Pures

Mathématiques

Troisième secondaire **Livre de l'élève**

2025 - 2026

Nom : ....

Classe : ....

Établissement : ....

Rédigé par

M. Kamal Youness Kabsha

Prof.Dr. Mohamed Hussein Fahmy

M. Ossama Gaber Abdel Hafez

M. Ibrahim Abdel Latif Al Saghir

Révision de traduction

M. Fathi Ahmed chehata

M. Akram Fawzy

M. Khaled Sayed El shehabey

Première édition	2016/2017
Dépôt légal No	8705 / 2016
I.S.B.N	978 - 977 - 706 - 033 - 2

Introduction

بسم الله الرحمن الرحيم

En présentant ce manuel, nous avons le plaisir de vous clarifier la philosophie dont nous nous sommes inspirés pour édifier son contenu, en la résumant dans ce qui suit :

1 Développement de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Fournir à l'apprenant tout ce qui est des informations opératoires, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopter des normes nationales de l'enseignement et les niveaux éducatifs en Égypte à partir de :

a) La détermination de ce que l'élève doit apprendre et les motifs de cet apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève en renforçant ce qui suit :
L'apprentissage des mathématiques doit constituer un but à atteindre pour l'apprenant durant toute sa vie - la motivation de l'apprenant par l'étude des mathématiques - la capacité de l'élève à travailler individuellement ou en groupe - l'activité, la persistance, l'assiduité et la créativité de l'apprenant - l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggérer des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maître.

5 Suggérer des activités variées correspondant au contenu pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimer les mathématiques et leur apport sur le plan humain au niveau mondial et national, connaître les contributions et les exploits des savants musulmans, arabes et étrangers.

A la lumière de ce qui précède, ce manuel tient compte de ce qui suit :

★ Le manuel comporte deux domaines : L'algèbre, et la géométrie dans l'espace. On l'a conçu en unités intégrées et interconnectées contenant chacune une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et le lexique utilisé en arabe et en anglais. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré « A apprendre » et chacune de ces leçons commence par l'idée principale du contenu et présente la matière scientifique du simple au complexe, graduellement, en englobant des activités qui relient les mathématiques aux autres disciplines et à la vie pratique. Ces activités correspondent au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles sous la rubrique « Décelez l'erreur » pour remédier aux erreurs communes des élèves tout en renforçant le travail coopératif. Le manuel contient également des questions en lien avec à l'environnement et la manière de les traiter.

★ Chaque leçon contient des exemples échelonnés du plus facile au plus difficile, des niveaux de réflexion variés suivis d'exercices sous la rubrique « Essayez de résoudre » et se termine par « Exercices » qui propose des problèmes variés abordant les notions et les compétences étudiées au cours de la leçon.

Finalement, nous espérons qu'avec ce manuel nous accomplirons le bien pour nos élèves et pour notre chère Égypte. Dieu nous est témoin, qu'il nous guide vers le bon chemin.

Sommaire

Premiérement: Algèbre et Géométrie dans l' espace

Algèbre et Géométrie dans l' espace

Sommaire

deuxièmement: Calcul différentiel et intégral

Calcul différentiel et intégral

Premiérement:

Algèbre et Géométrie dans l' espace

[1] Algèbre

Unité (1)

Formule du binôme à une puissance entiér positive

Introduction de l'unité

Nasir al-Din al-Tusi (1201- 1274) est né à Gahroud près de la ville de Tus en Iran dans une famille d'érudits. Disciple de Kamal al-Din El Moussily et Moeen El Dine el Masry, il étudia la sagesse, la philosophie, l'astronomie et les mathématiques. Il a une grande contribution dans le calcul de la probabilité de réalisation de différents phénomènes et l'utilisation des arrangements et des combinaisons. Cardan (1501-1576) s'est intéressé au calcul du nombre de possibilités par le principe de dénombrement ce qui a permis un grand progrès dans l'architecture de l'ordinateur qui est la conception et la construction des opérations fonctionnelles de l'ordinateur. Cette unité comporte le principe du dénombrement et la relation entre les arrangements et les combinaisons et leurs utilisations dans la résolution de certains problèmes mathématiques, et présente la théorie du binôme et son utilisation dans les applications mathématiques et de la vie quotidienne.

Objectifs de l'unité

APRÈS L'ÉTUDE DE L'UNITÉ, ET APRÈS AVOIR RÉALISÉ LES ACTIVITÉS, IL EST ATTENDU QUE L'ÉLÈVE SOIT CAPABLE DE :

- Reconnaître la formule du binôme à une puissance entière positive.
- Déduire le terme général dans le développement d'un binôme.
- Déduire le rapport entre un terme et le terme qui le précède dans le développement d'un binôme.
- Trouver le coefficient d'un terme dans le développement d'un binôme selon le rang de ce terme.
- Trouver le coefficient d'une puissance de la variable x dans le développement de $(x+y)^n$.
- Trouver le terme constant dans le développement de $(x+y)^n$.
- Trouver le coefficient du plus grand terme dans le développement d'un binôme.
- Trouver le terme médian dans le développement d'un binôme si n est un nombre pair et les deux termes médians si n est un nombre impair.
- Déduire des relations entre les combinaisons en utilisant le développement d'un binôme.
- Déduire la relation entre le triangle de Pascal et les coefficients dans le développement d'un binôme.
- Déduire quelques rythmes dans le triangle de Pascal.
- Résoudre diverses applications mathématiques et quotidiennes sur la formule du binôme.

Expressions de base

- *Formule du binôme*

Outils et moyens

- *Une calculatrice scientifique*

Leçons de l'unité

Leçon (1 – 1) : Formule du binôme à une puissance entière positive

Leçon (1 – 2) : Trouver le terme contenant x^k dans le développement d'un binôme

Leçon (1 – 3) : Rapport entre deux termes consécutifs dans le développement d'un binôme

Organigramme de l'unité

Formule du binôme

Formule du binôme à une puissance entière positive

Développement d'un binôme

Terme général

Trouver le terme contenant x^k

Unité (1)

1 - 1 Formule du binôme à une puissance entière positive

A apprendre

- *Lien ente le triangle de Pascal et les coefficients dans le développement d'un binôme*
- *La forme générale du développement de $(x + a)^n$ où $n \in \mathbb{Z}^+$*
- *Le terme général t_{r+1} dans le développement de $(x + a)^n$*
- *Le rang et la valeur du terme médian ou des deux termes médians.*

Expressions de base

- *Développement*
- *Binôme*
- *Terme général*
- *Terme médian*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*
- *Logiciels de graphisme*

Réfléchir et discuter

On sait que :

$(x + a)^1 = x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2x\,a + a^2$

Nous pouvons trouver que :

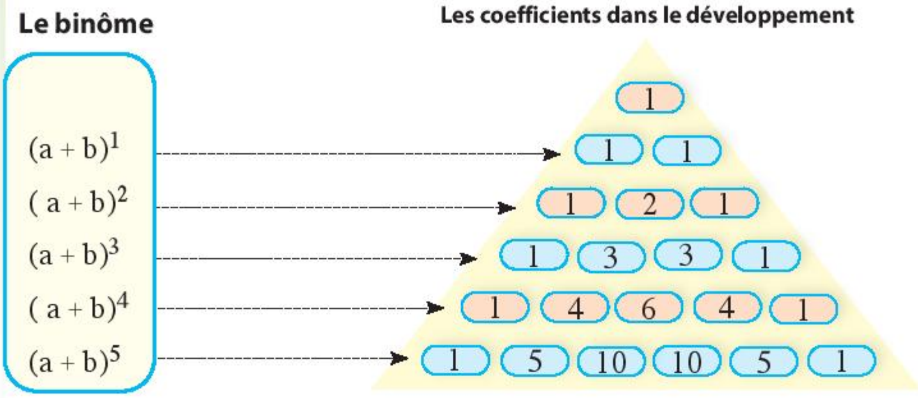
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2\,a + 3x\,a^2 + a^3$

$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3\,a + 6x^2\,a^2 + 4x\,a^3 + a^4$

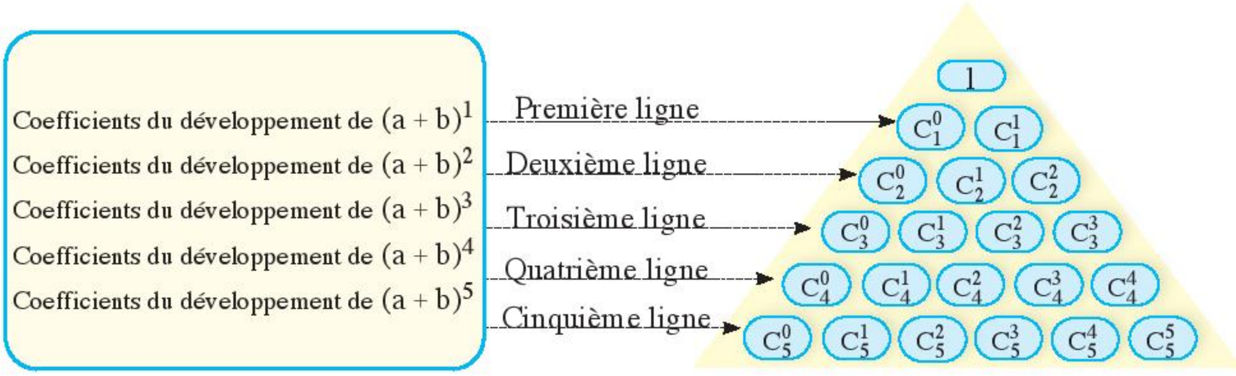
- Quelles est la relation entre le nombre de termes du développement et la valeur de la puissance ?
- Quelles est la relation entre les puissances des deux variables x et a dans chaque terme du développement ?
- Que peut-on remarquer concernant les coefficients des termes du développement ?
- Peut-on utiliser le triangle de Pascal pour exprimer ces coefficients ?
- Essayez de déduire une règle pour trouver le développement de $(a + b)^n$

Triangle de Pascal

On remarque que **les coefficients dans le développement suivent une règle représentée par le triangle de Pascal.**



- Nous pouvons écrire le triangle de Pascal en utilisant les combinaisons comme le montre la figure suivante :



En observant la troisième ligne dans le triangle de Pascal, on trouve que 1 , 2 et 1 représentent C_2^0 , C_2^1 , C_2^2 respectivement et que C_2^0 , C_2^1 , C_2^2 représentent le nombre de sous ensembles qu'on peut former d'un ensemble contenant deux éléments. Ces sous ensembles sont tels que : $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2 = 4$

1
1 1
1 2 1

Les sous-ensembles de l'ensemble $\{x\,;\,y\}$ sont ϕ , $\{x\}$, $\{y\}$ et $\{x\,;\,y\}$

De même, on a : La somme des éléments de la troisième ligne C_3^0, C_3^1 , C_3^2 , C_3^3 représentent les sous ensembles qu'on peut former d'un ensemble contenant trois éléments. Ces sous ensembles sont tels que :

$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

D'une manière générale, si on dispose d'un ensemble dont le nombre d'éléments est n , alors le nombre de sous-ensembles qu'on peut obtenir de cet ensemble est $= 2^n$

On a $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n$

Expression orale : À l'aide du triangle de Pascal

1) Trouver les coefficients de $(a+b)^6$ sous forme de combinaisons.

2) Trouver les coefficients de $(a+b)^5$ sous forme de combinaisons.

À apprendre

Développement d'un binôme

Si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^+$, alors :

1- $(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + a^n$

2- $(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 - \ldots + (-a^n)$

Remarques sur le développement de $(x+a)^n$

1) Le nombre de termes dans le développement est $(n+1)$ termes

2) Les termes dans le développement sont rangés selon les puissances décroissantes de x et selon les puissances croissantes de a .

3) Dans chaque terme, la sommes des puissances de x et de a est égale à n.

4) Le rang d'un terme quelconque dans le développement dépasse l'indice de C dans ce terme de 1.

Exemple

Écrire le développement d'un binôme

(1) Écrire le développement de $(2x + 3y)^4$

Solution

$$(2x + 3y)^4 = (2x)^4 + C_4^1(2x)^3(3y) + C_4^2(2x)^2(3y)^2 + C_4^3(2x)(3y)^3 + (3y)^4$$
$$= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$$

Essayez de résoudre :

(1) Écrire le développement de :

(a) $(3x + y)^5$

(b) $(x^2 - 1)^6$

Cas particuliers du développement d'un binôme :

(a) $(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + x^n$

(b) $(1 - x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots + (-x)^n$

Exemple

(2) Écrire le développement de $(1 + x)^6$, puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de l'expression : $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \ldots + C_6^6$

Solution

$$(1 + x)^6 = 1 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6$$

En posant $x = 1$ dans les deux membres

$$(1 + 1)^6 = 1 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + \ldots\ldots + 1$$
$$2^6 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + \ldots\ldots + C_6^6$$

Le terme général dans le développement d'un binôme.

Dans le développement de $(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n$

On remarque que $t_2 = C_n^1 x^{n-1} y^1$, $t_3 = C_n^2 x^{n-2} y^2$

De même, $t_9 = C_n^8 x^{n-8} y^8$

Si le terme général est t_{r+1} où $0 \leqslant r \leqslant n$, alors t_{r+1} peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{t_{r+1} = C_n^r (x)^{n-r} (y)^r}$$

Exemple

(3) Trouver le sixième terme dans le développement de $(x + \frac{2}{x})^8$

Solution

$t_6 = C_8^5 (x)^3 (\frac{2}{x})^5 = C_8^5 \times 2^5 x^{-2} = 1792\, x^{-2}$

Le coefficient de ce terme est = 1792

On remarque que $t_{r+1} = C_n^r$ (Le coefficient du premier terme $)^{n-r}$ (Le coefficient du deuxième terme$)^r$

Essayez de résoudre :

(2) Dans le développement de $(2x^2 + \frac{1}{2})^7$, trouver t_3 et t_7 selon les puissances décroissantes de x et si $t_3 = t_7$, trouver la valeur de x.

Exemple

(4) Trouver le dixième terme dans l'ordre inverse du développement de $(3x^2 - \frac{1}{2x})^{13}$.

Solution

Le dixième terme dans l'ordre inverse dans le développement de $(3x^2 - \frac{1}{2x})^{13}$ est le même que le dixième terme dans l'ordre dans le développement de $(\frac{-1}{2x} + 3x^2)^{13}$

$t_{10} = C_{13}^9 (\frac{-1}{2x})^4 (3x^2)^9 = \frac{715 \times 3^9}{2^4} x^{14}$

Autre solution :

Nous pouvons calculer le dixième terme dans l'ordre inverse du développement de

$(3x^2 - \frac{1}{2x})^{13}$,

Son rang = 14 - 10 + 1 = 5

t_{10} dans l'ordre inverse = t_5 dans l'ordre = $C_{13}^4 (3x^2)^9 (\frac{-1}{2x})^4 = \frac{715 \times 3^9}{2^4} x^{14}$

Essayez de résoudre :

(3) Trouver le quatrième terme dans l'ordre inverse du développement de $(2x - \frac{1}{3x^2})^{11}$

Règles

1) $(x + a)^n + (x - a)^n = 2\,(t_1 + t_3 + t_5 + \ldots)$

2) $(x + a)^n - (x - a)^n = 2\,(t_2 + t_4 + t_6 + \ldots)$

Exemple

(5) Développer $(x + 2)^6 + (x - 2)^6$

Solution

$(x + 2)^6 + (x - 2)^6 = 2\,(t_1 + t_3 + t_5 + t_7)$

$= 2\,(x^6 + C_6^2 x^4 \times 2^2 + C_6^4 x^2 \times 2^4 + 2^6) = 2\,(x^6 + 60x^4 + 240\,x^2 + 64)$

Essayez de résoudre :

4 Développer $(1 + \sqrt{x})^5 - (1 - \sqrt{x})^5$

Exemple

6 Trouver le cinquième salon les puissances coisanteo de x terme dans le développement de :

$(3 + x)^{11} - C_{11}^{1}\ (3 + x)^{10}\ (1 - 2x) + C_{11}^{2}\ (3 + x)^{9}\ (1 - 2x)^{2} - \ldots\ldots - (1 - 2x)^{11}$

Solution

L'expression représente le développement de $[(3 + x) - (1 - 2x)]^{11} = (2 + 3x)^{11}$

Donc $t_5 = C_{11}^{4}\ (2)^7\ (3x)^4 = 330 \times 2^7 \times 3^4 x^4 = 3421440\ x^4$

Essayez de résoudre :

5 Dans le développement de $(1 - x)^8 + 24\,x\,(1 - x)^7 + 252\,x^2\,(1 - x)^6 + \ldots\ldots + 6561x^8$, trouver la valeur numérique du sixième terme craisrdntes dux quand $x = 2$

Exemple

7 Si $(1 + cx)^n = 1 + 20c + a_1 C_2^1 + a_2 C_3^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}\ C_n^{n-1}$
et si $16\,a_1 = 3\,a_2$, trouver la valeur de n et c où $c \neq 0$

Solution

$(1 + cx)^n = 1 + C_n^1\ cx + C_n^2\ c^2\,x^2 + C_n^3\ c^3\,x^3 + \ldots\ldots$

$\therefore C_n^1\ c = 20$ $\quad\therefore n\,c = 20$ $\quad\therefore c = \frac{20}{n}$ $\quad$ 1

$\because 16 \times C_n^2\ c^2 = 3 \times C_n^3\ c^3$ $\quad\therefore 16 \times C_n^2 = 3 \times C_n^3\ c$ $\quad$ 2

De 1 et 2 $\quad\therefore 16 \times C_n^2 = 3 \times C_n^3 \times \frac{20}{n}$

$\therefore 16\,n = 3 \times \frac{C_n^3}{C_n^2} \times 20$ $\quad\therefore 16n = \cancel{3} \times \frac{n-2}{\cancel{3}} \times 20$ $\quad\therefore n = 10$

En 1 $\quad\therefore c = \frac{20}{10} = 2$

Essayez de résoudre :

6 Dans le développement de $(1 + cx)^{10}$, si le troisième terme est égal à 180 et le cinquième terme est égal à 210, trouver la valeur de c et x où c est un nombre entier positif.

Exemple

8 **a** Démontrer que $= \dfrac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} = \dfrac{n}{r}$

b Si le rapport entre t_6 dans le développement de $(x + \frac{1}{x})^{15}$ et t_5 dans le développement de $(x - \frac{1}{x^2})^{14}$ est égal à $\frac{8}{9}$, trouver la valeur de x.

Solution

a $C_n^r \div C_{n-1}^{r-1} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} \times \dfrac{(n-r)!\,(n-1-r+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{n\,(n-r)!\,(r-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r)!} = \dfrac{n}{r}$

$$= \frac{t_6 \text{ dans } (x + \frac{1}{x})^{15}}{t_5 \text{ dans } (x - \frac{1}{x^2})^{14}} = \frac{C_{15}^5\, x^{10} (\frac{1}{x})^5}{C_{14}^4\ x^{10} (\frac{-1}{x^2})^4} = \frac{8}{9}$$

$\therefore 3x^3 = \frac{8}{9}$ $\quad\therefore x^3 = \frac{8}{27}$ $\quad\therefore x = \frac{2}{3}$

Terme médian dans le développement de $(x + a)^n$

Dans le développement de $(x + a)^n$, on trouve que le nombre de termes $= n + 1$

(1) Si n est un nombre pair, le nombre de termes du développement est un nombre impair. Par conséquent, le développement admet un terme médian unique de rang $\frac{n+2}{2}$

(2) Si n est un nombre impair, le nombre de termes du développement est un nombre pair. Par conséquent, le développement admet deux termes médians de rangs $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+3}{2}$

Exemple

9 Trouver le terme médian dans le développement de $(2x + \frac{1}{2x^2})^{12}$

Solution

Le rang du terme médian $= \frac{12+2}{2} = 7$

$$t_7 = C_{12}^6\ (2x)^6 \left(\frac{1}{2x^2}\right)^6 = C_{12}^6\ (2)^6\ (\tfrac{1}{2})^6\, x^{6-12} = C_{12}^6\ x^{-6}$$

Essayez de résoudre :

7 Trouver le terme médian dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{2x})^{10}$, Si la valeur de ce terme est égale à $= \frac{28}{27}$ trouver la valeur de x

Exemple

(10) Trouver les deux termes médians dans le développement de $(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x})^{15}$

Solution

Les deux termes médians sont t_8 et t_9

$$t_8 = C_{15}^{7} \left(\frac{x^2}{3}\right)^8 \left(\frac{3}{x}\right)^7 = C_{15}^{7} \times 3^{-8+7} \times x^{16-7} = C_{15}^{7} \times \frac{1}{3}x^9 = 2145x^9$$

$$t_9 = C_{15}^{8} \left(\frac{x^2}{3}\right)^7 \left(\frac{3}{x}\right)^8 = C_{15}^{8} \times 3^{8-7} \times s^{14-8} = C_{15}^{8} \times 3x^6 = 19305x^6$$

Essayez de résoudre :

(8) Si les deux termes médians dans le développement de $(3x + 2y)^{13}$ sont égaux, démontrer que $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

Exemple

(11) Trouver les deux termes médians dans le développement de $(3 + 2x)^8 + (3 - 2x)^8$

Solution

Le rang du terme médian $= \frac{8}{2} + 1 = 5$

$$t_5 = C_8^4 (3)^4 (2x)^4 + C_8^4 (3)^4 (-2x)^4$$

$$= 2 \times C_8^4 (3)^4 (2x)^4 = 181440\, x^4$$

Essayez de résoudre :

(9) Trouver le terne nédian ou les deux termes médians dans le développement de $\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10} + \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10}$

Exercices 1 - 1

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si les deux termes médians dans le développement de $(x+y)^n$ sont t_7 et t_8, alors n est égale à:

   a) 13 b) 15 c) 16 d) 56

2. Si $1 + 5x + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} x^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} x^3 + \dots\dots + x^5 = 1024$, alors x est égale à :

   a) 1 b) 2 c) 10 d) 3

3. La somme des coefficients des termes dans le développement de $(x^2 - \frac{1}{x})^7$ est égale à :

   a) 2^7 b) 2^5 c) 2^6 d) 0

4. Le coefficients du cinquième terme dans le développement de $(1 + 2x)^{10}$ est égal à :

   a) $16\, C_{10}^5$ b) $\frac{1}{16} C_{10}^5$ c) $16\, C_{10}^4$ d) $\frac{1}{16} C_{10}^4$

5. Dans le développement d'un binôme, si le terme général est $C_{12}^r\ x^{24-4r}$, alors le terme contenant x^{12} est :

   a) t_3 b) t_4 c) t_5 d) n'existe pas

6. Si les deux termes médians dans le développement de $(a + 2b)^{2n+1}$ sont égaux, alors :

   a) $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ b) $a = 4b$ c) $a = 8b$ d) $a = 2b$

7. Si le neuvième terme dans le développement de $(\frac{2a}{3} + \frac{b}{a^2})^{8n}$ est le terme médian, alors n est égale à :

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

8. Dans le développement de $(1 + bx)^9$, le coefficient du sixième terme est égal à :

   a) C_9^5 b) C_9^6 c) $C_9^5\, b^5$ d) $C_9^6\, b^6$

9. Si le développement d'un binôme contient 7 termes positifs et 6 termes négatifs, alors le binôme peut-être sous la forme :

   a) $(a-b)^{12}$ b) $(a-b)^{13}$ c) $(a+b)^{12}$ d) $(a+b)^{13}$

[2] Répondre aux questions suivantes :

10) Si $1 + 8x + C_8^2\, x^2 + \dots + x^8 = 256$ trouver la valeur de x

11) Trouver la valeur de x qui vérifie $(1 + \sqrt{3})^6 - (1 - \sqrt{3})6 = 480\sqrt{3}\, x$

12) En utilisant le développement de : $(1 + x)^{10} = 1 + C_{10}^1\, x + C_{10}^2\, x^2 + \dots + x^{10}$, démontrer que :

a) $1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10}$ b) $1 - C_{10}^1 + C_{10}^2 - \dots + C_{10}^{10} = 0$

13) Développer ce qui suit :

a) $(\frac{2}{x} + \frac{x}{2})^4$ b) $(x - \frac{1}{x})5$

c) $(x + \sqrt{2})^4 + (x - \sqrt{2})^4$ d) $(\sqrt{3} + 2x)^5 - (\sqrt{3} - 2x)^5$

14) Dans le développement de $(1 + x)^n$ selon les puissances décroissantes de x, si $t_3 = 28x^2$ et $t_5 = 1120$ trouver la valeur de n et x.

15) Dans le développement de $(1 + x)^n$ si le coefficient du sixième terme est égal au coefficient du dixième terme, trouver la valeur de n.

16) Dans le développement de $(ax + b)^{10}$ selon les puissances décroissantes de x si le coefficient de $t_6 = \frac{63}{8}$ démontrer que $2ab = 1$

17) Dans le développement de $(2x^2 + \frac{1}{2x})^{12}$ trouver le terme médian.

18) Dans le développement de $(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x})^{11}$, trouver les deux termes médians.

19) Dans le développement de $x^4\,(x - \frac{1}{x})^9$ selon les puissances décroissantes de x, trouver le quatrième terme dans l'ordre inverse.

20) Si le terme médian dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{2x})^{10}$ est égal à $\frac{28}{27}$ trouver le valeur de x.

21) Trouver le rapport entre le terme médian et le cinquième terme dans le développement de $(\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x})^{10}$, puis trouver la valeur numérique de ce rapport pour $x = 3$

22) Si le rapport entre le cinquième terme dans le développement de $(x + \frac{1}{x})^{15}$ et le quatrième terme dans le développement de $(x - \frac{1}{x^2})^{14}$ est égal à $-16 : 15$, trouver la valeur de x

Trouver le terme contenant x^k dans le développent d'un binôme

Unité (1)

1 - 2

Réfléchir et discuter

De la leçon précédente, nous avons appris que :

$$(x^2 - \frac{1}{2x})^{20} = (x^2)^{20} - C_{20}^1 (x^2)^{19} (\frac{1}{2x}) + C_{20}^2 (x^2)^{18} (\frac{1}{2} x)^2 - C_{20}^3 (x^2)^{17} (\frac{1}{2x})^3 + \dots\dots + (\frac{-1}{2x})^{20}$$

Est-il possible de trouver le terme contenant x^{16} ou x^{24} dans le développement ou le terme constant sans écrire tous les termes du développement ?

La méthode qui consiste à trouver le terme contenant x^k en développant le binôme est très difficile. Pour cela, on suit la méthode suivante :

1- On suppose que le terme cherché est le terme général t_{r+1} puis on calcule ce terme en fonction de r.

2- On calcule la somme des puissances de x dans le terme général en fonction de r puis on égalise le résultat à la puissance cherchée k. De cette égalité, on calcule la valeur de r . Deux cas se présentent :

a $r \in \mathbb{N}$ et par conséquent , r + 1 est le rang du terme demandé.

b $r \notin \mathbb{N}$ et par conséquent, le terme demandé n'existe pas.

Pour chercher le terme constant dans le développement, on égalise la somme des puissances de x dans le terme général à 0.

A apprendre

- *Utiliser le terme général pour trouver le terme contenant x^k dans le développement d'un binôme.*
- *Trouver le coefficient du terme contenant x^k dans le développement.*
- *Trouver le coefficient de la plus grande puissance de x.*

Expressions de base

- *Terme général*
- *Terme constant*
- *La plus grande puissance*
- *Coefficient d'un terme*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

Exemple

1 Dans le développement $(\frac{3x}{2} + \frac{2}{3x})^{11}$, trouver le coefficient de x.

Solution

$$t_{r+1} = C_{11}^r \left(\frac{3x}{2}\right)^{11-r} \left(\frac{2}{3x}\right)^r$$

En comparant les puissances dans $x^{11-r-r} = x^1$

$$11 - 2r = 1 \qquad r = 5$$

Le terme demandé est le sixième terme.

Le coefficient de $t_6 = C_{11}^5 \left(\frac{3}{2}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 693$

Essayez de résoudre :

1) Trouver le coefficient de x^8 dans le développement $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$

Exemple

2) Dans le développement $\left(2x - \frac{1}{2x^2}\right)^9$ trouver :

a) le coefficient de x^3 b) le terme constant

c) Démontrer que le développement ne contient pas de terme contenant x^2

Solution

$t_{r+1} = C_9^r\ (2x)^{9-r}\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^r = C_9^r\ (-1)^r\ (2)^{9-2r}\, x^{9-3r}$

En comparant les puissances :

a) Pour trouver le coefficient de x^3

$x^{9-3r} = x^3$ $9 - 3r = 3$ $r = 2$

$\therefore$ Le troisième terme contient x^3

Le coefficient de $t_3 = C_9^2 \times 2^5 = 36 \times 25 = 900$

b) Pour trouver le terme constant $9 - 3r = 0$ $r = 3$

$\therefore$ Le terme demandé est $t_4 = C_9^3\ (-1)^3\ (2)^3 = -672$

c) En posant $9 - 3r = 2$ $\therefore 3r = 7$ $\therefore r = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$

$\therefore$ Le développement ne contient pas de terme contenant x^2

Essayez de résoudre :

2) a) Trouver le terme constant dans le développement $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$

b) Trouver le coefficient de x^{-10} dans le développement $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$

c) Dans le développement $\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^{10}$ selon les puissances décroissantes de x, si le terme constant est égal au coefficient du septième terme, démontrer que $6\,ab = 5$

Exemple

3) Si n est un nombre entier positif, démontrer qu'il n'existe un terme constant dans le développement $\left(x^5 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ que si n est un multiple de 7. Trouver ensuite ce terme pour $n = 7$

Solution

$t_{r+1} = C_n^r\ (x^5)^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = C_n^r\ x^{5n-7r}$

$x^{5n-7r} = x^0$ $5n - 7r = 0$ $r = \frac{5n}{7}$

$\frac{5n}{7} \in \mathbb{Z}^+$ si n est un multiple de n 7 si $n = 7$ $r = 5$ et le terme demandé est t6

$t_6 = C_7^5 = 21$

Essayez de résoudre :

3) Dans le développement $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{3n}$, trouver :

a) le coefficient du terme contenant x^{3n}

b) Si n est égal à 6, trouver le rapport entre le terme contenant x^{3n} et le coefficient du terme médian

Exemple

4) Dans le développement $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^9$ trouver la valeur de x qui rend les deux termes médians égaux.

Solution

Les deux termes médians sont t_5 , t_6

$\because t_5 = t_6$

$\therefore C_9^4 \, (2)^5 \left(\frac{x}{3}\right)^4 = C_9^5 (2)^4 \left(\frac{x}{3}\right)^5$

$2 = \frac{x}{3}$

$\therefore x = 6$

Exercices 1 - 2

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) Le terme contenant x^4 dans le développement de $(1 + 2x)^{10}$ est égal à :

a) C_{15}^4 b) $\frac{1}{16} C_{10}^4$ c) $16\ C_{10}^4$ d) $32 \times C_{10}^5$

2) Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$, le terme constant est :

a) t_4 b) t_5 c) t_6 d) n'existe pas

3) Dans le développement de $x^3\ (1 + x)^7$ le coefficient du terme contenant x^4 est :

a) C_7^4 b) C_7^3 c) C_7^1 d) 21

4) Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ le terme constant est le

a) troisième terme b) quatrième terme c) cinquième terme d) n'existe pas

5) Dans le développement de $\left(ax^2 + \frac{1}{ax}\right)^{11}$ si les coefficients de x^4 et x^7 sont égaux, alors a est égale à :

a) 1 b) -1 c) ± 1 d) ± 2

6) Si t_7 est le terme constant dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$, alors n est égale à :

a) 6 b) 10 c) 12 d) 8

7. Si le coefficient du terme médian dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^8$ est égal au coefficient de x^7 alors a est égale à :

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{-4}{5}$ c) $\frac{-5}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

8. Dans le développement de $\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^{10}$ selon les puissances décroissantes de x , si le terme constant est égal au coefficient du septième terme, alors :

a) $ab = \frac{6}{5}$ b) $ab = \frac{5}{6}$ c) $ab = \frac{36}{25}$ d) $ab = \frac{25}{36}$

9. Dans le développement de $(2x + \frac{1}{2x})^8$ le terme constant est égal à :

a) 35 b) 140 c) 70 d) 56

10. Dans le développement de $(1 + ax)^7$ selon les puissances croissantes de x, si le coefficient de $t_5 = 560$ alors a est égale à :

a) 2 b) 4 c) ± 2 d) ± 4

[2] Répondre aux questions suivantes :

11. Dans le développement de $\left(4x^2 + \frac{1}{2x}\right)^{12}$, calculer le terme constant

12. Trouver le coefficient de x^{12} dans le développement de $x^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^3}\right)^{15}$

13. Si le sixième terme dans le développement de $(2x - \frac{1}{x^3})^n$ est constant, trouver la valeur de n puis étudier l'existence du terme contenant x^{-6} dans le développement.

14. Dans le développement de $\left(2\,x - \frac{1}{x^2}\right)^9$, trouver :

a) le coefficient de x^3 b) le terme constant

c) Démontrer qu'il n'existe pas de terme contenant x^2 dans le développement.

15. Démontrer que $C_n^r : C_{n-1}^{r-1} = \frac{n}{r}$ Si le rapport entre le coefficient de t_{11} dans le développement de $(1 + x^2)^n$ et celui de t_{10} dans le développement de $(1 - y)^{n-1}$ est égal à 2 : 3 , trouver la valeur de n.

16. Trouver le coefficient de $\left(\frac{x}{y}\right)^4$ dans le développement de $\left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{2x}\right)^{10}$

17. Trouver le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n}$, puis démontrer qu'il est égal au double du coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n-1}$

18. Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$, démontrer que le terme constant est le terme médian puis trouver la valeur de ce terme pour $n = 8$

19) Dans le développement de $\left(x^k + \frac{1}{x}\right)^6$ où k est un nombre entier positif, trouver :

a) la valeur de k qui permet d'avoir un terme constant dans le développement.

b) le rapport entre le terme constant et le coefficient du terme médian pour la plus grande valeur obtenue de k .

20) Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^{12}$ si le rapport entre le terme constant et le coefficient du terme contenant x^3 est égal à 5 : 16 ,trouver la valeur de a puis trouver la valeur du terme médian pour x = 2

21) Dans le développement de $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$, si le coefficient du terme contenant x^5 est égal au coefficient du terme contenant x^{15} , trouver la valeur de a.

22) Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{8x}\right)^{13}$ selon les puissances décroissantes de x :

a) démontrer qu'il n'existe pas de termes constant.

b) si $t_4 = t_{11}$, trouver la valeur de x

23) Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$, trouver :

a) le rang et la valeur du terme constant.

b) la valeur de x qui rend la somme des deux termes médians nulle.

24) Trouver le terme constant dans le développement de $\left(9x^2 + \frac{1}{3x}\right)^9$, puis trouver la valeur de x qui rend les coefficients des deux termes médians égaux.

25) Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{3n}$ démontrer que le terme constant est égal au coefficient du terme contenant x^{3n}, et si n = 6 , trouver le rapport entre le terme contenant x^{3n} et le terme médian.

Unité (1)

1 - 3

Rapport entre deux termes consécutifs dans le développement d'un binôme

A apprendre

- *Trouver le rapport entre deux termes consécutifs*
- *Trouver le rapport entre les coefficients de deux termes consécutifs*

Expressions de base

- *Deux termes consécutifs*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

Dans le développement de $(x + a)^n$, si les deux termes consécutifs sont t_{r+1} et t_r

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{C_n^r\ (x)^{n-r}(a)^r}{C_n^{r-1}\ (x)^{n-r+1}(a)^{r-1}} =$$

$$= \frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} \times \frac{a}{x} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} \times \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!} \times \frac{a}{x}$$

$$= \frac{(r-1)!(n-r+1)\ (n-r)!}{r(r-1)\ !\ (n-r)!} \times \frac{a}{x}$$

$$\boxed{\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r} \times \frac{a}{x}}$$

De même, on a : $\dfrac{\text{le coefficient de } t_{r+1}}{\text{le coefficient de } t_r} = \dfrac{n-r+1}{r} \times \dfrac{\text{le coefficient de } a}{\text{le coefficient de } x}$

Exemple

1 Dans le développement $(x + 2y)^{12}$, trouver :

a $\dfrac{t_3}{t_2}$

b $\dfrac{\text{le coefficient de } t_7}{\text{le coefficient de } t_8}$

c $\dfrac{t_6}{t_4}$

d $\dfrac{\text{le coefficient de } t_8}{\text{le coefficient de } t_6}$

Solution

a $\dfrac{t_3}{t_2} = \dfrac{12-2+1}{2} \times (\dfrac{2y}{x}) = \dfrac{11}{2} \times \dfrac{2y}{x} = \dfrac{11y}{x}$

b $\dfrac{\text{le coefficient de } t_7}{\text{le coefficient de } t_8} = \dfrac{7}{12-7+1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{12}$

c $\dfrac{t_6}{t_4} = \dfrac{t_6}{t_5} \times \dfrac{t_5}{t_4}$

$$= \frac{12-5+1}{5} \times (\frac{2y}{x}) \times \frac{12-4+1}{4} (\frac{2y}{x})$$

$$= \frac{8}{5} \times \frac{2y}{x} \times \frac{9}{4} \times \frac{2y}{x} = \frac{72\ y^2}{5\ x^2}$$

d $\dfrac{\text{le coefficient de } t_8}{\text{le coefficient de } t_6} = \dfrac{\text{le coefficient de } t_8}{\text{le coefficient de } t_7} \times \dfrac{\text{le coefficient de } t_7}{\text{le coefficient de } t_6}$

$$= \frac{12-7+1}{7} \times \frac{2}{1} \times \frac{12-6+1}{6} \times \frac{2}{1}$$

$$= \frac{6}{7} \times \frac{2}{1} \times \frac{7}{6} \times \frac{2}{1} = 4$$

Essayez de résoudre :

1. Dans le développement $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^8$
   a. trouver le rapport entre le cinquième terme et le sixième terme et si ce rapport est égal à 8 : 25 , trouver la valeur de x.
   b. démontrer que ce développement ne contient pas de terme constant.

Exemple

2. Dans le développement $(x + y)^8$ si $2\,t_5 = t_4 + t_6$, trouver la valeur numérique de $\frac{x}{y}$

Solution

$t_4 + t_6 = 2t_5$ En divisant les deux membres par t_5 $\qquad \frac{t_4}{t_5} + \frac{t_6}{t_5} = 2$

$$\frac{4}{8-4+1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{8-5+1}{5}\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \qquad \frac{4x}{5y} + \frac{4y}{5x} = \frac{2}{1}$$

En multipliant par 5xy

$$4x^2 + 4y^2 = 10\,xy \qquad 4x^2 - 10\,xy + 4y^2 = 0 \;:\; 2$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \qquad (2x - y)(x - 2y) = 0$$

$$2x = y \qquad x = 2y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$$

Essayez de résoudre :

2. Dans le développement $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^8$, si t_4 , t_5 , $25t_7$ et t_6 sont proportionnels, trouver la valeur de x.

Exemple

3. Dans le développement $(1 + x)^n$, si les coefficients de trois termes consécutifs selon les puissances croissantes de x sont 35; 21 et 7, trouver la valeur de n et les rangs des trois termes.

Solution

Soient les trois termes t_r , t_{r+1} et t_{r+2}

$$\frac{\text{le coefficient de } t_{r+1}}{\text{le coefficient de } t_r} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{21}{35} \qquad \frac{n-r+1}{r} = \frac{3}{5}$$

$$5n - 5r + 5 = 3r \qquad \boxed{5n - 8r = -5} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{le coefficient de } t_{r+2}}{\text{le coefficient de } t_{r+1}} = \frac{n-(r+1)+1}{r+1} = \frac{7}{21} \qquad \frac{n-r}{r+1} = \frac{1}{3}$$

$$3n - 3r = r + 1 \qquad \boxed{3n - 4r = 1} \qquad (2)$$

En résolvant les deux équations : (1) , (2) $\therefore\; n = 7$ et $r = 5$

Essayez de résoudre :

3 Dans le développement $(x + y)^n$, si T_3 ; T_4 ; T_5 sont 112 ; 448 et 1120 , trouver la valeur de n , x et y.

Exemple **Trouver le plus grand terme**

4 Trouver le plus grand coefficient dans le développement $(x + y)^{10}$ quand x = 2 et y = 3

Solution

$\because \frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{10 + 1 - r}{r} \times \frac{3}{2}$ $\therefore \frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{11 - r}{r} \times \frac{3}{2} = \frac{33 - 3r}{2r}$

a Si $\frac{33 - 3r}{2r} > 1$ $\therefore 33 - 3r > 2r$ $\therefore 5r \leqslant 33$ $\therefore r \leqslant 6{,}6$

d'où on déduit que $t_7 > t_6 > t_5 > \dots\dots > t_1$

b $\frac{33 - 3r}{2r} \leqslant 1$ $\therefore 33 - 3r \leqslant 2r$ $\therefore 5r > 33$ $\therefore r > 6{,}6$

d'où on déduit que $t_{11} < t_{10} < t_9 < t_8 < t_7$

$\therefore t_7$ est le plus grand terme dans le développement de $(2x + 3y)^{10}$

$\therefore$ Le coefficient de $t_7 = C^6_{10} \times 2^4 \times 3^6$ $\therefore$ Le coefficient de $t_7 = 2449440$

Exercices 1 - 3

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) Dans le développement de $(x + y)^{10}$, le neuvième terme : le huitième terme est égal à ....

a) $\frac{3y}{8x}$ b) $\frac{3x}{8y}$ c) $\frac{8y}{3x}$ d) $\frac{8x}{3y}$

2) Dans le développement de $(1 - x)^{12}$, le coefficient du sixième terme : le coefficient du cinquième terme ....

a) $(\frac{8}{5})$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{-8}{5}$ d) $\frac{-5}{8}$

3) Dans le développement de $(x + y)^8$, $\frac{t_6}{t_4}$ est égal à ....

a) $\frac{25\,y^2}{16\,x^2}$ b) $\frac{25x^2}{16\,y^2}$ c) 1 d) $\frac{y^2}{x^2}$

4) Dans le développement de $(3a - 2\,b)^{11}$, si le rapport entre les deux termes médians dans l'ordre est égal à $\frac{-3}{2}$ alors a : b est égal à ....

a) 9 : 4 b) 4 : 9 c) 1 d) -1

[2] Répondre aux questions suivantes :

5) Dans le développement de $\left(2\,x^2 + \frac{3}{x^2}\right)^{11}$, trouver la valeur de :

a) $\frac{t_3}{t_2}$ b) $\frac{t_4}{t_5}$ c) $\frac{t_6}{t_8}$ d) $\frac{\text{le coefficient de } t_4}{\text{le coefficient de } t_6}$

6) Dans le développement de $(1 + x)^{12}$, si $t_3 = 2t_2$ trouver la valeur de x

7) Dans le développement de $(a + b)^n$ si $t_2 = 240$, $t_3 = 720$ et $t_4 = 1080$ trouver la valeur de a , b et n.

8) Si $t_2 : t_3$ dans le développement de $(a + b)^n$ est égal à $t_3 : t_4$ dans le développement de $(a + b)^{n+3}$ trouver la valeur de n

9) Dans le développement de $(1 + mx)^n$, si $4t_6 = 7t_8$ et $\frac{t_4}{t_6} = \frac{1}{4}$ pour x = 1, trouver la valeur de m et n.

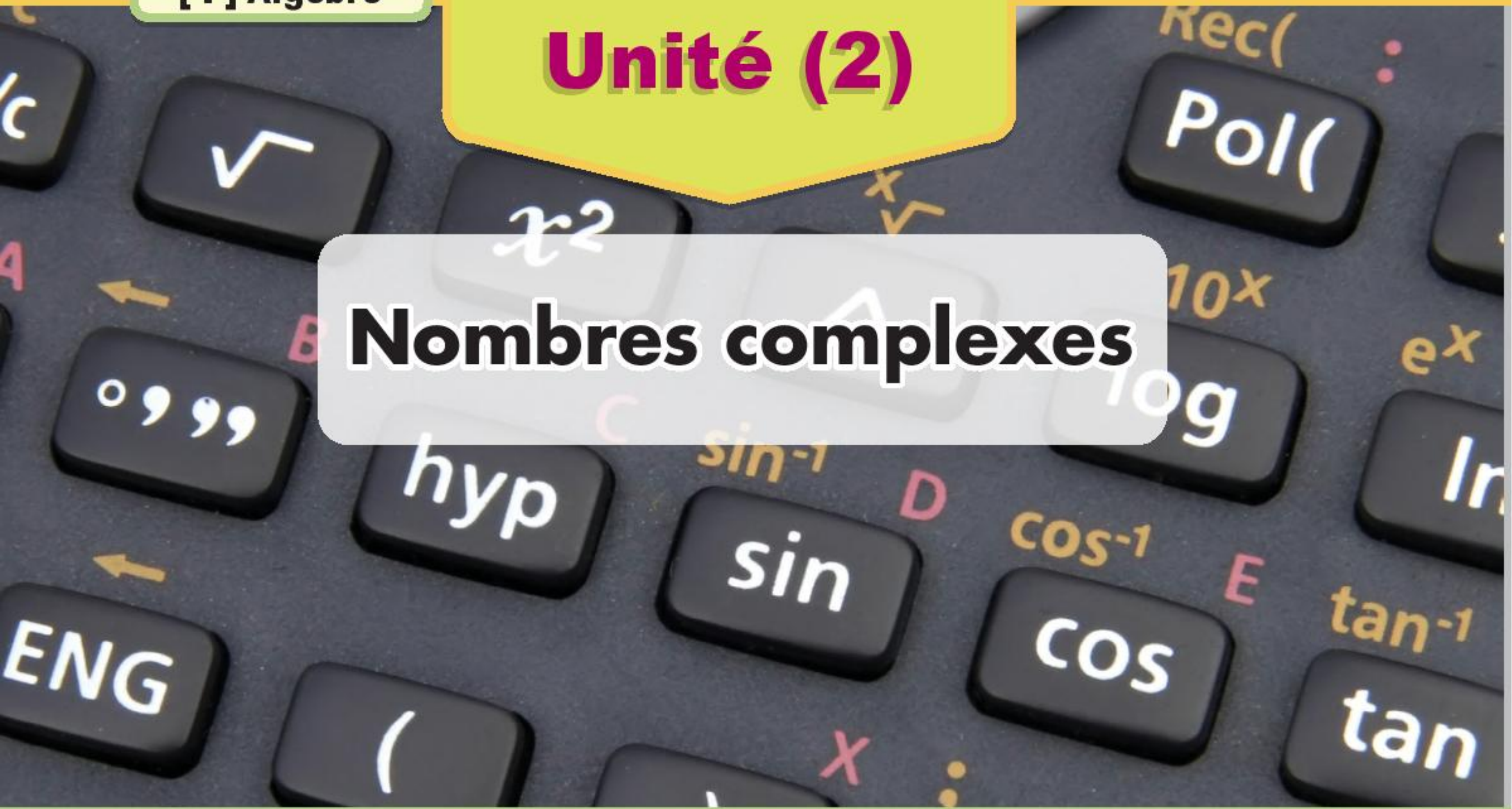
10) Trouver la valeur numérique du plus grand terme dans le développement de $(3 - 5x)^{15}$ pour $x = \frac{1}{5}$.

11) Dans le développement de $(x + y)^n$ selon les puissances décroissantes de x, si le deuxième terme est une moyenne arithmétique entre le premier terme et le troisième terme pour x = 2y , trouver la valeur de n.

[I] Algèbre

Unité (2)

Nombres complexes



Introduction de l'unité

Jean-Robert Argand est considéré comme un mathématicien de renommée. C'est le premier qui a étudié en détails les nombres complexes et les a utilisés pour démontrer que toutes les équations algébriques ont des racines soient réelles soient imaginaires. Les nombres complexes sont présentés dans un diagramme connu sous le nom de diagramme d'Argand en honneur du savant Français Argand, soit par un point (x ; y) où x est le nombre réel représenté sur l'axe des abscisses et y représente le nombre imaginaire sur l'axe des ordonnées ou par un vecteur d'intensité égale à $\sqrt{x^2+y^2}$ et de direction $tg^{-1}\ \frac{x}{y}$. Nous étudierons également dans cette unité, les racines cubiques de l'unité et la résolution de problèmes sur les nombres complexes utilisés dans la vie quotidienne par exemple en électricité en dynamique, dans la théorie de la relativité et dans les différents domaines de la physique. Ces nombres sont des nombres flexibles qui ont la capacité d'atteindre le résultat final d'une façon acceptable.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de :

- Représenter un nombre complexe et son conjugué par des points (des couples) dans un repère.
- Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe.
- Identifier la détermination principale d'un nombre complexe.
- Identifier la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
- Reconnaître le théorème de Moivre et ses applications.
- Déterminer les racines nième d'un nombre complexe.
- Exprimer sin $n\theta$ et cos $n\theta$ en fonction des rapports trigonométriques de l'angle et ses multiples.
- Reconnaître le développement de sin θ et cos θ comme suites.
- Déduire la formule d'Euler à travers les suites.
- Identifier et appliquer les méthodes de transformation entre les différentes formes d'un nombre complexe.
- Reconnaître les racines cubiques de l'unité.

- Identifier le module et l'argument du produit et du quotient d'un nombre complexe.
- Effectuer les opérations de base sur un nombre complexe dans la forme trigonométrique.
- Résoudre des problèmes sur les racines cubiques de l'unité.
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes mathématiques.
- Utiliser des logiciels pour résoudre des problèmes mathématiques comportant des nombres complexes.
- Déduire les propriétés de deux nombres.
- Déduire les propriétés des racines cubiques de l'unité.

Expressions de base

- *Plan d'Argand*
- *Conjugué*
- *Module*
- *Argument*
- *Forme trigonométrique*
- *Théorème de Moivre*
- *Racine*
- *Racine carrée*
- *Racine cubique*
- *Cercle de unité*
- *polaire*

Matériel utilisé

- *Une calculatrice scientifique*

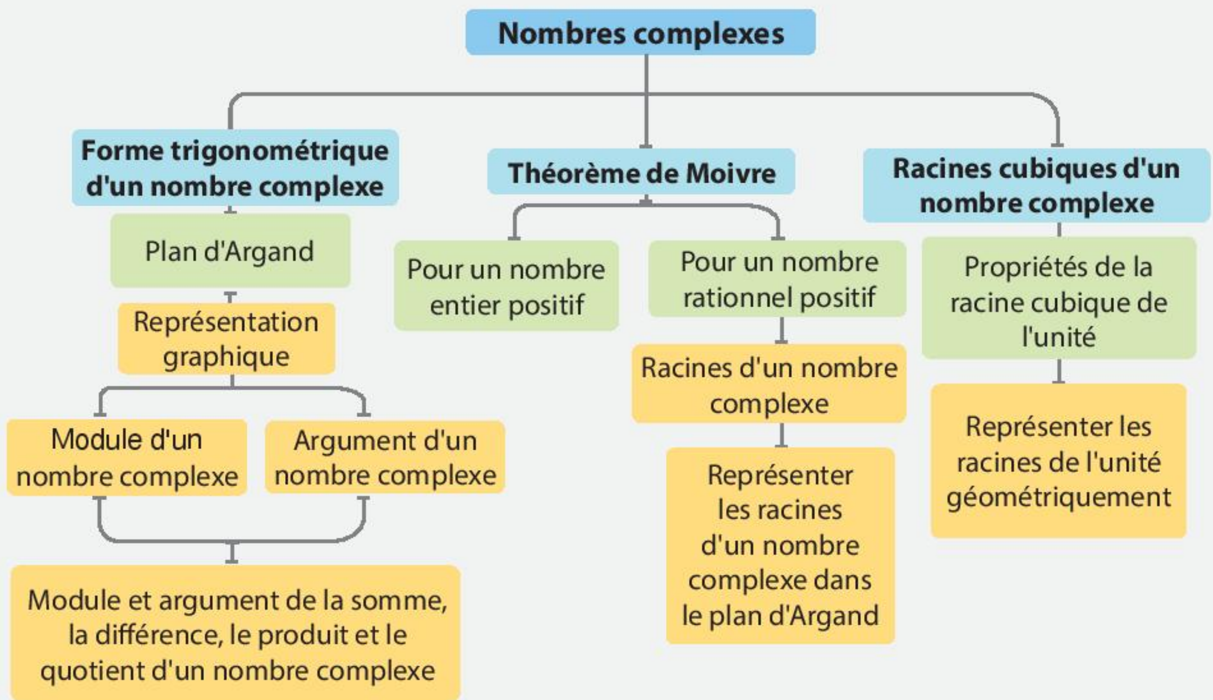
Leçons de l'unité

Lesson (2-1): Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Lesson (2-2): Théorème de Moivre

Lesson (2-3): Racines cubiques de l'unité

Organigramme de l'unité



Unité (2)

2 - 1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

A apprendre

- *Représentation graphique d'un nombre complexe et son conjugué dans le plan d'Argand.*
- *Représentation graphique de la somme de deux nombres complexes.*
- *Module d'un nombre complexe.*
- *Argument d'un nombre complexe.*
- *Détermination principale d'un nombre complexe.*
- *Forme trigonométrique d'un nombre complexe.*
- *Module et argument du produit et du quotient de deux nombres complexes.*

Expressions de base

- *Plan d'Argand*
- *Conjugué*
- *Argument*
- *Détermination principale*
- *Forme trigonométrique*

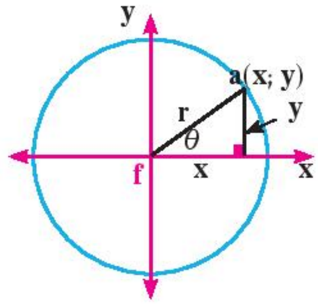
Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

Vous avez déjà étudié les nombres complexes. Un nombre complexe peut s'écrire sous la forme $z = x + iy$ **(forme algébrique)** où x et y sont deux nombres réels et $i^2 = -1$. Dans cette leçon, nous allons étudier d'autres formes d'écriture d'un nombre complexe et comment le représenter graphiquement.

Coordonnées polaires et cartésiennes

La figure ci-contre représente un cercle de longueur de rayon r. A(x ; y) est un point du cercle qui intercepte un angle de mesure θ.



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ et $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\therefore\ x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

Où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$ d'où $\theta = \text{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$

Si on compare le plan cartésien et le plan polaire en superposant l'axe polaire sur le sens positif de l'axe des abscisses, on trouve qu'il est possible de transformer les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes et inversement.

Transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes

Si les coordonnées polaires du point A sont $(r\ ;\ \theta)$, alors les coordonnées cartésiennes du même point sont (x ; y) telles que :

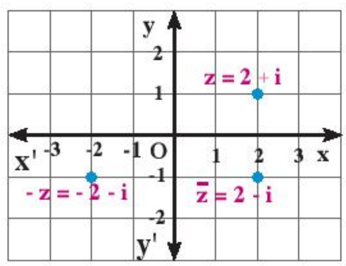
$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ On a : $(x\ ;\ y) = (r\cos\theta\ ;\ r\sin\theta)$

Plan d'Argand

Le mathématicien Argand a représenté le nombre complexe z dans un repère orthogonal en utilisant l'axe $\overleftrightarrow{XX'}$ pour représenter la partie réelle du nombre complexe et l'axe $\overleftrightarrow{YY'}$ pour représenter sa partie imaginaire. Par conséquent, le point de coordonnées (x ; y) représente le nombre complexe x + i y

Exemple

1 Dans le plan d'Argand ci-contre, on remarque que les deux points représentant les deux nombres z et –z sont symétriques par rapport au point d'origine O.



On remarque également que les deux points représentant les nombres conjugués z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe $\overleftrightarrow{XX'}$.

Essayez de résoudre

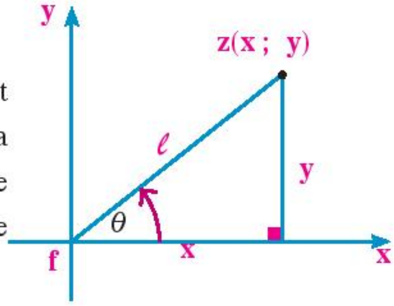
1) Représenter dans le plan d'Argand chacun des nombres suivants :

$z = 3 + 4i$, $\bar{z}$, $-z$, $1 + z$

Réflexion critique : Dans le plan d'Argand, que représentent tous les nombres complexes z ayant pour partie réelle 2 ?

A apprendre (1)

Module et argument d'un nombre complexe



Si $z = x + y\,i$ est un nombre complexe représenté par le point $(x\ ;\ y)$ dans le plan d'Argand, alors le module du nombre z est la distance de ce point par rapport au point d'origine O. Le module du nombre z est noté |Z| ou ℓ. θ est appelé l'argument du nombre complexe. On obtient :

$\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $tg\theta = \frac{y}{x}$ d'où $\theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$

Forme trigonométrique (polaire) d'un nombre complexe :

Si $z = x + y\,i$ est un nombre complexe d'argument de détermination principale θ où $\theta \in\ ]-\pi\ ;\pi]$, alors il s'écrit sous la forme $z = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$. La mesure de θ est déterminée selon les cas suivants:

a) Si $x > 0$ et $y > 0$, alors θ est situé dans le premier quadrant et $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

b) Si $x < 0$ et $y > 0$, alors θ est situé dans le deuxième quadrant et $\theta = \pi + tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

c) Si $x < 0$ et $y < 0$, alors θ est situé dans le troisième quadrant et $\theta = -\pi + tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

d) Si $x > 0$ et $y < 0$, alors θ est situé dans le quatrième quadrant et $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Remarquez que

Si $x > 0$ et $y = 0$, alors $\theta = 0$

Si $x < 0$ et $y = 0$, alors $\theta = \pi$

Si $x = 0$ et $y > 0$, alors $\theta = \frac{\pi}{2}$

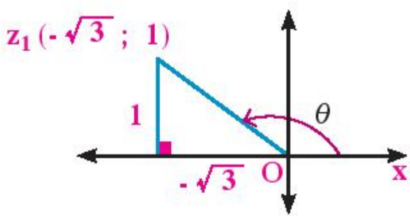
Si $x = 0$ et $y < 0$, alors $\theta = \frac{-\pi}{2}$

Exemple

2) Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres complexes suivants:

a) $z_1 = -\sqrt{3} + i$ b) $z_2 = -1 - i$

Solution



$\because$ La forme d'un nombre complexe est $z = x + yi$, alors :

a) $x = -\sqrt{3}$ et $y = 1$

$\therefore$ le nombre z_1 est situé dans le deuxième quadrant

$\ell = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$

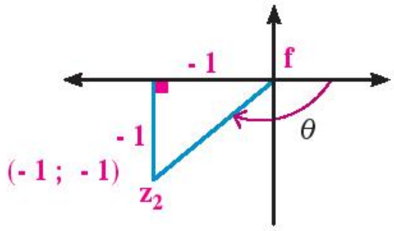
$\theta = \pi + tg^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

b $x = -1$ et $y = -1$

$\therefore$ le nombre z_2 est situé dans le troisième quadrant

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = -\pi + tg^{-1}(\frac{1}{1}) = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$



Essayez de résoudre

(2) Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

a $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ **b** $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$

c $z_3 = -\sqrt{3}\,i$ **d** $z_4 = 5$

Rappel

$\frac{\theta^{rad}}{\pi} = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}$

Cette formule est utilisée pour transformer la meure d'un angle de degrés en radians et inversement.

Propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe $z = x + y\,i$ d'argument θ, on a :

1) $|z| \geqslant 1$

2) L'argument d'un nombre complexe peut prendre une infinité de valeurs en ajoutant un nombre entier de tours 2π d'où l'argument d'un nombre complexe est égal à $\theta + 2\pi n$ où n est un nombre entier.

3) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$ où $\bar{z}$ est le conjugué du nombre z.

4) $z\,\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

Réflexion critique : Si θ est la détermination principale de l'argument d'un nombre complexe z, trouver la détermination principale de l'argument de chacun des nombres $-z$, $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$.

Exemple

(3) Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique:

a $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ **b** $z_2 = -4i$ **c** $z_3 = \frac{-4}{\sqrt{3} + i}$ **d** $z_4 = -3$

Solution

$\because$ La forme d'un nombre complexe est $z = x + y\,i$, alors :

a $x = 2$ et $y = -2\sqrt{3}$

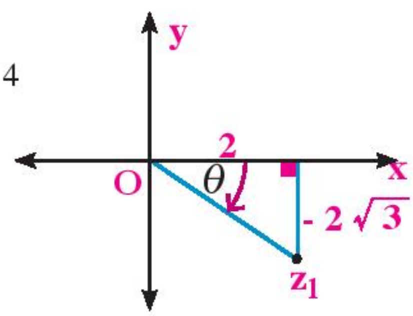
$\therefore z_1$ est situé dans le quatrième quadrant

$\ell = |z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$

$\theta = tg^{-1}(\frac{-2\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\pi}{3}$

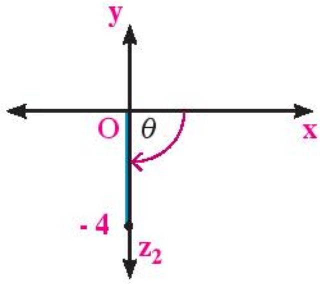
$\therefore z_1 = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 4\,(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}))$



b $\because\ x = 0$ et $y = -4$

$\therefore\ z_2$ est situé sur l'axe des ordonnées

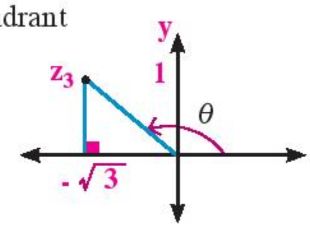


$\ell = |z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = 4$

$\theta = \frac{-\pi}{2}$ $\therefore\ z_2 = 4(\cos(\frac{-\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{2}))$

c $z_3 = \frac{-4}{\sqrt{3} + i} \times \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = -\sqrt{3} + i$ En multipliant par le conjugué du dénominateur

$x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ $\therefore\ z_3$ est situé dans le deuxième quadrant



$\ell = |z_3| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}$

$z_3 = 2\,(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

d $\because\ x = -3$ et $y = 0$ $\therefore\ z_4$ est situé sur l'axe des abscisses

$1 = |z_4| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = 3$

$\theta = \pi$ $\therefore\ z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

Essayez de résoudre

3 Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique :

a $z_1 = 8$ **b** $z_2 = 5i$ **c** $z_3 = -3 - 3i$

Rappel

- $1 = \cos 0 + i\sin 0$
- $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
- $-i = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}$

Exemple

4 Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres suivants :

a $z_1 = -8\,(\cos 45° + i\sin 45°)$

b $z_2 = 2\,(\sin\frac{4}{3}\pi - i\cos\frac{4}{3}\pi)$

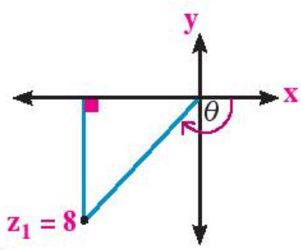
Rappel

$\cos\theta - i\sin\theta =$
$\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

Solution

a $z_1 = -8\,(\cos 45° + i\sin 45°)$

$= 8(-\cos 45° - i\sin 45°)$



$\because\ x < 0,\ y < 0$ $\therefore\ z_1$ est situé dans le troisième quadrant

$\because\ -\cos 45° = \cos(180° + 45°)$, $-\sin 45° = \sin(180° + 45°)$

$\therefore\ z_1 = 8(\cos 225° + i\sin 225°) = 8(\cos -135° + i\sin -135°)$

$\therefore$ le module de $z_1 = 8$ et la détermination principale $\theta = -135° = \frac{-3\pi}{4}$

b $z_2 = z_1 = 2\,(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$

$\because$ $x > 0$ et $y < 0$ $\therefore z_2$ est situé dans le quatrième quadrant

$\because$ $\sin \frac{4}{3}\pi = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi) = \cos \frac{17}{6}\pi = \cos(\frac{5\pi}{6})$

$-\cos \frac{4}{3}\pi = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi) = \sin(\frac{17}{6}\pi) = \sin(\frac{5\pi}{6})$

$\therefore z_2 = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$

$\therefore$ le module de $z_2 = 2$ et la détermination principale $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Rappel

$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\theta$

Essayez de résoudre

4) Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres suivants :

a $z_1 = 2\,(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$

b $z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sin 45° - i \sin 45°)$

A apprendre (2)

Multiplication et division des nombres complexes en utilisant la forme trigonométrique

Si $z_1 = \ell_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ et $z_2 = \ell_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ alors :

1) $z_1 z_2 = \ell_1\ell_2\,(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$= \ell_1\ell_2\,(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ **(1)**

Donc. $|z_1 z_2| = \ell_1\ell_2 = |z_1||z_2|$

a L'argument de $(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \times \frac{\cos\theta_1 + i \sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i \sin\theta_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$ **(2)**

Donc $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et L'argument de $(\frac{z_1}{z_2}) = \theta_1 - \theta_2$

Avec l'aide de votre enseignant, démontrer les relations (1) et (2).

Exemple

5) Exprimer $3\,(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}) \times 4\,(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ sous la forme $x + y\,i$

Solution

$3\,(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}) \times 4(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

$= 3 \times 4((\cos \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}))$

$= 12\,(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 12(0 + i\,(1)) = 12\,i$

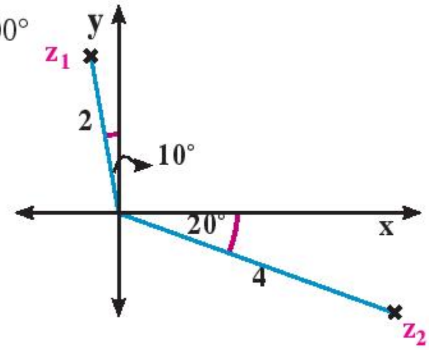
Essayez de résoudre

5) Exprimer $2(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}) \times 3(\cos\frac{-2\pi}{5} + i\sin\frac{-2\pi}{5}))$ sous la forme $x + y\,i$

Exemple

6) Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes représentés dans le plan d'Argand comme le montre la figure ci-contre, trouver le nombre $\frac{z_2}{z_1}$ sous la forme $x + y\,i$.

Solution



D'après la figure, $|z_1| = 2$ et l'argument de $= 90° + 10° = 100°$

$\therefore\ z_1 = 2(\cos 100° + i\sin 100°)$

$|z_2| = 4$ et $\arg z_2 = -20°$

$\therefore\ z_2 = 4(\cos(-20°) + i\sin(-20°))$

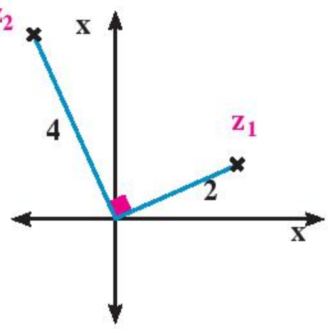
$$\therefore\ \frac{z_2}{z_1} = \frac{4}{2} \times \frac{\cos(-20°) + i\sin(-20°)}{(\cos 100° + i\sin 100°)}$$

$$= 2[\cos(-20° - 100°) + i\sin(-20° - 100°)]$$

$$= 2(\cos(-120°) + i\sin(-120°))$$

$$= 2(-\frac{1}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - \sqrt{3}\,i$$

Essayez de résoudre



6) Utiliser le plan d'Argand ci-contre pour mettre le nombre $\frac{z_2}{z_1}$ sous la forme $x + y\,i$

Corollaires :

1) Si $z = \ell(\cos\theta + r\sin\theta)$ alors

(a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\ell}(\cos(-\theta) + r\sin(-\theta))$ **(b)** $z^2 = \ell^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

2) Nous pouvons généraliser la règle de multiplication sur un nombre déterminé de nombres complexes. Si z_1 , z_2 , ... et z_n sont des nombres complexes et si :

$z_1 = \ell_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \ell_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, ... , $z_n = \ell_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

alors: $z_1 z_2 \ldots\ldots z_n = \ell_1 \ell_2 \ldots\ldots \ell_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n))$

Dans le cas particulier où $z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$ on a :

$$\boxed{z^n = \ell^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Exemple

7) Mettre le nombre $1 - i$ sous la forme trigonométrique puis trouver $(1 - i)^8$

Solution

$\because\ x = 1$ et $y = -1$ $\therefore\ \ell = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\because\ x > 0$ et $y < 0$ $\therefore$ z est situé dans le quatrième quadrant

$\theta = tg^{-1}(\frac{-1}{1}) = \frac{-\pi}{4}$ $\therefore\ 1 - i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{-\pi}{4} + i \sin\frac{-\pi}{4})$

$$\therefore\ (1 - i)^8 = (\sqrt{2})^8 \cos(\frac{-\pi}{4}) + i \sin(\frac{-\pi}{4}))^8$$
$$= 16\,(\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi))$$
$$= 16\,(\cos 0 + i \sin 0) = 16$$

Essayez de résoudre

7) Si $z_1 = 2(\cos 10° + i \sin 10°)$ et $z_2 = 3(\cos 40° + i \sin 40°)$

trouver le nombre $z_1^4\, z_2^2$ sous la forme $x + y\, i$

Forme exponentielle d'un nombre complexe (Formule d'Euler)

Nous pouvons exprimer toute fonction dans la variable x comme une suite de puissances de x appelée la suite de Taylor. Dans ce qui suit, nous présenterons le développement de Taylor pour certaines fonctions qui feront l'objet d'étude dans cette unité.

1) La fonction sinus : $y = \sin x$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\dots + (-1)^{n-1} \times \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots\dots$$

(La fonction sinus est une fonction impaire car $\sin(-x) = -\sin x$. Par conséquent, le développement contient les puissances impaires de x)

2) La fonction cosinus : $y = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots + (-1)^{n-1} \times \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots\dots$$

(La fonction cosinus est une fonction paire car $\cos(-x) = \cos x$. Par conséquent, le développement contient les puissances paires de x)

3) La fonction exponentielle $y = e^x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\dots$$

Remarquez que

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \dots\dots + \frac{i^n x^n}{n!} + \dots\dots$$
$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots\dots$$
$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots) + i\,(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\dots)$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Donc le nombre complexe $z = x + i\,y = \ell(\cos\theta + i \sin\theta)$ peut s'écrire sous la forme : $\boxed{z = \ell\, e^{\theta i}}$ Cette forme est appelée la forme d'Euler où θ es mesuré en radians.

Pour information

L'équation $e^{\pi i} + 1 = 0$ est le lien entre les cinq nombres les plus célèbres. Dans la formule d'Euler, θ doit être en radians.

Exemple

8 Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme exponentielle (forme d'Euler):

a $z_1 = 1 + i$ b $z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$ c $z_3 = e^{3 + \frac{\pi}{6} i}$ d $z_4 = -2i$

Solution

a $z_1 = 1 + i$ $\therefore x = 1$ et $y = 1$

$\ell = |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\because x > 0$ et $y > 0$ $\therefore z_1$ est situé dans le premier quadrant

$\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$ $\therefore z_1 = \ell e^{\theta i} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

b $z_2 = -1+\sqrt{3}\, i$ $\therefore x = -1$ et $y = \sqrt{3}$

$\ell = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\because x < 0$ et $y > 0$ $\therefore z_2$ est situé dans le deuxième quadrant

$\therefore \theta = \pi + \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$ $\therefore z_2 = \ell e^{\theta i} = 2\, e^{\frac{2}{3}\pi i}$

c $z_3 = e^{3 + \frac{\pi}{6} i} = e^3 \times e^{\frac{\pi}{6} i}$ Donc $\ell = |z_3| = e^2$, et l'argument de $z_3 = \frac{\pi}{6}$

d $\because z_4 = -2i$ $\therefore x = 0$ et $y = -2$ $\therefore \ell = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\because x = 0$ et $y = -2$ $\therefore z_4$ est situé sur l'axe des ordonnées

$\therefore \theta = \frac{-\pi}{2}$ $\therefore z_4 = 2\, e^{\frac{-\pi}{2} e}$

Essayez de résoudre

8 Si $z = \frac{\sqrt{2}\, i}{1 + i}$ écrire le nombre z sous la forme exponentielle.

Multiplication et division des nombre complexes en utilisant la forme exponentielle.

Si $z_1 = \ell_1 e^{\theta_1 i}$ et $z_2 = \ell_2 e^{\theta_2 i}$

Alors $z_1 z_2 = \ell_1 \ell_2\, e^{\theta_1 i} \times e^{\theta_2 i} = \ell_1 \ell_2\, e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \times \frac{e^{\theta_1 i}}{e^{\theta_2 i}} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\, e^{(\theta_1 - \theta_2) i}$$

Exemple

9 Trouver le résultat de ce qui suit sous la forme exponentielle :

a $2(\cos 25° + i \sin 25°) \times 2(\sin 158° - i \sin 158°)$ b $(\frac{1 + i}{1 - i})^7$

Solution

a Mettre le nombre z_2 sous la forme trigonométrique comme suit :

$\because (\sin 158° - i \sin 158°) = \sin (90° + 68°) - i \cos (90° + 68°) = \cos 68° + i \sin 68°$

$\therefore\ 3 (\cos 25° + i \sin 25°) \times 2 (\cos 68° + i \sin 68°)$

$= 6 (\cos (25° + 68°) + i \sin (25° + 68°))$

$= 6 (\cos 93° + i \sin 93°) = 6\, e^{1{,}62i}$

b $\because 1 + i = \sqrt{2}\ (\cos 45° + i \sin 45°)$

$1 - i = \sqrt{2}\ (\cos (-45°) + i \sin (-45°))$

$\therefore \left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right) = \cos (45° + 45°) + i \sin (45° + 45°)$

$= \cos 90° + i \sin 90° = \cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^7 = \left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}\right)^7 = \cos \dfrac{7\pi}{2} + i \sin \dfrac{7\pi}{2}$

$= \cos \left(\dfrac{-\pi}{2}\right) + i \sin \left(\dfrac{-\pi}{2}\right) \quad = e^{\frac{-\pi}{2} i}$

Remarquez que

$\dfrac{93°}{180°} = \dfrac{\theta^{rad}}{\pi}$

Donc : $\theta^{rad} = \dfrac{93°}{180°} \times \pi$

$\theta^{rad} \simeq 1{,}62$

Essayez de résoudre

9 Si $z_1 = 1 - \sqrt{3}\ i$ et $z_2 = 1 + i$, écrire les nombres suivants sous la forme trigonométrique:

a $z_1\, z_2$ **b** $\dfrac{z_2}{z_1}$ **c** $(z_2)^6$

Exemple

10 Exprimer le nombre $z = \sqrt{2}\ e^{\frac{3\pi}{4} i}$ sous la forme algébrique $x + y\,i$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Solution

$\because z = \sqrt{2}\ e^{\frac{3\pi}{4} i} \qquad \therefore \ell = |z| = \sqrt{2}$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore z = \sqrt{2}\ \left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \sin \dfrac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$= -1 + i$

Remarquez que

$\cos \dfrac{3\pi}{4} = \cos 135° = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin \dfrac{3\pi}{4} = \sin 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Essayez de résoudre

10 Exprimer le nombre $z = 8\, e^{\frac{\pi}{6} i}$ sous la forme algébrique $x + y\,i$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Exercises 2 - 1

Compléter ce qui suit :

1. Le nombre $z = 3 - 4\,i$ est représenté dans le plan d'Argand par le point A où A = (..............., ...)
2. Si le point A représente le nombre z dans le plan d'Argand et si le point B représente le nombre $\overline{z}$ dans le plan d'Argand, alors A est l'image de B par symétrie par rapport à ....
3. Le module du nombre complexe $z = -5\,i$ est égal à ....
4. Si $z = \dfrac{2 - i}{2 + i}$, alors $|z| =$ ....
5. Si θ est la détermination principale de l'argument d'un nombre complexe z , alors son module $\overline{z}$ est ....
6. Si $z = \dfrac{1}{\overline{z}}$ alors $|z| =$ ....
7. La forme exponentielle du nombre $-1 + i$ est ....
8. Si $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ alors la détermination principale du nombre $(z)^8$ est ....
9. La forme trigonométrique du nombre $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ est ....
10. Si l'argument d'un nombre complexe z est θ, alors l'argument d'un nombre complexe 2z est

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

11. Si $z = \sqrt{2}\,(\sin 30° + i\cos 30°)$ alors la détermination principale de l'argument de z est égale à ....
    - a) 30°
    - b) 60°
    - c) 90°
    - d) 120°
12. Si $z = (1 + \sqrt{3}\,i)^n$ et $|Z| = 8$ alors la détermination principale de l'argument de z est égale à ....
    - a) $\frac{\pi}{2}$
    - b) $\frac{\pi}{3}$
    - c) $\frac{\pi}{6}$
    - d) π
13. Si $z_1 = \ell_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \ell_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ et si $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ alors $z_1 z_2 =$ ....
    - a) $\ell_1\ell_2$
    - b) $-\ell_1\ell_2$
    - c) $\ell_1\ell_2 i$
    - d) $-\ell_1\ell_2\, i$
14. Pour le nombre complexe $z = -3$, l'argument est égal à ....
    - a) 0°
    - b) 90°
    - c) 180°
    - d) 270°
15. Si $z = -1 + \sqrt{3}$ alors $|\,\overline{z}\,| =$ ....
    - a) $-1 - \sqrt{3}\,i$
    - b) $\sqrt{2}$
    - c) 2
    - d) -2

16 Si $z_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$ alors la forme exponentielle de z est ....

(a) $e^{\frac{3\pi}{4} i}$ (b) $e^{\frac{5\pi}{4} i}$ (c) $\sqrt{2}\, e^{\frac{-3\pi}{4} i}$ (d) $\sqrt{2}\, e^{225\, i}$

17 Si $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\, i$ et $z_2 = -3 - 3\sqrt{3}$ alors l'argument du nombre $z_1 + z_2 =$ ....

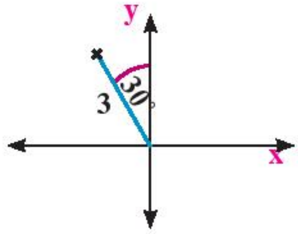
(a) 60° (b) 240° (c) 180° (d) 300°

18 Si $x + y\,i = \dfrac{a + b\,i}{a - b\,i}$ alors $x^2 + y^2 =$ ....

(a) $a^2 + b^2$ (b) $a^2 - b^2$ (c) $2a\ b$ (d) 1

19 La figure ci-contre représente le nombre complexe ....

(a) 3(cos 30°+ i sin 30°)
(b) 3(cos 60°+ i sin 60°)
(c) 3(cos 120°+ i sin 120°)
(d) 3(cos 150°+ i sin 150°)



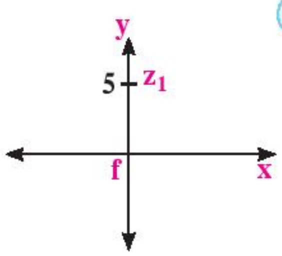
20 Si la détermination principale de l'argument d'un nombre z est θ , alors l'argument de est .... où $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \pi$

(a) θ (b) $-\theta$ (c) $\pi - \theta$ (d) $-\pi + \theta$

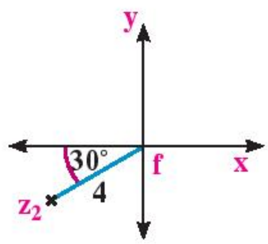
Répondre aux questions suivantes :

21 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme trigonométrique :

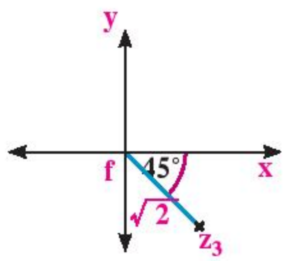
(a)



(b)



(c)



(d) $z_4 = -3 + 4i$ (e) $z_5 = 4\,(\cos 40° - i \sin 40°)$

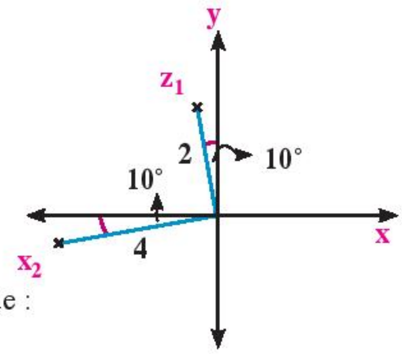
22 Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres complexe suivants:

(a) $z_1 = -1 + i$
(b) $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3} - i}$
(c) $z_3 = -2(\cos 45° + i \sin 45°)$
(d) $z_4 = 1 + i\ \mathrm{tg}\ 20°$

23) Si $z_1 = \cos 114° + i \sin 66°$ et $z_2 = \cos 42° + i \sin 138°$ et $z_3 = \sin 24 + i \sin 114$, trouver la forme algébrique du nombre $\frac{z_1 z_2}{z_3}$

24) Si $z_1 = 2(\cos 75° + i \sin 75°)$ et $z_2 = 4(\cos 15° + i \sin 15°)$, trouver la forme exponentielle les nombres $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$

25) **Dans la figure ci contre** trouver la forme exponentielle du nombre : $\frac{z_1}{z_2}$



26) Écrire chacun des nombres suivants sous la forme algébrique :

a) $z_1 = e^{\frac{\pi}{3} i}$

b) $z_2 = 2\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$

c) $3\, e^{\frac{-\pi}{6} i}$

27) Si $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ démontrer que $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{5\pi}{3} i}$

28) Si $z = \sqrt{3} + i$ trouver sous la forme algébrique le nombre z^6

29) Si $z = \frac{(a+b) + i(a-b)}{(a-b) - i(a+b)}$ trouver le nombre z sous la forme la plus simple puis trouver $|z|$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

30) **Réflexion créative :** Si $z_1 = \cos 75 + i \sin 75$ et $z_2 = \cos 15 + i \sin 15$, trouver la forme trigonométrique le nombre : $z_1 + z_2$

31) Si l'argument de $z_1 = \frac{\pi}{3}$, l'argument de $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ et l'argument de $z_3 = \frac{\pi}{6}$, trouver :

a) l'argument de $(z_1^3\, z_2^2)$

b) l'argument de $(2z_1 \,.\, z_2)$

c) l'argument de $(\frac{z_1 z_2}{z_3})$

d) l'argument de $(z_3)^6$

32) **Réflexion créative :** Démontrer que $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta i} + e^{-\theta i})$ et $\sin\theta = \frac{-i}{2}(e^{\theta i} - e^{-\theta i})$

Unité (2)

2 - 2 Théorème de Moivre

A apprendre

- *Théorème de Moivre pour une puissance rationnelle positive.*
- *Racines d'un nombre complexe.*
- *Représenter les racines d'un nombre complexe dans le plan d'Argand.*

Expressions de base

- *Théorème de Moivre*
- *Racine*

Réfléchir et discuter

a Si z est un nombre complexe de module ℓ et de détermination principale d'argument θ, trouver :

1) le module de z^3

2) l'argument de z^3

b Soit z est un nombre complexe. Si la détermination principale de l'argument de z^3 est θ, alors la détermination principale de l'argument du nombre z est ....

À apprendre

Théorème de Moivre pour une puissance entière positive

Si n est un nombre entier positif

alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$

Exemple

1 Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$

Solution

$\because (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$ **(1) Théorème de Moivre.**

et aussi $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + 3c_1\cos 2\theta\,(i\sin\theta)$.

$+ 3c_2\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

(Formule du binôme).

$= \cos^3\theta + 3i\cos 2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin 2\theta - i\sin 3\theta$ **(2)**

De (1) et (2), en égalisant les parties réelles.

$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\quad\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\begin{aligned}\therefore \cos^3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

Essayez de résoudre

1 Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction des puissances de $\sin\theta$

Théorème de Moivre pour une puissance entière positive

On sait que $\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\theta + 2r\pi) + i\sin(\theta + 2r\pi)$ où r est un nombre entier.

Si k est un nombre positif, alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}} = \cos\frac{\theta + 2r\pi}{k} + i\sin\frac{\theta + 2r\pi}{k}$

Donc l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}}$ prend plusieurs valeurs suivant les valeurs de r. Le nombre de ces différentes valeurs est égal à k. On obtient ces valeurs en posant r = ... , - 2 , - 1 , 0 , 1 , 2 ....

Ces valeurs rendent l'argument $\frac{\theta + 2r\pi}{k}$ compris entre $-\pi$ et π

Exemple

2 Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $z^4 = 8(1 - \sqrt{3}\,i)$

Solution

On met le nombre $1 - \sqrt{3}\,i$ sous la forme trigonométrique. $x = 1$ et $y = -\sqrt{3}$

$\therefore$ Le nombre $1 - \sqrt{3}\,i$ est situé dans le quatrième quadrant.

$\because\ Z^4 = 8 - 8\sqrt{3}\,i \qquad \therefore\ x = 8,\ y = -8\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16,\quad \tan\theta = \frac{-8\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}$

$\because\ x > 0,\quad y < 0 \qquad \therefore\ Z^4$ est situé dans le quatrième quadrant

$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

pour $r = 0$ **on a** $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right) = 2\,e^{\frac{-\pi}{12}i}$

pour $r = 1$ **on a** $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2\,e^{\frac{5\pi}{12}i}$

pour $r = -1$ **on a** $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right) = 2\,e^{\frac{-7\pi}{12}i}$

pour $r = 2$ **on a** $z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = 2\,e^{\frac{11\pi}{12}i}$

$\therefore$ L'ensemble solution $= \{2e^{\frac{-\pi}{12}i}\ ;\ 2\,e^{\frac{5\pi}{12}i}\ ;\ 2e^{\frac{-7\pi}{12}i}\ ;\ 2\,e^{\frac{11\pi}{12}i}\}$

Essayez de résoudre

2 Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$

Exemple

3 Trouver les racines de l'équation $z^3 = 1$, puis représenter ces racines dans le plan d'Argand.

Solution

$z^3 = 1$

$= \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$

$\therefore\ z = (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)^{\frac{1}{3}}$

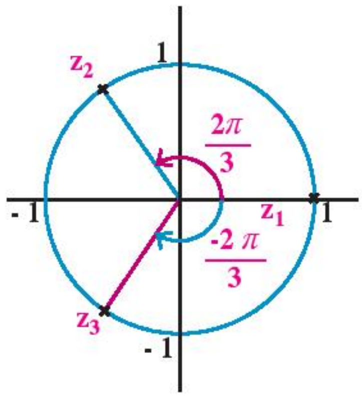
$= \cos \frac{1}{3}(2r\pi) + i \sin \frac{1}{3}(2r\pi)$

Pour $r = 0$ on a $z_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1$

Pour $r = 1$ on a $z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

Pour $r = -1$ on a $z_3 = \cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3}$

Les racines partagent le cercle ayant pour centre le point d'origine et pour rayon l'unité en trois parties égales. La mesure de l'angle au centre de chaque partie est 120° (les trois points sont les sommets d'un triangle équilatéral).



Essayez de résoudre

3 Trouver les racines de l'équation $z^4 = 1$ puis représenter ces racines dans le plan d'Argand.

Racines nièmes

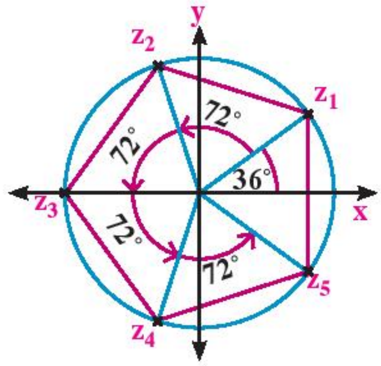
L'équation $x^n = a$ où a est un nombre complexe admet n racines sous la forme $x = a^{\frac{1}{n}}$.
Nous pouvons calculer ces racines en trouvant la forme trigonométrique du nombre a puis appliquer le théorème de Moivre. Les racines se trouvent dans le plan d'Argand sur un cercle ayant pour centre le point d'origine et pour rayon l'unité $|a|^{\frac{1}{n}}$. Les points représentant ces racines sont les sommets d'un polygone régulier de nombre de sommets n.

Exemple **(Racines cinquièmes du nombre - 32)**

4 Représenter sur le plan d'Argand les racines cinquièmes du nombre - 32

Solution

Les racines cinquièmes du nombre –32 sont les solutions de l'équation $z^5 = -32$



En mettant le nombre –32 sous la forme trigonométrique :

$\therefore z^5 = 32 (\cos \pi + i \sin\pi)$

$\therefore z = 32^{\frac{1}{5}} (\cos\pi + i \sin\pi)^{\frac{1}{5}}$

$= 2 \left(\cos \frac{1}{5} (\pi + 2r\pi) + i \sin \frac{1}{5} (\pi + 2r\pi)\right).$

On calcule la première racine en posant r = 0

$\therefore \; z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right) = 2 (\cos 36° + i \sin 36°)$

La mesure de l'angle au centre entre deux racines consécutives est $\frac{360}{5} = 72°$

$z_2 = 2 (\cos (36° + 72°) + i \sin (36° + 72°)) = 2 (\cos 108° + i \sin 108°)$

$z_3 = 2 (\cos (36° + 72°) + i \sin (36° + 2 \times 72°)) = 2 (\cos 180° + i \sin 180°)$

$z_4 = 2 (\cos (36° + 3\times 72°) + i \sin (36° + 3 \times 72°)) = 2 (\cos 252° + i \sin 252°)$

$= 2 (\cos (- 108°) + i \sin (- 108°))$

$z_5 = 2 (\cos (36° + 4 \times 72°) + i \sin (36° + 4 \times 72°)) = 2 (\cos 324° + i \sin 324°)$

$= 2 (\cos -36° + i \sin - 36°)$

Essayez de résoudre

4) Représenter sur le plan d'Argand les racines sixièmes du nombre 1

Exemple

5) Trouver les racines carrées du nombre 3 + 4 i

Solution

Soit $(3 + 4i)^{\frac{1}{2}} = x + y\, i$ En élevant les deux membres au carré

$\therefore \; 3 + 4i = x^2 - y^2 + 2\, x\, y\, i$

$\therefore \; x^2 - y^2 = 3 \longrightarrow$ **(1)** et $2\, x\, y = 4 \longrightarrow$ **(2)**

En élevant **(1)** et **(2)** au carré puis additionnant

$\therefore \; x^4 - 2\, x^2\, y^2 + y^4 + 4x^2\, y^2 = 9 + 16$ $\qquad \therefore \; x^4 + 2x^2\, y^2 + y^4 = 25$

$\therefore \; (x^2 + y^2)^2 = 25$ $\qquad \therefore \; (x^2 + y^2) = 5$ **(3)**

En additionnant **(1)** et **(2)** : $2\, x^2 = 8$ d'où $x = \pm\, 2$ pour $x = 2$ en (1) on obtient $y = 1$

$\therefore$ La première racine est $2 + i$ et la deuxième racine est $-2 - i$

Essayez de résoudre

5) Trouver sous la forme trigonométrique les racines carrées du nombre 7 – 24i

Exemple

6 Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $(6 - 4i)\,x^2 - (6 - 4i)\,x + 9 - 7i = 0$

Solution

Nous pouvons mettre l'équation sous la forme :

$$x^2 - \frac{6-4i}{1-i}\,x + \frac{9-7i}{1-i} = 0$$

En utilisant la formule générale de la résolution d'une équation du second degré

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(5+i) \pm \sqrt{(5+i)^2 - 4 \times 1\,(8+i)}}{2}$$

$$x = \frac{(5+i) \pm \sqrt{24 + 10i - 32 - 4i}}{2}$$

$$x = \frac{(5+i) \pm \sqrt{-8 - 6i}}{2} \quad ; \quad \text{on pose} \quad a + bi = \sqrt{-8+6i}$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -8 + 6i$$

$a^2 - b^2 = -8$ (1) $\qquad 2ab = 6$ (2) $\qquad a^2 + b^2 = 10$ (3)

de 1 et 3 $\qquad a^2 = 1 \qquad \therefore a = \pm 1 \qquad \therefore b = \pm 3$

$\therefore a + bi = \pm(1 + 3i) \qquad \therefore x = \dfrac{5 + i \pm (1+3i)}{2}$

$x = 3 + 2i$ ou $x = 2 - i$

Essayez de résoudre

6 Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $x^2 + (1 + i)\,x - 6 + 3i = 0$

Exercises 2 - 2

(1) En utilisant le théorème de Moivre, démontrer les identités suivantes :

(a) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ (b) $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

(2) Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes puis écrire les racines sous la forme $x + y\,i$:

(a) $z^4 = 16$ (b) $z^3 + 8 = 0$ (c) $z^3 + 8\,i = 0$

(3) Trouver l'ensemble solution de l'équation $z^5 + 243 = 0$ où $z \in \mathbb{C}$

(4) Trouver l'ensemble solution de l'équation $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ Écrire la solution sous la forme exponentielle.

(5) Trouver les racines cubiques de chacun des nombres suivants :

(a) $2 - 2\sqrt{3}\,i$ (b) $1 - i$ (c) $8\,i$ (d) $3 + 4\,i$ (e) $5 - 12\,i$

(6) Trouver les racines cubiques du nombre 8 puis représenter ces racines sur le plan d'Argand.

(7) Trouver les racines quatrièmes du nombre -1 puis représenter ces racines sur le plan d'Argand.

(8) Si $\frac{7 - 11\,i}{4 + i} = a + b\,i$, trouver la valeur de $(\sqrt{-b} + a\,i)^{\frac{3}{2}}$

(9) Mettre le nombre $2\sqrt{2}\,(1 + i)$ sous la forme trigonométrique puis trouver ses racines carrées sous la forme exponentielle.

(10) Si $z = 8 - 6\,i$ trouver $z^{\frac{3}{2}}$ sous la forme algébrique.

(11) **Réflexion créative :** Démontrer que $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\,(\cos 4\theta + 4\cos(2\theta + 3))$

Unité (2)

2 - 3 Racines cubiques de l'unité

You will learn

- *Racines cubiques de l'unité.*
- *Propriétés des racines cubiques de l'unité.*
- *Représenter les racines cubiques de l'unité géométriquement.*
- *Le conjugué de $a+\omega$ et de $a\,i+\omega$.*

Key terms

- *Racine*
- *Racine carrée*
- *Racine cubique*
- *Cercle de l'unité*
- *Conjugué*

Materials

- *Calculatrice scientifique*
- *Logiciels de graphisme*

Travail Coopératif :

En utilisant le théorème de Moivre, trouver l'ensemble solution de l'équation $z^3 = 1$

Trouver les racines précédentes sous la forme algébrique.

Trouver l'ensemble des trois racines. Que remarquez-vous ?

À apprendre

Racines cubiques de l'unité

En utilisant le théorème de Moivre on trouve que l'ensemble solution de l'équation $z^3 = 1$ est :

$$1\ ;\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Le carré de l'une des deux racines complexes est égal à l'autre racine. Par conséquent, nous pouvons écrire les racine cubiques de l'unité sur la forme 1 , ω et ω^2 où $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Réflexion critique :

Est-il possible de trouver les racines cubiques de l'unité en utilisant la forme algébrique du nombre complexe ?

Propriétés des racines cubiques de l'unité :

Si 1 , ω et ω^2 sont les racines cubiques de l'unité, alors

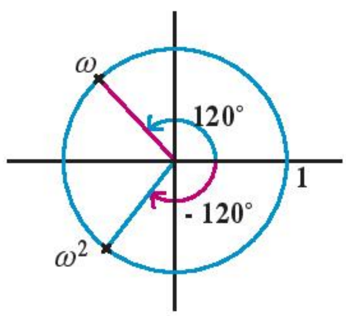
1- $1+\omega+\omega^2 = 0$ (la somme des racines = 0)

$(1+\omega = -\omega^2\ ,\ 1+\omega^2 = -\omega\ ,\ \omega+\omega^2 = -1)$

2- $\omega^3 = 1$

$(\frac{1}{\omega} = \omega^2\ ,\ \frac{1}{\omega^2} = \omega)$

3- Les points représentant les racines cubiques de l'unité sont situés sur un cercle ayant pour centre le point d'origine et de rayon 1. Ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.



4- $(\omega - \omega^2) = \pm\sqrt{3}\ i$, $(\omega^2 - \omega) = \pm\ \sqrt{3}\ i$

Exemple

1) Si 1 , ω et ω^2 , sont les racines cubiques de l'unité, trouver la valeur de :

a) $5 + 5\omega + 5\omega^2$

b) $(1 - \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2})(3 + 5\omega + 5\omega^2)$

Solution

a) L'expression $= 5(1 + \omega + \omega^2)$ En prenant 5 comme facteur commun

$= 5 \times 0 = 0$

b) L'expression $= (1 - \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2})(3 + 5\omega + 5\omega^2)$ put $\frac{1}{\omega} = \omega^2 . \frac{1}{\omega^2} = \omega$

$= (1 - 2\omega^2 - 2\omega)(3 + 5\omega + 5\omega^2) = (1 - 2(\omega^2 + \omega))(3 + 5(\omega + \omega^2))$

$= (1 - 2(-1))(3 + 5(-1)) = (1 + 2)(3 - 5) = -6$

Essayez de résoudre

1) Si 1 , ω et ω^2 sont les racines cubiques de l'unité, trouver la valeur de :

a) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^5$

b) $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 (\omega^2 + \frac{1}{\omega^2})^3$

Exemple

2) Démontrer que $\left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^4 = 9$

Solution

L'expression $= \left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^4 = \left[\frac{5\omega^3 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2\omega^3 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^4$

$= \left[\frac{\omega^2(5\omega - 3)}{5\omega - 3} - \frac{\omega(2\omega^2 - 7)}{2\omega^2 - 7}\right]^4 = [\omega^2 - \omega]^4 = [\pm\sqrt{3}\, i]^4 = 9$

Essayez de résoudre

2) Démontrer que $\left[\frac{a + \omega b - \omega^2 c}{\omega^2 a + b + c\omega} - \frac{c + a\omega^2 - b\omega}{\omega c + b\omega^2 + a}\right]^8 = 81$

Exemple

3) Démontrer que $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ est l'une des racines de l'équation $x^{10} + x^5 + 1 = 0$

Solution

a $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

x représente l'une des racines cubiques de l'unité

Si $x = \omega$, alors $\omega^{10} + \omega^5 + 1 = \omega^1 + \omega^2 + 1 = 0$

Essayez de résoudre

(3) Former une équation du second degré dont les racines sont $(1 + \omega - \omega^2)^3$, $(1 - \omega + \omega^2)^3$

Exercises 2 - 3

Si 1 , ω et ω^2 sont les racines cubiques de l'unité :

Compléter ce qui suit :

(1) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^2 =$ ....

(2) $(\omega - \omega^2)^4 =$ ....

(3) $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 (\omega^2 + \frac{1}{\omega^2})^2 =$ ....

(4) Si $x = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ alors $x^8 + x^4 =$ ....

(5) $(\frac{1}{\omega + 2})(1 + \omega - \frac{3}{\omega}) =$ ....

(6) $1 + 3\omega + 3\omega^2 =$ ....

(7) Si $a = 2\omega - 3\omega^2$ et $b = 3 + 5\omega^2$ alors $a^2 + b^2 =$ ....

(8) $\sum_{r=1}^{5} \omega^r =$ ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

(9) Le conjugué du nombre ω est égal à ....

(a) ω (b) ω^2 (c) 1 (d) $-\omega$

(10) $(\omega^2 + \frac{1}{\omega})(1 + \frac{1}{\omega^2})^2 =$ ....

(a) 2 (b) 0 (c) -3 (d) -5

(11) $(a + b\omega + a\omega^2)(a + b\omega^2 + a\omega^4) =$ ....

(a) 1 (b) $a - b$ (c) $(a - b)^2$ (d) $b^2 - a^2$

(12) $(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}) =$ ....

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

(13) $\frac{a - d\omega}{a\omega^2 - d} - \omega^2 =$ ....

(a) 3i (b) $\pm\sqrt{3}\,i$ (c) -3 (d) 3

(14) Si $(1 + \omega)^7 = a + b\omega$ où a et b sont deux nombres réels, alors (a , b) = ...

(a) (0 , -1) (b) (1 , 1) (c) (0 , 1) (d) (1 , -1)

(15) Si $(1 + \omega^2)^n = (1 + \omega^2)^n$ alors la plus petite valeur entière positive de n est ....

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6

(16) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + ... + \omega^{100} =$ ....

(a) 0 (b) 1 (c) ω (d) $-\omega^2$

17 Si $z = \omega^x$ alors $|z|$ = ... où x est un nombre entier positif

a) 1 b) ω c) x d) ω^2

18 $\sum_{r=1}^{6} 1 + \omega^r$ = ...

a) 0 b) 6 c) 1 d) $1 + \omega$

19 Démontrer les identités suivantes :

a) $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)(1 - \omega^8 + \omega^{16}) = 2^4$

b) $\left(\frac{\omega}{1 + 2\omega}\right)2 + \left(\frac{1 + 2\omega^2}{\omega^2}\right)^2 = \frac{-10}{3}\omega^2$

c) $\left[\frac{1}{1 + \omega i} - \frac{\omega + i}{1 + \omega^2 i}\right]^8 = 16$

d) $\left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^2 = -3$

e) $(1 + \omega^2)^8 = \omega^2$

f) $(1 - \omega^2 + \omega^4)^2 + (1 + \omega^2 + \omega^4)^2 = 4\omega$

20 Trouver la valeur de :

a) $5 + 3\omega + 3\omega^2$

b) $(1 + \omega + 2\omega^2)^2 + (1 + 2\omega + \omega^2)^2$

c) $\frac{\omega^2(\omega - 1)(\omega^2 - 1)}{(2\omega + 1)(\omega^2 + 2)}$

d) $\left[\frac{1}{1 + 3\omega^2} - \frac{1}{1 + 3\omega}\right]^2$

e) $\left(1 + \frac{1}{\omega} + i\right)\left(1 + \frac{1}{\omega^2} + i\right)$

21 Si $x = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ démontrer que $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x = 0$ Trouver ensuite les racines carrées du nombre x.

22 Si $\frac{1}{1 + \omega}$ et $\frac{1}{1 + \omega^2}$ sont les racines d'une équation du second degré, trouver cette équation .

23 Si $Z = 2(\omega + i)(\omega^2 + i)$ trouver les différentes formes du nombre z puis trouver les racines carrées du nombre z sous la forme trigonométrique.

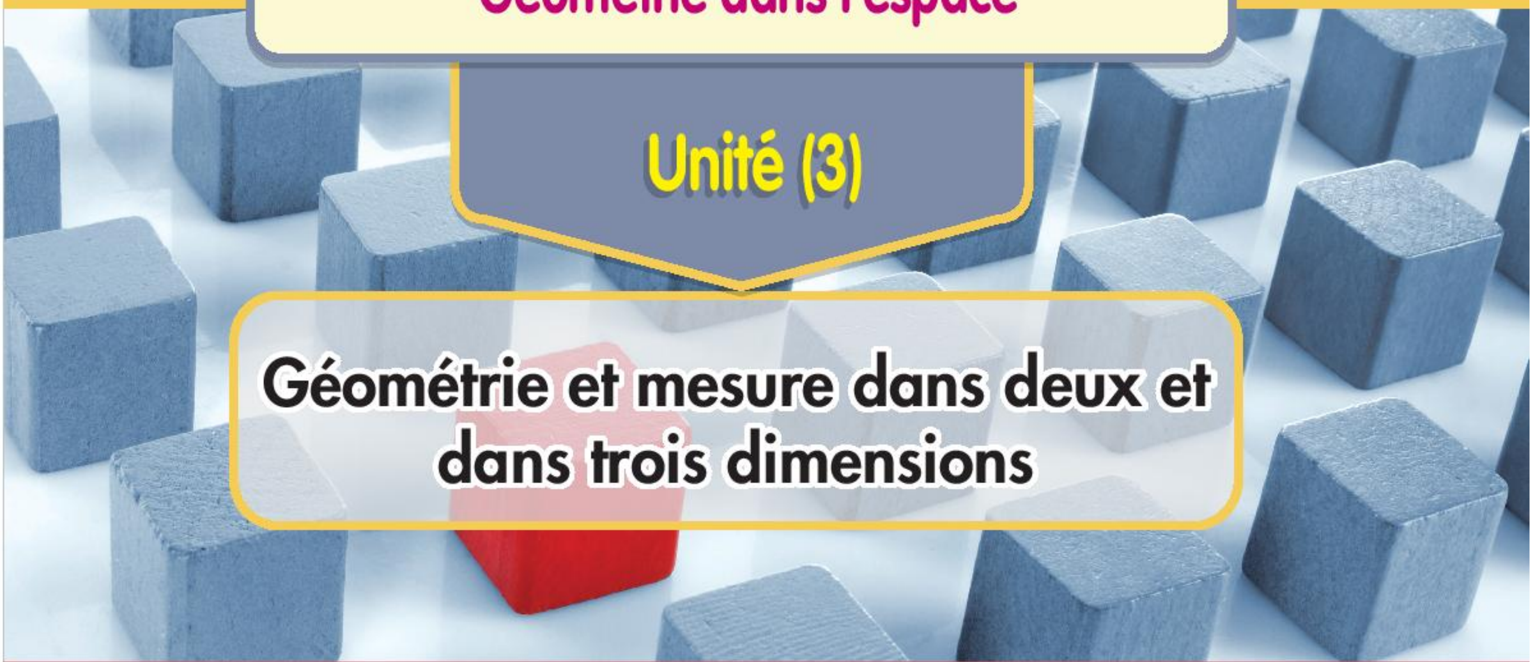
24 **Réflexion créative :** Trouver la valeur de n tel que $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^n = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^n$

25 Trouver ensuite : a) $\sum_{r=0}^{10} \omega^r$ b) $\sum_{r=0}^{10} (1 + \omega^r + \omega^{2r})$

Géométrie dans l'espace

Unité (3)

Géométrie et mesure dans deux et dans trois dimensions



Introduction de l'unité

La géométrie est la science de l'étude des différentes figures et leurs propriétés. Elle étudie également les relations entre les figures, les angles et les distances. Elle est subdivisée en deux branches :

La géométrie plane qui étudie les figures géométriques ayant deux dimensions, et la géométrie dans l'espace qui traite les solides ayant trois dimensions (longueur, largeur, hauteur). Elle traite des formes parallélépipédiques, cylindriques, coniques et sphériques. Les Grecs étaient les premiers à utiliser la géométrie, Thalès a démontré certains théorèmes et Euclide a rassemblé toutes les propriétés géométriques, et les a classifiés dans un livre intitulé «Les Éléments». Ensuite, la géométrie a évoluée en géométrie dans l'espace, trigonométrie, géométrie de Minkowski (traitant quatre dimensions), géométrie non euclidienne et d'autres. Dans cette unité, nous allons étudier l'utilisation des vecteurs dans l'étude des droites, des plans et la relations entre eux dans trois dimensions.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de :

- Identifier un repère à trois dimensions et décomposer un vecteur dans l'espace.
- Calculer la distance entre deux points dans l'espace et les coordonnées du milieu d'un segment dans l'espace.
- Trouver l'équation cartésienne d'une sphère en fonction des coordonnées de son centre et d'un point de sa surface.
- Identifier les vecteurs dans l'espace à travers :
  - La représentation du vecteur par un triplet.
  - Les vecteurs unitaires de base $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.
  - Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$
  - Exprimer un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités.
- Identifier le produit scalaire et produit vectoriel de deux vecteurs dans le pan et dans l'espace.
- Identifier les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace.
- Identifier l'angle entre deux vecteurs dans l'espace.
- Identifier la perpendicularité de deux vecteurs dans l'espace.
- Déterminer les angles directeurs et les cosinus d'un vecteur dans l'espace.
- Utiliser le produit scalaire pour trouver la composante algébrique et orientée d'un vecteur dans la direction d'un autre.
- Utiliser le produit scalaire pour trouver le travail fourni.
- Identifier la signification géométrique de la norme du produit vectoriel.
- Identifier le produit mixte et sa signification géométrique.

