Statistique

Troisième secondaire

Livre de l'élève

2025/ 2026

Nom : ....

Classe : ....

Ecole : ....

Auteurs

Mr. Kamal Younis Kabsha

Prof.Dr. Ahmed Kamal El-kholy

Traduction, préparation et révision

M. Fathi Ahmed chehata

M. Akram Fawzy

M. Khaled Sayed El shehabey

Premiére édition 2016 / 2017

Numéro de dépôt 8701 / 2016

I.S.B.N 5 - 029 - 706 - 977 - 978

SAKKARA PUBLISHING

Introduction

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous sommes heureux en présentant ce livre d'expliquer la philosophie à travers laquelle a été établie la matière éducative qui peut être résumée comme suit:

1. Développer l'unité des connaissances et sa complémentarité en mathématiques, et l'intégration des concepts et l'interdépendance entre tous les domaines des mathématiques scolaires.
2. Fournir à l'apprenant ce qui est fonctionnel à partir des informations , des concepts et des plans pour résoudre les problèmes.
3. Adopter l'entrée de normes nationales pour l'enseignement en Egypte et les niveaux d'enseignement et cela à travers.

   a) Déterminer ce que l'apprenant devrait apprendre et pourquoi l'apprendre.

   b) Déterminer avec précision les résultats d'apprentissage qui ont mis l'accent sur les points suivants:

   Que l'apprentissage des mathématiques soit un objectif auquel aspire l'apprenant tout au long de sa vie – que l'apprenant soit proactif et intéressé aux mathématiques – que l'apprenant soit capable de travailler seul ou en équipe – que l'apprenant soit actif, persévérant, studieux et créatif – que l'apprenant soit en mesure de communiquer avec la langue des mathématiques.
4. Proposer des moyens et des méthodes d'enseignement à travers le livre (le guide de l'enseignant).
5. Proposer des activités variées en rapport avec le contenu pour que l'apprenant choisisse son activité adéquate.
6. Respecter les mathématiques et respecter les contributions humaines du monde entier, de la nation et de la patrie ; connaître également les contributions et les réalisations des savants musulmans, Arabes et étrangers.

Enfin ... nous espérons que nous avons réussi à réaliser ce travail pour le bien de nos enfants et notre chère Egypte

Sommaire

Sommaire(suite)

Unité
1

Corrélation et régression

Introduction de l'unité

La Statistique est l'une des branches les plus importantes des mathématiques qui a de nombreuses applications. Elle s'intéresse a recueillir et représenter les données et les réduire sous forme d'indicateurs numériques pour décrire et mesurer ses caractéristiques de base et les analyser, afin de prendre des décisions adéquates en raison de leur grande importance pratique dans divers domaines des sciences physiques, humaines, économiques, sociales et d'autres.

Cette unité concerne l'analyse des données des deux variables et l'étude du degré et la nature de la relation entre eux et la forme de cette relation. Elle attache d'abord une importance à étudier la corrélation qui indique le degré et la force de la relation entre deux variables. Cette relation peut prendre la forme proportionnelle.

Il est à noter que la corrélation étudie la relation et la direction entre un variable et un autre, mais nous devons nous rendre compte que cette relation ne montre pas le lien de causalité car elle n'indique pas la présence d'une influence d'un variable sur un autre comme on le verra avec la première leçon de cette unité.

Cette unité aborde également l'étude de la régression linéaire simple qui s'intéresse à estimer la forme de cette relation et à partir de laquelle il est possible de prévoir la valeur du variable dépendant si nous connaissons la valeur du variable indépendant. Sa précision augmente chaque fois que l'échantillon sélectionné était au hasard, et nous allons aborder dans cette unité des techniques modernes : calculatrices scientifiques, programmes statistiques informatiques (tels que les logiciels SPSS) pour faire les calculs et de faire les graphiques propres à la corrélation et la régression linéaire entre deux phénomènes.

Objectifs de l'unité

A la fin de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Connaitre le sens de la corrélation et son degré
- Calculer le coefficient de corrélation par différentes méthodes (méthode de Person ; Spearman) et interpréter son sens
- Comprendre la signification de la droite de régression et son importance dans l'étude entre deux variables
- Représenter la relation entre deux variables dans un repère cartésien et vérifier l'existante et la dégrée de la relation
- Connaitre le sens du coefficient de régression et interpréter son sens
- Trouver l'équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés
- Utiliser la calculatrice et l'internet pour effectuer d'opérations numériques et les représentation graphiques des corrélations et régression.
- Utiliser l'équation de la droite de régression pour estimer la valeur d'une variable en connaissant la valeur de l'autre variable
- Appliquer la corrélation et la régression dans des situations quotidiennes
- Savoir l'importance d'utiliser la corrélation et la régression pour résoudre des problèmes quotidiennes et sociales

Vocabulaire de base

- *Corrélation*
- *Régression*
- *Corrélation linéaire*
- *Coefficient de corrélation*
- *Corrélation directe*
- *Corrélation indirecte*
- *Nuage de dispersion*
- *Coefficient de corrélation de Pearson*
- *Coefficient de corrélation de Spearman*
- *Droite de régression*
- *Moindres carrés*

Leçons de l'unité

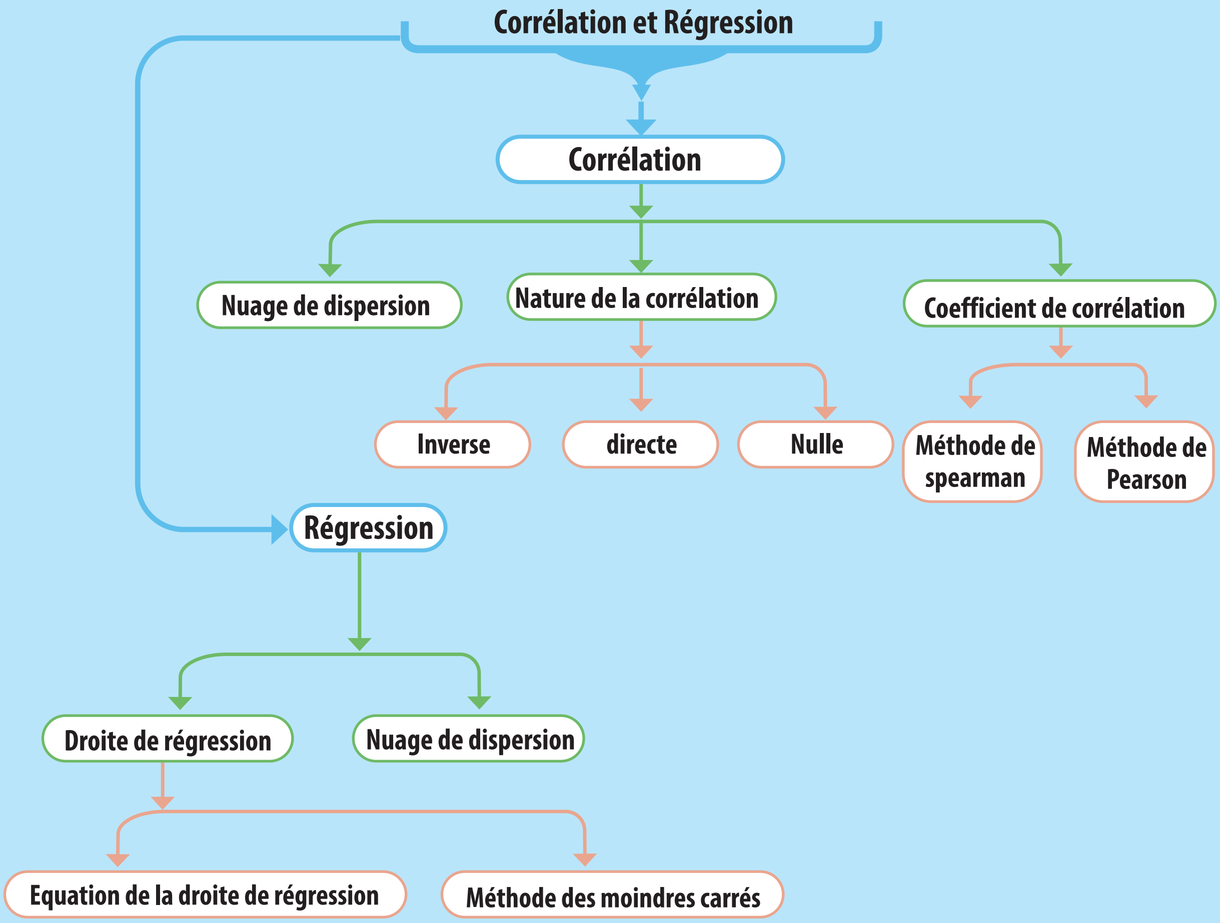
Leçon (1-1) Corrélation

Leçon (1-2) Régression

Matériels utilisés

Calculatrice scientifique- programme Excel- programme spss

Organigramme de l'unité



unité 1
1 - 1

Corrélation

A apprendre

- Corrélation
- Corrélation linéaire
- Coefficient de corrélation
- Corrélation directe
- Corrélation inverse
- Nuage de dispersion
- Coefficient de corrélation de Pearson
- Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Vocabulaire de base

- Coefficient de corrélation linéaire de Pearson
- Coefficient de corrélation des rangs de Spearman
- Définition de la corrélation
- Nuage de dispersion
- Corrélation directe et indirecte
- Coefficient de corrélation linéaire

Introduction:

On a déjà étudie dans les statistiques comment décrire un ensemble de datas représentant un phénomène en utilisant quelques grandeurs comme la dispersion et le coefficient de variation. Dans cette unité, tu vas étudier comment décrire la relation entre deux variables. Si l'une de ces deux variables varie dans une direction donnée (croissante ou décroissante), donc la deuxième variable va varier dans une direction donnée aussi (croissante ou décroissante). Dans cette situation, on dit que la corrélation est directe. Si l'une des deux variables varie de façon croissante et l'autre de façon décroissante (vise versa). On dit que la corrélation est indirecte si l'une des deux variables varie de façon croissante et l'autre de façon
décroissante (vise versa).

Corrélation:

Réfléchit et discute

Observez les exemples suivants et notez vos remarques:

1- La relation entre la longueur d'un carré et son aire.
2- La relation entre pression artérielle et l'âge.
3- Augmentation du prix d'une unité d'un produit et la demande de l'acheter.
4- Diminution de la température et la demande de la consommation de l'énergie.
5- La relation entre l'altitude de la surface de la mère et l'augmentation de la température.

D'après les exemples précédents nous remarquons que:

- Les variables dépendantes varient dans le même sens, c-à-d l'augmentation ou la diminution de l'une implique l'augmentation ou la diminution de l'autre comme dans les exemples 1 ; 2 et 3. Nous disons que : la corrélation entre elle est positive (directe).

Matériels utilisés — Calculatrice scientifique

Dans les exemples 4 et 5, nous remarquons que les variables varient dans le sens inverse c-a-d l'augmentation ou diminution de l'une implique la diminution ou l'augmentation de l'autre. Nous disons que : la corrélation entre elles estnégative (indirecte).

Définition La corrélation est une méthode statistique pour déterminer le degré et la nature de la relation entre les deux variables.

La relation entre les deux variables est comprise entre une degré forte et une degré faible, quand la relation est forte, alors la connaissance de l'une des deux variable aide à prévoir la valeur de l'autre variable. quand la relation est faible , alors la connaissance de l'une des deux variable faible n'aide pas à prévoir la valeur de l'autre variable. L'une des méthodes qui nous aide à connaitre le degré de la relation et sa nature est déterminer le nuage de dispersion.

Nuage de dispersion

Définition Nuage de dispersion est une représentation graphique de quelques couples (x : y) pour décrire la relation entre deux variables.

Si la première variable est x , la deuxième est y, alors les figures suivantes montrent la relation entre x et y qui représente le nuage de dispersion.

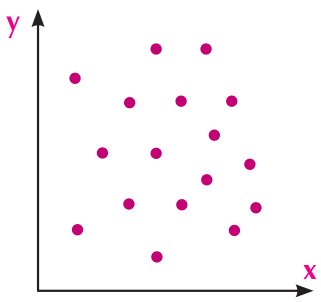


Figure 1
Pas de corrélation

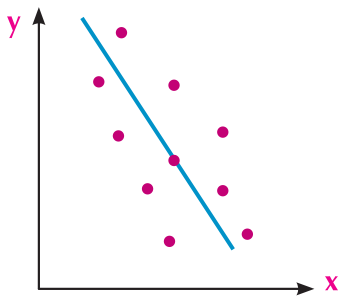


Figure 2
Corrélation linéaire indirecte (négative)

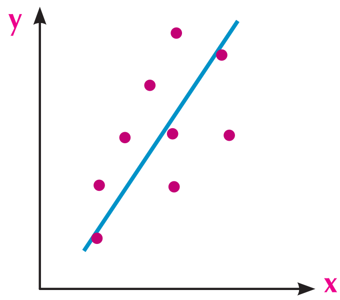


Figure 3
Corrélation linéaire directe (positive)

Corrélation linéaire

Définition La corrélation linéaire est un grandeur de mesurer le degré entre deux variables.

Activité

Tracer le nuage de dispersion des datas suivants en déterminant la nature de la relation exprimant ses datas.

①

x	7	8	9	10	11	12
y	13	14	17	18	21	23

②

x	3	4	7	8	11	15
y	23	22	20	18	17	16

3

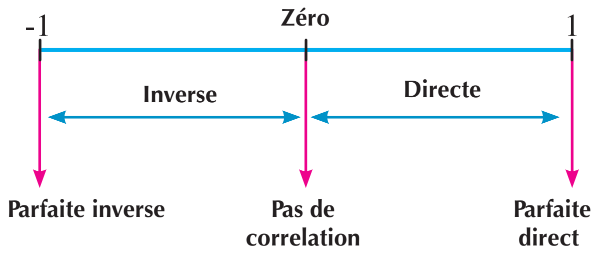
x	7	9	11	13	15	16
y	14	7	20	6	12	10

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est noté (r). Elle est une quantité scalaire qui mesure le degré de la corrélation entre deux variables où $-1 \leqslant r \leqslant 1$. Nous disons que la corrélation est parfaite directe si le coefficient de corrélation r = 1,elle est parfaite, inverse si le coefficient de corrélation r = -1 et nulle (pas de correlation) si le coefficient de corrélation r = 0.

Nous remarquons que:

Si le coefficient de corrélation est très proche de 1, alors la corrélation est directe forte Si le coefficient de corrélation est très proche de 0, alors la corrélation est directe faible Nous disons la même chose pour la corrélation indirecte comme montre la figure ci-contre.



Expression orale : choix multiple:

Choisis la bonne réponse dans ce qui suit dans ce qui suit, le coefficient le plus forte est:

a – 0,8 b – 0,5 c 0,4 d 0,7

Coefficient de corrélation de Pearson

Un échantillon de n personnes nous a fourmi des valeurs pour les deux variables x et y.

Les valeurs de la première variable x sont: $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n$

Les valeurs de la deuxième variable y sont: $y_1 , y_2 , y_3 , \ldots\ldots , y_n$

Le coefficient de corrélation de Pearson entre les variables x et y ou le coefficient linéaire de corrélation est notér. Il est égale à:

$$P = \frac{n \Sigma x\, y - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

où: "Σ" signifie la somme.

$$\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots + x_n ,$$

$$\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3 \ldots\ldots + y_n ,$$

$$\Sigma x\, y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ldots\ldots + x_n y_n$$

$$\Sigma x^2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^2 \ldots\ldots + x^2_n ,$$

$$\Sigma y^2 = y_1^{\,2} + y_2^{\,2} + y_3^{\,2} \ldots\ldots + y_n^2$$

Exemple

1 Le tableau suivant indique les notes de dix élèves en histoire et géographie.

Histoire x	75	80	93	65	87	71	98	69	84	78
Géographie y	82	78	86	72	91	80	95	73	89	74

Calcule le coefficient de corrélation de Pearson entre x et y en déterminant son degré et sa nature.

Solution

On forme le tableau suivant:

x	y	x^2	y^2	xy
75	82	5625	6724	6150
80	78	6400	6084	6240
93	86	8649	7396	7998
65	72	4225	5184	4680
87	91	7569	8281	7917
71	80	5041	6400	5680
98	95	9604	9025	9310
69	73	4761	5329	5037
84	89	7056	7921	7476
78	74	6084	5476	5772
$\Sigma x = 800$	$\Sigma y = 820$	$\Sigma x^2 = 65014$	$\Sigma y^2 = 67820$	$\Sigma xy = 66260$

$$\because P = \frac{n \Sigma x y - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\therefore P = \frac{10 \times 66260 - (800 \times 820)}{\sqrt{10 \times 65014 - (800)^2}\sqrt{10 \times 67820 - (820)^2}}$$

$$= \frac{6006}{\sqrt{10140}\sqrt{5800}} \simeq 0,8606$$

la corrélation est directe .

Essaye de résoudre

1 D'après le tableau suivant:

x	20	23	24	25	28	30
y	35	31	30	27	29	28

Calculez le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y en déterminant sa nature

Utilisation de la calculatrice scientifique:

La plupart des calculatrices scientifiques disponibles dans le marché nous aide à trouver les résultats des opérations du tableau précédent ainsi que le coefficient de corrélation de la manière suivante:

La préparation de la calculatrice:

En appuyant sur MODE puis 3

Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)

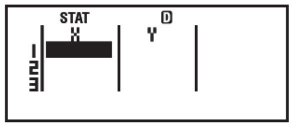
On choisit du menu apparaissant:

Paired-variable (X, Y), linear regression (y = A + Bx)	2 (A+BX)

L'insertion des informations:

On remplit les valeurs (x , y) du tableau indiqué dans la figure ci-contre en écrivant le nombre disponible dans le tableau =

MODE 3 (STAT) 2 (A+BX)



Une fois son écriture terminée, un appuie pour terminer toutes les valeurs (x ; y).

La recherche des résultats:

On appuie sur les touches SHIFT 1 (Start) on obtient: sum 3

A partir de ce menu, on choisi:

Σx^2: 1 , Σ x: 2 , Σy^2: 3 , Σy : 4 , Σxy : 5

Et cela en appuyant sur les touches de 1 à 5 séparément.

Pour trouver le coefficient de corrélation (R) on appuie sur les touches suivantes:

(STAT) , De la liste suivante, on appuie sur 5 : Reg. De la liste apparue, on appuie sur 3 : R.

On obtient le coefficient de corrélation demandé entre les deux variables x et y.

Activités

Utilisez la calculatrice pour vérifier que la solution de l'exemple précédent est juste

Le logiciel SPSS statistique

Le logiciel SPSS est l'abréviation de (Statistical Package for the Social Sciences) ce qui veut dire les paquetages statistiques des sciences sociales.

Le logiciel SPSS est un ensemble des paquetages ou des données arithmétiques pour analyser ces données.

Ce logiciel est utilisé dans les recherches scientifiques contenant des données numériques :

Ce logiciel peut lire les donnes de tous les fichiers, les analyser et obtenir les résultats et les rapports statistiques.

Ce logiciel permet l'utilisateur de transformer les données sous forme de variables et de nouvelles données en utilisant une équation ainsi que la sauvegarde des données dans des fichiers, leurs nominations, la modification des noms des fichiers des données ou la récupération des données et des fichiers.

Et cela, à partir du contrôle de la liste des ordres et des choix disponibles dans le logiciel pour comprendre l'ensemble des étapes de l'analyse des données et l'opération statistique en 4 étapes suivantes :

1 - La symbolisation des données.

2 - L'insertion des données dans le logiciel.

3 - Le choix de la forme convenable, l'examinassions des données et leur analyse.

4 - La détermination des données variables qu'on veut analyser et la réalisation de l'opération statistique.

Le fonctionnement du logiciel SPSS:

Accédez à ce logiciel en appuyant sur la touche (Start) se trouvant dans le menu principal, accédez a la liste des programmes (Program), cherchez le logiciel (SPSS) et appuyez sur ce dernier deux fois afin d'y accéder.

Le contenu du logiciel et ses fonctionnalités:

La liste des commandes:

La liste des commandes utile pour le fonctionnement du logiciel. L'utilisateur choisi la commande qu'il veut en cliquant sur l'icône de chaque commande statistique et reçoit le résultat dans la liste des rapports.

La liste des commandes contient 9 commandes principales. En cliquant sur chacune, on obtient des listes secondaires autres que l'icône d'aide (Help)

L'affichage des données:

C'est un champ à partir duquel l'utilisateur peut contrôler l'insertion ou la suppression des données variables en ajoutant une variable indépendantes dans la colonne (Column) dans l'écran des données. L'utilisateur peut changer vers l'affichage des variables en basculant entre (Data View) et (Variable View) qui se trouvent en bas à gauche de l'écran des variables.

L'écran des variables:

L'écran des données variables se compose de colonnes parallèles contenant chacun les données propres à chaque variable. Pour afficher la définition de chaque variable, l'utilisateur appuie deux fois sur la souris (double click) ou appuie sur la commande (Variable View) qui se trouve en bas à gauche de l'écran des définitions et la liste suivante va apparaitre

Nom	Type
Volume	Valeurs

En appuyant sur cette liste, les valeurs apparaitront. Par la suite, On appuie sur la touche (Add) pour afficher la valeur du symbole et sa positon.

Des étapes contrôlables par l'utilisateur:

(1) La possibilité de récupération des données précédentes: L'utilisateur peut récupérer les données et les fichiers en appuyant sur la touche (File) puis sur la touche (Open) et choisi le fichiers contenant les données qu'il veut récupérer et qui contient les rapports statistiques effectués précédemment et enfin appuie sur la touche (Save).

(2) La sauvegarde des nouvelles variables dans un fichier: L'utilisateur peut sauvegarder les variables dans un fichier en appuyant sur la commande (Save) ou (Save as) pour effectuer la sauvegarde et nommer le fichier.

(3) L'insertion des modifications et la gestion des variables: L'utilisateur accède à la fenêtre (Data editor) et insère les données qu'il veut où il est capable de:

- Modifier les valeurs des données.
- Définir les variables ; en identifiant les types des données insérées, les indices économiques et les autres variables.

(4) L'utilisateur peut insérer une nouvelle variable afficher et visionner l'ordre des transactions effectuées à partir de la commande principale (Data) et procéder à tout changement souhaité tel que : insérer une variable, ajouter une nouvelle transaction ou changer l'ordre des données.

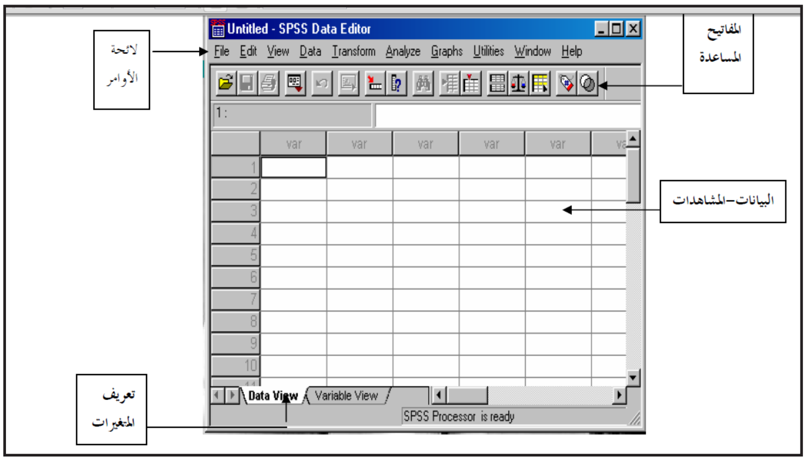
(5) La formation d'une nouvelle variable en utilisant une équation en accédant au menu principal (Transform), puis (Compute) et préciser un nom pour la nouvelle variable dans le menu (Targer Variable).

(6) La possibilité de supprimer une variable quelconque.

(7) La classification des transactions Le logiciel crée une nouvelle variable contenant une série de nombre dans le but de les classifier dans l'ordre croissant ou décroissant.

(8) Effectuer une opération statistique identifier la description statistique et la répétition des données.

(9) La possibilité de représenter les variables graphiquement pour afficher l'analyse des variables et l'interprétation des changements qu'ont subi les nouvelles variables.



Activité

Utilisez l'internet pour télécharger le logiciel (SPSS) du site: ***http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss/*** Puis vérifiez que la solution de l'exemple précédent est juste.

Exemple

2 Trouvez le coefficient de corrélation de Person entre les deux variables x et y en déterminant sa nature si.

$\Sigma x = 68$ | $\Sigma y = 36$ | $\Sigma xy = 348$
$\Sigma x^2 = 620$ | $\Sigma y^2 = 204$ | $n = 8$

Solution

$$\because r = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\therefore r = \frac{8 \times 348 - (68 \times 36)}{\sqrt{8 \times 620 - (68)^2}\ \sqrt{8 \times 204 - (36)^2}} = \frac{336}{\sqrt{336}\ \sqrt{336}} = 1$$

La relation entre les deux variables x et y est directe parfaite car le coefficient de corrélation est 1.

Essaye de résoudre

2. Calculezle coefficient de corrélation de Pearson entre x et y en déterminant son degré et sa nature si.

$\Sigma x = 92$ | $\Sigma y = 36$ | $\Sigma xy = 372$
$\Sigma x^2 = 1100$ | $\Sigma y^2 = 204$ | $n = 8$

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Réfléchit et discute

Un professeur de statistiques a fait une étude entre les résultats de deux matières scolaires pour 7 étudiants et les a inscrit dans le tableau suivant:

1ère	Faible	Passable	Faible	Bien	Faible	Excellent	Très Bien
2ème	Faible	Passable	Bien	Passable	Faible	Très Bien	Passable

Il n'est pas possible d'utiliser le coefficient de corrélation Pearson dans la section " Réfléchissez et discutez " parce qu'il est basé sur les datas scalaires (numériques) uniquement. Mais le cas des datas descriptives, on peut utiliser un autre coefficient de corrélation nommé coefficient de corrélation des rangs de Spearman. Il donne une valeur de corrélation pour tous datas (scalaires et descriptives).

Ce coefficient dépend de ranger les valeurs des variables dans un ordre croissant ou décroissant, puis en applique la relation suivante

$$r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2 - 1)}$$

Où D est la différence entre toutes les paires de rangs correspondants et n le nombre de paires de données.

Remarque que:

- On peut calculer le coefficient des rangs de Spearman si les datas sont numériques ou descriptives mais on ne peut pas calculer le coefficient de Pearson si les dates sont descriptives.
- L'avantage du coefficient des rangs de Spearman est sa simplicité même si les datas ne sont pas rangés.
- Pourtant , son inconvénient est sa négligence des différences des nombres en calculant les ranges, il est donc moins précis.

Exemple

③ Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman dans (Réfléchissez et discutez) en déterminant sa nature et son degré.

Solution

Dans cet exemple, on range les mentions des deux matières dans l'ordre croissant ou décroissant comme montre le tableau suivant.

Première matière	Faible	Passable	Faible	Bien	Faible	Excellant	Très bien
Rang avec répétation	1	4	2	5	3	7	6
Rang final	2	4	2	5	2	7	6

On remarque que la mention faible est répété 3 fois et est occupé les places 1 ; 2 ; 3.

donc le rang de chacun d'eux = $\frac{1+2+3}{3}$ = 2 (c'est la moyenne arithmétique des nombres 1 ; 2 ; 3).

Deuxième matière	Faible	Passable	Bien	Passable	Faible	Très bien	passable
Rang avec répétation	1	3	6	4	2	7	5
Rang final	1,5	4	6	4	1,5	7	4

On remarque que la mention faible est répété 2 fois et est occupé les places 1 ; 2.

donc le rang de chacun d'eux = $\frac{1+2}{2}$ = 1,5 (c'est la moyenne arithmétique des nombres 1 ; 2).

