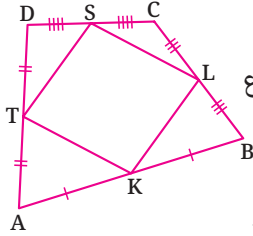
إذا كانت E منتصف AB ،

$FG \parallel CD$ ، $EF \parallel BC$

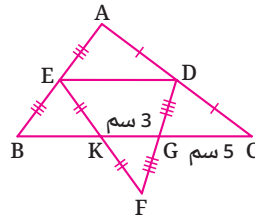
برهن أن $BD = 2 EG$



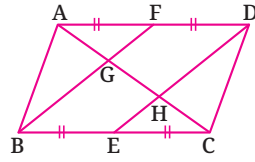
- 11 في الشكل المقابل :
 ABCD شكل رباعي فيه
 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ منتصفا F , E
 على الترتيب.
 أوجد مساحة ΔBEF



- 13 في الشكل المقابل :
 T , S , L , K منتصفات أضلاع
 الشكل الرباعي ABCD
 أثبت أن :
 الشكل KLSL متوازي أضلاع.



- 10 في الشكل المقابل :
 أوجد مع البرهان
 طول $\overline{BK}$



- 12 في الشكل المقابل :
 ABCD متوازي أضلاع ،
 إذا كانت F , E منتصفى
 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ على الترتيب.
 فأثبت أن : $AC = 3 AG$



يعكس التوزيع الأمثل لقطع الديكور طبقاً
 للمساحات وعياً جمالياً، ويضفي شعوراً بالراحة.



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

- 14 ديكور: الشكل المقابل يمثل مكتبة خشبية على
 شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3 م
 وبدخلها ثلاثة أرفف زجاجية.
 ما طول كل رف من الأرفف الثلاثة؟



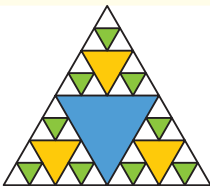
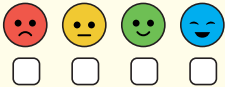
اختيار أماكن أمانة اللعب يقلل من
 خطر التعرض للإصابات.

- 15 تصميم هندسى: عند تصميم أرجوحة كما بالشكل المقابل كان
 طول العارضة الأفقية الواصلة بين منتصفى الساقين يساوى
 $3 \leq X \leq 4$ قدم ، حيث X
 أوجد أقل بُعد بين طرفى
 الساقين على الأرض.

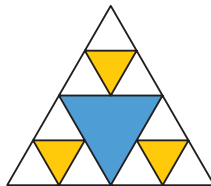
قيم فهمك!

ما مدى فهمك لتطبيقات
 التوازي؟

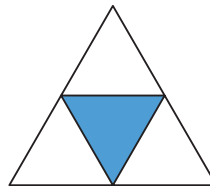
ضع علامة في المربع المناسب



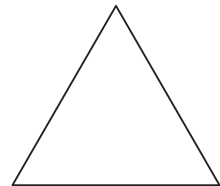
شكل (4)



شكل (3)



شكل (2)



شكل (1)

16



تفكير إبداعى

- شكل (1) يمثل مثلثاً محيطه 8 سم، وتم تلوين المثلث الناتج من القطع المتوسطة الثلاث كما بشكل (2)، ثم تكرر ذلك
 على المثلثات غير الملونة للحصول على شكل (3) ثم بذات النمط تكوّن شكل (4).
 احسب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (3). وهل تستطيع حساب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (4)؟

متوسطات المثلث (Medians of the Triangle)



استعد!

تُستخدم الطائرات بدون طيار فى مجالات متعددة، مثل التصوير الجوى، وأعمال الإنقاذ والمراقبة وغيرها، وتتزايد أهميتها مع تطور التكنولوجيا. أمامك طائرة بدون طيار تحتوى على ثلاثة أذرع، كل ذراع ينتهى بمحرك. إذا كانت هذه المحركات متطابقة، فأين يكون المركز الهندسى للطائرة ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إيجاد نقطة تقاطع متوسطات المثلث؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!



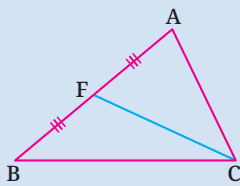
يبتكر مُصمّم ديكور طاولة مُخصصة لأحد العملاء. سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجى يحتاج إلى التوازن على دعامة واحدة. ففى أى نقطة يجب وضع الدعامة ؟ ناقش.



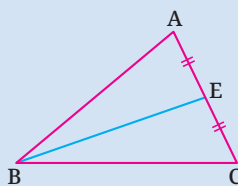
تعلم!

متوسط المثلث

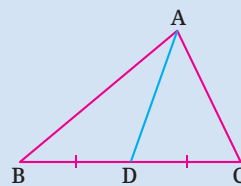
متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. كل مثلث له ثلاثة متوسطات كالتالى :



$\overline{CF}$ المتوسط
المرسوم من الرأس C



$\overline{BE}$ المتوسط
المرسوم من الرأس B



$\overline{AD}$ المتوسط
المرسوم من الرأس A

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم متوسط المثلث.
- تعرف نقطة تلاقى متوسطات المثلث.
- تعرف العلاقة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة وطول الوتر فى المثلث القائم الزاوية.
- تستخدم متوسطات المثلث فى حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

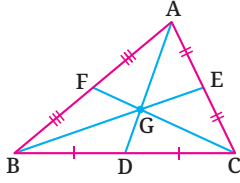
- متوسطات Medians
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث Centroid
- نقطة الاتزان Equilibrium point

■ فكر مع زملائك

إذا تقاطع متوسطان لمثلث في نقطة، فهل هذه النقطة هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث؟

نظرية 4-1

متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.



في الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ متوسطات المثلث ABC

فإن : $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

أي أن : النقطة G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

■ أضف إلى معلوماتك

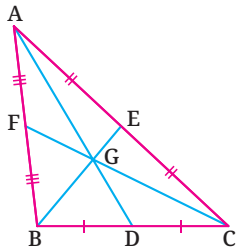
تسمى نقطة تقاطع متوسطات المثلث بالمركز الهندسي للمثلث أو نقطة الاتزان.

■ فكر مع زملائك

ما النسبة التي تقسم بها نقطة تقاطع متوسطات المثلث أيًا من متوسطاته من جهة القاعدة؟

نظرية 4-2

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة 2 : 1 من جهة الرأس.



في الشكل المقابل :

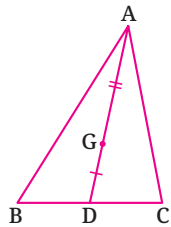
إذا كانت G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

فإن :

$$AG = 2 GD , \quad AG = \frac{2}{3} AD , \quad GD = \frac{1}{3} AD$$

نتيجة :

النقطة التي تقسم متوسط المثلث بنسبة 2 : 1 من جهة الرأس هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث.



في الشكل المقابل :

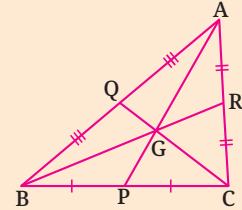
إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا في المثلث ABC

وكانت $G \in \overline{AD}$ بحيث $AG = 2 GD$

فإن G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

■ تقييم ذاتي ①

في الشكل التالي :
إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان $AP = 21$ سم ، $GQ = 5$ سم ، $BG = 16$ سم.



أوجد طول كل من :

$\overline{PG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BR}$

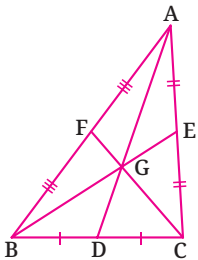
مثال 1

في الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

وكان : $AG = 8$ سم ، $GE = 3.5$ سم ، $CF = 7.5$ سم

أوجد طول كل من $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CG}$



$$\bullet AD = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

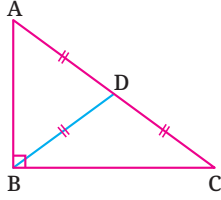
$$\bullet BE = 3 GE = 3 \times 3.5 = 10.5$$

$$\bullet CG = \frac{2}{3} CF = \frac{2}{3} \times 7.5 = 5$$

أي أن : طول $\overline{AD} = 12$ سم ، طول $\overline{BE} = 10.5$ سم ، طول $\overline{CG} = 5$ سم

نظرية 4-3

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث.



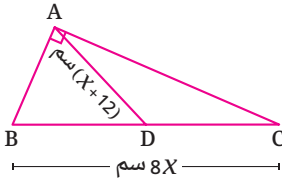
في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا مرسومًا من رأس القائمة B

$$\text{فإن : } BD = AD = DC = \frac{1}{2} AC$$

مثال 2

في الشكل المقابل :



المثلث ABC قائم الزاوية في A ، $\overline{AD}$ متوسط فيه.

أوجد طول $\overline{AD}$

∴ $\overline{AD}$ متوسط في المثلث ABC وخارج من رأس القائمة

$$\therefore AD = \frac{1}{2} BC$$

$$\therefore X + 12 = \frac{1}{2} \times 8X$$

$$\therefore X + 12 = 4X$$

$$\therefore 3X = 12$$

$$\therefore X = 4$$

$$\therefore AD = X + 12 = 4 + 12 = 16$$

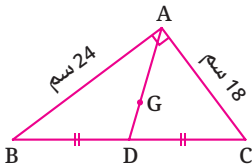
أي أن طول $\overline{AD}$ يساوي 16 سم.

مثال 3

في الشكل المقابل :

إذا كانت G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

القائم الزاوية في A ، أوجد طول $\overline{AG}$



∴ المثلث ABC قائم الزاوية في A

$$\therefore (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \text{ (نظرية فيثاغورس)}$$

$$= (24)^2 + (18)^2 = 900$$

$$\therefore BC = \sqrt{900} = 30$$

∴ $\overline{AD}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$$\therefore AD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 30 = 15$$

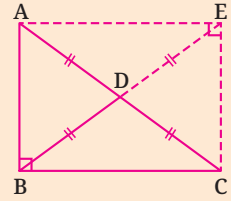
∴ G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

$$\therefore AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 15 = 10$$

أي أن طول $\overline{AG}$ يساوي 10 سم

ناقش إثبات صحة النظرية

أكمل رسم المستطيل.



قطرا المستطيل متساويان في الطول وينصف كل منهما الآخر. أي أن :

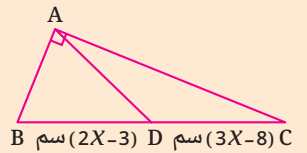
$$BD = AD = DC = DE \\ = \frac{1}{2} AC$$

تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا في المثلث

ABC القائم الزاوية في A



أوجد طول $\overline{AD}$

تقييم ذاتي 3

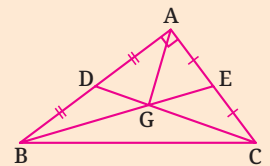
في الشكل التالي :

إذا كانت D , E منتصفى

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على الترتيب ،

$$\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{G\}$$

$$AG = 5 \text{ سم} , AG = 9 \text{ سم}$$



أوجد طول $\overline{AB}$

■ تقييم ذاتي ④

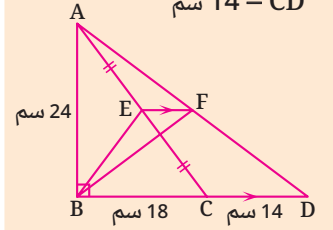
في الشكل التالي :

إذا كانت $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ ، $C \in \overline{BD}$ ،

E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ،

AB = 24 سم ، BC = 18 سم

CD = 14 سم



أوجد محيط المثلث BEF

مثال 4

في الشكل المقابل :

إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية في B

$\overline{CE}$ ، $\overline{BD}$ متوسطين فيه ، $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ ، EF = 5 سم

أوجد طول $\overline{AC}$

✓ في المثلث ABD :

∴ E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$:

∴ F منتصف $\overline{AD}$:

$$\therefore EF = \frac{1}{2} BD \quad \therefore BD = 2 \times 5 = 10$$

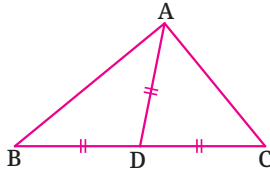
∴ $\overline{BD}$ متوسط في المثلث ABC القائم الزاوية في B

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AC \quad \therefore AC = 2 \times 10 = 20$$

أي أن طول $\overline{AC}$ يساوي 20 سم.

عكس نظرية (3 - 4)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس ، فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.