Expressions de base

- *Espace*
- *À trois dimensions*
- *projection*
- *Règle de la main droite*
- *Vecteur à trois dimensions*
- *Plan*
- *Scalaire*
- *Produit vectoriel*
- *Composante d'un vecteur*
- *Produit mixte*
- *Vecteur de position*
- *Vecteur unitaire*
- *Norme d'un vecteur*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

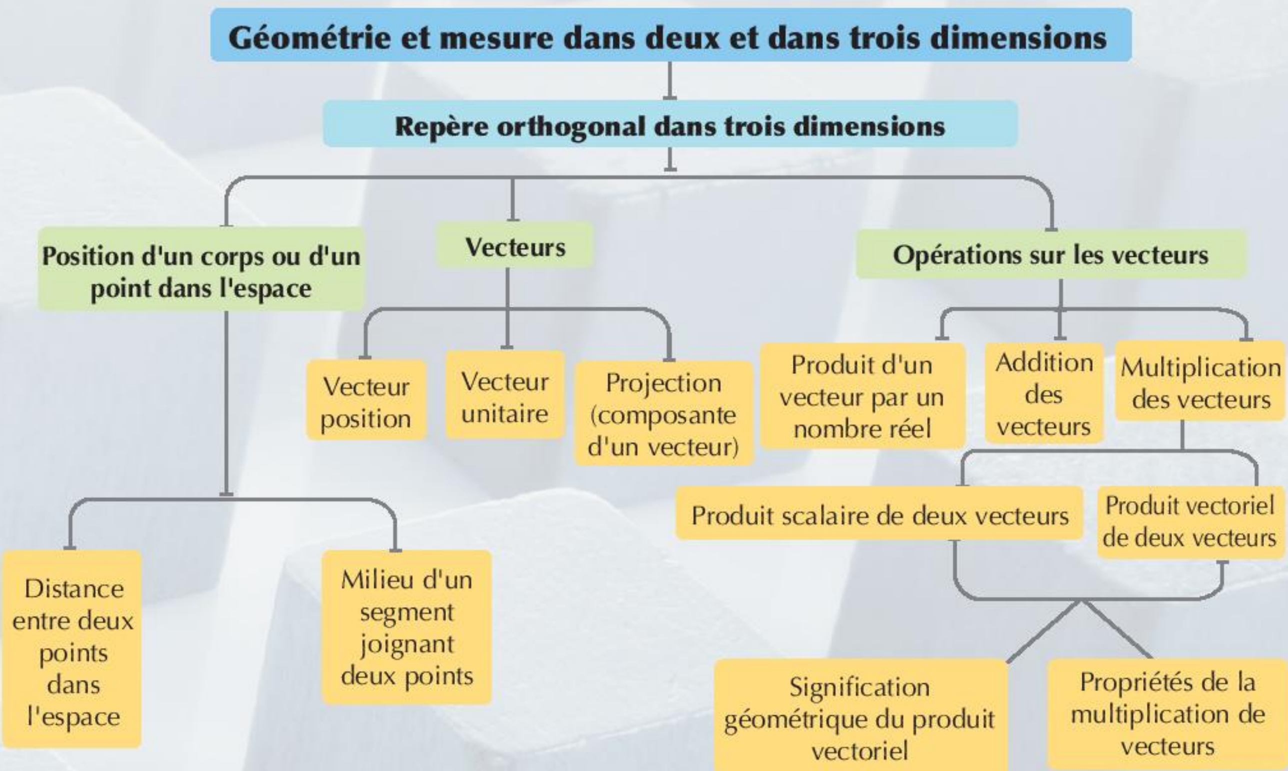
Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1): Repère orthogonal dans trois dimensions.

Leçon (3 - 2): Vecteurs dans l'espace.

Leçon (3 - 3): Produit des vecteurs.

Organigramme de l'unité



Unité (3)

3 - 1 Repère orthogonal dans trois dimensions

A apprendre

- Déterminer la position d'un point dans un repère à trois dimensions.
- Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment joignant deux points dans l'espace.
- Trouver la distance entre deux points dans l'espace.
- Équation d'une sphère dans l'espace.

Expressions de base

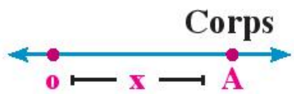
- Espace
- À trois dimensions
- Projection
- Règle de la main droite
- Plan

Matériel utilisé

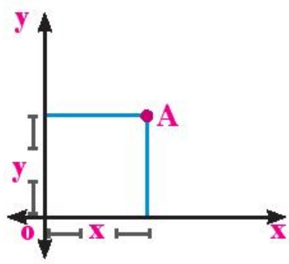
- Calculatrice scientifique

Réfléchir et discuter

- Pour déterminer la position d'un corps sur une droite, il est nécessaire de trouver la distance de ce corps par rapport à un point fixe (facultatif) appelé le point d'origine (O) OA = x $\in \mathbb{R}$



- Pour déterminer la position d'un corps dans un plan, il est nécessaire de trouver la projection de ce corps sur chacun des deux axes d'un repère orthogonal

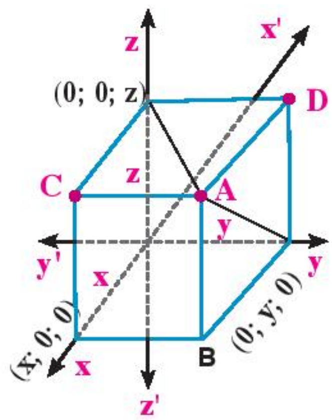


- Comment pouvez-vous déterminer la position d'un corps dans l'espace ?

À apprendre

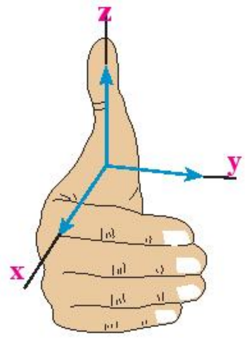
Repère orthogonal à trois dimensions ($\mathbb{R}^3$)

Les coordonnées d'un point A sont déterminées dans l'espace, par rapport à trois axes concourants en un même point et orthogonaux deux à deux, en déterminant la projection de ce point sur chaque axe .



Pour réfléchir : Dans le repère à trois dimensions précédent, trouver les coordonnées de chacun des points B , C et D

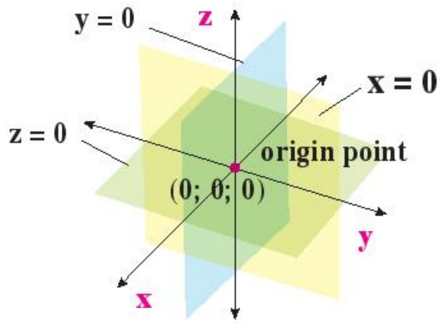
Notions de base :



1- Règle de la main droite

Pour construire un repère orthogonal à trois dimensions, il faut suivre la règle de la main droite où les doigts courbés dans la figure indiquent le passage de la direction positive de l'axe des x vers la direction positive de l'axe des y et le pouce indique la direction positive de l'axe des z.

2- Plans des repères



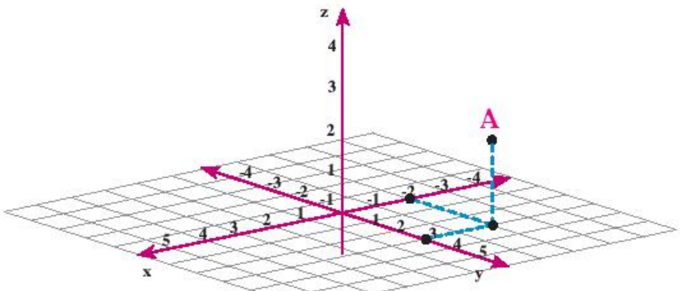
- Tous le points dans l'espace ayant pour coordonnées (x ; y ; 0) sont situés dans le plan cartésien XY dont l'équation est $z = 0$
- Tous le points dans l'espace ayant pour coordonnées (x ; 0 ; z) sont situés dans le plan cartésien XZ dont l'équation est $y = 0$
- Tous le points dans l'espace ayant pour coordonnées (0 ; y ; z) sont situés dans le plan cartésien YZ dont l'équation est $x = 0$

Exemple (Détermination de la position d'un point dans l'espace)

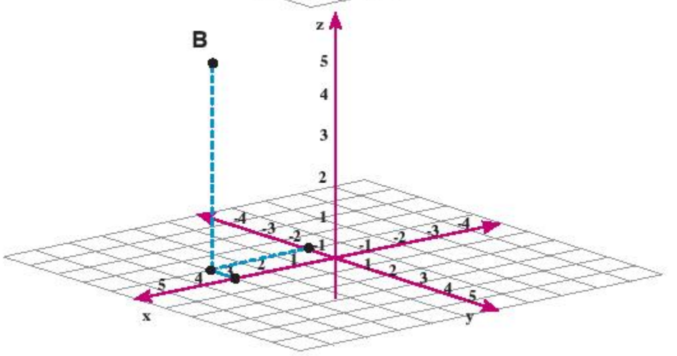
(1) Déterminer de la position de chacun des points suivants en utilisant un repère orthogonal à trois dimensions:

(a) A (-2; 3; 2) (b) B (3; -1; 5) (c) C (4; 0; -1)

Solution

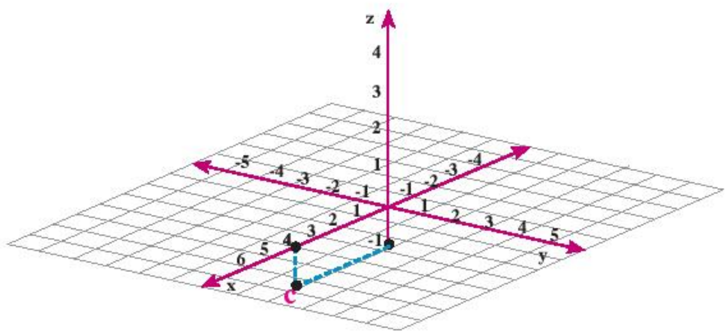


(a) Pour déterminer le point A(–2 ; 3 ; 2) , on détermine le point (–2 ; 3) dans le plan cartésien XY puis on se déplace de deux unités de longueur dans la direction positive de l'axe des z. Le point obtenu est A(–2 ; 3 ; 2).



(b) Pour déterminer le point B(3 ; –1 ; 5), on détermine le point (3 ; –1) dans le plan cartésien XY puis on se déplace de cinq unités de longueur dans la direction positive de l'axe des z. Le point obtenu est B(3 ; –1 ; 5).

c Pour déterminer le point C(4;0;–1), on détermine le point (4 ; 0) dans le plan cartésien XY puis on se déplace d'un unité de longueur dans la direction négative de l'axe des z. Le point obtenu est C(4 ; 0 ; –1).



Essayez de résoudre

1 a Déterminer la position de chacun des points suivants en utilisant un repère orthogonal à trois dimensions :

A (3; 2; 3) B (-1; 4; 3) C (0; 0; 4)

b **Compléter:**

1- La distance du point A(–1 ; 2 ; 3) par rapport au plan cartésien XY = ... unités de longueur.

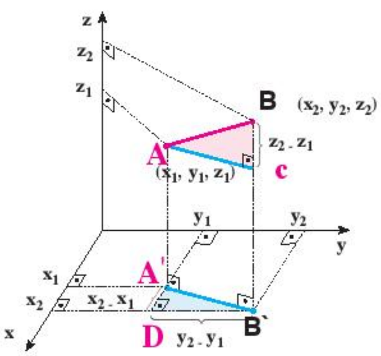
2- La distance du point A(4 ; –2 ; 1) par rapport au plan cartésien YZ = ... unités de longueur.

À apprendre

Distance entre deux points dans l'espace

Soient $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ deux points dans l'espace. La distance entre les deux points A et B est donnée par la relation

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Exemple

2 Démontrer que le triangle ABC tel que A = (2; -1; 3) , B(-4; 4; 2) et C (-2; 5; 1) est un triangle rectangle en C.

Solution

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ **Formule de la distance entre deux points**

$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-1-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{62}$$

$$BC = \sqrt{(-4+2)^2 + (4-5)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{56}$$

$\because (AB)^2 = (\sqrt{62})^2 = 62,\ (BC)^2 + (AC)^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{65})^2 = 6 + 56 = 62$

$\therefore (AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$ $\qquad\qquad \therefore m(\hat{C}) = 90°$

Essayez de résoudre

(2) Démontrer que les points A = (4; 4; 0), B = (4; 0; 4) et C = (0; 4; 4) sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle puis calculer son aire.

À apprendre

Coordonnées du milieu d'un segment dans l'espace

Soient $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ deux points dans l'espace. Les coordonnées du point C, le milieu du segment $\overline{AB}$ sont :

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1 + y_2}{2}\ ;\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Exemple

(3) Soient A = (1, -3, 2), B = (4, -1, 4), Trouver les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$

Solution

Coordonnées du milieu de $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1 + y_2}{2}\ ;\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+4}{2}\ ;\ \frac{-3-1}{2}\ ;\ \frac{2+4}{2}\right)$

$= \left(\frac{5}{2}\ ;\ -2;\ 3\right)$

Essayez de résoudre

(3) Trouver les coordonnées du milieu de $\overline{CD}$ tel que C = (0; 4; -2) et D(-6; 3; 4)

Réflexion critique : Si C(2 ; 2 ; 6) est le milieu de $\overline{AB}$ où A (1; -4 ; 0), trouver les coordonnées du point B

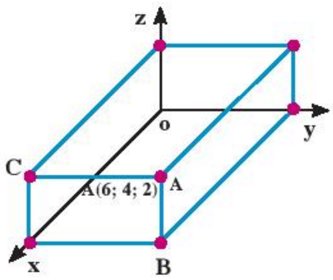
Exercices 3 - 1

Compléter ce qui suit :

1) Si le point (x ; y ; z) est situé dans le plan cartésien XY , alors z = ...

2) Les deux droites $\overleftrightarrow{xx'}$ et $\overleftrightarrow{zz'}$ forment le plan cartésien .... qui a pour équation ....

3) La figure ci-contre représente un parallélépipède construit dans un repère orthogonal. Si l'un de ses sommets est le point d'origine O(0 ; 0 ; 0), alors les coordonnées du point B sont .... et les coordonnées du point C sont ....



4) Si A(1 ; –1 ; 4) et B(0 ; –3 ; 2), alors les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

5) La distance du point (3 ; –1 ; 2) par rapport au plan cartésien XZ est égale à .... unités de longueur

a) 3 b) -1 c) 2 d) 1

6) La longueur de la perpendiculaire abaissée du point (–2 ; 3 ; 4) sur l'axe des x est égale à .... unités de longueur.

a) 2 b) 3 c) 5 d) 4

7) Les coordonnées du milieu du segment ayant pour extrémités les deux points (–3 ; 2 ; 4) et (5 ; 1 ; 8) est ....

a) $(1 ; \frac{3}{2} ; 6)$ b) (2 ; -1 ; 4) c) (8 ; -1 ; 4) d) $(1 ; -\frac{3}{2} ; 2)$

Répondre aux questions suivantes :

8) Calculer la distance entre les deux points A et B dans chacun des cas suivants :

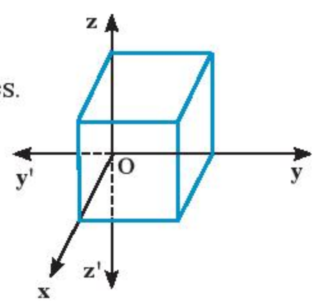
a) A (7 ; 0 ; 4) et B (1 ; 0 ; 0) b) A (4 ; 1; 9) et B (2 ; 1 ; 6)

c) A (1 ; 1 ; -7) et B (-2 , -3 , -7)

9) Dans chacun des cas suivants, démontrer que les trois points donnés sont les sommets d'un triangle rectangle puis calculer son aire :

a) (-2 ; 5 ; 2), (0 ; 0 ; 2) et (0 ; 4 ; 0) b) (-4 ; 4 ; 1), (2 ; -1 ; 2) et (-2 ; 5 ; 0)

10) La figure ci-contre représente un cube de volume 27 unité cubiques. Si l'un de ses sommets est le point d'origine, trouver les coordonnées de ses autres sommets .



11 Démontrer que les points (7 ; 1 ; 3) , (5 ; 3 ; k) et (3 ; 5 ; 3) sont les sommets d'un triangle isocèle pour toutes les valeurs réelles de k. Trouver ensuite la valeur ou les valeurs de k pour que le triangle soit équilatéral

12 Trouver les coordonnées du milieu du segment $\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

a) A(3; -1; 4) et B (2; 0; -1)   b) A(-3; 5; 5) et B (-6; 4; 8)

13 Si le point C (-1; 4; 0) est le milieu du segment $\overline{AB}$ où B(4 ; –2 ; 1), trouver les coordonnées du point A.

14 **Réflexion créative :**

Soient A , B et C trois points tels que A ∈ axe des x , B ∈ axe des y et C ∈ axe des z. Si le point (1 ; –1 ; 0) est le milieu de $\overline{AB}$ et le point (0 ; –1 ; 2) est le milieu de $\overline{BC}$, trouver les coordonnés du milieu de $\overline{AC}$.

15 **L'écriture en mathématiques :**

Si tous les points de l'espace de la forme (x ; y ; 0) sont situés dans le plan cartésien XY qui a pour équation z = 0 , trouver l'équation du plan qui contient tous les points de l'espace de la forme (x ; y ; 2).

16 **Déceler l'erreur :**

Si le point B(–1 ; 4 ; 2) est le milieu du segment $\overline{AC}$ où A(1 ; 0 ; 2) , trouver les coordonnées du point C

Solution d'Ashraf	Solution de Ziad
$C = \left(\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) ; \left(\frac{y_1 + x_2}{2}\right) ; \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\right)$ $= \left(\left(\frac{-1 + 1}{2}\right) ; \left(\frac{4 + 0}{2}\right) ; \left(\frac{2 + 2}{2}\right)\right)$ $= (0; 2; 2)$	Soit C (x, y, z) $\therefore \frac{1 + x}{2} = -1 \longleftarrow x = -3$ $\frac{0 + y}{2} = 4 \longleftarrow y = 8$ $\frac{2 + z}{2} = 2 \longleftarrow z = 2$ $\therefore$ C (-3; 8; 2)

Laquelle des deux solutions est correcte ? Justifier votre réponse.

Unité (3)

3 - 2 Vecteurs dans l'espace

A apprendre

- Représentation d'un vecteur
- Vecteur de position dans l'espace
- Vecteurs unitaires dans l'espace
- Expression d'un vecteur en fonction des vecteurs unitaires.
- Expression d'un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités.
- Égalité de deux vecteurs dans l'espace.
- Norme d'un vecteur dans l'espace.
- Vecteur unitaire dans la direction d'un vecteur dans l'espace.
- Addition de vecteurs dans l'espace.
- Produit des vecteurs par un nombre réel.

Expressions de base

- Vecteur de position dans l'espace
- Norme d'un vecteur
- Vecteur unitaire
- Produit scalaire
- Produit vectoriel

Introduction:

Vous avez déjà étudié les quantités scalaires et les quantités orientées. Vous savez qu'un vecteur est représenté par un segment orienté et que le segment orienté est déterminé par une quantité scalaire (norme du vecteur) et un sens. Dans cette leçon, nous allons aborder les vecteurs dans l'espace (dans un repère à trois dimensions).

À apprendre

Vecteur de position dans l'espace

Un vecteur de position d'un point $A(A_x ; A_y ; A_z)$ est défini par rapport au point d'origine $O(0 ; 0 ; 0)$ comme étant le segment orienté ayant pour origine le point d'oigne O et pour extrémité le point A.

- Le vecteur de position du point A est noté $\overrightarrow{A}$ d'où $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z)$
- A_x est appelée la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction de l'axe des x.
- A_y est appelée la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction de l'axe des y.
- A_z est appelée la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction de l'axe des z.

Norme d'un vecteur

C'est la longueur du segment orienté représentant ce vecteur.

Si $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y;A_z)$ et d'après la formule de la distance, on a :

$$\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Exemple

(1) Si $\overrightarrow{A} = (2; -1; 3)$ et $\overrightarrow{B} = (0; 4; -3)$, alors :

- la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction de l'axe des x est 2
- la composante du vecteur $\overrightarrow{B}$ dans la direction de l'axe des z est -3

$$\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (-3)^2} = 5$$

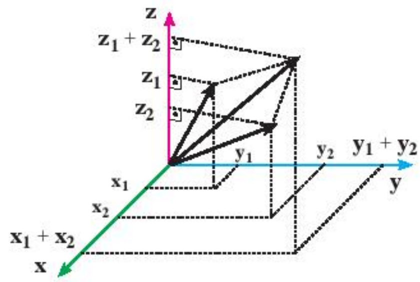
Le vecteur $\overrightarrow{B}$ est situé dans le plan cartésien YZ (la composante de $\overrightarrow{B}$ dans la direction de l'axe des x s'annule)

Essayez de résoudre

(1) Si $\overrightarrow{A} = (-1; 4; 2)$ et $\overrightarrow{B} = (3; 1; 0)$, trouver

(a) $A_x + B_y$ (b) $\|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$

Addition des vecteurs dans l'espace



Si $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z)$ et $\overrightarrow{B} = (B_x; B_y; B_z)$, alors:

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (A_x + B_x; A_y + B_y; A_z + B_z) = (C_x; C_y; C_z)$$

Exemple

(2) Si $\overrightarrow{A} = (-2; 3; 1)$ et $\overrightarrow{B} = (0; -2; 4)$, alors:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (-2; 3; 1) + (0; -2; 4) = (-2 + 0; 3 + (-2); 1 + 4) = (-2; 1; 5)$$

Essayez de résoudre

(2) Si $\overrightarrow{A} = (4; -4; 0)$ et $\overrightarrow{B} = (-1; 5; 2)$, trouver $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

Propriétés de l'addition des vecteurs dans l'espace

Pour deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$, on a :

1- **Stabilité :** $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \in \mathbb{R}^3$

2- **Commutativité :** $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$

3- **Associativité :** $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$

4- **L'élément neutre pour l'addition (Le vecteur nul) :** $\overrightarrow{O} = (0; 0; 0)$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}^3$

d'où $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}$

5- **L'opposé :** Pour tout vecteur $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z) \in \mathbb{R}^3$ il existe

$-\overrightarrow{A} = (-A_x; -A_y; -A_z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{A}) = (-\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A} = \overrightarrow{O}$

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Si $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}$, alors:

$$k\,\overrightarrow{A} = k\,(A_x; A_y; A_z) = (k\,A_x; kA_y; kA_Z) \in \mathbb{R}^3$$

Par exemple : $3\,(2; -1; 4) = (6; -3; 12)$

$\frac{1}{2}\,(4; 9; 6) = (2; \frac{9}{2}; 3)$

$-2\,(1; -3; -4) = (-2; 6; 8)$

Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$ et si $k \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, on a:

1. Distributivité

- $k(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = k\,\overrightarrow{A} + k\,\overrightarrow{A}$
- $(k + m)\,\overrightarrow{A} = k\,\overrightarrow{A} + m\,\overrightarrow{A}$

2. Associativité

- $k(m\,\overrightarrow{A}) = m\,(k\,\overrightarrow{A}) = (k\,m)\,\overrightarrow{A}$

Exemple

(3) Si $\overrightarrow{A} = (-1; 5; 2)$ et $\overrightarrow{B} = (4; -1; 3)$, alors:

1. $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 2(-1; 5; 2) -3\,(4; -1; 3)$

$= (-2; 10; 4) + (-12; 3; -9)$

$= (-14; 13; -5)$

2. Trouver le vecteur $\overrightarrow{C}$ tel que $\overrightarrow{C} + 3\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{B}$

$\because 2\overrightarrow{C} + 3\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{B}$ — **En additionnant $-3\overrightarrow{A}$ aux deux membres**

$\therefore 2\overrightarrow{C} = 2\overrightarrow{B} - 3\overrightarrow{A}$

$\therefore 2\overrightarrow{C} = 2\,(4; -1; 3) -3\,(-1; 5; 2)$

$= (8; -2; 6) + (3; -15; -6)$

$= (11; -17; 0)$ — **En multipliant par $\frac{1}{2}$**

$\therefore \overrightarrow{C} = \frac{1}{2}\,(11; -17; 0) = (\frac{11}{2}\,; \frac{-17}{2}; 0)$

Essayez de résoudre

(3) Si $\overrightarrow{C} = (2; -3; 1)$ et $\overrightarrow{D} = (0; 2; -2)$

(a) Trouver $5\overrightarrow{C} - 2\overrightarrow{D}$

(b) Si $3\overrightarrow{A} - 4\overrightarrow{D} = \overrightarrow{C}$, trouver $\overrightarrow{A}$

Égalité de deux vecteurs dans l'espace

Si $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z)$ et $\overrightarrow{B} = (B_x; B_y; B_z)$, alors:

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \textbf{ si et seulement si : } A_x = B_x \;;\quad A_y = B_y \text{ et } A_z = B_z$$

Exemple

4 Trouver la valeur de k , m et n pour que les deux vecteurs $\overrightarrow{A} = (k - 4; m^2 - 3 ; 1)$ et $\overrightarrow{B} = (5; 1; n^2)$ soient égaux

Solution

$\because\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

$\therefore\ A_x = B_x \longrightarrow k - 4 = 5 \longrightarrow k = 9$

$A_y = B_y \longrightarrow m^2 - 3 = 1 \longrightarrow m^2 = 4 \longrightarrow m = \pm 2$

$A_z = B_z \longrightarrow n^2 = 1 \longrightarrow n = \pm 1$

Essayez de résoudre

4 Si $(2x + 1 ; 5 ; k + 4) = (-1 ; y^2 - 4 ; x + 1)$, trouver la valeur de x ; y et k

Vecteur unitaire

Le vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à une unité de longueur

Par exemple :

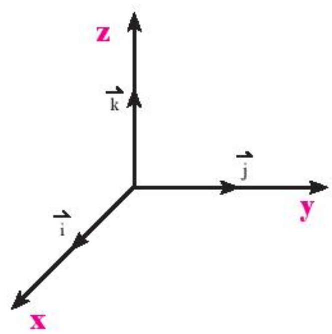
$\overrightarrow{A} = (\frac{-3}{13} ; \frac{4}{13} ; \frac{12}{13})$ **est un vecteur unitaire car :** $\quad \|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{(\frac{-3}{13})^2 + (\frac{4}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2} = 1$

Essayez de résoudre

5 Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur unitaire ?

$\overrightarrow{A} = (\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$ $\qquad$ $\overrightarrow{B} = (\frac{1}{5} ; \frac{4}{5} ; \frac{-\sqrt{5}}{5})$

Vecteurs unitaires de base ($\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{k}$)



Ce sont des segments orientés ayant pour point d'origine le point d'origine du repère et pour norme une unité de longueur et dont les directions sont les directions positives de l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z respectivement. On a :

$\overrightarrow{i} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$, $\overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$

Réflexion critique

Exprimer les vecteurs $(-1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; -1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; -1)$ en fonction des vecteurs unitaires de base.

Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base

$\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= (A_x; 0; 0) + (0; A_y; 0) + (0; 0; A_z)\\ &= A_x(1; 0; 0) + A_y(0; 1; 0) + A_z(0; 0; 1)\\ &= A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Exemple

5 Si $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, trouver :

a $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}$ b $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|$, $\|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$ Que peut-on déduire ?

Solution

a $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 2(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) - 3(-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$

$= 4\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} + 3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$

$\therefore 2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 7\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$

b $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + (-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$

$= \overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

$\therefore \|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27}$

$\|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} + \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{14} + \sqrt{5}$ **On déduit que** $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| \neq \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$

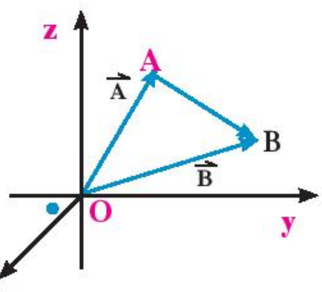
Essayez de résoudre

6 Si $\overrightarrow{A} = -3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} + 5\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{B} = -2\overrightarrow{k} + 3\overrightarrow{i}$, trouver :

a $3\overrightarrow{A} - 5\overrightarrow{B}$ b $\|\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\|$

Exprimer un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités

Soient A et B deux points dans l'espace. Leurs vecteurs de position par rapport au point d'origine sont $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ respectivement.



$\because \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\therefore \boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}}$

Exemple

6) Si A (-2; 3; 1) et B (4; 0; 2), alors :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$= (4; 0; 2) - (-2; 3; 1) = (6; -3; 1)$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

$= (-2; 3; 1) - (4; 0; 2) = (-6; 3; -1)$

On remarque que : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Essayez de résoudre

7) a) Si A (2; -3; 0) et B (1; 4; -1), trouver $\overrightarrow{AB}$

b) Si A (1; 1; -2) et $\overrightarrow{AB}$ (4; -1; 2), trouver les coordonnées du point B

Vecteur de position dans la direction d'un vecteur donné

Si $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\overrightarrow{A}$ est noté $\overrightarrow{e_A}$ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{e_A} = \frac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|}$$

Exemple

7) Si $\overrightarrow{A} = (-2; 2; 1)$ et $\overrightarrow{B} = (3; 1; -2)$, trouver le vecteur unitaire dans la direction de chacun des vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{AB}$

Solution

$$\overrightarrow{e_A} = \frac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|} = \frac{(-2; 2; 1)}{\sqrt{4+4+1}} = \left(\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{e_B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{B}\|} = \frac{(3; 1; -2)}{\sqrt{9+1+4}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$= (3; 1; -2) - (-2; 2; 1) = (5; -1; -3)$

$$\therefore \overrightarrow{e_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

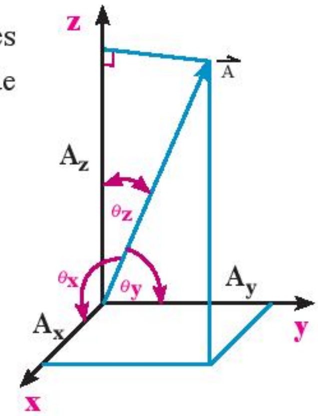
$$= \frac{(5; -1; -3)}{\sqrt{25+1+9}} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}; \frac{-1}{\sqrt{35}}; \frac{-3}{\sqrt{35}}\right)$$

Essayez de résoudre

8 Trouver le vecteur unitaire dans la direction de chacun des vecteurs suivants:

a $\overrightarrow{A} = (8; -4; -8)$ **b** $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ **c** $\overrightarrow{C} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{k}$

Angles directeurs et les cosinus d'un vecteur dans l'espace



Soit $\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_z)$ un vecteur dans l'espace. Si $(\theta_x; \theta_y; \theta_z)$ sont les mesures des angles que fait le vecteur $\overrightarrow{A}$ et les directions positives de l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z, alors :

$A_x = \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_x$, $A_y = \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_y$ et $A_z = \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_z$

$\therefore \overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_x \overrightarrow{i} + \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_y \overrightarrow{j} + \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_z \overrightarrow{k}$

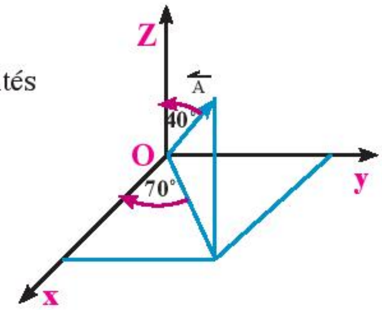
$= \|\overrightarrow{A}\| (\cos\theta_x \overrightarrow{i} + \cos\theta_y \overrightarrow{j} + \cos\theta_z \overrightarrow{k})$

$(\theta_x; \theta_y; \theta_z)$ **sont appelés les angles directeurs du vecteur** $\overrightarrow{A}$

$\cos\theta_x$; $\cos\theta_y$ et $\cos\theta_z$ **sont appelés les cosinus des angles directeurs du vecteur** $\overrightarrow{A}$

On remarque que : $\cos\theta_x \overrightarrow{i} + \cos\theta_y \overrightarrow{j} + \cos\theta_z \overrightarrow{k}$ représente le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\overrightarrow{A}$. Par conséquent $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

Exemple



8 La figure ci-contre représente un vecteur $\overrightarrow{A}$ de norme 10 unités de longueur

a Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A}$ sous la forme algébrique (les composantes cartésiennes).

b Trouver les angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{A}$

Solution

On décompose $\overrightarrow{A}$ en deux composantes: la première est dans la direction de $\overrightarrow{OZ}$ de norme:

$A_z = \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta_z = 10 \cos 40 \simeq 7{,}66$

la deuxième est dans la direction du plan cartésien XY où :

$A_{xy} = \|\overrightarrow{A}\| \sin\theta_z = 10 \sin 40 \simeq 6{,}428$

Ensuite, on décompose la composante A_{XY} en deux composantes : la première est dans la direction de $\overrightarrow{OX}$ de norme :

$A_x = A_{xy} \cos 70 = 6{,}428 \cos 70 \simeq 2{,}199$

la deuxième est dans la direction de $\overrightarrow{OY}$ de norme :

$A_y = A_{xy} \sin 70 = 6{,}428 \sin 70 \simeq 6{,}04$

Donc la forme cartésienne du vecteur $\overrightarrow{A}$ est :

$$\overrightarrow{A} = A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}$$
$$= 2{,}199 \overrightarrow{i} + 6{,}04 \overrightarrow{j} + 7{,}66 \overrightarrow{k}$$

Pour trouver les angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{A}$, on calcule le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{A}$

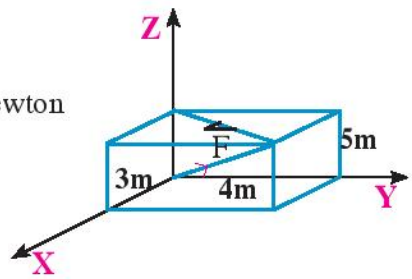
$$\overrightarrow{e_A} = \frac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|} = \frac{1}{10}(2{,}199 \overrightarrow{i} + 6{,}04 \overrightarrow{j} + 7{,}66 \overrightarrow{k})$$
$$= 0{,}2199 \overrightarrow{i} + 0{,}604 \overrightarrow{j} + 0{,}766 \overrightarrow{k}$$

$\therefore \cos\theta_x = 0{,}2199$, **d'où** $\theta_x = \cos^{-1}(0{,}2199) \simeq 77{,}3°$

$\cos\theta_y = 0{,}604$, **d'où** $\theta_y = \cos^{-1}(0{,}604) \simeq 52{,}84°$

$\cos\theta_z = 0{,}766$, **d'où** $\theta_z = \cos^{-1}(0{,}766) \simeq 40°$

Essayez de résoudre



9) La figure ci-contre représente une force $\overrightarrow{F}$ d'intensité 200 Newton

a) Exprimer la force $\overrightarrow{F}$ sous la forme algébrique.

b) Trouver les angles directeurs de la force $\overrightarrow{F}$.

Exercises 3 - 2

Complete the following:

1) Si $\overrightarrow{A} = (-3; 4; 2)$, alors $\|\overrightarrow{A}\|$ = ...

2) Si $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$; alors $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ = ...

3) Le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{AB}$ où A (-1; 2; 0) et B (3; -1; 2) est ....

4) Le vecteur $\overrightarrow{A} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ fait un angle de mesure .... avec la direction positive de l'axe des x .

5) Le vecteur $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ fait un angle de mesure .... avec la direction positive de l'axe des z .

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

6) Si $\overrightarrow{A} = (-2; k; 1)$ et $\|\overrightarrow{A}\| = 3$ unités de longueur, alors k = ...

a) 4 b) -4 c) ± 2 d) $\sqrt{14}$

7) Si 30°; 70° et θ sont les angles directeurs d'un vecteur, alors l'une des valeurs de θ est = ...

a) 100° b) 80° c) 260° d) 82,355°

8) Si $\overrightarrow{A} = (-1; 5; -2)$ et $\overrightarrow{B} = (3; 1; 1)$ et si $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{i}$, alors $\overrightarrow{C} =$ ....

a) $\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ b) $-\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

c) $\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ d) $\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

9) Les cosinus des angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{A} = (-2; 1; 2)$ sont ....

a) $(-2; 1; 2)$ b) $(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ c) $(\frac{5}{-2}; 5; \frac{5}{2})$ d) $(-1; 1; 1)$

Répondre aux questions suivantes :

10) Si $\overrightarrow{A} = (2; -3; 1)$, $\overrightarrow{B} = (4; -2; 0)$ et $\overrightarrow{C} = (-6; 0; 3)$, trouver chacun des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ b) $3\overrightarrow{A} - \frac{1}{3}\overrightarrow{C}$ c) $\frac{3}{2}\overrightarrow{B} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C}$

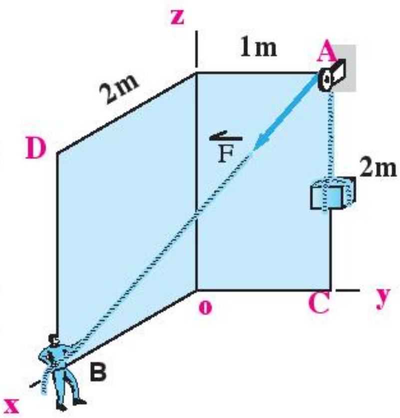
11) Si $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{B} = 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{C} = 4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$, trouver chacun des vecteurs suivants :

a) $2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$ c) $3\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{C}$

12) Trouver la norme de chacun des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{A} = (2; -1; 0)$ b) $\overrightarrow{B} = (1; 2; -2)$ c) $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{j}$ d) $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

13) Si $\overrightarrow{A} = (k; 0; 0)$ et $\overrightarrow{i} = (1; 0; 0)$, démontrer que $\| \overrightarrow{A} \| = |k| \, \| \overrightarrow{i} \|$



14) Si l'intensités de la tension $\overrightarrow{F}$ sur un fil est égale 21 Newton, trouver la composante de $\overrightarrow{F}$ dans les directions des trois axes du repère

15) **Question ouverte :** Si le vecteur $\overrightarrow{A}$ est parallèle au plan cartésien YZ , que peut-on dire des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A}$?

16) **Question ouverte :** Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. a-t-on $\| \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \| = \| \overrightarrow{A} \| + \| \overrightarrow{B} \|$. En cas de l'inégalité, lequel des deux membres est le plus grand ?

17) **Réflexion critique :** Trouver la forme algébrique du vecteur $\overrightarrow{A}$ ayant pour norme 5 unités de longueur et faisant avec les trois axes des angles directeurs de même mesure.

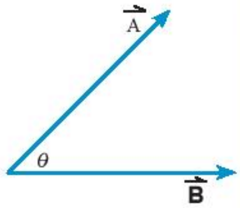
Unité (3)

3 - 3 Produit des vecteurs

Nous avons déjà appris à effectuer quelques opérations sur les vecteurs comme l'addition et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. La question qui se pose : Peut-on effectuer la multiplication dans le corps des vecteurs ? La réponse est oui. Il y a deux types de multiplication de vecteurs. Ce sont le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs. Dans cette leçon, nous allons aborder et analyser ces deux types de multiplication, leurs propriétés algébriques et géométriques et leurs applications physiques pour nous aider à étudier la mécanique.

Produit scalaire de deux vecteurs

Réfléchir et discuter

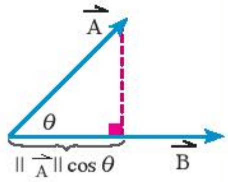


Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs dont la mesure de l'angle entre eux est θ Trouver :

1- La composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$.

2- Le produit de la norme du vecteur $\overrightarrow{B}$ par la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$.

De ce qui précède, on déduit que :



1- La composante de $\overrightarrow{A}$ dans la direction de $\overrightarrow{B}$ est égale à $\| \overrightarrow{A} \| \cos\theta$

2- Le produit de la norme du vecteur $\overrightarrow{B}$ par la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$ est égal à $\| \overrightarrow{B} \| \, \| \overrightarrow{A} \| \cos\theta$

La valeur absolue de ce résultat exprime l'aire d'un rectangle ayant pour dimensions la norme du vecteur $\overrightarrow{B}$ et la composante de $\overrightarrow{A}$ dans la direction de $\overrightarrow{B}$.

À apprendre

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs dont la mesure entre eux est θ . L'aire d'un rectangle ayant pour dimensions la norme de l'un des deux vecteurs et la composante de l'autre dans sa direction est appelée le produit scalaire des deux

A apprendre

- *Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace.*
- *Parallélisme et perpendicularité de deux vecteurs.*
- *Angle entre deux vecteurs.*
- *Composante d'un vecteur dans la direction d'un autre.*
- *Travail fourni par une force.*
- *Produit vectoriel de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace.*
- *Signification géométrique du produit vectoriel.*
- *Ensemble droitier des vecteurs unitaires.*
- *Produit mixte*
- *Signification géométrique du produit mixte*

Expressions de base

- *Produit scalaire*
- *Produit vectoriel*
- *Composante*
- *Vecteur unitaire*
- *Travail*
- *Règle de la main droite*
- *Produit mixte*

C'est à dire $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \| \overrightarrow{A} \| \; \| \overrightarrow{B} \| \cos \theta$

Exemple

1) Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs dont la mesure entre eux est 60°. Si $\| \overrightarrow{A} \| = 2 \| \overrightarrow{B} \| = 8$, trouver $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$

Solution

$\| \overrightarrow{A} \| = 2 \| \overrightarrow{B} \| = 8 \longrightarrow \| \overrightarrow{A} \| = 8 \,, \| \overrightarrow{B} \| = 4$

D'après la définition du produit scalaire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} &= \| \overrightarrow{A} \| \; \| \overrightarrow{B} \| \cos \theta \\ &= 8 \times 4 \times \cos 60° = 16 \end{aligned}$$

Essayez de résoudre

1) Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs dont la mesure entre eux est 135° . Si $\| \overrightarrow{A} \| = 6$, $\| \overrightarrow{B} \| = 10$, trouver $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$

Réflexion critique : Quels sont les cas où le produit scalaire de deux vecteurs est égal à zéro ?

Remarques importantes

1- Pour déterminer l'angle entre deux vecteurs, il faut qu'ils soient partant d'un même point ou arrivant à un même point.

2- La mesure de l'angle entre deux vecteurs appartient à l'intervalle $[0 \,, \pi]$

Exemple

2) Si $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs unitaires d'un ensemble droitier. Trouver $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k}$

Solution

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} &= \| \overrightarrow{i} \| \; \| \overrightarrow{i} \| \cos 0° \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

De même $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1 \,, \quad \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$

Rappel

La norme d'un vecteur unitaire est égale à un.

Essayez de résoudre

2) Si $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs unitaires d'un ensemble droitier. Trouver $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i}$

Propriétés du produit scalaire

D'après les exemples précédents, nous pouvons déduire les propriétés du produit scalaire suivantes :

1- $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$

2- $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = \| \overrightarrow{A} \|^2$

3- $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ **si et seulement si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux (condition d'orthogonalité de deux vecteurs).**

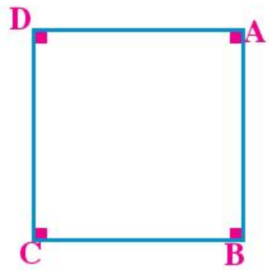
4- $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$ **Propriété de la distributivité**

5- $(k\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \cdot (k\overrightarrow{B}) = k(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})$ **où k est un nombre réel**

Exemple

(3) Soit ABCD un carré de longueur de côté 10 cm. Trouver ce qui suit :

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$



Solution

(a) $\because$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont parallèles et dans la même direction

$\therefore$ la mesure de l'angle entre eux = 0°

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \| \overrightarrow{AB} \| \, \| \overrightarrow{DC} \| \cos 0°$

$= 10 \times 10 \times 1 = 100$

(b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux **$\therefore$ la mesure de l'angle entre eux = 90°**

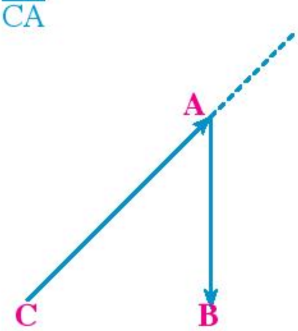
$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

(c) $\because$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ **ne partent pas d'un même point, on prolonge $\overrightarrow{CA}$**

$\therefore$ la mesure de l'angle entre eux = 135°

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \| \overrightarrow{AB} \| \, \| \overrightarrow{CA} \| \cos 135$

$= 10 \times 10\sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -100$



Autre solution pour la question (c)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC})$

$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= -\| \overrightarrow{AB} \| \, \| \overrightarrow{CA} \| \cos 45$

$= -10 \times 10\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -100$

Essayez de résoudre

(3) Soit ABC un triangle équilatéral de longueur de côté 8 cm. Trouver ce qui suit :

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (c) $(2\overrightarrow{AC}) \cdot (3\overrightarrow{CB})$

À apprendre

Produit scalaire de deux vecteurs dans un repère

Si $\overrightarrow{A} = (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}), B = (B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j} + B_z \overrightarrow{k})$ **alors**

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}) \cdot (B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j} + B_z \overrightarrow{k})$ **En utilisant la propriété de la distributivité**

$$= A_x B_x \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + A_x B_y \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + A_x B_z \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k}$$

$$+ A_y B_x \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + A_y B_y \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} + A_y B_z \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k}$$

$$+ A_z B_x \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} + A_z B_y \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} + A_z B_z \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k}$$

$\because \quad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$

Mais $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$

$\therefore \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

> **Remarque**
>
> **Si** $\overrightarrow{A} = (A_x ; A_y)$ et $\overrightarrow{B} = (B_x ; B_y)$ dans un repère :
>
> **alors** $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y$

Exemple

(4) Si $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, trouver $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$

Solution

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2; 3; 4) \cdot (-1; -2; 1)$$

$$= 2 \times -1 + 3 \times (-2) + 4 \times 1$$

$$= -2 - 6 + 4 = -4$$

Essayez de résoudre

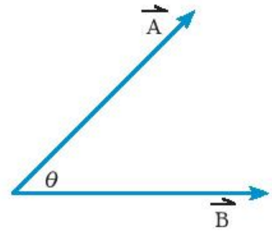
(4) Trouver $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ dans chacun des cas suivants :

(a) $\overrightarrow{A} = (-1; 3; 2)$, $\overrightarrow{B} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ Que peu-on déduire ?

(b) $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{i}$

À apprendre

Angle entre deux vecteurs



On sait que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \| \overrightarrow{A} \| \| \overrightarrow{B} \| \cos \theta$

où θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs

$\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\| \overrightarrow{A} \| \| \overrightarrow{B} \|}$$

Cas particuliers:

1- **Si** $\cos \theta = 1$, **alors** $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles et dans un même sens.

2- **Si** $\cos \theta = -1$, **alors** $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles et dans deux sens contraires.

3- **Si** $\cos \theta = 0$, **alors** $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux.

Exemple

5 Trouver la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ tels que $\overrightarrow{A} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

Solution

$\| \overrightarrow{A} \| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{74}$

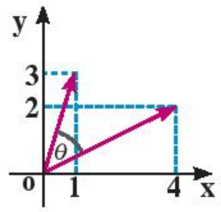
$\| \overrightarrow{B} \| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45}$

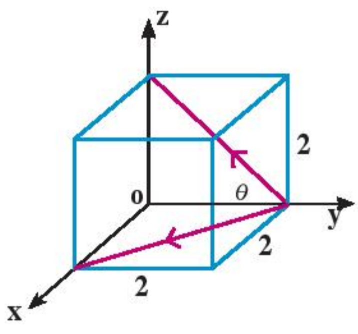
$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\| \overrightarrow{A} \| \| \overrightarrow{B} \|} = \frac{(4; 3; 7) \cdot (2; 5; 4)}{\sqrt{74}\sqrt{45}} = \frac{8 + 15 + 28}{\sqrt{74}\sqrt{45}} = \frac{51}{\sqrt{74}\sqrt{45}}$$

$$\therefore \cos^{-1} \left(\frac{51}{\sqrt{74}\sqrt{45}}\right) = \cos^{-1}(0{,}8838) = 27{,}9°$$

Essayez de résoudre

5 Trouver θ dans chacun des cas suivants :



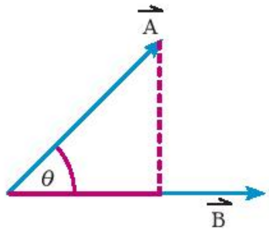


À apprendre

Composante (projection) d'un vecteur dans la direction d'un autre vecteur

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs. La composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$ (notée A_B) est :

$$A_B = \|\overrightarrow{A}\| \cos\theta = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{B}\|}$$



Remarque : le composant du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction de $\overrightarrow{B}$ (notée $\overrightarrow{A_B}$) $\overrightarrow{A_B} = A_B \cdot \dfrac{\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{B}\|}$

Exemple

6 Trouver la composante de la force $\overrightarrow{F} = 2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} + 5\,\overrightarrow{k}$ dans la direction de $\overrightarrow{AB}$ où A(1; 4; 0) et B(-1; 2; 3)

Solution

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

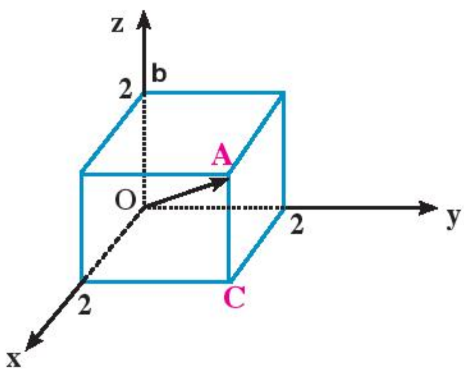
$= (-1; 2; 3) - (1; 4; 0) = (-2; -2; 3)$

La composante de la force $\overrightarrow{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

$$= \frac{(2; -3; 5) \cdot (-2; -2; 3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + {}^2 3}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

Essayez de résoudre

6 La figure ci-contre représente un cube de longueur d'arête 2 unités de longueur. Trouver la projection du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{CB}$



Réflexion critique : Quand est-ce que la composante d'un vecteur dans la direction d'un autre s'annule?

À apprendre

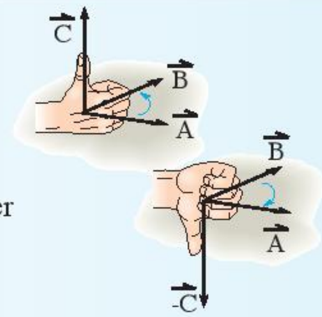
Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs d'un plan dont l'angle entre eux mesure θ. Si $\overrightarrow{e}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, **alors** le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (\|\overrightarrow{A}\| \, \|\overrightarrow{B}\| \sin\theta)\ \overrightarrow{e}$$

Le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$ (vers le haut ou vers le bas) est déterminé selon la règle de la main droite. Dans cette main, les doigts courbés indiquent le sens de rotation du vecteur $\overrightarrow{A}$ vers le vecteur $\overrightarrow{B}$ et le pouce indique le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$.

Remarques importantes



1- **Si** $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ a pour sens $\overrightarrow{e}$, alors $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$ a pour sens $-\overrightarrow{e}$

Donc $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$

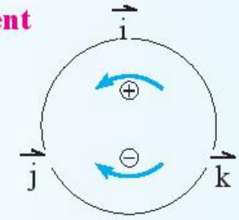
2- En appliquant la règle de la main droite sur un ensemble droitier des vecteurs unitaires orthogonaux **on obtient**

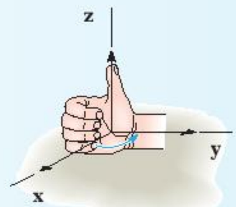
$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$

$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$

$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$





3- Pour tout vecteur $\overrightarrow{A}$ on a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{O}$ où $\overrightarrow{O}$ est le vecteur nul.

Exemple

7 Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs d'un plan dont l'angle entre eux mesure 70°.

Si $\|\overrightarrow{A}\| = 15$ et $\|\overrightarrow{B}\| = 17{,}5$, calculer la norme de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

Solution

$\because\ \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (\|\overrightarrow{A}\| \ \|\overrightarrow{B}\| \sin\theta)\ \overrightarrow{e}$

$\therefore\ \|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{A}\| \ \|\overrightarrow{B}\| \sin\theta = 15 \times 17{,}5 \times \sin 70 = 246{,}67$

Essayez de résoudre

7) Si $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -65\ \overrightarrow{e}$ and $\|\overrightarrow{A}\| = 5$ et $\|\overrightarrow{B}\| = 26$, calculer la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$

Produit vectoriel dans un repère cartésien

Si $\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_Z)$, $\overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_Z)$ sont deux vecteurs, **alors**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} &= (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_Z \overrightarrow{k}) \times (B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j} + B_Z \overrightarrow{k})\\ &= A_x B_x \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + A_x B_y \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + A_x B_Z \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}\\ &\quad + A_y B_x \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} + A_y B_y \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} + A_y B_Z \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}\\ &\quad + A_Z B_x \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + A_Z B_y \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + A_Z B_Z \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Mais $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} &= 0 + A_x B_y \overrightarrow{k} + A_x B_Z (-\overrightarrow{j})\\ &\quad + A_y B_x (-\overrightarrow{k}) + 0 + A_y B_Z (\overrightarrow{i})\\ &\quad + A_Z B_x (\overrightarrow{j}) + A_Z B_y (-\overrightarrow{i}) + 0\\ &= (A_y B_Z - A_Z B_y)\ \overrightarrow{i} + (A_Z B_x - A_x B_Z)\ \overrightarrow{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\ \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

La dernière forme peut s'écrire sous la forme d'un déterminant de dimension 3×3 comme suit :

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Cas particulier

Si $\overrightarrow{A} = (A_x\ ,\ A_y)$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}} = (B_x\ ,\ B_y)$ sont deux vecteurs d'un plan cartésien XY, **alors**

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = (A_x B_y - A_y B_x)\ \overrightarrow{k}$$

Exemple

(8) Si $\overrightarrow{A} = (-2;\ 3;\ 1)$ et $\overrightarrow{B} = (1;\ 2;\ 4)$ calculer $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$, puis déduire le vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$

Solution

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \times 4 - 2 \times 1)\ \overrightarrow{i} - (-2 \times 4 - 1 \times 1)\ \overrightarrow{j} + (-2 \times 2 - 3 \times 1)\ \overrightarrow{k}$$

$$= 10\ \overrightarrow{i} + 9\ \overrightarrow{j} - 7\ \overrightarrow{k}$$

Le vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}}{\| \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \|}$

$$\therefore\ \overrightarrow{e} = \frac{10\ \overrightarrow{i} + 9\ \overrightarrow{j} - 7\ \overrightarrow{k}}{\sqrt{10^2 + 9^2 + (-7)^2}} = \frac{10}{\sqrt{230}}\ \overrightarrow{i} + \frac{9}{\sqrt{230}}\ \overrightarrow{j} - \frac{7}{\sqrt{230}}\ \overrightarrow{k}$$

Essayez de résoudre

(8) Soit $\overrightarrow{A}$ un vecteur tel que $\| \overrightarrow{A} \| = 6$ et si les cosinus des angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{A}$ sont respectivement $\frac{2}{3}$; $\frac{-2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Si le vecteur $\overrightarrow{B}$ est tel que $\overrightarrow{B} = (-2\ ;\ 3\ ;\ 5)$, trouver $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

Propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs d'un plan dont l'angle entre eux mesure θ

1- $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\ \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$ **(Le produit vectoriel n'est pas commutatif)**

2- $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$

3- Si $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$, alors soit $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ ou l'un au moins des deux vecteurs est égal $\overrightarrow{O}$

4- $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C})$ **Propriété de la distributivité**

5- $(k\overrightarrow{A}) \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \times (k\overrightarrow{B}) = k(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B})$ **où k est un nombre réel**

Parallélisme de deux vecteurs

D'après les propriétés du produit vectoriel des vecteurs, deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$

C'est à dire si $(A_y B_Z - A_Z B_y)\ \vec{i} + (A_Z B_x - A_x B_Z)\ \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\ \vec{k} = \vec{O}$

Donc $A_y B_Z = A_Z B_y$, $A_x B_Z = A_Z B_x$ et $A_x B_y = A_y B_x$

Donc $\frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_z}{B_z}$, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y}$

Donc $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

Si chaque rapport est égal à k , on obtient

$A_x = k\,B_x$, $A_y = k\,B_y$, $A_z = k\,B_z$

$\because \vec{A} = A_x\ \vec{i} + A_y\ \vec{j} + A_z\ \vec{k}$

$\therefore \vec{A} = k\ \vec{B}$

Si $k > 0$, les deux vecteurs sont parallèles et dans le même sens et si $k < 0$, les deux vecteurs sont parallèles et dans deux sens contraires.