De même la mention passable est répété 3 fois et est occupé les places 3 ; 4 ; 5, donc le rang de chacun d'eux = $\frac{3+5+4}{3}$ = 4 On résume la solution dans le tableau suivant:

x	y	Rang des x	Rang des y	D	D^2
Faible	Faible	2	1,5	0,5	0,25
Passable	Passable	4	4	zéro	zéro
Faible	Bien	2	6	– 4	16
Bien	Passable	5	4	1	1
Faible	Faible	2	1,5	0,5	0,25
Excellant	Très bien	7	7	zéro	zéro
Trés bien	Passable	6	4	2	4
					21,5

$\because\ r = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2-1)}$ $\therefore\ r = 1 - \frac{6 \times 21,5}{7\,(49-1)}$

$= 1 - \frac{129}{336} \simeq 0{,}6161$ **la corrélation est directe.**

Essaye de résoudre

③ *Le tableau suivant indique l'étude de la relation entre le niveau des élèves dans les deux métiers statistique et mathématique*:

Statistique(x)	Passable	Très bien	Excellant	Très bien	Passable	Passable
Mathématique (y)	Bien	Bien	Très bien	Excellant	Bien	Faible

Calculezle coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les mentions en déterminant sa nature.

Exemple

④ D'après le tableau suivant, calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y:

x	4	7	8	5	8	12
y	7	6	6	4	6	10

Solution

On forme le tableau suivant:

x	y	Rang des x	Rang des y	D	D^2
4	7	6	2	4	16
7	6	4	4	0	0
8	6	2,5	4	–1,5	2,25
5	4	5	6	–1	1
8	6	2,5	4	–1,5	2,25
12	10	1	1	0	0
					21,5

$\because\ r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2-1)}$ $\therefore 1 = \frac{6 \times 21{,}5}{6\,(36-1)}$ $\simeq 0{,}3857$ La corrélation est directe

Réflexion critique: ΣD^2 est elle différente si on range les variable x et y dans l'ordre croissant ? Explique votre réponse.

Essaye de résoudre

④ D'après le tableau suivant, calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y en déterminant sa nature:

x	10	7	8	7	6	4
y	5	8	7	9	9	10

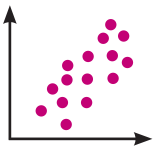
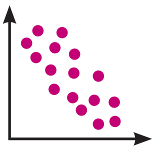
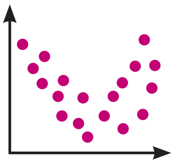
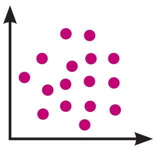
Exercices 1 - 1

Choisit la bonne réponse parmi les proposés:

1) Dans ce qui suit, le coefficient de corrélation le plus fort est:
   a) – 0,94   b) zéro   c) 0,5   d) 0,85

2) Dans ce qui suit, le plus fort coefficient de corrélation indirect est:
   a) – 0,2   b) – 0,5   c) – 0,7   d) – 0,8

3) Le nuage de dispersion qui représente une corrélation indirecte est:

a) 
b) 
c) 
d) 

4) Le coefficient de corrélation le plus faible est:
   a) - 1,2   b) - 0,7   c) 0,12   d) 0,9

5) Lequel des nombres suivant représente le plus fort coefficient de corrélation inverse:
   a) 0,3   b) 0,9   c) - 1,1   d) - 0,95

Répondre aux questions suivantes

6) D'après le tableau suivant

x	12	10	14	11	12	9
y	18	17	23	19	20	15

(i): Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y.

(ii): Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables x et y.

7) D'après le tableau suivant

x	7	7	8	3	7	11
y	8	4	12	2	10	11

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y.

8) D'après le tableau suivant

x	1	3	4	6	7	9
y	6	4	4	3	2	1

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

9) D'après le tableau suivant

x	6	5	7	8	10	6	7
y	4	7	5	6	8	7	8

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

10 D'après le tableau suivant

x	3	1	6	4	3	8
y	7	4	5	8	6	7

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

11 D'après le tableau suivant

x	Très bien	Très bien	Bien	Faible	Passable	Très bien
y	Bien	Passable	Bien	Excellant	Très bien	Passable

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y.

12 Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y en déterminant sa nature si:

$\Sigma x = 220$ $\Sigma y = 140$ $\Sigma x y = 2658$

$\Sigma x^2 = 5486$ $\Sigma y^2 = 2292$ $n = 10$

13 En lien avec la commerce: Le tableau suivant indique un ensemble de 6 livres selon leurs prix (x) et le taux des ventes (y).

Le prix (x)	Moins chère	Très moins chère	Bon marché	Très chère	Chère	Très chère
Vente (y)	Chère	Chère	Très chère	Moins chère	Bon marché	Moins chère

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre le prix du livre et son taux de vente.

14 En lien avec la propagande: un entreprise fait une étude sur ses dépenses sur la propagande x (en mille L.E) et son taux de vente y (mil unité). Le tableau suivant indique les datas de huit branches de cet entreprise:

x	19	18	7	10	4	13	15	5
y	12	10	7	9	6	13	14	12

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre la dépense sur la publicités et son taux de vente en déterminant sa nature.

15 En lien avec l'enseignement Le tableau suivant indique les notes de dix élève dans deux matières chimie et biologie.

Chimie	60	85	55	90	65	50	80	70	95	75
Biologie	55	75	50	95	60	65	85	80	90	70

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables en déterminant sa nature.

16 En lien avec les naissains: Dans une étude sur la relation entre l'âge de la mère et le nombre de ses enfants:

L'âge de mère	18	20	23	27	29	32	33	35
Nombre d'enfants	2	1	1	2	3	4	3	5

Calculele coefficient de corrélation des rangs de Spearman en déterminant sa nature.

unité 1

1 - 2

Régression

A apprendre

- Définition de régression
- Type de régression
- Equation de la droite de régression
- Méthode des moindres carrés
- Activités sur Equation de la droite de régression

Vocabulaire de base

- Régression
- Droite de régression
- Moindres carrés

Préliminaire:

Tu as déjà étudié la fonction et sa représentation graphique.

Dans la leçon précédente vous le savez le nuage de dispersion et l'objectif de sa représentation est de déterminer la nature de la relation entre les deux variables x et y ainsi que les propriétés de la corrélation peuvent être:

Relation linéaire   Relation linéaire indirecte

Relation non linéaire   Pas de relation

Dans cette leçon, on va étudier comment déterminer l'équation de la droite de régression et l'objectif de cette etude est d'aider le chercheur de connaitre la nature des datas et estimer des bons résultats.

Rappel

Une fonction est une relation entre deux ensemnles X et Y tel que de tout élément de X associe un et un seul élément de Y Une fonction est parfaitement déterminée Par son ensemble de définition, son ensemble image et sa regle

Définition La régression est une méthode statistique d'estimer la valeur de l'une des deux variables en connaissant la valeur de l'autre.

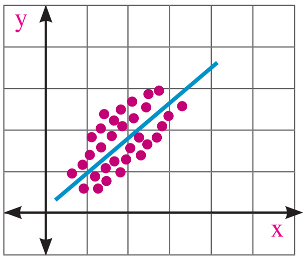
Différents types de régression:

a) **Régression linéaire**: Simple la variable dépendante (y) dépende d'une seule variable (x) à parie d'une relation linéaire.

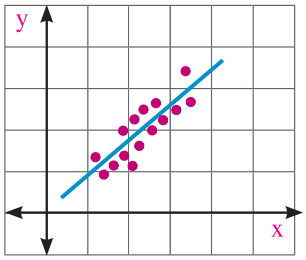
b) **Multiple régression**: la variable dépendante (y) dépende de plusieurs variables (x).

c) **Régression non linéaire**: Si la relation entre la variable dépendante (y) et les variables indépendante n'est pas linéaire (du deuxième degrée, troisième degrée, exponentielle , logarithmique ,.........) Dans cette leçon, on va étudier simple régression linéaire et les figures suivantes montrent la relation entre le coefficient de corrélation et le nuage des points sur la droite de régression. Quand ces points se rapprochent de cette droite, la valeur de (r) augmente ou diminue jusque ces points superposent à cette droite, dans ce cas la valeur de (r) est (1) ou (-1).

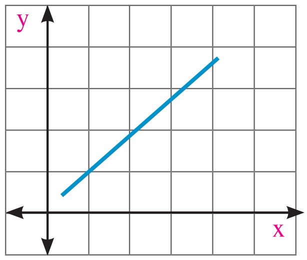
Matériels utilisés: Calculatrice scientifique   Programme SPSS   Programme Microsoft Excel



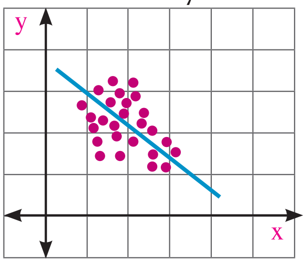
(1) Corrélation directe moyenne



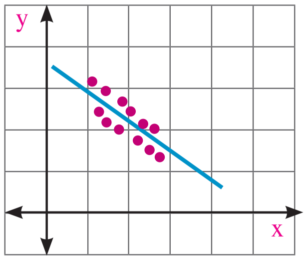
(2) Corrélation directe forte



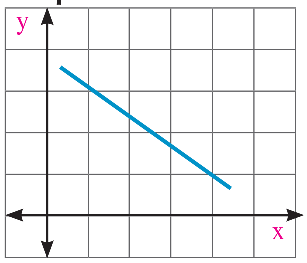
(3) Corrélation parfaite directe



(4) Corrélation indirecte moyenne



(5) Corrélation indirecte forte



(6) Corrélation parfaite indirecte

Equation de la droite de régression:

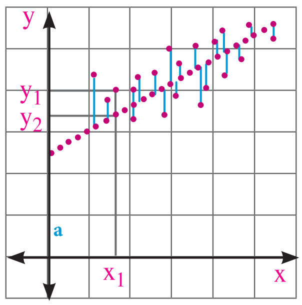
Tu as déjà étudié dans la géométrie analytique l'équation d'une droite de pente m qui coupe sur l'axe des ordonnées une partie c est : $y = mx + c$.

Dans les figures (2) et (5), le nuage des points montre que la relation entre les deux variables est linéaire car On peut imaginer qu'il ya une droite où les points sont très proches d'elle, mais dans les figures (1) et (4), on doute que la relation entre les deux variables soit linéaire. Donc on utilise les couples $(x_r\ ;\ y_r)$ pour trouver une droite qui convient l'ensemble des points dont l'équation est:

$$y = a + bx$$

La méthode la plus célèbre pour trouver les meilleures valeurs de a et b est appelée méthode des moindre carrés.

Méthodes des moindres carrés:



Dans ce qui précède, on a appris que dans une corrélation, il n'est pas obligatoire que tous les points soient situés sur la droite de régression. Pour obtenir la meilleur droite de régression, il faut diminuer les déviations à la plus petite valeur possible, et par la substitution dans l'équation de la droite de régression du couple $(x\ ;\ \hat{y})$ situé sur la droite de régression et le couple $(x\ ;\ y)$ un point réel des datas originaux, alors la droite de régression est convenable quand $|\hat{y} - y|$ est plus petit possible pour tout les valeurs de x ou quand $\Sigma(\hat{y} - y)^2$ est plus petit possible, soit l'équation de la droite de régression $\hat{y} = a + bx$

La diffeerence absolue $= |(a + bx) - y)|$.

On doit déterminer les valeurs de a et b pour que la différencé absolue soit plus petite possible en résoluvant le système des deux équations :

$\Sigma y = n a + b \Sigma x$ **(1)** $\Sigma x y = a \Sigma x + b \Sigma x^2$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** Donc on peut écrire l'équation de la droite de régression sous la forme.

$b = \dfrac{n \Sigma x y - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$ (b est appelé le coefficient de régression de y en x, il exprime la pente de la droite de régression suivant la direction positive de l'axe des abscisses).

L'équation de la droite de régression y en x est utilisées pour:

1- Estimer la valeur de y en connaissant la valeur de x.

2- Déterminer la valeur de l'erreur qui est déterminée de la relation:

Valeur de l'erreur = |valeur du tableau – valeur qui vérifie l'équation de la droite de régression|

Remarque: en utilisant l'équation de la droite de régression, il est préférable de ne pas dépasser trop l'ensemble image de la variable x utilisée dans l'équation de régression.

Réflexion critique: la valeur du coefficient de régression indique la corrélation. Explique cette phrase.

Exemple

1 Le tableau suivant indique la production des cultures agricoles (y) et la superficie cultivées (x) en feddans.

La superficie cultivées (x) en feddans	50	200	110	80	120	74,5	88,9	5,7	11	3,2
Production (y) en kg	140	500	400	300	356	240,5	200,6	33,5	69,8	18,7

(a): Trouve l'équation de régression.

(b): Estimez la valeur de la production en kg si la superficie cultivées est 100 feddansù.

(c): Trouve la valeur de l'erreur de la production si superficie cultivées est 120 feddans.

Solution

En utilisant la calculatrice:

1- Insérer les informations:

On suit les mêmes étapes utilisées dans l'exemple (1) dans la leçon précédent (corrélation) pour insérer les informations.

2-Rechercher les résultats:

On appuie sur les touches suivantes:

On appuie sur les touches suivantes pour trouver les résultats d'opérations suivante: SHIFT 1

(STAT) De la liste : sum :3 et on appuie sur la touche 3
Une nouvelle liste de 1 à 8 (somme des) résultates et on choisit:

$2259{,}1 = \Sigma Y : 4 \qquad 743{,}3 = \Sigma x : 2$

$254489{,}18 = \Sigma xY : 5 \qquad 89017{,}19 = \Sigma x^2 : 1$

Premièrement: on calcule la valeur de la constante b de la relation:

$$b = \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{10 \times 254489{,}18 - 743{,}3 \times 2259{,}1}{10 \times 89017{,}19 - (743{,}3)^2} \simeq 2{,}5637$$

on calcule la valeur de la constante a de la relation: $a = \overline{y} - b\,\overline{x}$

Où : $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, $\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$

$\therefore\ \overline{x} = \dfrac{743{,}3}{10} = 74{,}33$, $\overline{y} = \dfrac{2259{,}1}{10} = 225{,}91$

$\therefore\ a = 225{,}91 - 2.5637 \times 74{,}33 \simeq 35{,}35$

Remarque:

On peut calculer la constante a directement comme ce qui suit:

$\because\ a = \dfrac{\Sigma y - b\,\Sigma x}{n}$ $\quad \therefore\ a = \dfrac{2259{,}1 - (2{,}5637 \times 743{,}3)}{10} \simeq 35{,}35$

$\therefore$ L'équation de la droite de régression est: $\hat{y} = 2{,}564\,x + 35{,}35$

Deuxièmement: De l'équation de la droite de régression: $\hat{y} = a + b\,x$

$\because\ \hat{y} = 2{,}564\,x + 35{,}35 \quad , \quad x = 100$

$\therefore\ \hat{y} = 2{,}564 \times 100 + 35{,}35 = 291{,}72$ Kg

On peut vérifier que la réponse est juste en utilisant la calculatrice comme ce qui suit:
100 SHIFT 1 (STAT) 5 (Reg) 5 : $\hat{y}$ =

Troisièmes: Pour trouver la valeur de l'erreur de la production si x = 120 feddans:

$\because\ \hat{y} = 2{,}564\,x + 35.35$

$\therefore\ \hat{y} = 2{,}564 \times 120 + 35{,}35 \simeq 343$

$\because$ Erreur = |valeur du tableau - valeur calculer de la droite de régression|

$\therefore$ Erreur $= |356 - 343| = 13$

Activité

(a): Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le programme (Microsoft Excel)

(b): Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le programme (spss).

(a): Utilisation du programme (Microsoft Excel)

Premièrement : Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le logiciel (Microsoft Excel)

Deuxièmement : Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le logiciel (SPSS)

1- Accédez le logiciel (Microsoft Excel) puis insérez les données précédant dans les cellules A et B sous le nom x et y comme deux variables ou le nom réel de ces données comme montre la figure (1).

2- Du menu, on appuie sur la touche Chart Wizard, on obtiendra Chart Type puis de la liste XY Squatter, on appuie sur la touche Finish comme montre la figure (1).

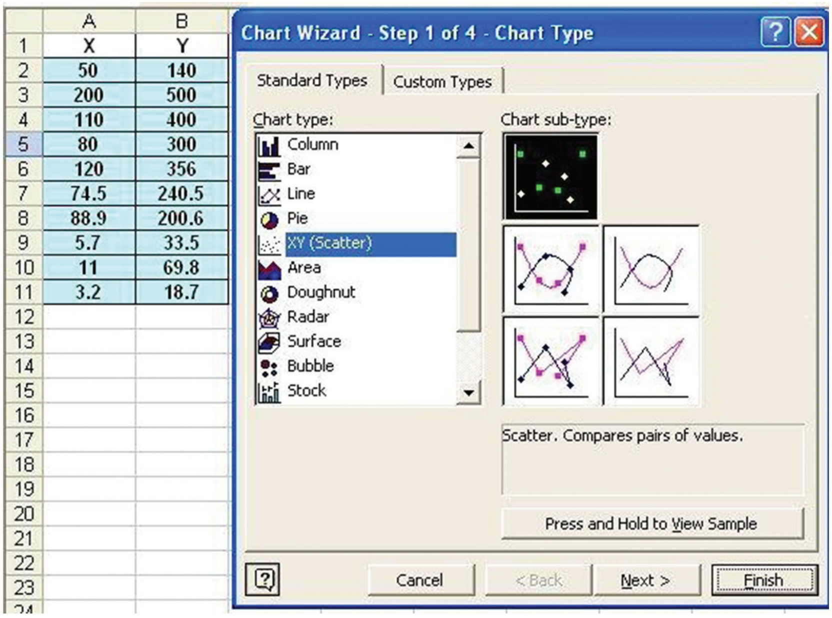


figure (2)

3- La figure (3) montre la représentation graphique des points se trouvant dans le tableau qui est appelé le nuage de dispersion. On choisit figure hachurée par le noir.

4- Les valeurs sur l'axe horizontal représentent les valeurs de x et Les valeurs sur l'axe vertical représentent les valeurs de y. On est sur le point de trouver l'équation de la droite de régression de y sur x qui est sous la forme:

$Y = a + bX.$

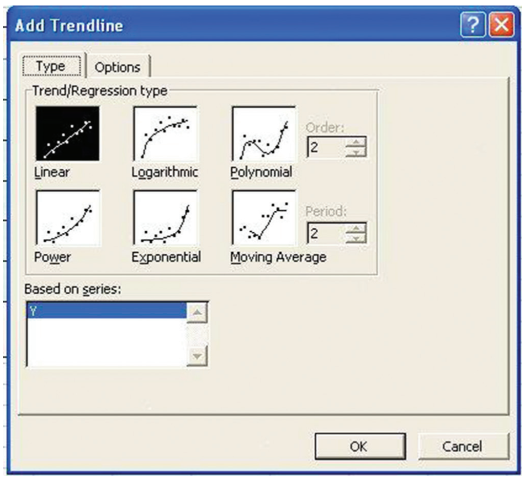


figure 3

5- En appuyant sur le click droit de la souris sur l'un des points (dans la figure 4), on sélectionne « Add Trendline) de la liste apparue. En cliquant dessus, on obtient la figure suivante qui contient 6 formes de dispersion. On choisila première tel que indiqué par la partie assombrie en tant que choix accepté vu qu'on cherche une droite, ensuite on précise ce qui est demandé via l'option « option » en cliquant dessus, on obtient la fenêtre suivante:

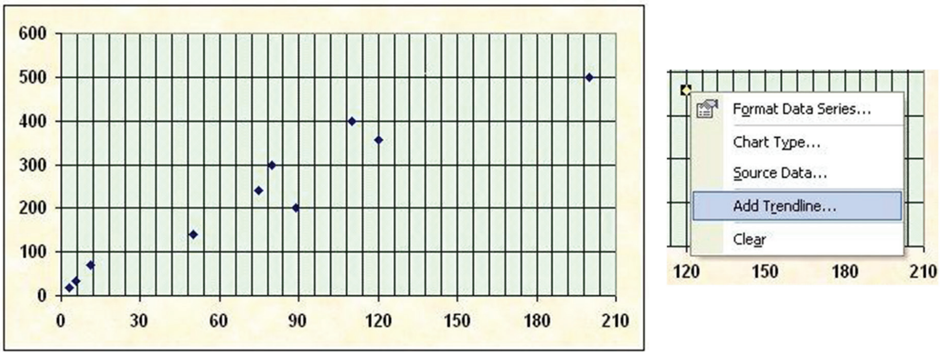


figure (4)

6 - On coche (Display equation on chart) tel qu'indiqué dans la figure 5

7 - On appuie sur « Ok » pour obtenir ce qui est demandé:

a La figure montrant la droite de régression qui contient les points représentant les couples des données.

b On a transmis l'équation de la droite de régression (dans la figure 6) vers le haut avec le changement du style de l'écriture pour larendre plus claire.

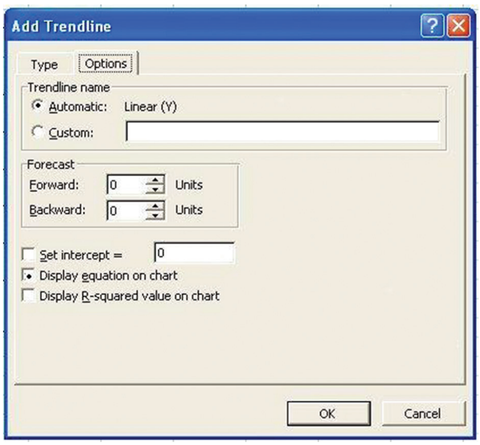


figure (5)

La figure ci-dessous est le résultat de l'opération qui montre la conclusion surtout l'équation suivante:

$Y = 35{,}35 + 2{,}5637x$

C'est l'équation de la droite de régression et c'est la même équation obtenue dans la solution précédente.

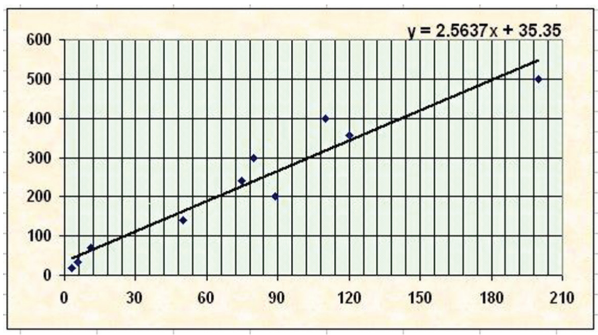
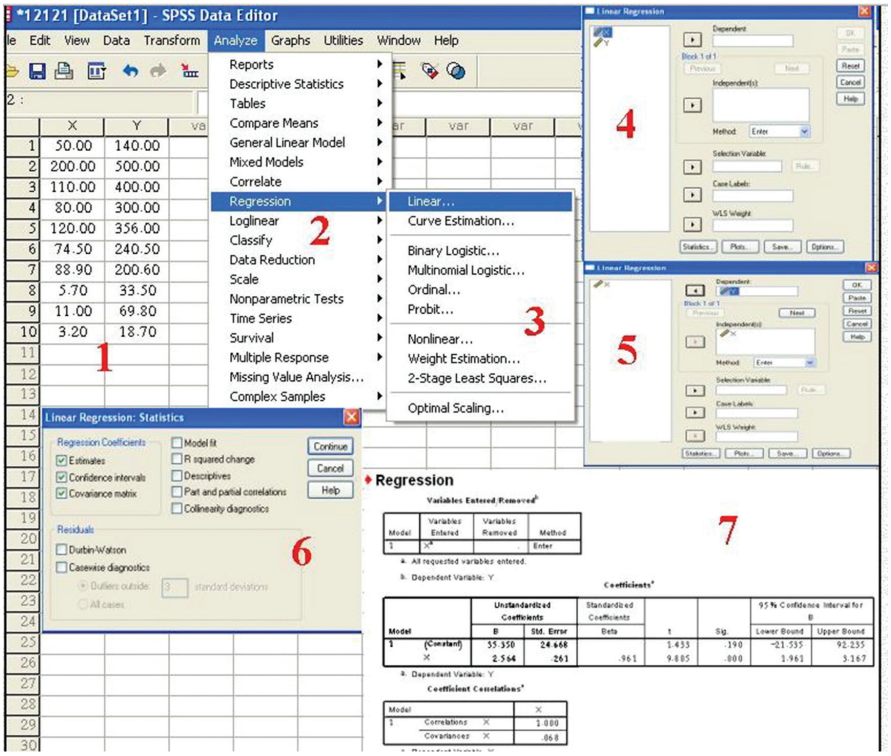


figure (6)

Utilise le programme SPSS



(figure 7)

Exemple

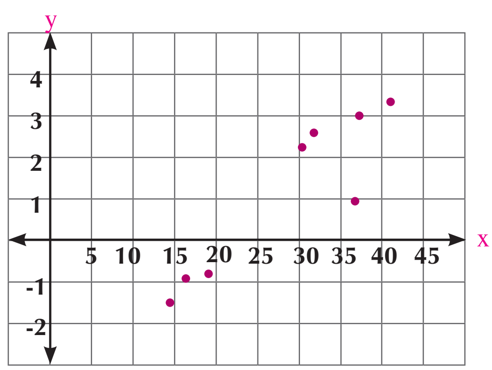
(2) Lien à l'exploitions minière: Le tableau suivant indique le prix moyen d'un baril du pétrole et évolution économique d'un des payes durant huit ans

Prixd'un baril du pétrole (x)	36	40	36,2	31,1	29,7	16,3	18,7	14,6
Évolution économique(y)	0,91	3,5	3,2	2,7	2,3	– 1	– 0,9	– 1,6

(i): Trace le nuage des points, à l'aide de lui, détermine la nature de la corrélation.

(ii): Trouve l'équation de la droite de régression.

(iii): Estime l'évolution économique quand le prix du baril du pétrole est 15 dollars puis quand son prix est 35 dollars.