في الشكل المقابل :

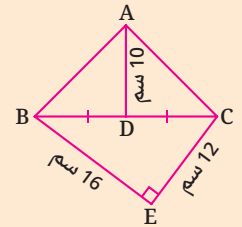
إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا مرسومًا من الرأس A ،

وكان : $AD = BD = CD = \frac{1}{2} BC$

فإن : $m(\angle BAC) = 90^\circ$

■ تقييم ذاتي ⑤

في الشكل التالي :



إذا كانت D منتصف $\overline{BC}$

أثبت أن : $m(\angle BAC) = 90^\circ$

مثال 5

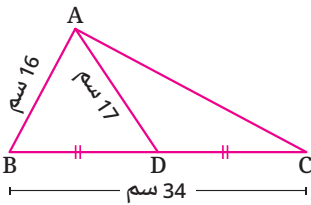
في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا في المثلث ABC

فأثبت أن : $m(\angle BAC) = 90^\circ$

ثم أوجد مساحة المثلث ABC

✓



$$\therefore AD = 17 , BC = 34$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} BC$$

$$\therefore m(\angle BAC) = 90^\circ$$

من نظرية فيثاغورس تجد أن :

$$(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2 \\ = (34)^2 - (16)^2 = 900$$

$$\therefore AC = \sqrt{900} = 30$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 16 = 240 \text{ سم}^2$$



تقييم الدرس



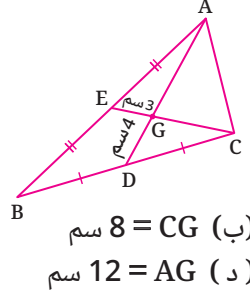
قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

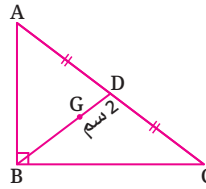
1 في الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تلاقي
متوسطات المثلث ABC ،
GE = 3 سم ، GD = 4 سم
فأى مما يلي صحيح ؟
(أ) AG = 6 سم
(ج) CE = 9 سم
(ب) CG = 8 سم
(د) AG = 12 سم



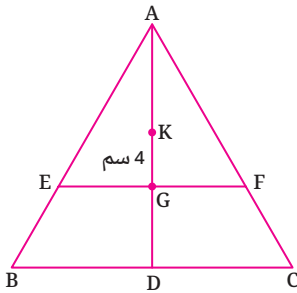
3 في الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات
المثلث ABC القائم الزاوية في B ،
GD = 2 سم ، فما طول AC ؟
(أ) 8 سم
(ج) 18 سم
(ب) 12 سم
(د) 24 سم



5 في الشكل المقابل :

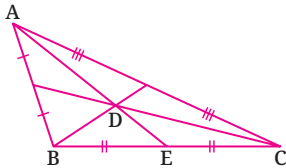
إذا كانت G نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ،
K نقطة تلاقي متوسطات المثلث AEF فما طول GD ؟
(أ) 2 سم
(ج) 6 سم
(ب) 4 سم
(د) 8 سم



اكتشف الخطأ :

6 قام كل من باسم وسامح بحل المسألة التالية :

في الشكل المقابل : إذا كان طول $\overline{AE} = 48$ سم ، فما طول $\overline{DE}$ ؟



حل سامح :

$$\begin{aligned} DE &= \frac{1}{3} AE \\ DE &= \frac{1}{3} (48) \\ DE &= 16 \end{aligned}$$

حل باسم :

$$\begin{aligned} DE &= \frac{2}{3} AE \\ DE &= \frac{2}{3} (48) \\ DE &= 32 \end{aligned}$$

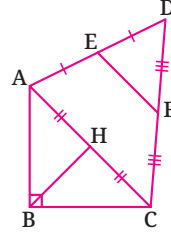
أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل ؟ ناقش.



تطبيق المفاهيم

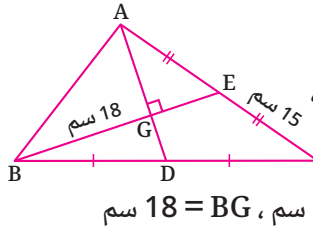
ثانياً

7 في الشكل المقابل :



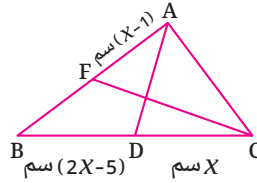
إذا كان $\overline{BH}$ متوسطاً في المثلث ABC القائم الزاوية في B ، F, E منتصفى $\overline{CD}, \overline{AD}$ على الترتيب
أثبت أن : $BH = EF$

9 في الشكل المقابل :



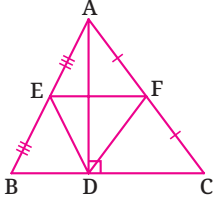
إذا كانت E منتصف $\overline{AC}$ ، D منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BE}$
أوجد بالبرهان طول $\overline{AD}$

11 في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{AD}, \overline{CF}$ متوسطين في المثلث ABC
أوجد طول $\overline{FB}$

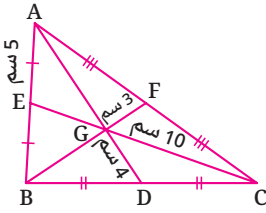
8 في الشكل المقابل :



المثلث فيه $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، E, F منتصفى $\overline{AB}, \overline{AC}$ على الترتيب.

أثبت أن : محيط المثلث $EFD = \frac{1}{2}$ محيط المثلث ABC

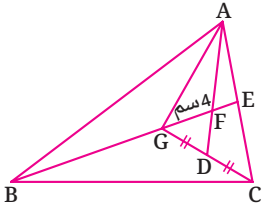
10 في الشكل المقابل :



نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، $AE = 5$ سم
 $CG = 10$ سم
 $GF = 3$ سم ، $GD = 4$ سم

أوجد بالبرهان مساحة المثلث ABD

12 في الشكل المقابل :



نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، $DC = DG$ ، $GF = 4$ سم
أوجد بالبرهان طول $\overline{BE}$



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

13 تصميم هندسى : توجد ثلاثة مسارات داخل حديقة مثلثة الشكل ، كل مسار هو متوسط للمثلث الذى يمثل الحديقة، تتقاطع هذه المسارات فى نقطة

تلاقي المتوسطات.

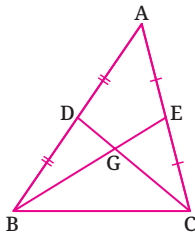
① إذا كانت $DC = 81$ م ، أوجد كلاً من DG, CG

② إذا كانت $GF = 25$ م ، أوجد كلاً من GA, AF



تفكير إبداعى

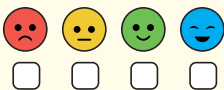
14 في الشكل المقابل :



إذا كان $BE = 15$ سم ، $CD = 9$ سم
أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول $\overline{BC}$

قيم فهمك!

مامدى فهمك لمتوسطات المثلث ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



المثلث المتساوي الساقين (Isosceles Triangle)



استعد!

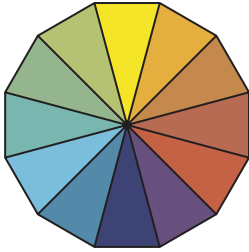
مدينة دهب المصرية التابعة لمحافظة جنوب سيناء ليست مجرد مدينة ساحلية بل هي من أجمل المدن السياحية في العالم. إذا قام عادل وصديقه ياسر بإعداد خيمة مثلثة الوجه للتخييم في أحد شواطئ دهب، ما ارتفاع الخيمة تقريبًا؟

في هذا الدرس، سوف نتعرف على المثلث المتساوي الساقين، والمثلث المتساوي الأضلاع، ومحاور تماثلها؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

يستخدم الفنانون عجلة الألوان لإظهار العلاقات بين الألوان. المثلثات الاثنا عشر في الشكل هي مثلثات متساوية الساقين، وزوايا رؤوسها متطابقة. فهل يمكنك إيجاد قياس الزوايا الداخلة في أي مثلث من هذه المثلثات؟ ناقش.

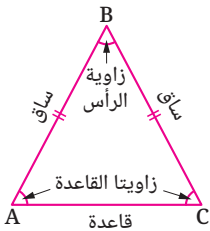


تعلم!

المثلث المتساوي الساقين

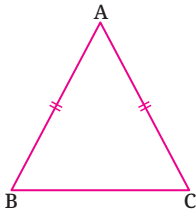
المثلث المتساوي الساقين هو مثلث يحتوي على ضلعين متطابقين.

- يُسمى الضلعان المتطابقان ساقى المثلث.
- تُسمى الزاوية المحصورة بينهما زاوية الرأس.
- تُسمى الزاويتان الأخريان زاويتي القاعدة.



نظرية 5-1 نظرية المثلث المتساوي الساقين

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان.



في المثلث ABC :

إذا كانت : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

فإن : $\angle B \cong \angle C$

■ نواتج التعلم

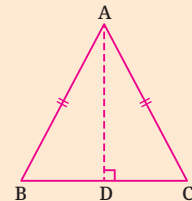
- تعرف خواص المثلث المتساوي الساقين.
- تعرف خواص المثلث المتساوي الأضلاع.
- تعرف التماثل في المثلث.
- تعرف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث الثلاثيني الستيني.
- تستخدم خواص المثلث المتساوي الساقين والمثلث المتساوي الأضلاع في حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

- مثلث متساوي الساقين
- Isosceles triangle
- مثلث متساوي الأضلاع
- Equilateral triangle
- Leg الساق
- Base القاعدة
- محور التماثل
- Axis of symmetry

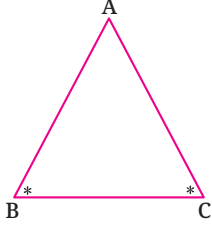
■ ناقش إثبات صحة نظرية (5-1)

نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، ومن تطابق المثلثين ABD ، ACD يمكن إثبات أن : $\angle B \cong \angle C$



عكس نظرية (1 - 5) عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.



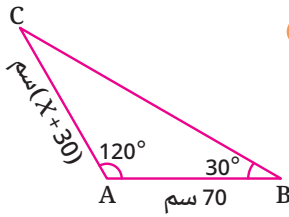
في المثلث ABC :

إذا كانت : $\angle B \cong \angle C$

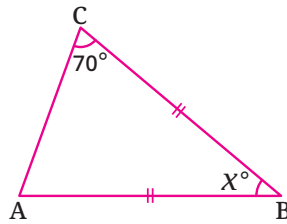
فإن : $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

مثال 1

أوجد قيمة X في كل من الشكلين الآتيين :



2



1

$$\therefore m(\angle C) = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

$$\therefore \angle C \cong \angle B \quad \therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$$

$$\therefore X + 30 = 70$$

$$\therefore X = 70 - 30 = 40$$

2

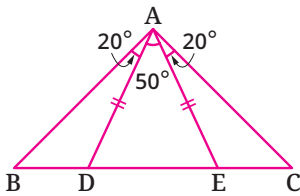
$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{CB} \quad \therefore \angle A \cong \angle C$$

$$\therefore m(\angle A) = m(\angle C) = 70^\circ$$

$$\therefore m(\angle B) = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$$

$$\therefore X = 40$$

1



مثال 2

في الشكل المقابل :

$E \in \overline{BC}$, $D \in \overline{BC}$

أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين.

في المثلث ADE :

$$\therefore \overline{AD} \cong \overline{AE}$$

$$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle AED) = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

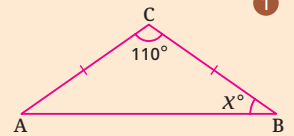
$$\therefore m(\angle B) = m(\angle C) = 180^\circ - (20^\circ + 115^\circ) = 45^\circ$$

$$\therefore \angle B \cong \angle C \quad \therefore \overline{AB} \cong \overline{AC}$$

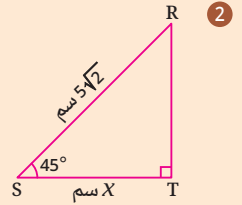
$\therefore$ المثلث ABC متساوي الساقين.

■ تقييم ذاتي 1

أوجد قيمة X في كل من الشكلين الآتيين :



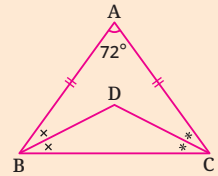
1



2

■ تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي :



$$AB = AC, m(\angle A) = 72^\circ$$

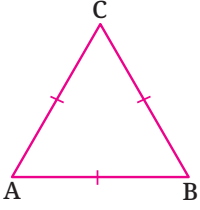
$\overline{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\overline{CD}$ ينصف $\angle ACB$

أثبت أن :

المثلث DBC متساوي الساقين.

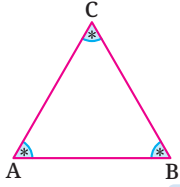
المثلث المتساوي الأضلاع



المثلث المتساوي الأضلاع هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

نتيجة:

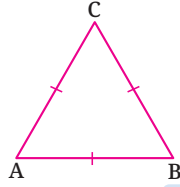
المثلث الذي زواياه الثلاث متطابقة
أضلاعه متساوية في الطول.



في المثلث ABC :
إذا كانت :
 $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$
فإن :
 $AB = AC = BC$

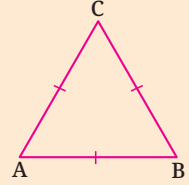
نتيجة:

المثلث المتساوي الأضلاع زواياه
الثلاث متطابقة.



في المثلث ABC :
إذا كان :
 $AB = AC = BC$
فإن :
 $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

ناقش إثبات صحة النتائج



استخدم نظرية المثلث المتساوي الساقين وعكسها في إثبات صحة النتائج المجاورة.

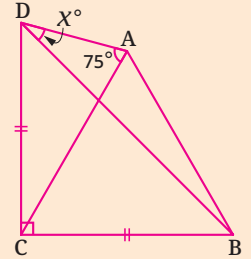
تقييم ذاتي 3

في الشكل التالي :

ABC مثلث متساوي الأضلاع
 $BC = CD$

$m(\angle DAC) = 75^\circ$

$m(\angle DCB) = 90^\circ$



أوجد مع البرهان قيمة X .

مثال 3

في الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوي الأضلاع.