Exemple

9 Si le vecteur $\vec{A} = (2\ \vec{i} - 3\ \vec{j} + m\ \vec{k})$ est parallèle au vecteur $\vec{B} = (\vec{i} + k\ \vec{j} + 8\ \vec{k})$, trouver la valeur de m et k

Solution

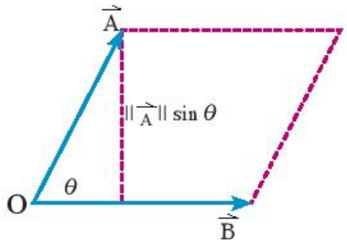
$\because \vec{A} \,//\, \vec{B}$ $\qquad \therefore \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

$\therefore \frac{2}{1} = \frac{-3}{k} = \frac{m}{8}$ $\qquad \therefore k = \frac{1 \times -3}{2} = \frac{-3}{2}$ et $m = \frac{2 \times 8}{1} = 16$

Essayez de résoudre

9 Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tels que $\vec{A} = (2; -3)$, $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ et $\|\vec{B}\| = 3\sqrt{13}$, trouver $\vec{B}$.

Signification géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs



On sait que $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\| \sin\theta$

$= \|\vec{B}\| \times L$

où $L = \|\vec{A}\| \sin\theta$

= L'aire du parallélogramme où $\vec{B}$ et $\vec{A}$ sont deux côtés consécutifs

= Le double de l'aire du triangle où $\vec{B}$ et $\vec{A}$ sont deux côtés

Exemple

10 Si $\overrightarrow{A} = (-3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{B} = (3\ ;\ 4\ ;\ -1)$, trouver l'air du parallélogramme dont $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux côtés consécutifs.

Solution

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (-3\ ;\ 1\ ;\ 2) \times (3\ ;\ 4\ ;\ -1)$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-9)\ \overrightarrow{i} + 3\ \overrightarrow{j} - 15\ \overrightarrow{k}$$

$$\| \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \| = \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (-15)^2} = 3\sqrt{35}$$

$\therefore$ L'aire du parallélogramme $= 3\sqrt{35}$ unité d'aire.

Essayez de résoudre

10 Si $\overrightarrow{A} = (1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ et $\overrightarrow{B} = (0\ ;\ 5;\ -1)$, trouver l'air du triangle dont $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux côtés.

À apprendre

Produit mixte

Soient $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ trois vecteurs. Le produit $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$ est appelé "Produit mixte". Ce produit est souvent utilisé dans le domaine de la statique (on remarque l'absence des parenthèses dans la définition car effectuer le produit scalaire en premier n'a pas de sens).

Soient $\overrightarrow{A} = (A_x; A_y; A_z)$, $\overrightarrow{B} = (B_x; B_y; B_z)$, $\overrightarrow{C} = (C_x; C_y; C_z)$

Alors $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$

$$= (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}) \bullet \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}) \bullet [(B_y C_z - B_z C_y)\ \overrightarrow{i} - (B_x C_z - B_z C_x)\ \overrightarrow{j}$$

$$+ (B_x C_y - B_y C_x)\ \overrightarrow{k}\ ]$$

$$A_x (B_y C_z - B_z C_y) - A_y(B_x C_z - B_z C_x) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Propriétés du produit mixte

1- La valeur du produit mixte ne change pas si on permute les vecteurs dans un ordre cyclique.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Remarquez l'ordre cyclique des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$

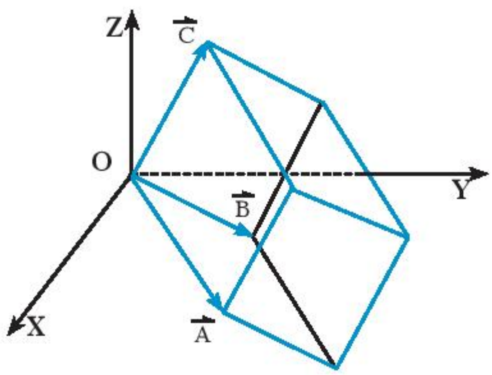
2- Si les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont situés dans un même plan, alors le produit mixte s'annule

On a donc $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

Signification géométrique du produit mixte

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont trois vecteurs formant trois arêtes non parallèles d'un parallélépipède, alors le volume du parallélépipède = la valeur absolue du produit mixte .

On a donc Volume du parallélépipède = $| \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} |$



Exemple

(11) Trouver le volume d'un parallélépipède tel que trois côtés consécutifs sont représentés par les vecteurs $\vec{A} = (2; 1; 3)$, $\vec{B} = (-1 ; 3 ; 2)$ et $\vec{C} = (1 ; 1 ; -2)$

Solution

Volume du parallélépipède = $| \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} |$ **(1)**

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -28$$

donc Volume du parallélépipède = |-28| = 28 unités de volume

Essayez de résoudre

(11) Trouver le volume d'un parallélépipède tel que trois arêtes non parallèles sont représentées par les vecteurs $\vec{A} = (3 ; -4 ; 1)$, $\vec{B} = (0 ; 2 ; -3)$ et $\vec{C} = (3 ; 2; 2)$

Exercises 3 - 3

Compléter ce qui suit : Sachant que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ est un ensemble droitier de vecteurs unitaires :

1) $\vec{i} \cdot \vec{j} =$ ....

2) $\vec{j} \times \vec{k} =$ ....

3) Si $\vec{A} = (2 ; -1)$, $\vec{B} = (3 ; -4)$, alors la composante de $\vec{A}$ dans la direction de $\vec{B}$ est égale à ....

4) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs non nuls et si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont ....

5) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs non nuls et si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont ....

6) La mesure de l'angle entre les deux vecteurs $3\vec{i} - \vec{j}$, $-4\vec{i} + 6\vec{j}$ est égale à ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

7) $\vec{i} \times \vec{j} =$ ....

a) $\vec{O}$ b) 0
c) 1 d) $\vec{k}$

8) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, alors $(\vec{A} - 2\vec{B}) \cdot (3\vec{A} + 5\vec{B}) =$

a) -8 b) -7
c) 24 d) 0

9) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs unitaires, alors $\vec{A} \cdot \vec{B} \in$ ....

a) $]0, 1[$ b) $]-1, 1[$
c) $[-1, 1]$ d) $\mathbb{R}^+$

10) La mesure de l'angle entre les deux vecteurs (2 ; -2 ; 2) et (1; 1; 4) est égale à ....

a) 57,02° b) 35,26°
c) 134,37° d) 0°

11) Si les deux vecteurs (2 ; k ; -3) et (4 ; 6; -6) sont parallèles, alors k = ...

a) 6 b) 3
c) -3 d) 1

Répondre aux questions suivantes :

12 Trouver $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ dans chacun des cas suivants :

a $\overrightarrow{A} = (5\,;\,1\,;\,-2)$, $\overrightarrow{B} = (4\,;\,-4;\,3)$

b $\overrightarrow{A} = -3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{B} = 6\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

c $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

13 Trouver la mesure de l'angle entre les deux vecteurs dans chacun des cas suivants :

a $(5\,;\,1;\,-2)$, $(1\,;\,1;\,-1)$

b $(7\,;\,2\,;\,-10)$; $(2\,;\,6\,;\,4)$

c $(2\,;\,1\,;\,4)$, $(1;\,-2;\,0)$

14 Trouver $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ dans chacun des cas suivants :

a $\overrightarrow{A} = (-2\,;\,3\,;\,1)$, $\overrightarrow{B} = (1\,;\,3\,;\,-4)$

b $\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$

c $\|\overrightarrow{A}\| = 6$; $\|\overrightarrow{B}\| = 8$ et la mesure de l'angle entre les deux vecteurs est 60°.

15 Soit ABCD un carré de longueur de côté 12 cm. Si $\overrightarrow{e}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan du carré, trouver :

a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}$ c $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

d $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ f $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$

16 Trouver un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs .

$\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$

17 Calculer l'aire du triangle DEF dans chacun des cas suivants :

a D(5 ; 1 ; -2) , E (4 ; -4 ; 3) , F (2 ; 4 ; 0)

b D (4 ; 0 ; 2) , E (2 ; 1 ; 5) , F (-1 ; 0 ; -1)

18 Calculer l'aire du parallélogramme LMNE dans chacun des cas suivants :

a L (1 ; 1) ; M (2 ; 3) ; N(5 ; 4)

b L (2 ; 1 ; 3) ; M (1 ; 4 ; 5) ; N(2 ; 5 ; 3)

19 Calculer le volume d'un parallélépipède dans lequel les vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ représentent trois arêtes consécutives sachant que :

$\overrightarrow{A} = (1 ; 1 ; 3)$; $\overrightarrow{B} = (2 ; 1 ; 4)$; $\overrightarrow{C} = (5 ; 1 ; -2)$

20 Dans chacun des cas suivants, montrer si les deux vecteurs donnés sont parallèles , orthogonaux ou aucun de ces deux cas :

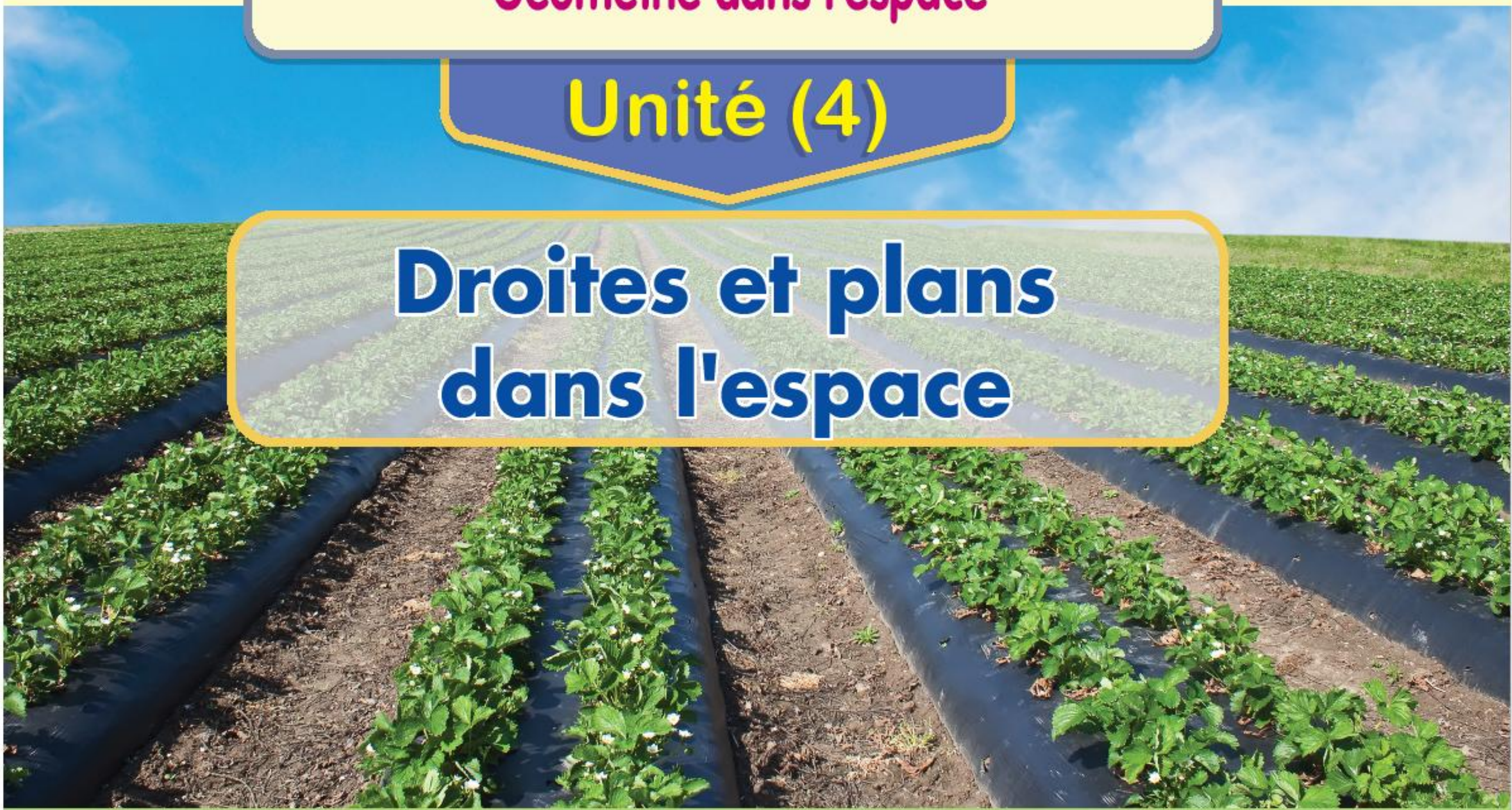
a $\overrightarrow{A} = (0 ; 2 ; 2)$; $\overrightarrow{B} = (3 ; 0 ; -4)$

b $\overrightarrow{E} = 10\,\overrightarrow{i} + 40\,\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{F} = -3\,\overrightarrow{j} + 8\,\overrightarrow{k}$

c $\overrightarrow{A} = -2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{B} = 8\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j} + 8\,\overrightarrow{k}$

Unité (4)

Droites et plans dans l'espace



Introduction de l'unité

Vous avez étudié dans l'unité précédente la localisation d'un point dans l'espace ainsi que les vecteurs de position et comment trouver leurs normes. Ceci est considéré comme la base de cette unité puisqu'elle complète ce qui a été étudié dans l'unité précédente et de ce qui a été étudié l'an dernier. Dans cette unité, l'élève va étudier l'équation d'une droite dans l'espace ainsi que l'équation d'un plan dans ses différentes formes. Les exemples et les méthodes de résolutions sont variés pour atteindre les objectifs cognitifs et les compétences qui aident l'élève à s'approprier les connaissances et les autres conceptions liées à la géométrie dans l'espace dans les niveaux scolaires ultérieurs.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de:

- Trouver un vecteur directeur d'une droite dans l'espace.
- Trouver une équation paramétrique et une équation vectorielle d'une droite dans l'espace.
- Trouver une équation cartésienne d'une droite dans l'espace.
- Trouver l'équation générale d'un plan dans l'espace.
- Trouver l'équation standard d'un plan dans l'espace.
- Identifier l'angle entre deux plans.
- Déduire la condition de la perpendicularité de deux plans.
- Déduire la condition du parallélisme de deux plans dans l'espace.
- Trouver l'équation de la droite d'intersection de deux plans dans l'espace.
- Déterminer la distance entre un point et une droite dans l'espace.
- Trouver la distance entre un point et un plan en utilisant le produit scalaire et la forme cartésienne.
- Déterminer la distance entre deux plans parallèles.

Expressions de base

- *Vecteur directeur*
- *Angles directeurs*
- *Cosinus des angles directeurs*
- *Rapports directeurs*
- *Équation vectorielle*
- *Équation paramétrique*
- *Équation cartésienne*
- *Équation générale*
- *Proportionnel*
- *Deux droites parallèles*
- *Deux droites perpendiculaires*
- *Deux droites sécantes*
- *Deux droites non coplanaires*
- *Distance perpendiculaire*
- *Plan*
- *Forme standard*
- *Deux plans parallèles*
- *Deux plans perpendiculaires*
- *Deux plans sécants*
- *Angle*

Matériel utilisé

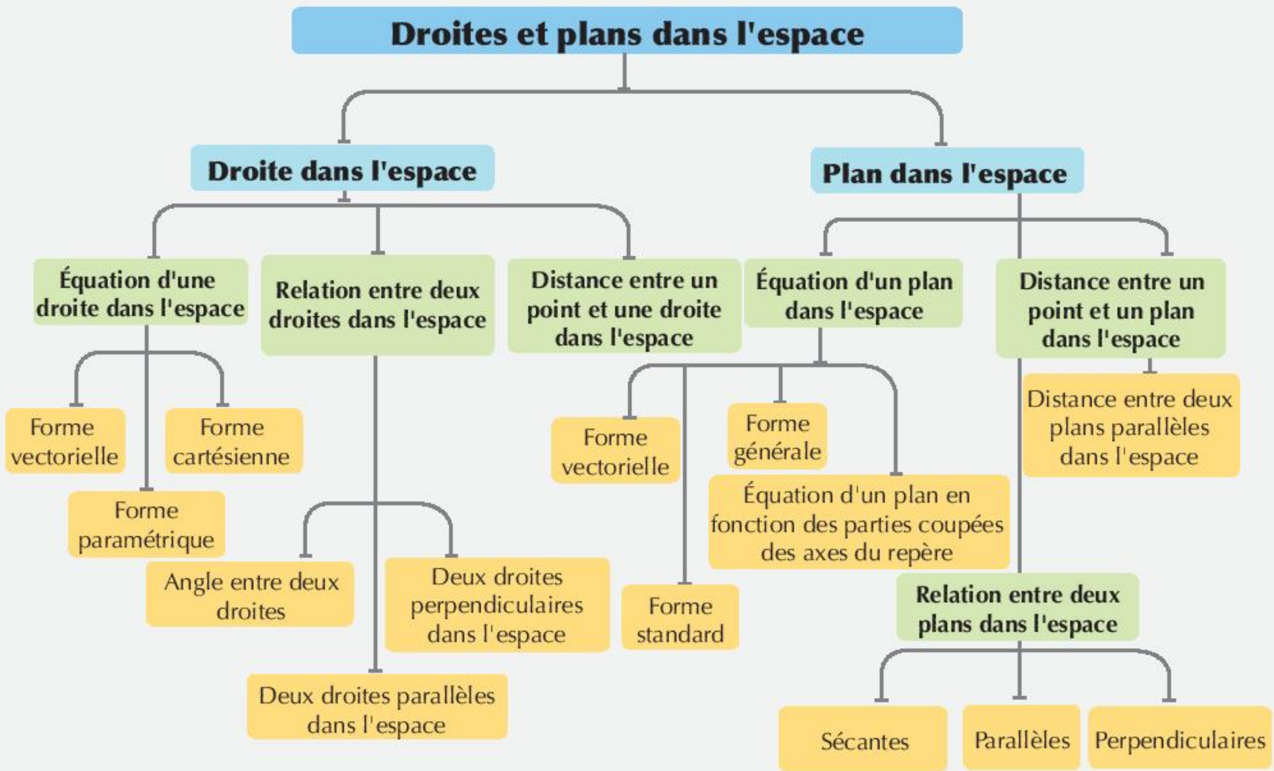
- *Calculatrice graphique*
- *Logiciels de graphisme à trois dimensions*

Leçons de l'unité

Leçon (4 - 1): Équation d'une droite dans l'espace.

Leçon (4 - 2): Équation d'un plan dans l'espace.

Organigramme de l'unité



Unité 4

4 - 1 Équation d'une droite dans l'espace

A apprendre

- Vecteur directeur d'une droite.
- Différentes formes de l'équation d'une droite.
- Angle entre deux droites.
- Distance entre un point et une droite.
- Droites parallèles.
- Droites perpendiculaires

Expressions de base

- Vecteur directeur
- Équations paramétriques
- Équations cartésiennes
- Angles directeurs
- Rapports directeurs

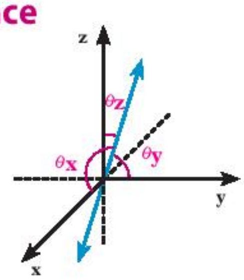
Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme à trois dimensions

Les années précédentes, vous avez déjà fait des études sur la droite dans le plan et comment trouver les différentes formes de son équation (forme vectorielle - forme paramétrique - forme cartésienne). Dans cette leçon, nous allons étudier la droite dans l'espace et comment trouver son équation dans ses différentes formes vu l'importance de ce thème dans le domaine de la géométrie ; l'architecture et les applications de l'astronomie

À apprendre

Vecteur directeur d'une droite dans l'espace



Soient θ_x, θ_y, θ_z les angles directeurs d'une droite dans l'espace. **Donc** $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$ et $\cos\theta_z$ sont les cosinus des angles directeurs de cette droite. Ces cosinus sont notés L ; M et N respectivement

Donc $L = \cos\theta_x$, $M = \cos\theta_y$, $N = \cos\theta_z$

On a $L^2 + M^2 + N^2 = 1$

Le vecteur $\vec{e} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ est le vecteur unitaire dans la direction de la droite

Tout vecteur parallèle au vecteur unitaire $\vec{e}$ est appelé vecteur directeur de la droite et on le note $\vec{d}$

On a $\vec{d} = k(L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}) = (a ; b; c)$ où a ; b et c sont proportionnels à L

M ; N ; $k \in \mathbb{R}^+$

a ; b et c sont appelés les rapports directeurs de la droite.

Par exemple, si $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$ sont les cosinus des angles directeurs d'une droite, alors le vecteur $\vec{d} = k(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$ représente un vecteur directeur de la droite où $k \neq 0$

En posant $k = 3 \longrightarrow \vec{d} = (2; 1; 2)$

En posant $k = -6 \longrightarrow \vec{d} = (-4; -2; -4)$

Par conséquent, une droite admet une infinité de vecteurs directeurs parallèles et chacun de ces vecteurs est parallèles à la droite.

Exemple

1 Trouver un vecteur directeur de la droite passant par les deux points A (-2 ; 3; 1) et B (0 ; 4 ; -2)

Solution

Un vecteur directeur de la droite = $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0 ; 4 ; -2) - (-2 ; 3 ; 1)$

$\therefore \vec{d} = (2 ; 1 ; -3)$

Essayez de résoudre

1 Trouver un vecteur directeur de chacune des droites suivantes:

a La droite passant par le point d'origine et par le point A (-1 ; 2 ; -2)

b La droite passant par les deux points C (0 ; -2 ; 3) et D (1 ; 1 ; -1)

Réflexion critique :

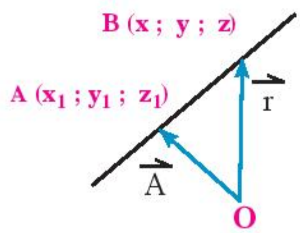
1- Que peut-on dire d'une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{d} = (a ; b ; 0)$?

2- Trouver un vecteur directeur pour chacun des trois axes du repère.

À apprendre

Forme vectorielle de l'équation d'une droite dans l'espace

Soit D une droite dans l'espace de vecteur directeur $\vec{d} = (a ; b ; c)$ et passant par un point A de vecteur de position $\vec{A} = (x_1; y_1; z_1)$ Si B est un point quelconque de la droite de vecteur de position $\vec{B} = (x ; y ; z)$; **alors**



D'après la figure, on a : $\vec{r} = \vec{A} + \overrightarrow{AB}$

Mais $\overrightarrow{AB} \,//\, \vec{d} \longrightarrow (\overrightarrow{AB} = k\vec{d})$

$\therefore$ $\boxed{\vec{r} = \vec{A} + k\vec{d}}$ $\longrightarrow$ C'est la forme vectorielle de l'équation d'une droite.

Exemple

2 Trouver la forme vectorielle de l'équation de la droite passant par le point (3 ; –1 ; 0) et ayant pour vecteur directeur (–2 ; 4 ; 3).

Solution

(3 ; -1 ; 0) **est un point de la droite** $\therefore \vec{A} = (3 ; -1 ; 0)$

(-2 ; 4 ; 3) **est un vecteur directeur de la droite** $\therefore \vec{d} = (-2 ; 4 ; 3)$

L'équation vectorielle de la droite est $\vec{r} = \vec{A} + k\vec{d}$

$\therefore \ \vec{r} = (3\ ;\ -1\ ;\ 0) + k\ (-2\ ;\ 4\ ;\ 3) \longrightarrow$ est l'équation vectorielle de la droite.

Remarque: k est un nombre réel qui n'exprime pas un nombre fixe et unique mais il peut prendre des valeurs réelles différentes. k dans ce cas est appelé un paramètre. Chaque valeur de ce paramètre permet de trouver un point de la droite.

Par exemple, si $k = 1$; **alors** $\vec{r} = (1\ ;\ 3\ ;\ 3)$ représente le vecteur de position d'un point sur la droite

si $k = 2$; **alors** $\vec{r} = (-1\ ;\ 7\ ;\ 6)$ représente le vecteur de position d'un autre point sur la droite

Essayez de résoudre

2. Trouver la forme vectorielle de l'équation de la droite passant par le point $(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et ayant pour vecteur directeur $(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$. Trouver ensuite un autre point sur la droite.

À apprendre

Équation paramétrique d'une droite dans l'espace

L'équation vectorielle d'une droite est de la forme $\vec{r} = \vec{A} + k\ \vec{d}$

En substituant $\vec{r} = (x\ ;\ y\ ;\ z)$; $\vec{A} = (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ et $\vec{d} = (a\ ;\ b\ ;\ c)$

On obtient: $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1) + k\ (a\ ;\ b\ ;\ c)$

D'où $(x = x_1 + ka\ ;\ y = y_1 + kb\ ;\ z = z_1 + kc) \longrightarrow$ est l'équation paramétrique d'une droite

Exemple

3. Trouver l'équation paramétrique de la droite passant par le point $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et ayant pour vecteur directeur $(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$.

Solution

$\vec{r} = (2\ ;\ -1\ ;\ 3) + k\ (4\ ;\ -2\ ;\ 5) \longrightarrow$ **est la forme vectorielle de l'équation de la droite**

$\therefore \ (x\ ;\ y\ ;\ z) = (2\ ;\ -1\ ;\ 3) + k\ (4\ ;\ -2\ ;\ 5)$

$\therefore \ x = 2 + 4k \quad ; \quad y = -1 - 2k \quad$ et $\quad z = 3 + 5k$

Essayez de résoudre

3. Trouver l'équation paramétrique de la droite passant par le point d'origine et ayant pour vecteur directeur $(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$.

À apprendre

Équation cartésienne d'une droite dans l'espace

D'après l'équation paramétrique de la droite:

$x = x_1 + k\,a,\ y = y_1 + kb,\ z = z_1 + k\,c \qquad \therefore \ \dfrac{x - x_1}{a} = k\ ;\ \dfrac{y - y_1}{b} = k\ ;\ \dfrac{z - z_1}{c} = k$

$\therefore \ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \longrightarrow$ est la forme cartésienne de l'équation de la droite.

où a, b et c sont non nuls.

Remarques

1- Si $a = 0$ par exemple, la forme cartésienne de l'équation de la droite est $x = x_1$ et $\frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$

2- Vous avez appris que l'équation d'une droite dans le plan est de la forme $ax + by + c = 0$. Par conséquent, certains pensent que l'équation d'une droite dans l'espace est de la forme $ax + by + cz = 0$, ce qui est une erreur fréquente car cette dernière est l'équation d'un plan dans l'espace comme nous allons l'étudier dans les leçons suivantes.

3- Comme les rapports directeurs a, b et c sont proportionnels aux cosinus des angles directeurs L, M et N, alors nous pouvons écrire la forme cartésienne de l'équation de la droite sous la forme $\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N}$

Exemple

(4) Trouver les différentes formes de l'équation de la droite passant par les deux points (2 ; -1 ; 5) et (-3 ; 1 ; 4).

Solution

Un vecteur directeur de la droite $\vec{d} = (-3 ; 1 ; 4) - (2 ; -1 ; 5) = (-5 ; 2 ; -1)$

$\therefore$ **La forme vectorielle de l'équation de la droite est** $\vec{r} = (2 ; -1 ; 5) + k(-5 ; 2 ; -1)$

L'équation paramétrique de la droite est $x = 2 - 5k ;\ y = -1 + 2k ;\ z = 5 - k$

La forme cartésienne est $\frac{x - 2}{-5} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 5}{-1}$

Essayez de résoudre

(4) Trouver les différentes formes de l'équation de la droite passant par les deux points (3 ; 2 ; 0) et (–1 ; 3 ; 4).

Exemple

(5) Trouver les différentes formes de l'équation de la droite $\frac{3x + 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{5 - z}{3}$

Solution

Soit $\frac{3x + 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{5 - z}{3} = k$

$$\therefore \left.\begin{array}{lll} \frac{3x+1}{2} = k & \text{d'où} & x = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}k \\ \frac{y-1}{2} = k & \text{d'où} & y = 1 + 2k \\ \frac{5-z}{3} = k & \text{d'où} & z = 5 - 3k \end{array}\right\} \text{Équations paramétriques de la droite}$$

D'après les équations paramétriques, nous pouvons écrire l'équation:

$$(x ;\ y ;\ z) = (-\frac{1}{3} ;\ 1 ;\ 5) + t(\frac{2}{3} ;\ 2 ;\ -3)$$

D'où $\vec{r} = (-\frac{1}{3} ; 1 ; 5) + t(\frac{2}{3} ;\ 2 ;\ -3)$ est la forme vectorielle

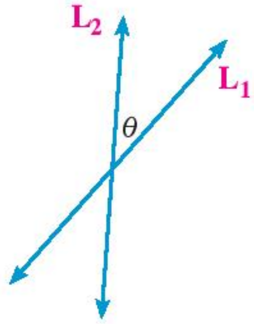
Remarquez que : les rapports directeurs sont ($\frac{2}{3}$; 2 ; -3) ou (2 ; 6 ; -9)

Essayez de résoudre

5 Trouver les différentes formes de l'équation de la droite $\frac{x+4}{3} = \frac{2y+5}{2} = \frac{4-z}{4}$, puis trouver un point appartenant à cette droite

À apprendre

Angle entre deux droites dans l'espace



Soient L_1 et L_2 deux droites dans l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = (a_1 ; b_1 ; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. La mesure du plus petit angle entre les deux droites est donnée par la relation:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\| \, \|\overrightarrow{d_2}\|} \; ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Si $(L_1 ; M_1 ; N_1)$ et $(L_2 ; M_2 ; N_2)$ sont les cosinus des angles directeurs des deux droites, alors:

$$\cos\theta = |L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2|$$

Exemple

6 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (2 ; -1; 3) + k_1 (-2 ; 0 ; 2)$ et $x = 1$, $\frac{y-4}{3} = \frac{z+5}{-3}$

Solution

D'après l'équation de la première droite $\overrightarrow{d_1} = (-2 ; 0 ; 2)$

D'après l'équation paramétrique de la deuxième droite $\overrightarrow{d_2} = (0 ; 3 ; -3)$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\| \, \|\overrightarrow{d_2}\|} = \frac{|(-2 ; 0 ; 2) \bullet (0 ; 3 ; -3)|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}\sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{8}\,\sqrt{18}} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 60^\circ$$

Essayez de résoudre:

6 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites:

$L_1 : x = 2 - 5k, y = 1 - k ; z = 3 + 4k$ et $L_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{2-y}{4} = \frac{z}{2}$

Exemple

7 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites dont les cosinus des angles directeurs sont $(\frac{5}{13\sqrt{2}} ; \frac{-12}{13\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{-3}{5\sqrt{2}} ; \frac{4}{5\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$

Solution

$(L_1, M_1, N_1) = (\frac{5}{13\sqrt{2}} ; \frac{-12}{13\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(L_2; M_2; N_2) = (\frac{-3}{5\sqrt{2}} ; \frac{4}{5\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\therefore \cos\theta = |L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2|$

$= |\frac{5}{13\sqrt{2}} \times \frac{-3}{5\sqrt{2}} + \frac{-12}{13\sqrt{2}} \times \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}|$

$= |\frac{-15}{130} + \frac{-48}{130} + \frac{1}{2}| = \frac{1}{65}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(\frac{1}{65}) = 89° 7' 6''$

Essayez de résoudre

7) Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites dont les cosinus des angles directeurs sont $(\frac{2}{3} ; \frac{-2}{3} ; \frac{1}{3})$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0)$

À apprendre

Deux droites parallèles dans l'espace

Soient L_1 et L_2 deux droites dans l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = (a_1 ; b_1 ; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. $L_1 // L_2$ si et seulement si $\overrightarrow{d_1} // \overrightarrow{d_2}$.

Cette condition peut être vérifiée par plusieurs formes

1- $\overrightarrow{d_1} = k\,\overrightarrow{d_2}$ **2-** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ **3-** $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{0}$

Remarques:

1- Si les deux droites sont parallèles et un point appartenant à l'une d'elles vérifie l'équation de l'autre, alors les deux droites sont confondues.

2- Si $\overrightarrow{d_1}$ n'est pas parallèle à $\overrightarrow{d_2}$, alors L_1 et L_2 sont sécantes ou non coplanaires.

Exemple

8) Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{j} + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$

et $\overrightarrow{r_2} = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + k_2(-2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$

se coupent en un seul point puis déterminer leur point d'intersection

Solution

$\overrightarrow{d_1} = (1 ; 2 ; -1)$; $\overrightarrow{d_2} = (-2 ; -2; 0)$

$\because \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-2} = -1$ $\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ Les deux droites ne sont pas parallèles. Pour démontrer que les deux droites sont sécantes en un seul point, on cherche une valeur de k_1 et une valeur de k_2 telles que $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$

$\therefore \overrightarrow{j} + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} + k_2(-2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$ En égalisant les coefficients

$\therefore k_1 = 1 - 2k_2$ d'où $k_1 + 2k_2 = 1$ **(1)**

$2k_1 = -2k_2$ d'où $k_1 + k_2 = 0$ **(2)**

$-k_1 = 1$ d'où $k_1 = -1$ **(3)**

De (3) en (1) $k_2 = 1$

Ces valeurs vérifient l'équation (2).

$\therefore$ Les deux droites sont sécantes en un point et le vecteur de position de leur point d'intersection est :

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{j} - 1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ **d'où** $(-1 ; -1 ; 1)$

Essayez de résoudre

8) Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (3 ; -3 ; 5) + k_1 (0 ; -5 ; 5)$

et $\overrightarrow{r_2} = (-2 ; 3 ; 1) + k_2 (5 ; -1 ; -1)$

sont perpendiculaires et se coupent en un seul point puis déterminer leur point d'intersection.

À apprendre

Deux droites perpendiculaires dans l'espace

Soient L_1 et L_2 deux droites dans l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = (a_1 ; b_1; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2; b_2; c_2)$ On a :

$L_1 \perp L_2$ si et seulement si $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$

Exemple

9) Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (1; 2; 4) + k_1 (2 ; -1 ; 1)$ et $\overrightarrow{r_2} = (1 ; 1 ; 1) + k_2(-2 ; 7 ; 11)$ sont perpendiculaires puis démontrer qu'elles sont non coplanaires.

Solution

$\overrightarrow{d_1} = (2 ; -1 ; 1) \longrightarrow$ est un vecteur directeur de la première droite

$\overrightarrow{d_2} = (-2 ; 7 ; 11) \longrightarrow$ est un vecteur directeur de la deuxième droite

$$\begin{aligned}\therefore \quad \overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} &= (2 ; -1 ; 1) \cdot (-2 ; 7 ; 11)\\ &= 2 \times (-2) + (-1) \times 7 + 1 \times 11\\ &= -4 - 7 + 11\\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ Les deux droites sont perpendiculaires

Pour démontrer que les deux droites sont non coplanaires, on démontre qu'il n'existe pas de valeurs de k_1 et k_2 telles que $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$

On pose $(1 ; 2 ; 4) + k_1 (2 ; -1 ; 1) = (1 ; 1 ; 1) + k_2 (-2 ; 7 ; 11)$ En égalisant les coefficients :

$\therefore$ $1 + 2k_1 = 1 - 2k_2$ d'où $k_1 + k_2 = 0$ **(1)**

$2 - k_1 = 1 + 7k_2$; d'où $-k_1 - 7k_2 = -1$ **(2)**

$4 + k_1 = 1 + 11k_2$; d'où $k_1 - 11k_2 = -3$ **(3)**

Des deux équations (1) et (2), on obtient $k_1 = \frac{-1}{6}$ et $k_2 = \frac{1}{6}$ Ces deux valeurs ne vérifient pas l'équation (3).

$\therefore$ Les deux droites sont non coplanaires.

Essayez de résoudre

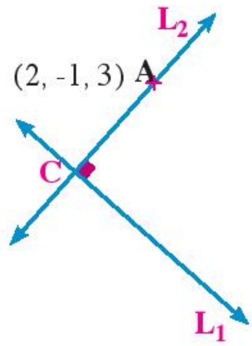
9) Démontrer que les deux droites

$\overrightarrow{r_1} = (3\ ;\ -1\ ;\ 2) + k_1\ (4\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{r_2} = (0\ ;\ 4\ ;\ -1) + k_2\ (1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ sont non coplanaires.

Exemple

10 Trouver une équation de la droite passant par le point $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$, coupant la droite $\overrightarrow{r_1} = (1\ ;\ -1\ ;\ 2) + k\ (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et lui est perpendiculaire.

Solution



Supposons que les deux droites se coupent au point C

$\because$ C appartient à la droite L_1 (la droite donnée)

$\therefore$ C peut s'écrire sous la forme:

C $(1 + 2k\ ;\ -1 + 2k\ ;\ 2 - k)$

Un vecteur directeur de la droite L_2 (la droite cherchée) est

$\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A}$

$\therefore\ \overrightarrow{d_2} = (2k - 1\ ;\ 2k\ ;\ -k - 1)$

$\because\ \overrightarrow{d_1} = (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$

et $\because$ les deux droites sont perpendiculaires $\therefore\ \overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$

$\therefore\ (2\ ;\ 2\ ;\ -1) \cdot (2k - 1\ ;\ 2k\ ;\ -k - 1) = 0$

$\therefore\ 4k - 2 + 4k + k + 1 = 0$

$\therefore\ 9k = 1$ d'ou $k = \frac{1}{9}$

$\therefore\ \overrightarrow{d_2} = (\frac{-7}{9}\ ;\ \frac{2}{9}\ ;\ \frac{-10}{9}) = (-7\ ;\ 2\ ;\ -10)$

$\therefore$ L'équation de la droite L_2 est $\overrightarrow{r} = (2\ ;\ -1\ ;\ 3) + k_2\ (-7\ ;\ 2\ ;\ -10)$

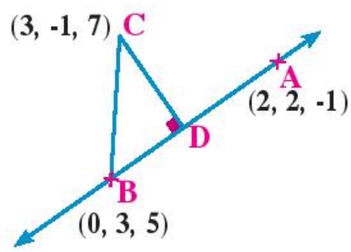
Essayez de résoudre

10 Trouver une équation de la droite passant par le point d'origine, coupant la droite $\overrightarrow{r} = (3\ ;\ 1\ ;\ 4) + k\ (2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et lui est perpendiculaire.

Exemple **(Distance entre un point et une droite dans l'espace)**

11 Trouver la distance entre le point $(3\ ;\ -1\ ;\ 7)$ et la droite passant par les deux points $(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $(0\ ;\ 3\ ;\ 5)$

Solution



Soient A $(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$; B $(0\ ;\ 3\ ;\ 5)$; C $(3\ ;\ -1\ ;\ 7)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = (3\ ;\ -1\ ;\ 7) - (0\ ;\ 3\ ;\ 5) = (3\ ;\ -4\ ;\ 2)$

Le vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

$\therefore\ \overrightarrow{d} = (2\ ;\ -1\ ;\ -6)$

BD est la longueur de la projection de $\overrightarrow{BC}$ sur la droite $\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{|\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}\ |}{\|\overrightarrow{BA}\|}$

$\therefore\ BD = \dfrac{|(3; -4; 2) \cdot (2; -1; -6)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-6)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{41}}$

Mais $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\therefore$ La distance CD $= \sqrt{(BC)^2 - (DB)^2}$

$= \sqrt{29 - \frac{4}{41}} = \sqrt{\frac{1185}{41}} \simeq 5{,}3$ unités de longueur

Essayez de résoudre:

11 Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (2 ; 1 ; -4) sur la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (1 ; -1 ; 2) + k\,(2 ; 3 ; -2)$

Réflexion critique : La distance entre un point B et la droite d' équation $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + k\,\overrightarrow{B}$ est déterminée par la formule $= \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{d}\|}{\|\overrightarrow{d}\|}$ Pouvez-vous démontrer cette formule?

Exercices 4 - 1

Compléter:

1 L'équation vectorielle de la droite passant par le point (2 ; -1 ; 3) et ayant pour vecteur (-1 ; 4 ; 2) est ....

2 La mesure de l'angle entre les deux droites d'équations $2x = 3y = -z$ et $6x = -y = -4z$ est égale à ....°

3 La mesure de l'angle entre les deux droites ayant pour rapports directeurs (1 ; 1 ; 2) et ($\sqrt{3}$ -1; -$\sqrt{3}$ -1; 4) est égale à ....

4 Si θ_z est la mesure de l'angle que fait la droite passant par le point (3; -1 ; 1) et le point d'origine avec le sens positif de l'axe des z , alors $\cos \theta_z =$ ....

5 Le vecteur directeur de la droite passant par les deux points (7 ; -5 ; 4) et (5 ; -3 ; 3) est ....

Compléter:

6 Trouver les cosinus des angles directeurs de la droite ayant pour rapports directeurs :

a -1 ; 2 ; 3

b 1 ; 1 ; 1

7 Trouver les différentes formes de l'équation de la droite :

a passant par le point (4 ; -2 ; 5) et ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{d} = (2 ; 1 ; -1)$

b passant par le point (3 ; -1 ; 5) et parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB}$ où $\overrightarrow{AB} = (4 ; -2 ; 2)$

c passant par les deux points (3 ; -2 ; 0) et (0 ; 4 ; 1)

d passant par le point (3 ; 2 ; 5) et faisant avec les trois axes du repère des angles de même mesure.

8 Trouver la forme vectorielle de l'équation de la droite $x - 3 = \frac{y+2}{4} = \frac{2-z}{3}$

9 Si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$;

$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{OD} = 8\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

trouver l'équation vectorielle de chacune des droites suivantes:

a La droite passant par les deux points A et B

b La droite passant par le point D et parallèle à $\overleftrightarrow{BC}$

c La droite passant par le point C, coupant la droite $\overleftrightarrow{AB}$ et lui est perpendiculaire.

10 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites:

a L_1 : passant par les deux points (-3 ; 2 ; 4) et (2 ; 5 ; -2)
L_2 : passant par les deux points (1 ; -2 ; 2) et (4 ; 2 ; 3)

b $L_1 : \overrightarrow{r} = (2 ; -1 ; 3) + k_1 (-1 ; 4 ; 2)$
$L_2 : \overrightarrow{r} = (0 ; 2 ; -1) + k_2 (1 ; 1 ; 3)$

c $L_1 : 2x = 3y = 4z$
$L_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-5}$

11 Citer la ou les conditions nécessaires pour que les deux droites:
$L_1 : x = x_1 + a_1k_1$; $y = y_1 + b_1k_1$; $z = z_1 + c_1k_1$
$L_2 : x = x_2 + a_2k_2$; $y = y_2 + b_2k_2$; $z = z_2 + c_2k_2$

a soient parallèles

b soient perpendiculaires

c soient sécantes en un seul point

12 Trouver l'équation de la droite passant par le point A(1 ; –1 ; 0) et parallèle à la droite passant par les deux points B(–3 ; 2 ; 1) et C(2 , 1 , 0) puis démontrer que le point (–4 ; 2 ; 3) appartient à cette droite.

13 Trouver la valeur de n pour que les deux droites $L_1 : \overrightarrow{r_1} = (3 ; -1 ; n) + k_1 (4 ; 1; 3)$ et $L_2 : x = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ soient sécantes en un seul point puis trouver ce point

14 **Déceler l'erreur :**

a Pour une droite quelconque, la somme des carrés des rapports directeurs est égale à 1.

b Les cosinus des angles directeurs de la droite passant par les deux points $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ sont $(x_2 - x_1 ; y_2 - y_1 ; z_2 - z_1)$

c Si $(A_1; B_1; C_1)$ et $(A_2; B_2; C_2)$ sont les rapports directeurs respectifs des deux droites L_1 et L_2 ; alors la mesure de l'angle entre les deux droites est donnée par la relation $\cos\theta = |a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|$

Unité (4)

4 - 2 Équation d'un plan dans l'espace

À apprendre

- Équation vectorielle d'un plan dans l'espace.
- Équation standard d'un plan dans l'espace.
- Équation générale d'un plan dans l'espace.
- Angle entre deux vecteurs.
- Condition de parallélisme de deux plans.
- Condition de perpendicularité de deux plans.
- Équation de la droite d'intersection de deux plans dans l'espace.
- Distance entre un point et un plan.
- Distance entre deux plans parallèles.

Expressions de base

- Plan
- Forme standard
- Deux plans parallèles
- Deux plans perpendiculaires
- Deux plans sécants
- Angle

Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme à trois dimensions

Réfléchir et discuter

1- Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux vecteurs perpendiculaires, alors $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ = ...

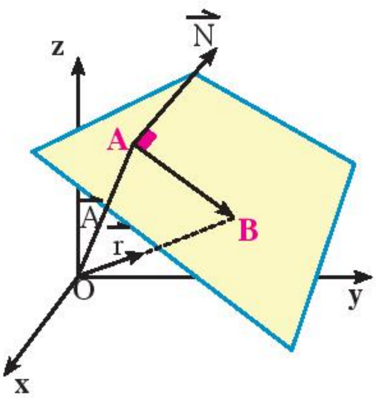
2- Un vecteur directeur de la droite passant par les deux points $(x_1; y_1; z_1)$ et $(x_2; y_2; z_2)$ est ....

3- La coordonnée z de tous les points appartenant au plan du cartésien XY est égale à ....

À apprendre

Forme vectorielle de l'équation d'un plan dans l'espace

Soient A (x_1, y_1, z_1) un point d'un plan qui a pour vecteur de position $\overrightarrow{A}$; $\overrightarrow{N} = (a; b; c)$ un vecteur directeur orthogonal au plan et et B (x, y, z) un point quelconque du plan qui a pour vecteur de position $\overrightarrow{r}$ Alors:



$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{N} \cdot (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}) = 0 \qquad (\overrightarrow{B} = \overrightarrow{r})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{A}$$ ⟶ **C'est la forme vectorielle de l'équation d'un plan**

C'est à dire : Pour trouver l'équation vectorielle d'un plan, il faut connaitre un point du plan et un vecteur directeur orthogonal au plan.

Exemple

(1) Trouver la forme vectorielle de l'équation du plan passant par le point (0 ; 1; 1) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

Solution

L'équation vectorielle est $\overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{r} = \overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{A}$ où $\overrightarrow{A} = (0 ; 1 ; 1)$

$\therefore \quad (1 ; 1 ; 1) \bullet \overrightarrow{r} = (1 ; 1 ; 1) \bullet (0 ; 1 ; 1)$

$(1 ; 1 ; 1) \bullet \overrightarrow{r} = 2$

Essayez de résoudre

1. Trouver la forme vectorielle de l'équation du plan passant par le point (2 ; –3 ; 1) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (1 ; -2 ; 3)$.

À apprendre

Forme standard de l'équation d'un plan dans l'espace

D'après la forme vectorielle de l'équation du plan

$\overrightarrow{N} \bullet (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{A}) = 0$

où $\overrightarrow{N} = (a ; b ; c)$ et $\overrightarrow{r} = (x ; y ; z)$; $\overrightarrow{A} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$

$\therefore \ (a ; b ; c) \bullet (x - x_1 ; y - y_1 ; z - z_1) = 0$

$\therefore \ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \longrightarrow$ **est la forme standard de l'équation d'un plan**

En développant:

$\therefore \ ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = 0$

En posant $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$; **on obtient**

$ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow$ **est la forme générale de l'équation d'un plan**

Exemple

2. Trouver la forme standard et la forme générale de l'équation du plan passant par le point (3 ; -5 ; 2) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (2 ; 1, 1)$.

Solution

La forme standard est $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\therefore \quad 2(x - 3) + (y + 5) + (z - 2) = 0 \longrightarrow$ **Forme standard**

En développant et simplifiant:

$\therefore \quad 2x + y + z - 3 = 0 \longrightarrow$ **Forme générale**

Essayez de résoudre

2. Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par le point (-3 ; 4 ; 2) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (1 ; -1 ; 3)$.

Exemple **(Équation d'un plan passant par trois points non alignés)**

3. Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par les points (3 ; -1, 0) ; (2 ; 1 ; 4) et (0 ; 3 ; 3).

Solution

Il faut d'abord s'assurer que les trois points ne sont pas alignés

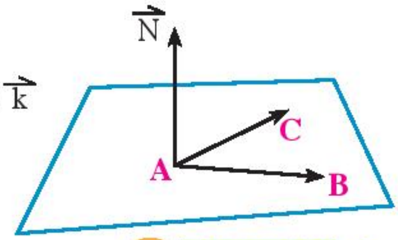
Soient A (3 ; -1 ; 0) , B (2 ; 1 ; 4) , C (0 ; 3 ; 3)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (-1; 2; 4)$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (-3 ; 4 ; 3)$

$\because \frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{2}$ $\therefore \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ $\therefore$ les trois points ne sont pas alignés

Pour trouver l'équation du plan, nous avons besoin d'un vecteur directeur orthogonal au plan. On peut obtenir ce vecteur à l'aide du produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -10\,\overrightarrow{i} - 9\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$$



$\therefore$ **La forme vectorielle de l'équation du plan est**

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{A}$

$\therefore (-10 ; -9 ; 2) \cdot \overrightarrow{r} = (-10 ; -9 ; 2) \cdot (3 ; -1, 0)$

$\therefore (-10 ; -9 ; 2) \cdot \overrightarrow{r} = -21$

Forme standard de l'équation du plan

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\therefore -10(x - 3) - 9(y + 1) + 2z = 0$

Forme générale de l'équation du plan

$(-10 ; -9 ; 2) \cdot (x ; y ; z) = -21$

$\therefore -10x - 9y + 2z + 21 = 0$

Pour votre information

L'équation d'u plan passant par les trois points (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3) est :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Essayez de résoudre

3) Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par les points (1 ; 0 ; 0), (0 ; 2 ; 0) et (0 ; 0 ; 3).

Exemple **(Plan contenant deux droites)**

4) Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k})$

et $\overrightarrow{r_2} = (2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) + k_2(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$

sont sécantes puis trouver l'équation du plan qui les contient.

Solution

Si $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$ alors les deux droites se coupent

$\therefore (3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) = (2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) + k_2(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$

En égalisant les coefficients:

$3 + k_1 = 2 + k_2$ d'où $k_1 - k_2 = -1$ **(1)**

$1 + 2k_1 = 5 - k_2$ d'où $2k_1 + k_2 = 4$ **(2)**

$-1 + 3k_1 = k_2$ d'où $3k_1 - k_2 = 1$ **(3)**

En résolvant les équations (1) et (2) on a $k_1 = 1$; $k_2 = 2$

Ces valeurs vérifient l'équation

$\therefore$ les deux droites sont sécantes.

Un vecteur directeur orthogonal au plan est $\overrightarrow{N}$ tel que:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}$$

L'équation vectorielle du plan est $\overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{r} = \overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{A}$

$\therefore (5\,;\,2\,;\,-3) \bullet \overrightarrow{r} = (5\,;\,2\,;\,-3) \bullet (3\,;\,1\,;\,-1)$

$\therefore (5\,;\,2\,;\,-3) \bullet \overrightarrow{r} = 20$

La forme générale:

$(5\,;\,2\,;\,-3) \bullet (x\,;\,y\,;\,z) = 20$

$\therefore\ 5x + 2y - 3z = 20$

Essayez de résoudre:

4) Démontrer que les deux droites L_1 : $2x = 3y = 4z$ et L_2: $3x = 2y = 5z$ sont sécantes puis trouver l'équation du plan qui les contient.

Exemple

5) Trouver le point d'intersection de la droite $2x = 3y - 1 = z - 4$ avec le plan $3x + y - 2z = 5$

Solution

De l'équation du plan

$$y = 5 + 2z - 3x$$

En substituant dans l'équation de la droite:

$$2x = 14 + 6z - 9y$$
$$= z - 4$$

$$11x - 6z = 14 \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{et } -5z + 9x = 18 \quad \textbf{(2)}$$

En résolvant les deux équations (1) et (2), on obtient:

$$x = -38\,;\, z = -72$$

En substituant dans l'équation du plan:

$$\therefore\ y = -25$$

$\therefore$ le point d'intersection est $(-38\,;\,-25\,;\,-72)$

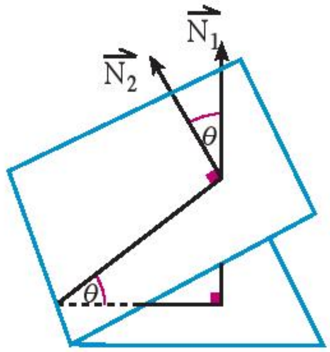
Essayez de résoudre

(5) Trouver le point d'intersection de la droite $\overrightarrow{r} = (1\ ;\ 4\ ;\ 2) + t\,(3\ ;\ 2,\ 2)$ avec le plan $(3\ ;\ 2\ ;\ 2)\,.\,\overrightarrow{r} = -2$

À apprendre

Angle entre deux plans

La mesure de l'angle entre deux plans est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans. si $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans, alors la mesure de l'angle entre deux plans est donnée par la relation :



$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\,\|\overrightarrow{n_2}\|} \quad \text{où } 0 \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$$

Exemple

(6) Trouver la mesure de l'angle entre deux plans $(2\ ;\ -1,\ 4) \bullet \overrightarrow{r} = 5$ et $3x - y + 2z = 4$

Solution

Un vecteur directeur de la première droite est $\overrightarrow{N_1} = (2\ ;\ -1\ ;\ 4)$

Un vecteur directeur de la deuxième droite est $\overrightarrow{N_2} = (3\ ;\ -1\ ;\ 2)$

$\therefore$ La mesure de l'angle entre les deux vecteurs est θ où

$$\cos\theta = \frac{|\overleftarrow{n_1} \bullet \overleftarrow{n_2}|}{\|\overleftarrow{n_1}\|\,\|\overleftarrow{n_2}\|} = \frac{|(2\ ;\ -1\ ;\ 4) \bullet (3\ ;\ -1\ ;\ 2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\ \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{15}{7\sqrt{6}}$$

$$\therefore\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{15}{7\sqrt{6}}\right) = 28^\circ 58'$$

Essayez de résoudre:

(6) Trouver la mesure de l'angle entre deux plans $x - 3y + 2z = 0$ et $2x + y - z = 3$

Plans parallèles et plans perpendiculaires

Si $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux à deux plans, alors

1- les deux plans sont parallèles si $\overrightarrow{N_1} \,//\, \overrightarrow{N_2}$ c'est à dire si $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\right)$

2- les deux plans sont perpendiculaires si $\overrightarrow{N_1} \bullet \overrightarrow{N_2} = 0$ c'est à dire si $(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1\,c_2) = 0$

Exemple

(7) Si le plan $2x - y + Kz = 5$ est parallèle au plan $x + Ly + 4z = 1$, trouver la valeur de K ; L.