Solution

(i): La figure ci-contre représente le nuage des points qui montre que la corrélation est directe.

x	y	x^2	y^2	x y
36	0,91	1296	0,8281	32,76
40	3,5	1600	12,25	140
36,2	3,2	1310,44	10,24	115,84
31,1	2,7	967,21	7,29	83,97
29,7	2,3	882,09	5,29	68,31
16,3	– 1	265,69	1	– 16,3
18,7	– 0,9	349,69	0,81	– 16,83
14,6	– 1,6	213,16	2,56	– 23,36
222,6	9,11	6884,28	40,2681	384,39

Du tableau:

$\Sigma y = 9{,}11$ $\qquad \Sigma x = 222{,}6$

$\Sigma\, x\, y = 384{,}39$ $\qquad \Sigma x^2 = 6884{,}28$

(ii): On calcule la valeur de la constante b de la relation:

$$b = \frac{n\, \Sigma x\, y - \Sigma\, x\, \Sigma\, y}{n\, \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{8 \times 384{,}39 - (222{,}6 \times 9{,}11)}{8 \times {}^2(222{,}6) - 6884{,}28} \simeq 0{,}1896$$

$\because a = \dfrac{\Sigma y - b\Sigma\, x}{n}$ $\qquad \therefore a = \dfrac{9{,}11 - (0{,}1896 \times 222{,}6)}{8} \simeq -4.1368$

$\because$ Équation de la droite de régression est: $\hat{y} = a + b\, x$

$\hat{y} = 0{,}1896\, x - 4{,}1368$

(iii):

Quand $x = 15$ $\qquad$ alors : $\hat{y} = 0{,}1896 \times 15 - 4{,}1368 \simeq -1{,}2928$

Quand $x = 35$ $\qquad$ alors : $\hat{y} = 0{,}1896 \times 35 - 4{,}1368 \simeq 2{,}4992$

Essaye de résoudre

1 Dans une étude de la relation entre le revenu (x) et la consommation (y) en L.E, on a obtenu les résultats suivants:

$\Sigma x = 120$, $\quad \Sigma y = 100$, $\quad \Sigma xy = 516$

$\Sigma x^2 = 720$, $\quad \Sigma y^2 = 410$, $\quad n = 40$

a Trouve le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y puis déterminer sa nature.

b Équation de la droite de régression.

c Estime la valeur de la consommation (y) quand le revenu arrive à 10000 L.E

Exercices 1 - 2

Premièrement: Choisit la bonne réponse parmi les proposées:

1) L'équation de la droite de régression où b est le coefficient de régression est:

a) $\hat{y} = a\,x + b$ b) $\hat{y} = a + b\,x$

c) $\hat{y} = a\,y + b$ d) $\hat{y} = a + b\,y$

2) Si l'équation de la droite de régression est: $\hat{y} = 2 + 0{,}5\,x$ alors la valeur prévue de y quand x = 6 est:

a) 4 b) 5 c) 7 d) 8

3) Si les deux points (11,5 ; 10) et (6,5 ; 5) appartiennent à la droite de régression de y en x, alors la corrélation entrex et y est:

a) directe b) inverse c) parfaite d) nulle

4) Si les deux points (5 ; 13) et (14 ; 4) appartiennent à la droite de régression de y en x, alors les points suivants appartiennent à cette droite sauf le point:

a) (15 ; 5) b) (10 ; 8) c) (6 ; 12) d) (5 ; 13)

5) Si tous les points du nuage des points appartiennent à une droite de pente négative, alors le coefficient de corrélation entre x et y est égaleà:

a) 1 b) zéro c) - 0,5 d) -1

6) Si tous les points du nuage des points appartiennent à une droite de pente positive, alors le coefficient de corrélation entre x et y est égale à:

a) - 1 b) zéro c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Deuxièmement : Réponds aux questions suivantes:

7) Le tableau suivant indique la relation entre deux variables x et y:

x	5	8	10	14	16	20
y	4	6	9	11	12	15

a) Trace le nuage des dispersion b) Trouve l'équation de la droite de régression

c) Estime la valeur de y quand x = 12

8) Du tableau suivant:

x	20	33	30	40	13	15	26	25
y	7	8	9	11	4	5	8	9

a) Estime la valeur de y quand x = 35

b) Trouve la valeur de l'erreur de y si x = 30

9 Dans une étude pour trouver la relation entre les deux variable x et y, on a obtenu les résultats suivants:

$n = 10$, $\overline{x} = 8$, $\overline{y} = 10$, $\Sigma x y = 870$, $\Sigma x^2 = 665$, $\Sigma y^2 = 1400$:

a Trouve la coefficient de corrélation

b L'équation de la droite de régression

10 Si : $\Sigma x = 30$, $\Sigma y = 40$,$\Sigma x y = 162$
$\Sigma x^2 = 210$, $\Sigma y^2 = 304$, $n = 6$:

a Trouve l'équation de la droite de régression

b Trouve la coefficient de corrélation entre x et y puis détermine sa nature

11 Lien de vente: Dans un agence de vente des voitures utilisées, les ventes sont:

Age de voiture (x)	3	2	1	1	5	6	1	4
Son prix (y)	54	80	74	98	45	40	85	60

a Trouve le coefficient de corrélation de Pearson

b Trouve l'équation de la droite de régression

12 Lien d'économie: Le tableau suivant représente le revenu mensuel(x) et la dépense (y) d'un ensemble des familles en centaines des L.E:

Revenu (x)	38	27	39	40	56	66	42	44
Dépense (y)	19	25	20	28	31	38	27	22

a Trouve la coefficient de corrélation entre x et y puis détermine sa nature.

b Trouve l'équation de la droite de régression

c Estime la valeur de la dépense (y) si le revenu (x) est 5000 L.E

d Trouve la valeur de l'erreur de (y) si x = 40

13 Lien à la famille Dans une étude d'un échantillon de 40 familles entre le revenu (y) et la consommation (x) en centaines des L.E.dans un ville, on a obtenu les résultats suivants:

$\Sigma x = 100$, $\Sigma y = 120$, $\Sigma x y = 516$, $\Sigma x^2 = 410$, $\Sigma y^2 = 720$.

a Trouve l'équation de la droite de régression

b Estime le revenu de la famille dont sa consommation est 700 L.E. par mois.

Unité

2

Mesures avancées en statistique

Introduction de l'unité

Les mesures statistiques sont une partie essentielle de la science appliquée dans les outils utilisés pour mesurer divers phénomènes et variables. Ces mesures nous aident à résumer et à analyser les données, à comprendre les relations entre les variables, à déduire des résultats et à prédire l'occurrence de certains phénomènes. Les normes statistiques varient en fonction du type et des caractéristiques des données sur lesquelles vous travaillez, comme l'affichage des données à l'aide de la méthode de tige et des feuilles, le calcul de quadrilatères pour un groupe de données et leur représentation graphique. Calculer l'écart semi-interquartile pour un ensemble de données à l'aide d'un tableau de fréquences et utiliser la méthode des tiges et des feuilles, tout cela à travers des applications de la vie dans divers domaines tels que l'informatique, la médecine, l'industrie, l'agriculture, etc., ce qui permet à l'étudiant d'apprécier l'importance d'étudier les métriques. Les statistiques dans la vie

Objectifs de l'unité

Il est prévu qu'après que l'étudiant ait étudié cette unité et réalisé les activités:

- Afficher un ensemble de données à l'aide de la méthode « Tige et feuilles ».
- Comparez deux ensembles de données à l'aide de la méthode « Tige et feuilles ».
- Comprendre les avantages et les inconvénients de l'utilisation de la méthode « Tige et feuille » pour afficher les données.
- Calculer et représenter graphiquement les quartiles d'un ensemble de données.
- Calculez l'écart semi-interquartile à l'aide d'un tableau de fréquences et de la méthode « Tige et feuilles ».
- Apprécier l'importance des statistiques dans la vie quotidienne.

Vocabulaire de base

- *Représentation avec tige et feuilles.*
- *Tige et feuilles.*
- *Double représentation de la tige et des feuilles.*
- *La moitié de l'écart interquartile*
- *Quartile inférieur (premier)*
- *Quartile moyen (deuxième)*
- *Quartile supérieur (troisième)*
- *Représentation en boite.*
- *Tableau des fréquences.*
- *Fréquence cumulée ascendante*

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Affichage des données à l'aide de la méthode tige et feuilles

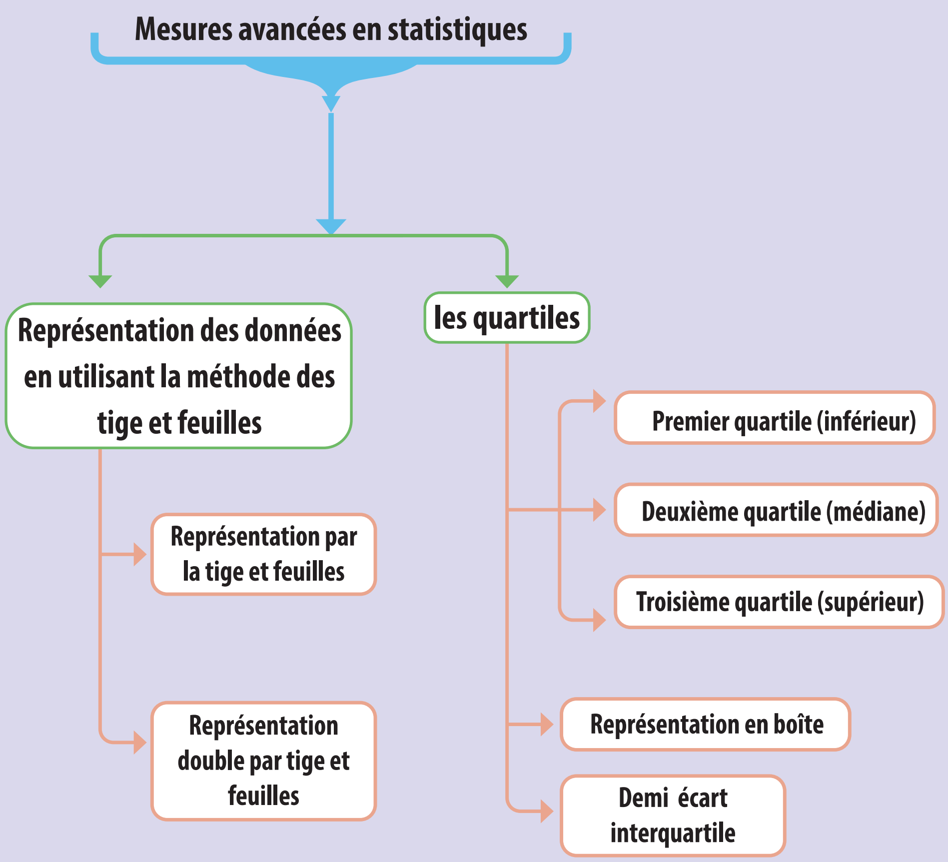
Leçon (2 - 2): Les quartiles et leur représentation graphique

Leçon (2 - 3): Semi-interquartile

Matériels utilisés

Calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



Unité 2

2 - 1

Affichage des données à l'aide de la méthode tige et feuilles

Apprendre

- Représentation avec "tige et feuilles"
- Utilisation de la méthode tige et feuilles pour comparer un ensemble de données

Vocabulaire de base

- Représentation par tige et feuilles
- la tige
- les feuilles
- Double représentation de la tige et des feuilles

Réfléchit et discute

Les données suivantes représentent les points marqués par 16 joueurs de basket-ball d'une équipe scolaire

Nombre de points			
19	6	7	10
11	13	18	25
21	12	5	12
20	21	11	12

Trouver

(1) Le plus grand nombre de points marqués par l'un des joueurs.

(2) Nombre de joueurs ayant marqué plus de 10 points.

Apprendre

Représentez ces données en utilisant la méthode tige-et-feuilles.

Lors de la représentation des données 8; 135; 71; 3452 à l'aide de la méthode tige-feuilles, nous classons les données par ordre croissant. Le chiffre de la plus petite valeur (unités) représente la feuille et la partie restante du nombre représente la tige, comme indiqué dans le tableau :

Nombre
8
71
135
3452

tige	Feuilles
8	0
1	7
5	13
2	345

Example

1 À partir de la représentation précédente des données des joueurs de basket-ball, nous allons suivre ces étapes pour la représenter en utilisant la méthode tige-et-feuilles :

Solution

Étape 1 : Trouvez les nombres les plus grands et les plus petits dans les données, puis déterminez le chiffre des dizaines pour chacun.

Le plus petit nombre est 5, avec un chiffre des dizaines de 0.

Le plus grand nombre est 25, avec un chiffre des dizaines de 2.

tige	Feuilles								
0	7	6	5						
1	0	9	8	3	1	2	2	2	1
2	5	1	1	0					

Clé 25 = 2|5

Étape 2 : Tracez une ligne verticale, et une autre ligne horizontale puis enregistrez la tige sur le côté gauche de la ligne et les feuilles sur le côte droite.

Step 3: Écrivez les feuilles correspondant à chaque tige sur le côté d droite la ligne. Par exemple, pour le nombre 19, écrivez 9 à droite du nombre 1 (la tige), et pour le nombre 6, écrivez 6 à droite du nombre 0 (la tige), et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les données soient enregistrées. Répétez la feuille en fonction du nombre de fois qu'elle apparaît dans les données.

Step 4: Disposez les feuilles par ordre croissant, puis créez une clé qui explique comment lire les données.

Les feuilles sont écrites, peu importe combien de fois elles sont répétées.

Représente les dizaines →

tige	Feuilles
0	5 6 7
1	0 1 1 2 2 2 3 8 9
2	0 1 1 5

← Représente les dizaines

Clé 13 =1/3

Il est à noter que

Le plus grand nombre de points marqués par l'un des joueurs = 25 points.
Le nombre de joueurs ayant marqué plus de 10 points = 12 joueurs.

Souviens-toi

Pour tout ensemble de valeurs, il est **Arithmetic mean** $= \dfrac{\text{sum of values}}{\text{its number}}$

Médiane = C'est la valeur qui se trouve au milieu d'un groupe de valeurs visuelles en ordre croissant ou ordre décroissant

Mode : C'est la valeur la plus fréquente ou la plus

Essayede résoudre:

1. Les données suivantes montrent les résultats de certains élèves dans la matière de mathématiques.

92	78	73	89	86
85	76	81	73	88
83	75	83	83	71
86	82	94	100	98

Clé 13 =1l3

a. représentation des données à l'aide d'un diagramme à tige et feuilles :
b. Calculez la médiane de ces notes.
c. Si une note « Excellent » est attribuée aux étudiants qui obtiennent un score de 85 ou plus, combien d'étudiants ont reçu une note « Excellent ».

Lien avec le sport

Example

2. Les données suivantes représentent les temps de course cycliste aux Jeux Olympiques de 2002, mesurés en secondes.

89,4	90,4	87,5	84,3	89,7	90,3	91,4
91	86,7	84,1	89,2	86	89,1	88,2
89,5	90,5	90,2	89,2	91,1	88,9	–

Requis :

a) Représentation des données à l'aide d'un diagramme à tige et feuilles

b) Combien de temps a-t-il fallu au dernier concurrent pour atteindre la fin de la course ?

Solution

a) Représentation des données à l'aide d'un diagramme à tiges et à feuilles

Les données contiennent des nombres décimaux, qui représentent la plus petite place (les feuilles), et des nombres entiers représentent les dizaines (la tige). Le plus petit entier est 84 et le plus grand entier est 91, donc la tige correspond aux nombres de 84 à 91.

b) The last competitor took 91.4 seconds

Heure de la course de vélo

Tige	Leaves					
84	3	1				
86	7	0				
87	5					
88	2	9				
89	4	7	2	1	5	2
90	4	3	5	2		
91	4	0	1			

Leaves order →

Clé 88.2 = 88 |2

Heure de la course de vélo

Tige	Feuilles					
84	1	3				
86	0	7				
87	5					
88	2	9				
89	1	2	2	4	5	7
90	2	3	4	5		
91	0	1	4			

Essaye de résoudre:

Linking to weights

2) La représentation ci-contre montre les poids moyens des poussins en grammes.

a) Quel est le poids minimum et maximum ?

b) Quelle est la médiane de ces poids ?

c) Quelle est le mode de ces poids?

Poids des poussins

Tige	Feuilles					
5	0	9				
6	1	5	7	8		
8	3	3	3	5	7	8
9	0	1	5	5	9	

Clé 83 = 3|8

Apprendre

Représentation double par la tige et les feuilles.

Vous pouvez comparer deux ensembles de données à l'aide d'un diagramme à tige et feuilles double, où la tige est la même pour les deux ensembles de données. Les feuilles du premier ensemble de données se trouvent sur le côté droit de la tige, tandis que celles du deuxième ensemble de données se trouvent sur le côté gauche de la tige.

Example

③ Les données suivantes représentent les températures maximales et minimales pour la ville d'Alexandrie sur une période de deux semaines.

Température maximale	19	28	22	29	25	29	32	35	36	34	37	39	41	42
Température minimale	13	22	19	18	16	20	21	22	23	23	21	30	32	31

ce qui est demandé: Former la température dans la tige et les feuillesavec une description des ces températures et indiquer la quelle de ces températures varie le plus - 42 degrés est la température maximale; 19 degrés est la température minimale

Solution

La tige est de 1 à 4

D'après la figure correspondante, nous constatons que la plupart des températures maximales se situent entre (19 - 42) alors que nous constatons que la plupart des scores les plus bas se situent entre (13 - 32)

Maximale	tige	Minimale
9	1	3 6 8 9
9 9 8 5 2	2	0 1 1 2 2 3 3
9 7 6 5 4 2	3	0 1 2
2 1	4	

32 = 3|2 Clé 13 = 1|3

Plage de température maximale = 23, l'etendue de température minimale = 19

Parmi eux : Nous constatons que les températures maximales sont plus variantes que les températures minimales

Rapelle

l›etendue la différence entre les plus grand valeur et leplus petit valeur

Avantages de la méthode de représentation des données à l'aide de tiges et de feuilles

Les données originales sont conservées, contrairement aux tableaux de fréquences où il n'est pas possible de revenir aux données originales après les avoir représentées dans des tableaux de fréquences, comme vous l'avez étudié précédemment.

Inconvénients

Il n'est pas adapté aux grands ensembles de données.

Essaye de résoudre:

③ Lien avec la santé: Le tableau suivant représente le nombre de patients masculins et féminins visitant un hôpital au cours d'une semaine.
Représenter les données à l'aide d'un diagramme à tiges et à feuillesavec une description de ces données et déterminer lequel de ces ensembles de données est le plus variable.

patients visiting a hospital		
Section	Hommes	Femmes
Chirurgie générale	52	47
ORL (Oreille, Nez et Gorge)	61	42
Médecine interne	42	42
Cardiologie	60	17
Ophtalmologie	44	42
Néphrologie	50	54
Obstétrique et gynécologie	42	52
Pédiatrie	55	42
Urologie	49	29
Orthopédie et Fractures	46	37

Exercice 2 - 1

1 Mettez une marque (✓) devant l'énoncé correct et une marque (✗) devant l'énoncé incorrect pour chacune des affirmations suivantes

Tige	Feuilles
0	1 2 4 5 6 8 9
1	0 1 1 5 7
2	2 5
3	6

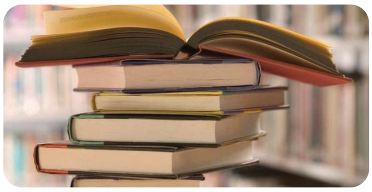
Clé ⟶ 15 = 5|1

- **a** La plupart des arbres mesurent moins de 20 mètres de haut. ( )
- **b** La hauteur médiane des arbres est de 11 mètres. ( )
- **c** L'étendue de hauteur des arbres est de 35 mètres. ( )
- **d** La hauteur moyenne des arbres est de 11 mètres ( )

2 Les données suivantes représentent le nombre de livres de mathématiques dans les bibliothèques de 15 écoles

Tige	Feuilles
0	1 1 1 2
1	0 1 1 1 2 2 3 3 4
2	1 1

Clé ⟶ 13 = 1|3



Il est nécessaire d'écrire les données originales sur le nombre de livres pour chaque école

Linking to lengths:

3 Les données suivantes représentent les tailles de 30 élèves d'une école secondaire, mesurées en centimètres

161	175	174	165	167	177	180	182
170	157	170	176	185	188	162	165
159	172	158	171	169	173	175	178
164	158	72	170	178	181		

Il est nécessaire d'afficher les données en utilisant la méthode de tige et feuilles

4 Représentez chacun des ensembles de données suivants à l'aide de la méthode tige-et-feuilles:

المجموعة الأولى	10	26	9	12	27	13	19	15	27	12	29	22
المجموعة الثانية	11	12	10	15	30	9	29	35	11	34	11	12
المجموعة الثالثة	1,1	2,4	3	2	6,6	5,8	0,5	2,5	4,1	2,2		

5 Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données

Tige	Feuilles
23	5 4
24	9 7 4
25	8 8 4 0
26	9 8 3
27	5 2 1

Key ⟶ 24,7 = 24|7

(1) Dans la représentation inverse : le plus grand nombre est ....

- **a** 2,71
- **b** 23,5
- **c** 27,5
- **d** 275

(2) La médiane de la représentation précédente ....

- **a** 25,4
- **b** 25,8
- **c** 254
- **d** 258

Linking Temperatures :

6 Les données suivantes représentent les températures maximales et minimales pour certains gouvernorats de la République arabe d'Égypte:

a Représenter les données à l'aide de la méthode tige-feuilles (double représentation)

b Trouvez la médiane pour chaque groupe séparément

c Laquelle de ces données est la plus variable ?

Gouvernorat	Température maximales	Température minimales
Cairo	27	22
Gizeh	26	22
Fayyum	30	25
Alexandria	25	17
Damietta	26	18
Luxor	36	22
Aswan	41	32
Beni Suef	30	24

Unité 2

2 - 2 Les quartiles et leur représentation graphique

A apprendre

- Les quartiles et leur représentation graphique.
- Détermination des quartiles à partir des tableaux de fréquences.
- Détermination de quartiles de la méthode de tige et des feuilles
- Représentation en boite.

Vocabulaire de base

- Le quartile inférieur (le premier)
- Le quartile médian (le deuxième)
- Le quartile supérieur (le troisième)
- Représentation en boite
- La tige et les feuilles
- Le tableau de fréquences
- La fréquence coumulée croissante

Réfléchir et discuter

Les professeurs de mathématiques d'une école n'ont plus d'argent
Pour le nombre de tests de mi-semestre (mi-trimestre)
200 étudiants, et les résultats ont été enregistrés dans le carnet de notes
Excel et organisez les étudiants à l'aide du programme
Les étudiants ont été divisés en deux groupes égaux par :
Une mesure statistique est la médiane (une des mesures de tendance centrale) entre les élèves sous-performants et les élèves performants.
Créer des programmes de renforcement appropriés pour chaque niveau, mais cette division n'était pas suffisante
L'instructeur du cours a demandé aux étudiants d'être répartis selon les niveaux suivants :
(Faible - Acceptable - Bon - Excellent). Il est donc nécessaire de diviser les données en quatre sections égales.
Comment implémentez-vous cela, que les données soient uniques ou représentées par un tableau de fréquences ou la méthode de la tige
Comment appelle-t-on les valeurs qui divisent ces données ? pour décrire le niveau. Réussite des étudiants

Apprendre

Après avoir organisé les données par ordre croissant ou décroissant, les valeurs divisent les données en quatre sections. Les égaux sont appelés quadrilatères et leur nombre est de trois valeurs

Premier quartile : Il s'agit de la valeur précédée d'un quart des données (25%) et suivie des trois quarts des données

Deuxième quartile : Il est la médiane, c'est-à-dire la valeur précédée de la moitié des données (50 %) et suivie de l'autre moitié

Troisième quartile il est la valeur précédée par $\frac{3}{4}$ des données (75%) et suivie de (25%) des données

Détermination de quartiles à partir de données uniques (non groupées)

Il y a deux cas

Premier cas : Si le nombre de données n est impair et (n+1) est divisible par 4, alors les quadrilatères sont les valeurs les plus proches des données données et sont déterminés directement à partir d'elles comme suit :

L'ordre du premier quartile (supérieur) $Q_1 = \frac{n+1}{4}$

L'ordre du deuxième quartile (milieu) $Q_2 = \frac{n+1}{2}$

L'ordre du troisième quartile (inférieur) $Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$

Exemple

1 Trouvez les trois quartiles de l'ensemble de données suivant :
23 ; 7 ; 16 ; 2 ; 4 ; 5 ; 1 ; 21 ; 15 ; 22 ; 14 ; 11 ; 10 ; 9 ; 3

Solution

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 14 ; 15 ; 16 ; 21 ; 22 ; 23

a_1 a_2 a_3

Tout d'abord, classez les données par ordre croissant

Deuxièmement: nombre de données n=15(nombre impair)

N + 1 = 16(divisible par 4) $\therefore$ les quartiles sont l'une des valeurs de données

L' ordre du premier quartile $Q_1 = \frac{15+1}{4} = \frac{16}{4} = 4$ sa valeur =4

L' ordre du deuxième quartile $Q_2 = \frac{15+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$ sa valeur =10

L' ordre du troisième quartile $Q_3 = \frac{3(15+1)}{4} = \frac{48}{4} = 12$ sa valeur =16

Deuxième cas

Si le nombre de données n est pair ou impair, (n + 1) non divisible par 4, alors les quadrilatères sont attribués selon la loi suivante :

La valeur du quartile requis = **sa valeur précédente** + (sa valeur suivante - **sa valeur précédente**) (sa position - son ordre précédent)

Example

2 Les données représentées par la méthode de tige et des feuilles représentent les âges de 10 personnes fréquentant une bibliothèque publique un jour donné Trouvez les trois quartiles pour ces donnés

tige	feuilles
1	2 3
2	0 2 2 4 5 5
3	1 3

Clé ⟶ 24 = 2|4

Solution

L'ordre précédent — Range Q_1 — 2,75 ; L'ordre précédent — Range Q_2 — 5,5 ; L'ordre précédent — Range Q_3 — 8,25

Range	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur	12	13	20	22	22	24	25	25	31	31

Valeur suivante — Valeur précédente ; Valeur suivante — Valeur précédente ; Valeur suivante — Valeur précédente

L'ordre du premier quartile $Q_1 = \dfrac{(n+1)}{4} = \dfrac{(10+1)}{4} = 2{,}75$

L'ordre du deuxieme quartile $Q_2 = \dfrac{(n+1)}{2} = \dfrac{(10+1)}{2} = 5{,}5$

L'ordre du troisieme quartile $Q_3 = \dfrac{3(n+1)}{4} = \dfrac{33}{4} = 8{,}25$

La valeur de $Q_1 = 13 + (20-13)(2{,}75-2) = 18{,}25$

La valeur de $Q_2 = 22 + (24-22)(5{,}5-5) = 23$

La valeur de $Q_3 = 25 + (31-25)(8{,}25-8) = 26{,}5$

5 Esseyez de résoudre

1. Dans l'exemple précédent, trouvez la médiane de deux manières différents; puis comparez les deux résultats.
2. Trouvez les trois quartiles (inférieur -médian -supérieur) pour les données correspondantes

Tige	Feuilles
0	6 7 5
1	9 0 1 3 8 2 2 1 2
2	5 1 0 1

Clé ⟵ 19 = 1|9

Trouver des quartiles à partir de tableaux de fréquences :

Vous avez précédemment appris à trouver la médiane en traçant l'intersection de la courbe de fréquence groupée croissant et de la courbe de fréquence groupée décroissant. Il représente le milieu (le deuxième). Vous allez maintenant apprendre à trouver des quadrilatères algébriquement comme suit:

La première étape : Nous créons le tableau cumulatif ascendant

Deuxième étape : nous déterminons le rang des quartiles

Le rang de (premier quartile $= \dfrac{n}{4}$; deuxième quartile $= \dfrac{2n}{4}$; troisième quartile $\dfrac{3n}{4}$)

Troisième étape on détermine l'intervalle qui le quartile démendé situé de dans (l'intervalle quartile) puis on détermine le débout d'intérvelle, le longueur d'intervalle et le nombre de fréquence de l'intervalle, fréquence cumulée croissante précédente de l'intervalle quertile quatrième étape on utilisons la formule suivante pout calculer le quertil demandé

$$\text{Le quartile demandé} = \text{le début de l'intervalle} + \frac{\text{le range quartile} - \text{frequance précédent}}{\text{requance correspondant} \times \text{la longueur de l'intervalle}}$$

Lien avec l'industrie

Example

3) Dans une usine, si le tableau de fréquence suivant représente le nombre d'heures de travail dans une semaine pour un certain nombre 50 ouvriers, trouvez les trois quadrilatères.