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$, $CF = CD$

أوجد قيمة X

∴ $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.

$$\therefore m(\angle ACB) = m(\angle A) = m(\angle B) = 60^\circ$$

$$\therefore m(\angle FCD) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

∴ $\triangle FCD$ متساوي الساقين فيه : $CF = CD$

$$\therefore m(\angle D) = m(\angle CFD) = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

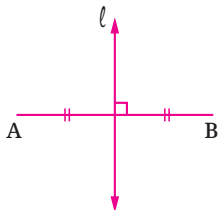
∴ $\angle AED$ خارجة عن المثلث EBD

$$\therefore m(\angle AED) = m(\angle B) + m(\angle D) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore X = 90$$

محور تماثل القطعة المستقيمة

محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها من نقطة منتصفها.



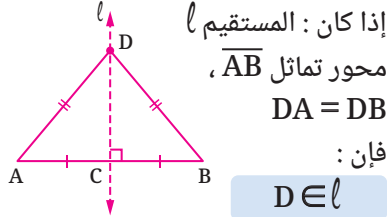
إذا كان : المستقيم $l \perp \overline{AB}$ ، المستقيم l ينصف $\overline{AB}$

فإن : المستقيم l محور تماثل $\overline{AB}$.

نتائج محور تماثل القطعة المستقيمة

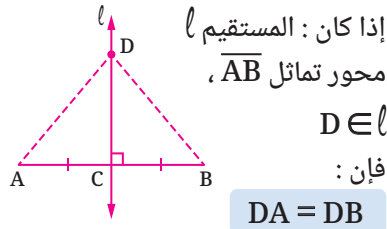
نتيجة:

النقطة التي على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على محور تماثل هذه القطعة المستقيمة.



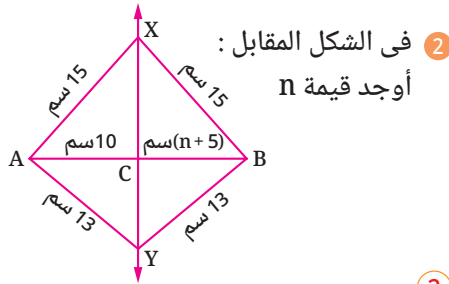
نتيجة:

النقطة التي تنتمي إلى محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

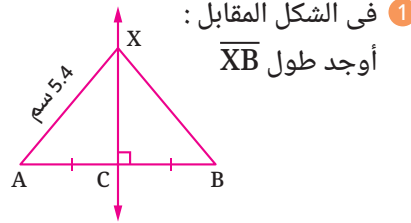


مثال 4

■ تقييم ذاتي 4

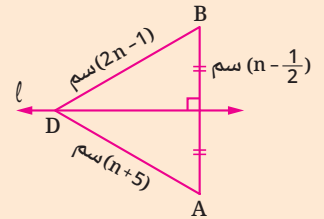


- ② في الشكل المقابل: أوجد قيمة n
 - ①
- $\therefore XA = XB = 15$
 $\therefore X$ تقع على محور تماثل $\overline{AB}$
 $\therefore YA = YB = 13$
 $\therefore Y$ تقع على محور تماثل $\overline{AB}$
 $\therefore \overline{XY}$ محور تماثل $\overline{AB}$
 $\therefore \overline{XY} \perp \overline{AB}$, $CB = CA$
 $\therefore n + 5 = 10$
 $\therefore n = 10 - 5 = 5$



- ① في الشكل المقابل: أوجد طول $\overline{XB}$
 - ②
- $\therefore CA = CB$, $\overline{XC} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{XC}$ محور تماثل $\overline{AB}$
 $\therefore X \in \overline{XC}$
 $\therefore XB = XA = 5.4$
 $\therefore$ طول $\overline{XB} = 5.4$ سم

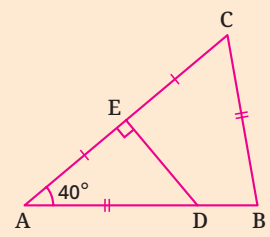
1 في الشكل التالي:



أوجد: $m(\angle A)$

2 في الشكل التالي:

$AE = EC$, $AD = CB$



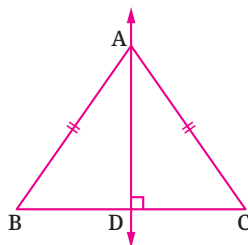
أوجد: $m(\angle C)$

■ لاحظ أن

- المثلث المتساوي الساقين له محور تماثل واحد فقط.
- المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل.
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل.

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو مستقيم يمر برأس المثلث وعمودي على قاعدته.

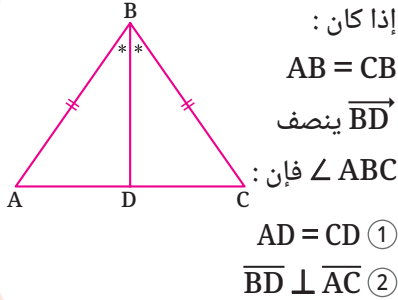


إذا كان: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $AB = AC$
 فإن: $\overline{AD}$ محور تماثل المثلث ABC

نتائج محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

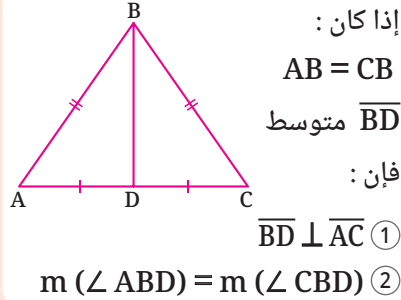
نتيجة:

منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.



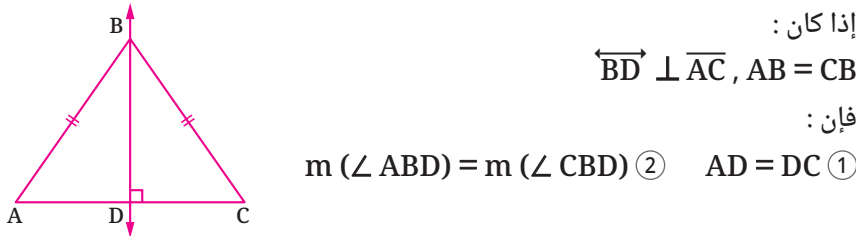
نتيجة:

متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.



نتيجة:

المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة وزاوية الرأس.



مثال 5

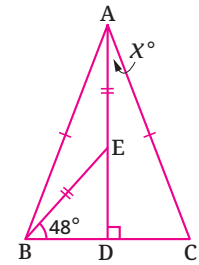
في الشكل المقابل :

$$\overline{AD} \perp \overline{BC} , EA = EB , AB = AC$$

$$m(\angle EBD) = 48^\circ$$

أوجد قيمة X

في المثلث EDB :



$$m(\angle DEB) = 180^\circ - (90^\circ + 48^\circ) = 42^\circ$$

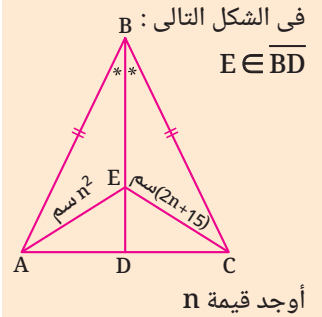
$\therefore \angle DEB$ خارجة عن المثلث AEB , $EA = EB$

$$\therefore m(\angle EAB) = m(\angle EBA) = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$$

$\therefore$ المثلث ABC متساوي الساقين , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

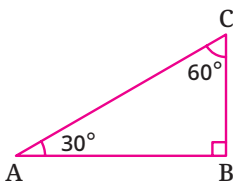
$$\therefore m(\angle CAD) = m(\angle BAD) = 21^\circ \quad \therefore X = 21$$

■ تقييم ذاتي 5

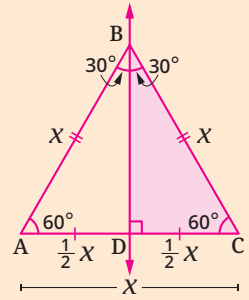


المثلث الثلاثيني الستيني

المثلث الثلاثيني الستيني هو مثلث قائم الزاوية زاويتاه الحادتان قياسهما 30° , 60° .



■ لاحظ أن

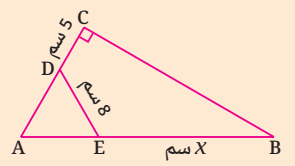


محور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين، وكل منهما مثلث ثلاثيني ستيني.

■ تقييم ذاتي 6

في الشكل التالي :

المثلث ADE متساوي الأضلاع.



أوجد قيمة X

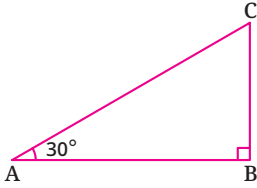
نتيجة :

في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° يساوي نصف طول الوتر.

إذا كان :

$m(\angle A) = 30^\circ$ ، ΔABC قائم الزاوية في B

فإن : $BC = \frac{1}{2} AC$



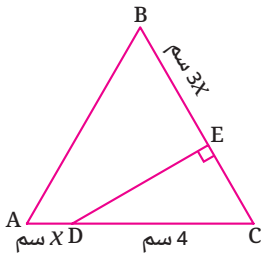
مثال 6

في الشكل المقابل :

إذا كان ΔABC متساوي الأضلاع

فأوجد قيمة X

✓ ΔABC متساوي الأضلاع



$$\therefore m(\angle C) = 60^\circ$$

$$\therefore m(\angle DEC) = 90^\circ$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\therefore BC = AC \quad \therefore 3X + 2 = X + 4 \quad \therefore 3X - X = 4 - 2$$

$$\therefore 2X = 2 \quad \therefore X = 1$$

$$\therefore m(\angle EDC) = 30^\circ$$

$\therefore$ المثلث DEC ثلاثيني ستيني



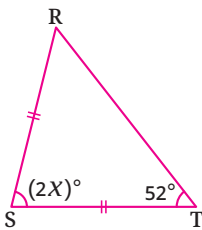
تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

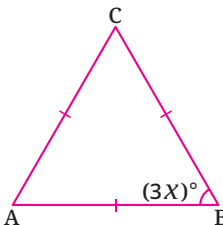


② في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

(أ) 26 (ب) 52

(ج) 76 (د) 38

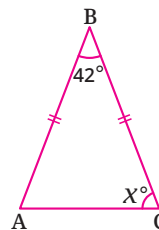


④ في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

(أ) 10 (ب) 20

(ج) 30 (د) 60

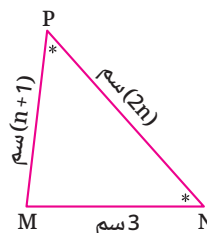


① في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

(أ) 42 (ب) 21

(ج) 69 (د) 84



③ في الشكل المقابل :

ما طول PN ؟

(أ) 8 سم (ب) 3 سم

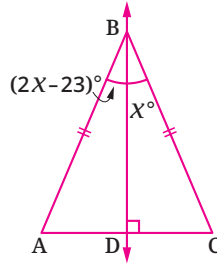
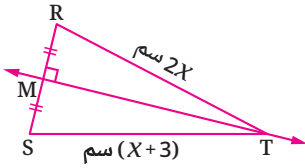
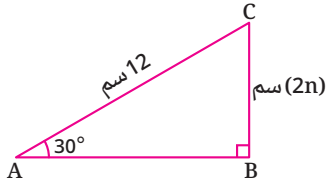
(ج) 6 سم (د) 4 سم

- 5 إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين 3 سم، 7 سم، فما طول الضلع الثالث؟
 (أ) 3 سم (ب) 4 سم
 (ج) 7 سم (د) 10 سم

- 7 في الشكل المقابل :
 ما قياس $\angle C$ ؟
 (أ) 23° (ب) 46°
 (ج) 67° (د) 60°

- 6 في الشكل المقابل :
 ما قيمة n ؟
 (أ) 3 (ب) 6
 (ج) 9 (د) 12

- 8 في الشكل المقابل :
 ما قيمة X ؟
 (أ) 10 (ب) 7
 (ج) 5 (د) 3

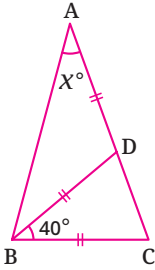


تطبيق المفاهيم

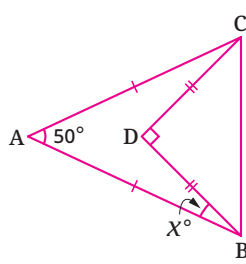
ثانياً

في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة X :

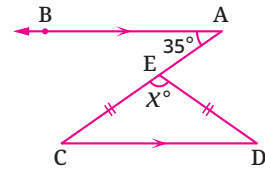
11



10

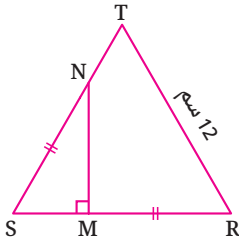


9



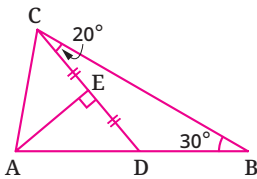
12 في الشكل المقابل :

المثلث SRT متساوي الأضلاع، وطول ضلعه 12 سم
 $MR = SN$ ، $NM \perp SR$
 أوجد مع البرهان طول NM



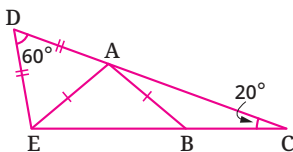
13 في الشكل المقابل :