Solution

$\because$ Les deux plans sont parallèles $\qquad \therefore\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore \quad \frac{2}{1} = \frac{-1}{L} = \frac{K}{4}$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ L = \frac{-1}{2}$ et $K = 8$

Essayez de résoudre

(7) Si le plan $x - 3y + z = 4$ est perpendiculaire au plan $a\,x + 2y + 3z = 2$, trouver la valeur de a

Exemple

(Équation de la droite d'intersection de deux plans)

(8) Trouver l'équation de la droite d'intersection des deux plans $x + 2y - 2z = 1$ et $2x + y - 3z = 5$

Solution

Par élimination de x dans les deux équations, en multipliant la première équation par –2 puis en l'additionnant à la seconde :

$\therefore\ -3y + z = 3$ $\qquad$ d'où $\qquad$ $z = 3y + 3$ $\qquad$ **(1)**

Par élimination de y dans les deux équations, en multipliant la deuxième équation par –2 puis en additionnant:

$\therefore\ -3x + 4z = -9$ $\qquad$ d'où $\qquad$ $z = \frac{3x - 9}{4}$

$\therefore\ \boxed{\frac{3x - 9}{4} = \frac{3y + 3}{1} = \frac{z}{1}}$ **est l'équation de la droite d'intersection des deux plans**

Autre solution:

$x + 2y - 2z = 1 \qquad$ **(1)**

$2x + y - 3z = 5 \qquad$ **(2)**

En éliminant x

$-3x + z = 3 \qquad$ **(3)**

Soit z = k

De (3) $y = \frac{k - 3}{3}$; **De (2)** $x = \frac{9 + 4k}{3}$

$\therefore$ **Les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans sont;**

$x = 3 + \frac{4}{3}k$, $y = -1 + \frac{1}{3}k$ et $z = k$

Autre solution

Les vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ sont perpendiculaires à la droite d'intersection des deux plans.

$\therefore$ Le vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de la droite d'intersection peut être calculé en utilisant le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}$$

Pour trouver un point de la droite d'intersection, on pose $x = 1$ $\qquad$ **(par exemple)**

En substituant dans l'équation du premier plan $2y - 2z = 0$ $\qquad$ **(1)**

En substituant dans l'équation du deuxième plan $y - 3z = 3$ $\qquad$ **(2)**

Des deux équations (1) et (2), on obtient $z = -\frac{3}{2}$ et $y = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ Le point $(1 ; -\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2})$ est situé sur la droite d'intersection .

L'équation de la droite d'intersection est $\vec{r} = (1 ; -\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}) + t(-4 ; -1 ; -3)$

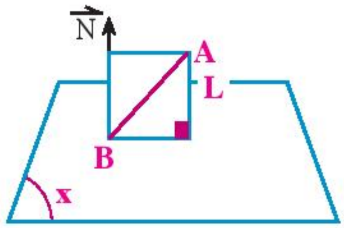
Essayez de résoudre

(8) Trouver l'équation de la droite d'intersection des deux plans $3x - y + 2z = 3$ et $x - 2y + 5z = 2$

À apprendre

Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan

Soient $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ un point n'appartenant pas à un plan X et B un point du plan. Si $\vec{N}$ est un vecteur directeur orthogonal au plan, alors la distance du point A au plan est égale à la longueur de la projection de $\overrightarrow{BA}$ sur $\vec{N}$



$$L = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Exemple

(9) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (1 ; -1 ; 3) sur le plan d'équation $\vec{r} \cdot (2 ; 2 ; -1) = 5$

Solution

Il faut trouver un point du plan et un vecteur directeur orthogonal au plan. À partir de l'équation du plan $\vec{r} . (2 ; 2 ; -1) = 5$

on trouve que $\vec{N} = (2 ; 2 ; -1)$

Pour trouver un point du plan, on suppose que le plan coupe l'axe des z au point (0 ; 0 ; z)

$\therefore$ $(0 ; 0 ; z) \cdot (2 ; 2 ; -1) = 5$; **d'où** $z = -5$

$\therefore$ Le point B (0 ; 0 ; -5) appartient au plan.

$\overrightarrow{BA} = \vec{A} - \vec{B} = (1 ; -1 ; 8)$ où A (1 ; -1 ; 3)

La longueur de la perpendiculaire $L = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(1; -1; 8) \cdot (2; 2; -1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3}$ unités de longueur

Essayez de résoudre

(9) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (-2 ; 1 ; 4) sur le plan d'équation $\vec{r} . (1 ; -3 ; 2) = 4$

Forme cartésienne de la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan

On sait que la longueur de la perpendiculaire abaissée du point $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ sur le plan passant par le point $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ et ayant $\vec{N} = (a ; b ; c)$ pour vecteur directeur orthogonal au plan est donnée par la relation :

$$L = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

$$\therefore \quad L = \frac{|(x_1 - x_2 \,;\, y_1 - y_2 \,;\, z_1 - z_2) \cdot (a \,;\, b \,;\, c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|ax_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + (-a\,x_2 - b\,y_2 - cz_2)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\because$ Le point B $(x_2 \,;\, y_2 \,;\, z_2)$ est situé au plan $a\,x + by + cz + d = 0$

$$\therefore \quad L = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ **est la forme cartésienne de la longueur de la perpendiculaire**

Exemple

(10) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (1 ; 5; -4) sur le plan d'équation $3x - y + 2z = 6$

Solution

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|3\,(1) - (5) + 2\,(-4) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}} \text{ unités de longueur}$$

Essayez de résoudre

(10) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (–1 ; 4 ; 0) sur le plan d'équation $x - 2y - z = 4$

Exemple **(Distance entre deux plans parallèles)**

(11) Démontrer que les deux plans $x + 3y - 4z = 3$ et $2x + 6y - 8z = 4$ sont parallèles puis trouver la distance entre eux.

Solution

Pour démontrer que les deux plans sont parallèles, on démontre que les vecteurs directeurs orthogonaux à ces deux plans sont parallèles.

$\overrightarrow{N_1} = (1 \,;\, 3 \,;\, -4)$; $\overrightarrow{N_2} = (2 \,;\, 6 \,;\, -8)$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $\qquad \therefore$ Les deux plans sont parallèles

Pour trouver la distance entre les deux plans, on cherche un point appartenant à l'un d'eux puis on calcule la distance du point trouvé par rapport à l'autre plan.

Pour chercher un point appartenant au premier plan, on pose $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation du premier plan.

$\therefore z = \frac{-3}{4}$ Dans ce cas, la longueur de la perpendiculaire de ce point sur le deuxième plan est

$$L = \frac{|2\,(0) + 6\,(0) - 8\,(\frac{-3}{4}) - 4|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ unités de longueur}$$

Essayez de résoudre

(11) Démontrer que les deux plans $3x + 6y + 6z = 4$ et $x + 2y + 2z = 1$ sont parallèles puis trouver la distance entre eux.

À apprendre

Équation d'un plan en fonction des parties coupées des trois axes du repère

Si un plan coupe les trois axes du repère aux points n $(x_1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; y_1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; z_1)$, alors l'équation du plan est sous la forme:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1 \longrightarrow$$ **Équation du plan en fonction des parties coupées des trois axes du repère :**

Exemple

(12) Trouver l'équation du plan qui coupe des axes x , y et z du repère les parties 2 , –3 et 5 respectivement.

Solution

L'équation du plan est $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1$

D'où $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{5} = 1$

Essayez de résoudre

(12) Trouver les parties coupées des trois axes du repère par le plan d'équation $2x + 3y - z = 6$

Réflexion critique :

Si le plan d'équation $3x + 2y + 4z = 12$ coupe les trois axes du repère x ; y ; z au points A , B et C respectivement, calculer l'aire du triangle ABC.

Exercices 4 - 2

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Parmi les points suivants, celui qui appartient au plan $2x + 3y - z = 4$ est
   a) $(1 ; 1 ; 1)$ b) $(1 ; 2 ; 0)$ c) $(0 ; 2 ; 1)$ d) $(3 ; 2 ; -1)$

2) L'abscisse du point d'intersection du plan $3x - 2y + 4z + 12$ avec l'axe des abscisses est
   a) 3 b) -4 c) 4 d) 6

3) Si a , b et c sont les parties coupées des trois axes du repère par le plan $x + 5y - 6z = 30$, alors $a + b + c =$
   a) 0 b) 30 c) 31 d) 41

4) L'équation du plan passant par le point $(1 ; 2 ; 3)$ et parallèle à l'axe des x et l'axe des y est
   a) $x + y = 3$ b) $z = 3$ c) $x = 1$ d) $y = 2$

5) L'équation du plan passant par les points $(2 ; 3 ; 5)$; $(-1 ; 3 ; 1)$ et $(4 ; 3 -2)$ est
   a) $x + y - z = 0$ b) $x = -1$ c) $y = 3$ d) $z = -2$

6) L'équation du plan passant par le point $(1 ; -2 ; 5)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $(2 ; 1 ; 3)$ est
   a) $2x + y + 3z = 1$ b) $2x + y + 3z = 15$
   c) $x - 2y + 5z = 15$ d) $x + y + z = 4$

Répondre aux questions suivantes:

7) Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par le point $(1 ; -1 ; 4)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (2 ; -3 ; 4)$ puis répondre aux questions suivantes :
   a) Le point $(2 ; 2 ; 1)$ appartient-il au plan ?
   b) Le vecteur $\overrightarrow{e} = (3 ; -5 ; -2)$ est-il parallèle au plan ?

8) Trouver trois points dans l'espace appartenant à chacun des plans suivants:
   a) $x = 3$ b) $y = -2$ c) $x + 3y = 5$ d) $2x - y + 3z = 4$

9) Trouver l'équation générale du plan passant par le point d'origine et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur
   $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$

10) Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par le point $(2 ; -1 ; 0)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = 4\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$

11 Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par les points (2 ; -1 ; 0), (-1 ; 3 ; 4) et (3 ; 0 ; 2)

12 Démontrer que la droite $\vec{r} = \vec{k} + k(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$ est perpendiculaire au plan $x + \frac{3}{2}y + 2z = 5$

13 Démontrer que le point A(2 ; 3 ; 1) et la droite L : $\vec{r} = (3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) + k(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ sont situés dans le plan d'équation $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - \vec{k}) = 3$

14 Dans chaque cas, trouver l'équation du plan passant par le point (2 ; 1 ; 4) et vérifiant l'une des conditions suivantes :

a Parallèle au plan $2x + 3y + 5z = 1$

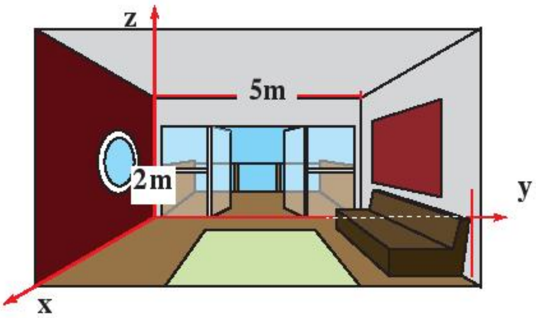
b Perpendiculaire à la droite passant par les deux points (3 ; 2 ; 5) ; (1 ; 6 ; 4)

c Perpendiculaire à chacun des deux plans $7x + y + 2z = 6$ et $3x + 5y - 6z = 8$

15 Trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite $\vec{r} = \vec{k} + k(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ avec le plan $\vec{r} \cdot \vec{i} = 4$

16 Trouver les différentes formes de l'équation du plan coupant des trois axes du repère x , y et z les parties 2 ; 4 et 5 respectivement

17 **Lien avec l'environnement:** Dans la figure ci-contre, trouver l'équation :



a du plan du sol de la chambre

b du plan du plafond de la chambre

c des plans des murs latéraux

18 Trouver l'équation du plan contenant la droite
L_1: $\vec{r} = (0 ; 3 ; -5) + t_1 (6 ; -2 ; -1)$ et parallèle à la droite
L_2 : $\vec{r} = (1 ; 7 ; -4) + t_2 (1 ; -3 ; 3)$

19 Trouver la mesure de l'angle entre les deux plans dans chacun des cas suivants:

a $L_1 : 2x - y + z = 5$; $L_2: 3x + 2y - 2z = 1$

b $L_1: \vec{r} \cdot (2 ; 1 ; -1) = 4$; $L_2: \vec{r} \cdot (3 ; -2 ; 0) = 7$

c $L_1 : y = 4$; $L_2: x - 3y + 5z = 1$

Questions à plusieurs conclusions:

20. Soient A, B, C er D quatre points du plan ayant pour vecteurs de position respectifs par rapport au point d'origine O les vecteurs $-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$; $2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $-\overrightarrow{x}-2\overrightarrow{y}+2\overrightarrow{z}$, $7\overrightarrow{x}-4\overrightarrow{y}+2\overrightarrow{z}$
   - **a** Trouver un vecteur directeur orthogonal au plan ABC
   - **b** Démontrer que la longueur de la perpendiculaire abaissée du point D sur le plan ABC est égale à $2\sqrt{6}$
   - **c** Démontrer que les deux plans ABC et DBC sont perpendiculaires.
   - **d** Trouver l'équation de la droite d'intersection des deux plans ABC et ODB

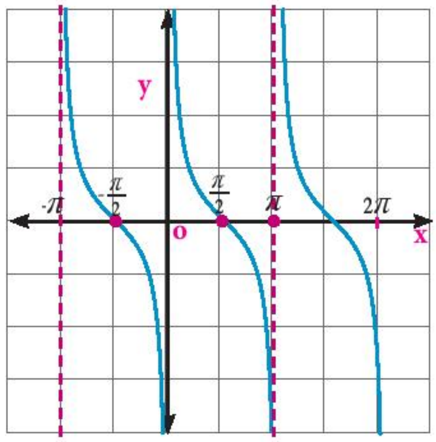
21. Soient X un plan contenant les points A(1 ; 4 ; 2) , B(1 ; 0 ; 5) et C(0 ; 8 ; –1) et Y plan contenant le point (2 ; 2 ; 3) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$
   - **a** Trouver l'équation cartésienne du Plan X
   - **b** Trouver l'équation cartésienne du Plan Y
   - **c** Si le point (p ; 0 ; f) appartient aux deux plans X et Y, trouver la valeur de p et f.
   - **d** Trouver l'équation vectorielle de la droite d'intersection des deux plans X et Y
   - **e** Si le point (1 ; 1 ; k) est à égales distances des deux plans X et Y , trouver les valeurs possibles de k

deuxièmement:

Calcul différentiel et intégral

Conditions préalables au calcul différentiel et intégral

la defferentiation l'inverse des fenctions trigonométrigues



y = cotg x

1 - La dérivée de la fonction cotangente

Si $y = \text{cotg } x$ où $x \in R$, $x \neq n\pi$, $n \in z$

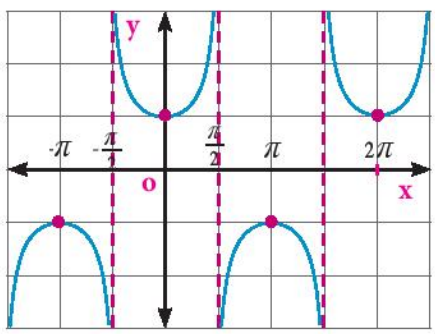
alors: $\frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cosec}^2 x$

remarquez que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\text{tg } x}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \frac{\sin x \times (-\sin x) - \cos x \times \cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -\text{cosec}^2 x$$

La dérivée de la fonction sécante



y = sec x

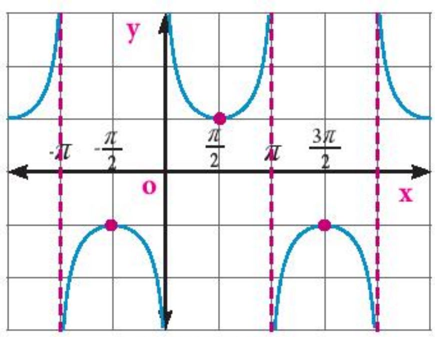
Si $y = \sec x$ où :

$x \in R$, $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in Z$

alors:

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$ **(justifiez)**

3- La dérivée de la fonction cosécante :



y = cosec x

Si $y = \text{cosec } x$ où

$x \in R$, $x \neq n\pi$, $n \in Z$

Alors : $\frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$ **justifiez**

Exemple

1 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = 3\,x^5 + 4\ \text{cotg}\ x$

b $y = 3\sec x - 5\tan x$

c $y = x^3\ \text{cosec}\ x$

Solution

a $\frac{dy}{dx} = 3 \times 5x^4 + 4\,(-\text{cosec}^2 x) = 15\,x^4 - 4\ \text{cosec}^2 x$

b $\frac{dy}{dx} = 3\,(\sec x \tan x) - 5\sec^2 x = \sec x\,[3\tan x - 5\sec x]$

c $\frac{dy}{dx} = 3\,x^2\ \text{cosec}\ x + x^3\,(-\text{cosec}\ x\ \text{cotg}\ x) = x^2\ \text{cosec}\ x\,[3 - x\ \text{cotg}\ x]$

Intégral des fonctions trigonométriques

Intégral infinie
$\int \sin x\, d\,x = -\cos x + c$
$\int \cos x\, d\,x = \sin x + c$
$\int \sec^2 x\, d\,x = \text{tg}\ x + c\ ;\ x \neq \frac{2n+1}{2}\pi\ ;\ n \in Z$
$\int \text{cosec}^2 x\, d\,x = -\text{cotg}\ x + c;\ x \neq n;\ \pi \in Z$
$\int \sec x\ \text{tg}\ x\, d\,x = \sec x + c\ ;\ x \neq \frac{2n+1}{2}\pi\ ;\ n \in Z$
$\int \text{cosec}\ x\ \text{cotg}\ x\, d\,x = -\text{cosec}\ x + c\ ;\ x \neq n;\ \pi \in Z$

Unité 1

Differentiation et ses Applications

Introduction de l'unité

Dans vos études précédentes de fonctions , vous avez étudié les fonctions explicites d'une variable sous la forme y = f (x) , des opérations sur les fonctions et leur composé. Vous avez déjà étudié la dérivabilité de la fonction continue sur un ensemble de définition. Vous pouvez déterminer la dérivée première des fonctions algébriques et des fonctions trigonométriques.

Dans cette unité,on continue les études des la dérivation des fonctions trigonométriques et des fonctions dont on ne peut pas séparer ses variables car les variables reliant par une relation implicite ou par un paramètre. Ce qui nécessite l'étude d'autre méthode de la dérivation comme la dérivation implicite et la dérivation paramétrique qui dépend en chêne. On chérche aussi la dérivée de la fonction dérivée (la dérivée séconde) à l'étude de la dérivation sucséssive qui nous pérmet d'étudier plusieurs applications de la vie.

Dans cette unité on s'interesse des applications importentes de la dérivée dans plusieurs domaines, sportif, phisique, économique, biologique, de l'étude des équations de la tangente et de la normale de la courbe et la dérivation liée au temps qui nous aident a symboliser et résoudre les problèmes.

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de:

- Déterminer la dérivées des fonctions trigonométriques sec x , cosec x , cotg x
- Déterminer la dérivée des fonctions(explicite – implicite – paramètrique)
- Déterminer la dérivée sucséssives (première et deuxième) de déffirentes fonctions et comment les représenter.
- Déterminer les équation de la tangente et de la normale d'une courbe en l'un de ses points
- Déterminer la dérivée liée au temps(le taux) et ses applications phisiques
- Symboliser les problémes de la vie et économiques

Vocabulaires de base

- Dérivation
- Dérivée première
- Fonction explicite
- Fonction implicite
- intermédiaire (Paramètre)
- Dérivation implicite
- Dérivation paramètrique
- Dérivées succéssives
- Taux
- Taux liés

Aides pédagogiques

- Calculatrice graphique
- Ordinateur avec des logiciels de graphisme

Leçons de l'unité

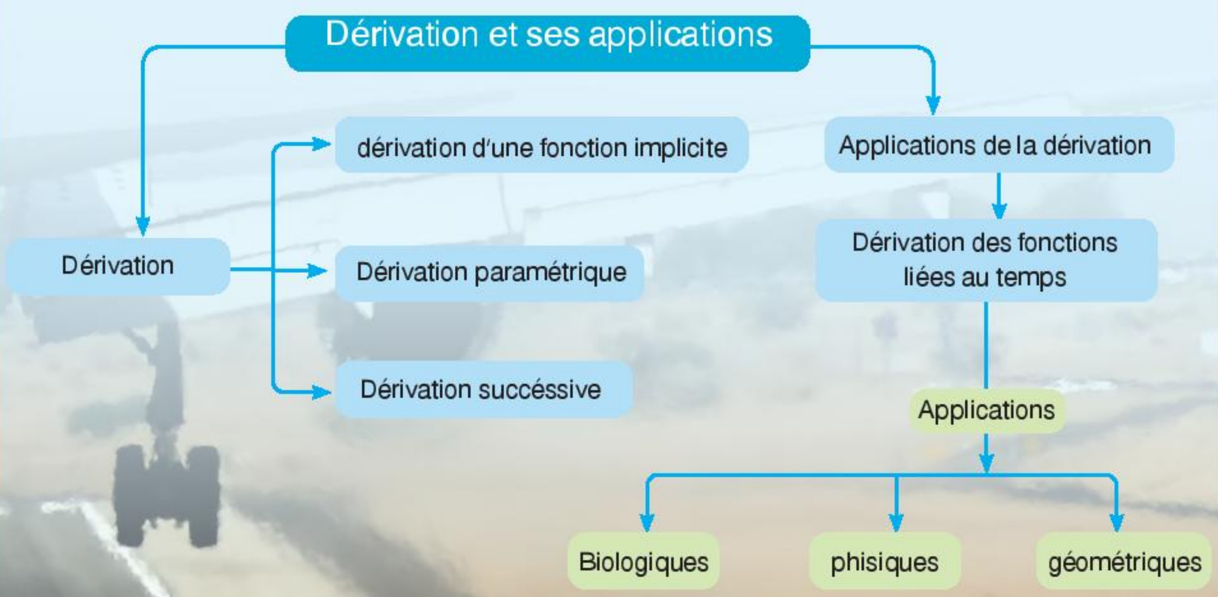
Leçon (1 - 1): Dérivation d' une fonction implicite ou paramétrique

Leçon (1 - 2): Dérivation succéssive d' une fonction

Leçon (1 - 3): Dérivation les fonctions exponentielles et logarithmiques

Leçon (1 - 4): Dérivation des fonctions liées au temps

Organigramme de l'unité



1 - 1 Dérivation d'une fonction implicite ou paramétrique

Apprendre

- Dérivation implicite
- Dérivation paramétrique

Vocabulaires de base

- Relation
- Fonction explicite
- Fonction implicite
- Paramètre

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

Dérivation implicite

On a déjà trouvé la dérivé d'une fonction sous la forme $y = f(x)$ et c'est une fonction explicite de la variable indépendante x où on détermine la valeur de y selon la valeur de x par exemple :

$y = 4x^3 - 5x + 2$ et alors $y' = 12x^2 - 5$

mais, si la relation entre y et la variable x est une relation de x et y à la fois par exemple :

$x y + y - 4 = 0$ (1) $\qquad x^2 + y^2 - 9 = 0$ (2)

alors chacune des deux équations représente une relation implicite entre x et y et décrit les coordonnées du point (x ; y) de la courbe .

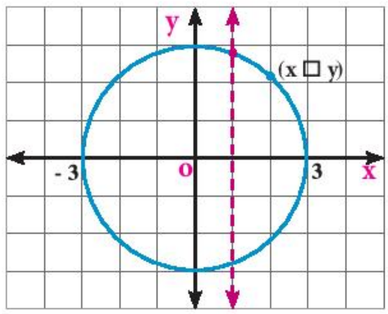
Remarquez que :

1- On peut écrire l'équation $x y + y - 4 = 0$ sous la forme :

$y(x + 1) = 4 \qquad \therefore\ y = \dfrac{4}{x+1}$ où $x \neq -1$

Dans ce cas, la relation est représentée par une fonction explicite .

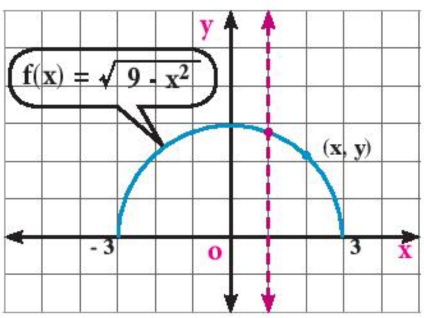
2- L'ensemble des points (x ; y) qui vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 9$, représente un cercle dont le centre est l'origine et de rayon 3 unités. Du graphique, on remarque que la relation $x^2 + y^2 = 9$ n'est pas une fonction.



On peut calculer $y^2 = 9 - x^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

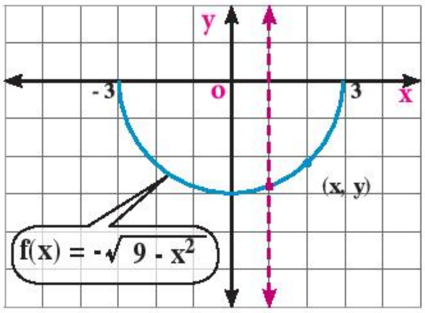
Alors on peut définir la relation $x^2 + y^2 = 9$ par deux fonctions explicites la première $y = \sqrt{9 - x^2}$



dont l'ensemble de définition est [-3 , 3] ; l'ensemble image est [0 , 3] et dérivable pour tout $x \in]-3 , 3[$

La deuxième $y = -\sqrt{9 - x^2}$

dont l'ensemble de définition est $[-3, 3]$; l'ensemble image est $[-3; 0]$ et dérivable pour tout $x \in]-3\ ,\ 3[$



dans la plus par des équations sous forme $f(x\ ;\ y) = 0$, on ne peut pas déterminer y en fonction de x directement car y n'est pas une fonction explicite, mais on peut appeler cette fonction par fonction implicite.

Pour dériver une fonction implicite, on dérive les deux membres de l'équation en respectant la règle de la dérivation en chaîne pour obtenir $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$.

Exemple

1) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si:

a) $x^3 + y^2 - 7x + 5y = 8$

b) $3xy + y^2 = x^2 - 7$

Solution

a) On remarque que l'équation ne représente pas y directement en fonction de x. Pour trouver $\frac{dy}{dx}$, on dérive les deux membres par rapport à x sachant que y est une fonction de x et dérivable:

$$3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} - 7 + 5\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 5) = 7 - 3x^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{7 - 3x^2}{2y + 5}$$

Rappel

Si y est une fonction en x et dérivable alors:

$$\frac{d}{dx}(y)^n = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

b) $\because 3xy + y^2 = x^2 - 7$ on dérive les deux membres par rapport à x.

$$\therefore \frac{d}{dx}(3xy) + 2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$3x\frac{dy}{dx} + y \times 3 + 2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}[3x + 2y] = 2x - 3y \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{3x + 2y}$$

Essayez de résoudre

1) Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si:

a) $x^3 - 5xy + y^3 = 4x$

b) $x^2y + y^2x = 25$

Exemple

2) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si:

a) $\sin 2y = y\cos 3x$

b) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} y = xy$

Solution

a On dérive les deux membres de l'équation par rapport à x

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin 2y) = \frac{d}{dx}(y \cos 3x)$$

$$\cos 2y \times 2\frac{dy}{dx} = y[-\sin 3x \times 3] + \cos 3x\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}[2\cos 2y - \cos 3x] = -3y\sin 3x \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3y\sin 3x}{\cos 3x - 2\cos 2y}$$

b On dérive les deux membres de l'équation par rapport à x

$$\frac{d}{dx}(\tan 2x) + \frac{d}{dx}(\text{cotg } y) = \frac{d}{dx}(xy)$$

$$2\sec^2 2x - \csc^2 y\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$\frac{dy}{dx}[x + \csc^2 y] = 2\sec^2 2x - y \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 2x - y}{x + \csc^2 y}$$

Essayez de résoudre

2 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si:

a $x\cos y + y\cos x = 1$ **b** $3y = \sin x \cos 2y$

Remarque : La forme finale de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ à la dérivation implicite contient x et y. Pour cela, on trouve des difficultés pour calculer la dérivée pour une valeur de x car on a besoin aussi de la valeur correspondante de y qui est aussi difficile de la déterminer de la relation initiale.

Dérivation Paramétrique

Si on représente l'abscisse et l'ordonnée du point (x ; y) comme une fonction en troisième variable t (qui est appelée paramètre) par les deux équations :
$x = f(t)$ et $y = g(t)$ où f et g ont le même ensemble de définition.
Alors les deux équations paramétriques représentent une équation d'une courbe

Apprendre

De la courbe définie sous la forme paramétrique $x = f(t)$, $y = g(t)$

On a $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ où f et g sont deux fonctions dérivables par rapport à t

Exemple

3 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ des courbes suivantes aux points donnés :

a $x = 5t + 3$, $y = 16t^2 + 9$, $t = 5$ **b** $x = 3\cos 2\theta$, $y = 4\sin 3\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solution

a $x = 5t + 3$ $\quad \frac{dx}{dt} = 5$, $\quad y = 16t^2 + 9$ $\quad \frac{dy}{dt} = 32t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{32t}{5}$ $\quad$ et $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=5} = 32$

b $x = 3\cos 2\theta$ $\quad \frac{dx}{d\theta} = 3 \times -\sin 2\theta \times 2 = -6\sin 2\theta$

$y = 4\sin 3\theta$ $\quad \frac{dy}{d\theta} = 4 \times \cos 3\theta \times 3 = 12\cos 3\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{12\cos 3\theta}{-6\sin 2\theta} = \frac{-2\cos 3\theta}{\sin 2\theta}$

en $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ alors $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = -2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Essayez de résoudre

3. Trouvez $\frac{dy}{dx}$ des courbes suivantes aux point donnés

a $x = (t+7)(t-2)$ $\quad$, $\quad y = (t^2+1)(t-2)$ $\quad$, $\quad t = 1$.

b $x = \sec^2\theta - 1$, $\quad y = \tan\theta$, $\quad \theta = \frac{-3\pi}{4}$ $\quad$ **c** $x = \sqrt{3t-2}$, $\quad y = \sqrt{4t+1}$, $\quad t = 2$

Réflexion critique : Trouvez la valeur paramétrique z à laquelle la courbe $x = 2z^3 - 5z^2 - 4z + 12$ $\quad$, $\quad y = 2z^2 + z - 4$ admet une tangente horizontale et une autre verticale.

Exemple

4. Déterminez la dérivée de $(4x^3 - 9x^2 + 5)$ par rapport à $(3x^2 + 7)$

Solution

Posons $y = 4x^3 - 9x^2 + 5$, $\quad z = 3x^2 + 7$ $\quad$ alors $y = f(x)$, $\quad z = g(x)$

Les deux fonctions f ; g sont dérivables par rapport à x sachant que x est un paramètre pour chacune des deux variables y et z

$\therefore$ de la dérivation paramétrique on trouve que :

$\frac{dy}{dz} = \frac{y'}{z'} = \frac{12x^2 - 18x}{6x} = 2x - 3$ $\quad$ **c-a-d.** $\frac{d}{d(3x^2+7)}[4x^3 - 9x^2 + 5] = 2x - 3$

Essayez de résoudre

4. En utilisant la dérivation paramétrique, trouvez :

a la dérivée de $x^2 + 1$ $\quad$ par rapport à $\sqrt{x^2 - 1}$

b la dérivée de $\sqrt{8 + x^2}$ $\quad$ par rapport à $\frac{x}{x+1}$ en $x = 1$

c la dérivée de $x - \sin x$ $\quad$ par rapport à $1 - \cos x$ en $x = \frac{\pi}{3}$

Exercises 1 - 1

Premièrement : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) Si $x^2 + y^2 = 1$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) x b) $\frac{1}{y}$ c) $-\frac{x}{y}$ d) $-\frac{y}{x}$

2) Si $x^2 + y^2 = 2xy$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

3) Si $y^2 - 2\sqrt{x} = 0$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) $\frac{2y}{\sqrt{x}}$ b) $\sqrt{x}$ c) $\frac{x}{y^2}$ d) $\frac{1}{y^3}$

4) Si $x = 2t^2 + 3$, $y = \sqrt{t^3}$, $n = 1$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 2 d) 6

5) La pente de la tangente à la courbe $xy^2 = 3$ au point $(3, 1)$ est égale à :

a) -3 b) $-\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

Deuxièmement : Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

6) $x^2 - 4y^2 + 7 = 0$

7) $x^4 + 3y^4 - 2 = 0$

8) $x^2 - 2xy = 5 - y^2$

9) $x^3 + 6xy = 4y + 3$

10) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$

11) $xy + \sin y = 5$

12) $x \sin y + y \cos x = 0$

13) $x \operatorname{cosec} y = y \operatorname{cotg} x$

14) $x^2 \sin y - y^2 \sin x = 9$

15) $\sin 2x \cos 2y = \frac{3}{4}$

Troisièmement : Déterminez $\frac{dy}{dx}$ des courbes suivantes aux points donnés :

16) $x = 13 - 2t$, $y = 4t^2 - \sqrt{t}$, $t = 4$

17) $x = \sin 2\pi\theta$, $y = \cos 2\pi\theta$, $\theta = \frac{1}{6}$

18) $x = 5 + \sec^2 3\theta$, $y = 1 - \tan 3\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

19) Déterminez la pente de la tangente à la courbe $\sqrt{\pi y} = 3x + 1$ au point $(-\frac{1}{3} ; \frac{\pi}{4})$

20) Déterminez la dérivée de $\frac{x+1}{x-1}$ par rapport à $\sqrt{2x+1}$ en $x = 4$

21) Déterminez la valeur du paramètre t à laquelle la courbe $x = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 9$, $y = 2t^2 + n - 5$ admet:

a) une tangente verticale b) une tangente horizontale.

Dérivation successive

1 - 2

Réfléchissez et discutez

Si $y = f(x)$ où $y = x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ déterminez la dérivée de la fonction f.
Pouvez – vous répéter la dérivation par rapport à x ? Pourquoi ?
La dérivation est –elle finie ? Justifiez votre réponse.

Apprendre

Dérivées successives

- **Si** $y = f(x)$ où f est une fonction dérivable par rapport à x, alors sa première dérivée est $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ et représente une nouvelle fonction .
- **Si** la première dérivée est dérivable par rapport à x, alors sa dérivée est $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et est appelée la dérivée seconde de la fonction f et représente une autre fonction noté $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$
- **Si** on répète la dérivation, on obtient la troisième dérivée de la fonction f et noté $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

Les dérivées à partir de la deuxième sont appelées les dérivées successives et la nième dérivée noté comme ce qui suit :

$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ où n est un nombre entier positif

On remarque que :

1- $\frac{d^2y}{dx^2}$ se lit la seconde dérivée de y par rapport à x

2- Il ya une différence entre $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, La premier est la seconde dérivée et la deuxième est le carré de la première dérivée.

Exemple

(1) Déterminez la seconde dérivée dans ce qui suit:

(a) $y = 2x^4 + 3x - 5$ (b) $y = \frac{x+1}{x-1}$

Apprendre

- *Déterminer les Dérivées successives de la fonction*

Vocabulaires

- *Ordre*
- *Dérivée*

Aides pédagogiques

- *Calculatrice scientifique*

(c) $y = \sin(3x - 2)$ (d) $y = \sqrt{3x - 2}$

Solution

(a) $\because y = 2x^4 + 3x - 5 \, , x \in R$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 8x^3 + 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2$

(b) $\because y = \frac{x+1}{x-1} \, , x \neq 1$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \, , x \neq 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[-2(x-1)^{-2}] = \frac{4}{(x-1)^3} \, , x \neq 1$$

(c) $\because y = \sin(3x - 2) \, , x \in R$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 3\cos(3x - 2) \, , \frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin(3x - 2)$

(d) $\because y = \sqrt{3x - 2} \, , x > \frac{2}{3}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \, , x > \frac{2}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{9}{4\sqrt{(3x-2)^3}} \, , x > \frac{2}{3}$$

Essayez de résoudre

1) Déterminez la troisième dérivée dans ce qui suit:

(a) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ (b) $z = (2n - 1)^4$

(c) $f(x) = \cos(2x + \pi)$ (d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Réflexion critique: Si $y = \sin ax$, découvriez le modèle de la dérivation successive puis trouvez $y^{(25)}$

Exemple

2) Si $y^2 + 2xy = 8$, démontrez que : $(x + y)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \text{zero}$

Solution

(a) $\because y^2 + 2xy = 8$, **on dérive les deux membres par rapport à x**

$\therefore 2y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ **on divise par 2**

$(x + y)\frac{dy}{dx} + y = 0$ **on dérive les deux membres par rapport à x**

$\therefore (x + y)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$

alors $(x + y)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

Essayez de résoudre

2) (a) Si $x^2 + y^2 = 9$, **Démontrez que :** $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

(b) Si $y = \text{tg}\, x$, **Démontrez que :** $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1 + y^2)$

Équations paramétriques :

Exemple

3 Si $x = 2n^3 - 5$, $y = 6n^2 + 1$ trouvez $\frac{d^2y}{dx^2}$ en t = 1

Solution

On dérive chacun de x et y par rapport au paramètre t

$\therefore \frac{dx}{dn} = 6\,n^2$, $\frac{dy}{dn} = 12\,n$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{12n}{6n^2} = 2\,n^{-1}$, $n \neq 0$

alors $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,[\,2n^{-1}] = -\,2n^{-2} \times \frac{dn}{dx}$

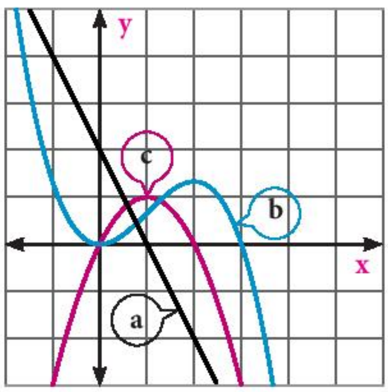
$= \frac{-2}{n^2} \times \frac{1}{6n^2} = -\,\frac{1}{3n^4}$, $n \neq 0$

en n = 1 $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{1}{3}$

Essayez de résoudre

3 Si $x = z^2 - 2z$, $y = z^2$

Déterminez $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ en z = 2



Réflexion critique : La figure ci-contre indique les représentations graphiques des f (x) ; f'(x) ; f'' (x) où f est une fonction polynôme. Déterminez la courbe représentative de chaque fonction.

Activité

En utilisant la logiciel geogebra ou autre logiciel, tracez les courbes représentatives des fonctions suivante et leurs première et deuxièmes dérivées puis inscrivez vos notes.

a $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 12$

b $g(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + 4$

Est – ce que vos notes et votre décision au réflexion critique sont convenables ?

Exercises 1 - 2

Déterminez la troisième dérivée dans ce qui suit :

(1) $y = x^5 - 4x^3 + 3$

(2) $y = \dfrac{2x}{x+1}$

(3) $y = \sin(2x - 7)$

(4) $y = \cos(\pi - 3x)$

(5) $y = \sin x \cos x$

(6) $y = \sqrt{2x - 5}$

Répondez aux questions suivantes :

(7) Si $3x^2 + 5 = 2xy$, Démontrez que : $x \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 3$

(8) Si $x^2 + y^2 = 4$, Démontrez que : $y^3 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4 = 0$

(9) Si $y = 3\cos(2x + 1)$, Démontrez que : $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

(10) Si $xy = \sin x \cos x$, Démontrez que : $x \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 0$

(11) Si $y = x \sin x$, Démontrez que : $x \dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(12) Si $y = \sec x$, Démontrez que : $y \dfrac{d^2y}{dx^2} + (\dfrac{dy}{dx})^2 = y^2(3y^2 - 2)$

(13) Si $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 3$, $\dfrac{dz}{dx} = x^2 - 1$, Déterminez : $\dfrac{d^2y}{dz^2}$ en $x = 2$

(14) Si $x = 3n^2 - 1$, $y = n^3 + 2$, Déterminez : $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en $n = 4$

(15) Si $x = \dfrac{z+1}{z-1}$, $y = \dfrac{z-1}{z+1}$, Déterminez : $\dfrac{dy}{dx}$ en $z = 2$

(16) Si $x = \sec z$, $\sqrt{y} = \tan z$, Démontrez que : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$

Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques

1 - 3

Définition : La definition du nombre e par la relation :

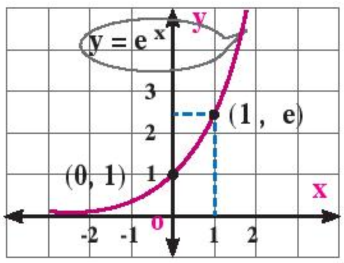
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots \infty$$

Apprendre

La fonction exponentielle de base le nombre népérien

Elle est une fonction dont la base est e ,
$f(x) = e^x$, $x \ni \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \,,$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Remarquez

1) L'ensemble de définition f où $f(x) = e^x$ est $\mathbb{R}$ et son ensemble images est $]\,0, \infty\,[$

2) La courbe de la fonction passe par les points (0 , 1) et (1 , e)

3) $f(x) = e^x$ est une fonction injective admet une réciproque qui est appelée fonction logarithme népérien.

4) On utilise le symbole exp (x) pour tracer la fonction f dans un logiciel.

5) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \infty$

Apprendre

- Dérivation des fonctions exponentielles
- Dérivation des fonctions logarithmiques
- Dérivation logarithmiques
- Dérivées successives des fonctions exponentielles
- Symbolisez les problèmes

Vocabulaires de base

- Dérivée
- Dérivation en chaîne
- Première dérivée
- Dérivation logarithmiques

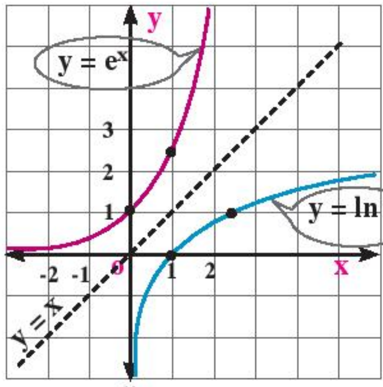
Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

Fonction logarithme népérien

Elle est une fonction logarithmique de base e , $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

Remarquez:



1) L'ensemble de définition f où $f(x) = \ln x$ est $\mathbb{R}^+$ et son ensemble images est $\mathbb{R}$

2) La courbe de la fonction passe par les points (1 ; 0) et (e ; 1)

3) Elle est une fonction réciproque de la fonction $y = e^x$

4) On utilise le symbole ln (x) pour tracer la fonction dans un logiciel.

5) Pour déterminer une valeur approchée de ln 10, on doit taper les clés:

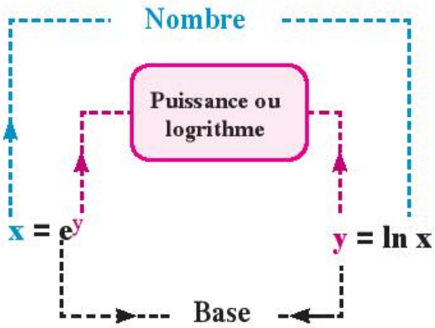
Start → ln 1 0 =

On trouve que ln 10 = 2.302585093 à 9 décimale près.

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$,

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Propriétés de logarithme népérien



Le logarithme népérien a les mêmes propriétés du logarithme déjà étudiées.

Si $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ alors :

1) la forme $\ln x = y$ est équivalant à la forme $e^y = x$

2) $e^{\ln x} = x$

3) $\ln e = 1$

4) $\ln 1 = 0$

5) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ **(propriété du changement de la base)**

Pour tout $x , y \in \mathbb{R}^+$, $n \ni \mathbb{R}$

6) $\ln xy = \ln x + \ln y$

7) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$

8) $\ln x^n = n \ln x$

9) $\ln x \times \ln e = 1$

Apprendre

La dérivée de la fonction logarithme népérien

Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

$$\because\ e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \infty$$

par la dérivé on par rapport x

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots\ldots \infty$$
$$= \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \infty$$
$$= e^x$$

Exemple

La dérivée de la fonction logarithme népérien

1 Déterminez la dérivée première dans ce qui suit:

a $y = x2 + 3ex$ b $y = x3\ ex$ c $y = \dfrac{2\ e^x}{x+1}$

Solution

a $\because y = x^2 + 3\ e^x$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = 2x + 3\dfrac{d}{dx}(e^x) = 2x + 3\ e^x$

b $\because y = x^3\ e^x$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = x^3\ \dfrac{d}{dx}(e^x) + e^x\ \dfrac{d}{dx}(x^3)$

$= x^3\ e^x + 3\ x^2\ e^x = x^2\ e^x\ (x + 3)$

c $\because y = \dfrac{2\ e^x}{x+1}$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)\dfrac{d}{dx}(2e^x) - 2e^x\ \dfrac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2xe^x}{(x+1)^2}$

Essayez de résoudre

1 Déterminez $\dfrac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = 2e^x + \cos 2x$ b $y = e^x \sin x$ c $y = \dfrac{e^x}{\text{tg } x}$

Reflexion critique : Quelle est la relation entre la pente de la tangente de la courbe $y = e^x$ à un point quelconque de la courbe et l'ordonnée de ce point ? vérifiez votre réponse.

Dérivation en chaîne

Si z est une fonction dérivable par rapport à x , $f(z) = e^z$ **alors :** $\frac{d}{dx}(e^z) = e^z \cdot \frac{dz}{dx}$

Exemple

(2) Déterminez la dérivée première dans ce qui suit :

(a) $y = e^{3x^2+5}$ (b) $y = 3e^{\sec x}$ (c) $y = (e^{3x} - e^{-2x})^5$

Solution

(a) $\because y = e^{3x^2+5}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{3x^2+5} \times \frac{d}{dx}(3x^2 + 5) = 6x\, e^{3x^2+5}$

(b) $\because y = 3e^{\sec x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 3\, e^{\sec x} \times \frac{d}{dx}(\sec x) = 3\, e^{\sec x} \cdot \sec x \tan x$

(c) $\because y = (e^{3x} - e^{-2x})^5$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 5\,(e^{3x} - e^{-2x})^4\, [3e^{3x} + 2e^{-2x}]$

Essayez de résoudre

(2) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

(a) $y = 2x + e^{6x}$ (b) $y = \frac{1}{2} e^{7-x^2}$ (c) $y = (e^{2x} + e^{-2x})^3$

Apprendre

$a = e^y \rightarrow a = e^{\ln a}$

$\ln a = y \ln e$

$y = \ln a$

Dérivation de la fonction logarithmique de base a

Si $f(x) = a^x$ **alors** $f'(x) = a^x \ln a$

Remarquez que $a = e^{\ln a}$ **(des propriétés de logarithme)**

$\therefore a^x = \left[e^{\ln a}\right]^x = e^{x \ln a}$

alors $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x \ln a} \times \ln a = a^x \times \ln a$

en générale : $\frac{d}{dx}(a^z) = a^z \ln a \cdot \frac{dz}{dx}$

Exemple

Dérivation de la fonction exponentielle

(3) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

(a) $y = 5 \times 6^x$ (b) $y = 3^{(3x^2 - 5x + 2)}$ (c) $y = e^{\sin x} \times 2^{-5x}$

Solution

(a) $\because y = 5 \times 6^x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \frac{d}{dx}(6^x) = 5 \times 6^x \ln 6$

b $\because\ y = 3^{3x^2 - 5x + 2}$ $\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = (6x - 5) \times 3^{(3x^2 - 5x + 2)} \times \ln 3$

c $\because\ y = e^{\sin x} \times 2^{-5x}$ $\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(2^{-5x}) + 2^{(-5x)}\frac{d}{dx}e^{\sin x}$

$$= e^{\sin x}[-5 \times 2^{-5x} \ln 2] + 2^{-5x}[e^{\sin x} \cos x]$$

$$= 2^{-5x} e^{\sin x}[\ln\ 2^{-5} + \cos x]$$

Essayez de résoudre

(3) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = 5^{x^2 + 2x}$ $\qquad$ **b** $y = 2^{\sec^2 x}$ $\qquad$ **c** $y = e^{2x}\ a^{x^2 - 5}$

Apprendre

Dérivation de la fonction de logarithme népérien

> **Si** $f(x) = \ln x,\ x > 0$ **alors** $f'(x) = \frac{1}{x}$

Remarquez que la fonction logarithmique est une fonction réciproque de la fonction exponentielle

Si $y = \ln x$ $\qquad$ **alors** $x = e^y$ $\qquad$ **(1)**

On dérive les deux membres de la relation **(1)** par rapport à x $\qquad \therefore 1 = e^y \frac{dy}{dx}$ $\qquad$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** : on obtient $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $\qquad$ **c'est-à-dire:** $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Exemple

Dérivation de la fonction de logarithme népérien

(4) Déterminez la dérivée première dans ce qui suit:

a $y = 3x + \ln x$ $\qquad$ **b** $y = (2x^5 - 3)\ln x$ $\qquad$ **c** $y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

Solution

a $\because y = 3x + \ln x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 3 + \frac{d}{dx}(\ln x) = 3 + \frac{1}{x}$

b $\because y = (2x^5 - 3)\ln x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = (2x^5 - 3)\frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(2x^5 - 3)$

$$= (2x^5 - 3) \times \frac{1}{x} + 10x^4 \ln x$$

$$= \frac{1}{x}[(2x^5 - 3) + 10x^5 \ln\ x]$$

c $\because y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\ln x + 1\left(-\frac{1}{x}\times\right)\ln x - 1\right)\times\frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2} = \frac{2}{x(\ln x + 1)^2}$

Essayez de résoudre

4 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = 5 - 3 \ln x$ b $y = x2 \ln x$ c $y = \frac{1 - 2 \ln x}{\ln x}$

Reflexion critique : Quelle est la relation entre la pente de la tangente de la courbe y =ln x à un point quelconque de la courbe et l'ordonnée de ce point ? vérifiez votre réponse.

Dérivation en chaîne

- **Si** z est une fonction dérivable par rapport à x , f(z) = ln z

alors : $\frac{d}{dx}[\ln z] = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx}$

- **Si** $x < 0$, **alors:** $\frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$

- **n général** $\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$

, $\frac{d}{dx}[\ln |z|] = \frac{z'}{z}$ où z est une fonction dérivable par rapport à x.

Exemple

5 Déterminez $\frac{d}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = \ln(2x3 + 9)$ b $y = x4 \ln x3$ c $y = \ln \frac{x^2}{x+7}$

Solution

a $\because y = \ln(2x^3 + 9) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^3+9} \times \frac{d}{dx}(2x^3 + 9) = \frac{6x}{2x^3+9}$

b $\because y = x^4 \ln x^3 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = x^4 \frac{d}{dx}(\ln x^3) + \ln x^3 \frac{d}{dx}(x^4)$

$= x^4 \times \frac{1}{x^3} \times 3x^2 + \ln x^3 \times 4x^3$

$= 3x^3 + 4x^3 \ln x^3 = x^3 [3 + 4 \ln x^3]$

c $\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{x^2}{x+7}\right) = \frac{x+7}{x^2} \times \frac{(x+7)(2x) - x^2 \times 1}{(x+7)^2} = \frac{x+14}{x(x+7)}$

Essayez de résoudre

5 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = \ln(7^x - 3)^2$ b $y = 2x^2 \ln x^3$ c $y = \frac{x}{\ln x}$

Apprendre

Dérivation de la fonction logarithmique de base a

$$\text{Si } f(x) = \log_a x \text{ , **alors** } f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Remarquez $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$

Alors $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

En général $\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a z) = \frac{1}{z \ln a} \cdot \frac{dz}{dx}}$

Rappel

Des proprieties de logarithme

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\ln a \times \log_a e = 1$

Dérivation de la fonction de logarithmique

Exemple

6 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = \log_3 x$ b $y = \log_5 (3x - 2)$ c $y = \log (2x - 3)2$

Solution

a $\because y = \log_3 x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{x\ln 3}$

b $\because y = \log_5 (3x - 2)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x - 2)\ln 5}$

c $\because y = 2\log |2x - 3|$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2}{(2x - 3)\ln 10} = \frac{4}{(2x - 3)\ln 10}$

Essayez de résoudre

6 Déterminez la pente de la tangente des courbes suivantes aux valeurs de x données:

a $y = \log_2 5x$, $x = 2$ b $y = 4\log(3x + 1)$, $x = 1$

c $y = \log_2 (2x^2 - 3)^4$, $x = 1$ d $y = 3(\log x)^2$, $x = 3$

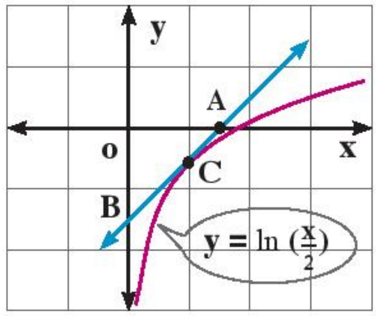
Exemple

7 **Applications géométriques:** Si $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente à la courbe $y = \ln \frac{x}{2}$ au point C (1 ; y) et coupe l'axe des abscisses au point A et l'axe des ordonnées au point B. Déterminez la longueur de $\overline{AB}$

Solution

Pour déterminer la longueur de $\overline{AB}$, on suit le diagramme ci –contre

équation dfe la $\overleftrightarrow{AB}$ tangente → points d'intersections A, B → longueur $\overline{AB}$



La pente de la tangente à un point quelconque :

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \times 2}{x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente à la courbe au point C (1 ; y)

Alors $y = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ c'est –à-dire C (1 , - ln 2), et en ce point

$\frac{dy}{dx} = 1$, et l'équation de la tangente $\overleftrightarrow{AB}$ en C est :

$y + \ln 2 = x - 1$

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ coupe l'axe des abscisses au point A $\quad \therefore$ A (1 + ln 2 , 0)

et coupe l'axe des ordonnée au point $\quad \therefore$ B (0 ; - 1 - ln 2)

Alors $(AB)^2 = (1 + \ln 2)^2 + (1 + \ln 2)^2 \quad \therefore AB = \sqrt{2}\,(1 + \ln 2)$

Essayez de résoudre

7) Si la normale à la courbe $y = \ln 2x$ au point A (1 ; ln 2) coupe l'axe des abscisses au point B Déterminez la longueur de $\overline{AB}$ à trois décimales près.