Solution

Nombre d'heures de travail	22–	27–	32–	37–	42–	47–	somme
Nombre de travailleurs (fréquence)	9	3	10	8	12	8	50

Forment le tableau cumulatif croissant

Le tableau cumulatif		Fréquence cumulatif croissant	
intervale	Fréquence	les termes supiéur	Fréquence cumulatif croissant
22–	9	mois de 22	zéro
27–	3	mois de 27	9
32–	10	mois de 32	12
37–	8	mois de 37	22
42–	12	mois de 42	30
47–	8	mois de 47	42
	8	mois de 52	50
Somme	50		

(1) Détermine le premier quartile

position de $Q_1 = \frac{50}{4} = 12{,}5$

$\therefore$ Q_1 appartient à la classe 12 ; 22

à partir de la colonne de fréquence cumulative croissant

Attribution du premier quartile Q_1

Position des mensonges dans l'intervalle 12 ; 22 de l'accumulatif $Q_1 = \frac{50}{4} = 12{,}5$

$\therefore$ limite inférieure de la classe du premier quartile = 32

Longueur de l'intervalle du premier quartile = 5

Fréquence correspondant à l'intervalle quartile =10

Fréquence cumulative croissant correspondant à la classe du premier quartile =12

Substitution dans la règle pour attribuer la valeur du premier quartile

$$Q_1 = 32 + \frac{12{,}5 - 12}{10} \times 5 = 32 + \frac{0{,}5 \times 5}{10} = 32 + 0{,}25$$

$\therefore$ $Q_1 = 32{,}25$

Attribution du deuxième quartile (médiane) Q_2

Position de $Q_2 = \frac{50}{2} = 25$

$\therefore$ Q_1 se situe dans la classe 22,30

$\therefore$limite inférieure de la classe du premier quartile = 37

Longueur de l'intervalle du premier quartile = 5

Fréquence correspondant à l'intervalle quartile = 8

Fréquence cumulative ascendante correspondant à la classe du deuxième quartile = 22

Substitution dans la règle pour attribuer la valeur du deuxième quartile

$$Q_2 = 37 + \frac{25 - 22}{8} \times 5 = 37 + \frac{15}{8} = 37 + 1{,}875 = 38{,}875$$

Attribution du deuxième quartile (médiane) Q_3

Position de $Q_3 = 50 \times \frac{3}{4} = \frac{150}{4} = 37{,}5$

$\therefore$ Q_3 appartient à la classe 30 ; 43

$\therefore$ limite inférieure de la classe du premier quartile = 42

Longueur de l'intervalle du troisième quartile = 5

Fréquence correspondant à l'intervalle quartile = 12

Fréquence cumulative ascendante correspondant à la classe du deuxième quartile = 30

$Q_3 = 42 + \frac{37{,}5 - 30}{12} \times 5 = 42 + \frac{7{,}5 \times 5}{12} = 45{,}125$

Deuxièmement : Trouver des quadrilatères graphiquement :

Vous avez déjà appris à trouver graphiquement la médiane à partir de la courbe de fréquence cumulative ascendante ou descendante, et la même méthode peut être appliquée. Pour trouver des quadrilatères, suivez ces étapes :

Formulaire de première étape : le tableau des fréquences cumulées ascendantes

Deuxième étape : tracer la courbe de fréquence cumulée ascendante

Troisième étape : trouver la position des quartiles et la déterminer sur l'axe vertical (fréquence cumulée) ($\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{3n}{4}$)

Quatrième étape : à chaque position des quartiles tracer une ligne horizontale pour couper la courbe en un point puis La valeur du quartile est la projection de ce point sur l'axe horizontal

Exemple

4 Si la distribution de fréquence des températures pendant 60 jours consécutifs Au printemps, en République arabe d'Égypte, les conditions sont les suivantes:

température	16–	18–	20–	22–	24–	26–	28–	Somme
Nombre de jours	4	7	10	18	9	7	5	60

Trouver les quartiles graphiquement

Solution

n = 60

le rang de primer quartile $Q_1 = \frac{60}{4} = 15$

le range de dixième quartile $= \frac{60}{2} = 30$

le range de troisième quartile le $= \frac{3 \times 60}{4}$

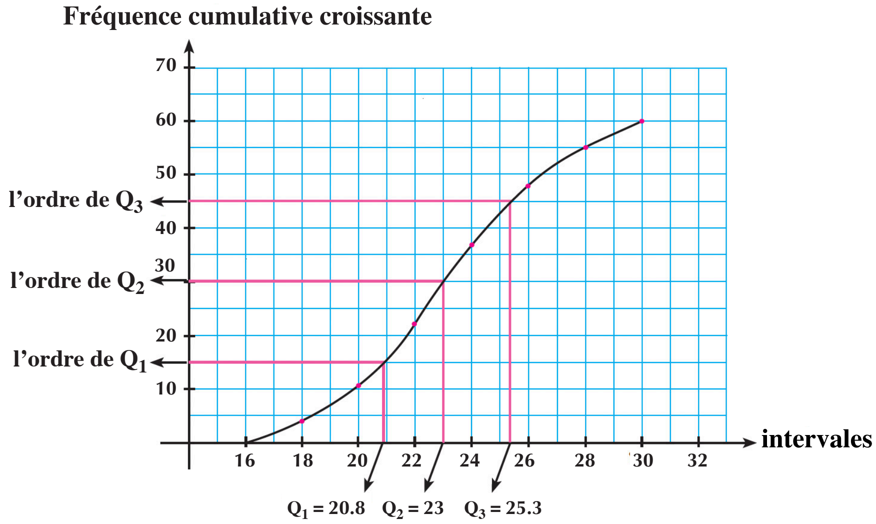
$\frac{180}{4} = 45$

du grapheque on trouve

la valeur de $Q_1 = 2{,}8$; la valeur de $Q_2 = 23$

la valeur de $Q_3 = 25{,}3$

Le tableau fréquence cumulatif croissant	
les termes supiéur	Fréquence croissant
Moins de 16	Zéro
Moins de 18	4
Moins de 20	11
Moins de 22	21
Moins de 24	39
Moins de 26	48
Moins de 28	55
Moins de 30	60



Essey de à résoudre

3 a Dans l'exemple précédent, vérifiez algébriquement les valeurs des quadrilatères que vous avez obtenues graphiquement.

b en lien avec la médecine:

Taux d'hémoglobine	13–	14–	15–	16–	17–	18–	Somme
Fréquence	3	5	15	16	10	1	50

4 Si le tableau suivant représente les résultats d'examen de 200 étudiants en mathématiques, en supposant que le score le plus bas est de 10 et le score final de 50, trouvez les trois quartiles

Classe	10–	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	Somme
Fréquence	12	17	20	35	58	38	11	9	200

Apprendre

Recherche de quadrilatères pour les données représentées à l'aide de la méthode tige-feuille

Nous avons précédemment étudié la médiane (deuxième quartile) dans les données individuelles après les avoir ordonnées

(1) Si n est impair alors : la médiane = la valeur du terme dont la position $\frac{n+1}{2}$

(2) Si n est pair alors : la médiane $= \frac{1}{2}$ (la valeur du terme dont la position $\frac{n}{2}$ + la valeur du terme dont la position $\frac{n}{2}+1$)

En général

Si le nombre de données est n et n+1 est un nombre divisible par 4, alors les quartiles sont l'un des éléments du tableau donné et nous l'obtenons directement à partir de la relation suivante:

Position du premier quartile Q_1(premier quartile)$= \frac{n+1}{4}$

Position du premier quartile Q_2(médiane) $= \frac{n+1}{2}$

Position du troisième quartile Q_3(quartile inférieur) $= \frac{3\,(n+1)}{4}$

Exemple

(5) Les données suivantes représentent les scores de 15 étudiants à un test La période mensuelle est représentée par la méthode de la tige et des feuilles, étant donné que Score final de 30 pour trouver les trois quartiles.

Tige	Feuilles						
0	1	1	1	2	2	3	3
1	0	1	1	1	4		
2	1	2	2				

Clé ⟵ 10 = 1|0

Solution

$\because$ n = 15 $\therefore$ n + 1 = 16 Un nombre divisible par 4

$\because$ Les données du tableau sont classées par ordre croissant

Nous trouvons donc l'ordre des quartiles et les attribuons directement à partir des données du tableau

Tige	Feuilles						
0	1	1	1	2	2	3	3
1	0	1	1	1	4		
2	1	2	2				

Q_1 le quartile inférieur

Q_2 le quartile médiane

Q_3 le quartile supérieur

1) Le premier quartile sa position $Q_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{16}{4} = 4$

La valeur du premier quartile **(le quatrième élément de la première ligne)**

$\therefore Q_1 = 2$

2) Le deuxième quartile sa position $Q_2 = \frac{n+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$ La valeur du premier quartile

$\therefore Q_2 = 10$ **(le premier élément de la deuxième rangée)**

3) Le troisiéme quartile sa position $Q_3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3 \times 16}{4} = \frac{48}{4} = 12$

La valeur du troisième quartile

$\therefore Q_3 = 14$ **(le cinquième élément de la deuxième rangée)**

Tache de boîte

Apprendre

Les quartiles sont appelés mesures de position ordinale et sont utilisés pour identifier...

La répartition de la distribution des données en quartiles

la représentation en boîte utilise ces valeurs pour décrire les données par

Ajoutez à vos commaissances

Il existe d'autres mesures de position, comme les déciles qui divisent les données en dix parties égales et les centiles qui divisent les données en cent parties égales et ainsi de suite

Dessinez un rectangle avec le début du quartile inférieur et la fin du quartile supérieur après avoir représenté les données

Ensuite sur la même ligne est disposé

(valeur minimale - quartile inférieur - médiane - quartile supérieur - valeur maximale)

La forme obtenue est appelée une boîte à deux côtés.

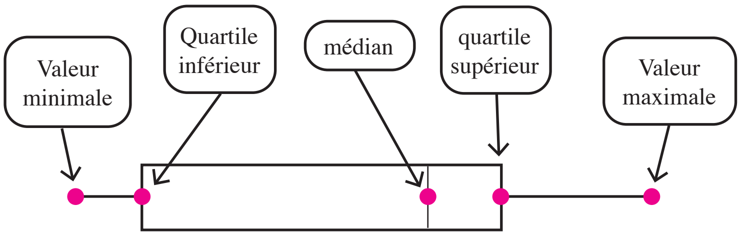
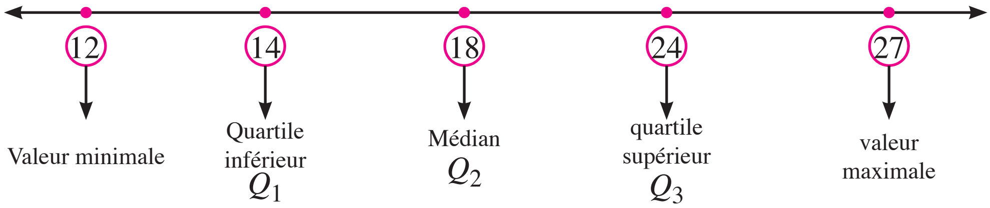


Figure 1

Example

6 Par exemple, les données suivantes : 14; 24; 16; 18; 20; 24; 13 et 27 en utilisant une représentation sous forme de boîte.

Solution



La représentation de la boîte correspondant aux données précédentes est la suivante :

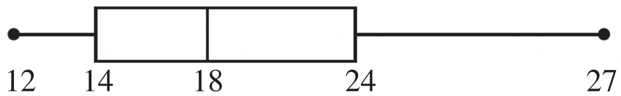


Figure 2

(1) Nous constatons que 50% des données se situent entre le quartile inférieur et le quartile supérieur

(2) La représentation de la boîte peut être dessinée de manière verticale

Essez de résoudre

5 Dessinez la boîte à taches des données suivantes :

27; 24; 20; 18; 17; 15; 13

Tige	Feuilles
4	0 3 3 6 7
5	1 8 9
6	2 3 4

Clé ⟵ 51 = 5|1

Example

7 Les scores suivants représentent les scores de 15 étudiants à l'examen de statistiques

37	40	45	23	18
44	53	38	49	55
15	58	35	32	42

Dessinez la boîte

Solution

L'ordre croissant des scores

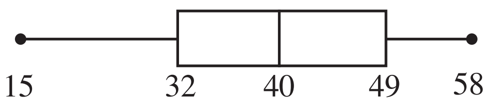
15; 18; 23; 32; 35; 37; 38; 40; 42; 44; 45; 49; 53; 55; 58

La valeur minimale = 15, la valeur maximale = 58

Premier quartile (inférieur) = 32

Deuxième quartile (médiane) = 40

Troisième quartile (supérieur) = 49



Exercice 2 - 2

1 trouver les quartiles inférieur, moyen et supérieur de l'ensemble de valeurs suivant :

a 70; 81; 82; 58; 88; 90; 93

b 7; 5; 2; 7; 6; 12; 4; 8; 9

c

Tige	Feuilles
4	0 3 3 6 7
5	1 8 9
6	2

Clé ← 58 = 5|8

2 lien avec l'énergie : Dans une étude sur la consommation d'un groupe de voitures à essence, les résultats ont été les suivants :

Nombre de kilomètres par litre	20-	25-	30-	35-	40-	45-
Nombre de voitures	7	11	12	7	6	8

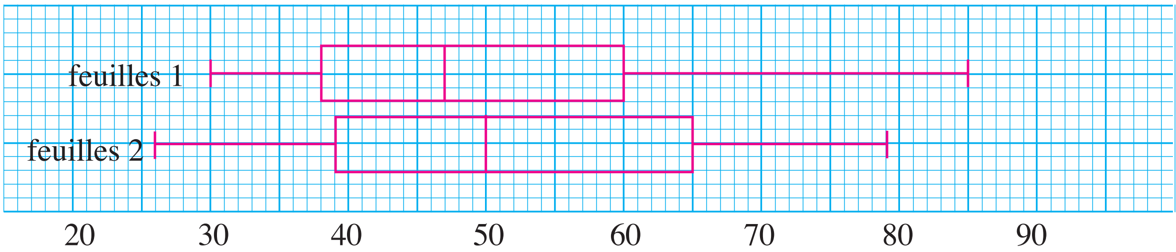
former un tableau de fréquences cumulatives croissant, puis trouver les quartiles de deux manières différentes.

3 La représentation suivante représente les données sur les notes des élèves de deux classes différentes dans une matière. Dessinez la représentation en boîte pour chacune des deux classes, puis calculez les quartiles.

Premiere classe	tige	deuxième classe
4	3	2 3
3 3 2 2 1 1 0	4	0 2 3
1 0 0	5	0 0 2 3 3 4 5
4	6	1 3

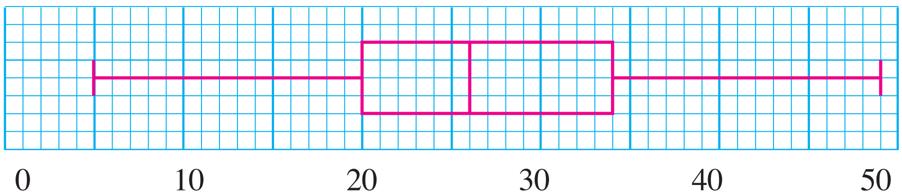
50 = 5|0 → Clé ← 42 = 4|2

4 La figure suivante montre la distribution des notes pour deux examens pour un groupe d'étudiants : attribuez des quartiles à chacun d'eux et écrivez deux phrases expliquant la comparaison entre les notes.

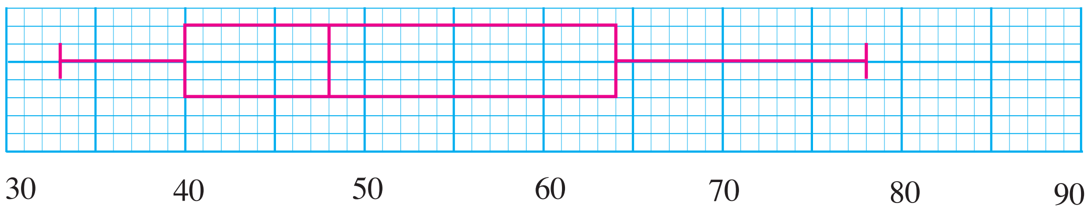


5 Décrivez chaque représentation suivante, en indiquant la valeur la plus basse - la valeur la plus élevée - le quartile inférieur - la médiane - le quartile supérieur - pour chaque

a



b



Unité 2

2 - 3 la moitié de l'étendue de quartiles

A apprendre

- la moitié de l'étendue de quartiles

Vocabulaire de base

- l'étendue
- le premier quartile
- le troisiéme quartile
- la moitié de l'étendue de quartile ensemble

Réfléchir et discuter

Les données suivantes montrent les scores de 7 groupes dans l'un des concours de matières Mathématiques sous la supervision du professeur de classe, sachant que la note maximale

Pour le matériel = 50 degrés

1) Trouvez l'étendue de ces degrés

2) Trouvez les trois quadrants de ces degrés

3) Dessinez une boîte représentant les données

Que représente la longueur de la boîte et quelle quantité de données d'origine contient-elle ?

ensemble	la note
le premier	27
le deuxième	23
le troisième	45
le quatrième	30
le cinquième	38
le sixième	48
le seprième	41

Apprendre

Étant donné que la boîte ne contient pas de valeurs aberrantes des données et représente 50

À partir des valeurs, la moitié de l'écart inter quartile est définie.

En tant que mesure de dispersion en termes de début de la boîte (quartile inférieur) et de fin La boîte (quartile supérieur) est la suivante :

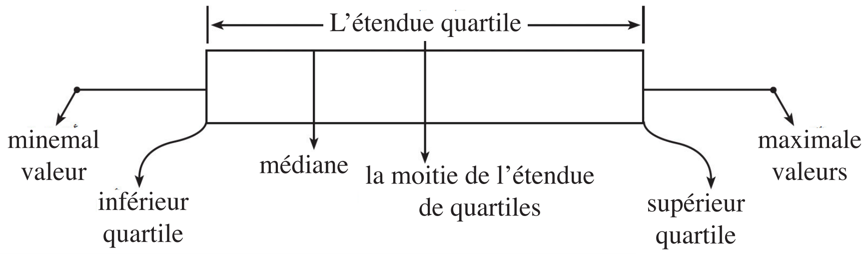
$$\text{la moitié de l'étendue de quartiles} = \frac{\text{supérieur quartile} - \text{inférieur quartile}}{2}$$

$$Q_D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q_D est la moitié de l'étendue de quartiles "

Q_3 supérieur quartile

Q_1 inférieur quartile



Rappele-toi

certaines mesures de dispersion étudiées précédemment

1) L'étendue.

2) L'écart-type.

3) la variance

les advantage set inconvenients la moitie de l'etendue de quartile

il est préfré comme mesure de dispersion en présence de valeurs extrêmes ; car il est simple et facile à calculer.

Son inconvénients:

Il ne prend pas en compte toutes les valeurs

Lien avec l'agriculture

Exemple

1 Le tableau de fréquence cumulée suivant montre la répartition de 60 fermes de mais

Zone	15–	20–	25–	30–	35–	45 – 40
Nombre de fermes	3	9	15	18	12	3

Calculer

a Superficie plantée en maïs en hectares

b Réduire de moitié l'étendue de quartiles de la superficie plantée en maïs en hectares

Solution

a Trouver les positions des données à l'intérieur du tableau

(1) position du premier quartile = $\frac{n}{4} = \frac{60}{4} = 15$

$\therefore$ limite inférieure de la classe du premier quartile = 25

longuer de l'intervalle du premier quartile = 5

Fréquence correspondant à l'intervalle quartile = 12

$Q_1 = 25 + \frac{15 - 12}{15} \times 5 = 26$

(2) position du troisième quartile = $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 60}{4} = 45$

$Q_3 = 35$

b Nous finançons la majeure partie de l'écart interquartile

$Q= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{35 - 26}{2} = 4,5$

La moitié de l'écart interquartile pour la superficie =

4,5 hectares = 45 000 mètres carrés

Ajoute à tes connaissances

L'hectare est une unité de mesure de surface est égale à 10000 mètres carrés

Les termes superieures des classes	Frequence cumulée croissante
moins de 15	0
moins de 20	3
moins de 25	12
moins de 30	27
moins de 35	45
moins de 40	57
moins de 45	60

Plateau à résoudre

1 Les données suivantes montrent un tableau de fréquence pour les enseignants âgés de 20 ans

Les âges	33–	38–	43–	48–	53–	La somme
Nombre d'enseignants	3	7	4	2	4	20

Calculer la moitié de l'écart inter quartile pour ces âges

Exemple

2 Les données suivantes montrent les résultats d'un groupe d'étudiants à un test. Trouvez la moitié de l'écart interquartile pour ces résultats

Tige	Feuilles
5	6 9
6	4 5 9
7	0 1 3 6 7 8
8	0 2 2 5

solution

n = 15 (où n représente le nombre de données)

la position du premier quartile $= \frac{n+1}{4} = \frac{15+1}{4} = 4$

$Q_1 = 65$

la position du troisième quartile $= \frac{3(n+1)}{4} = \frac{48}{4} = 12$

$Q_3 = 80$

La moitié de l'écart interquartile est $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{80 - 56}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

Essez à résoudre

2 Ce qui suit la quantité de production quotidienne du laiten litres d'un échantillon de vaches

Sélectionnées dans une ferme:

30; 27; 18; 20; 29; 34; 25; 32; 29; 21; 23; 28; 25; 19

Représentez les données de laméthode des tiges et des feuilles et calculz la demi - étendue interquartile

Exercice 2 - 3

1 Trouve l'étendue et la demi-étendue interquartile de données suivantes :

a 46; 64; 52; 61; 56; 55; 43; 62; 60; 51; 54; 51

b 3,4' 5,9; 4,1; 1, 5;

c

tige	feuilles
0	3
1	0 0 2
2	3 8 9
3	0 2 5 5 7 9
4	1

feuilles ⟵ 28 = 2|8

longueur

2 le tableau de fréquence suivant montre les tailles de 240 étudiantes dans une université

la longueur en cm	-140	-145	-150	-155	-160	-165	-170	-175	-180	Somme
le nombre des étudiantes	3	10	21	54	72	48	25	5	2	240

Trouver la demi-étendue interquartile et Répresente les données par la boite

Santé

3 le tableau de fréquence suivant montre les poids de plusieurs nouvea-nés pandant 14 jours dans un hôpital

les poids de nouveau-nés an kg	-2	-2.5	-3	-3.5	-4	-4.5	la Somme
le nombre de nouveau nés:	3	7	10	8	4	2	34

trouver l'écart interquartile (demi-intervalle interquartille)

4 Si les données suivantes représentent les notes de 14 élèves dans deux tests de mathématiques au cours de deux mois consécutifs:

test1	17	18	5	4	11	14	18	18	6	15	14	15	11	10
test2	5	4	8	10	8	18	12	12	13	13	18	18	17	16

La consigne

a calculz les quartiles pour les deux tests ainsi que la demi-étendue inter quartile

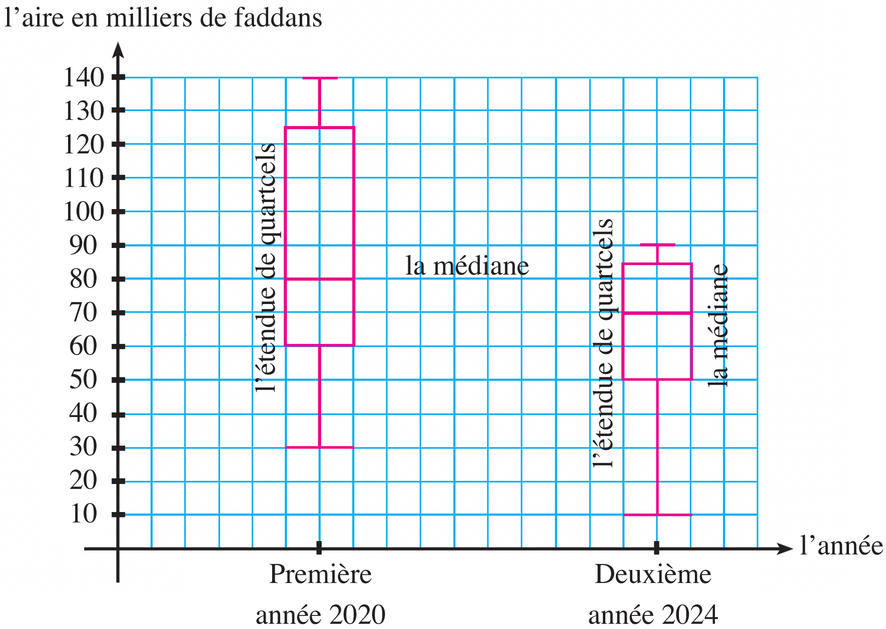
b Comparez les notes dees élèves dans les deux tests en utilisant la médiane et la demi-étendue inter quartile , et déterminez dans le quel des tests les élèves ont obtenu de meilleurs résultats et . pourquoi?

Agriculture:

5 le graphique suvant représente la superficie cultivée en milliers d'acres dans 25 villages au cours de deux années diffeerentes la consigne:

a Trouver la quartile superieur; la quartile inférieur; la médiane et la demi-eten due interquartile de dux ans?

b Que concluez - vous de ces données ?



Unité
3

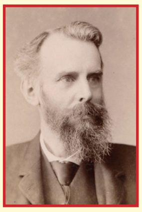
Probabilité conditionnelle

Introduction de l'unité

On a étudie auparavant que la statistique est l'une des branches de mathématiques qui s'intéresse à cumuler les datas, leurs classification et leurs interprétation, afin de prendre des décisions convenables d'un phénomène quelconque. La probabilité est considère comme la base des méthodes statistiques. Les chercheurs les ont utilise depuis longtemps pour des raison de sante, sociales et économique, …… La science de la probabilité a été fondée par plusieurs savants : le savant français (Pierre-Simon Laplace 1749-1827) , et le savant anglais (de Morgan 1806-1781) et (John Venn 1834-1923) et le savant russe (Andrey Markov 1856- 1922) et d'autres ………………..

Pierre Simon Laplace

De Morgan



John Vin

Andrei Markov

Notez bien que les applications de la statistique et de la probabilité sont nombreuses dans les divers domaines pédagogique, sociale et économique. Dans cette unité, on va étudier la probabilité conditionnelle entre deux variables, ses théorèmes et ses Applications dans des situations différentes de la vie ainsi que l'étude des événements dépendants et indépendants.