$m(\angle B) = 30^\circ$ ، $m(\angle DCB) = 20^\circ$
 $CE = DE$ ، $AE \perp CD$
 أوجد مع البرهان : $m(\angle CAE)$

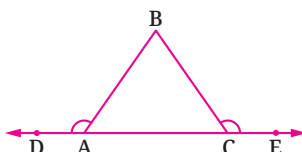


في كل من الأشكال الآتية أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين :

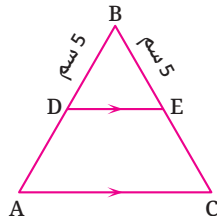
17



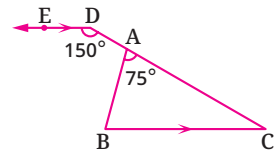
16



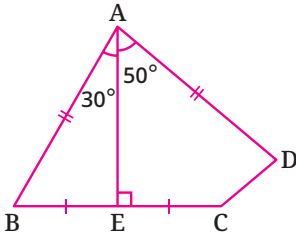
15



14

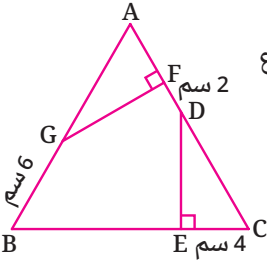


أجب عن الأسئلة التالية :



19 في الشكل المقابل :

أوجد $m(\angle D)$



21 في الشكل المقابل :

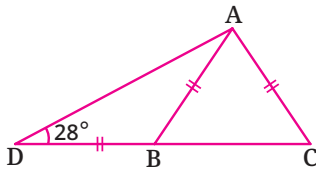
المثلث ABC متساوي الأضلاع

أو $EC = 4$ سم ، $FD = 2$ سم ،

$GB = 6$ سم

أوجد مع البرهان

محيط $\triangle ABC$



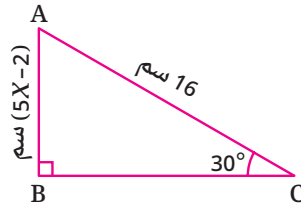
23 في الشكل المقابل :

$B \in \overline{DC}$

$m(\angle D) = 28^\circ$

أوجد مع البرهان

$m(\angle CAD)$

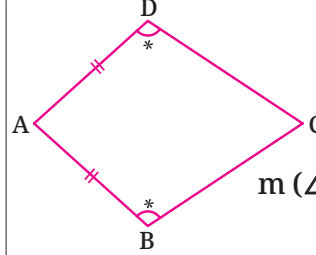


18 في الشكل المقابل :

أوجد قيمة X ،

وأوجد مساحة

المثلث ABC



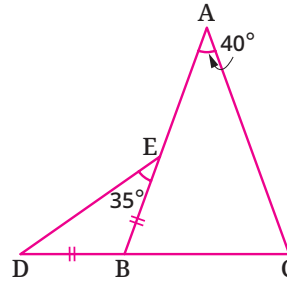
20 في الشكل المقابل :

شكل رباعى

فيه $AB = AD$

$m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$

برهن أن : $BC = DC$



22 في الشكل المقابل :

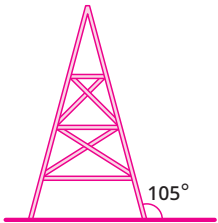
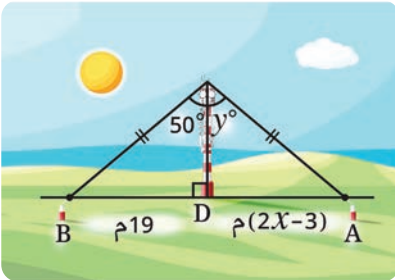
$D \in \overline{CB}$

$m(\angle DEB) = 35^\circ$

$m(\angle A) = 40^\circ$

$BE = BD$

أثبت أن : $AB = AC$



التحليل وتكامل المواد

ثالثا

24 اتصالات : برج اتصالات مثبت بالأرض بواسطة سلكين

متساويين في الطول في النقطتين A , B بحيث قاعدة

البرج D تقع على $\overline{AB}$ كما بالشكل.

ما قيمة كل من X , Y التي تجعل البرج عمودياً على الأرض ؟

25 أبراج مراقبة : بُنى برج مراقبة ، وُصم على شكل مثلث

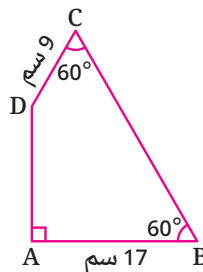
متساوي الساقين كما بالشكل.

إذا كان أحد أضلاع البرج يلتقى بالأرض بزاوية قياسها 105° ،

فما قياس الزاوية عند قمته ؟



تفكير إبداعي



26 في الشكل المقابل :

أوجد مع البرهان طول $\overline{BC}$

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للمثلث المتساوي الساقين؟

ضع علامة في المربع المناسب



الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات

(Interior and Exterior Angles of Polygons)



مبنى الأوكتاجون فى العاصمة الإدارية الجديدة



استعد!

مبنى الأوكتاجون هو المقر الجديد لوزارة الدفاع المصرية بالعاصمة الإدارية الجديدة، ويُعد أحد أكبر وأحدث مقرات وزارات الدفاع فى العالم. هل تستطيع إيجاد قياس الزاوية الداخلة للمضلع الذى يمثله هذا المبنى؟

■ نواتج التعلم

- تعرف الصيغة الرياضية لحساب مجموع قياسات زوايا المضلع المحدب الداخلة.
- تعرف مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب.
- تعرف الصيغة الرياضية لحساب قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم.
- تعرف الصيغة الرياضية لحساب عدد أقطار المضلع المحدب.

■ المفردات

- مضلع Polygon
- مضلع منتظم Regular polygon
- مضلع محدب Convex polygon
- زاوية داخلة Interior angle
- زاوية خارجة Exterior angle

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على كيفية حساب مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع المحدب، وحساب قياس زاوية المضلع المنتظم؛ مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش!

أثناء تنظيم قاعة مؤتمرات استخدم المنظم طاولات متطابقة كل منها على شكل شبه منحرف متساوى الساقين. كم طاولة يحتاجها المنظم لتكوين مضلع منتظم؟ ناقش.



تعلم!

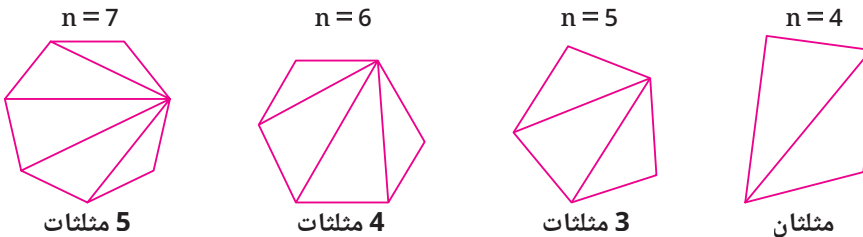
الصيغة الرياضية لمجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب $(n - 2) \times 180^\circ$ حيث n عدد أضلاع المضلع.

فمثلاً:

- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الخماسى المحدب $540^\circ = (5 - 2) \times 180^\circ$
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الثمانى المحدب $1080^\circ = (8 - 2) \times 180^\circ$

◀ يمكن استنتاج الصيغة السابقة بملاحظة النمط التالى :



- الأقطار المرسومة من أحد رؤوس المضلع تقسم المضلع إلى عدد من المثلثات $(n-2)$ مثلث.
- كل مثلث مجموع قياسات زواياه الداخلية $= 180^\circ$.
- مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع $= 180^\circ \times \text{عدد المثلثات}$
 $(n-2) \times 180^\circ =$

مثال 1

في كل مما يأتي، أوجد عدد أضلاع المضلع المحدب الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية :

$$(n-2) \times 180^\circ = 1440^\circ \quad (2)$$

$$\therefore n-2 = \frac{1440^\circ}{180^\circ} = 8$$

$$\therefore n = 8 + 2 = 10$$

$\therefore$ عدد الأضلاع = 10 أضلاع

$$(n-2) \times 180^\circ = 720^\circ \quad (1)$$

$$\therefore n-2 = \frac{720^\circ}{180^\circ} = 4$$

$$\therefore n = 4 + 2 = 6$$

$\therefore$ عدد الأضلاع = 6 أضلاع



نجارة : يصنع نجار خزانة خشبية لوضعها في أحد أركان غرفة مستطيلة الشكل. فإذا صنع النجار الخزانة بالزوايا الموضحة بالشكل فهل هي مناسبة أم لا ؟

لكي تكون الخزانة مناسبة

يجب أن يكون $m(\angle A) = 90^\circ$

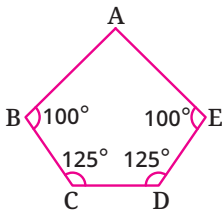
احسب مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الخماسي كالتالي :

$$(n-2) \times 180^\circ = (5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$$

$$\therefore m(\angle A) + 100^\circ + 125^\circ + 125^\circ + 100^\circ = 540^\circ$$

$$\therefore m(\angle A) = 540^\circ - 450^\circ = 90^\circ$$

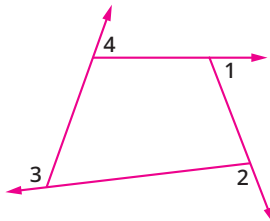
$\therefore$ الخزانة مناسبة لوضعها في أحد أركان الغرفة.



مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب

قاعدة

مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب (زاوية واحدة عند كل رأس) يساوي 360°



في الشكل المقابل :

$$m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) + m(\angle 4) = 360^\circ$$

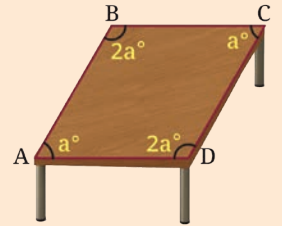
تقييم ذاتي 1

ما عدد أضلاع المضلع المحدب الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية 1260° ؟

تقييم ذاتي 2

في الشكل التالي :

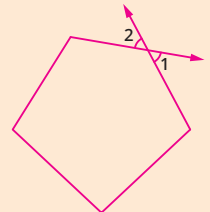
طاولة طعام سطحها على شكل متوازي أضلاع.



أوجد : $m(\angle D)$

لاحظ أن

لأي مضلع محدب توجد زاويتان خارجتان عند كل رأس من رؤوسه كما بالشكل.

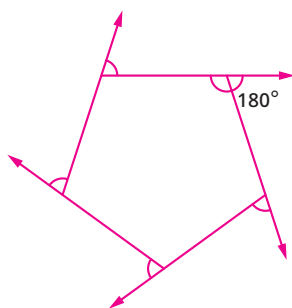


هاتان الزاويتان متقابلتان بالرأس، لذلك فهما متساويتان في القياس.

■ فكر وناقش

ناقش صحة العبارة التالية :

مجموع قياسات الزوايا الخارجة (واحدة عند كل رأس) للمضلعين السداسي المحدب، وذى الاثنى عشر ضلعًا المحدب متساويان.



يمكن استنتاج القاعدة السابقة بملاحظة أنه لأي مضلع محدب عدد أضلاعه يساوى n

• عند كل رأس يوجد زوج من الزوايا، إحداها خارجة والأخرى داخلية، مجموع قياسيهما 180° .

• مجموع قياسات أزواج الزوايا عند كل رؤوس المضلع $180^\circ n$

• مجموع قياسات الزوايا الخارجة (واحدة عند كل رأس) هو :

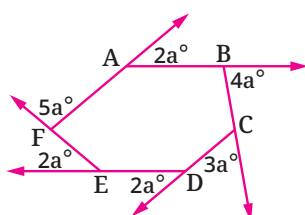
$$180^\circ n - (n-2) \times 180^\circ = 180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 360^\circ$$

■ مثال 3

فى الشكل المقابل :

أوجد : ① قيمة a

② $m(\angle BCD)$



∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب 360°

$$\therefore 2a + 4a + 3a + 2a + 2a + 5a = 360^\circ$$

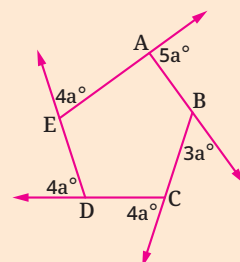
$$\therefore 18a = 360 \quad \therefore a = \frac{360}{18} = 20 \quad (\text{المطلوب ①})$$

∴ قياس الزاوية الخارجة عند الرأس $C = 3 \times 20^\circ = 60^\circ$

$$\therefore m(\angle BCD) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad (\text{المطلوب ②})$$

■ تقييم ذاتى 3

فى الشكل التالى :



أوجد : $m(\angle BCD)$

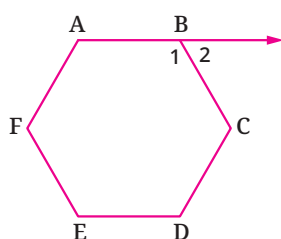
الصيغة الرياضية لقياس زاوية المضلع المنتظم

فى المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه n ضلعًا يكون :

$$\bullet \text{ قياس الزاوية الداخلة} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

$$\bullet \text{ قياس الزاوية الخارجة عند أحد رؤوسه} = \frac{360^\circ}{n}$$

مثال :



$$\begin{aligned} \bullet m(\angle 1) &= \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} \\ &= \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ \\ \bullet m(\angle 2) &= \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \end{aligned}$$

■ تذكر أن

المضلع المنتظم هو مضلع متحقق فيه الخاصيتان :

- ① جميع أضلاعه متساوية فى الطول.
- ② جميع زواياه الداخلة متساوية فى القياس.