Applications de mathématiques

Dérivation logarithmique

On peut représenter une relation sous forme logarithmique par calculer le logarithme népérien de deux membres de la relation et on utilise les propriétés de logarithme pour simplifier la forme avant de faire la dérivée.

Exemple

8) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit:

a) $y = (x^3 + 5)^x$ b) $y = [\sin x]^{\tan x}$

Solution

a) $\because y = (x^3 + 5)^x$ **On calcule le logarithme népérien de deux membres de la relation**

$\therefore \ln y = x \ln (x^3 + 5)$ **On dérive les deux membres de la relation par rapport à x**

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln (x^3 + 5) + \frac{x}{x^3 + 5} \times 3x^2$ On mutiplie les deux membres $\times$ $y = (x^3 + 5)^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^3 + 5)^x \left[\frac{3x^3}{x^3 + 5} + \ln (x^3 + 5)\right]$

b $\because\ y = [\sin x]^{\tan x}$ **On calcule le logarithme népérien des deux membres de la relation**

$\ln y = \tan x \ln \sin x$ **On dérive les deux membres de la relation par rapport à x**

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan x \times \frac{d}{dx}(\ln \sin x) + \ln \sin x \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x + \ln \sin x \times \sec^2 x$$

$$= 1 + \sec^2 x \log_e \sin x$$ **On mutiplie les deux membres $\times y = [\sin x]^{\tan x}$**

$$\therefore \frac{dy}{dx} = [\sin x]^{\tan x}(1 + \sec^2 x \ln \sin x)$$

Essayez de résoudre

8 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = x2x$ **b** $y = (\sin x)x$ **c** $y2 = 3x \times 2y$

9 **Vérification d'une relation :** Si $y = e^{-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ où $-1 > x > 1$, Démontrez que: $(1 - x^2)\, y' = x^2 y$

Solution

$\because\ y = e^{-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **on calcule le logarithme de base e des deux membres**

$$\therefore \ln y = \ln e^{-x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$\ln y = -x + \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

on dérive les deux membres de la relation par rapport à x

$$\frac{1}{y} \times y' = -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right]$$

$$\frac{y'}{y} = -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right]$$

$$\frac{y'}{y} = -1 + \frac{1}{1-x^2} = \frac{-1+x^2+1}{1-x^2}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{1-x^2} \qquad \therefore (1-x^2)\, y' = x^2 y$$

Essayez de résoudre

9 Si $y = ae^{\frac{b}{x}}$, Démontrez que : $x y y'' + 2 y y' - x y'^2 = 0$

Exercices 3 - 1

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1) Si $f(x) = e^{3x}$, alors $f'(x)$ est égale à :

a) e^{3x} b) $3e^{3x}$ c) $9e^{3x}$ d) $3e^{2x}$

2) Si $f(x) = ae^{x}$, alors $f'(-2)$ est égale à :

a) $-f(2)$ b) $-f'(2)$ c) $-f(-2)$ d) $f(-2)$

3) La courbe de la fonction $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$ est la même courbe de la fonction g : $g(x) = \ln x$ suivant la translation:

a) $(1\,;\,2)$ b) $(1\,;\,-2)$ c) $(-2\,;\,1)$ d) $(2\,;\,1)$

4) Le rapport de la pente de la tangente à la courbe $y = \ln 3\sqrt{x+1}$ et la pente de la tangente à la courbe $y = \ln 5\sqrt{x+1}$ en $x = a$ est:

a) $3 : 5$ b) $5 : 3$ c) $1 : 1$ d) $\ln 3 : \ln 5$

Déterminez la dérivée première dans ce qui suit :

5) $y = e^{3x^5}$

6) $y = e^{x^2 - x}$

7) $y = (3^{x-1})^{-2}$

8) $y^2 = e^{5x^2 - 3}$

9) $y = \ln(2x - 7)$

10) $y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + x)$

11) $y = \ln \dfrac{x^2}{x+7}$

12) $y = x^2 \ln x$

13) $y = \log_3 (4x + 9)^2$

14) $y = \dfrac{e^{3x}}{\log x}$

15) $y = \sec e^{x}$

16) $y = 2e^{3x} - 5 \log_2 \dfrac{x}{5}$

Déterminez la pente de la tangente de chacune des courbes suivantes aux valeurs données :

17) $y = \sqrt{x} - 2e^{x}$, $x = \frac{1}{4}$

18) $y = x^2 - 3\ln x$, $x = 2$

19) $y = \frac{1}{4}e^{2x} - 2\ln x$, $x = \frac{1}{2}$

Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

20) $y\, e^{x} = e^{3}$

21) $x \ln y = 58$

22) $y = x^{\sin x}$

23) $y = e^{e^{x}}$

24) $y = e^{x^{e}}$

25) $y = x^{\frac{1}{x}}$

Déterminez $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans ce qui suit :

26) $x = e^{2n}$, $y = n^{3}$

27) $x = 6 \ln n$, $y = n^{2}$

Répondez à ce qui suit :

28) SI $y = x^{2} \ln \frac{x}{a}$, Déterminez $\frac{d^3y}{dx^3}$ en $x = 4$

29) Si $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, Démontrez que $(x^{4} - 1)\, y' + 2x\, y = 0$

30) Déterminez les valeurs de x auxquelles la tangente à la courbe $y = 9x^{3} - 8\ln x$ est parallèle à l'axe des abscisses.

31) Déterminez l'équation de la normale à la courbe $y = 3e^{x}$ à un de ses points dont l'abscisse est égale à -1

1 - 4

Dérivation de fonctions liées au temps

Apprendre

- Notion de la dérivation de fonctions liées au temps
- Méthodes pour résoudre les équation de la dérivation de fonctions liées au temps
- Symboliser et résoudre des problèmes de mathématiques et de physique de la vie

Vocabulaires

- taux
- Taux liés

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- logiciel de graphisme

Détermination les variable et les symbolise

↓

Faire un diagramme de données

↓

Trouver la relation

↓

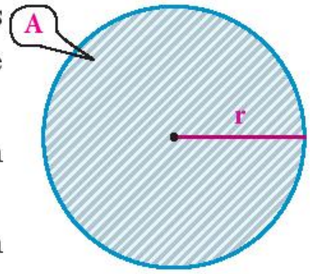
Dérivat)ion de la relation par rapport au temps

↓

Remplacement par les valeurs pour déterminer le taux demandé

Réfléchissez et discutez

Quand une plaque métallique circulaire se mets sous l'effet d'une source de chaleur pendant une période de temps (t) secondes



- La longueur de son rayon (r) est – elle changée en fonction du temps (t) ?

- L'aire de la plaque (A) est – elle changée en fonction du temps (t) ?

- L'aire de la plaque (A) est – elle changée en fonction de la longueur du rayon (r) ? vérifiez votre réponse.

Remarques :

1 - Les deux variables (A) et (r) changent en fonction du temps (t) (fonction au temps) et sont liées par la relation
$A = \pi r^2$ d'où : $A = f(r)$

2 - En dérivant les deux membres de la relation précédente par rapport au temps, on obtient une nouvelle relation entre les dérivations lié au temps d'eux qui appelée l'équation de la dérivation lié au temps
où : $\frac{dA}{dt} = f'(r) \times \frac{dr}{dt}$

3 - Le taux est positif si la variable crois et négatif si la variable décrois en augmentant le temps.

Orale : quel taux est – il positif ?
(se dilater – se contracter – approcher – éloigner – verser - couler – se fondre- accumulation – diminuer – augmenter)

Exemple

gonfler un ballon

1 Le taux d'augmentation du volume d'un ballon est $8\pi\ cm^3/s$, s'il remplie de gaz quand le rayon est 4 cm. Déterminez en ce moment:

a le taux d'augmentation du rayon.

b Le taux d'augmentation de l'aire de la surface.

Solution

Soient le volume du ballon (V), son rayon (r),et son aire (A) des fonctions dérivables par rapport à t.

a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad (1)$$

$\because \frac{dv}{dt} = 8\pi$ cm^3/sec , r = 4cm par la substitution dans l'équation

$\therefore 8\pi = 4\pi(4)^2 \frac{dr}{dt}$ **alors** $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/sec

b $A = 4\pi r^2$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi \times 2r \frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} \qquad (2)$$

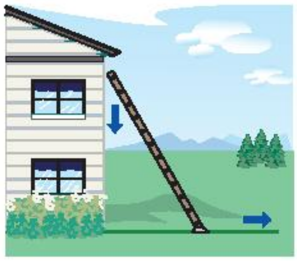
$\because \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/sec , r = 4 cm par la substitution dans l'équation

$\therefore \frac{dA}{dt} = 8\pi \times 4 \times \frac{1}{8} = 4\pi$ cm^2/sec

Essayez de résoudre

1 **Le volume :** Un cube se dilate par la chaleur, Si le taux d'augmentation de son arête est 0,02 cm /s et le taux d'augmentation de son aire est 0,72 cm^2/s pendant un moment quelconque. Déterminez la longueur de son arête en ce moment et le taux d'augmentation de son volume en ce moment .

Exemple Mouvement de l'échelle

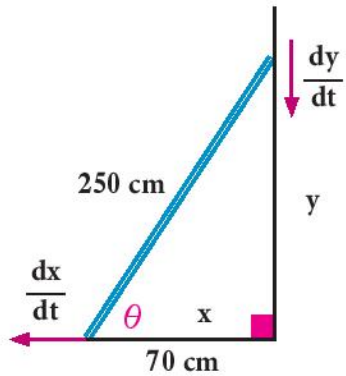


2 Une échelle de 250 cm de longueur s'appuie contre un mur vertical. L'extrémité supérieure de l'échelle se glisse avec un taux de 10 cm/s quand l'extrémité inférieure est à 70 cm du mur. Déterminez :

a Le taux d'éloignement de l'extrémité inférieure de l'échelle.

b Le taux de variation de l'angle entre l'échelle et le sol.

Solution



a Soient : y la distance entre l'extrémité supérieure de l'échelle et le sol, x est la distance entre l'extrémité inférieure de l'échelle et le mur,

Du théorème de Pythagore $x^2 + y^2 = (250)^2$ (1)

On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$ (2)

$\because$ L'extrémité supérieure se glisse vers le bas, alors y diminue

$\therefore \frac{dy}{dt} = -10$ cm /sec

En x = 70 cm et d'équation (1) on trouve que : y = 240 cm

par la substitution dans l'équation (2) on obtient : $\frac{dx}{dt} = -\frac{240}{70} \times -10 = \frac{240}{7}$ cm/sec

alors l'extrémité inférieure de l'échelle éloigné du mur avec un taux de $\frac{240}{7}$ cm /sec

b Soit θ la mesure de l'angle d'inclinaison de l'échelle au sol

$\sin\theta = \dfrac{y}{250}$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$\therefore \cos\theta \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{250} \dfrac{dy}{dt}$ mais $\dfrac{dy}{dt} = -10$ cm/sec en x = 70 cm

$\dfrac{70}{250} \times \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{250} \times -10$ $\therefore \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{7}$ rad/sec

alors la mesure de l'angle diminue avec un taux de $\frac{1}{7}$ rad /s

Essayez de résoudre

2 **Mouvement d'une échelle :** Une échelle repose par son extrémité inférieure à un sol horizontal et par son extrémité supérieure à un mur vertical. Si l'extrémité inférieure s'éloigne du mur avec un taux de 30 cm/s, déterminez le taux de glissement de l'extrémité supérieur quand la mesure de l'angle d'inclinaison de l'échelle au sole est égale à $\dfrac{\pi}{3}$

Réflexion critique : Une fusée de masse 15 tonnes est lancée, sachant que la taux d'échappement du carburant brûlé est constant et est égale à 200 kg/s, trouvez la masse de la fusée 30 secondes après le lancement

Remarque importante : Si $x_\circ$ est la valeur initiale de la variable x (en t = 0) , $\dfrac{dx}{dt}$ est le taux de variation de x par rapport au temps, x est la valeur de la variable après un temps t,

alors : $x = x_\circ + \dfrac{dx}{dt} \times t$

Dans le point de la réflexion critique, utilisez la relation $m = m_\circ + \dfrac{dm}{dt} \times t$ pour vérifier votre réponse.

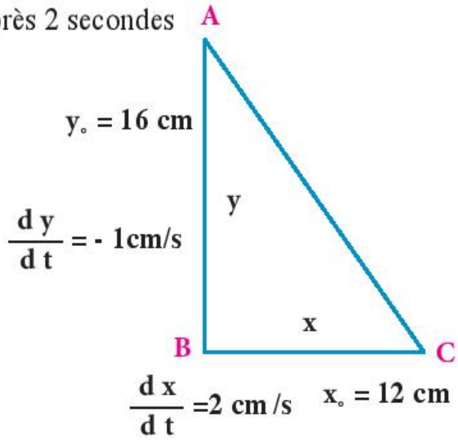
Exemple

Aire

3 Les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont 12 cm et 16 cm. Si la longueur du premier côté augmente avec un taux de 2 cm /s et la longueur de l'autre diminue avec un taux de 1 cm / s.

a Déterminez le taux de variation de l'aire du triangle après 2 secondes

b Quand le triangle devient – il isocèle ?



Solution

a Soient x et y les longueurs des côtés du triangle après (t) secondes, x ; y ; A sont des fonctions au temps:

$\therefore$ $x = 12 + 2t$, $y = 16 - t$

$A = \frac{1}{2} x \times y = \frac{1}{2}(12 + 2n)(16 - t)$

$A = (6 + t)(16 - t)$

on dérive les deux membres par rapport au temps

$\therefore \dfrac{dA}{dt} = (6 + t) \times -1 + (16 - t) = 10 - 2t$ cm^2/s

En t = 2 s $\therefore$ Le taux de variation de l'aire du triangle = 10 - 2 (2) = 6 cm^2/s

b en x = y on a 12 + t = 16 - t $\quad\therefore\ t = \frac{4}{3}$ sec

alors après $\frac{4}{3}$ s , le triangle devient isocèle

Essayez de résoudre

3 **Volume:** Un corps métallique à la forme d'un parallélépipède rectangle de base carré. La longueur de la base augmente avec un taux de 1 cm/min et la hauteur diminue avec un taux de 2 cm / mn. Déterminez le taux d' augmentation de son volume quand la longueur du côté de la base est 5 cm et la longueur de la hauteur est 20 cm, dans combien de minutes le taux d' augmentation du volume du parallélépipède s'annule ?

Exemple

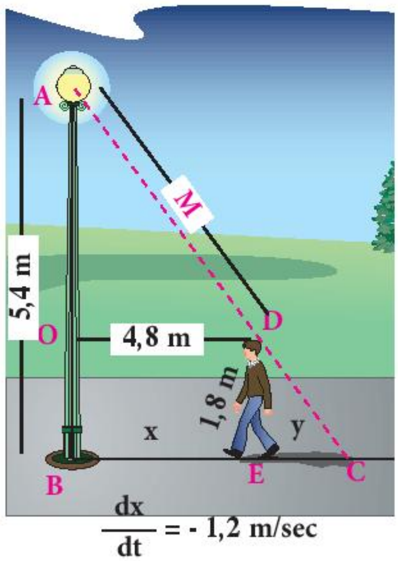
Longueur de l'ombre

4 Un homme de 1,8 mètre de taille s'approche d'un poteau électrique avec un taux de 1,2 m/min. Si la hauteur de la lampe est 5,4 m de la terre, déterminez :

a Le taux de variation de la taille de l'homme.

b Le taux de variation de la distance entre la tête de l'homme et la lampe quand l'homme est à la distance de 4,8 m du poteau.

Solution



Symboliser le problème : Dans la figure ci – contre $\overline{AB}$ est le poteau, le point A est la lampe, $\overline{DE}$ est l'homme et le point C est l'extrémité de l'ombre de l'homme, alors :

x = EB la distance de l'homme à la base du poteau .

y = EC la longueur de l'ombre de l'homme.

M = AD la distance entre la tête de l'homme et la lampe.

Premièrement : $\because \triangle ABC \triangle \sim DEC$

$$\therefore\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{5{,}4}{1{,}8} = \frac{x+y}{y}$$

alors 2 y = x on dérive les deux membres par rapport au temps

$$\therefore\ 2\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{alors } \frac{dy}{dt} = \frac{-1{,}2}{2} = -0{,}6 \text{ mètre/s}$$

Deuxièmement : dans A D O rectangle en (O)

$M^2 = x^2 + (3{,}6)^2$ on dérive les deux membres par rapport au temps t

$2M\frac{dM}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$ at x = 4,8 A f = 6 m

$6\frac{dM}{dt} = 4{,}8 \times -1{,}2$ **c-a-d.** $\frac{dM}{Dt} = -0{,}96$ mètre/sec

Essayez de résoudre

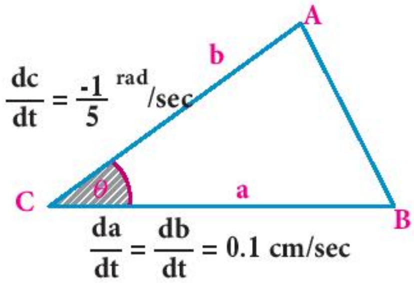
4 **Construction :** Un tuyau de l'eau d'extrémités A et B et de longueur 5 mètres, repose par l'extrémité A sur un sol horizontal et par un de ses points D sur un mur vertical de 3 mètres de longueur. Si l'extrémité A se glisse éloignement du mur avec un taux de $\frac{5}{4}$ m/min. Déterminez le taux d'abaissement de l'extrémité B quand l'extrémité A arrive au sommet du mur.

Exemple **Aire**

(5) Deux côtés d'un triangle dont les longueurs augmentent avec un taux de 0,1 cm/s et la mesure de l'angle compris entre eux augmente avec un taux de $\frac{1}{5}$ rad/s. par quel taux l'aire du triangle varie-t- elle au moment où la longueur de chaque côté est 10 cm?

Solution

Symboliser le problème : posons que dans un moment t les longueurs des côtés du triangle sont a et b , la mesure de l'angle compris entre eux est θ rad , A est l'aire du triangle et sont tous des fonctions dérivables par rapport au temps t Où $A = \frac{1}{2}$ a b $\sin\theta$ on dérive les deux membres par rapport à t



$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} a\, b \frac{d}{dt}[\sin c] + \frac{1}{2} \sin\theta \frac{d}{dt}[a\, b]$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} a\, b \cos c \frac{dc}{dt} + \frac{1}{2}\sin\theta\left[a \frac{db}{dt} + b \frac{da}{dt}\right] \qquad \mathbf{(1)}$$

mais $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0{,}1$, $\frac{dc}{dt} = \frac{1}{5}$

Au moment au la longueur de chaque côté est 10 cm, le triangle est alors équilatérale

Alors $m(\angle\theta) = \frac{\pi}{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ par la substitution dans l'équation **(1)**

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\left[2 \times 10 \times \frac{1}{10}\right]$$

$$= 5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 5{,}866 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Alors en ce moment l'aire du triangle augmente avec un taux de 5,866 cm^2 /sec

Essayez de résoudre

(5) **Aire :** ABC est un triangle rectangle en C. Son aire est constante et est égale à 24 cm^2. Si le taux de variation de b est 1 cm / s, trouvez le taux de variation de a et de m ($\angle$A) quand b est 8 cm.

Réflexion critique : Si x (est la mesure de l'angle en radians) augmente avec un taux constant, Expliquez pourquoi de?

(a) sinus et tangente cet angle augmente de même taux en $x = 0$

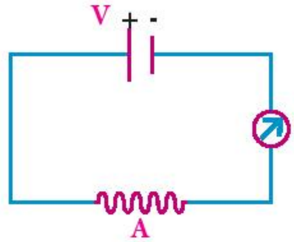
(b) tangente de cet angle augmente d'un taux de 8 fois du taux d'augmentation de sinus en $x = \frac{\pi}{3}$

(c) cosinus de cet angle diminue avec un taux de $\frac{3}{8}$ fois du taux d'augmentation de tangente en $x = \frac{\pi}{6}$

Exemple **lien à la physique**

(6) Dans un circuit électrique fermé si V est Potentiomètres (en volte), I est l'intensité du courant (en Ampère), R est la résistance (en Ohm). Si le Potentiomètres augmente avec un taux de 1 volte/s, et la l'intensité du courant diminue avec un taux de $\frac{1}{2}$ Ampère/s , trouve le taux de la résistance quand V = 12 voltes et I = 2 Ampères .

Solution



On sait que $V = I \times R$ on dérive les deux membres par rapport à t

$\therefore \frac{dv}{dt} = I \frac{dR}{dt} + R \frac{dI}{dt}$

$\because \frac{dv}{dt} = 1$ volt / sec , $\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{2}$ Amperes /sec

$\therefore$ En v = 12 volts , I = 2 Amperes **alors:** $R = \frac{V}{I} = \frac{12}{2} = 6$ ohm

On aura $1 = 2 \times \frac{dR}{dt} + 6 \times -\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{dR}{dt} = 2$ ohm /sec

C'est-à-dire le taux de la résistance en ce moment est 2 ohm /s

Essayez de résoudre

6 Dans l'exemple précédent, calculez le taux de la résistance si l'intensité du courant augmente avec un taux de $\frac{1}{3}$ Ampère/s.

Exercises 1 - 4

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données :

(1) Si le rayon d'un cercle augmente avec un taux de $\frac{4}{\pi}$ cm/s, alors le périmètre du cercle augmente en ce moment avec un taux de

(a) $\frac{4}{\pi}$ cm/s (b) $\frac{\pi}{4}$ cm/s (c) $\frac{1}{8}$ cm/s (d) 8 cm/s

(2) Un cube de glace se fond en conservant sa forme avec un taux de $1 cm^3$/s, alors au moment au son volume est 8 cm^3, le taux de variation de son arête est .... cm / s

(a) $-\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $-\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{6}$

(3) Un corps se déplace sur la courbe de $y^2 = x^3$, si $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ unité / s en y = - 1 alors $\frac{dy}{dx}$ en ce moment est égale à .... unité / s

(a) $-\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{3}{8}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{2}$

(4) Si la pente de la tangente de la courbe y = f(x) en un point quelconque = $\frac{1}{2}$ et l'abscisse de ce point diminue avec un taux de 3 unités / s, alors le taux de variation de son ordonnée est égal à .... unités / s

(a) $-\frac{1}{6}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{3}{2}$

Répondez aux questions suivantes :

(5) Un point se déplace sur la courbe d' équation $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$. Si le taux de variation de son abscisse par rapport au temps au point (3 ; 1) est égal à 4 unités/s, trouvez le taux de variation de son ordonnée par rapport au temps.

(6) Une pierre tombe dans un lac calme qui fait des vagues circulaires. Si son rayon augmente avec un taux de 4 cm/s, déterminez le taux de variation de l'aire du vague à la fin de 5 secondes.

(7) Une plaque à la forme d'un hexagone contracte à cause du frios. Si le taux de variation de son arête est 0,1 cm/s , déterminez le taux de variation de l'aire de la plaque, quand la longueur de son arête est 10 cm.

(8) Une masse de gazes dont la température est constante. Le volume des gazes diminue avec un taux de 2 cm^3/s. Si la pression est inversement proportionnelle au volume et la pression est 1000 gp/cm^2 quand le volume est 250 cm^3. Déterminez le taux de variation du volume par rapport au temps quand le volume est 100 cm^3.

(9) Le gaz s'échappe d'un ballon sphérique avec un taux de 20 cm^3/s. Déterminez le taux de variation du rayon du ballon au moment au le rayon est 10 cm, puis trouvez le taux de variation de l'aire extérieur du ballon au même moment.

10) Une échelle de 5 m de longueur s'appuie contre un mur vertical, et se repose par l'extrémité inférieur sur un sol horizontal. L'extrémité inférieure de l'échelle s'éloigne du mur avec un taux de 4 cm/mn, quand l'extrémité supérieure est à 4 m du sol. Déterminez le taux de glissement de l'extrémité supérieur de l'échelle, puis déterminez le taux de variation de l'angle entre l'échelle et le sol en se moment.

11) Un ballon monte d'un point A de la terre et un dispositif de localisation se trouve au point B qui est à 200 m de A et de même niveau horizontal de A. Dans un moment l'appareil inscrit l'angle d'élévation du ballon qui était $\frac{\pi}{4}$, et il augmente avec un taux de 0,12 rad/mn. Déterminez le taux d'élévation du ballon en ce moment.

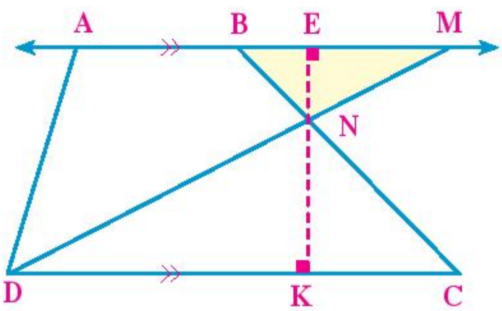
12) Un homme de 180 cm du taille s'éloigne de la base d'une lampe de 3 m de hauteur, avec un taux de 1,2 cm/s. déterminez le taux de variation de la longueur de l'ombre de l'homme. Si la droite passant par la tête de l'homme et la lampe est incliné à la terre par un angle de mesure θ^{rad} quand l'homme est à la distance de x m de la base de la lampe. Démontrez que $x = \frac{6}{5}\cot g\, \theta$, puis déterminez le taux de variation de θ quand l'homme est à distance de 3,6m de la base de la lampe .

13) Un triangle isocèle dont la base est $20\sqrt{3}$ cm . Si chacun de deux côtés diminue avec un taux de 3 cm /h, Déterminez le taux diminution de son aire au moment à la longueur de chacun de deux côtés est égale à la longueur de sa base .

14) **Lien à l'industrie :** Si ll production quotidienne d'une usine pendant une période du temps t, est déterminé par la relation $y = 400\,(1 - e^{-0.30t})$ Unités. Déterminez le taux de variation du nombre des unités produites par rapport au temps pendant le dixième jour.

15) **Application de la vie :** Si la production d'une ruche d'abeille est définie par la relation :
$y = (n + 100)\ln(t + 5)$ en fonction du nombre de jours n.
Déterminez le taux de variation de la production de la ruche en $t = 5$, $t = 15$ et en $t = 20$. Est-ce que la production du mille augmente (ou diminue)?

16) ABCD est un trapeze tel que $\overline{DC} \,//\, \overline{AB}$; sa hauteur est égale á 3cm, DC = 5cm; le point M se deplace sur la demi-droite $\overrightarrow{AB}$ de vitesse 4,8 cm/s du point B. Trouvé le tauxde variation de l' aire du triangle MNB. Au moment tel que MB = 1 cm



Unité 2

Comportement d'une fonction et étude de la courbe

Introduction de l'unité

A partir de la représentation graphique de la courbe d' une fonction, vous pouvez déterminer ses intervalles de monotonie (croissante, décroissante, constante), savoir les valeurs maximales et les valeurs minimales de la fonction et quelques propriétés de cette fonction. En utilisant un logiciel de graphisme, vous pouvez dessiner la fonction et étudier son comportement. Cependant, ceci n'est pas toujours disponible.

Dans cette unité, vous allez savoir plus de techniques dans le dessin de la courbe de la fonction à partir du calcul différentiel et en utilisant les dérivés de cette fonction (première dérivé et deuxième dérivé) pour déterminer ses intervalles de croissance et décroissance, les valeurs maximales et minimales en fonction de la valeur x (valeurs maximales et minimales relatives) et les valeurs maximales et minimales absolues d'une fonction continue sur] a ; b[et la convexité de la courbe de la fonction (vers le haut et vers le bas) ainsi que l'étude de quelques applications pour trouver les valeurs maximales et minimales afin de vous aider à modéliser et résoudre les problèmes mathématiques, physiques, et vitales.

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Utiliser la dérivée première pour étudier la croissance et décroissance d'une fonction dérivable
- Déterminer les valeurs maximales et minimales relatives d'une fonction dérivable
- Déterminer les valeurs maximales et minimales absolues d'une fonction dans un intervalle fermé.
- Trouver les points critiques, les points d'inflexions et la convexité vers le haut et vers le bas.
- Trouver la relation entre la courbe d'une fonction et la dérivée première.
- Etudier le comportement d'une fonction (la monotonie, valeurs maximales et minimales à l'aide de la dérivée première
- Etudier les courbes des fonctions polynômes et dérivés.

Vocabulaires de base

- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Valeurs maximales et minimales
- Valeurs extrémales
- Point critique
- Valeur minimale relative
- Valeur maximale relative
- Valeur extrémale relative
- Valeur extrémale absolu
- convexité
- convexité vers le haut
- convexité vers le bas
- point d'inflexion

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Croissance et décroissance des fonctions.

Leçon (2 - 2): Valeurs maximales et minimales (valeurs exrémeles).

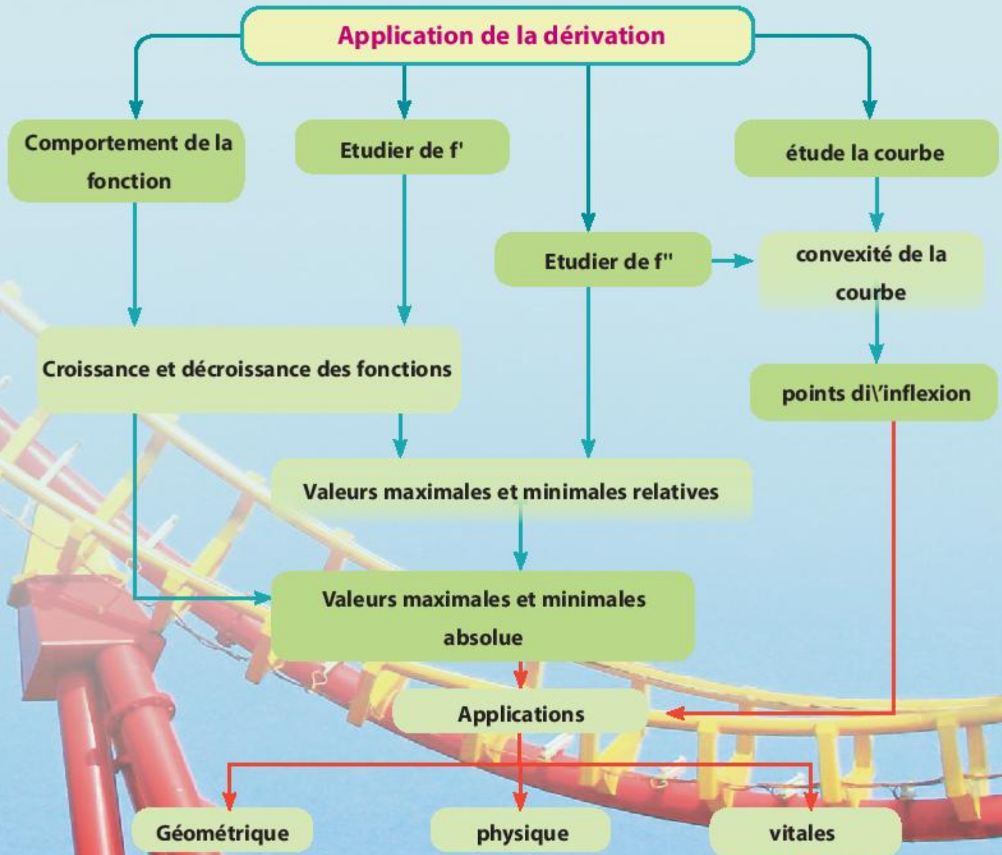
Leçon (2 - 3): De la courbe Etudie.

Leçon (2 - 4): Applications sur les valeurs maximales et minimales.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Organigramme de l'unité



2 - 1 Croissance et décroissance des fonctions

A apprendre

- Utilisation de la dérivée première pour déterminer les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction.
- Applications de la vie sur les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction.

Vocabulaires de base

- Fonction croissante
- Fonction décroissante

Aides pédagogiques

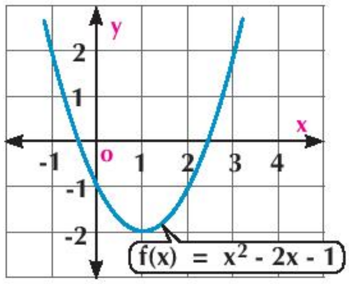
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

Les figures suivantes montrent les courbes des fonctions f et g où

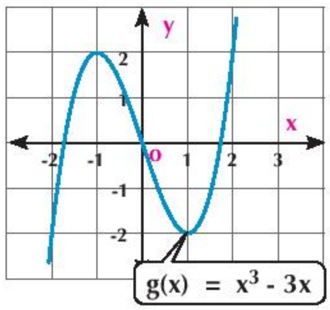
$f(x) = x^2 - 2x - 1$,

$g(x) = x^3 - 3x$



- Déterminez les intervalles de croissance et décroissance de la fonction f
- Trouvez la dérivée première de la fonction f puis étudiez le signe de f'(x) pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle de croissance
- Etudiez le signe de f'(x) pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle de décroissance

Répétez les étapes précédentes pour déterminer le signe de g'(x) dans les intervalles de croissance et décroissance de la fonction g. Que pouvez-vous déduire ?



Quel est la nature de l'angle que fait la tangente de la courbe aux points d'abscisses x dans les intervalles de croissance avec la direction positive de l'axe des abscisses ?

A apprendre

Etude de la monotonie d'une fonction

Trouver f ' (x)

Résoudre l'équation de f ' (x) = 0

Etudier le signe de f ' (x)

f ' (x) < 0 → f est décroissante

f ' (x) > 0 → f est croissante

Etude de la monotonie d'une fonction à l'aide de la dérivée première

Théorème

Soit une fonction f dérivable sur] a , b [:

1- **Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est croissante dans] a , b [**

2- **Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est décroissante dans] a , b [**

Exemple
Détermination des intervalles de croissance et décroissance

(1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Solution

$\because f(x) = x^3 - 3x + 2$ est continue et dérivable dans R

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

On pose $f'(x) = 0$ $\quad\therefore 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ quand $x = -1$ et $x = 1$ $\therefore$ Le domaine de la fonction est partagé en 3 intervalles

On étudie le signe de f' dans ces intervalles comme montre le tableau suivant :

f est croissante dans $]-\infty, -1[$

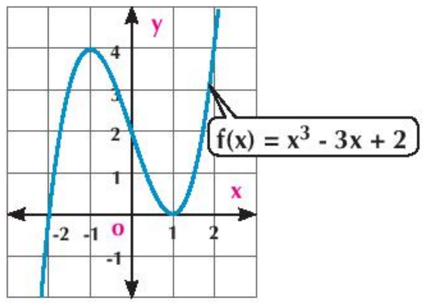
f est décroissante dans $]-1, 1[$

f est croissante dans $]1, \infty[$

x	$-\infty$	-1	1	∞
Signe de f' (x)	0 +	-	0	+
Comportement de f (x)	↗	↘	↗	

Remarquez que :

1) Quand on utilise l'un des programmes pour tracer la courbe représentative de la fonction (la figure ci-contre) On trouve que le comportement de la fonction correspond au résultat obtenu dans le tableau.



2) La tangente de la courbe fait un angle aigu avec la direction positive de l'axe des abscisses dans les intervalles de croissances et un angle obtus avec la direction positive de l'axe des abscisses dans les intervalles de décroissances.

3) Les valeurs qui séparent les intervalles de croissance et de décroissance sont les valeurs auxquelles la dérivée première est nulle ou indéfinie.

Essayez de résoudre

(1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de chacune des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Exemple
Fonctions trigonométriques

(2) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x + 2\sin x$, $0 < x < 2\pi$

Solution

f est continue et dérivable dans $]0, 2\pi[$

$\therefore f'(x) = 1 + 2\cos x$

x	$-\infty$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	∞
Signe de f' (x)	+	0 -	0	+
Comportement de f (x)	↗	↘	↗	

Etude de f' (x)

$1 + 2\cos x = 0$ $\qquad\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$

$\because x \in]0, 2\pi[$ $\qquad\therefore x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Remarquez que :

En $x = \frac{\pi}{2}$ $f'(x) = 1 > 0$ $\therefore$ f est croissante dans $]0, \frac{2\pi}{3}[$

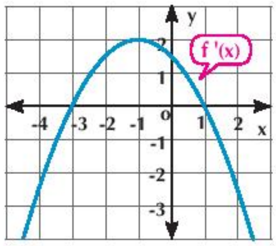
En $x = \pi$ $f'(x) = -1 < 0$ $\therefore$ f est décroissante dans $]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$

En $x = \frac{3\pi}{2}$ $f'(x) = 1 > 0$ $\therefore$ f est croissante dans $]\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$

Essayez de résoudre

2) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x - 2\cos x$, $0 < x < 2\pi$

Réflexion critique : La figure ci-contre montre la courbe représentative de f'(x) de la fonction f où f(x) est un polynôme.



a) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f

b) Trouvez l'ensemble solution de l'inéquation $f''(x) > 0$

Exemple

3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction g où $g(x) = 2\ln x - x^2$

Solution

g (x) est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$g'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1 - x^2)}{x}$$

x	0	1	∞
Signe de g'(x)	+	0	-
Comportement de g(x)	↗		↘

Etude du signe de $g'(x)$

Si $g'(x) = 0$ $\therefore x = 1$ ou $x = -1 \notin \mathbb{R}^+$

Si $x < 1$ $\therefore g'(x) > 0$ d'où g est croissante dans $]0, 1[$

Si $x > 1$ $\therefore g'(x) < 0$ d'où g est décroissante dans $]1, \infty[$

Essayez de résoudre

3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x - e^x$ et en utilisant le programme GeoGebra, tracez la courbe représentative de la fonction f puis vérifiez la réponse.

Exercices 2 - 1

Dans ce qui suit, déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f:

1. $f(x) = x^2 - 4x$
2. $f(x) = (x-3)^2$
3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
4. $f(x) = 9x - x^3$
5. $f(x) = x^4 + 4x$
6. $f(x) = 2 - 3(x-2)^{\frac{4}{3}}$
7. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$
8. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
9. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$
10. $f(x) = x + \ln x$
11. $f(x) = 3 - \ln x^2$
12. $f(x) = 5 - 2e^{2x}$

Répondez aux questions suivantes :

13. Démontrez que la fonction f où $f(x) = \tan x - x$ est croissante dans $]0 ; \frac{\pi}{4}[$
14. Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = 1 - \sin x$, $0 < x < 2\pi$
15. Si f et g sont deux fonctions dérivables $f'(x) < g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, démontrez que la fonction h où $h(x) = f(x) - g(x)$ est décroissante pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 - 2 Valeurs maximales et minimales (Valeurs extrémales)

A apprendre

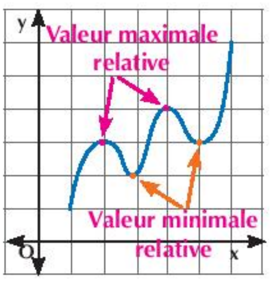
- Point critique
- Valeurs maximales et minimales relatives d'une fonction.
- Etude de la dérivée première des valeurs maximales et minimales relatives.
- Trouver les valeurs extrémale d'une fonction dans un intervalle fermé.

Vocabulaires de base

- Point critique
- Valeurs maximales relatives
- Valeurs minimales relatives
- Valeurs extrémale absolues

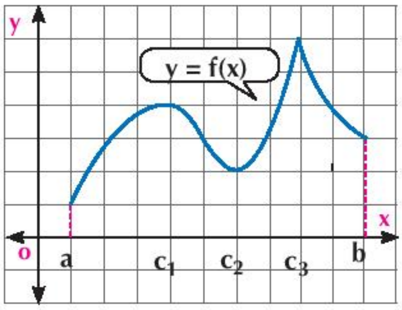
Aides pédagogiques

- calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



Réfléchissez et discutez

Soit f une fonction continue dans [a , b], la figure ci-contre représente la courbe de la fonction f



1- Déterminez les intervalles de croissance et décroissance de la fonction f

2- Si $x = c_1$, quelle est la valeur de f ' (c_1)? Décrivez le comportement de f dans] a ; c_2 [. f (c_1) est-il la plus grande valeur de f dans] a ; c_2 [?

3- Si f ' (c_2) quelle est la valeur de f = c_2? Décrivez le comportement de f dans] c_1; c_3[. f(c_2) est-il la plus petite valeur de f dans] c_1 ; c_3 [?

4- Pouvez-vous trouver f ' (c_3)? Expliquez vos réponse.
Décrivez le comportement de f dans]c_2; b [. f (c_3) est-il la plus grande valeur de f dans] c_2 ; b [?

Définition

Point critique

Soit f une fonction continue dans]a ; b[, on dit que (c ; f (c)) est un point critique si c ∈] a ; b [, f '(c) = 0 ou f n'est pas dérivable en x = c ou f(c) indéfinie.

De la figure précédente, on déduit que : (c_1 ; f (c_1)) et (c_2 ; f (c_2)) sont des points critiques car f '(c_1) = f '(c_2) = 0 ainsi que (c_3 ; f (c_3) est un point critique car f est continue en x = c_3 et n'est pas dérivable (dérivée à droite ≠ dérivée à gauche).

Définition

Valeurs maximale et minimale relatives

Soit f une fonction contenue dans un intervalle I, c ∈ I,

Si f (x) ⩽ f (c) pour tout x ∈] a ; b [où] a ; b [⊂ I :

alors f atteint une valeur maximale relative en x = c

Si f (x) ⩾ f (c) pour tout x ∈] a ; b [où] a ; b [⊂ I :

alors f atteint une valeur minimale relative en x = c

Remarquez que :

Dans le paragraphe réfléchissez et discutez: en $x = c_1$ et $x = c_3$ la fonction atteint des valeurs maximales relatives c_2 et en $x = c_2$, la fonction atteint une valeur minimale relative

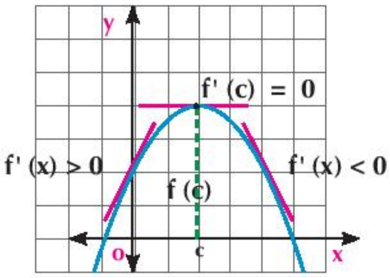
Etude de la dérivée première pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives

A apprendre

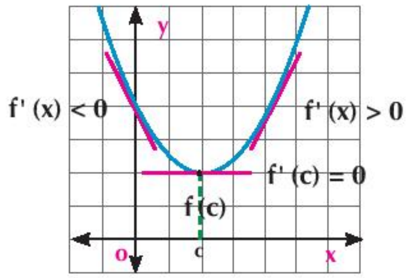
Si f(x) est contenue en x = c et (c ; f(c)) est point critique où c ∈ un intervalle ouvert contenant c:

1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x < c$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors $f(c)$ est une valeur maximale relative

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x < c$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x > c$, alors $f(c)$ est une valeur minimale relative



f (c) est une valeur maximale relative en c



f (c) est une valeur minimale relative en c

3- Si le signe de $f'(x)$ ne change pas au voisinage de c, alors la fonction n'atteint ni de valeur maximale ni de valeur minimale relative.

Théorème

Si f est continue dans] a ; b [et elle atteint une valeur maximale ou minimale relative en c ∈]a , b[alors $f'(c) = 0$.

Etude de la dérivée première

Exemple

① Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$, trouvez les valeurs maximales ou minimales relatives de f

Solution

1) Détermination des points critiques : f est continue et dérivable

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$

pour $f'(x) = 0$

$\therefore x = -3$ ou $x = 1$

(-3 ; f (-3)) , (1 ; f (1))

sont deux points critiques

Les points critiques sont : (-3 ; 20) , (1 ; -12)

Déterminez les points critiques ⟶ étudiez le signe de f '(x) ⟶ + → - maximale rerlative

⟶ - → + minimale relative

2) Le tableau ci-contre montre l'étude de la dérivée première

x	$-\infty$	-3		1	∞
Signe de f' (x)	+	0	-	0	+
Comportement de f (x)	↗	20	↘	-12	↗

3) Au voisinage de $x = -3$

le signe de f' (x) change de positif (avant $x = -3$) au négative (après $x = -3$)

$\therefore f(-3) = 20$ valeur maximale relative.

Au voisinage de $x = 1$ le signe de f' (x) change de négatif (avant $x = 1$) au positif (après $x = 1$)

$\therefore f(1) = -12$ valeur minimale relative

Essayez de résoudre

1 Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$, trouvez les valeurs maximales ou minimales relatives de f

Exemple

La première dérivée n'existe pas

2 Trouvez les valeurs maximales ou minimales relatives de f si $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x - 5)$

Solution

La fonction f est continue dans son domaine $x \in \mathbb{R}$

1) Détermination des points critiques:

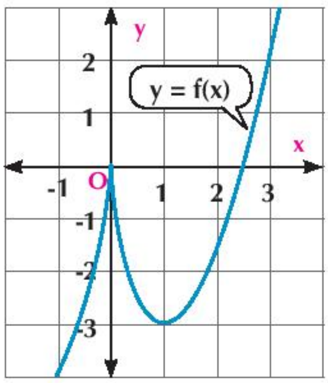
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x - 5) + 2x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2[2x - 5 + 3x]}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \quad x \neq 0$$

$\because$ f est continue en $x = 0$, f' (0) n'existe pas

$\therefore$ f a un point critique $(0, f(0)) = (0, 0)$

$f'(x) = 0$ pour $x = 1$ $\therefore$ f a un point critique qui est $(1, f(1))$ c-a-d. $(1, -3)$ comme indique la figure ci-contre .



2) Le tableau ci-contre montre l'étude de la dérivée première.

x	$-\infty$	0		1	∞
Signe de f' (x)	+	n'existe pas	-	0	+
Comportement de f (x)	↗		↘	-3	↗

3) En $x = 0$ il y a une valeur maximale relative $= 0$

En $x = 1$, il y a une valeur minimale relative $= -3$

Essayez de résoudre

2 Démontrez que la fonction f où $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ atteint une valeur minimale relative.

Réflexion critique: La fonction f où $f(x) = x^3 + 3x - 4$ atteint-elle une valeur maximale ou minimale relative ?.

Exemple Fonctions rationnelles

(3) Déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = x + \frac{4}{x}$

Solution

Le domaine de la fonction $f = \mathbb{R} - \{0\}$

1) Détermination des points critiques : $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ La fonction atteint deux points critiques $(2; f(2))$, $(-2; f(-2))$ c-a-d. $(2 ; 4)$, $(-2 ; -4)$.

2) Le tableau ci-contre montre l'étude de la dérivée première (Notez que $x = 0 \notin$ domaine de la fonction).

x	$-\infty$	-2		0	2		∞
Signe de $f'(x)$	+		-		-	+	
Comportement de $f(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$		$\searrow$	4 $\nearrow$	

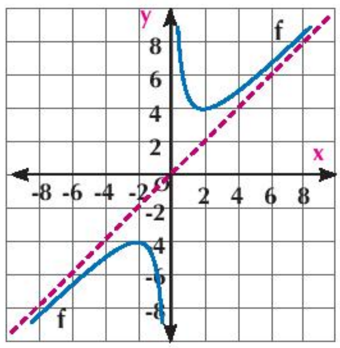
3) En $x = -2$ il y a une valeur maximale relative $= -4$

En $x = 2$ il y a une valeur minimale relative $= 4$

Notez que : valeur maximale est plus petite que la valeur minimale

Technologie : La figure ci-contre représente la courbe représentative de la fonction f en utilisant l'un des programmes.

Comparez entre le tableau des signes et sa courbe. Que remarquez-vous ?



Essayez de résoudre

(3) Déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$

A apprendre

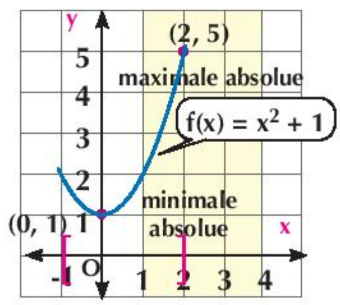
Les valeurs extrémales d'une fonction dans un intervalle fermé

Définition des valeurs extrémales :

Soit f une fonction définie dans l'intervalle fermé $[a , b]$ et $c \in [a ; b]$

1) Si $f(c) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a ; b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale relative dans $[a ; b]$

2) Si $f(c) > f(x)$ pour tout $x \in [a ; b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale relative dans $[a ; b]$



➲ La valeur minimale et la valeur maximale d'une fonction sont appelées les valeurs extrémales de la fonctions dans cet intervalle.

➲ La valeur extrémale peut être en un point à l'intérieur de l'intervalle ou en extrémités de l'intervalle

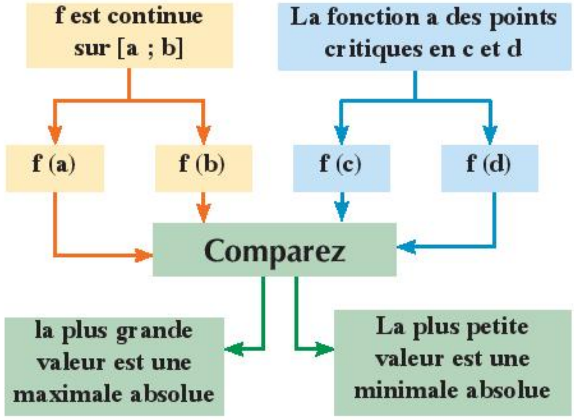
Théorème

Si la fonction est continue dans $[a ; b]$, alors la fonction atteint une valeur maximale absolue et une valeur minimale absolue dans $[a ; b]$.

2 - 2 Valeurs maximales et minimales (Valeurs extrémales)

Pour trouver les valeurs extrémales absolues de la fonction f dans [a ; b], on suit les étapes suivantes:

- On calcule f (a) , f (b) , et la valeur de la fonction pour chaque point critique.
- On compare les valeurs précédentes; la plus grande de ces valeurs est la valeur maximale absolue et la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale absolue.



Exemple

(4) Déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f où $f(x) = x^3 - 12x + 12$, $x \in [-3 ; 3]$

Solution

$\because \ f(x) = x^3 - 12x + 12 , x \in [-3 ; 3]$

$\therefore \ f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 12 = 21$ **(1)**

, $f(3) = (3)^3 - 12(3) + 12 = 3$ **(2)**

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x - 2)$

Pour déterminer les points critiques, on pose $f'(x) = 0$

$\therefore \ x = 2 \in [-3 ; 3]$ ou $x = -2 \in [-3 ; 3]$

En $x = 2$ il existe un point critique et $f(2) = -4$ **(3)**

En $x = -2$ il existe un point critique et $f(-2) = 28$ **(4)**

D'après 1 ; 2 ; 3 ; 4, la valeur maximale absolue est 28; - 4 est la valeur minimale absolue

Essayez de résoudre

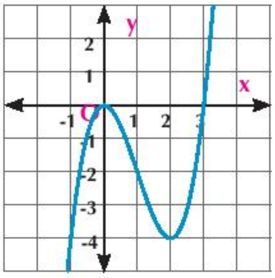
(4) Déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f où

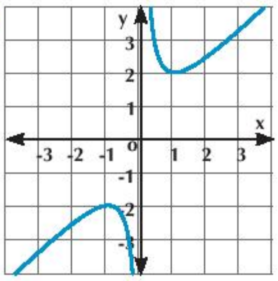
(a) $f(x) = 10x\, e^{-x} \quad x \in [0 ; 4]$

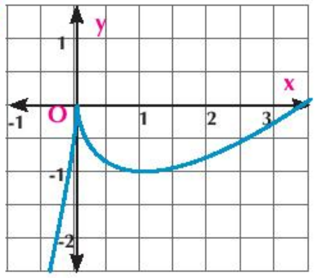
(b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, x \in [-1 ; 3]$

Exercices 2 - 2

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives (s'elles existent) de la fonction f en déterminant sa nature:

1 

2 

3 

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives (s'elles existent) de la fonction f en déterminant sa nature.

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$
5. $f(x) = x^4 - 2x^2$
6. $f(x) = 4x - x^3$
7. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
8. $f(x) = 3 - x^{\frac{2}{3}}$
9. $f(x) = (x + 2)^{\frac{2}{3}}$
10. $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$
11. $f(x) = x + \frac{4}{x - 1}$
12. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$
13. $f(x) = 4\,e^{-x^2}$
14. $f(x) = e^x(3 - x)$
15. $f(x) = e^x + e^{-x}$
16. $f(x) = x - \ln x$
17. $f(x) = 8\ln x - x^2$

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f dans l'intervalle donné:

18. $f(x) = x^3 - 3x + 1\,,\ x \in [-2\,;\ 1]$
19. $f(x) = \sqrt{x - 1}\,,\ x \in [2\,;\ 5]$
20. $f(x) = \sin x + \cos x\,,\ x \in [0\,;\ 2\pi]$
21. $f(x) = x\,e^{-x}\,,\ x \in [0\,;\ 2]$

Répondez à la question suivante :

22. Réflexion créative : Trouvez les valeurs de a ; b ; c et d; où $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vérifie les conditions suivantes à la fois :

a) passe par le point d'origine.

b) atteint un point critique en $x = 1$

c) l'équation de la tangente au point $(2\,;\ f(2))$ qui lui appartient est $9x + y = 20$

2 - 3 Étude de courbes

A apprendre

- Détermination les intervalles de convexité de la courbe d'une fonction vers la haut et vers le bas
- Trouver les points d'inflexion de la courbe d'une fonction
- L'étude de la deuxième dérivée pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives

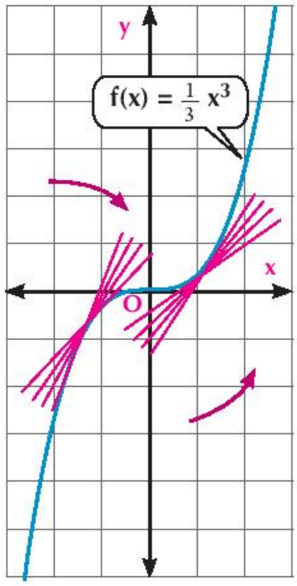
Vocabulaires de base

- Convexité
- Convexité vers le haut
- Convexité vers le bas
- point d'inflexion

Aides pédagogiques

- calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Découvrez



La figure ci-contre montre la courbe représentante la fonction f où $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in \mathbb{R}$

Remarquez que la fonction est croissante dans $\mathbb{R}$. Pourquoi ?