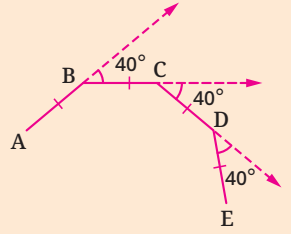
■ فكر وناقش

ناقش صحة العبارتين التاليتين :

- ① قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه 9 يساوى 140°
- ② قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الخماسى المنتظم عند أحد رؤوسه 108°

■ تقييم ذاتي 4

في الشكل التالي :



ما عدد أضلاع المضلع المنتظم عند اكتمال رسمه بنفس النمط ؟

■ مثال 4

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم في كل مما يأتي :

① إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة 150°

② إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة 24°

① ∴ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الداخلة 150°

$$\therefore \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = 150^\circ$$

$$\therefore 180^\circ n - 360^\circ = 150^\circ n$$

$$\therefore 30^\circ n = 360^\circ$$

$$\therefore 180^\circ n - 150^\circ n = 360^\circ$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$$

∴ عدد أضلاع المضلع = 12 ضلعًا.

② ∴ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الخارجة 24°

$$\therefore \frac{360^\circ}{n} = 24^\circ$$

$$\therefore 24^\circ n = 360^\circ \quad \therefore n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15$$

∴ عدد أضلاع المضلع = 15 ضلعًا.

الصيغة الرياضية لعدد أقطار المضلع المحدب

عدد أقطار المضلع المحدب الذي عدد أضلاعه n ضلعًا يساوي $\frac{n(n-3)}{2}$

■ مثال 5

① أوجد عدد أقطار المضلع الثماني المحدب.

② أوجد عدد أضلاع مضلع محدب عدد أقطاره 35 قطرًا.

$$\text{① عدد أقطار المضلع الثماني المحدب} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20 \text{ قطرًا.}$$

$$\text{② ∴ عدد الأقطار} = 35$$

$$\therefore \frac{n(n-3)}{2} = 35 \quad \therefore n(n-3) = 70$$

$$\therefore n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$\therefore (n+7)(n-10) = 0$$

ومنها $n = -7$ (مرفوض)

∴ إما $n + 7 = 0$

ومنها $n = 10$

أو $n - 10 = 0$

∴ عدد الأضلاع = 10 أضلاع.

■ تقييم ذاتي 5

أوجد كلاً مما يأتي :

① عدد أقطار المضلع

الخماسي المحدب.

② عدد أضلاع مضلع محدب

له 27 قطرًا.



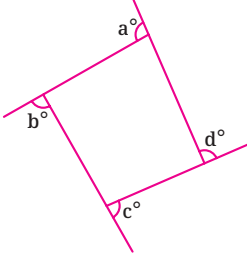
تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



2 في الشكل المقابل :

ما قيمة $a + b + c + d$ ؟

(أ) 180 (ب) 360

(ج) 540 (د) 720

4 ما قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم ذي 18 ضلعاً ؟

(أ) 135° (ب) 144°

(ج) 150° (د) 160°

6 ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس إحدى زواياه الداخلة 144° ؟

(أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 14

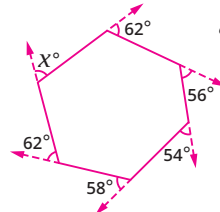
8 ما عدد أقطار المضلع السباعي المحيط ؟

(أ) 7 (ب) 11 (ج) 13 (د) 14

1 ما مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسي المحيط ؟

(أ) 900° (ب) 720°

(ج) 540° (د) 360°



3 في الشكل المقابل : ما قيمة X ؟

(أ) 58 (ب) 62

(ج) 68 (د) 72

5 ما عدد أضلاع المضلع المحيط الذي مجموع قياسات زواياه الداخلة 2340° ؟

(أ) 12 (ب) 13 (ج) 14 (د) 15

7 ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس إحدى زواياه الخارجة 20° ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 16 (د) 18

اكتشف الخطأ :

9 قامت كل من أمل وسمر بإيجاد قياس الزاوية الخارجة لخماسي منتظم، أي منهن حلها صحيح ؟ ولماذا ؟

حل سمر :

يوجد عدد 10 زوايا خارجية للخماسي

قياس الزاوية الخارجة E

$$E = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

حل أمل :

$$(n - 2) 180^\circ = (5 - 2) 180^\circ$$

$$= 3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

قياس الزاوية الخارجة E

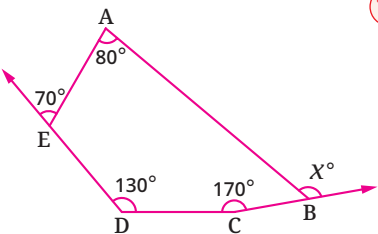
$$E = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$



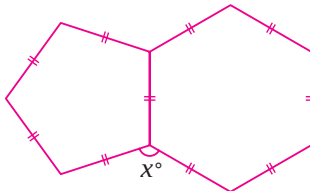
تطبيق المفاهيم

ثانياً

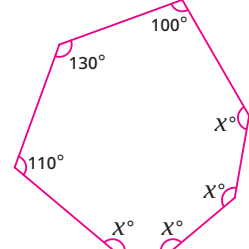
في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة X :



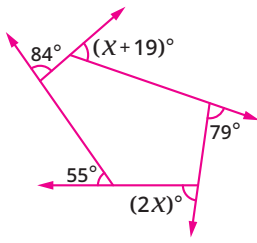
12



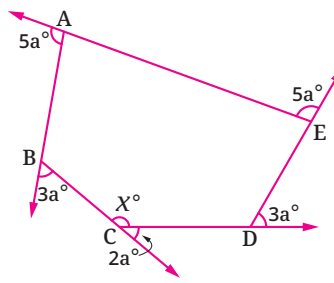
11



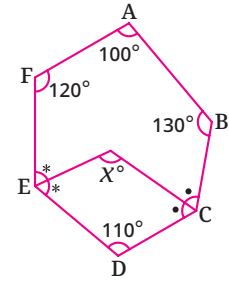
10



15



14



13

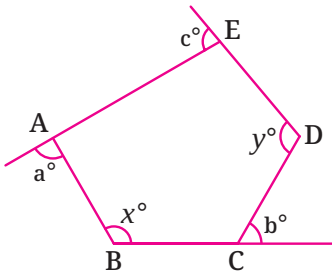
16 أوجد كلاً مما يأتي :

- ① عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلية 2700° ، وكذلك عدد أقطاره.
- ② عدد أضلاع المضلع المحدب الذي له 9 أقطار.
- ③ عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس زاويته الداخلية 156° ، وكذلك عدد أقطاره.

17 في الشكل المقابل :

$$X + y = 230$$

أوجد بالبرهان قيمة : $a + b + c$



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

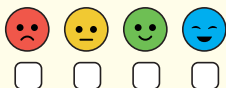
18 عملات مصرية قديمة:

أوجد قياس الزاوية الداخلة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين :



قيم فهمك!

ما مدى فهمك للزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات ؟
ضع علامة في المربع المناسب

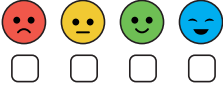


تفكير إبداعى

19 إذا زاد عدد أضلاع مضلع منتظم ضلعين آخرين، فإن قياس الزاوية الخارجة

يقل بمقدار 9° .

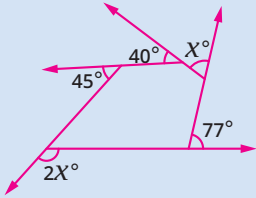
كم عدد أضلاع المضلع ؟



ما مدى فهمك للوحدة الثالثة ؟
ضع علامة في المربع المناسب

تقييم الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

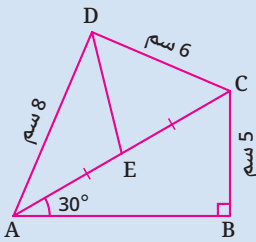


2 في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

(أ) 77 (ب) 45

(ج) 55 (د) 66

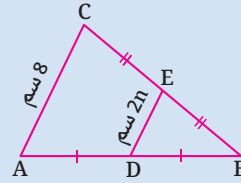


4 في الشكل المقابل :

ما طول $\overline{DE}$ ؟

(أ) 6 سم (ب) 8 سم

(ج) 10 سم (د) 5 سم

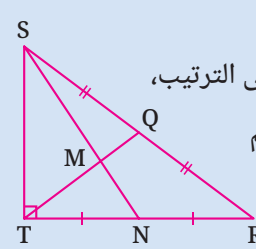


1 في الشكل المقابل :

ما قيمة n ؟

(أ) 2 (ب) 4

(ج) 6 (د) 8



3 في الشكل المقابل :

Q, N منتصفا $\overline{SR}, \overline{TR}$ على الترتيب،

$ST = 9$ سم ، $TR = 12$ سم

$m(\angle STR) = 90^\circ$

فما طول $\overline{MT}$ ؟

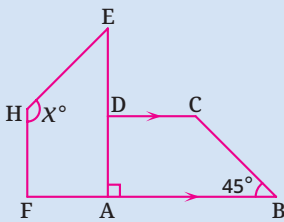
(أ) 2.5 سم (ب) 5 سم

(ج) 7.5 سم (د) 15 سم

أكمل كلاً مما يأتي بالإجابة الصحيحة :

5 عدد أضلاع المضلع المحدب الذي له 20 قطرًا هو

6 نوع المثلث الذي أطوال أضلاعه 6 سم ، 7 سم ، 8 سم بالنسبة لزاويها هو

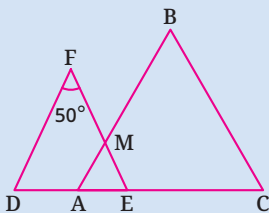


7 في الشكل المقابل :

إذا كان المضلع AEHF صورة

المضلع ABCD بدوران ما، فإن :

$X = \dots\dots\dots$



8 في الشكل المقابل :

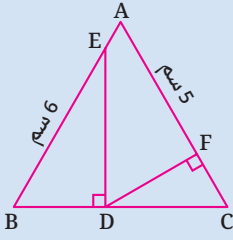
$\triangle ABC$ متساوي الأضلاع،

$\triangle DEF$ متساوي الساقين فيه :

$m(\angle F) = 50^\circ$ ، $FD = FE$

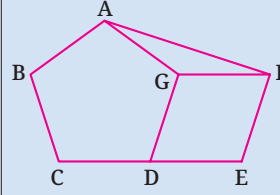
فإن : $m(\angle AME) = \dots\dots\dots$

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :



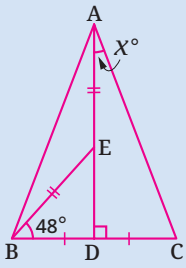
10 في الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوي الأضلاع
 $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{ED} \perp \overline{BC}$
 سم 6 = BE ، سم 5 = AF
 أوجد طول $\overline{FC}$ مع البرهان.



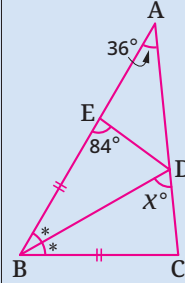
9 في الشكل المقابل :

ABCDG خماسي
 منتظم، GDEF معين
 أوجد قياس $\angle FAG$



12 في الشكل المقابل :

$BD = CD$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
 $m(\angle EBD) = 48^\circ$, $AE = BE$
 أوجد مع البرهان قيمة X



11 في الشكل المقابل :

$BC = BE$
 $\overline{BD}$ ينصف $\angle ABC$
 ① أثبت أن :
 $\triangle BCD \cong \triangle BED$
 ② أوجد قيمة X



نظرية فيثاغورس

نشاط الوحدة الثالثة

◀ الهدف من النشاط :

إثبات صحة نظرية فيثاغورس عملياً.

◀ خطوات النشاط :

يُتاح عبر موقع Youtube العديد من مقاطع الفيديو التي تثبت صحة نظرية فيثاغورس بطريقة عملية، تعاون مع اثنين من أصدقائك، وحاول القيام بالآتي :

① ابحث عن الطرق العملية المختلفة لإثبات صحة نظرية فيثاغورس.

② اختر طريقتين فقط وقارن بينهما من حيث (الأسلوب المتبع - الخامات المستخدمة - مستوى الدقة) أو أي عناصر أخرى للمقارنة يحددها الفريق.

③ اختر إحدى هاتين الطريقتين (الطريقة الأبسط) وحاول تنفيذها بالتعاون مع أقرانك.

الوحدة 4

الإحصاء

دروس الوحدة

4-1 الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا

4-2 مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات



تستخدم خوارزميات تعلم آليات الذكاء الاصطناعى فى أساليب إحصائية مثل تحليل الانحدار والتوزيع الطبيعى لتحليل أداء الطالب واقتراح مسارات تعليمية مناسبة له.
◀ فهل يمكن تطوير خوارزميات آليات الذكاء الاصطناعى لحل المشكلات الإحصائية المعقدة؟

القيم

- المسؤولية
- ترشيد الإنفاق
- العدل فى التوزيع
- احترام الآخر

القضايا والمهارات الحياتية

- تكنولوجيا المعلومات
- التفكير الإبداعى
- اتخاذ القرار
- التنبؤ

الدرس 4 - 1

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانياً (Ascending Cumulative Frequency Table and Its Graphical Representation)



استعد!

سجلت إدارة إحدى المستشفيات أوقات انتظار 200 من المرضى بالدقائق وذلك لتحسين جدول المواعيد بناءً على الفترات الأكثر ازدحاماً.

أوقات الانتظار (دقيقة)	0 -	10 -	20 -	30 -	40 -
عدد المرضى	30	50	70	40	10

■ نواتج التعلم

- تكون جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً لجدول تكرارى ذى مجموعات.
- ترسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

■ المفردات

- جدول تكرارى ذو مجموعات Frequency table with intervals
- جدول تكرارى متجمع صاعد Ascending cumulative frequency table
- منحنى تكرارى متجمع صاعد Ascending cumulative frequency curve



فكر وناقش!

إذا كان عدد الصفحات فى 50 كتاب بمكتبة المدرسة هو كالتالى :

57	10	50	44	21	49	61	31	21	48
46	30	11	48	51	48	57	49	31	72
61	28	39	52	24	47	38	20	23	47
69	49	41	31	67	41	17	52	63	19
58	49	37	43	52	22	59	45	31	35

هل تستطيع تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات مستخدماً الفترات (10 - , 20 - , 30 - , ...) ؟



تعلم!

درست فيما سبق كيفية تنظيم البيانات فى مجموعات أو فترات متساوية وكتابتها فى الجدول التكرارى ذى المجموعات،

■ معلومة سابقة

إذا كانت كمية البيانات كبيرة فيتم تنظيمها فى مجموعات أو فترات متساوية ومنها نكون الجدول التكرارى ذى المجموعات والذي يمكن تمثيله بيانياً بالمدرج التكرارى.

فمثلاً إذا كان مخطط الساق والأوراق المقابل يوضح درجات طلاب الصف الثانى الإعدادى فى مادة العلوم لعدد 28 طالباً، فيمكن تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات باستخدام فترات متساوية مثل ... , 20 - , 10 - فيكون الجدول كما يلى :

الدرجات	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -
التكرار	2	10	9	5	2

الساق	الأوراق
1	3 8
2	4 4 6 6 7 7 8 8 8 9
3	0 2 4 5 5 5 7 9 9
4	1 4 4 7 8
5	2 5

المفتاح 0 | 3 تعنى 30 درجة

يمكن الحصول على بعض المعلومات من الجدول مباشرة مثل :

- عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمي للفترة [20 , 30] يساوي 10 طلاب.
- عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمي للفترة [40 , 50] يساوي 5 طلاب.

ولكنك لا تستطيع الحصول على بعض المعلومات الأخرى بطريقة مباشرة من الجدول مثل :

- عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة.
- عدد الطلاب الذين حصلوا على 20 درجة فأكثر.

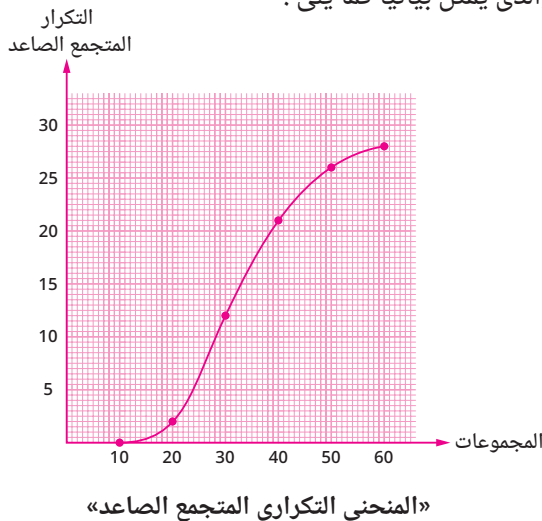
وحتى تستطيع الحصول على هذه المعلومات مباشرة، يجب أن تتعلم كيفية تكوين الجدول

التكراري المتجمع الصاعد كالتالي :

الدرجات	التكرار
10 –	2
20 –	10
30 –	9
40 –	5
50 –	2

2 (أقل من 20)
 $12 = 10 + 2$ (أقل من 30)
 $21 = 9 + 12$ (أقل من 40)
 $26 = 5 + 21$ (أقل من 50)
 $28 = 2 + 26$ (أقل من 60)

اكتب هذه البيانات في جدول كالتالي، والذي يُمثّل بيانيًا كما يلي :



الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 10	0
أقل من 20	2
أقل من 30	12
أقل من 40	21
أقل من 50	26
أقل من 60	28

«الجدول التكراري المتجمع الصاعد»

■ لاحظ أن

لا يوجد طالب درجته أقل من 10
 أي أن :
 التكرار المتجمع الصاعد
 للطلاب الذين حصلوا على أقل
 من 10 درجات هو 0

من الجدول لاحظ أن :

- عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة = 12 طالبًا.
- عدد الطلاب الذين حصلوا على 20 درجة فأكثر يساوي :
 العدد (2) مطروحًا من العدد الكلي (28) = 26 طالبًا.

■ تقييم ذاتي ①

الجدول التالي يوضح كتل 20 صندوقًا بالكيلو جرام.

الفترة (كجم)	التكرار
45 –	2
50 –	3
55 –	3
60 –	6
65 –	4
70 –	2

كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا.

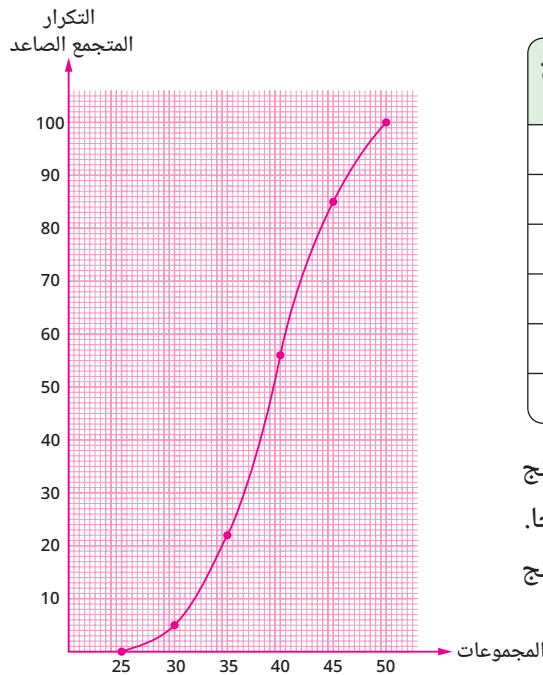
مثال ①

الجدول التكراري المقابل يوضح أفضل نتائج حققها 100 سباح في سباق مسافة 50 مترًا.

كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا ثم أوجد :

- عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية.
- عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35 ثانية أو أكثر.
- النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية.

الفترة الثانية	التكرار
25 –	5
30 –	17
35 –	34
40 –	29
45 –	15



الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 25	0
أقل من 30	5
أقل من 35	22
أقل من 40	56
أقل من 45	85
أقل من 50	100

- عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية هو : 56 سباحًا.
- عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35 ثانية أو أكثر هو :

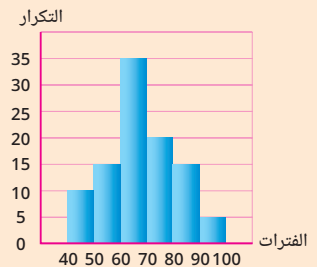
$$100 - 22 = 78$$

- النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية هي :

$$\frac{85}{100} \times 100\% = 85\%$$

■ تقييم ذاتي ②

إذا كان المدرج التكراري التالي يوضح أطوال 100 سمكة تم اصطيادها في إحدى مسابقات الصيد مقيسة لأقرب سنتيمتر.

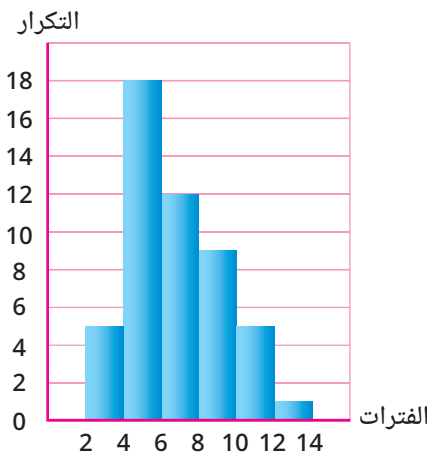


كون الجدول التكراري ذي المجموعات، والجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا.

مثال ②

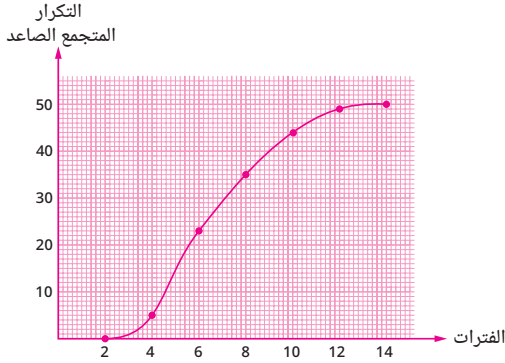
إذا كان المدرج التكراري المقابل يوضح كتل 50 قطعة من أحد المنتجات معروضة للبيع عبر الإنترنت.

كون الجدول التكراري ذي المجموعات والجدول التكراري المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

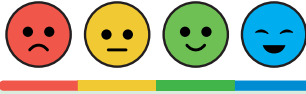




الفترات	2 -	4 -	6 -	8 -	10 -	12 -
التكرار	5	18	12	9	5	1



الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 2	0
أقل من 4	5
أقل من 6	23
أقل من 8	35
أقل من 10	44
أقل من 12	49
أقل من 14	50



تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

الشكل المقابل يمثل المنحنى المتجمع الصاعد لدرجات طلاب فصل مكون من 40 طالباً في أحد الامتحانات.

① ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 12 درجة؟

(أ) 5 (ب) 10

(ج) 20 (د) 40

② ما عدد الطلاب الذين حصلوا على 18 درجة أو أكثر؟

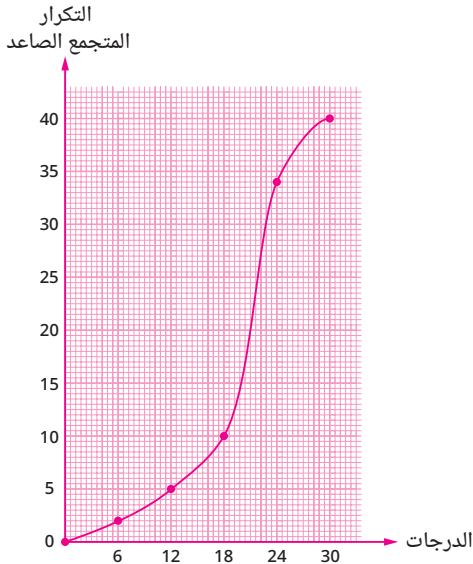
(أ) 20 (ب) 30

(ج) 35 (د) 40

③ ما النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا على أقل من 6 درجات؟

(أ) 5 % (ب) 10 %

(ج) 15 % (د) 20 %





- ④ قامت إدارة أحد المصانع بدراسة الزمن المستغرق في وصول العاملين إلى المصنع، وذلك لتحديد أنسب وسائل التنقل؛ حتى تحافظ على أوقات العاملين والعمل.

الزمن بالدقيقة	الفترات
0 –	6
20 –	39
40 –	31
60 –	14
80 –	6
100 –	4

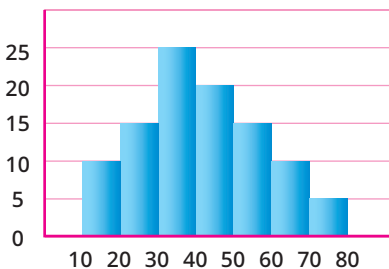
كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانياً.

- ⑥ الجدول التالى يوضح عدد المنازل ذات المساحات المختلفة (مقاسة بالمتر المربع).

الفترات (م ²)	100 –	150 –	200 –	250 –	300 –	350 –
التكرار	5	23	27	21	9	5

- ① كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانياً.
 ② أوجد عدد المنازل التى مساحتها أقل من 300 متر مربع.
 ③ أوجد عدد المنازل التى مساحتها 150 متراً مربعاً أو أكثر.
 ④ أوجد النسبة المئوية للمنازل التى مساحتها 250 متراً مربعاً أو أكثر.

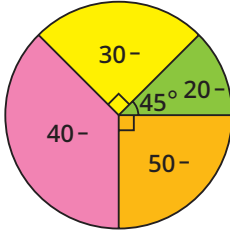
التكرار



الفترات

- ⑦ من المدرج التكرارى المقابل كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانياً.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 5	0
أقل من 10	10
أقل من 15	36
أقل من 20	61
أقل من 25	79
أقل من 30	89
أقل من 35	95
أقل من 40	100



8) الجدول المقابل يبين التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد لدرجات 100 طالب بالصف الثانى الإعدادى فى مادة الرياضيات.

1) ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل

من 25 درجة؟

2) ما عدد الطلاب الذين حصلوا على

30 درجة أو أكثر؟

3) كون الجدول التكرارى ذى المجموعات.