La direction de la convexité de la courbe dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$ est-elle différente de celle dans l'intervalle $]0 ; \infty[$?

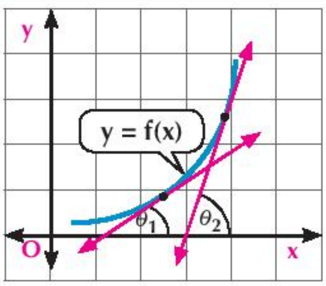
Quelle est la position de la courbe de la fonction par rapport à ses tangentes dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$. Est-ce que la pente de la tangent $f'(x)$ croit ou décroit en croissance de x ? Que pouvez-vous déduire ?

Quelle est la position de la courbe de la fonction par rapport à ses tangentes dans l'intervalle $]0 ; \infty[$. Est-ce que la pente de la tangent $f'(x)$ croit ou décroit en croissance de x ? Que pouvez-vous déduire ?

Convexité des courbes

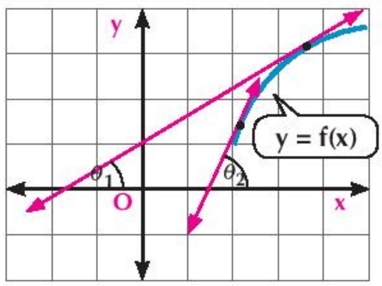
Définition

Soit f une fonction dérivable dans $]a, b[$, la courbe de la fonction est convexe vers le bas si f' est croissante dans cet intervalle et convexe vers le haut si f' est décroissante dans cet intervalle.



La courbe est convexe vers le bas. f' est croissante et sa dérivée est positive

$f''(x) > 0$



La courbe est convexe vers le haut. f' est décroissante et sa dérivée est négative

$f''(x) < 0$

Si la deuxième dérivée d'une fonction n'est pas nulle, on peut étudier la monotonie de la première dérivée $f'(x)$ et déterminer les intervalles de convexité de la courbe de la fonction f

Etude de la deuxième dérivée pour déterminer la convexité d'une courbe

Théorème

Soit f une fonction dérivable deux fois dans]a ; b[

1- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a ; b[$, alors la courbe de la fonction est convexe vers le bas dans]a , b[

2- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a ; b[$, alors la courbe de la fonction est convexe vers le haut dans]a , b[

Exemple

Détermination des intervalles de la convexité d'une fonction polynôme

(1) Soit $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$. Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas de la courbe représentante f.

Solution

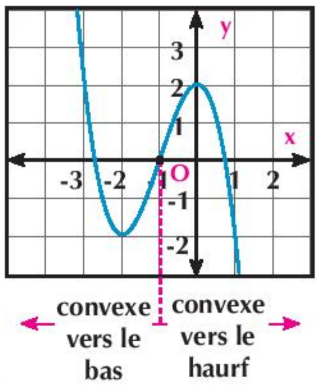
f est contenue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -6x - 3x^2$, $f''(x) = -6 - 6x = -6(1 + x)$

$f''(x) = 0$ pour $x = -1$

Le tableau ci-contre montre: le signe de f " et les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas de la courbe représentante de la fonction f

x	$-\infty$ -1	∞
signe de f"	+ 0	-
convexité de la courbe		



La courbe de la fonction est convexe vers bas dans l'intervalle $]-\infty , -1[$ et est convexe vers le haut dans l'intervalle $]-1 ; \infty[$

Essayez de résoudre

(1) Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas de chacune des courbes représentantes chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ (b) $g(x) = x^4 - 4x^3$

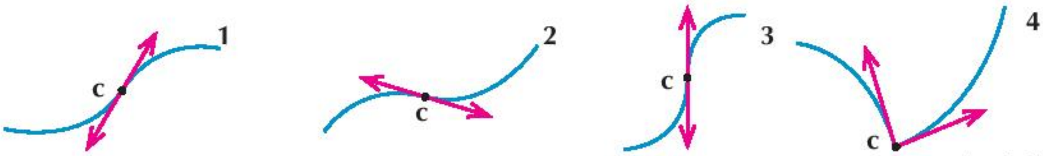
Technologie: En utilisant l'un des logiciels de graphisme, tracez la courbe représentante des deux fonctions f et g où $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Déterminez les intervalles de convexité vers la haut et vers le bas puis vérifiez la réponse en utilisant l'étude de la deuxième dérivée.

Remarquez que : la direction de convexité est variable de haut vers le bas ou de bas vers le haut en un point auquel la dérivée seconde est nulle ou n'existe pas.

Définition

Point d'inflexion

Soit f une fonction continue dans]a ; b[, c ∈] a ; b[et une tangente de la courbe passe par le point (c ; f(c)). Ce point est appelé point d'inflexion de la courbe s'il change de convexité.



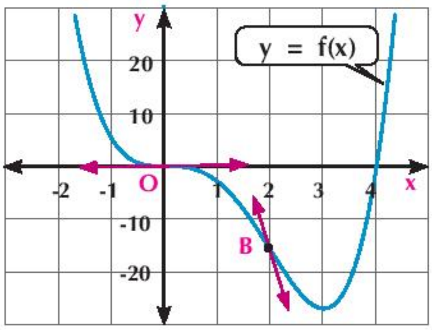
Pour les courbes 1 ; 2 ; et 3, il existe des points d'inflexion car la courbe est située de part et d'autre de la tangente passant par le point C

pour la courbe 4, il n'existe pas du point d'inflexion car au point C ne passe pas une tangente

Remarquez que:

1- La tangente au point d'inflexion coupe la courbe de la fonction car la courbe est située de part et d'autre de la tangente passant par le point d'inflexion.

2- **Dans la figure ci-contre** Il existe deux points d'inflexion de la courbe de la fonction f au point d'origine (0, 0) et l'autre au point B (2; f(2)).



Exemple

Convexité et point d'inflexion

(2) Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{Si } x < -2 \\ x^3 - 3x + 2 & \text{Si } x \geqslant -2 \end{cases}$

Déterminez les intervalles de convexité de sa courbe, trouvez les points d'inflexion et l'équation de la tangente. en ces points si elles existent.

Solution

La fonction f est définie par deux règles, son domaine est R. Elle est continue en $x = -2$

$f(-2)^- = f(-2)^+ = f(-2) = 0$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(-2+h)^2 - 4 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} (h - 4) = -4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

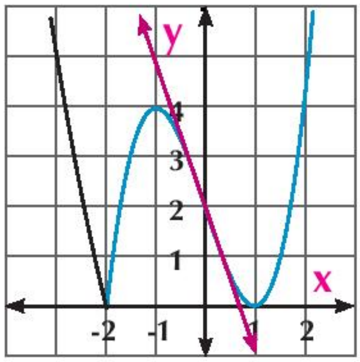
$$= \lim_{h \to o+} \frac{(-2+h)^3 - 3(-2+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h \to o+} (h^2 - 6h + 9) = 9$$

$\because f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$ $\quad \therefore$ la fonction n'est pas dérivable en $x = -2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{Si } x < -2 \\ 3x^2 - 3 & \text{Si } x > -2 \\ \text{n'existe pas} & \text{Si } x = -2 \quad [f'(-2^-) \neq f'(-2^+)] \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si } x < -2 \\ 6x & \text{Si } x > -2 \end{cases}$$

Le tableau suivant montre le signe de f '' et les intervalles de convexité de la courbe de la fonction.



x	$-\infty$	-2		0	∞
Signe de f''	+	n'existe pas	-		+
Convexité de la courbe	⌣		⌢		⌣

Intervalles de convexité : la courbe est convexe vers le bas dans $]-\infty\ ;\ -2[$, $]\ 0\ ,\infty\ [$ et ver le haut dans $]-2,\ 0[$

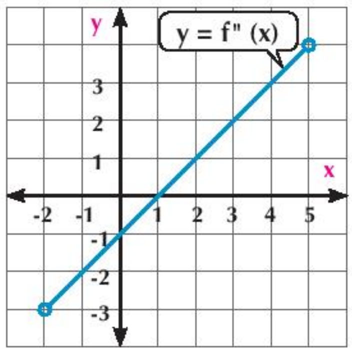
Point d'inflexion :

- Le point (-2 ; f(-2)) = (-2 ; 0) n'est pas un point d'inflexion bien que la courbe change de convexité car il n'y a pas de tangente en ce point (f '(x) n'existe pas)
- Le point (0 ; f(0)) = (0; 2) est un point d'inflexion car la courbe est située de part et d'autre de la tangente qui la coupe en ce point dont la pente = - 3 et son équation est y – 2 = 3x (comme montre la figure)

Essayez de résoudre

(2) Soit $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{Si } x < -1 \\ 3x^2 - x^3 & \text{Si } x > -1 \end{cases}$

Déterminez les intervalles de convexité de sa courbe, trouvez les points d'inflexion et l'équation de la tangente en ces points.



Réflexion critique: La figure ci-contre représente la courbe de f ''(x) dans] -2; 5[de la fonction continue f.

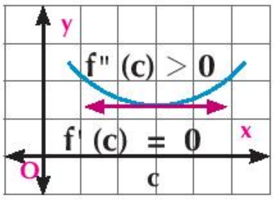
- Déterminez les intervalles de convexité de la courbe de la fonction f s'ils existent.
- Y a –t-il des points d'inflexion de la courbe de la fonction f ? Expliquez la réponse.

Etude de la deuxième dérivée pour les valeurs maximales ou minimales relatives

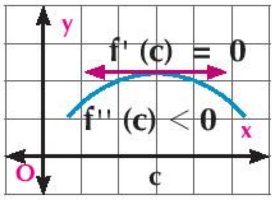
Théorème

Soit la fonction f dérivable deux fois sur un intervalle ouvert contenant c où f '(c) = 0

1) **Si f'' (c) < 0 alors f(c) est une valeur maximale relative.**
2) **Si f'' (c) > 0 alors f(c) est une valeur minimale relative.**
3) **Si f'' (c) = 0 alors l'étude de la deuxième dérivée n'est pas suffisante pour déterminer la nature du point (c ; f(c)) (soit maximale ou minimale).**



f (c) est une valeur minimale relative



f (c) est une valeur maximale relative

Exemple

(3) En utilisant la deuxième dérivée, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

Solution

Comme f est une fonction polynôme, donc elle est continue dans $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$, $f''(x) = 12x^2 - 16$

$f'(x) = 4x(x^2 - 4) = 0$ la fonction a des points critiques en $x = 0, x = 2, x = -2$

Étude de la deuxième dérivée pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives:

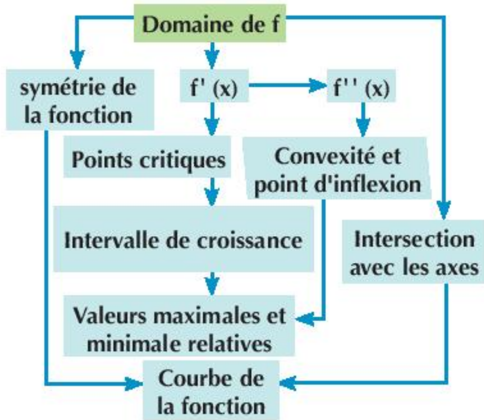
En $x = 0$	$f''(0) = -16 < 0$	$\therefore f(0) = 10$	valeur maximale relative
En $x = 2$	$f''(2) = 32 > 0$	$\therefore f(2) = -6$	valeur minimale relative
En $x = -2$	$f''(-2) = 32 > 0$	$\therefore f(-2) = -6$	valeur minimale relative

Essayez de résoudre

(3) En utilisant la deuxième dérivée, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ Vérifiez la réponse en utilisant une calculatrice scientifique ou un logiciel de graphisme.

Tracé de la courbe représentative d'une fonction polynôme

Le calcul différentiel est utilisé pour tracer la courbe d'une fonction. Il dépend de suivre le comportement de la fonction f(x) quand x varie dans un intervalle donné et la représentation des couples (x ; y) dans un repère orthonormé où y = f(x). On étudie ici le tracé des courbes représentants des fonctions polynômes de degré inferieur ou égal à 3c'est -a-dire de la forme $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$



Pour tracer la courbe de la fonction f où y = f(x), on suit le diagramme ci-contre comme ce qui suit :

1- La courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire et symétrique par rapport au point d'origine si f est impaire.

2- Etudiez le comportement de f en déterminant les intervalles de convexité, points d'inflexion s'ils existent et les valeurs maximales et minimales relatives s'elles existent.

3- Etablissez le tableau de croissance, décroissance et convexité pour déterminer l'allure de la courbe et la nature des points critiques.

4- Trouvez les points d'intersection de la courbe avec les deux axes si cela est possible.

5- Déterminez quelques points particuliers appartenant à la courbe pour améliorer le tracé puis tracez la courbe.

Exemple
Tracé la courbe d'une fonction

(4) Tracez la courbe représentative de la fonction f où $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Solution

1- f est une fonction polynôme dont le domaine est R , Elle n'est ni paire ni impaire.

2- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

$f'(x) = 0$, f a des points critiques en $x = 0$ et en $x = 2$

f est croissante dans $]-\infty ; 0[$, $]2 ; \infty[$ et décroissante dans $]0 ; 2[$

$f''(x) = 0$ en $x = 1$

$f''(x) < 0$ dans $]-\infty ; 1[$ la courbe est convexe vers le haut dans ,

$f''(x) > 0$ dans $]1 ; \infty[$ la courbe est convexe vers le bas dans

Le point $(1 ; f(1)) = (1 ; 2)$ est un point d'inflexion.

3- Le tableau suivant montre la croissance, décroissance et la convexité.

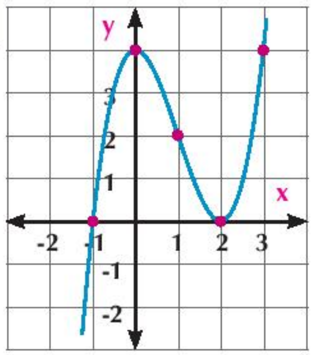
x	$-\infty$		0		1		2		∞
signe de f'		+	0		-		0	+	
comportement de f		↗			↘			↗	
signe de f''			-		0		+		
Convexité									
y			4		2		0		

valeur minimale relative | **point d'inflexion** | **valeur minimale relative**

4- points d'intersection avec les axes : (0; 4) , (2; 0)

5- L'allure générale de la courbe de f

Points particuliers (-1 ; 0) ; (3 ; 4)



Essayez de résoudre

(4) Tracez la courbe représentative de la fonction f où $y = f(x) = 12x - x^3$

Exemple
L'allure générale de la courbe d'une fonction

(5) Tracez l'allure générale de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ si

1- f est continue dans $[1 ; 7]$, $f(1) = -2$, $f(5) = 4$

2- $f'(5) = 0$, $f'(x) > 0$ quand $x < 5$, $f'(x) < 0$ quand $x > 5$

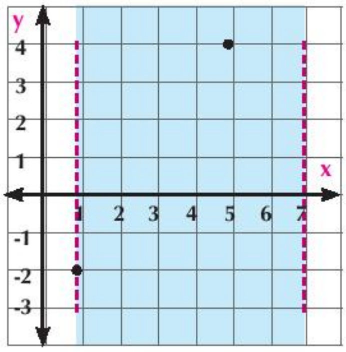
3- $f''(x) < 0$ quand $1 < x < 7$

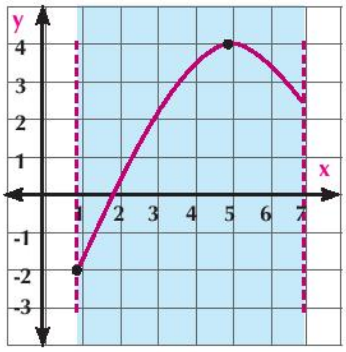
Solution

De 1 : on trace les axes.
Les points (1; -2) ; (5; 4) appartiennent au domaine [1; 7].

De 2 : En x = 5 la tangente // l'axe des abscisses f est croissante dans] 1; 5[et décroissante dans] 5; 7[

De 3 : la courbe est convexe vers le haut dans] 1; 7[





Essayez de résoudre

(5) Tracez l'allure générale de la courbe de la fonction f où y = f(x) si :

1- f est continue dans $[\,0, \infty[$, $f(4) = 3$, $f(0) = 1$

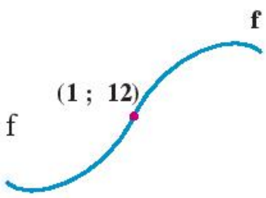
2- $f'(x) > 0$ quand $x > 0$

3- $f''(x) > 0$ quand $x < 4$, $f''(4) = 0$, $f''(x) < 0$ quand $x > 4$

Exemple

Résolution d'équations

(6) Déterminez a et b pour que le point (1, 12) soit un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f où $f(x) = ax^3 + b\,x^2$



Solution

$\because$ Le point (1 , 12) est un point d'inflexion de la courbe de la fonction f

$\therefore f''(1) = 0$ **(1)** , $f(1) = 12$ **(2)**

$f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x$, $f''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$

de (1): $6\,a + 2\,b = 0$ $\therefore b = -3\,a$

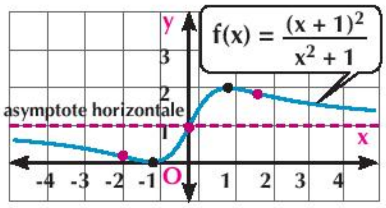
de (2): $a + b = 12$ $\therefore a - 3\,a = 12$ alors $a = -6$, $b = 18$

Essayez de résoudre

(6) Déterminez a et b pour que le point (2; 2) soit un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x$

Technologie : Comme c'est difficile de tracer les courbes représentatives de quelques fonctions, vous pouvez utiliser le programme geogebra ou un autre logiciel de graphisme pour les tracer.

La figure ci-contre montre la courbe représentane de la fonction f où $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$



Remarquez que :

1) Points critiques : La courbe admet des points critiques en $x = -1$ et en $x = 1$

Quand $x = -1$ $f(-1) = 0$ valeur minimale relative,

Quand $x = 1$ $f(1) = 2$ valeur maximale relative.

2) Intervalle de convexité : vers le haut dans : $]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}\ [$, $]0\ ;\ \sqrt{3}\ [$

vers le bas dans : $]-\sqrt{3}\ ;\ 0[$, $]\sqrt{3}\ ;\ \infty[$

3) Point d'inflexion : En $x = -\sqrt{3}$, la courbe est coupée par une tangente

En $x = \sqrt{3}$, la courbe est coupée par une tangente

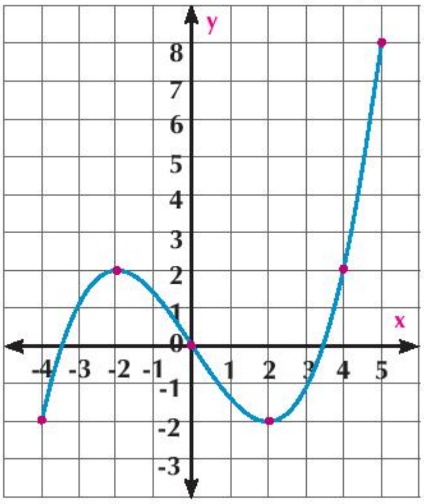
4) L'allure générale de la courbe : les extrémités de la courbe se rapprochent de la droite $y = 1$ qui est appelée l'asymptote horizontale de la courbe représentante f dont l'équation $y = a$ où $a = \lim_{|x| \to \infty} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$

Application : En utilisant l'un des logiciels de graphisme, tracez les courbes représentatives des fonctions suivantes puis étudiez les propriétés de chacune d'elles:

$f(x) = \frac{4x^2}{x^2+3}$ $g(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

Exercices 2 - 3

1) **La figure ci-contre montre la courbe représentante de la fonction f où y=f(x). Complétez :**



a) Domaine f = ...

b) f' (x) = 0 quand x ∈ ....

c) f'' (x) > 0 quand x ∈ ....

d) la courbe est convexe vers le haut quand x ∈ ....

e) la courbe admet un point d'inflexion quand x ∈ ....

f) la fonction a une valeur minimale relative en x = ...

g) la fonction a une valeur maximale absolue en ....

Dans ce qui suit, déterminez les intervalles de convexité de la courbe représentante de la fonction f puis trouvez les coordonnées des points d'inflexion (s'ils existent):

2) $f(x) = 4 - 6x - 3x^2$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

4) $f(x) = 15x + 6x^2 - x^3$

5) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

6) $f(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

8) $f(x) = 3$

9) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{quand } x < 0 \\ 4x - x^2 & \text{quand } x > 0 \end{cases}$

10) Démontrez que la mesure de l'angle que fait la tangente au point d'inflexion de la courbe de la fonction f où $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ est égale $\dfrac{\pi}{4}$

11) Si la courbe représentative de la fonction f où $f(x) = x(x-3)^2$ admet une valeur maximale relative en x_1 et valeur minimale relative en x_2, démontrez que l'abscisse du point d'inflexion = $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$

12) Déterminez a et b pour que le point (1 ; - 1) soit un point d'inflexion de la courbe d'équation $x^2 y + a y + b x^2 = 0$

Dans ce qui suit, tracez l'allure générale de la courbe de la fonction contenue f qui a les propriétés données:

13) $f(0) = 4$ $f(3) = 4$, $f'(x) < 0$ pour tout $x < 2$, $f'(x) > 0$ pour tout $x > 2$, $f''(x) > 0$

14) $f(1) = f(5) = 0$, $f'(x) < 0$ pour tout $x < 3$, $f'(x) > 0$ pour tout $x > 3$, $f''(x) < 0$ pour tout $x \neq 3$

15) $f(-1) = 2$ $f(0) = 4$, $f(1) = 0$, $f'(1) = f'(-1) = 1$, $f''(x) < 0$ pour tout $x < 0$, $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$

16) $f(3) = 4$, en $x < 3$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ et en $x > 3$ alors $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

Dans ce qui suit, étudiez le comportement de la fonction f puis tracez l'allure générale de sa courbe:

17) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

18) $f(x) = 3 - x^2$

19) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

20) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

21) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$

22) $f(x) = -x(x-3)^2$

23) $f(x) = (2-x)(x+1)^2$

24) $f(x) = \frac{1}{8}(x+4)(x-2)^2$

25) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 \text{ quand } x > 0 \\ x^2 - 2x \text{ quand } x \leqslant 0 \end{cases}$

26) $f(x) = x\,|x-4|$

2 - 4 Applications sur les valeurs maximales et minimales

A apprendre

- modélisation mathématique

Vocabulaires de base

- modélisation mathématique

Aides pédagogiques

- calculatrice scientifique
- logiciel de graphisme

Modélisation mathématiques

La prise d'une décision scientifique pour résoudre un problème quelconque passe par quelques étapes:

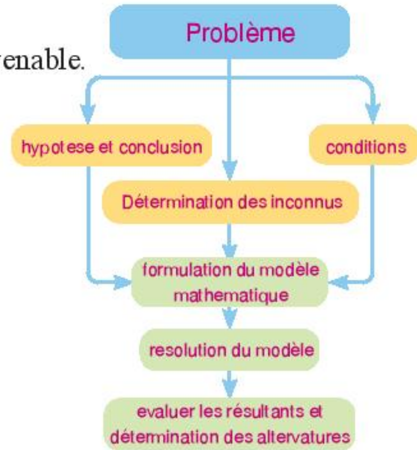
1- Détermination du problème (but et Possibilités) .

2- Développer un modèle conceptuel ou de la perception pour conjurer les problèmes.

3- Trouver un modèle scientifique convenable.

4- Résolution du modèle et prendre d'une décision.

La modélisation mathématique est la formulation du problème quelconque selon des relations mathématiques qu'on appelle modèle mathématique



Le diagramme ci-contre résume le modèle mathématique:

1- Détermination le but du problème et ses variables (Intérêt maximum – coût minimum - aire maximale, …..)

2- Détermination les valeurs des inconnues du problème pour arriver au but cherché.

3- Détermination la relation entre les inconnues (équations – inéquations).

4- formuler le modèle mathématique (transformer le problème sous une forme mathématique à résoudre).

5- Résolution du modèle mathématique et interpréter ses résultats selon la nature du problème.

6- Identifier les alternatives disponibles si le problème a plus qu'une solution.

Le calcul différentiel nous aide à resoudre le modèle mathématique pour la plus part des problèmes de la vie si le but est d'obtenir la plus grande ou la plus petite valeur d'une variable quelconque dans le domaine des valeur extrémales relatives ou absolues comme montre les exemples suivants.

Exemple

Etude de la dérivée première

(1) Dans un triangle de 16 cm de base et 12 cm de hauteur, on trace un rectangle tel qu'un de ses côtés est sur la base du triangle et les sommets du côté opposé sont situés sur les deux autres côtés du triangle. Déterminez les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire possible.

Solution

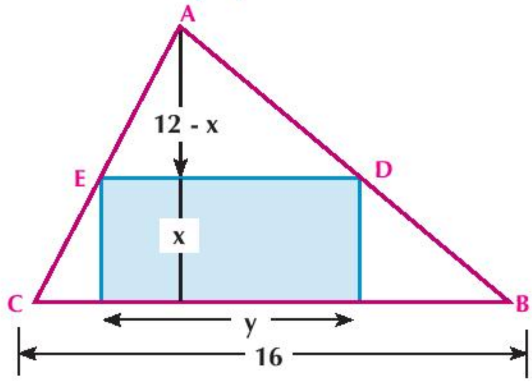
1- Pour calculer la plus grande aire, on trace une figure selon l'hypothèse et les conditions du problème.

2- Détermination les variables (inconnues) en posant que la largeur du rectangle = x cm ; sa longueur = y cm et son aire = A cm^2

3- Détermination la relation entre les variables **(modèle mathématique)**

Aire du rectangle $A = x \times y$

4- Mettez le modèle mathématique sous forme d'une seule variable si c'est possible



$\frac{y}{16} = \frac{AD}{AB} = \frac{12 - x}{12}$ **(de similitude des triangles)**

$\therefore\ y = \frac{4}{3}(12 - x),\ x \in [0\ ;\ 12]$ **(1)**

Aire du rectangle $A = \frac{4}{3}\ x\ (12 - x)$

$A = f(x) = 16x - \frac{4}{3}x^2$ **(2)**

5- Résolution du modèle mathématique : En dérivant les membres de la relation (2) par rapport à x.

$\therefore\ f'(x) = 16 - \frac{8}{3}x\ ,\ f''(x) = -\frac{8}{3}$

$f'(x) = 0$ pour $x = 6$ $\therefore$ le point (6; f(6)) = (6 ; 8) est un point critique

$x = \frac{16 \times 3}{8} = 6$ et $f''(x) < 0$

$\because$ f a une valeur maximale absolue en $x = 6$. Les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire possible sont 6 cm et 8 cm

Essayez de résoudre

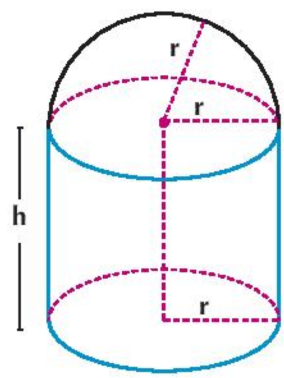
(1) Trouvez la plus grande aire possible d'un triangle isocèle qu'on peut tracer dans un cercle de 12 cm de rayon.

Exemple

Calcul du coût minimum

(2) Une cellule de grains sous la forme d'un cylindre droit de demi-cercle de couvercle est fabriquée d'élargir $108\pi m^3$ de grains **(élargissement est dans la partie cylindrique seulement),** Si le coût d'une unité d'aire du couvercle est le double de celui de la face latérale. Trouve les dimensions de la cellule pour que le coût soit minimum?

Solution



1- Pour calculer le plus petit cout, on trace une figure selon l'hypothèse et les conditions du problème.

2- Détermination les variables (**inconnues**): en posant que la hauteur du cylindre = h mètre, la longueur du rayon de sa base = r mètre et le coût d'une unité d'aire de la face = c L.E. Donc le coût d'une unité d'aire de couvercle = 2c L.E et le coût total = k L.E.

3- Détermination la relation entre les variables (modèle mathématique):

Aire du cylindre = périmètre de la base × h = $2\pi rh$ unité d'aire

Aire de demi-sphérique = $\frac{1}{2}$ aire de la sphère = $2\pi r^2$ unité d'aire

Coût total k = $2\pi rh \times c + 2\pi r^2 \times 2c = 2\pi r c(h + 2r)$

4- Mettez le modèle mathématique sous forme d'une seule variable :

$\because$ Volume de la partie cylindrique = 108π $\therefore \pi r^2 h = 108\pi$ **d'où** $h = \frac{108}{r^2}$

Coût total $k = 2\pi r c(\frac{108}{r^2} + 2r)$

$k = f(r) = 216\pi c r^{-1} + 4\pi c r^2$

5- Résolution du modèle mathématique : $f'(r) = -216\pi c r^{-2} + 8\pi c r$

Point critique : $f'(r) = 0$ $\therefore r^3 = \frac{216}{8}$ d'où r 3 r = 3 (un seul point)

Etudiez de la deuxième dérivée:

$\because f''(r) = 432\pi c r^{-3} + 8\pi c$ $\therefore f''(3) > 0$

Si la longueur du rayon de la cellule est 3 m et sa hauteur est $\frac{108}{9} = 12$ m. le cout est minimum

Essayez de résoudre

(2) On veut peindre, à l'aide d'une matière isolante, l'intérieure d'un réservoir sous la forme d'une boite fermée de capacité 252 mètres cube dont la base est un carrée. Si le coût de la base est 50L.E par mètre carré , celui du couvercle est 20 L.E et celui de la surface latérale est 30 L.E. Trouvez les dimensions de la boite pour que le coût soit minimum.

Exemple Application de la vie

(3) Un mur vertical de 2 m de hauteur se trouve à 2 m d'une maison. Déterminez l'échelle la plus courte, reposant sur le mue vertical, qui va du sol jusqu'à la façade de la maison.

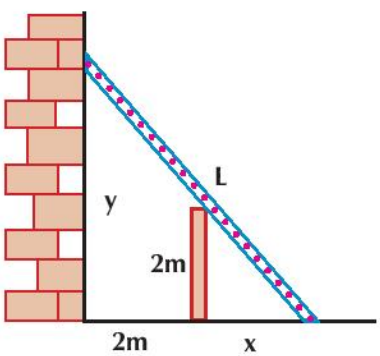
Solution

1- Pour calculer l'échelle la plus courte, on trace une figure selon l'hypothèse et les conditions du problème.

2- Détermination des variables inconnues:

en posant que la hauteur de l'échelle = L mètre, le sommet de l'échelle s'éloigne du sol de y mètre et le bas de l'échelle s'éloigne du mur de x mètre.

3- Modélisation du problème :



D'après le théorème de Pythagore :

$L^2 = (x + 2)^2 + y^2$ **(1)**

D'après le similitude : $\frac{y}{2} = \frac{x+2}{x}$

$\therefore y = \frac{2x+4}{x} = 2 + 4x^{-1}$ **(2)**

Pour trouver l'échelle la plus courte, il faut que ℓ^2 soit minimum

4- Résolution du modèle mathématique en dérivant les relations (1) et (2) par rapport à x.

$\therefore \frac{d}{dx}(l^2) = 2(x+2)\times 1 + 2y\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(l^2) = 2(x+2) + 2\left(\frac{2x+4}{x}\right)\times\frac{-4}{x^2} = 2(x+2)\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)$

Point critique : $\frac{d}{dx}(l^2) = \text{zero}$

$\therefore x = -2$ refusé ou $\frac{8}{x^3} = 1$

$\therefore$ Quand $x = 2$, l^2 est la plus petite possible

x		2	
Signe de $\frac{d}{dx}(\ell^2)$	−		+
ℓ^2	↘		↗

d'aprés l'étude de la derivée premiére de croissance et décroissance, on remarque que le signe de $\frac{d}{dx}(\ell^2)$ change de - à +

$\therefore$ quand $x = 2$; ℓ^2 la plus petite possible

En substituant en (2) $\therefore y = \frac{2\times 2+4}{2} = 4$

En substituant en (1)

$\therefore \ell^2 = (2+2)^2 + (4)^2 = 32$ $\therefore l = 4\sqrt{2}$

L'échelle la plus courte, reposant sur le mue vertical, qui va du sol jusqu'à la façade de la maison est $4\sqrt{2}$ mètres

Essayez de résoudre

(3) Dans un repère orthogonal, on trace $\overleftrightarrow{AB}$ qui passe par le point C(3 ; 2) et coupe les axes aux points A et B. Démontrez que la plus petite aire du triangle AOB est égale à 12 unité d'aire où O est le point d'origine.

Exemple
Secteur circulaire

(4) Une plaque métallique sous la forme d'un secteur circulaire d'aire 16 cm^2. Trouvez la longueur du rayon du secteur pour que le périmètre soit minimum puis trouvez la mesure de son angle.

Solution

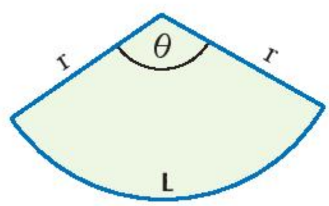
Soit la longueur de l'arc du secteur l cm , la longueur de son rayon = r cm

$\therefore$ Périmètre du secteur $P = 2r + l$ **(1)**

$\because$ Aire du secteur $= \frac{1}{2} l r = 16$ $\therefore l = \frac{32}{r}$

En substituant en (1) $\therefore P = 2r + \frac{32}{r}$ **(2)**

dérivant la relation **(2)** par rapport à r



$\frac{dP}{dr} = 2 - \frac{32}{r^2}$, $\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{64}{r^3}$

$\frac{dP}{dr} = 0$ pour $r = 4$ et $\frac{d^2P}{dr^2} > 0$

$\therefore$ Quand $r = 4$ le périmètre du secteur est minimum

$\because$ Aire du secteur $= \frac{1}{2} r^2 \theta^{rd}$ $\therefore \theta = \frac{16\times 2}{4\times 4} = 2^{rd}$

Essayez de résoudre

(4) Si le périmètre d'un secteur circulaire = 12 cm, trouvez la mesure de son angle pour que son aire soit maximale.

Exercices 2 - 4

(1) Trouvez deux nombres dont la somme est 30 et le produit est maximale.

(2) La somme des deux nombres entiers positifs est 5, trouvez ces deux nombres de façon à ce que la somme du cube du plus petit et le double du carré de l'autre soit minimale.

(3) Si la somme d'un nombre positif et son inverse est le plus petit possible, trouvez ce nombre.

(4) Trouvez la plus grande aire d'un terrain rectangulaire entouré par une clôture de longueur 120 mètres.

(5) Le périmètre d'un secteur circulaire est 30 cm et son aire est la plus grande possible. Trouvez la longueur du rayon de son cercle.

(6) Si la somme des longueurs des arêtes d'une boite rectangulaire de base carrée est 240 cm. Trouvez ses dimensions pour que son volume soit maximum.

(7) Si la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à 10 cm. Trouvez les longueurs des côtés de l'angle droit pour que son aire soit maximale.

(8) Un champ ouvert bordé d'un côté d'une rivière droite. Sélectionnez comment mettre une clôture autour des autres aspects de la pièce rectangulaire de le terre du champ pour capturer la plus grande surface (aire) possible par 800 mètres de clôture. Quelle est l'air de ce terraine ?

(9) On veut fabriquer des boites de boissons cylindriques fermées dont la capacité de chacune d'elle est k unités de volume à l'aide de la moindre matérielle. Trouvez le rapport entre la hauteur de la boite (h) et la longueur du rayon de sa base(r)

(10) Trouvez la plus grande aire d'une cour sous la forme d'un rectangle de périmètre 420 mètres.

(11) La longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à 30 cm. Trouvez les longueurs des deux autres côtés si la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit à l'hypoténuse est la plus grande possible.

(12) Un papier cartonné sous la forme d'un rectangle de dimensions 15 cm ; 24 cm. On découpe quatre carrés identiques de longueur de côté x cm dans chacun de ses coins et on a construit une boite sans couvercle avec le reste. Déterminez les dimensions de la boite pour que son volume soi maximum.

(13) Un réservoir de base carrée et de faces verticales qui peut être rempli par une certaine quantité d'eau. Démontrez que le coût de peindre l'intérieur du réservoir par une matérielle isolante est minimum si la longueur de sa hauteur est égale à la moitié de la longueur du côté de sa base.

14 Trouvez le point de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ le plus proche du point (0 ; 5).

15 Trouvez la distance la plus courte entre la droite $x - 2y + 10 = 0$ et la courbe $y^2 = 4x$

16 ABC est un triangle où a ' et b' sont constants. Trouvez la mesure de l'angle compris entre eux pour que l'aire du triangle soit maximale.

17 L'intensité du courant I (en ampères) dans un circuit de courant alternatif en un instant quelconque t (en seconds) est donnée par la relation $I = 2 \cos t + 2 \sin t$. Quelle est la valeur maximale du courant dans ce circuit ?

18 Le volume d'une ferme de bactéries placée dans un milieu nutritif se développe selon de la relation : $f(n) = 2000 + \frac{5000\,t}{100 + t^2}$ où t est le temps (en heures). Déterminez la valeur maximale de la ferme.

19 ABCD est un carré de 8 cm de longueur du côté, $M \in \overline{BC}$ tel que $BM = x$ cm et $N \in \overline{CD}$ tel que $CN = \frac{3}{2}x$. Trouvez la valeur de x pour que l'aire du triangle AMN soit minimale.

20 $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle de rayon R. On trace deux tangentes au cercle en A et B. E est un point sur le cercle, la tangente passant par E coupe les tangentes précédentes en D et C respectivement.
Démontrez que la plus petite aire du trapèze ABCD est égale à $2r^2$ unité d'aire.

Unité 3

Intégral finie et ses applications

Introduction de l'unité

Avez-vous vu un artisan de paniers fait une de ses paniers? Le processus d'assemblage des tranches parallèles côte à côte conduit de compléter le panier. Cela a aidé les scientifiques de découvrir les méthodes générales d'estimation de la superficie de toute surface plane, en divisant cette région en très petites zones, puis par additionner les aires de ces petites zones, permettre d'estimer l'aire de la surfaces démodé, ce qui a contribué à la découverte la science de l'intégral, qui sera noté par $\int$, qui est la premiere lettre du mois (Somme), qui signifie l'additionne. Dans cette unité on va connaitre les différentes méthodes d'intégration infinie comme intégral par substituions et intégral par partition pour trouver les primitives des fonctions continues puis reconnaitre l'intégral finie à travers le théorème fondamentale de la différentiation et l'intégration qui relie entre l'intégral finie et infinie en utilisant l'intégral finie pour calculer les aires d'une région plane et le volume d'un solide de révolution , et connaitre quelques applications économiques de l'intégral finie et utilisation de la modélisations pour résoudre quelques problèmes mathématiques et quotidiennes.

Objectifs de l'unité

A la fin de cette unité et après avoir exécuté les activités, l'élève doit être capable de:

- Connaitre l'intégral des fonctions exponestiells $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$.
- Connaitre quelques méthodes de calcul intégral, comme substituions non trigonométrique, intégral par partition $\int x\, e^{x}\, d x$
- Connaitre l'intégral finie (théorème fondamentales de la différentiation) et déduire ses propriétés.
  - $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$
  - $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
  - $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$
  - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx$ $= \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
  - $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$
  - $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$ où f est une fonction paire .
  - $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ où f est une fonction impaire .
- Déterminer l'aire de la région compris entre la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses.
- On utilise l'intégral finie pour résoudre des problèmes pour trouver le volume d'un solide de révolution par rapport à l'un des axes des coordonnées

Vocabulaires de bas

- Dérivée réciproque
- Intégral infinie
- Différentiation
- Intégral par substitution (changement de variable)
- Intégral par partition
- Règle
- Intégral finie
- Théorème fondamentale de la dérivation et intégration
- Les aires dans le plan
- Volume de solides de révolution

Leçons de l'unité

Leçon (3-1) : Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

Leçon (3-2) : Formes d'intégrations

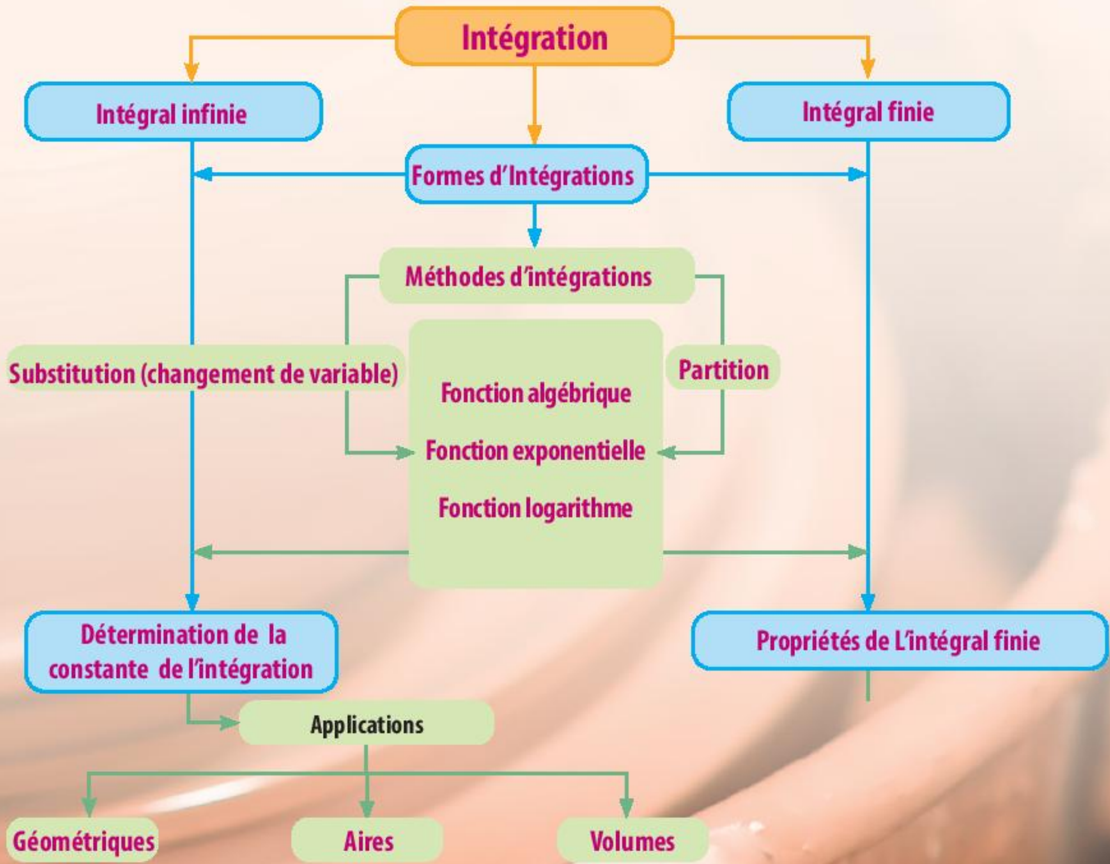
Leçon (3-3) : Intégral finie

Leçon (3-4) : Applications l'intégral finie

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique - Logiciel de graphisme
- L'internet.

Organigramme de l'unité



3 - 1 Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

Allez apprendre

- Intégrale des fonctions exponentielles et logarithmiques.
- Application géométriques.
- Application physiques.

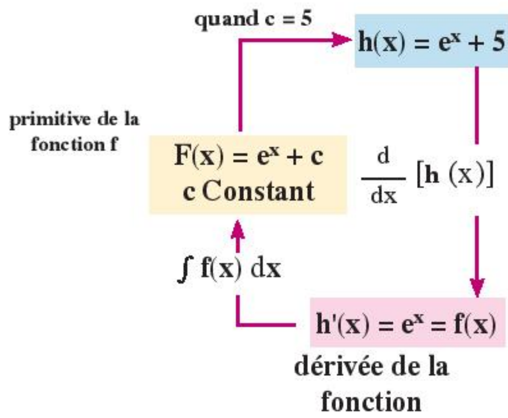
Vocabulaire de bas

- Dérivée réciproque (primitive)
- intégral
- intégral infini
- constante arbitraire

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Découvrez



D'après l'étude précédente du calcul différentielle, on sait que la dérivée de la fonction h par rapport à x où $h(x) = e^x + 5$ est $h'(x) = e^x$

Si on nome la fonction h '(x) par f(x), alors on peut trouver par une opération réciproque une infinité de fonctions (F(x) + c) dont la dérivée de chacune d'elle est f(x). Elles sont appelées une famille des primitives de la fonction f dont l'une d'elle est h(x) où :

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ **où c est une constante arbitraire**

Découvrez la famille des primitives dans ce qui suit :

$f(x) = 5e^{5x}$, $g(x) = 8e^{x^4}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Apprendre

Intégral infini de la fonction exponentielle

> **Si K est un nombre réel où $k \neq 0$**
> **alors:** $\int e^x\,dx = e^x + c$
> , $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$ **où c est une constante arbitraire**

Exemple

1 Trouvez :

a $\int e^{7x}\,dx$ **b** $\int e^{-\frac{3}{4}y}\,dy$ **c** $\int 8\,e^{2z}\,dz$

Solution

a $\int e^{7x}\,dx = \frac{1}{7} e^{7x} + c$

b $\int e^{-\frac{3}{4}y}\,dy = \frac{1}{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}y} + c = \frac{-4}{3} e^{-\frac{3}{4}y} + c$

c $\int 8e^{2z}\,dz = 8\int e^{2z}\,dz = \frac{8}{2} e^{2z} + c = 4e^{2z} + c$

Rappel

$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

Essayez de résoudre

1 Trouvez

a $\int \pi e^{x}\,dx$ **b** $\int -e^{-5z}\,dz$ **c** $\int -6e^{0.2y}\,dy$ **d** $\int 3\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}n}\,dn$

Exemple

2 Trouvez chacun des intégrales suivants :

a $\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,dx$ **b** $\int \frac{3e^{x}-2e^{2x}}{2e^{x}}\,dx$

Solution

a $\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (e^{x}+e^{-x})\,dx$

$= \frac{1}{2}[\int e^{x}\,dx + \int e^{-x}\,dx]$

$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + c$

b $\int \frac{3e^{x}-2e^{2x}}{2e^{x}}\,dx = \int \frac{3}{2}\,dx - \int e^{x}\,dx$

$= \frac{3}{2}x - e^{x} + c$

Rappel

$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx$
$= \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Essayez de résoudre

2 Trouvez :

a $\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}}\,dx$ **b** $\int (x^{2} + 2e^{x})\,dx$ **c** $\int (x^{2e} + e^{3x})\,dx$

Remarquez que: Si f(x) est une fonction dérivable, alors:

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c}$$

Exemple

3 **a** $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$ **b** $\int 4x\, e^{x^{2}+1}\,dx$

Solution

a On pose $f(x) = \cos x$ $\therefore f'(x) = -\sin x$

$\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -\int e^{\cos x}(-\sin x)\,dx = -e^{\cos x} + c$

b On pose $f(x) = x^{2} + 1$ $\therefore f'(x) = 2x$

$\int 4x\, e^{x^{2}+1}\,dx = 2\int e^{x^{2}+1}(2x)\,dx = 2e^{x^{2}+1} + c$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez chacun des intégrales suivants :

(a) $\int (\cos x\, e^{\sin x} + 3x^2)\, dx$

(b) $\int (x - 3)\, e^{x^2 - 6x + 5}\, dx$

Intégral infini de la fonction logarithmique

On sait que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ où $x > 0$, $\frac{d}{dx}(\ln - x) = \frac{1}{x}$ où $x < 0$

En général $\frac{d}{dx}\ln |x| = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$

c-a-d la fonction $\ln |x|$ où $x \neq 0$ est l'une des primitives de la fonction $\frac{1}{x}$

Par conséquent : $\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c \quad \text{où } x \neq 0}$

Multiples d'une fonction

Exemple

(4) Trouvez chacun des intégrales suivants :

(a) $\int \frac{2}{x}\, dx$ (b) $\int \frac{7}{x \ln 3}\, dx$

Solution

(a) $\int \frac{2}{x}\, dx = 2\int \frac{1}{x}\, dx = 2 \ln |x| + c$ où $x \neq 0$

(b) $\int \frac{7}{x\ln 3}\, dx = \frac{7}{\ln 3}\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{7}{\ln 3}\ln |x| + c$ où $x \neq 0$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez :

(a) $\int \frac{\ln 3}{x}\, dx$ (b) $\int \frac{4}{3x \ln 5}\, dx$ (c) $\int \frac{\ln x^2}{x \ln x^3}\, dx$

Exemple

(5) Trouvez chacun des intégrales suivants :

(a) $\int \left(3x^2 + \frac{5}{x}\right) dx$ (b) $\int \left(\frac{2e}{x} + \frac{x}{e}\right) dx$ (c) $\int \frac{(3x - 1)^2}{3x}\, dx$

Solution

(a) $\int \left(3x^2 + \frac{5}{x}\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int \frac{5}{x}\, dx = x^3 + 5 \ln |x| + c$

b $\int \left(\frac{2e}{x} - \frac{x}{e}\right) dx = 2e \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{e} \int x\, dx = 2e \ln|x| - \frac{x^2}{2e} + c$

c $\int \frac{(3x-1)^2}{3x} dx = \int \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x} dx = \int (3x - 2 + \frac{1}{3x}) dx$

$= \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3} \ln|x| + c \qquad$ où $x \neq 0$

Essayez de résoudre

5) Trouvez chacun des intégrales suivants:

a $\int \frac{6x^2 - 5}{3x} dx$ **b** $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} dx$ **c** $(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}})^2 dx$

Remarquez que: Si f est une fonction dérivable $f(x) \neq 0$, alors

alors $\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \ln|f(x)| + c$

Exemple

6) Trouvez chacun des intégrales suivants:

a $\int \frac{4}{1+2x} dx$ **b** $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-2} dx$ **c** $\int tg\, x\, dx$

Solution

a $\because (1 + 2x)' = 2 \quad \therefore \int \frac{4}{1+2x} dx = 2 \int \frac{(1+2x)'}{1+2x} dx = 2 \log_e |1 + 2x| + c$

b $\because (x^2 + 3x - 2)' = 2x + 3$

$\therefore \int \frac{2x+3}{x^2+3x-2} dx = \ln|x^2 + 3x - 2| + c$

c $\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

Essayez de résoudre

6) Trouvez chacun des intégrales suivants:

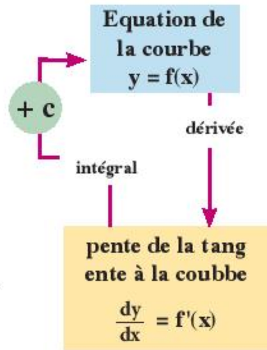
a $\int cotg\, x\, dx$ **b** $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} dx$ **c** $\int \frac{(x^2 + 2)\, dx}{x^3 + 6x + 1}$

Exemple

7) Application géométrique : Si la pente de la tangente à une courbe à tout point (x ; y) de la courbe est égale à $\frac{3x+2}{x}$. Trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point (e ; 3e + 5)

Solution

On pose que l'équation de la courbe est $y = f(x)$



$\because$ La pente de la tangent en tout point $= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x+2}{x}$

$\therefore y = \int \dfrac{dy}{dx}\, dx = \int (3 + \dfrac{2}{x})\, dx$

$\therefore y = 3x + 2 \ln x + c$ où c est une constante arbitraire

$\because$ La courbe passe par le point $(e\ ,\ 3e + 5)$, alors il vérifie son équation c-a-d

$3e + 5 = 3(e) + 2 \ln e + c \qquad \therefore c = 3$

Alors l'équation de la courbe est : $y = 3x + 2 \ln x + 3$

Essayez de résoudre

7 La pente de la tangente à la courbe de la fonction f en tout point (x ; y) de la courbe est égale $\dfrac{1}{2x-e}$ et $f(e) = \dfrac{1}{2}$. Trouvez $f(2e)$

Exemple

8 Application dans la physique : Le taux de variation de l'aire A (en cm^2) d'une plaque métallique par rapport au temps t (en sec) est donné par la relation $\dfrac{dA}{dt} = e^{-0,1t}$. Si l'aire de la plaque au début est 80 cm^2 , trouvez l'aire de la plaque après 10 sec.

Solution

Aire de la plaque $A = \int \dfrac{dA}{dt}\, dt = \int e^{-0.1t}\, dt$

$\therefore \quad A = -10e^{-0,1t} + c$

Quand $t = 0$, $A = 80 \qquad \therefore c = 90$

Alors l'aire de la plaque en un instant quelconque $A = 90 - 10e^{-0.1t}$

Après 10 sec après $\quad \therefore$ l'aire de la plaque $= 90 - 10e^{-1}\ cm^2$

Essayez de résoudre

8 Si le taux de variation des ventes d'une usine est inversement proportionnelle au temps (en semaines). Si les ventes pendant deux semaines et quatre semaines respectivement sont 200 ; 300 unités. Trouvez les ventes de l'usine après 8 semaines.

Exercices 3 - 1

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1) Si $f''(x) = \frac{1}{2}[e^{x} + e^{-x}]$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, alors $f(x)$ est égale à :
a) $-f'(x)$ b) $f'(x)$ c) $-f''(x)$ d) $f''(x)$

2) Si la pente de la tangente d'une courbe en tout point $(x ; y)$ de la courbe est égale à $4e^{2x}$, $f(0) = 2$, alors $f(-2)$ est égale à :
a) 4 b) $4e^{-4}$ c) $2e^{-4}$ d) $2e$

3) $\int tg\,\theta\, d\theta$ est égale à :
a) $-\ln|\cos\theta| + c$ b) $-\ln\cos\theta + c$ c) $\ln\cos\theta + c$ d) $|\ln\cos\theta| + c$

4) $\int 4x\, e^{x^2}\, dx$ est égale à
a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$ b) $e^{x^2} + c$ c) $2e^{x^2} + c$ d) $4e^{x^2} + c$

Trouvez les intégrales suivants:

5) $\int e^{4x}\, dx$

6) $\int (3x^2 + 2e^{x})\, dx$

7) $\int (\frac{4}{x} - e^{-x})\, dx$

8) $\int e^{1-3x}\, dx$

9) $\int \frac{7}{3} e^{3x-4}\, dx$

10) $\int 2e^{x}(e^{x}+1)^2\, dx$

11) $\int \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 4}{e^{x}}\, dx$

12) $\int x^2 e^{x^3+1}\, dx$

13) $\int \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\, dx$

14) $\int \frac{dx}{4x-1}$

15) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

16) $\int \frac{\sec^2 x}{tgx}\, dx$

17) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx$

18) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$

19) $\int \frac{\sec x\, tg\, x}{\sec x - 1}\, dx$

20) $\int \frac{1}{(x\ln x)}\, dx$

21) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\, dx$

22) $\int \frac{(\log x)^2}{x}\, dx$

23) $\int \frac{3x^2}{x^3 - 1}\, dx$

24) $\int \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x + 1}\, dx$

25) $\int \frac{4e^{x} + x\, e^{2x}}{x\, e^{x}}\, dx$

26) $\int \frac{4}{x\ln 3x}\, dx$

27) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\, dx$

28) Applications géométriques : Si la pente de la tangente de la courbe de la fonction f en un point (x , y) est égale à $2e^{-\frac{1}{2}x}$, $f(0) = 1$, trouvez $f(3)$

3 - 2

Méthodes d'intégrations

Allez apprendre

- trouver la fonction principale d'une fonction donnée.
- trouver la différentiation d' une fonction
- calcule l'intégral par substitution
- calcule l'intégral par partition

Vocubulaires de base

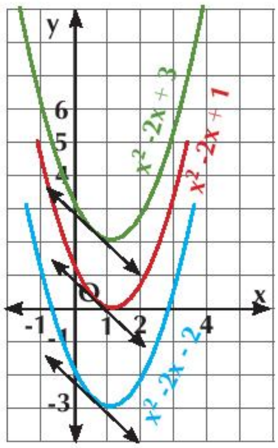
- Dérivée réciproque
- Intégral infinie
- Différentiation

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique - Logiciel de graphisme

Introduction

D'après votre étude précédant, vous avez étudié la dérivée réciproque ou l'intégral infinie, qui est une opération réciproque de la dérivation. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f dans l'intervalle I si : $\frac{d}{dx}$ F(x) = f (x) pour tous $x \in I$



Quand on ajoute une constante à la fonction réciproque F, elle sera représentée par une famille de courbes $y = F(x) + c$, qui ont des valeurs différentes de c et les pentes de leur tangentes sont égales , pour celà elles sont parallèles comme montre la figure ci-contre. On appelle les groupes des dérivées réciproques par l'intégral infinie, qui sera noté par : $\int f(x)\,dx$, et on a:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

Propriétés de l'intégral infinie :

Soient f et g deux fonctions intégrables dans l'intervalle I, alors :

1- $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

2- $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ où k est un nombre réel

Remarquez que :

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ où $n \neq -1$ c est une constante

Par exemple

$\int (3x^2 + 4x + 5)\,dx = x^3 + 2x^2 + 5x + c$

➲ Pour calculer les primitives, on a besoin de savoir quelques formes standard d'intégrations des quelques fonctions, mais par fois les intégrations demondées sont différentes des formes standard, pour ce là on doit connaître d'autres méthodes d'intégrations parmi les quelles Intégral par substitution et Intégral par partition qui dépendu de la différentiation.

Différentiation

Si f est une fonction dérivable tel que $y = f(x)$

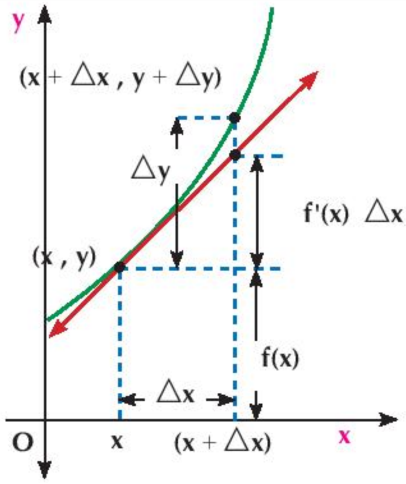
De la définition de la dérivée :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x}$$

$\therefore$ quand $\Delta x \longrightarrow 0$, **alors** : $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow f'(x)$

c-a-d.: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq f'(x)$ quand $\Delta x \simeq 0$, $\Delta x \neq 0$

$\therefore \Delta y \simeq f'(x)\Delta x$ (En multipliant par Δx)



Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert qui contient x , Δx désigne la variation en x où $\Delta x \neq 0$, alors

1- Différentielle de y (est noté dy) = $f'(x)\Delta x$

2- Différentielle de x (est noté dx) = Δx

D'où :

$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$ c'est une fonction en deux variables $\boxed{x}$ $\boxed{dx}$

Si $y = x^3$ **alors :** $dy = \boxed{3x^2}\ \boxed{dx}$

Exemple Différentielle d'une fonction

1 Trouvez la différentielle dans ce qui suit :

a $y = \frac{x}{x-1}$

b $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

c $y = z \cdot \ell$ où z et g sont des fonctions en x

Solution

a $\because dy = y'\, dx$, $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + (x-1)^{-1}$

$\therefore dy = \frac{-1}{(x-1)^2}\, dx$

b $\because dV = V'\,dr$ $\therefore dV = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2\,dr = 4\pi r^2\,dr$

c $\because dy = (z \bullet g)'\, dx$

$= (z \bullet g' + g \bullet z')\, dx$

$= z \bullet g'\, dx + g \bullet z'\, dx$

$dy = z\,dg + g\,dz$

Remarque que

$dg = g'dx$

$dz = z'dx$

Essayez de résoudre

1) Trouvez la différentielle dans ce qui suit :

a) $y = (2x + 5)^4$

b) $y = e^{2x - 3}$

c) $y = \frac{z}{g}$ où z et g sont des fonctions en x

Pensé critique : Si $x^2 + x^2 = 25$ **trouvez :** dy en fonction de x ; y et dx

Primitives usuelles

Il n’y a pas de méthode générale pour calculer les primitives de différentes fonctions comme les méthodes pour calculer les dérivées des fonctions. Pour un grand nombre de fonctions, on trouve une primitive par (lecture inverse) du tableau des dérivées, tous sa dépend de vos connaissances des dérivations des quelques fonctions ; comme montre dans le tableau suivant :

Tableau des dérivées et des primitives de quelques fonctions usuelles	
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{R}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $n \in \mathbb{R} - \{1\}$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(tg\, x) = \sec^2 x$, $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in Z$	$\int \sec^2 x \, dx = tg\, x + c$, $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in Z$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ $a > 0$, $a \neq 1$	$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$ $a > 0$, $a \neq 1$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $x > 0$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + c$ $x \neq 0$

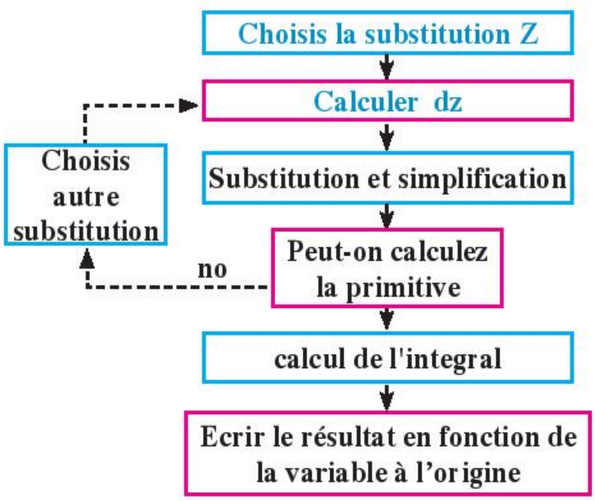
Intégral par substitution

De plus importants méthodes pour trouver l’intégral du produit de deux fonctions à la forme : $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$

Si $z = g(x)$ est une fonction dérivable alors $dz = g'(x)\, dx$ et on a :

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz$$

➲ **Pour effectuer la primitive on suit le diagramme ci-contre :**



Exemple Intégral par substitution

2) 2) Trouvez

a) $\int x^3 (2x^4 - 7)^5 \, dx$

b) $\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^3} \, dx$

Solution

a) soit $z = 2x^4 - 7$ $\therefore dz = 8x^3 \, dx$

$$\int x^3 (2x^4 - 7)^5 \, dx = \frac{1}{8} \int (\underbrace{2x^4 - 7}_{z})^5 (\underbrace{8x^3 \, dx}_{dz})$$

$$= \frac{1}{8} \int z^5 \, dz = \frac{1}{8 \times 6} z^6 + c$$

$$= \frac{1}{48} (2x^4 - 7)^6 + c$$

b) soit $z = x^2 + 8x$

$\therefore dz = (2x + 8) \, dx = 2(x + 4) \, dx$

$$\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^3} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+4) \, dx}{(x^2+8x)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^3} \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int z^{-3} \, dz = \frac{1}{2 \times -2} z^{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{4(x^2+8x)^2} + c$$

Essayez de résoudre

2) Trouvez :

a) $\int 3x (x^2 + 3)^4 \, dx$

b) $\int \frac{x^2}{(x^3 - 4)^5} \, dx$

Exemple Intégral par substitution

3) Trouvez

a) $\int x (x + 4)^7 \, dx$

b) $\int (x^2 + 5) \sqrt{x - 1} \, dx$

Solution

a) soit $z = x + 4$ $\therefore x = z - 4 , dx = dz$

$\int x (x+4)^7 \, dx = \int z^7 (z - 4) \, dz = \int (z^8 - 4z^7) \, dz$ **(substitution)**

$= \frac{1}{9} z^9 - \frac{1}{2} z^8 + c$ **(intégration)**

$= \frac{1}{18} z^8 (2z - 9) + c$ **(simplification)**

$= \frac{1}{18} (x + 4)^8 (2x - 1)$ **(substitution de z)**

b soit $z^2 = x - 1$ **pour simplifier l'intégration** $\therefore\ x = z^2 + 1\ ,\ dx = 2z\ dz$

$$\int (x^2 + 5)\sqrt{x - 1}\ dx = \int [(z^2 + 1)^2 + 5] \times z \times 2z\ dz \qquad \textbf{(substitution)}$$

$$= \int [z^4 + 2z^2 + 6] \times 2z^2\ dz$$

$$= 2\int (z^6 + 2z^4 + 6z^2)\ dz \qquad \textbf{(simplification)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{7} z^7 + \frac{2}{5} z^5 + 2z^3\right] + c \qquad \textbf{(intégration)}$$

$$= \frac{2}{35} z^3 [5z^4 + 14 z^2 + 70] + c \qquad \textbf{(Factrurcommun)}$$

$$= \frac{2}{35} (x - 1)^{\frac{3}{2}}\ [5 (x - 1)^2 + 14 (x - 1) + 70] + c \qquad \textbf{(substitution de z)}$$

$$= \frac{2}{35}\sqrt{(x - 1)^3}\ \ (5x^2 + 4x + 61) + c$$

Essayez de résoudre

3 3) Trouvez les primitives suivantes:

a $\int x\,(2x - 3)^4\ dx$ **b** $\int x^2\ \sqrt[3]{3x + 1}\ dx$

Exemple

Intégral par substitution

4 Trouvez :

a $\int \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{x}}{x}}\ dx$ **b** $\int 6x\ e^{x^2}\ dx$

Solution

a soit $z = 1 + \sqrt{x}$ $\therefore\ \sqrt{x} = z - 1\ ,\ x = (z - 1)^2$

$$dx = 2\,(z - 1)\ dz$$

$$\int \sqrt{\frac{1 + \sqrt{x}}{x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{z}{(z - 1)^2}} \times 2\,(z - 1)\ dz \qquad \textbf{(substitution)}$$

$$= \int 2z^{\frac{1}{2}}\ dz = 2 \times \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c \qquad \textbf{(intégration)}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\sqrt{(1 + \sqrt{x}\,)^3}\right) + c \qquad \text{(substitution de z)}$$

b soit $z = x^2$ $\therefore\ dz = 2x\ dx$

$$\int 6x\ e^{x^2}\ dx = 3\int e^{x^2}\ (2x\ dx)$$

$$= 3\int e^{z}\ dz = 3\ e^{z} + c \qquad \textbf{(substitution et intégration)}$$

$$= 3\ e^{x^2} + c \qquad \textbf{(substitution de z)}$$

Essayez de résoudre

4 Trouvez :

a $\int \dfrac{x}{\sqrt{1 - 3x^2}}\ dx$ **b** $\int (3 - x)\ e^{6x - x^2}\ dx$

Example Intégral par substitution

5 Trouvez

a $\int \frac{5x}{3x^2 - 1} dx$

b $\int \frac{\sqrt{\ell n x}}{x} dx$

Solution

a soit $z = 3x^2 - 1$ $dz = 6x\,dx$

$$\int \frac{5x}{3x^2-1} dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x\,dx}{3x^2-1} = \frac{5}{6}\int \frac{1}{z} dz \quad \textbf{(substitution)}$$

$$= \frac{5}{6} \ln|z| + c = \frac{5}{6} \ln|3x^2 - 1| + c \quad \textbf{(substitution et intégration)}$$

b soit $z = \ln x$ $\therefore$ $dz = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{\ln x}\ (\frac{1}{x} dx) = \int z^{\frac{1}{2}} dz \quad \textbf{(substitution)}$$

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}[\ln (x)]^{\frac{3}{2}} + c \quad \textbf{(substitution et intégration)}$$

Essayez de résoudre

5 Trouvez :

a $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx$

b $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

Pensé critique : En utilisant l'intégration par substituions démontrez les règles de primitives suivantes:

1- $\int [f(x)]^n \ f'(x)\ dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ où $n \neq -1$

2- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} d(x) = \ln|f(x)| + c$ où $f(x) \neq 0$

Intégral par partition

Si y et z sont deux fonctions en x et dérivables, alors :

$$\frac{d}{dx}(y\,z) = y\frac{dz}{dx} + z\,\frac{dy}{dx}$$

par intégration les deux membres par rapport à x

$$\int \frac{d}{dx}(y\,z)\,dx = \int y\frac{dz}{dx} dx + \int z\frac{dy}{dx} dx$$

$$y\,z = \int y\,dz + \int z\,dy$$

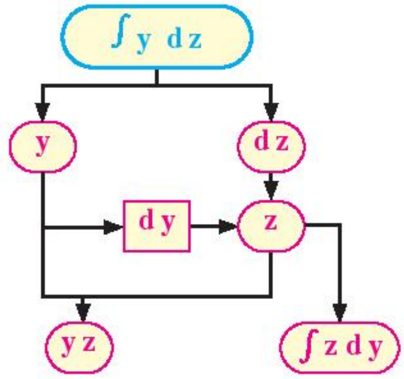
D'où : $\int y\,dz = y\,z - \int z\,dy$

Rappel

$dz = \frac{dz}{dx} dx$

$dy = \frac{dy}{dx} dx$

L'équation précédente est appelée la règle d'intégration par . partition, et utilisée pour trouver l'intégral du produit de deux fonctions l'une n'est pas la dérivée de l'autre, par le choix convenable de deux fonctions y et z de tel sorte que l'intégral du côté gauche est plus facile que le côté droit. On suit le diagramme ci-contre , comme montrent les exemples suivantes:



Exemple Intégral par partition

(6) Trouvez :

(a) $\int x\, e^x\, dx$ (b) $\int x^2\, e^x\, dx$

Solution

(a) Pour trouver $\int x\, e^x\, dx$:

Soient : $y = x$, $dz = e^x\, dx$

$\therefore\ dy = dx$ $z = \int e^x\, dx = e^x$

$\because\ \int y\, dz = y z - \int z\, dy$

$\therefore\ \int x\, e^x\, dx\ = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$

Remarque importante : quand on ajoute la constante à la fonction g ne change pas le résultat (démontrez)

(b) Pour trouver $\int x^2\, e^x\, dx$:

Soient : $y = x^2$, $dz = e^x\, dx$

$dy = 2x\, dx$ $z = \int e^x\, dx = e^x$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2x\, e^x\, dx$$
$$= x^2 e^x - 2\int x\, e^x\, dx$$

$\boxed{\int x\, e^x\, dx\ = e^x (x - 1) + c \text{ de a}}$

$$\boxed{= x^2 e^x - 2\ e^x (x - 1)}\ + c$$
$$= e^x [x^2 - 2x + 2]\ + c$$

Essayez de résoudre

(6) Trouvez :

(a) $\int x\, e^{-2x}\, dx$ (b) $\int x^2\, e^{x+3}\, dx$

Remarque que :

Le choix de y et dz, dépendent de :

1- dy plus simple que y **2-** dz plus facile que l'intégral

Exemple Intégral par partition

7 Trouvez

a $\int \ln x \, dx$ b $\int x \ln x \, dx$

Solution

a **Soient :** $y = \ln x$ $dz = dx$

$dy = \frac{1}{x} dx$ $z = \int dx = x$

$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

b **Soient :** $y = \ln x$ $dz = x \, dx$

$dy = \frac{1}{x} dx$ $z = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2$

$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - \frac{1}{2}) + c$

Essayez de résoudre

7 Trouvez :

a $\int \ln (x+1) \, dx$ b $\int (\ln x \div \sqrt{x}) \, dx$

Exemple Intégral par partition

8 Trouvez :

a $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$ b $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$

Solution

a Remarquez que $(x+1)^{-2}$ plus facile à intégré

Soit $y = x e^x$ $dz = (x+1)^{-2} dx$

$dy = (x e^x + e^x) dx$ $z = \frac{-1}{x+1}$

$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = -\frac{x e^x}{x+1} - \int \frac{-1}{x+1} \times e^x (x+1) \, dx$

$= -\frac{x e^x}{x+1} + \int e^x \, dx$

$= \frac{-x e^x + e^x (x+1)}{x+1} + c = \frac{e^x}{x+1} + c$

b Soient $y = 4x$ $\qquad$ $dz = (2x+1)^{-\frac{1}{3}}\, dx$

$dy = 4\,dx$ $\qquad$ $z = \dfrac{3}{2 \times 2}\, (2x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$\int \frac{4x}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx = 3x\,(2x+1)^{\frac{2}{3}} - \int \frac{3}{4}\,(2x+1)^{\frac{2}{3}} \times 4\, dx$$

$$= 3x\,(2x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3 \times 3}{5 \times 2}\,(2x+1)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{10}\,(2x+1)^{\frac{2}{3}}\,[10x - 3\,(2x+1)] + c$$

$$= \frac{3}{10}(2x+1)^{\frac{2}{3}}\,(4x - 7) + c$$

Essayez de résoudre

8 Trouvez :

a $\displaystyle\int \frac{3x+5}{e^{2x}}\, dx$ $\qquad$ **b** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx$

Pensez critique : Pouvez vous trouvez $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx$ par substituions ? Expliquez

Quelques applications sur l'intégral infinie

Si on sait que la fonction g détermine la pente de la tangente (ou fonction de bénéfice ou taux de variation d'une fonction) en un point de la courbe de la fonction f, alors on peut connaitre la fonction F par l'intégration infinie de la fonction g, tel que : $\boxed{f(x) = \int g(x)\, dx}$

Remarque que cette primitive ne donne pas une seule fonction parce qu'il contient la constante c qu'on peut la déterminer des informations données.

Exemple Equation de la courbe d'une fonction

9 Si la pente de la tangente de la courbe de la fonction f en un point (x ; y) de cette courbe est donnée par la relation $g(x) = \dfrac{x e^x}{(x+1)^2}$, trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point (1 ; 2 e) .

Solution

Soit l'équation de la courbe est $y = f(x)$ $\qquad$ $\therefore\ f(x) = \int g(x)\, dx$

$\therefore\ f(x) = \displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx = \frac{e^x}{x+1} + c$ $\qquad$ [de l'exemple 8 (a)]

$\because$ la courbe passe par le point (1 ; 2e), alors il vérifie l'équation

$\therefore\ 2e = \dfrac{e}{(1+1)} + c$

$\therefore\ c = \dfrac{3e}{2}$ et $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1} + \dfrac{3}{2}\, e$

Essayez de résoudre

(9) Trouvez l'équation de la courbe passant par le point (0 ;1) et dont la pente de la tangente en un point (x ;y) de la courbe est égale à $x\sqrt{x^2+1}$

Exercices 3 - 2

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

(1) $\int x\,(x^2+3)^5$ est égale à

a) $\frac{1}{6}(x^2+3)^6+c$ b) $\frac{1}{12}(x^2+3)^6+c$ c) $\frac{1}{4}(x^2+3)^4+c$ d) $\frac{1}{8}(x^2+3)^4+c$

(2) Si $\int(2x+3)\ln x\,dx = yz - \int z\,dy$, alors y z est éqal à

a) $2x\ln x$ b) $(2x+3)\ln x$ c) $\frac{1}{2}(2x+3)\ln x$ d) $x(x+3)\ln x$

(3) Si $\int(2x-1)\,e^{2x+3}\,dx = yz - \int z\,dy$, alors $\int z\,dy$ est égal à

a) $e^{2x+3}+c$ b) $\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$ c) $-e^{2x+3}+c$ d) $-\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$

En utilisant la substitution convenable trouvez les primitives suivantes :

(4) $\int x\,(x-2)^4\,dx$ (5) $\int x^2\,(x-2)^3\,dx$ (6) $\int x^3\,(x^2-1)^5\,dx$

(7) $\int x\sqrt{x+4}\,dx$ (8) $\int(x^2-1)\sqrt{x+1}\,dx$ (9) $\int x^5\,(x^2+3)^4\,dx$

(10) $\int\frac{x}{3x^2+2}\,dx$ (11) $\int\frac{x}{x+1}\,dx$ (12) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(13) $\int\frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}\,dx$ (14) $\int x\,e^{-x^2}\,dx$ (15) $\int\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}\,dx$

(16) $\int\ln 5x\,\frac{dx}{x}$ (17) $\int(\ln x)^3\,\frac{dx}{x}$ (18) $\int\frac{1}{x\ln x}\,dx$

En utilisant la partition convenable trouvez les primitives suivantes :

(19) $\int 4x\,e^{2x}\,dx$ (20) $\int x^3\,e^{x^2}\,dx$ (21) $\int\frac{x}{e^{2x}}\,dx$

(22) $\int x^3\ln x\,dx$ (23) $\int\ln x^2\,dx$ (24) $\int(\ln x)^2\,dx$

(25) $\int\ln x\,\frac{dx}{x^3}$ (26) $\int(x+1)^2\,e^{2x}\,dx$ (27) $\int x\,(\ln x)^2\,dx$

Répondez aux questions suivantes :

(28) Trouvez l'équation de la courbe passant par le point A (2 ; 3) et dont la pente de la normale en un point (x ; y) de la courbe est $3-x$.

(29) Si la pente de la tangente à une courbe en un point (x ; y) de cette courbe est $x\sqrt{x+1}$, trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point $(0\,;\,\frac{11}{15})$

(30) Déterminez l'équation de la courbe $y = f(x)$ si $\frac{d^2y}{dx^2} = ax+b$ où a et b sont deux constants et le point (0 ; 2) est un point d'inflexion et le point (1 ; 0) est un point minimum relatif à la courbe. Puis trouvez le point maximum relatif à cette courbe

3 - 3 Intégral finie

Allez apprendre

- Le concept de l'intégral finie
- Utilisation du théorème fondamental de la différentielle et de l'intégration pour trouver l'intégral finie.
- Propriétés de l'intégral finie

Vocabulaire de bas

- Intégral finie

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Réfléchissez et discutez

Si $y = f(x)$, et la pente de la tangente en un point de la courbe de la fonction est :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x + 3$$

Pouvez-vous trouver une valeur exacte de $f(3)$; $f(5)$; $f(5) - f(3)$? Expliquez votre réponse .

Remarquez que

1 d'après la définition de l'intégral infinie:

$$\boxed{y = \int f'(x)\, dx = f(x) + c}$$

où c est une constante sa valeur ne dépend pas de x, on doit la garder dans l'intégration pour qu'il contient tous les fonctions dont le taux de variation est f(x), donc l'intégral infinie ne donne pas une valeur exacte de la variable x .

2 Si la valeur de l'intégral en $x = a$ est $f(a) + c$
et sa valeur en $x = b$ est $f(b) + c$
$\therefore$ La différence entre les valeurs de l'intégral en $x = a$ et $x = b$
est égale à $f(b) - f(a)$,qui donne une valeur exacte (pour n'importe que valeur de c) et sera noté par $\int_a^b f'(x)\, dx$ tel que :

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)}$$

Cette règle est appelée Intégral finie.

Apprendr

Théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a ; b] et F une primitive quelconque de f sur [a ; b] On a :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Remarque:

1 $\int_a^b f(x)\, dx$ est appelée Intégral finie, et se lit (intégral f(x) dx de a à b) c'est un nombre réel qui dépend de :

(a) Les deux nombres a et b respectivement

(b) La règle de f

La variable x étant une variable muette, on a donc:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(z)\, dz \ldots\ldots$$

2 Nous écrirons la différence : f(b) - f(a) sous la forme suivante $[f(x)]_a^b$ ou $f(x)|_a^b$

3 On peut obtenir l'intégral finie par calculer la primitive sans mettre la constante c puis on remplace la variable par les deux termes de l'intégral.

4 On applique toutes les règles des primitives et le tableau des primitives usuelles quand on calcule l'intégral finie d'une fonction continue. Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle [a, b]

Alors:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
- $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$ où $k \in R$

Exemple

Calcul la valeur d'une intégral finie

(1) Trouvez l' intégral finie de la fonction f de x = -2 à x = 4 tel que $f(x) = 3x^2 - 2$

Solution

La fonction f est un polynôme continue dans R

$\therefore \quad \int_{-2}^{4} (3x^2 - 2)\, dx = [x^3 - 2x]_{-2}^{4}$

$= [(4)^3 - 2(4)] - [(-2)^3 - (-4)]$

$= 64 - 8 + 8 - 4 = 60 \in R$

Essayez de résoudre

1. Trouvez la valeur dans ce qui suit :

a) $\int_{-1}^{2} (2x + 3)\, dx$ b) $\int_{0}^{5} \frac{3}{\sqrt{n+4}}\, dn$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$

Théorème Si la fonction est continue sur l'intervalle [a;b] alors elle est intégrable sur cette intervalle.

Pensé critique

Quelle est la différence entre l'intégral finie et l'intégral infinie ? Expliquez ?

Propriétés de l'intégral finie

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a, b], c ∈] a, b [, alors:

1. $\int_{b}^{a} f(x)\, dx = -\int_{a}^{b} f(x)\, dx$
2. $\int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0$
3. $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b} f(x)\, dx$

Exemple Calcule la valeur d'une Intégral

2. Si f est une fonction continue sur R et $\int_{1}^{3} f(x)\, dx = 6$, $\int_{5}^{3} f(x) = -14$, Trouvez $\int_{1}^{5} f(x)\, dx$

Solution

$\because$ f est une fonction continue sur R et x = 3 partage l'intervalle [1, 5]

$\therefore \quad \int_{1}^{5} f(x)\, dx = \int_{1}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\, dx$ **Propriété (3)**

$= \int_{1}^{3} f(x)\, dx - \int_{5}^{3} f(x)\, dx$ **Propriété (1)**

$= 6 - (-14) = 20$

Essayez de résoudre

2. Si f est une fonction continue sur R et $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx = 255$, $\int_{2}^{-1} f(x)\, dx = -15$, Trouvez : $\int_{2}^{4} f(x)\, dx$

Exemple Calcule la valeur d'une Intégral finie

3 Trouvez $\int_0^5 |x - 3| \, dx$

Solution

D'après la définition de la fonction valeur absolu on a $|x - 3| = \begin{cases} -(x - 3) \text{ si } x < 3 \\ x - 3 \quad \text{si } x > 3 \end{cases}$

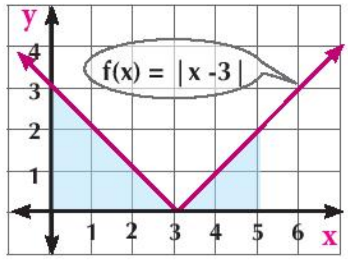
f est continue en $x = 3$

$$\int_0^5 |x - 3| \, dx = \int_0^3 |x - 3| \, dx + \int_3^5 |x - 3| \, dx$$

$$= \int_0^3 (3 - x) \, dx + \int_3^5 (x - 3) \, dx$$

$$= [3x - \frac{x^2}{2}]_0^3 + [\frac{x^2}{2} - 3x]_3^5$$

$$= (9 - \frac{9}{2}) + (\frac{25}{2} - 15 - \frac{9}{2} + 9) = \frac{13}{2}$$



Remarquez que l'aire de la partie colorée est gale a $\frac{13}{2}$ unités carrées

Essayez de résoudre

3 Trouvez :

a $\int_{-4}^2 |x + 1| \, dx$ b $\int_{-3}^3 |x^2 - 4| \, dx$

Exemple Calcule la valeur d'une Intégral finie par substituions

4 Trouvez $\int_0^3 x \sqrt{x^2 + 3} \, dx$

Solution

On peut obtenir l'intégral finie par calculer la primitive sans mettre la constante c puis on remplace la variable par les deux termes de l'intégral :

Premièrement:

pour trouver $\int x \sqrt{x^2 + 3} \, dx$ on pose $z = x^2 + 3$ $\therefore dz = 2x \, dx$

$\therefore \int x \sqrt{x^2 + 3} \, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 + 3} \, (2x \, dx) = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} \, dz$ **(substitution)**

$= \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} \, dz = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c$ **(integration)**

$= \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 3)^3} + c$ **(substitution par z)**

Deuxièment:

$\int_0^3 \sqrt{x^2 + 3} \, dx = [\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 3)^3}]_0^3$

$\frac{1}{3} [\sqrt{(12)^3} - \sqrt{(3)^3}] = 7\sqrt{3}$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez :

(a) $\int_0^5 x \sqrt{25 - x^2}\, dx$ (b) $\int_{-2}^2 x^3 \sqrt{x^2 + 3}\, dx$

Remarquez que

1. 1) On peut résoudre l'exemple 4 directement par trouver les valeurs de z correspondants aux valeurs de termes de l'intégral (x = 0 , x = 3)

Si x = 0 $\therefore z = 3$, Si x = 3 z = 12

$$\therefore \int_0^3 x \sqrt{x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{2} \int_3^{12} z^{\frac{1}{2}} d x = \left[\frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}}\right]_3^{12}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\sqrt{(12)^3} - \sqrt{(3)^3}\right] = 7\sqrt{3}$$

2. Dans **la partie Essayez de résoudre** 4 b: $f(x) = x^3 \sqrt{x^2 + 3}$ **une fonction impaire**

Dans **la partie Essayez de résoudre** 3b: $f(x) = |x^2 - 4|$ **une fonction paire**

Les fonctions paires et impaires ont les propriétés suivantes dans l'intégral finie:

> **1.** Si la fonction est continue et impaire sur l'intervalle [-a , a], alors:
>
> $$\int_{-a}^a f(x)\, dx = \text{zero}$$
>
> **2.** Si la fonction est continue et paire sur l'intervalle [-a , a], alors :
>
> $$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$$

En utilisant les propriétés précédantes, vérifiez vos réponses dans la partie Essayez de résoudre 3,4

Exemple

Intégral finie des fonctions impaires et paires

(5) Trouvez :

(a) $\int_{-2}^2 \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}\, dx$ (b) $\int_{-3}^3 (x^2 - 1)\, dx$

Solution

(a) la fonction est continue sur R

$$\because f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 + 1} = - \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1} = - f(x)$$

$\therefore$ **f est impaire et on a :** $\int_{-2}^2 \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1} = \text{zéro}$

(b) f est une fonction polynôme continue sur R

$\because$ $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$

$\therefore$ f est paire et on a : $\int_{-3}^{3} (x^2 - 1)\, dx = 2 \int_{0}^{3} (x^2 - 1)\, dx$

$= 2 [\frac{1}{3} x^3 - x]_0^3 = 2 \times 6 = 12$

Essayez de résoudre

(5) Trouvez

(a) $\int_{-3}^{3} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} (4 + \pi \cos 2x)\, dx$

Pensé critique

1 Si f est une fonction impaire et continue sur l'intervalle [-3 , 5] , $\int_{3}^{5} f(x)\, dx = 9$? quelle est la valeur de $\int_{-3}^{5} f(x)\, dx$

2 Si f est une fonction paire et continue sur l'intervalle [-4, 4] , $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx = 20$ et $\int_{0}^{2} f(x)\, dx = 6$, quelle est la valeur de $\int_{-4}^{-2} f(x)\, dx$?

Exercices 3 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

(1) Si $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\, dx = 16$, alors $\int_{3}^{5} f(x)\, dx$ est égale à:

(a) -28 (b) -4 (c) 4 (d) 28

(2) Si $f(x) = |x|$, alors $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ est égale à:

(a) -1 (b) zero (c) 2 (d) 4

Trouvez la valeur dans ce qui suit :

(3) $\int_{-1}^{3} x^3\, dx$ (4) $\int_{1}^{3} (3x^2 - 2)\, dx$ (5) $\int_{0}^{4} (2x + 1)^{\frac{3}{2}}\, dx$

(6) $\int_{4}^{0} \frac{dt}{\sqrt{8 - t}}$ (7) $\int_{0}^{2} x(x^2 - 3)^2\, dx$ (8) $\int_{0}^{2} x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx$

(9) $\int_{-1}^{3} |x - 1|\, dx$ (10) $\int_{-4}^{0} x (x + 4)^3\, dx$ (11) $\int_{10}^{3} x \sqrt{x + 1}\, dx$

(12) $\int_{0}^{1} 2 \sin \pi z\, dz$ (13) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg\, z \sec^2 z\, dz$ (14) $\int_{0}^{3} (2x - 7e^x)\, dx$

Répondez à ce qui suit :

15 Si $\int_1^5 f(x)\,dx = 10$ et $\int_1^5 g(x)\,dx = -2$, calculez la valeur de

a $\int_1^5 [f(x) + g(x)]\,dx$ b $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ c $\int_5^1 3\,g(x)\,dx$

16 Si f est une fonction continue sur l'intervalle [-4 , 4] et $\int_0^4 f(x)\,dx = 3$.

calculez la valeur de

a $\int_0^4 [f(x) + 2]\,dx$ b $\int_{-4}^4 f(x)\,dx$, f est impaire

c $\int_{-4}^4 f(x)\,dx$, f est paire

17 Si $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ quand } x < 2 \\ x \text{ quand } x > 2 \end{cases}$, trouvez $\int_0^6 f(x)\,dx$

Applications sur l'intégral fini

3 - 4

1- Aires dans le plan

Réfléchissez et discutez

1. Calculez l'aire de la région colorée dans les figures suivantes géométriquement.

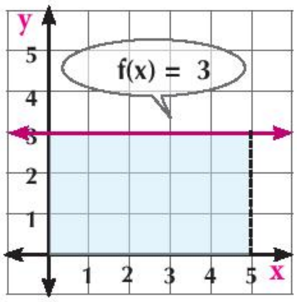


Figure (1)

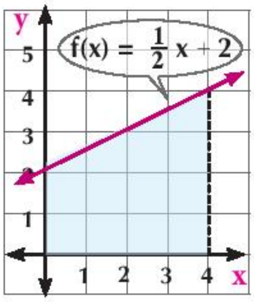


Figure (2)

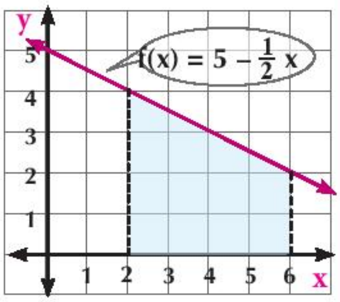


Figure (3)

2. pour chaque figure calculez $\int_a^b f(x)\,dx$ où f(x) est l'équation de la courbe et les droites x = a , x = b déterminent la région colorée.

3. Comparez l'aire de chaque figure et la valeur de l'intégral ; que peut-on déduire ?

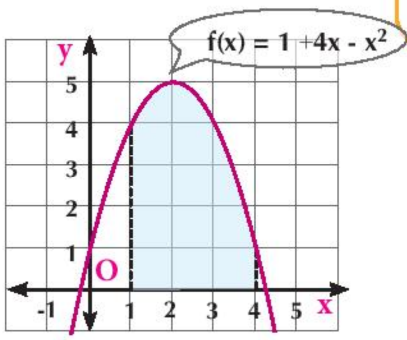
l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses sur l'intervalle [a , b]

Théorème Si la fonction f est continue sur l'intervalle [a, b] et f (x) $\geqslant$ 0 dans cet intervalle. A est l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses et les droites x = a et x = b, alors:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple
L'aire desous la courbe

(1) La figure ci-contre montre la courbe représentative de la fonction f où $f(x) = 1 + 4x - x^2$. calculer l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses et les droites x = 1, x = 4



Allez apprendre

- Connaître l'aire comme intégral finie
- Calculer l'aire limitée par la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses sur un intervalle fermé
- Calculer l'aire de la région comprise entre les courbes sécantes

Vocabulaire de bas

- Aire
- Unité carrée
- Axe de révolution
- Solide de révolution

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Solution

f est continue sur l'intervalle $[1, 4]$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in [1, 4]$

$\therefore A = \int_1^4 f(x)\,dx \qquad = \int_1^4 (1 + 4x - x^2)\,dx$

$= [x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3]_1^4 \qquad = [4 + 32 - \frac{64}{3}] - [1 + 2 - \frac{1}{3}]$

$= 36 - \frac{64}{3} - 3 + \frac{1}{3} = 12$ unité d'aire

Essayez de résoudre

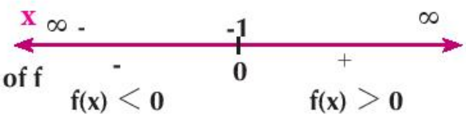
1) Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 2$ où $f(x) = 3x^2 + 1$

Exemple L'aire au dessus l'axe des abscisses et la courbe d'une fonction

2) Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $f: f(x) = \sqrt[3]{2x + 2}$ et la droite $x = 3$ au dessus l'axe des abscisses .

Solution

On calcule les zéros de la fonction en mettant $f(x) = 0$



$\therefore \sqrt[3]{2x + 2} = 0 \qquad$ donc . : $x = -1$

$\therefore$ l'aire demandé $A \quad = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{3} (2x + 2)^{\frac{1}{3}}\,dx = [\frac{3}{4 \times 2}(2x + 2)^{\frac{4}{3}}]_{-1}^{3}$

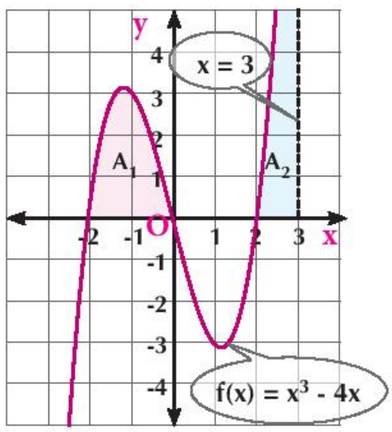
$= \frac{3}{8}[8^{\frac{4}{3}} - 0] = \frac{3}{8}(2^3)^{\frac{4}{3}} = 6$ unité carrée

Essayez de résoudre

2) Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $f: f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ et la droite $x = 4$ et situeé au dessus de l'axe des abscisses.

Exemple l'aire limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses

3) Si $f:]-\infty, 3] \rightarrow R$ où $f(x) = x^3 - 4x$. Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction et située au dessus l'axe des abscisses.



Solution

On calcule les points d'intersections de la courbe avec l'axe des abscisses (les zéros de la fonction)

$f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x\,(x - 2)\,(x + 2)$

Quand $f(x) = 0$ $\quad \therefore x = 0$ or $x = 2$ or $x = -2$

D'après l'etude du signe de la fonction on a

$f(x) > 0$ sur l'intervalle [-2; 0] sur l'intervalle [2, 3]

$\therefore$ l'aire demandé $A = A_1 + A_2 = {}_{-2}\int^{0} (x^3 + 4x)\,dx + {}_{2}\int^{3} (x3 - 4x)\,dx$

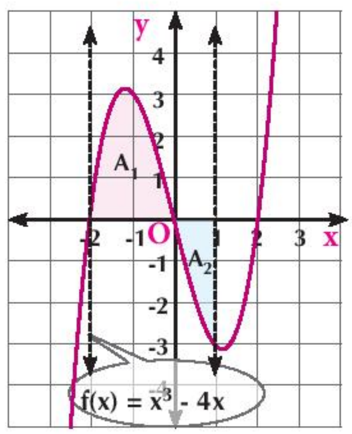
$= \frac{1}{4}x^4 - 2x2]^0_{-2} + [\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]^3_2$

$= (0 - (-4)) + (\frac{81}{4} - 18 - (-4))$

$= \frac{121}{4}$ Unité carrée

Remarque importante

Pour déterminer l'aire comprise entre la courbe de la fonction et l'axe de abscisses et les droites $x = -2$; $x = 1$, comme montre la figure ci-contre .



On trouve que:

$f(x) > 0$ quand $x \in [-2, 0]$, $f(x) \leqslant 0$ quand $x \in [0, 1]$

$\therefore$ l'aire demandée $A = A_1 + A_2$

$= {}_{-2}\int^{0} (x^3 - 4x)\,dx + |\,{}_{0}\int^{1} (x^3 - 4x)\,dx\,|$

$= [\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]^0_{-2} + |\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]^1_0|$

$= 4 + |(\frac{1}{4} - 2) - 0| = 4 + |-\frac{7}{4}| = \frac{23}{4}$ unité carrée .

Essayez de résoudre

3) Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $y = 3 + 2x - x^2$ et l'axe des abscisses.

Pensé critique

Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $y = 3 + 2x - x^2$ et les droites $x = -1$, $x = 4$ et $y = 0$

Exemple Application Architecture des aires

4) Un Architect à désigner la rentrée d'une hôtel à la forme d'un arc d'équation $y = -\frac{1}{2}(x-1)(x-7)$ où x mesuré en mètre, cette entrée a été couverte par de glaces dont le mètre carré coûte 1500 L.E. Quel est le coûte des glaces?

Solution

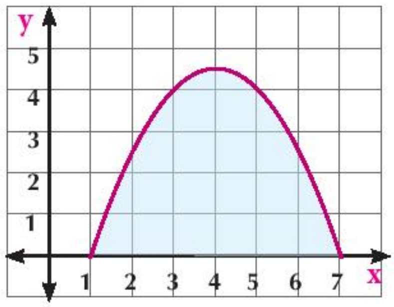
Modélisation du problème :

Le coût de glaces = l'aire des glaces en mètre carré $\times$ le prix d'un mètre carré

Soit le prix total = P L.E., A = l'aire de glaces en mètre carré

$\therefore \quad P = 1500 \times A$ (1)

Calcul l'aire des glaces :



Soit le plan horizontale l'axe des abscisses ; dont l'équation y = 0 l'équation de l'arc de la rentrée y = f(x) tel que :

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-7)$

$\therefore$ Si $f(x) = 0$ alors : $x = 1$ ou $x = 7$

alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, 7]$

L'aire $A = \int_1^7 -\frac{1}{2}(x-1)(x-7)\,dx = \int_1^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2}\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{7}{2}x\right]_1^7 = \frac{49}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) = 18$ (2) **de (1), (2)**

$\therefore k = 1500 \times 18 = 27000$

c-a-d: le coût de couvrir l'entrée de l'hôtel par de glaces est 27000 L.E

Essayez de résoudre

4) Si le coût de couvrir d'un mètre carré des couloirs de l'hôtel par de granite est 400 L.E. Si on a couvrest 5 couloirs de même aire par de granite, chacun limité par la courbe de la fonction f et les droites d'équations x = 0 et y = 0 où $f(x) = 12 - \frac{1}{3}x^2$, **Calculez le prix de couvrir les 5 couloirs**.

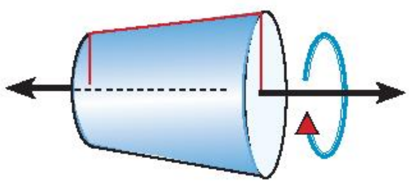
2- Volumes de solides de révolution

Reflichissez et discutez

Avez-vous vu Alfoackher maker, qui transforme le terreau en Antiquités et ustensiles de cuisine en mélangeant l'argile Aswani avec de l'eau et le coupé et placé autour de l'axe spins, et le façonner avec ses doigts et ses Aides pour produire des corps avec des formes attrayantes. Étant donné que ces objets sont appelés?

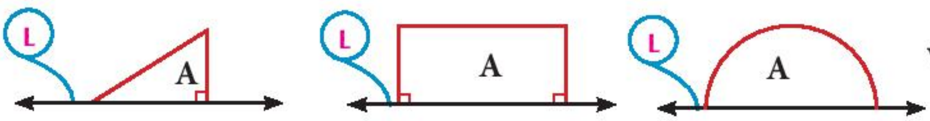
- On Conçu les bouteilles en plastique pour remplir de l'eau gazeuse, les jus et de l'huile en différentes volumes et capacités. Comment vous pouvez calculer ses volumes et ses capacités quand on les conçut?

Solide de révolution

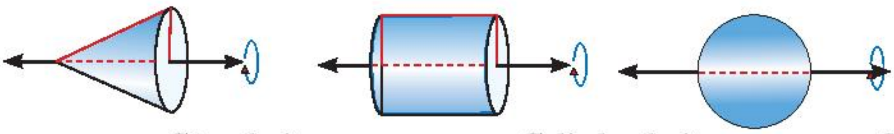


Le Solide de révolution engendré par la rotation d'une région plane une tour complète autour d'une droite fixe du plan qui est appelée «axe de révolution».

Les figures suivantes montrent quelques exemples des solides de révolutions obtenu par l'aire A quand il fait une tour complète autour la droite **L**



Volume de révolution



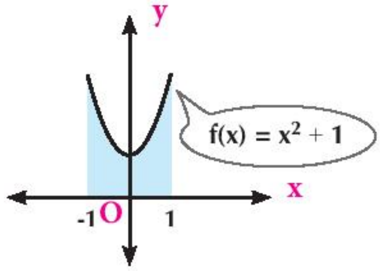
Cône droit　　Cylindre droit　　**Sphère**

dré par la rotation d'une région plane autour d'un axe .

> **Définition**
>
> Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a , b] , $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a , b]$, alors le volume de solide engendré par la rotation d'une région limité par la courbe $y = f(x)$ et l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$, une tour complète autour de l'axe des abscisses est : $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

Exemple Rotation autour de l'axe des abscisses

Calculez le volume de solide engendré par la rotation d'une région limité par la courbe f et l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 1$, une tour complète autour de l'axe des abscisses, tel que $f(x) = x^2 + 1$



Solution :

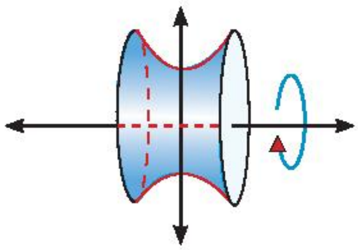
La fonction f est un polynôme continue sur l'intervalle [-1, 1], $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$

Soit le volume obtenu de la rotation = V

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{56}{15} \pi \text{ unité cube}$$



Essayez de résoudre

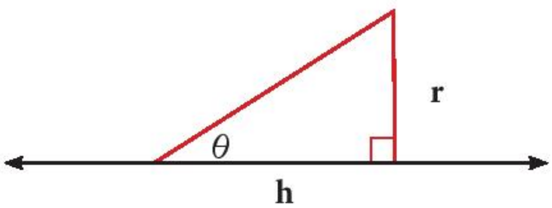
Calculez le volume de solide engendré par la rotation d'une région limitée par la courbe f et l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$, une tour complète autour de l'axe des abscisses, tel que $f(x) = x$. Quel est le nom du solide engendré ? Expliquez comment vérifier de votre réponse.

Exemple applications des volumes

En utilisant l'intégral, démontrez que le volume du cône droit est égale à $\frac{\pi}{3} r^2 h$ où r la longueur de rayon de la base, h sa hauteur.

Solution :

Le cône droit est engendré par la rotation d'un triangle rectangle de tel sorte que l'un de deux côtés de l'angle droit est situé sur l'axe des abscisses autour de l'axe des abscisses une tour complète.

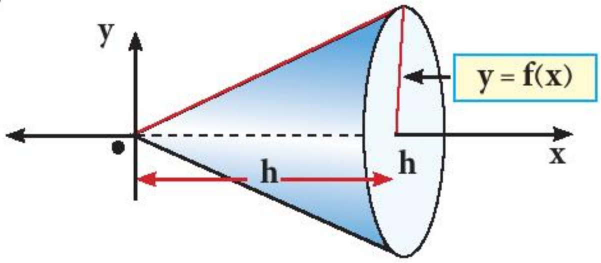


On trouve la relation entre x et y = f(x)

$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$ (1) $\therefore y = x \text{ tg } \theta = f(x)$

$\because V = \pi \int_a^b [f(x)^2] \, dx = \pi \int_0^4 x^2 \text{ tg}^2 \theta \, dx$

$= [\frac{\pi}{3} x^3 \text{ tg}^2 \theta]_0^h = \frac{\pi}{3} h^3 \text{ tg}^2 \theta$ (2)



de (1) $\text{tg } \theta = \frac{y}{x} = \frac{r}{h}$

$\therefore \tan^2 \theta = \frac{r^2}{h^2}$

Substituant en (2) $\therefore V = \frac{\pi}{3} \frac{r^2}{h^2} \times h^3 = \frac{\pi}{3} r^2 h$

Essayez de résoudre

6) En utilisant l'intégral , démontrez que:

a) Volume de la sphere = $\frac{4}{3} \pi r^3$
(r est la longueur du rayon de la sphére)

b) volume d'un cylindre circulaire droit = $\pi r^2 h$
(r est la longueur du rayon de sa basse et h sa hauteur)

Rappelle

L'équation du cercle du ceutre (0 ; 0) et de rayon (r) is:
$x^2 + y^2 = r^2$

Exemple

Rotation autour de l'axe des abscisses

3) Trouvez le volume du solide engendré par la rotution de la région limitée par la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'axe des abscisses, où a et b sont deux constants une tour compléte autour de l'axe des abscisses.

Solution :

$\because$ La rotation autour de l'axe des abscisses $\therefore y^2 = b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2})$

Bornes de l'intégral :

y = 0 $\therefore x^2 = a^2$ **c-a-d** x = - a , x = a

$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) \, dx = 2 \pi b^2 \int_0^a (1 - \frac{x^2}{a^2}) \, dx$ **(pourquoi ?)**

$= 2 \pi b^2 [x - \frac{x3}{3a^2}]_0^a = 2 \pi b^2 [a - \frac{1}{3} a]$

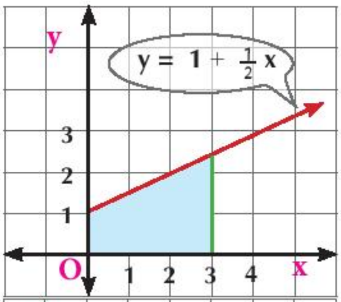
$= \frac{4}{3} \pi b^2 a$ unité cubique .

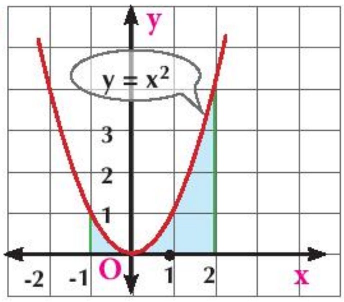
Essayez de résoudre

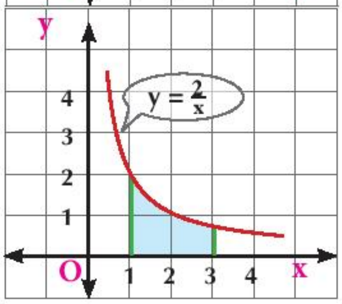
7) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe d'équation $y = 2x - x^2$ et l'axe des abscisses, une tour compléte autour de l'axe des abscisses.

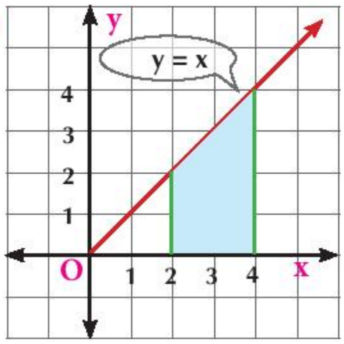
Exercices 3 - 4

Ecrivez l'intégral finie qui exprime l'aire de la partie colorée dans ce qui suit, puis calculez sa valeur.

1


2


3


4


Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

5 L'aire de la surface limitée par les droites $y = x$, $x = 2$ et $y = 0$: est égale à :

a $\frac{1}{2}$ b 1 c 2 d 4

6 L'aire de la surface limitée par la courbe de la fonction $y = x^3$ et les droites $y = 0$ et $x = 2$ est égale à

a 8 b 4 c 2 d 1

7 Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 1$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est égale à.

a $-\pi$ b 0 c π d 2π

8 Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = \frac{1}{x}$ et les droites ; $y = 1$ et $y = 2$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonné est égale à.

a $\frac{\pi}{4}$ b $\frac{\pi}{2}$ c π d 2π

Dans ce qui suit, calculez l'aire de la région comprise entre :

9. La courbe $y = 5 - x^2$, l'axe des abscisses et les droites $x = -2$ et $x = 1$

10. Les droites : $x + 2y = 9$, $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$

11. La courbe $y = \sqrt{x+4}$ et les droites $x = 0$, $x = 5$ et $y = 0$

12. La courbe $y = 3 - 2x - x^2$ et l'axe des abscisses

13. La courbe $y = \dfrac{4}{x^2}$ et les droites $x = 1$, $x = 4$ et $y = 0$

14. La courbe de la fonction f: $f(x) = (3 - x)(x - 1)^2$ et les deux axes où $f(x) > 0$

15. La courbe de la fonction f: $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ et les droites $x = 4$ et $y = 0$ où $f(x) > 0$

Calculez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les courbes et les droites données au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses dans ce qui suit :

16. $y = x$, $x = 3$, $y = 0$

17. $y = 3 - x$, $x = 0$, $y = 0$

18. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

19. $y = |x|$, $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$