التحليل وتكامل المواد

ثالثًا

9) **سياحة :** يوضح مخطط القطاعات الدائرية المقابل عدد السائحين

لمنطقة خان الخليلى فى أحد الأيام حسب أعمارهم بالسنوات (...، 30 -، 20 -). إذا كان العدد الكلى للسائحين 600 سائح،

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

10) **تسوق :** تم عمل استبيان لعدد 40 شخصًا اشتروا أجهزة لوحية (تابلت)، لمعرفة مقاس شاشة أجهزتهم بالبوصة.

يلخص الجدول المقابل نتائج هذا الاستبيان.

المقاس (بوصة)	التكرار
7 -	5
8 -	6
9 -	9
10 -	16
11 -	3
12 -	1



كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا، ثم أجب عما يلى :

1) كم عدد الأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية :

من 7 إلى أقل من 8 بوصات؟

أقل من 11 بوصة؟

9 بوصات أو أكثر؟

2) ما النسبة المئوية للأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية :

من 10 إلى أقل من 11 بوصة؟

أقل من 9 بوصات؟

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات (Measurements of Central Tendency of the Frequency Table with Intervals)

الدرس 4 - 2



استعد!

بالنظر إلى أطوال الطلاب فى الجدول التالى :

الطول (سم)	عدد الطلاب
155 –	5
160 –	10
165 –	25
170 –	6
175 –	4

هل يمكنك تقدير متوسط أطوال الطلاب ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إيجاد مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال) لجدول تكرارى ذى مجموعات؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.



فكر وناقش!

16	12	10	ساعات المتابعة
18	17	15	عدد المتابعين

يوضح الجدول التكرارى المقابل

عدد الساعات التى يقضيها 50

من الأولاد والبنات فى عطلة نهاية

الأسبوع فى متابعة الإنترنت ومواقع التواصل الاجتماعى.

هل يمكنك حساب الوسط الحسابى والوسيط والمنوال لعدد ساعات متابعة الإنترنت

ومواقع التواصل الاجتماعى؟ ناقش.



تعلم!

1 الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكنك تقدير الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات باستخدام الصيغة الرياضية

التالية :

$$\frac{\sum (f \cdot X_m)}{\sum f} = (\bar{X}) \text{ الوسط الحسابى}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات

X_m هى مركز المجموعة وتساوى $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة} + \text{الحد الأعلى لها}}{2}$

$\sum (f \cdot X_m)$ هو مجموع حواصل ضرب مركز كل مجموعة X_m فى التكرار المناظر لها f

■ نواتج التعلم

- تقدر الوسط الحسابى للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- تقدر الوسيط للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- تقدر المنوال للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- تقرأ وتفسر جداول وأشكالاً بيانية تكرارية لمجتمع ما.

■ المفردات

- الوسط الحسابى (Mean ($\bar{X}$))
- المنوال (Mode)
- الوسيط (Q_2)
- Median (Second quartile)

■ معلومة سابقة

- مقاييس النزعة المركزية هى القيم التى تصف مركز تجمع مجموعة من البيانات مثل الوسط الحسابى والوسيط والمنوال حيث :
- الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$
- الوسيط هو القيمة التى تتوسط القيم بعد ترتيبها.
- المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً).

■ تقييم ذاتي ①

يوضح الجدول التكراري التالي أطوال عينة من النباتات في مشتل.

الفترة (مم)	التكرار
300 –	3
320 –	18
340 –	47
360 –	32
380 –	14
400 –	6

قدّر الوسط الحسابي لأطوال النباتات.

■ لاحظ أن

أطوال المجموعات متساوية.

في مثال (1): طول كل مجموعة = 10

∴ المجموعة الأولى (80 – 90)

∴ مركز المجموعة الأولى

$$85 = \frac{80 + 90}{2}$$

∴ المجموعة الثانية (90 – 100)

∴ مركز المجموعة الثانية

$$95 = \frac{90 + 100}{2}$$

وهكذا

∴ المجموعة الأخيرة (120 – 130)

∴ مركز المجموعة الأخيرة

$$125 = \frac{120 + 130}{2}$$

ثم تكون الجدول المقابل.

■ تقييم ذاتي ②

سُجلت أعداد المرضى المترددين على إحدى العيادات في إحدى المستشفيات خلال عدد من الأيام فكانت كالآتي:

عدد المرضى	التكرار
10 –	16
20 –	15
30 –	m
40 –	10
50 –	3
60 –	2

إذا كان متوسط عدد المرضى خلال اليوم 30 مريضاً، أوجد قيمة m

مثال 1

عند قياس سرعات السيارات المارة على أحد الطرق السريعة، وجدت إدارة المرور البيانات الآتية عند ملاحظة سرعات 100 سيارة في أحد الأيام.



السرعة (كم/س)	التكرار
80 –	13
90 –	17
100 –	24
110 –	32
120 –	14

قدّر الوسط الحسابي لسرعات السيارات المارة في هذا اليوم.

المجموعات (الفترة)	التكرار (f)	مراكز الفترات (X_m)	$f \cdot X_m$
80 –	13	85	1105
90 –	17	95	1615
100 –	24	105	2520
110 –	32	115	3680
120 –	14	125	1750
المجموع	100		10670

$$\bar{X} = \frac{\sum (f \cdot X_m)}{\sum f} = \frac{10670}{100} = 106.7$$

∴ الوسط الحسابي لسرعات السيارات = 106.7 كم / س

مثال 2

يوضح الجدول المقابل عدد نقاط أحد فرق الدوري الممتاز في مباريات كرة السلة، فإذا كان متوسط نقاط الفريق 90 نقطة. أوجد قيمة k

عدد النقاط	التكرار
60 –	1
70 –	5
80 –	k
90 –	10
100 –	6

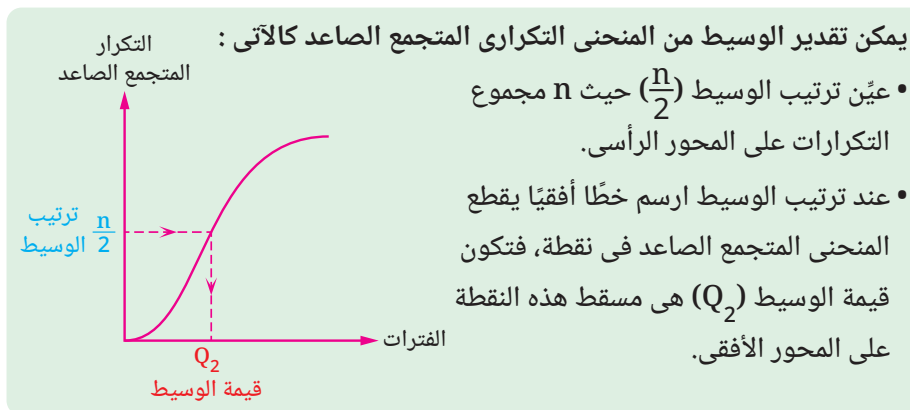
الفترة	التكرار (f)	مراكز الفترات (X_m)	$f \cdot X_m$
60 –	1	65	65
70 –	5	75	375
80 –	k	85	$85k$
90 –	10	95	950
100 –	6	105	630
المجموع	$22 + k$		$2020 + 85k$

$$\therefore \bar{X} = \frac{\sum (f \cdot X_m)}{\sum f} = \frac{2020 + 85k}{22 + k} = 90$$

$$\therefore 90(22 + k) = 2020 + 85k \quad \therefore 1980 + 90k = 2020 + 85k$$

$$\therefore 90k - 85k = 2020 - 1980 \quad \therefore 5k = 40 \quad \therefore k = 8$$

2 الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات



مثال 3

من بيانات الجدول التكرارى التالى :

المجموعات	0 –	6 –	12 –	18 –	24 –
التكرار	6	8	12	10	4

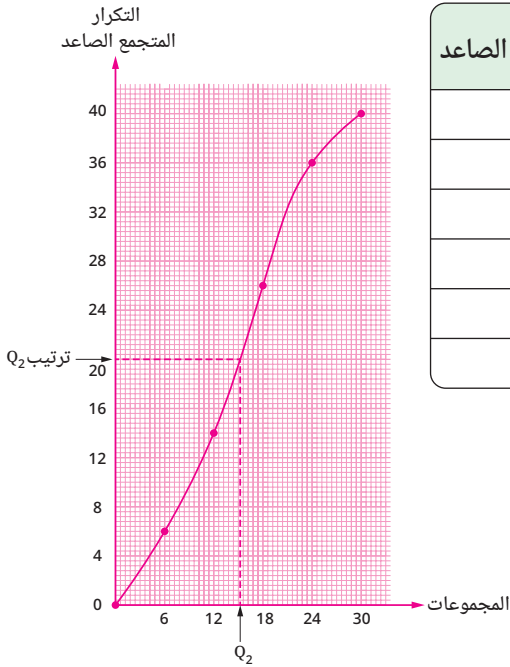
ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد، ومنه قدّر قيمة الوسيط.

■ تقييم ذاتى 3

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات 60 طالباً فى اختبار مادة الرياضيات.

الدرجات	التكرار
5 –	2
10 –	5
15 –	14
20 –	20
25 –	k
30 –	5
35 –	1
المجموع	60

أوجد قيمة k ، ثم ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد، ومنه قدّر قيمة الوسيط.



الحدود العليا للمجموعات	الترتيب المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

• ترتيب الوسيط $= \frac{40}{2} = 20$

• الوسيط $(Q_2) = 15$

■ لاحظ أن

يمكن إيجاد قيمة الوسيط (Q_2) من الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالآتي :

الحدود العليا للمجموعات	الترتيب المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

ترتيب الوسيط $= 20$

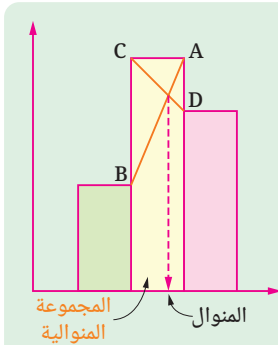
$$\therefore \frac{20 - 14}{26 - 14} = \frac{Q_2 - 12}{18 - 12}$$

$$\therefore \frac{6}{12} = \frac{Q_2 - 12}{6}$$

$$\therefore Q_2 - 12 = \frac{6 \times 6}{12} = 3$$

$$\therefore Q_2 = 3 + 12 = 15$$

3 المنوال لتوزيع تكراري ذي مجموعات



يمكنك تقدير المنوال لتوزيع تكراري ذي مجموعات عن طريق رسم المدرج التكراري وتحديد المجموعة الأكثر تكرارًا وتسمى المجموعة المنوالية ثم تحديد مسقط نقطة تقاطع AB , CD على المحور الأفقي وتكون هي القيمة المنوالية.

■ تقييم ذاتي ④

اختيرت ثمانون برتقالة عشوائيًا من قِبَل قسم مراقبة الجودة في أحد مصانع العصير ، وتم وزن البرتقال، وكانت النتائج كما بالجدول التالي :

الوزن (جرام)	عدد البرتقال
75 –	4
100 –	8
125 –	16
150 –	32
175 –	14
200 –	6

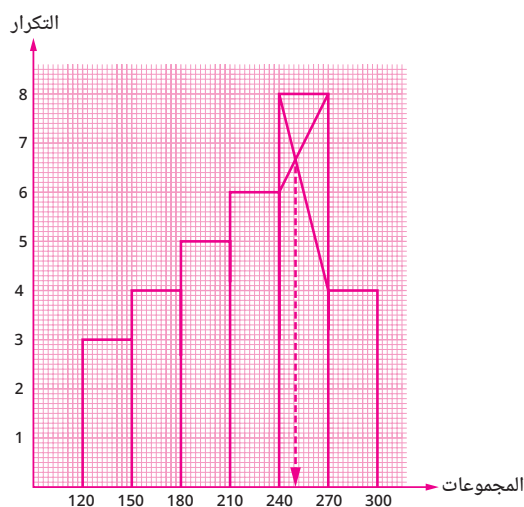
قُدِّر المنوال لوزن البرتقالة باستخدام المدرج التكراري.

مثال 4

توضح مجموعة البيانات الآتية أوقات استخدام الهاتف المحمول (بالدقائق) لثلاثين طالبًا جامعيًا في أحد الأيام.

الوقت (دقيقة)	عدد الطلاب
120 –	3
150 –	4
180 –	5
210 –	6
240 –	8
270 –	4

قُدِّر المنوال لأوقات استخدام المحمول باستخدام المدرج التكراري.



المنوال ≈ 250 دقيقة





تقييم الدرس



قياس المفاهيم

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

② إذا كان : $\Sigma f \cdot X_m = 800$ ، $\Sigma f = 50$ ؟

ما الوسط الحسابي $\bar{X}$ ؟

(أ) 16 (ب) 160

(ج) 750 (د) 850

① ما مركز المجموعة الثانية في المجموعات :

5- ، 15- ، 25- ، 35- ؟

(أ) 5 (ب) 10

(ج) 15 (د) 20

③ إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 18 ومركزها هو 15.5 ، فما الحد الأدنى لهذه المجموعة ؟

(أ) 12 (ب) 12.5 (ج) 13 (د) 13.5

④ يوضح الجدول التكراري الآتي درجات 150 طالباً في مادة الرياضيات :

الدرجات	4 -	12 -	20 -	28 -	36 -	44 -	52 -	المجموع
التكرار	15	3 k	4 k	32	25	22	14	150

① ما قيمة k ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7

② ما ترتيب الوسيط ؟

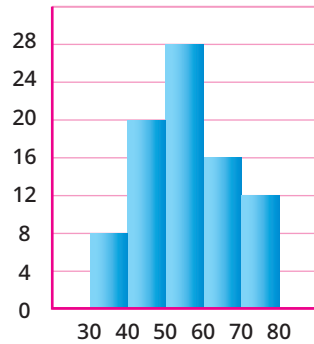
(أ) 37.5 (ب) 75 (ج) 112.5 (د) 150

③ ما قيمة الوسيط ؟

(أ) 28 (ب) 32.5 (ج) 34.5 (د) 36

⑤ من المدرج التكراري المقابل،

التكرار



الفترة

ما الفترة المتوسطة ؟

(أ) 30 -

(ب) 40 -

(ج) 50 -

(د) 70 -

⑥ يبين الجدول التكراري

المتجمع الصاعد المقابل

عدد ساعات العمل

الأسبوعية لعدد 40 عاملاً

في أحد المصانع.

ما قيمة الوسيط ؟

(أ) 28.75

(ب) 30.25

(ج) 24.75

(د) 31.25

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 20	0
أقل من 24	2
أقل من 28	7
أقل من 32	23
أقل من 36	35
أقل من 40	38
أقل من 44	40



تطبيق المفاهيم

ثانياً

7) يبين الجدول التالي متوسط إنفاق الطالب اليومي داخل مدرسة لعدد خمسين طالباً في الصف الثاني الإعدادي.

الإنفاق (بالجنيه)	0 –	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –
التكرار	7	12	15	9	5	2

قدّر الوسط الحسابي للإنفاق اليومي.

8) يُظهر الجدول التالي أعمار المعلمين المسجلين في دورة تدريبية حول سلامة وأمان المنشآت التعليمية.

الأعمار (سنة)	26 –	30 –	34 –	38 –	42 –	46 –
التكرار	4	10	28	35	15	8

ارسم المدرج التكراري ومنه قدر العمر المنوال.

9) يوضح الجدول التالي كتل 40 شخصاً (بالكيلو جرام) لكي ينضموا إلى أحد برامج إنقاص الوزن.

الكتل	70 –	80 –	90 –	100 –	110 –	120 –	130 –
التكرار	2	5	9	12	7	3	2

قدّر الوسيط بيانياً.

10) يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري لدرجات 40 طالباً في أحد الاختبارات.

المجموعات	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	المجموع
التكرار	k	10	3k	8	k + 2	40

أوجد قيمة k ، ثم قدّر قيمة الوسيط.



التحليل وتكامل المواد

ثالثاً

11) يبين الجدول الآتي استهلاك الكهرباء شهرياً بوحدة كيلو وات ساعة لعدد 100 منزل.

الفترة (ك.و.س)	0 –	100 –	200 –	300 –	400 –	500 –	600 –
عدد المنازل	4	10	28	35	15	6	2

① قدّر الوسط الحسابي للاستهلاك.

② قدّر الوسيط.

③ قدّر المنوال.

④ رتب قيم المقاييس التي حصلت عليها تصاعدياً.



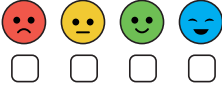
تفكير إبداعي

12) تم اختبار العمر الافتراضي لبطاريتين من نوعين

مختلفين A ، B ثم اختبر خمس بطارية من كل نوع عشوائياً واختبارها بنفس الطريقة. ثم سُجلت مدة العمر الافتراضي لكل بطارية بالساعة. تظهر نتائج الاختبارات في الجدول المقابل.

قدّر الوسيط لمدة العمر الافتراضي لكل نوع وقارن بينهما.

المدة (ساعة)	0 –	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	30 –
تكرار النوع A	3	5	8	10	12	7	5
تكرار النوع B	1	2	10	20	9	4	4

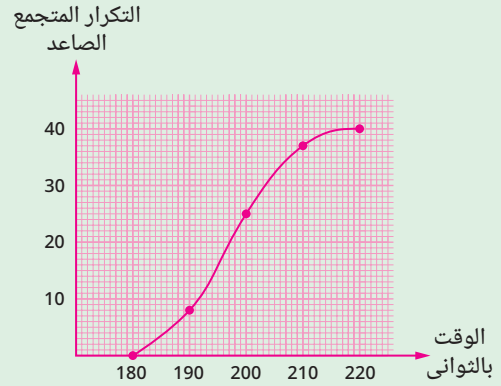


ما مدى فهمك للوحدة الرابعة ؟
ضع علامة في المربع المناسب

تقييم الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) طلب من 40 طالبًا حل لغز بسيط ، وسُجلت الأوقات التي استغرقوها في الحل بالثواني، وعرضت النتائج بيانيًا بالمنحنى التكراري المتجمع الصاعد التالي.



ما عدد الطلاب الذين استغرقوا 3.5 دقيقة أو أكثر؟

(أ) 30 (ب) 35

(ج) 37 (د) 3

2) من الجدول التكراري

المتجمع الصاعد المقابل.

ما قيمة الوسيط؟

(أ) 154.9

(ب) 155.9

(ج) 157.9

(د) 160.9

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 142	0
أقل من 148	4
أقل من 154	12
أقل من 160	32
أقل من 166	44
أقل من 172	50

3) إذا كان الوسط الحسابي ($\bar{X}$) لجدول تكراري هو 24.5

وكان $\sum f \cdot X_m = 980$ ، فما قيمة $\sum f$ ؟

(أ) 40 (ب) 50 (ج) 60 (د) 70

4) ما مركز المجموعة الثالثة في المجموعات

6- ، 10- ، 14- ، 18- ، ... ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 16 (د) 18

أكمل كلاً مما يأتي بالإجابة الصحيحة بالاستعانة بالجدول التكراري التالي :

الفترة	2 -	6 -	10 -	14 -	18 -	22 -	26 -	المجموع
التكرار	k	6	7	11	8	$k^2 + 1$	1	40

6) الوسط الحسابي =

5) قيمة k =

8) الوسيط =

7) ترتيب الوسيط =

أجب عن الأسئلة الآتية :

9) إذا كان الوسط الحسابي للتوزيع التكراري التالي هو 36.6 أوجد قيمة كل من k ، X

الدرجات	10 -	20 -	30 -	X -	50 -
التكرار	12	20	k	30	15

10) الجدول التالي يوضح كتل 50 طالبًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس

ارسم المدرج التكراري وأوجد الكتلة المنوالية.

الكتل (كجم)	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -	55 -	60 -
التكرار	6	10	12	8	6	5	3

11 من الجدول التكرارى التالى :

الفترات	2 -	6 -	10 -	14 -	18 -	22 -	26 -	المجموع
التكرار	4	6	11	k	14	8	5	60

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا، ومن الرسم قُدِّر قيمة الوسيط.

12 من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل

كون الجدول التكرارى ذى المجموعات،

ثم أوجد الفترة المنوالية.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 10	0
أقل من 15	3
أقل من 20	9
أقل من 25	16
أقل من 30	24
أقل من 35	33
أقل من 40	44
أقل من 45	50

مقاييس النزعة المركزية

نشاط الوحدة الرابعة

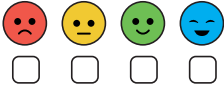
الهدف من النشاط :

تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات من بيانات واقعية، وحساب مقاييس النزعة المركزية لها.

خطوات النشاط :

تعاون مع اثنين من زملائك فى الفصل وحاول القيام بالآتى :

- 1 اختر أحد المواقف الحياتية التى تمر بها فى (النادى - إحدى الحدائق - السوق - فناء المدرسة)، وقم بجمع عدد من البيانات عن هذا الموقف.
- 2 نظم تلك البيانات فى جدول تكرارى ذى مجموعات.
- 3 احسب مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال) من هذا الجدول، مع رسم الأشكال البيانية اللازمة للوسيط والمنوال.



قيم فهمك!

ما مدى فهمك لموضوعات
الصف الثاني الإعدادي ؟
ضع علامة في المربع المناسب

تقييم نهائي

المجموعة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 ما المعكوس الضربي للعدد $-\sqrt{2}$ في أبسط صورة ؟

- (أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 ما ناتج $3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ؟

- (أ) 0 (ب) 1 (ج) $\sqrt[3]{2}$ (د) 2

3 إذا كان : $X^3 + Y^3 = 20$ ، $X^2 - XY + Y^2 = 4$ فما قيمة : $2X + 2Y$ ؟

- (أ) 5 (ب) 10 (ج) 15 (د) 20

4 ما مجموعة حل المعادلة $X^2 - 4X + 3 = 0$ في R ؟

- (أ) $\{1, 3\}$ (ب) $\{-1, -3\}$ (ج) $\{1, -3\}$ (د) $\{-1, 3\}$

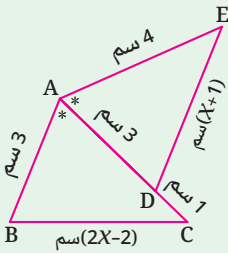
5 إذا كان : $a + b = 2\sqrt{5}$ ، $c - d = \sqrt{5}$ فما قيمة المقدار $a c - a d + b c - b d$ ؟

- (أ) $\sqrt{5}$ (ب) $3\sqrt{5}$ (ج) 10 (د) 20

6 في الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

- (أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4



- (أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 13

7 ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية 1980° ؟

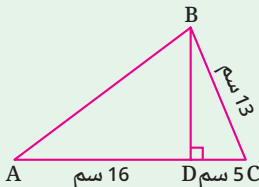
8 إذا كانت بداية المجموعة هي 15 ومركزها 17.5 فما طول المجموعة ؟

- (أ) 5 (ب) 10 (ج) 20 (د) 25

9 في الشكل المقابل :

ما طول $\overline{AB}$ ؟

- (أ) 12 سم (ب) 25 سم (ج) 20 سم (د) 16 سم



أجب عن الأسئلة الآتية :

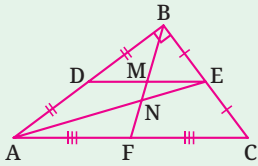
① إذا كانت $Y = [-2, 5[$, $X =]-4, 1]$ فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتي :

$Y - X$ ③

$X \cup Y$ ②

$X \cap Y$ ①

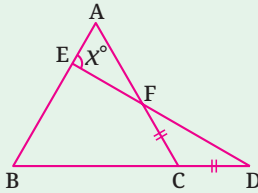
② اختصر المقدار $\frac{(\sqrt{3})^{2n+3}}{(\sqrt{2})^{1-n} \times (\sqrt{6})^{n-1}}$ لأبسط صورة، ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 0$



③ في الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overline{DE} = 6$ سم

فأوجد مع البرهان طول $\overline{MN}$



④ في الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوي الأضلاع

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$, $CF = CD$

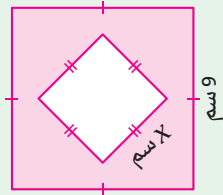
أوجد مع البرهان قيمة X

⑤ حل كلاً مما يأتي :

$4X^2 + 14X - 30$ ③

$b^3 - 8$ ②

$4X^2 - 25$ ①



⑥ عبر عن مساحة الجزء المظلل في الشكل المقابل

كحاصل ضرب عاملين.

⑦ أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	5 -	15 -	25 -	35 -	المجموع
التكرار	6	8	k	2	20



كتاب
الطالب

الرياضيات

للمصف الثاني الإعدادي - الفصل الدراسي الأول ٢٠٢٦-٢٠٢٧

تأليف ومراجعة وإشراف
أ. أسامة زيد شريف
أ. د. مسمر عبد الفتاح لاشن
أ. م. د. أمل الشحات حافظ
أ. مجدى عبد الفتاح الصفتى
أ. إبراهيم عبد اللطيف الصغير
أ. باسم مجدى رشدى
أ. إسلام محمد إبراهيم
أ. سامح لبيب عطية
أ. د. جلال محروس معتمد
أ. د. رضا أبو علوان السيد
أ. د. هدى كمال محمد السيد
أ. د. أحمد عبد القادر رمضان

أ. منال عباس أحمد عزقول
د. محمد محي الدين عبد السلام أبو رية
د. أسامة عبد العظيم عبد السلام
أ. سامح عبد الباسط السيد
أ. سمير محمد سعداوي
أ. عماد حسن عمر
د. أكرم حسن محمد
د. جبريل انور حميدة

شارك في تأليف وإعداد الكتاب شركة GPS للطبع والنشر والتوزيع

مقاس الكتاب	ورق المتن	ورق الغلاف	ألوان الكتاب	عدد الصفحات	تاريخ الطبعة	كود الكتاب
٢٧ x ١٩ سم	٧٠ جراماً	١٨٠ جراماً	٤ ألوان	١٢٨	٢٠٢٦ - ٢٠٢٧	١٠/٢/١١/٢/٤٧/٢٢٤

رقم الإيداع / ٢٠٢٦/١٠١٢٧ م

الترقيم الدولي / 978-633-8475-43-7

يحظر طبع أو نشر أو تصوير أو تخزين أو توزيع أى جزء من هذا الكتاب بأية وسيلة إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو خلاف ذلك،

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

تكنو برنت
للطباعة



GPS
للطبع والنشر والتوزيع

كتاب
الطالب

الرياضيات

للسف الثاني الإعداءى
الفصل الدراسى الأول



غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى