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Reconnaitre les événements et les événements incompatibles
- Reconnaitre la probabilité conditionnelle
- Déduire les théorèmes de la probabilité conditionnel
- Reconnaitre les événements dépendants et indépendants
- Appliquer la probabilité conditionnelle dans des situations quotidiennes différentes

Vocabulaires de base

- *Evénements incompatibles*
- *Evénements compatibles*
- *Evénements dépendants*
- *Evénements indépendants*
- *Probabilité conditionnelle*

Leçons de l'unité

Leçon (3-1):Calcul de probabilité

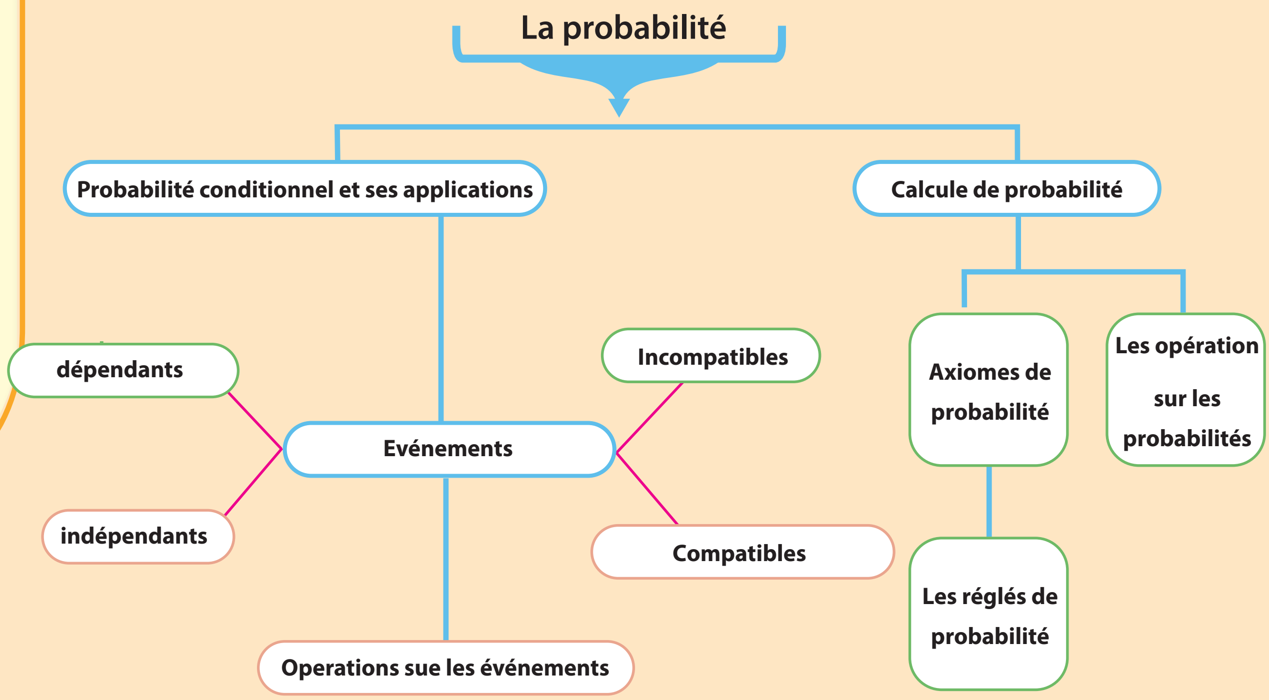
Leçon (3-2):probabilité conditionnel

Leçon (3-2):événements dépendants

Matériels utilisés

Calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



Unité 3

3 - 1

Calcul de probabilité

A apprendre

- Notion d'expérience aléatoire et d'univers des éventualités
- Notion d'événement – événement élémentaire – événement certain – événement impossible
- Reconnaitre les opérations sur les événements comme (union – intersection – différence – complémentaire)
- Événements incompatibles
- Lois de De Morgan
- Notion de probabilité.
- Calcul de probabilité.
- Axiomes de probabilités et applications quotidiennes

Vocabulaires de base

- Expérience aléatoire
- Univers des éventualités
- Événement
- Événement élémentaire
- Événement certain
- Événement impossible
- Événements incompatibles.
- Probabilité
- Axiomes de probabilité

Préface:

On a déjà étudié les notions de bases simplifiées des probabilités, dans cette leçon nous allons continuer à développer les études de ces notions et les opérations sur les événements pour calculer la probabilité de la réalisation d'un événement à partir des exemples variés de la vie quotidienne.

Vocabulaires de base

Apprendre

Expérience aléatoire: C'est une expérience dont on peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir, laquelle de ces issues sera réalisée.

Exemple

1. Laquelle des expériences suivantes est une expérience aléatoire ?
   a. On lance un dé non pipé et on observe le nombre apparu sur la face supérieure.
   b. On observe la couleur d'une boule tirée au hasard d'un sac contenant des boules colorées.
   c. On jette une pièce de monnaie et on note le résultat apparu sur la face supérieure.
   d. On observe la couleur d'une boule tirée au hasard d'un sac contenant des boules identiques colorées : la première est blanche, la deuxième est noire, la troisième est rouge et la quatrième est verte.

Solution

Les expériences (a),(c),(d) sont des expériences aléatoires car on peut déterminer á l'avance tous les résultats possibles mais on ne peut pas déterminer le résultat exact avant la réalisation de l'expérience. L'expérience (b) n'est pas aléatoire car on ne peut pas déterminer á l'avance les résultats de cette expérience avant sa réalisation.

Essaie de résoudre

1 Laquelle des expériences suivantes est aléatoire ?

a On jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat apparu sur la face supérieure.

b On observe le nombre inscrit sur une carte tirée au hasard d'un sac contenant des cartes numérotées (sans savoir ses nombres) .

c On observe le nombre inscrit sur une carte tirée au hasard d'un sac contenant 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20 .

A apprendre

Définition

Univers des éventualités (Univers des issues)

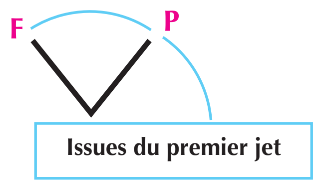
- L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience et on le note U.

Remarque :

- Le nombre d'éléments de l'univers des éventualités est noté card(U).
- L'univers des éventualités est fini si le nombre de ses éléments est limité et il est infini si le nombre de ses éléments est illimité. Dans la suite, nous allons étudier les univers des éventualités finis.

Expériences aléatoires usuelles :

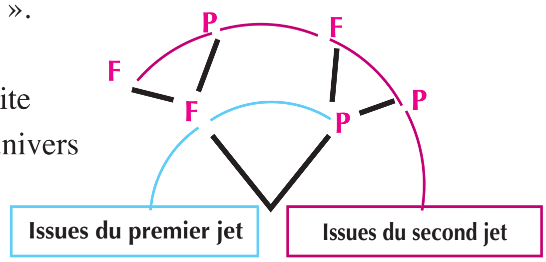
Jeter une pièce de monnaie



1- Si on jette une pièce de monnaie une fois et on observe le résultat apparu sur la face supérieure : U = { E ; P}

Où : F symbolise « face » et P symbolise « pile ».

On a card(U) = 2

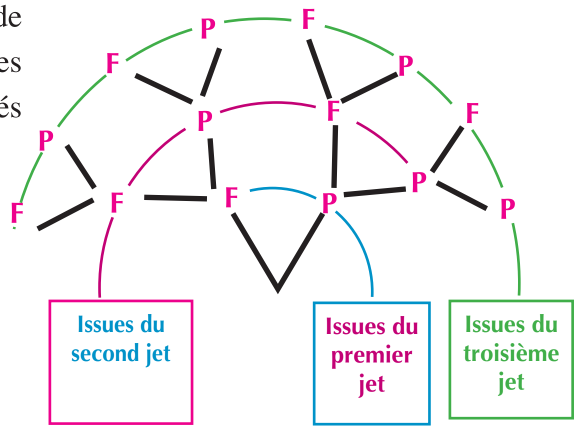


2- Si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on observe la succession des faces et des piles, l'univers des éventualités de cette expérience est :

U = { (F ; F) ; (F ; P) ; (P ; F) ; (P ; P)}

On a card (U) $= 2 \times 2 = 4 = 2^2$

3- Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suite et on observe la succession des faces et des piles, on peut obtenir l'univers des éventualités de cette expérience de l'arbre ci-contre:



U = { {(F ; F ; F) ; (F ; F ; P) ,
(F ; P ; F) ; (F ; P ; P) ,
(P ; F ; F) ; (P ; F ; P) ,
(P ; P ; F) ; (P ; P ; P) }

On a card (U) $= 2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$

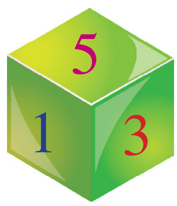
On remarque que :

1- Si on jette une pièce de monnaie m fois de suite, on a card (U) = 2^m

2- (F ; P) $\neq$(P ; F) pourquoi?

3- Si on jette simultanément, deux pièces de monnaie, distinctes (en forme et en volume)l'univers des éventualités de cette expérience est le même que quand on jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Dans ce cas, chaque résultat sera sous la forme d'un couple (face de la première pièce ; face de la seconde pièce).

Lancer un dé



1- Si on lance un dé une fois et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, l'univers des éventualités de cette expérience est :

U = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } On a card(U) = 6

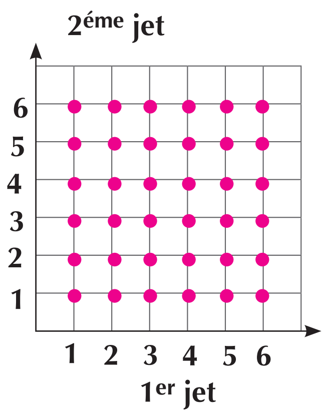
2- Si on lance un dé deux fois de suite et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, l'univers des éventualités de cette expérience est l'ensemble des couples ayant pour premier élément le résultat du premier jet et pour second élément le résultat du deuxième jet d'où :

U = { (x ; y) : x $\in$ { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} et y $\in$ { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}} Les figures suivantes illustrent le résultat.

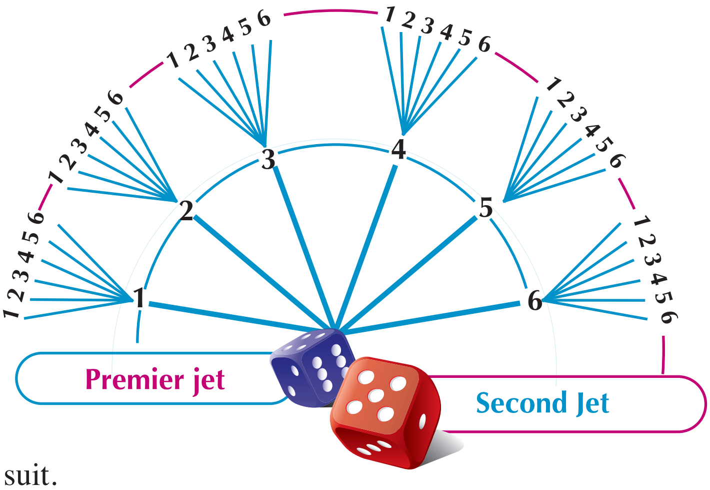
a Forme du tableau :

Jet premier / Deuxiéme	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

b Forme géométrique :



c L'arbre graphique



On remarque que :

1- card (U) = $6 \times 6 = 36 = 6^2$

2- U $= \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

3- Si on lance deux dés simultanément une fois, l'univers des éventualités de cette expérience est le même que quand on lance un seul dé deux fois de suit.

Exemple

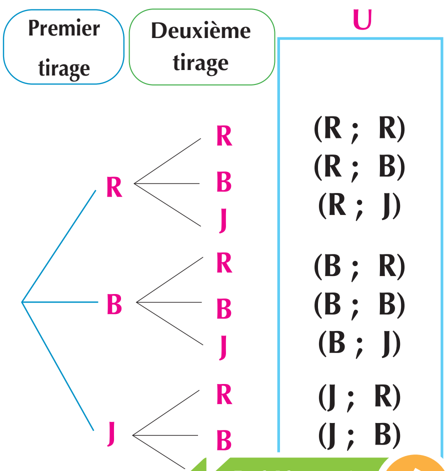
(2) Un sac contient trois boules identiques de couleurs différentes. La première est rouge, la seconde est blanche et la troisième est jaune. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre avec remise et on observe la succession des couleurs. Écrivez l'univers des éventualités.

Solution

On note la boule rouge par le symbole R, la boule blanche par le symbole B et la boule jaune par le symbole J:

Lors d'un tirage la remise d'une boule tirée permet de la retirer dans le tirage suivant. La figure suivante montre l'arbre de l'univers des éventualités où carde (U) = $3^2 = 9$

U = {(R ; R), (R ; B), (R ; J), (B ; R), (B ; B), (B ; J), (J ; R), (J ; B), (J ; J)}



Enrichissez votre connaissance

Si on tire une boule sans remise c-à-d ne remet pas la boule dans le sac après son tirage.
Donce il n'y aura pas de possibilité d'apparaitre dans le deuxiéme tirage.

Essayez de résoudre

(2) Une boîte contient trois boules identiques numérotées de 1 à 3. On tire deux boules l'une après l'autre avec remise et on observe le numéro de la boule tirée. Écrivez l'univers des éventualités de cette expérience et le nombre de ses éléments.

A apprendre

L'événement

- L'événement est un sous ensemble de l'univers des éventualités.

L'événement élémentaire (simple)

- C'est un sous-ensemble de l'univers des éventualités qui contient un seul élément.

L'événement certain

- C'est l'événement dont les éléments sont les mêmes que ceux de l'univers des éventualités U.

L'événement impossible

- C'est l'événement qui ne contient aucun élément. Il est noté ϕ. C'est un événement qui ne se réalise jamais.

definition

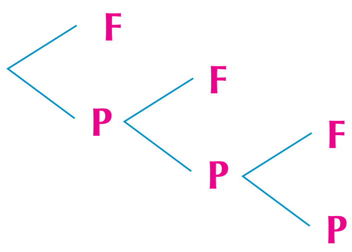
Exemple

3 On jette une pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'on obtienne face une fois et pile 3 fois. Ecrivez l'univers des éventualités puis déterminez les événements suivants:-

A «obtenir face une fois au plus»
C «obtenir pile deux fois au moins»
B «obtenir face une fois au moins»
D «obtenir face deux fois au moins»

Solution

D'aprés l'arbre, on trouve



U = {F , (P ; F), (P ; P ; F),(P ; P ; P)}

A = {F ; (P ; F), (P ; P , F), (P ; P ; P)} = U

B = {F ; (P ; F), (P ; P; F)}

C = {(P ; P ; F) , (P ; P ; P)}

D = { } = ϕ événement impossible.

Essayez de résoudre

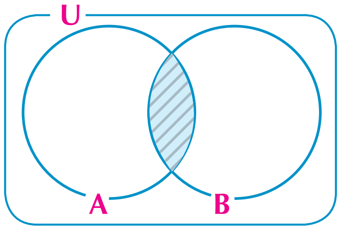
3 On jette une pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'on obtienne deux faces ou deux piles une fois et pile 3 fois. Ecrivez l'univers des éventualités puis déterminez les événements suivants :

A «obtenir face une fois au moins»
B «obtenir pile deux fois au plus»
C «obtenir pile une fois au plus»

Opérations sur les événements.

A apprendre

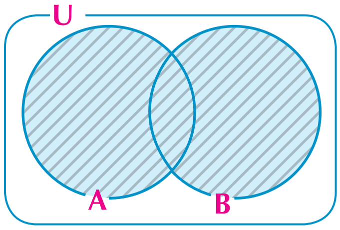
(1) L'intersection



$A \cap B$

L'intersection des deux événements A et B est l'événement $A \cap B$ qui contient les éléments de l'univers des éventualités appartenant à A et B à la fois. Cela signifie la réalisation de A et B (**réalisation des deux événements à la fois**).

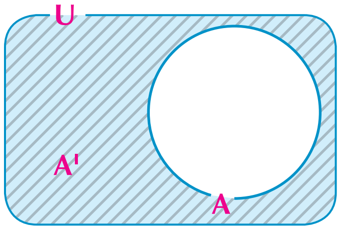
(2) L'union



$A \cup B$

L'union des deux ensembles A et B est l'événement $A \cup B$ qui contient les éléments de l'univers des éventualités appartenant à A ou B ou les deux à la fois. Cela signifie la réalisation de A ou B (**réalisation de l'un des deux au moins**) **.**

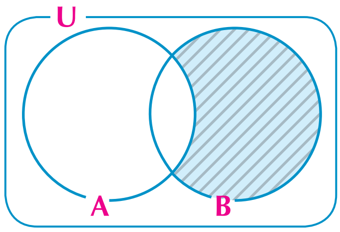
(3) La complémentarité



L'événement A' : est appelé le complément de l'événement A.
L'événement A : contient tous les éléments de l'univers des éventualités n'appartenant pas à l'événement A. Cela signifie la non réalisation de l'événement A.

Remarque que : $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \phi$

(4) La différence

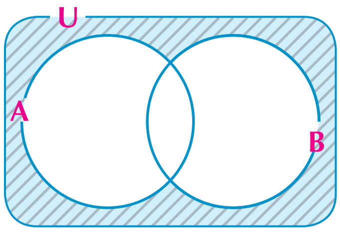


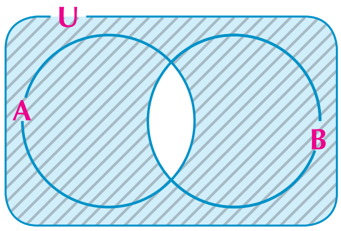
L'événement $A - B$ contient tous les éléments de l'univers des éventualités U appartenant à A et n'appartenant pas à B. Ce sont les mêmes éléments que $A \cap B'$

Cela signifie la réalisation **de A et la non réalisation de B (réalisation de A seulement).**

$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

(5) Lois de De Morgan





Si A et B sont deux événements de U, alors :

(1) $A' \cap B' = (A \cup B)'$

Cela signifie la non réalisation de l'un des deux événements)
ou (la non réalisation de A et la non réalisation de B)

(2) $A' \cup B' = (A \cap B)'$

Cela signifie la non réalisation des deux événements á la fois
ou (la réalisation de l'un des deux événements au plus)

A apprendre

Evénements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si la réalisation de l'un d'eux implique la non réalisation de l'autre.

Par exemple : **1-** Si A l'événement « réussir dans un examen » et B l'événement « échouer au même examen ». alors la réalisation de l'un des deux événements implique la non réalisation de l'autre.

2- Si on lance un dé une fois et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, alors $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Si A est l'événement « obtenir un nombre impair » donc $A = \{1 ; 3 ; 5\}$

B est l'événement « obtenir un nombre pair » donc $B = \{2 ; 4 ; 6\}$

Alors $A \cap B = \phi$ donc la réalisation de l'un des deux événements implique la non réalisation de l'autre.

definition

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \phi$
- On dit que plusieurs événements sont incompatibles si et seulement s'ils sont incompatibles deux à deux.

Remarquez que :

1- Si $A \cap B = \phi$, alors A et B sont incompatibles .

Si A ; B et C sont trois événements de U et si : $A \cap B = \phi, B \cap C = \phi, A \cap C = \phi$ alors A , B et C sont des événements incompatibles et réciproquement.

2- Les événements élémentaires dans une expérience aléatoire sont incompatibles.

3- Un événement A et son complémentaire A` sont incompatibles.

Exemple

(4) On lance deux dés distincts et on observe les nombres inscrits sur les deux faces supérieures.

(a) Représentez l'univers des éventualités géométriquement puis écrivez chacun des deux événements suivants :

L'événement A « obtenir le même nombre sur les deux faces »

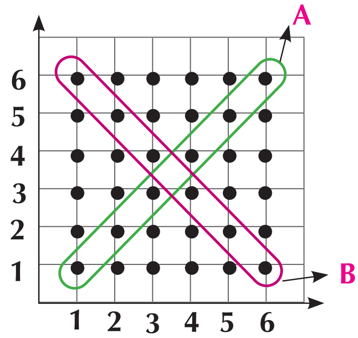
L'événement B « obtenir deux nombres dont la somme est égale à 7 »

(b) Les deux événements A et B sont-ils incompatibles ? Expliquez votre répons

Solution

(a) Les éléments de l'univers des éventualités de cette expérience sont des couples dont le nombre $= 6^2 = 36$

La figure ci-contre est la représentation géométrique de l'univers des éventualités où chacun de ses éléments représente un point comme le montre la figure



A = {(1 ; 1), (2 ; 2), (3 ; 3), (4 ; 4) , (5 ; 5) , (6 ; 6) }
B = { (6 ; 1) , (5 ; 2), (4 ; 3) , (3 ; 4) , (2 ; 5) , (1 ; 6) }

b $\because A \cap B = \phi$ $\therefore$ A et B sont deux événements incompatibles

Essayez de résoudre

4 Dans l'exemple précédant, écrivez les deux événements suivants :
l'événement C « obtenir deux nombres dont la somme est 5 »
l'événement D « obtenir deux nombres l'un est le double de l'autre »
C et D sont-ils incompatibles ? Expliquez votre répons.

Probabilité

A apprendre

Calcul de probabilité :

Si tous les résultats de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire (les événements élémentaires) ont la même possibilité , alors la probabilité de la réalisation d'un événement . $A \subset U$, (notée) P(A) où :

$$P(A) = \frac{\text{card }(A)}{\text{card }(U)} = \frac{\text{nombre des resultas de l'evenement A}}{\text{nombre des resultats de U}}$$

Exemple

5 Une boîte contient 10 boules identiques, 5 blanches, 2 rouges et les autres vertes. On tire au hasard une boule, calculez la probabilité des événements suivants :
L'événement A « la boule tirée est rouge »
L'événement B « la boule tirée est rouge ou verte »
L'événement C « la boule tirée ne est pas verte »

Solution

La probabilité que la boule tirée soit rouge $= P(A) = \dfrac{\text{card }(A)}{\text{card }(U)} = \dfrac{\text{nombre des boules rouges}}{\text{nombre total des boules}} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$

La probabilité que la boule tirée soit rouge ou verte $= \dfrac{\text{nombre des boules rouges+nombre des boules vertes}}{\text{nombre total des boules}}$

$$= \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

La probabilité que la boule tirée ne soit pas verte = P(C)
= La probabilité que la boule tirée soit rouge ou blanche $= \dfrac{2+5}{10} = 0{,}7$

Réfléchissez : Peut-on trouver P (C) d'une autre méthode ? Expliquez.

Essayez de résoudre

(5) Dans l'exemple précédant, calculez la probabilité des événements suivants :
L'événement D « la boule tirée soit rouge ou blanche »
L'événement E « la boule tirée soit rouge , blanche ou verte »

Á apprendre

Axiomes de la probabilité

1- Pour tout $A \subset U$ il existe un nombre réel appelé la probabilité de l'événement A et noté P(A) tel que : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

2- $P(U) = 1$

3- Si $A \subset U$, $B \subset U$ et si A et B sont deux événements incompatibles, Alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

D'après les axiomes précédents, on remarque que :

Le premier axiome signifie que la probabilité de la réalisation d'un événement est un nombre réel appartenant á l'intervalle [0 ; 1]

Le deuxième axiome signifie que la probabilité de la réalisation de l'événement certain = 1

On peut généraliser **le troisième axiome** pour un nombre fini d'événements incompatibles.

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$

où A_1, A_2, A_3 , ... , A_n sont des événements incompatibles deux à deux.

Résultats importants

(1) $P(\phi) = 0$

(2) $P(A') = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Enrichissez votre connaissance

Si $A \subset B$
alors $P(A) \leqslant P(B)$

Exemple

(6) A et B sont deux événements d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où :

$P(A) = \frac{3}{8}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calculez :

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A')$ c) $P(A - B)$ d) $P(A' \cap B')$

Solution

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

b $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

c $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

Essayez de résoudre

6 Dans l'exemple précédent, calculez les probabilités suivantes :

a $P(B')$ **b** $P(B - A)$ **c** $P(A' \cup B')$

Exemple

7 A et B sont deux événements d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où $P(A) = \frac{5}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A - B) = \frac{3}{8}$ calculez :

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A' \cap B')$ **d** $P(A' \cup B)$

Solution

a $P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

c $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

d $P(A' \cup B) = P(A \cap B')' = 1 - P(A \cap B') = 1 - P(A - B)$
$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Réfléchissez : Peut-on trouver $P(A' \cup B)$ d'une autre méthode ?

Essayez de résoudre

7 Dans l'exemple précédent, trouve :

a $P(A')$ **b** $P(A' \cup B')$ **c** $P(B \cap A')$

Exemple

8 A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A') = \frac{1}{3}P(A)$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$ trouvez :

a L'événement A « la réalisation de l'un des événements au moins »

b L'événement B « la réalisation de l'un des événements au plus »

c L'événement C « la réalisation de B seulement »

d L'événement D « la réalisation de l'un des événements seulement »

Solution

$\because P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$ $\therefore P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$\because P(A') = \frac{1}{3}P(A)$ $\therefore 1 - P(A) = \frac{1}{3}P(A)$ $\therefore \frac{4}{3}P(A) = 1$ $\therefore P(A) = \frac{3}{4}$

a L'événement A « la réalisation de l'un des événements au moins » $= P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

b L'événement B « la réalisation de l'un des événements au plus » $= P(A \cap B)'$
$= P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$

c L'événement C « la réalisation de B seulement » $= P(B - A)$
$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

d L'événement D « la réalisation de l'un des événements seulement »
$= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

Réfléchissez : Peut-on trouver la probabilité de la réalisation de l'un des événements seulement d'une autre méthode?

Essayez de résoudre

8 A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cup B)' = 0,1$. Trouvez la probabilité des événements:

a L'événement A « la réalisation de l'un des deux événements au moins »

b L'événement B « la réalisation de A seulement »

c L'événement C « la réalisation de l'un des événements seulement »

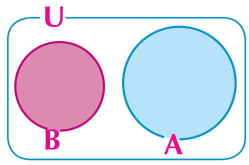
d L'événement D « la réalisation de l'un des deux événements au plus »

Exemple

9 Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P la fonction de probabilité définie sur U où:
$P(B) = 3\,P(A)$, $P(A \cup B) = 0.72$, trouvez : $P(A)$, $P(B)$ dans chacun des cas suivants:

1) Si A et B sont deux événements incompatibles.

2) Si $A \subset B$



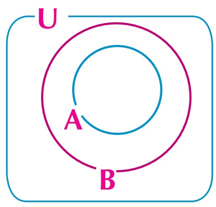
Solution

Soit $P(A) = x$ $\therefore P(B) = 3x$

1) $\because$ A et B sont deux événements incompatibles.

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ d'où $0,72 = 3x + x$

$\therefore x = 0,18$; $P(A) = 0,18$ et $P(B) = 0,54$



2) $\because A \subset B$ $\therefore A \cup B = B$

$P(A \cup B) = P(B) = 3x = 0,72$

$\therefore P(A) = 0,24$, $P(B) = 0,72$

Essayez de résoudre

9 Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P la fonction de probabilité définie sur U où:
$P(B) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ trouvez $P(A)$ dans chacun des cas suivants.

a Si A et B sont deux événements incompatibles. **b** Si $B \subset A$

Pensé critique :

Comment peut-on calculer $P(A)$ si $A \subset U$, U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P est la fonction de probabilité définie sur U et $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{3}{7}$

Essayez de résoudre

10 Soient E l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où $U = \{A , B , C\}$, si $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{2}{3}$ et $\frac{P(B')}{P(B)} = \frac{5}{2}$ trouvez $P(C)$

Exemple

10 En lien avec le milieu scolaires : Si la probabilité qu'un étudiant réussisse son examen de physique est 0,85 ; la probabilité qu'il réussisse son examen de mathématiques est 0,9 et la probabilité qu'il réussisse les deux examens ensemble est 0,8 , calculez la probabilité de :

a La réussite de l'étudiant à l'un des deux examens au moins.

b La réussite de l'étudiant en mathématiques seulement.

c La non réussite de l'étudiant aux deux examens ensemble.

Solution

Soient A l'événement « réussite de l'étudiant en physique » et B l'événement « réussite de l'étudiant en mathématiques .

On a : $P(A) = 0,85$, $P(B) = 0,9$, $P(A \cap B) = 0,8$

a La probabilité de la réussite de l'étudiant à l'un des deux examens au moins $= P(A \cup B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,85 + 0,9 - 0,8 = 0,95$

b La probabilité de la réussite de l'étudiant en mathématiques seulement signifie la probabilité de la réussite en mathématiques et la non réussite en physique c'est-à-dire $P(B - A)$ $\therefore P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0,9 - 0,8 = 0,1$

c L'événement « non réussite de l'étudiant aux deux examens ensemble» = $(A \cap B)$; C'est l'événement complémentaire de l'événement $(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,8 = 0,2$

Application de la vie courante:

Essayez de résoudre

11 Pour être recruté à un poste dans une entreprise, la personne doit passer deux tests, l'un est théorique et l'autre est pratique. La probabilité de réussir le test théorique est 0,75 ; la probabilité de réussir le test pratique est 0,6 et la probabilité de réussir les deux tests ensemble est 0,5. Une personne se présente pour la première fois pour avoir ce poste. Calculez la probabilité de :

a Réussir le test théorique seulement. **b** Réussir l'un des deux tests au moins.

Pensé critique:

En lien avec le sport : A Lors d'une conférence de presse, l'entraineur d'une équipe déclare que la probabilité que son équipe gagne le match d'allée est 0,7 , la probabilité qu'elle gagne le match de retour est 0,9 et la probabilité qu'elle gagne les deux matchs ensemble est 0,5. Les déclarations de l'entraineur de l'équipe sont-elles compatibles avec la notion de probabilité ? Expliquez votre réponse.

Exemple

11 On lance un dé non truqué deux fois de suite et observe les nombres apparus sur la face supérieure. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants

(1) A « la somme des deux nombres est plus petit ou égale á 4 »

(2) B « l'un des deux nombre est le double de l'autre »

(3) C « la différence absolue des deux nombres est 2 »

(4) D « la somme des deux nombres est plus grand que 12 »

Solution

card (U) = 36

(1) A = {(1 ; 1), (1 ; 2) , (1 ; 3), (2 ; 1), (2 ; 2), (3 ; 1)} $\therefore$ card (A) = 6 $\therefore$ P (A) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) B = { (1 ; 2), (2 ; 1), (2 ; 4), (4 ; 2), (3 ; 6) , (6 ; 3)} $\therefore$ card (B) = 6 $\therefore$ P (B) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(3) C = {(1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 4), (4 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3) , (4 ; 6) , (6 ; 4)} $\therefore$ P(C) = $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

(4) $\because$ D = ϕ , $\therefore$ P (D) = 0 car ce n'est possible d'avoir deux nombres dont la somme est plus grand que 12 ,

Essayez de résoudre

12 Dans l'exemple précédent, calculez les probabilités des événements suivants :

(1) l'événement A « Les deux nombres apparus sont égaux »

(2) l'événement B« Le nombre de la première lance est pair et le nombre de la deuxième lance est impair »

Exemple

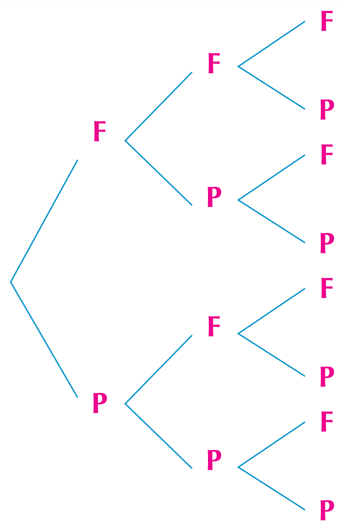
12 On jette une pièce de monnaie non pipée trois fois de suite et on observe la succession des piles et des faces. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

(1) l'événement A « obtenir face une fois seulement .

(2) l'événement B « obtenir face deux fois au moins .

(3) l'événement C « obtenir face deux fois exactement .

Solution



U = { (F ; F ; F), (F ; F ; P), (F ; P ; F), (F ; P ; P) , (P ; F ; F), (P ; F ; P) , (P ; P ; F), (P ; P ; P)}, et card (U) = 8

(1) ∵ A est l'événement « obtenir face une fois seulement.

∴ A = { (F ; P ; P) , (P ; F ; P), (P ; P ; F)} ,

∵ cord (A) = 3 ∴ P (A) = $\frac{3}{8}$

(2) ∵ B est l'événement « obtenir face deux fois au moins » c'est-à- dire obtenir deux ou trois faces

∴ B = { (F ; F ; P) , (F ; P ; F), (P ; F ; F), (F ; F ; F)}

∵ card (B) = 4 ∴ P (B) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(3) ∵ C est l'événement «obtenir face deux fois exactement»

∴ C = { (F ; F ; P), (F ; P ; F), (P ; F ; F)} ∵ card (C) = 3 ∴ P (C) = $\frac{3}{8}$

Essayez de résoudre

13 Dans l'exemple précédent, Calculez la probabilité des événements suivants :

(1) l'événement A « obtenir le même résultat dans les trois jets»

(2) l'événement B « obtenir face une fois au plus.»

(3) l'événement C « obtenir un nombre impair de faces»

(4) l'événement D « obtenir pile une fois au moins.»

(5) l'événement F « obtenir un nombre de faces équivalent au nombre de piles.»

Exemple

13 En lien avec la société : Dans l'un des conférences il y avait 200 personnes de nationalité différentes comme l'indique le tableau ci-dessous.

	Parle arabe	Parle anglais	Parle français	Total
Homme	50	45	25	120
Femme	45	30	5	80
total	95	75	30	200

Si on choisit une personne au hasard, trouvez la probabilité que la personne choisie soit :

a Une femme qui parle arabe.

b Un homme qui parle anglais.

c Une personne qui parle l'arabe ou français.

d Une personne qui parle l'arabe et l'anglais.

e Une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe.

Solution

a La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui parle arabe = $\frac{45}{200}$ = 0,225

b La probabilité que la personne Choisissez soit un homme qui parle l'anglais = $\frac{45}{200}$ = 0,225

c La probabilité que la personne Choisissez soit une personne qui parle l'arabe ou français = $\frac{95+30}{200}$ = 0,625

d La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe = p (0 = (ϕ

e La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe = $\frac{5}{200}$ = 0,025

Essayez de résoudre

14 Dans l'exemple précédant, Calculez la probabilité que la personne Choisissez :

a Une personne qui ne parle pas l'anglais . b une personne qui parle l'allemand .

c Une femme qui parle le français ou l'anglais .

d Un homme qui parle l'arabe ou une femme qui parle l'anglais .

Exercices (3 - 1)

1 Un élève veut acheter un cartable. Il a le choix entre trois sortes de cartables à deux volumes différents et à deux couleurs différentes noire et marron. Représenter l'univers des éventualités de cette situation par un arbre graphique.

2 On jette une pièce de monnaie puis un dé et on note le résultat apparu sur leurs faces supérieures.

a Ecrivez l'univers des éventualités puis détermine les événements suivants:

- l'événement A « obtenir face et un nombre impair ».
- l'événement B « obtenir pile et un nombre pair »
- l'événement C « obtenir un nombre premier plus grand que 2»
- l'événement D « obtenir un nombre divisible par 3»

3 On jette un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure, détermine les événements suivants :

- l'événement A « obtenir deux nombres égaux. »
- l'événement B « obtenir deux nombres dont la somme est 9 ».
- l'événement C «obtenir deux nombres dont la somme est 13 ».
- l'événement D « obtenir 3 une seul fois».

4 Formez un nombre de deux chiffres différents parmi les chiffres {1 ; 2 ; 3 ; 4} Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique, écrivez l'univers des éventualités puis détermine les événements suivants :

- l'événement A « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est impaire».
- l'événement B « obtenir un nombre dont le chiffre des dizaine est impaire ».
- l'événement C « obtenir un nombre dont les deux chiffres sont impaires».
- l'événement D « obtenir un nombre dont le chiffre des unités ou le chiffre des dizaines est impair».

5 Un sac contient 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20. On tire au hasard une carte et on note le nombre inscrit sur cette carte, Déterminez les événements suivants :
(a) L'événement A « obtenir un nombre pair supérieur á 10 »
(b) L'événement B « obtenir un diviseur de 12»
(c) L'événement C « obtenir un nombre impair divisible par 3 »
(d) L'événement C « obtenir un nombre multiple de 2 et de 5 »
(e) L'événement D « obtenir un nombre premier »
(f) L'événement F « obtenir un nombre vérifiant l'inéquation $5x - 3 \leqslant 17$

6 Parmi 8 cartes identiques numérotées de 1 á 8, on tire au hasard deux cartes l'une après l'autre avec remise. Quel est le nombre des éléments de l'univers des éventualités :
(a) Si l'événement A « le nombre dans le deuxième tirage est le triple du nombre dans le premier tirage »
(b) l'événement B « la somme des deux nombres est supérieure á 13 » Ecrivez A et B. A et B sont ils incompatibles ? Expliquez votre réponse.

7 On jette une pièce de monnaie trois fois de suites et on note la succession des faces et des piles. Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique puis déterminez les événements suivants :
(a) l'événement A « obtenir pile deux fois au moins »
(b) l'événement B « obtenir pile deux fois au plus »
(c) l'événement C « obtenir face dans le premier jet »
(d) l'événement D « ne pas obtenir face dans les trois jets »

8 On jette une pièce de monnaie puis un dé. On note les résultats apparus sur les faces supérieures de la pièce et du dé. Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique puis déterminz les événements suivants :
(a) l'événement A « obtenir pile et un nombre pair »
(b) l'événement B « obtenir face et un nombre impair »
(c) l'événement C « la non réalisation de A ou la non réalisation de B »
(d) l'événement D « la réalisation de A seulement »
(e) l'événement E « la réalisation de A et la réalisation de B »

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

9 Si on jette un dé une seule fois, alors la probabilité d'obtenir un nombre impair inferieur á 5 est :
a $\frac{2}{5}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{6}$

10 Si on jette un dé deux fois de suite, alors la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le premier jet et un nombre premier dans le deuxième jet est :
a $\frac{1}{3}$ b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{9}$ d $\frac{1}{4}$

11 Une boite contient 3 boules blanches, 5 boules rouges et 7 boules vertes, si on tire au hasard une boule, alors la probabilité que la boule tirée soit blanche ou verte est :
a $\frac{1}{5}$ b $\frac{2}{3}$ c $\frac{7}{15}$ d $\frac{1}{2}$

12 Une boite contient 9 cartes identiques numérotées de 1 á 9, si on tire au hasard une carte, alors la probabilité que la carte tirée porte un nombre qui divise 9 ou un nombre impair est :

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{7}{9}$ **c** $\frac{1}{2}$ **d** $\frac{5}{9}$

13 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $B \subset A$ et $P(A) = 2P(B) = 0{,}6$ alors $P(A - B)$ est égale à:

a 0,6 **b** 0,3 **c** 0,4 **d** 0,2

14 On jette un dé régulier dont ses faces portent les nombres 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

a Calculez la probabilité de chacun des événements suivants:

- L'événement A «obtenir un nombre impair».
- L'événement B «obtenir un nombre premier».
- L'événement C «obtenir un nombre pair».
- L'événement D « obtenir un nombre plus grand que 12».
- L'événement G « obtenir un nombre formé d'un seul chiffre »
- L'événement F « obtenir un nombre formé de deux chiffres ».

b Calculez : $P(A \cup C)$, $P(U \cup F)$, $P(B \cap D)$.

15 Soit $U = \{ A ; B ; C ; D \}$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 3\,P(B)$, $P(C) = P(D) = \frac{7}{18}$. Calculez P(A) et P(B) plus grand que 12 ».

16 Soit A et B deux événements incompatibles de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A \cup B) = 0{,}6$, $P(A - B) = 0{,}25$ Trouvez, P(A), P(B).

17 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ trouvez :

a $P(A')$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A - B)$ **d** $P(A' \cap B')$

18 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et : $P(A) = 0.4$, $P(B') = 3P(B)$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$, Calculez la probabilité des événements suivants :

a la réalisation de A seulement . **b** la réalisation de A ou B

c la réalisation de A et la non réalisation de B .

19 Une boîte contient des boules coloriées identiques parmi lesquelles il y a 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules jaunes. On tire une boule au hasard.

Calculez la probabilité que la boule tirée soit :

a soit rouge. **b** soit bleu ou jaune.

c ne soit pas bleu . **d** ne soit ni rouge ni jaune.

20 Une boite contient des cartes numérotées de 1 á 30. On tire au hasard une carte, Calculez la probabilité que la carte tirée porte:

a un nombre divisible par 3 **b** un nombre divisible par 5

c un nombre divisible par 3 et par 5 **d** un nombre divisible par 3 ou par 5

21 On jette une fois trois pièces de monnaie distinctes. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

- L'événement A « obtenir face une ou deux fois»..
- L'événement B « obtenir face au moins une fois ».
- L'événement C « obtenir face une fois au plus »..
- L'événement D « obtenir pile deux fois de suite au moins »..

22 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre inscrit sur la face supérieure .
Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

- L'événement « obtenir le nombre 4 lors du premier jet»..
- L'événement « la somme des deux nombres obtenus est égale à 8 ».
- L'événement « la somme des deux nombres obtenus est inferieure ou égale á 5 ».

23 En lien avec le sport : Dans un échantillon constitué de 60 personnes, on trouve que 40 personnes supportent le club Al Hilal, 28 personnes supportent le club Al Negma et 8 personnes ne supportent aucun des deux clubs si on choisit une personne de l'échantillion, qu'elle est la probabilité que la personne choisie soit un support:

a de l'un des deux clubs au moins?
b des deux clubs ensemble?
c du club Al Hilal seulement?
d de l'un des deux clubs seulement?

24

On jette une pièce de monnaie puis un dé. O note le résultat apparu sur la face supérieure de cette pièce et le nombre apparu sur ce dé. Si l'événement A « obtenir face et un nombre premier» , l'événement B « obtenir un nombre pair.
Calculez la probabilité de chacun des événements suivants:

a la réalisation de l'un des deux événements au moins
b la réalisation des deux événements á la fois
c la réalisation de B seulement
d la réalisation de l'un des deux événements seulement .

25 On tire au hasard une carte parmi 50 cartes numérotées de 1 á 50
Calculez la probabilité que la carte tirée porte un nombre :

a qui est multiple de 7
b qui est carrée parfait
c qui est multiple de 7 et carrée parfait
d qui n'est ni carrée parfait ni multiple de 7

26 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et :
$P(B) = \frac{4}{5} P(A)$, $P(A - B) = 0{,}24$ et $P(B \cap A') = 0{,}15$ Trouvez :
$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B')$

27 Tarek a écrit 75 messages sur un ordinateur. Il a trouvé que 60% de ce qu'il a écrit sont sans erreur. Zeyad a écrit 25 messages. Il a trouvé que 80% de ce qu'il a écrit sont sans erreur. Si on choisi au hasard un message de ce qu'ils ont écrit, trouve la probabilité que le message choisi soit :

a sans erreur.
b écrit par Zeyad.
c écrit par zeyad et sans erreur .
d Tarek l'a écrit avec des erreurs.

28 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que:
$P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A' \cup B') = 0{,}5$, alors trouvez $P(A' \cap B)$

unité 3

3 - 2

Probabilité conditionnelle

A apprendre

- Evénements incompatibles
- Evénements compatibles
- Probabilité conditionnelle

Vocabulaires de base

- Evénements incompatibles
- Evénements compatibles
- Probabilité conditionnel

Introduction :

Tu as déjà étudié le calcul de la probabilité d'un événement quelconque (soit A) d'une expérience aléatoire En connaissant la relation entre le cardinal de cet événement (card(A)) et le cardinal de l'univers de l'expérience aléatoire (card (U))

P(A) (la probabilité de la réalisation de l'événement (A) $= \dfrac{\text{card (A)}}{\text{card (U)}}$

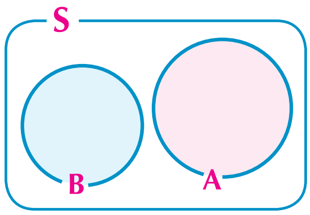
Evénements incompatibles

Les événements incompatibles sont les événements qui ne se réalisent pas à la fois car la réalisation de l'un n'implique pas la réalisation de l'autre c.-à-d. il n'a pas d'éléments commun ente eaux.

Mutually exclusive events:

n'ont pas d'éléments communs d'où leur intersection est l'ensemble vide ϕ.

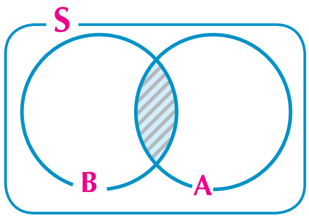
$\therefore$ $P(A \cap B) =$ Zéro et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Deux événements compatibles

La réalisation de l'un de deux événements compatibles n'implique pas la réalisation de l'autre événement (Il y a des éléments communs entre eaux)

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Dans ce qui suit, détermine les événements incompatibles et les événements compatibles ,

(1) $P(A \cup B) = B(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(2) $P(A') = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(5) $P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

Aide pédagogique

- Calculatrie scientifique - Logiciel de graphisme.

Probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux événements de U, dans quelque fois, la réalisation d'un événement B affect la réalisation de l'événement A. On peut calculer la probabilité de la réalisation de l'événement A à condition que l'événement B s'est réalisé. En connaissant la relation entre les résultats des deux événements.

Exemple préliminaire: On jette un dé une fois, alors l'univers U est :

U = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } ; si l'événement A = { 1 ; 2 ; 3} est l'événement « avoir un nombre inferieure à 4 »

$$P(A) = \frac{\text{card }(A)}{\text{card }(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Si l'événement B {2 ; 4 ; 6} est l'événement « avoir un nombre pair » La question qui se pose maintenant : si l'événement B s'est réalisé, alors quelle est la probabilité que l'événement A se réalise ?c.-à-d. quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair inferieur à 4 ?

On remarque que la condition donnée rend l'univers des éventualités à l'ensemble B={ 2 ; 4 ; 6}

Et l'événement « avoir un nombre pair » est $A \cap B = \{2\}$

D'où la probabilité demandée est : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Cet exemple montre que la probabilité de quelques événements diffère selon l'univers des éventualités.

A apprendre

La probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités U d'une expérience aléatoire, alors la probabilité de la réalisation de l'événement A à condition que la réalisation de l'événement B ; notée P (A/B) et se lit la probabilité de la réalisation de l'événement A à condition que la réalisation de l'événement B

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } P(B) > 0}$$

On remarque que : la probabilité conditionnelle a les mêmes propriétés de la probabilité (non conditionnelle).

1- $0 \leqslant P(A \mid B) \leqslant 1$

2- $P(U \mid B) = \frac{P(U \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3- Si $A_1 \cap A_2 = \phi$ alors , $P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$

Remarque :

- $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$
- $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
- $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$ à condition que $P(B) > 0$
- $P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$ à condition que $P(A) > 0$

Exemple — La probabilité conditionnelle

14 **On jette un dé une seule fois, calcule la probabilité d'avoir 2 sachant que Le nombre apparu soit pair.**

Solution

Soit U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} , A = {2} , B ={ 2 ; 4 ; 6}

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6}$

$\because\ P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore\ P(A \mid B) = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

la probabilité d'apparition le nombre 2 sachant que le nombre apparu est pair est $\frac{1}{3}$

Remarque

Pour la probabilité conditionnelle, on commence par l'événement qui suit le not « quelle est la probabilité et l'événement qui suit l'un des notes: Si A i sachant que A et à condition que est l'événement conditionnelle

Essayez de résoudre:

1 On jette un dé deux fois de suite, quelle la probabilité que le nombre apparu sur le premier jet ne dépasse pas 4 sachant que la différence absolue entre les deux nombres soit 2 ?

Exemple — Effectuer des opérations

15 Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités U tel que P(A) = 0,45 ; P (B) = 0,6 ; P (B / A) = 0,8 . Trouve :

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A \mid B)$ **d** $P(B' \mid A)$

Solution

a $\because\ P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore\ 0,8 = \frac{P(A \cap B)}{0,45}$ $\therefore P(A \cap B) = 0,8 \times 0,45 = 0,36$

b $\because\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore\ P(A \cup B) = 0,45 + 0,6 - 0,36 = 0,69$

c $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,36}{0,6} = 0,6$

Remarque que : $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

d $P(B' \mid A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)}$

$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$

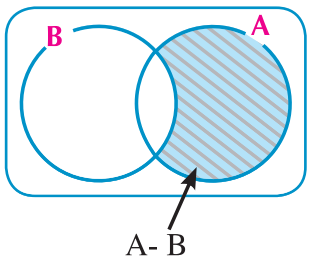
$= \frac{0.45 - 0.36}{0.45} = 0,2$

Rappel

$P(B \cap A) = P(A \cap B)$

$P(A \cup B) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A - B) =$
$P(A) - P(A \cap B)$



Essayez de résoudre

(2) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités U tel que P(A) = 0,7 ; P (B) = 0,25 ; P (A - B) = 0,45 . Trouve :

a) $P(A \mid B)$ b) $P(B \mid A)$
c) $P(A' \mid B)$ d) $P(A' \mid B')$

Exemple Harmonic table

(16) D'après les données du tableau suivant :

Sexe	nombre de personnes	
	porte des lunettes	ne porte pas des lunettes
Homme	800	600
Femme	400	200

Trouve la probabilité que la personne choisi soit une femme qui porte des lunettes.

Solution

carde (U) = 2000,

soient A l'événement « La personne est une femme »,

B l'événement « personne porte des lunettes »

$$P(A \cap B) = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{1200}{2000} = \frac{3}{5}$$

La conclusion Trouve la probabilité de A sachant que B s'est réalisé c-a-d $P(A \mid B)$

$$\because\ P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore\ P(A \mid B) = \frac{1}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

La probabilité que la personne choisie soit une femme qui porte des lunettes est $\frac{1}{3}$

Essayez de résoudre

(3) Dans l'exemple précédent, trouve:

a) la probabilité que la personne choisie soit un homme qui ne porte pas des lunettes.

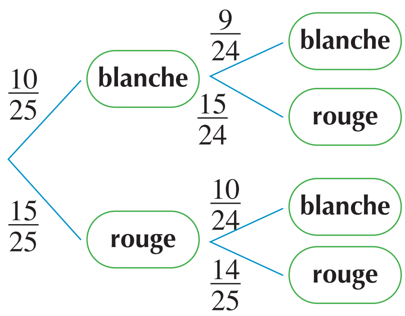
b) la probabilité que la personne choisi soit une femme ou un homme qui porte des lunettes.

Exemple Arbre graphique

17 Une boite contient 10 boules blanches et 15 boules rouges. On tire au hasard deux boules successivement sans remise. Quelle la probabilité que les deux boules soient blanches ?

Solution

Dans cet exemple, on remarque que le tirage est successif, donc le deuxième tirage est relié au première tirage On peut représenter cet exemple par l'arbre comme montre la figure ci-contre :



Soit l'événement A « la première boule est blanche » et l'événement B « la deuxième boule est blanche »

(B / A) est l'événement « le tirage de la deuxième boule à condition que la première boule est déjà tirée »

(A ∩ B) est l'événement « le tirage de deux boules blanches »

$$\because \; P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\therefore \; \frac{9}{24} = \frac{(A \cap B)}{\frac{10}{25}}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{9}{24} \times \frac{10}{25} = \frac{3}{20}$$

La probabilité que les deux boules soient blanches est $\frac{3}{20}$

Essayez de résoudre

4 Dans l'exemple précédent, trouve la probabilité que les deux boules soient rouges.

Exemple Le lien à l'enseignement

18 Un instituts comprend 100 étudiants, 60 d'entre eaux étudient l'anglais, 50 étudient le français, 35 étudient les deux langues. On choisit au hasard un étudiant. Trouve la probabilité que l'étudiant choisi étudie:

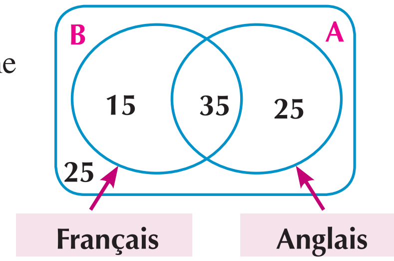
a l'un des deux langues au moins.

b l'anglais s'il étudie le français.

c le français s'il étudie l'anglais.

Solution:

On peut représenter les datas de cet exemple par le diagramme de Venn ci-contre :



On suppose que :

L'événement A « l'étudiant étudie l'anglais »

L'événement B « l'étudiant étudie le français » :

$P(A) = \frac{60}{100} = 0{,}6$, $P(B) = \frac{50}{100} = 0.5$, $P(A \cap B) = \frac{35}{100} = 0{,}35$

a La probabilité que l'étudiant étudie l'un des deux langues au moins est $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}75$

La probabilité que l'étudiant étudie l'un des deux langues au moins est 0,75

b La probabilité que l'étudiant étudie l'anglais s'il étudie le français = $P(A \mid B)$

$\because P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \mid B) = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$

La probabilité que l'étudiant étudie l'anglais s'il étudie le français est 0,7

c La probabilité que l'étudiant étudie le français s'il étudie l'anglais = $P(B \mid A)$

$\because P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore P(B \mid A) = \frac{0{,}35}{0{,}6} \simeq 0{,}583$

La probabilité que l'étudiant étudie le français s'il étudie l'anglais est 0,583.

Essayez de résoudre

5 Deux joueurs A et B tirent en même temps sur une même cible. Si la probabilité que le joueur A atteigne le cible est = $\frac{2}{5}$, la probabilité que le joueur B atteigne le cible est = $\frac{1}{4}$. et la probabilité que les deux joueurs atteignent le cible est = $\frac{1}{6}$, Trouve la probabilité de chacun des événements suivants :

a la cible est atteinte.

b la cible est atteinte par le joueur A s'il est atteint par le joueur B.

c la cible est atteinte par le joueur B s'il est atteint par le joueur A.

Exercises 3 - 2

Premièrement : Choisit la bonne réponse parmi les proposés :

1 On jette une pièce de monnaie deux fois de suite, la probabilité d'obtenir pile au deuxième jet si face apparait au premier jet est :

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

2 On jette un dé une seule fois , la probabilité d'avoir un nombre pair et premier si un nombre supérieur à 1est:

a $\frac{1}{5}$ b $\frac{2}{5}$ c $\frac{3}{5}$ d $\frac{4}{5}$

3 On jette un dé une seule fois , la probabilité d'avoir 3 sachant que le nombre apparu soit impaire est:

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

4 Si $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$; $P(A) = \frac{4}{5}$, alors $P(B \mid A) =$

a $\frac{1}{2}$ b $\frac{8}{25}$ c $\frac{1}{4}$ d $\frac{2}{5}$

5 Si $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{12}{25}$, alors $P(A \cap B) =$

a $\frac{4}{25}$ b $\frac{1}{4}$ c $\frac{25}{36}$ d $\frac{16}{25}$

Deuxièmement : Réponds aux questions suivantes:

6 Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}7$ et $P(A|B) = 0{,}3$. Trouve :

a $P(A \cap B)$ b $P(A \cup B)$ c $P(B \mid A)$ d $P(A \mid B')$

7 Si $P(A') = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$. Trouve $P(A \mid B')$

8 Si $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$; $P(B \mid A') = \frac{4}{7}$ et $P(A) = \frac{3}{5}$ Trouve

a $P(A \cap B)$ b $P(A \cup B)$

9 On jette un dé une seule fois , calcule la probabilité d'avoir un nombre premier sachant que le nombre apparu soit impaire.

10 On jette deux dés dista une seule fois. Trouve la probabilité que :

a Le nombre apparu sur le deuxième dé est 4 sachant que le nombre apparu sur le premièr dé est 2.

b La somme de deux nombres apparus est pair sachant que le nombre apparu sur le premièr dé est 6.

11 Si la probabilité de la réussite d'un élève dans un examen est 0,7 et la probabilité qu'il parte à l'étranger S'il réussit est 0,6. Quelle est la probabilité qu'il réussit et partie à l'étranger ?

12 Une classe comprend 45 élèves 27 entre eux étudient le français, 15 étudient l'allmend et 9 étudient les deux langues. On choisit un étudiant au hasard. Quelle la probabilité que l'étudiant choisi étudie:

a l'une des deux matières au moins. **b** le français s'il étudie l'allmend.

c l'allmend s'il étudie français.

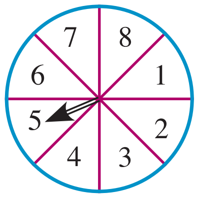
13 On jette deux dés une seule fois. Trouve la probabilité de chacun des événements suivants :

a obtenir le nombre 2 sur les deux faces à la fois sachant que le nombre apparait sur les deux faces.

b obtenir le nombre 5 sur les deux faces sachant que les deux nombres apparus sur les deux faces dépasse 4.

c ne pas obtenir le nombre 3 sur l'une des deux faces sachant que les deux nombres apparus sur les deux faces; soient impaires.

14 La roue tournante : divisée en 8 secteurs identiques numérotées de 1 à 8. Quelle la probabilité que la flèche s'arrête sur le nombre 5 sachant qu'elle s'arrête sur un nombre impaire ?



15 Le tableau suivant indique le nombre d'équipes sportives participants aux différents jeus :

Jeu sportif	hand balle	foot balle	volley balle	basket balle	hockey
Nombre d'équipe	4	10	6	7	3

Si on choisit un jeu au hasard, quelle la probabilité que le jeu choisi soit:

a hockey sachant qu'il n'est pas volley balle?

b basket balle qu'il n'est ni foot balle ni hand balle?

16 Le tableau suivant indique la réponse d'un échantillon constitué de 30 étudiants et 20 étudiantes sur l'économie et la consommation de l'énergie:

Réponse	Oui	Non	n'est sur	Total
Etudiant	20	6	4	30
Etudiante	15	3	2	20

On choisit au hasard une personne de cet échantillon. Quelle la probabilité que la personne choisi soit « étudiante dont la réponse est oui » ?

17 Une boite contient 5 boules blanches et 7 boules noirs. On tire deux boules sans remise. Trouve la probabilité que :

a la deuxième boule soit blanche si la première boule soit blanche.

b la première boule soit blanche et la deuxième boule soit blanche.

c la deuxième boule soit noir et la première boule soit blanche.

18 Parmi trois classes scolaires, Karim et Ziad se sont présentées pour les élections de la présidence de l'union des étudiants de l'école. Le tableau suivant montre le nombre de votes obtenu par chacun d'eux:

	1^{ere} sec	$2^{ème}$ sec	$3^{ème}$ sec	Total
Karim	196	174	130	500
Ziad	240	165	135	540

Si on choisit au hasard un étudiants de cette école , trouve la probabilité que cet étudiant :

a ait vote pour Karim sachant qu'il est de la $3^{ème}$ secondaire.

b ait vote pour Ziad sachant qu'il est de la $2^{ème}$ secondaire.

19 100 personnes se sont présentées pour un poste. Le tableau suivant montre la répartition de ces Personnes suivant le sexe et le diplôme:

Diplômé		
	Marié	**célibataire**
homme	40	10
femme	10	10

non diplômé		
	Marié	**célibataire**
homme	3	12
femme	10	5

a Calcule la probabilité que la personne choisi soit marié à condition qu'elle soit diplômé.

b Calcule la probabilité que la personne choisi soit marié et diplômé.

c Calcule la probabilité que la personne choisi soit marié à condition qu'elle ne soit pas diplômé.

20 Dans un examen, 30 % d'élèves ont échoué en chimie, 20% en physique et 15% en chimie et en physique. On choisit au hasard.

a Si l'élève échoue en chimie, quelle la probabilité de son échec en physique ?

b Si l'élève échoue en physique, quelle la probabilité de son échec en chimie?

c Calcule la probabilité de son échec en chimie à condition qu'elle réussit en physique.

d Calcule la probabilité de sa réussite en physique à condition qu'elle réussit en chimie.

21 Activité : utilisation du diagramme de Venn:

A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}2$

a Représente les ensembles précédents par un diagramme de Venn en écrivant ses probabilités sur le diagramme.

b Trouve la probabilité de chacun des événements suivants :

la réalisation de l'événement A à condition que la non réalisation de l'événement B.

la réalisation de l'événement B à condition que la non réalisation de l'événement A.

Les événements indépendants

unité 2

3 - 3

Vous allez apprendre

- Les événements indépendants
- Les événements dépendants

les vocabulaires de base

- Les événements indépendants
- Les événements dépendants

Réfléchissez et discutez

Observez les exemples suivants

1- On jette une pièce de monnaie et un dé une seule fois

2- La réussite d'un élève en mathématiques et en chimie.

3- On tire deux boules l'une après l'autre avec remise d'une urne contient 10 boules.

4- La réussite d'un élève à l'examen pratique et à l'examen écrit de la physique.

5- On tire deux boules l'une après l'autre sans remise d'un sac contient 10 boules.

Que remarquez- vous ?

Dans les trois premiers exemples on remarque que

1- Les résultats du dé ne dépendent pas des résultats de la pièce de monnaie.

2- La réussite ou l'échec d'un élève en chimie ne dépend pas de sa réussite ou de son échec en mathématiques.

3- La remise de la première boule ne change pas le nombre de boules. Par conséquent, le deuxième tirage ne dépend pas du premier tirage.

Pour cela, les événements dans les trois premiers exemples sont indépendants.

4- La réussite d'un élève en physique dépend de sa réussite à l'examen pratique.

5- Le tirage sans remise d'une boule change le nombre des boulles. Par conséquent le tirage de la deuxième boule dépend du tirage de la première.

Pour cela, les événements dans les exemples (4) et (5) sont dépendants.

Apprendre deux évènements indépendants

Définition **deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.**

C'est-à-dire la probabilité de la réalisation de deux évènements indépendants ensemble est égale au produit de la probabilité de la réalisation de chacun

On remarque que, si les deux événements A et B sont indépendants et $p(B) \neq 0$ **alors** $P(A \mid B) = P(A)$ **c'est-à-dire** que la réalisation de l'un de deux événements ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Par exemple : si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note la suite de face ou pile , alors: U = { (P; P), (P;F) , (F; P), (F; F)}

D'où la probabilité de chaque événement $= \frac{1}{4}$

Soit l'événement A « obtenir pile au deuxième jet » = {(F ;P) ; (P ;P)}

Et l'événement B « obtenir face au premier jet » = {(F ;F) ; (F ;P)}

Alors $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(A)$

c-à-d. Alors la réalisation de l'événement A est indépendant de la réalisation de l'événement B. pour cela on dit que les deux événements A et B sont indépendants.

On remarque que: les deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si $P(A) \times p(B) = 0$, d'autre par si et seulement si la probabilité de A ou la probabilité de B soit égale à zéro.

Exemple

1. Si on jette une pièce de monnaie une fois puis un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir face et le nombre 5

Solution

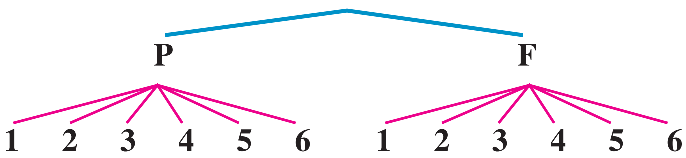
On peut utiliser l'arbre bondré pour écrire l'univers : on remarque que les résultats de la pièce ne dépendent pas des résultats du dé. Pour cela les deux événements sont indépendants.

Posons que A est l'événement « obtenir face, alors $P(A) = \frac{1}{2}$ et B est l'événement « obtenir le nombre 5, alors $P(B) = \frac{1}{6}$

$\because P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\qquad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$\therefore$ la probabilité d'obtenir face et le nombre 5 est $\frac{1}{12}$

Remarque On peut déterminer la probabilité d'obtenir face et le nombre 5 directement par l'écriture de l'univers comme indique la figure ci-contre.



S = {(F ; 1) ; (F ; 2) ; (F ; 3) ; (F ; 4) ; (F ; 5) ; (F ; 6) ; (P ; 1) ; (P ; 2) ; (P ; 3) ; (P ; 4) ; (P ; 5) ; (P ; 6) }

L'événement « obtenir face et le nombre 5 » = {(F ; 5)}

d'où la probabilité d'obtenir face et le nombre 5 $= \frac{1}{12}$

Essayez de résoudre:

1. Dans l'exemple précédent. Déterminer la probabilité d'obtenir pile et un nombre premier.

Exemple

2 A et B sont deux événements de l'univers d'une expérience aléatoire U. Si p(A) = 0,5 ; P(B) = 0,6 ; P(A ∪ B) = 0,8. Démontrez que A et B sont indépendants.

Solution

$\because$ P (A ∩ B) = P (A) + P(B) - P (A ∪ B)

$\therefore$ P (A ∩ B) = 0,5 + 0,6 – 0,8 = 0,3 **(1)**

$\because$ P(A)×P(B) = 0,5 × 0,6 = 0,3 **(2)**

De **(1)** et **(2)**, On déduit que A et B sont indépendants .

Remarque que : Pour montrer la difference entre les événements incompatibles et les événements indépendants : on sait que, si on jette une pièce de monnaie une fois, alors l'univers est U = {F ; P} et P (F) = $\frac{1}{2}$, et P(p) = $\frac{1}{2}$ les deux événements sont incompatibles d'où.

P({F} ∩ {P}) = 0

$\therefore$ P ({P} ∩ {F}) = zero , $\therefore$ P ({P} ∩ {F}) ≠ P(P) × P (F)

Alors les deux événements sont incompatibles mais ils ne sont pas indépendants.

Essayez de résoudre

2 Si A et B sont deux événements d'un univers d'une expérience aléatoire, tel que : U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} ; A = {2 ; 3 ; 5 ; 6} et B = {1 ; 4 ; 5 ; 6}. A et B sont-ils indépendants? justifierz.

Exemple

3 Lien à l'assurance : Un homme et sa femme assurent pour leurs vies dans une des compagnies d'assurance. La compagnie propose que : la probabilité que l'homme vive plus que 20 ans est 0,2 et la probabilité que sa femme vive la même durée et 0,3. Détermine la probabilité que:

a L'homme et sa femme vivent ensemble plus que 20 ans.

b L'un des deux au moins vive plus que 20 ans.

c L'un des deux seulement vive plus que 20 ans.

Solution

Posons que, A l'événement « l'homme vive plus que 20 ans » $\therefore$ p (A) = 0,2

B l'événement « la femme vive plus que 20 ans » $\therefore$ p (B) = 0,3

a La probabilité que l'homme et sa femme vivent ensemble plus que 20 ans = p (A ∩ B)

$\because$ P (A ∩ B) = P (A) × P(B) $\therefore$ P (A ∩ B) = 0,2 × 0,3 = 0,06

b la probabilité que l'un au moins vive plus que 20 ans = p (A ∪ B)

$\because$ P (A ∪ B) = P (A) + P (B) - P (A ∩ B) $\therefore$ P (A ∪ B) = 0,2 + 0,3 – 0,06 = 0,44

c) la probabilité que l'un seulement vive plus que 20 ans = P (A ∪ B) - P (A ∩ B)

$\therefore P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}44 - 0{,}06 = 0{,}38$

Essayez de résoudre

3) Lien au tournage : Deux soldats A et B tirent vers une cible. Si la probabilité que A atteigne la cible est 0,6 et la probabilité que B atteigne la cible est 0,5. Déterminez les probabilités des événements suivants :

a) La cible est atteinte par A et B ensemble.

b) la cible est atteinte par un soldat au moins .

c) La cible est atteinte par un seul soldat.

d) La cible n'est pas atteinte .

Exemple

4) Tirage avec remise: Une urne contient 6 boules bleues et 4 boules rouges. Si on tire deux boules l'une après l'autre avec remise, quelle est la probabilité que

a) Les deux boules soient rouges ?

b) les deux boules soient bleues ?

c) la première soit rouge et la seconde soit bleu ?

d) l'une soit rouge et l'autre soit bleue?

Solution

a) Puisque le tirage avec remise, alors les deux événements sont **indépendants.**

Posons que l'univers U, A le premier tirage, B le second tirage.

$\therefore n(U) = 10$, $P(A) = \frac{4}{10}$. $P(B) = \frac{4}{10}$ **(puisque le tirage avec remise)**

$\because P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

De la même façon:

b) la probabilité que les deux boules soient bleues $= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$

c) la probabilité que la première soit rouge et la seconde soit bleue $= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

d) la probabilité que l'une soit rouge et l'autre soit bleue= la probabilité que la première rouge et la seconde bleue + la première bleue et la seconde rouge $= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}$ $= \frac{12}{25}$

Essayez de résoudre

4) Si la probabilité de la hausse de l'indice boursier de l'Etat (A) est égale à 0,84 et la probabilité de la hausse de l'indice boursier de l'Etat (B) est égale à 0,75. Quelle est la probabilité que la hausse de l'indice boursier des Etats (A et B) augmente ?

Apprendre — Les événements dépendants

A et B sont deux événements dépendants, si : $\boxed{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

Car on sait de la définition de la probabilité conditionnelle que :

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ à condition que $P(B) \neq 0$

. $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ à condition que $P(A) \neq 0$

I.e. On peut écrire $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

$= P(B \mid A) \times P(A)$ $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

C'est – à – dire A et B sont dépendants si la probabilité de l'un change d'une manière quelconque à la probabilité de l'autre .

La probabilité des événements dépendants:

Exemple

5 Si U est l'univers d'une expérience aléatoire tel que U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, et A = {1; 2; 4; 8} et B ={2; 5; 6; 7}. A et B sont ils indépendants ? Justifiez vos réponse.

Solution

$\because n(A) = 4$ $\therefore P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\because n(B) = 4$ $\therefore P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\because A \cap B = \{2\}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ **(1)**

$\because P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, alors A et B sont dépendants.

Essayez de résoudre:

5 De l'exemple précédents, si C = {2 ; 3 ; 4 ; 7} B et C sont-ils indépendants ? justifiez Vos réponse.

Tirage sans remise:

Exemple

6 Une urne contient 6 boules bleues et 4 boulles rouges. Si on tire deux boules l'une après l'autre sans remise, quelle est la probabilité que :

a les deux soient rouges ? b les deux soient bleus ?

c la première soit rouge et la seconde soit bleue ?

Solution

C'est l'exemple (3) mais sans remise, pour cela les deux évènements sont dépendants.

a Si les deux boules sont rouges, alors

la probabilité que la première est rouge et la seconde est rouge =

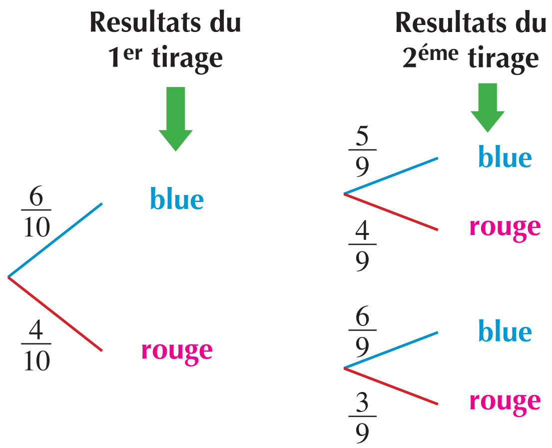
la probabilité que la première est rouge × la probabilité que la seconde est rouge sachant que la première est rouge

$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

b Si les deux boules sont bleues, alors la probabilité que la première soit bleue et la seconde est bleue = $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

c la probabilité que la première boule soit rouge et la seconde soit bleu =
la probabilité que la première boule soit rouge × la probabilité que la seconde soit bleue sachant que la première est rouge
$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$

on peut utiliser l'arbre pondérée, comme illustre la figure ci-contre pour déterminer les probabilités des événements dépendants.



Essayez de résoudre

6 Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On tire deux boules l'une après l'autre sans remise. Quelle est la probabilité que :

a les deux boules soient noires ?

b la première soit noire et la seconde soit rouge ?

c l'une des deux boulles soit rouge et l'autre soit noire ?

Exercises 3 - 3

1 Lesquels des événements suivants sont indépendants et lesquels sont dépendants ? vérifiez vos réponses?

a On jette une pièce de monnaie puis un dé une seule fois.

b On tire une carte d'une boite sans remise puis on tire une autre de même boite.

c On tire une carte d'une boite avec remise puis on tire une autre de même boite.

d Une équipe de football s'est qualifiée au demi-finale, s'il gagne, il joue le finale.

e On choisit un nom au hasard sans remise, puis on choisit un autre.

f On choisit une boulle d'une urne sans remise puis on tire une autre de même urne.

g Karim se présente au concours culturel le lundi et il réussi et se présente au concours scientifique le jeudi et réussi aussi ?.

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées:

2 Si A et B sont deux événements indépendants et P(A) = 0,2 et P(B) = 0,6, alors $P(A \cup B) =$

a 0,12 **b** 0,32 **c** 0,68 **d** 0,8

3 Si A et B sont deux événements indépendants telque P(A) = 0,25 et P(B) = 0,4,

alors P(A – B) =

a 0,1 **b** 0,15 **c** 0,3 **d** 0,65

4) Si A et B sont deux événements indépendants tel que $P(A) = 0,3$, $P(B) = x$ et $P(A \cup B) = 0,72$, alors x est égale à :

a) 0,24 b) 0,28 c) 0,4 d) 0,6

5) On jette une pièce de monnaie puis un dé une seule fois. Quelle est la probabilité d'obtenir face et le nombre 3 ?

6) On jette une pièce de monnaie quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir pile 4 fois ?

7) On jette un dé une fois, si A est l'événement « obtenir un nombre pair »; B est l'événement «obtenir un nombre carré parfait ». A et B sont – ils indépendants ? Justifiez vos réponse.

8) Si A et B sont deux événements d'un univers d'une expérience aléatoire tel que : $P(B) = 0,3$, $P(A \cup B) = 0,5$. Trouvez la valeur de P(A) si A et B sont :

a) incompatibles. b) indépendants.

9) Une urne contient des billes 2 sont rouges, 3 sont vertes et une est bleue. On choisit deux billes au hasard l'une après l'autre avec remise. Déterminez la probabilité que les deux billes soient vertes.

10) Dans la question précédente si on choisit deux billes sans remise. Déterminez la probabilité que la première soit bleue et la seconde soit verte.

11) Une urne contient 6 boules rouges, 4 boules oranges, 3 jaunes, 2 bleues, 5 vertes. On choisit deux boules l'une après l'autre au hasard sans remise.
Déterminez la probabilité que les boules tirées soient:

a) Rouge et bleue. b) rouge et jaune. c) rouges. d) orange et bleue.

12) Deux soldats A et B tirent en même temps sur une cible, si la probabilité que le premier atteigne la cible est 0,4 et la probabilité que le deuxième atteigne la cible 0,7,
Premièrement : trouvez la probabilité que :

a) Les deux soldats atteignent la cible ensemble.

b) L'un de deux au moins atteigne la cible.

c) L'un de deux seulement atteigne la cible.

d) L'un de deux au plus atteigne la cible.

Deuxièmement : On sait que l'un de deux soldats au moins atteigne la cible. Déterminez la probabilité que le soldat A seulement atteigne la cible.

13) Si A et B sont deux événements indépendants, démontrez que les pairs des événements suivants sont indépendants .

a) A'; B' b) A'; B c) A; B'

Unité
4

Variable aléatoire et distributions de probabilités

introduction

On a déjà étudié l'expérience aléatoire et des notions de la probabilité. Souvent, on veut traiter les résultats qualitatifs d'une expérience aléatoire comme des valeurs quantitatifs pour faciliter les calculs mathématiques.

Pour cela on transforme les résultats qualitatifs aux valeurs numériques appelées variable aléatoire qui décrit les issues de l'expérience aléatoire. Dans cet unité on étudie deux sortes de variables aléatoires :

- Variable aléatoire discrète
- Variable aléatoire contenue

On étudie aussi les distributions de probabilités de variable aléatoire :

- La distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète
- La distribution de la probabilité d'une variable aléatoire continue (fonction de densité)

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Savoir la notion de la variable aléatoire et distinct la variable aléatoire discrète et la variable aléatoire continue
- Savoir la notion de la fonction de densité d'une variable aléatoire continue et ses propriétés et l'utiliser pour calculer la probabilité de la réalisation de la variable aléatoire dans un intervalle quelconque.
- Savoir la notion de la moyenne (Espérance) et la variance
- Déterminer l'écart-type d'une variable aléatoire
- Déterminer le coefficient de variation.
- Savoir les distributions continues

Vocabulaires de base

- *Variable aléatoire*
- *Distribution de probabilité*
- *coefficient de variation*
- *Variable aléatoire discrète*
- *Espérance (moyenne)*
- *fonction de densité*
- *Variance*

Leçons de l'unité

Leçon (4 - 1): variable aléatoire.

Leçon (4 - 2): Espérance (moyenne) et variance d'une variable aléataire discrète.

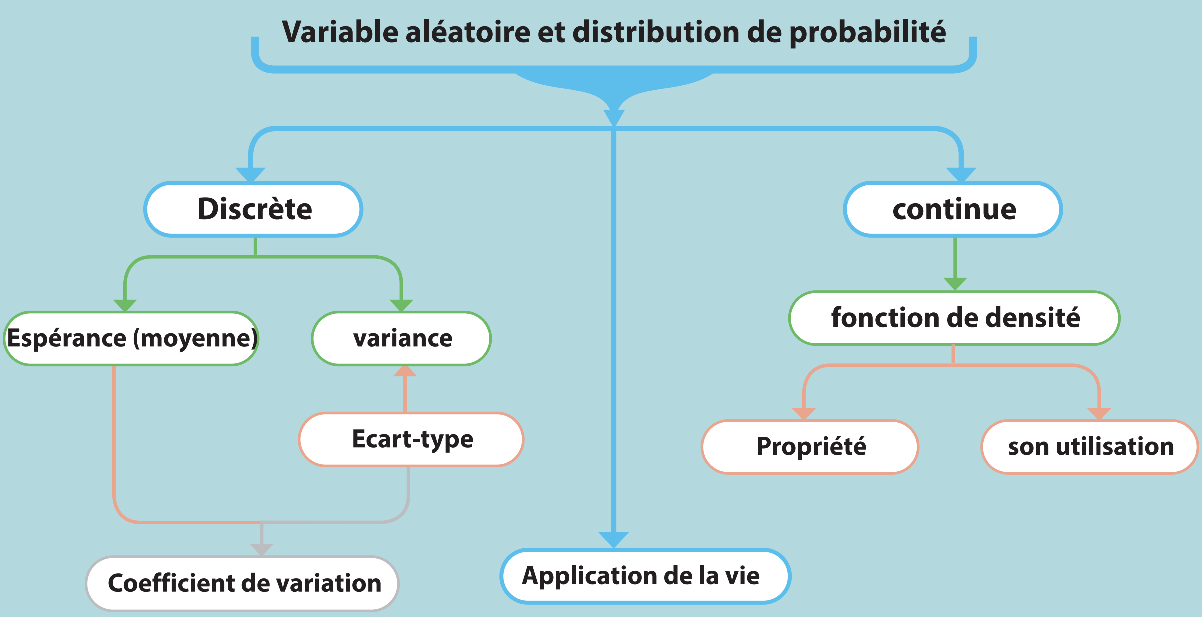
Leçon (4 - 3): Distributions géométriques et binomiales

Leçon (4 - 4): fonction de densité d'une variable aléataire conténue.

Aide pédagogiques

calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



unité 4
4 - 1 Variable aléatoire discrète

Apprendre
- Variable aléatoire
- Variable aléatoire continue
- Variable aléatoire discrète
- Distribution de probabilité

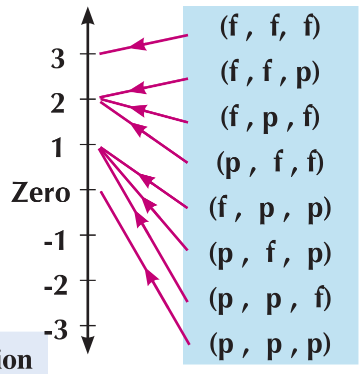
Vocabulaires de base
- Variable aléatoire
- Variable aléatoire continue
- Variable aléatoire discrète
- Distribution de probabilité

Introduction : vous avez déjà étudié l'expérience aléatoire et trouvé son univers. Dans cette leçon on décrit une nouvelle variable lien à l'expérience aléatoire (variable aléatoire)

Dans cette leçon vous allez aussi étudier : comment décrire les issues de deux phénomènes différents à partir de leur relation.

Variable aléatoire :

Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suite, alors l'univers U est déterminé comme l'indique la figure ci-contre. S'il demande « le nombre des faces apparues» on peut tracer un diagramme qui montre la relation de U (variable indépendant) vers R (variable dépendant). Cette relation est une fonction X : U → R où X représente la variable aléatoire .



Définition

La variable aléatoire est une fonction dont l'ensemble de définition est l'univers U et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des nombres réels R.

Rappel

Une fonction est déterminée par :
- **Ensemble de définition**
- **Ensemble d'arrivée**
- **La règle de la fonction**

L'ensemble d'images est l'ensemble des images des éléments de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée.

Dans l'exemple précédant l'ensemble image = {0 ; 1 ; 2 ; 3}

Remarque: la variable aléatoire est une partition de l'univers. Elle le partage en évènements incompatibles dont chacun est un antécédent d'un élément de l'ensemble des nombres réels. Cette relation représente une fonction X de l'univers u vers l'ensemble des nombres réels R.

Variable aléatoire discrète

Définition

La variable aléatoire discrète (discontinue) : son ensemble d'image est un ensemble fini des nombres réels c'est-à-dire dénombrable.

Par exemple :

- Le nombre d'actions IPO attribué à une personne dans une société anonyme.
- Le nombre d'accidents sur l'autoroute pendant une semaine .
- le nombre d'appel d'une famille pendant un mois .

Exemple **Variable aléatoire discrète**

1 On jette une pièce de monnaie trois fois de suite. soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur « le nombre de piles – le nombre de faces » écrivez les issues de la variable aléatoire.

Solution

E = { (F , F , F) , (F , F , P) , (F , P , F) , (F , P , P) , (P , F , F) ,
(P , F , P) , (P , P , F) , (P , P , P) }

Événements Liés	X : nombre de piles – nombre de faces
(P , P , P)	3 – 0 = 3
(P , P , F)	2 – 1 = 1
(P , F , P)	2 – 1 = 1
(P , F , F)	1 – 2 = – 1
(F , P , P)	2 – 1 = 1
(F , P , F)	1 – 2 = – 1
(F , F , P)	1 – 2 = – 1
(F , F , F)	0 – 3 = – 3

Les issues = {- 3 ; - 1 ; 1 ; 3 }

Essayez de résoudre

1 Dans l'exemple précédant, déterminez les issues de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « le nombre de piles × le nombre de faces».

Exemple **Variable aléatoire discrète**

2 On jette un dé deux fois de suite. Déterminez les issues de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « la somme de deux nombres apparus » .

Solution

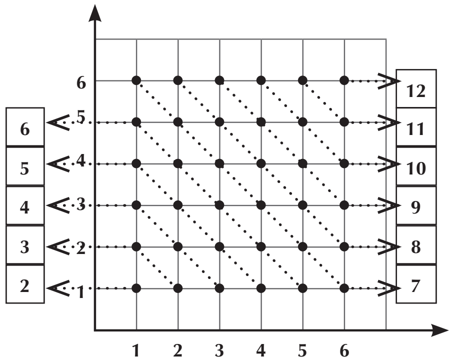
Univers	X : la somme de deux nombres
(1 , 1)	2
(1 , 2) , (2 , 1)	3
(3 , 1), (2 , 2), (1 , 3)	4
(4 , 1) , (3 , 2) , (2 , 3) , (1 , 4)	5
(5 , 1), (4 , 2), (3 , 3), (2 , 4), (1, 5)	6

Univers	X : la somme de deux nombres
(4 , 3) ,(3 , 4) ,(2 , 5) ,(1 , 6), (6 , 1) , (5 , 2)	7
(6 , 2), (5 , 3), (4 , 4), (3 , 5), (2 , 6)	8
(6 , 3), (5 , 4), (4 , 5), (3 , 6)	9
(6 , 4) , (5 , 5) , (4 , 6)	10
(6 , 5) , (5 , 6)	11
(6 , 6)	12

Du tableau précédant on trouve que l'ensemble image de la variable aléatoire

$\mathbf{x} = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;\ 10\ ;\ 11\ ;\ 12\}$

On peut utiliser le diagramme ci – contre pour déterminer les issues de la variable aléatoire .



Essayez de résoudre

2) Dans l'exemple précédant, déterminez les issues de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « le plus grand des deux nombres apparus »

Distribution de probabilité

Fonction de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition

Si l'ensemble image d'une variable aléatoire diseréte X est { x_1; x_2;x_3; ....; x_r }, alors la fonction f définié par $f(x_r)=P(x=x_r)$ pour tout r = 1;2;3;... déterminé une distribution de probabilité de la variable X qui exprimes les ensemble des couples

C'est-à- dire la distribution de probabilités de la variable aléatoire $X = \{ (x_1, f(x_1)), (x_2\ , f(x_2))\ , (x_3\ , f(x_3))\ , \ldots\ldots\ , (x_r\ ,\ f(x_r)) \}$

Remarque : on peut écrire la distribution de probabilités de la variable aléatoire x sous la forme d'un tableau comme ce qui suit :

$\mathbf{x_r}$	x_1	x_2	x_3	......	x_r
$\mathbf{f(x_r)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	......	$f(x_r)$

On remarque que la fonction f dans la définition précédente vérifie les deux conditions suivantes :

1- $f(x_r) \geqslant 0$ pour tout **r** $= 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ n$

2- $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots + f(x_r) = 1$

Exemple la fonction de la distribution de probabilités

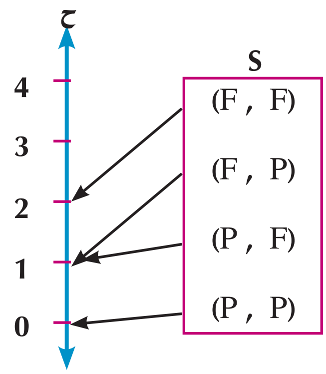
3) On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Ecrivez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X qui prend pour valeur « le nombre de fois où face apparue »

Solution

$P = \{ (F\ ,F)\ \ ,\ (F\ ,P)\ \ ,\ (P\ ,F)\ \ ,\ (P\ ,P) \}$

Dans la figure ci-contre, on trouve que l'ensemble image de la variable aléatoire qui exprime le nombre de fois où face a pparait = { 0 ; 1 ; 2 }

$f(0) = P(X = 0) = \dfrac{card(x_1)}{card(u)} = \dfrac{1}{4}$



$f(1) = P(X = 1) = \frac{\text{card }(x_2)}{\text{card (u)}} = \frac{2}{4}$, $f(2) = P(X = 2) = \frac{\text{card }(x_3)}{\text{card (u)}} = \frac{1}{4}$

La distribution de probabilités est :

x_r	0	1	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Essayez de résoudre

3 Dans l'exemple précédant, écrivez la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui représente « le nombre d'apparition de face – le nombre d'apparition de pile ».

Exemple **Tirage sans remise**

4 Une boite contient 5 cartes identiques numérotées de 1 à 5. On tire deux cartes successivement sans remise. Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire qui représente « le plus petit des deux nombres apparus »

Solution

Puisque le tirage est sans remise, alors le nombre apparu premièrement n'apparait pas dans le deuxième tirage. C'est-à-dire que les couples (1 ; 1) , (2 ; 2) , (3 ; 3) , (4 ; 4) , (5 ; 5) ne se trouvent pas dans l'univers comme l'indique la figure ci-contre.

n(u) = 20

De la figure ci-contre, on trouve que l'ensemble le image de la variable aléatoire X est :

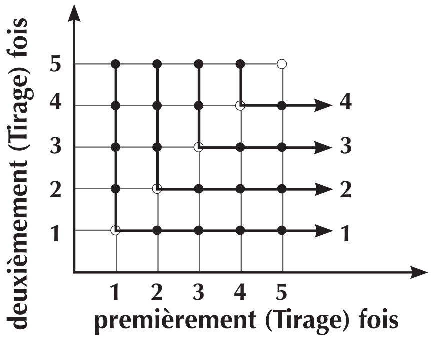
{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 } et:

$f(1) = P(X = 1) = \frac{8}{20}$

$f(2) = P(X = 2) = \frac{6}{20}$

$f(3) = P(X = 3) = \frac{4}{20}$

$f(4) = P(X = 4) = \frac{2}{20}$



La distribution de probabilités de la variable aléatoire X est :

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

Essayez de résoudre

4 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Déterminez la distribution de probabilité de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « le plus grand des deux nombres apparus »

Exemple

Utilisation de la règle de la fonction

5 Si X est la variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité définie par :

$f(x) = \frac{k + 2x}{24}$ où $x = 0 ; 1 ; 2 ; 3$ Trouvez la valeur de k puis écrivez la distribution de probabilité.

Solution

$\because f(0) = P(X = 0) = \frac{k}{24}$, $f(1) = P(x = 1) = \frac{k+2}{24}$,

$f(2) = P(X = 2) = \frac{k+4}{24}$, $f(3) = P(x = 3) = \frac{k+6}{24}$

$\because P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$1 = \frac{k+6}{24} + \frac{k+4}{24} + \frac{k+2}{24} + \frac{k}{24}$

$1 = \frac{k + k + 2 + k + 4 + k + 6}{24}$ $\therefore 4k + 12 = 24$

$\therefore 4k = 24 - 12$ $\therefore 4k = 12$ $\therefore k = 3$

Pour déterminer la distribution de probabilité, on détermine :

$P(X = 0) = \frac{k}{24} = \frac{3}{24}$, $P(X = 1) = \frac{k+2}{24} = \frac{5}{24}$

$P(X = 2) = \frac{k+4}{24} = \frac{7}{24}$, $P(X = 3) = \frac{k+6}{24} = \frac{9}{24}$

$\therefore$ la distribution de probabilité est :

x_r	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$

Essayez de résoudre

5 Si X est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble image = {1 ; 2 ; 3} La distribution de probabilité est définie par $f(x) = \frac{ax}{9}$. Trouvez la valeur de a puis écrivez la distribution de probabilité.

Exercises 4 - 1

Premièrement : choisissiez la bonne réponse des réponses données :

1. La quelle des fonctions suivantes représente une distribution de probabilités d'une variable aléatoire X :

a

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	0,06	0,15	0,42	0,26

b

x_r	0	1	3	5
$f(x_r)$	0,5	0,3	0,4	–0,2

c

x_r	–2	–1	1	2
$f(x_r)$	0,32	0,14	0,23	0,31

d

x_r	3	4	5	6
$f(x_r)$	0,23	0,32	0,17	0,18

2. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image est {0 ; 1 ; 2} alors toutes les fonctions suivantes ne représentent pas une distribution de probabilité sauf :

a $f(x) = \frac{x^2 + 1}{8}$ b $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$ c $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ d $f(x) = \frac{3x - 1}{6}$

3. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image est P (x = 1) = 0,3 ; P (x = 2) = 0,5, alors P (x= 3) est égale à :

a 0,1 b 0,2 c 0,7 d 0,8

4. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image est {1 ; 2 ; - 1 ; 0 }, P(X = - 1) = 0,2 et P(X = 0) = 0,4 , P(X = 1) = 0,1 alors P(X > 1) est égale à :

a 0,3 b 0,4 c 0,5 d 0,6

5. On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et X est la variable aléatoire qui prend pour valeur « le nombre des faces – le nombre des piles » alors l'ensemble image est de x sont :

a {1 ; 3} b {0 ; 1 ; 3} c { 0 ; 1 ; 2 ; 3} d {-3 ; -1 ; 1 ; 3}

6. Si X est une variable aléatoire dont les issues = { 0 ; 1 ; 2}. Si la fonction de la distribution de probabilité est définie par la relation $f(x) = \frac{ax}{6}$, alors la valeur de a est égale à:

a $\frac{1}{2}$ b 1 c $\frac{3}{2}$ d 2

deuxièmement : répondez aux questions suivantes :

7. Les tableaux suivants représentent des distributions de probabilités d'une variable aléatoire X. Trouvez la valeur de a dans chaque tableau :

a

x_r	1	2	2	3
$f(x_r)$	a	2a	2a	3a

b

x_r	-2	–1	0	1	2
$f(x_r)$	a	0,2	0,3	3a	a

c

x_r	0	1	3	4
$f(x_r)$	a	$2a^2$	$3a^2$	3a

8. Si X est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble image = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 } et les valeurs $P(X = 0) = 0{,}2$, $P(X = 1) = 0{,}33$ et $P(X = 2) = 0{,}37$. Trouvez la distribution de probabilité de la variable X.

9. Si les valeurs de la variable aléatoire X dans une expérience aléatoire sont : -2 , 0 , 2 , 4 des probabilités $\frac{m}{5}$; $\frac{m+1}{5}$; $\frac{2m-1}{5}$ et $\frac{3m-2}{5}$ respectivement. Déterminez la valeur de m puis écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

10. Si X est une variable aléatoire discrète dont la fonction de la distribution de probabilité définie par la relation : $f(x) = \frac{2a + 3x}{54}$ et des issues x = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 } Déterminez la valeur de a puis écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

11. Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité définie par la fonction : $f(x) = \frac{k + 3x}{50}$ où x = 1 ; 2 ; 3 ; 4. Déterminez la valeur de k puis écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

12. On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et X est la variable aléatoire qui prend pour valeur « le nombre des faces – le nombre des piles », écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

13. Deux boites contiennent chacune 3 boules numérotées de 3 à 5. On tire une boule aléatoirement de chacune. X est la variable aléatoire « la somme des deux nombres marqués sur les boules tirées » Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire x.

14. On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X qui prend pour valeur « le plus petit des deux nombres apparus »

15. Une boite contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules l'une après l'autre avec remise. Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X qui prend pour valeur « la moyenne des deux nombres apparus »

16. Si X est une variable aléatoire discrète qui représente le nombre des filles d'une famille de trois enfants. Ecrivez l'ensemble image de la variable X. Si la probabilité d'avoir fille est égale à la probabilité d'avoir garçon, déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X sachant qu'il n'y a pas de jumeaux. « On respecte l'ordre des enfants garçon ou fille »

Espérance (moyenne) et variance de la variable aléatoire discrète

unité 4
4 - 2

Apprendre		Vocabulaires de base
espérance (moyenne)	Variance	Espérance (moyenne)
écart-type	coefficient de variation	coefficient de variation
		Variance

Avant – propos : Pour décrire la distribution de probabilité (pour décrire la population initiale ou pour comparer les populations différentes) on a besoin des informations pour mesurer la tendance centrale des issues de la variable aléatoire qu'est appelé l'espérance (moyenne). Il y a d'autre mesures pour mesurer la dispersion qu'est appelé la variance. L'espérance et la variance bien décrire les variables aléatoires.

Espérance (moyenne)

L'espérance est une valeur qui se trouve à peu près au milieu des valeurs et appelée aussi la moyenne qui noté (μ).

Si x est une variable aléatoire discrète dont f est la fonction de la distribution de probabilités et ses issues sont :{ x_1 ; x_2 ; x_3 ; .... , x_n} de probabilités $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ... , $f(x_n)$ respectivement, alors l'espérance est définie par la relation :

$$\text{Espérence } (\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r)$$

Alors : l'espérance (μ) $= x_1 \times f(x_1) + x_2 \times f(x_2) + x_3 \times f(x_3) + ... + x_n \times f(x_n)$

Exemple

1 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est définie par le tableau suivant :

x_r	-1	0	1	2	3
$f(x_r)$	0,3	0,1	0,1	**a**	0,2

Premièrement : Trouvez la valeur de a **deuxièmement** : Déterminez l'espérance (la moyenne)

Solution

Premièrement : on sait que la somme des probabilités est égale à un entier

$\because P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$\therefore 0,3 + 0,1 + 0.1 + \mathbf{a} + 0,2 = 1$

$\therefore \mathbf{a} + 0,7 = 1$ $\qquad\qquad$ $\therefore \mathbf{a} = 1 - 0,7 = 0,3$

Deuxièmement :

$\because$ Espérence $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = -1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2$

$= -0{,}3 + 0 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}6 = 1$

Essayez de résoudre

1. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image = {0 , 1 , 2 , 3 , 4} tel que :

$P(X = 0) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$ et $P(X = 1) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$

Déterminez : **Premièrement** : P (X = 2) **deuxièmement** : l'espérance

Exemple

2. Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est comme ce qui suit :

x_r	0	1	2	b	6
$f(x_r)$	0,1	0,1	0,3	**a**	0,3

Déterminez les valeurs de a et b sachant que l'espérance $\mu = 3{,}5$

Solution

De propriétés de la distribution de probabilités : f(0) + f(1) + f(2) + f(b) + f(6) = 1

$\therefore 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + \mathbf{a} + 0{,}3 = 1$ $\therefore \mathbf{a} = 1 - 0{,}8$ $\therefore$ **a = 0,2**

$\because$ expectation $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = 3{,}5$

$\therefore 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}3 + b \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}3 = 3{,}5$

$\therefore 0 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}2\,b + 1{,}8 = 3{,}5$ $\therefore 0{,}2\,b = 3{,}5 - 2{,}5$

$\therefore b = 1 \div 0{,}2 = 5$ **b = 5**

Essayez de résoudre

2. Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est commeé indique le tableau suivant :

x_r	0	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{3}{16}$	2 p	$\frac{1}{16}$	p

Premièrement : Trouvez la valeur de P. **deuxièmement** : l'espérance

Variance

La variance d'une variable aléatoire discrète x mesure la dispersion des issues de leur moyenne, notée (σ^2) et définie par la relation

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) - \mu^2$$

Remarque : l'écart-type de la variable aléatoire X est la racine carrée positive de la variance et noté σ . On remarque aussi que la variance et l'écart-type sont des valeurs positives.

Exemple

3 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est $f(x) = \frac{x+4}{16}$ où x = -2 ; m ; 1 ; 2. Déterminez la valeur de m puis déterminez la moyenne et la variance de la variable X.

Solution

De propriétés de la distribution de probabilités :

$\because P(X = -2) + P(X = m) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

$\therefore \frac{2}{16} + \frac{m+4}{16} + \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = 1$

$\therefore \frac{17+m}{16} = 1$ $\quad\therefore 17 + m = 16$ $\quad\therefore m = -1$

x_r	$f(x_r)$	$x_r \cdot f(x_r)$	$x^2_r \cdot f(x_r)$
–2	$\frac{2}{16}$	$\frac{-4}{16}$	$\frac{8}{16}$
–1	$\frac{3}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{24}{16}$
		$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{2}$

L'espérance $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = \frac{5}{8}$

La variance $(\sigma^2) = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) - \mu^2 = \frac{5}{2} - (\frac{5}{8})^2 = \frac{135}{64}$

Essayez de résoudre

3 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité déterminée par la fonction $f(x) = \frac{a}{x+1}$ où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 Trouvez:

Premièrement : la valeur de a **deuxièmement** : l'espérance et l'écart-type.

Coefficient de variation

L'écart-type est une mesure de la dispersion des issues d'une variable aléatoire de leur espérance et il a la même unité de mesure (degré ; mètre ; kg ; … etc.) alors il est valable pour comparer des ensembles des issues de même unité mais s'ils ont des unités différentes, on ne peut pas comparer en utilisant l'écart-type. Pour cela on a besoin d'autre mesure et le coefficient de variation est convenable pour résoudre ce problème .

Le coefficient de variation d'un ensemble des issues est le pourcentage de l'écart-type par rapport à son espérance (moyenne) et déterminé par la relation suivante :

$$\textbf{Coefficient de variation} = \frac{\textbf{L'écart-type}}{\textbf{Moyenne}} \times 100\ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

Ce coefficient représente la dispersion sous la forme d'un pourcentage sans unités.

Exemple

4 Si l'espérance et l'écart-type des notes d'un ensemble d'élèves dans les deux matières histoire et géographie comme ce que suit : sachant que la note finale est 100.

La mesure	L'examen de l'histoire	L'examen de géographie
Espérance	70	96
Ecart-type	7	8

Trouve le coefficient de variation de chaque matière. Que remarquez – vous ?

Solution

$\because$ Le coefficient de variation = $\frac{\text{L'écart-type}}{\text{Moyenne}} \times 100\ \%$

$\therefore$ Le coefficient de variation de l'histoire = $\frac{7}{70} \times 100\ \% = 10\ \%$.

Le coefficient de variation de la géographie = $\frac{8}{96} \times 100\ \% \simeq 8{,}3\ \%$

On remarque que : la dispersion proportionnelle de l'histoire est plus grande que la dispersion proportionnelle de la géographie, ce qui signifie que les élèves sont plus homogènes en géographie que l'histoire.

Essayez de résoudre

4 Une usine produit deux sortes des lampes A et B. Si leurs moyenne d' âges sont 1850 ; 1580 et leurs écart-types sont 250 ; 230 respectivement. Déterminez le coefficient de variation de chaque sorte. Que remarquez – vous ?

Exemple

5 Un sac contient 6 cartes où deux portent le nombre 2, trois portent le nombre 3 et une porte le nombre 11 On tire une carte au hasard. Si x est la variable aléatoire qui prend pour valeur " le nombre apparu sur la carte tirée"

Trouvez :

a la fonction de la distribution de probabilité de la variable X.

b L'espérance et l'écart-type de x c le coefficient de variation.

Solution

a X prend les valeurs 2 ; 3 ; 11 si: $f(2) = P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(3) = P(X = 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $f(11) = P(X = 11) = \frac{1}{6}$

le tableau suivant représente la distribution de probabilité de la variable x.

x_r	2	3	11
$f(x_r)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Pour calculer l'espérance et l'écart-type on désigne le tableau suivant :

x_r	$f(x_r)$	$x_r \cdot f(x_r)$	$x^2_r \cdot f(x_r)$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{27}{6}$
11	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{121}{6}$
Total		4	26

b L'espérance $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = 4$

la variance $(\sigma^2) = \sum_{r=1}^{n} x^2 f(x_r) - \mu^2 = 26 - (4)^2 = 10$

l'écart-type $\sigma = \sqrt{10} = 3{,}16$

c $\because$ le coefficient de variation $= \dfrac{\text{L'écart-type}}{\text{Moyenne}} \times 100\ \%$

$\therefore$ le coefficient de variation $= \dfrac{3{,}16}{4} \times 100\ \% = 79\ \%$

Essayez de résoudre

5 un sac contient 10 cartes dont une porte le nombre 1 ; deux cartes portent le nombre 2 , trois portent le nombre 3 et quatre portent le nombre 4. On tire une carte aléatoirement. Si la variable aléatoire X représente « le nombre apparu sur la carte tirée »

Trouvez la fonction de la distribution de probabilité de la variable X puis calculez l'espérance, l'écart-type et le coefficient de variation.

Exercises 4 - 2

Premièrement : choisissiez la bonne réponse parmi réponses données :

1. Si la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est {(0 ; 0,25) , (1 ; 0,5) , (2 ; 0,25) } alors l'espérance est égale à :

   a) 0,5 b) 1 c) 1,25 d) 1,5

2. Si X est une variable aléatoire discrète dont l'espérance est égale à 0,6 , $\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) = 4{,}36$ alors l'écart-type est égale à :

   a) 1,94 b) 2 c) 3,76 d) 4

3. Si X est une variable aléatoire discrète dont l'espérance est égale à 0,4 , $\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) = 6{,}16$ alors la variance est égale à :

   a) 2,4 b) 5,76 c) 6 d) 6,56

Deuxièmement : déterminez l'espérance et l'écart-type de la distribution de probabilité de ce qui suit :

4.

x_r	2	3	9
$f(x_r)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

5.

x_r	–5	–4	1	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

6.

x_r	–3	–1	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Troisièmement : répondez aux questions suivantes :

7. Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est indiquée au tableau suivant :

x_r	1	2	4	6
$f(x_r)$	0,2	0,3	**a**	0,1

   Premièrement : trouvez la valeur de a. deuxièmement : trouvez la moyenne et l'écart-type

8. Si les issues de la variable aléatoire X est {0 ;1 ;2 ;3 ;4} , $P(X = 1) = \frac{4}{25}$, $P(X = 2) = \frac{7}{25}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{5}$, déterminez l'espérance et la variance .

9. Si les issues de la variable aléatoire X est {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4} , $P(X = 0) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$ et $P(X = 1) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$ Déterminez : Premièrement : P(X = 2) deuxièmement: la moyenne et la variance de la variable X.

10. Si X est une variable aléatoire discrète dont la fonction de la distribution de probabilité est indiquée au tableau suivant : où $0 < h < 1$

x_r	–3	zéro	3	6
$f(x_r)$	h	h^2	$2h^2$	h

trouvez:

a la valeur de h

b La distribution de probabilité de la variable X.

c la moyenne et la variance

11 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est indiquée au tableau suivant :

x_r	1	2	4	a
$f(x_r)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Calculez la valeur de a si l'espérance $\mu = 3$, puis trouvez l'écart-type de la variable aléatoire X.

12 Si la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est déterminée par la fonction f où : $f(x) = \frac{a\,x}{9}$, tel que x = 1; 2; 3 . Trouvez:

a la valeur de a b l'espérance et la variance de la variable X.

13 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est déterminée par la fonction : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{a}$ où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 :

a Déterminez la valeur de a b Calcule le coefficient de variation de la variable X.

14 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est déterminé par la fonction : $f(x) = \frac{x + 4}{16}$ où x = - 2, m, 1, 2 Trouvez: a Déterminez la valeur de m

b la moyenne et la variance de la variable x.

15 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est déterminée par la fonction f où : $f(x) = \frac{a}{x + 3}$,où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3

a Déterminez la valeur de a b Déterminez l'espérance et la variance.

16 Si les issues de la variable aléatoire x est { -1 ; 0 ; 2 } et $P(X = -1) = \frac{1}{4}$ et l'espérance est égale à 1 trouvez :

a P(X = 0) , P(X = 2) b le coefficient de variation.

17 Si X est une variable aléatoire de moyenne $\mu = 3$ et dont la distribution de probabilité est comme ce qui suit :

x_r	0	2	k	4
$f(x_r)$	1	2a	$\frac{1}{4}$	5a

a calculez la valeur de a et k.

b trouvez l'écart-type de la variable X.

unité 4

4 - 3

Distributions géométriques et binomiales

Apprendre

- expérience de probabilité géométrique.
- espérance, variance et écart type d'une distribution géométrique.
- Distribution binomiale.
- Distribution de probabilité d'une variable aléatoire binomiale.

Vocabulaires de base

- Expérience Bernoulli.
- Expérience de probabilité géométrique.
- L'expérience de probabilité binomiales

Expérience Bernoulli

Il s'agit d'une expérience aléatoire qui n'a qu'un seul résultat parmi deux, l'un étant exprimé comme un succès et l'autre comme un échec. Par exemple, l'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie une fois et à remarquer que la pièce tombe sur face représente l'expérience de Bernoulli. Parce que cela produit l'un des deux résultats suivants : une image ou un écrit. Dans cette expérience, l'image est une réussite et l'écrit est un échec, ou vice versa

Un autre exemple : Lorsque vous lancez un dé dont les côtés sont numérotés : {1; 2; 3; 4; 5; 6}, cette expérience peut être considérée comme l'expérience de Bernoulli est basée sur le fait que l'apparition d'un nombre supérieur à 3 est un succès, et que tout autre nombre est un échec

Expérience de probaillité

La répétition de l'expérience de Bernoulli un certain nombre de fois indépendantes jusqu'à ce que le premier succès soit obtenu porte un nom. geometric probability experiment

Conditions de l'expérience de probabilité géométrique

Si les quatre conditions suivantes sont remplies dans une expérience randomisée, elle est considérée comme une expérience de probabilité géométrique

(1) L'expérience comprend des essais indépendants et répétés

(2) Chaque essai a deux résultats indépendants (succès ou échec)

(3) La probabilité de succès dans chaque essai est fixée

(4) Arrêtez-vous au premier succès

La Variable aléatoire géométrique

Dans une expérience géométrique de probabilité, si la variable aléatoire X symbolise l'atteinte du premier succès, alors x est appelée une variable aléatoire géométrique et elle sera symbolisée par le symbole pour indiquer que x ~ Geo(s) est une variable géométrique et P représente la probabilité de succès.

Fonction de distribution de probabilité géométrique

SiX~Geo(S)alors

$$P(X = r) = S\ (1 - S)^{r-1} \qquad r = 1; 2; 3; \ \ldots.$$

Où S est la probabilité de succès, r est le nombre d'essais Jusqu'à atteindre le premier succès

Exemple

1 Ahmed a lancé une pièce de monnaie et le succès a été l'apparition d'une face. Quelle est la probabilité que la face apparaisse à la quatrième essai?

Solution

En supposant que X est une variable aléatoire qui symbolise la première essai réussie, alors

$X \sim Geo\ (\frac{1}{2})$

$P\ (face) = \frac{1}{2}$, $n = 4$

$P\ (X = 4) = \frac{1}{2}\ (1 - \frac{1}{2})^{4-1} = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

Exemple

2 Si $X \sim Geo\ (0,4)$ trouver chacun des éléments suivants :

a $P(X = 2)$ b $P(X > 4)$ c $P(X = 6)$

Solution

a $P(X = 2) = S\ (1 - S)^{r-1} = 0,4\ (1 - 0,4)^{2-1} = 0,24$

b $P\ (X > 4) \qquad = 1 - P\ (X \leqslant 4)$

$= 1 - [P(X = 1) + P\ (X = 2) + P\ (X = 3) + P\ (X=4)]$

$= 1 - [0,4\ (1 - 0,4)^0 + 0,4\ (1 - 0,4)^1 + 0,4\ (1 - 0,4)^2 + 0,4\ (1 - 0,4)^3]$

$= 1 - [0,4 + 0,4\ (0,6)^1 + 0,4\ (0,6)^2 + 0,4\ (0,6)^3]$

$= 0,1296$

c $P\ (X = 6) = S\ (1 - S)^{r-1} = 0,4\ (1 - 0,4)^{6-1} = 0,031104$

Essayez de résoudre

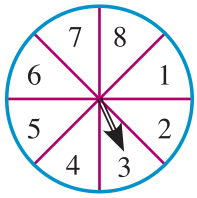
1 Si $X \sim Geo\ (0,8)$ trouver chacun des éléments suivants

a $P(X = 3)$ b $P(X \leqslant 3)$ c $P(X > 3)$

d $P\ (X < 2)$ e $P\ (X \leqslant 2)$ f $P(2 < X \leqslant 4)$

Exemple

(3) Un disque rotatif comporte huit sections égales numérotées de 1 à 10. Si le disque tourne plusieurs fois, trouvez la probabilité qu'il faille plus de quatre fois pour que son pointeur indique un nombre premier pour la première fois.



Solution

En supposant que $X \sim Geo\ (S)$

Les nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 $\therefore\ S = \frac{4}{8} = 0{,}5$

$P\ (X > 4) = 1 - P\ (X \leqslant 4\ )$

$= 1 - [P\ (X = 1) + P\ (X = 2) + P\ (X = 3) + P\ (\ X = 4)]$

$= 1 - [0{,}5\ (1 - 0{,}5)^0 + 0{,}5\ (1 - 0{,}5)^1 + 0{,}5\ (1 - 0{,}5)^2 + 0{,}5\ (1 - 0{,}5)^3]$

$= 1 - [0{,}5 + 0{,}5\ (0{,}5)^1 + 0{,}5\ (0{,}5)^2 + 0{,}5\ (0{,}5)^3]\ =\ 0{,}0625$

Une autre solution

Calcul de la probabilité qu'il faille plus de quatre cycles pour voir un nombre premier pour la première fois : Cela signifie que nous ne parvenons pas à obtenir un nombre premier dans chacun des quatre premiers cycles. La probabilité est calculée comme suit :

$P\ \ (X > 4) = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$

Espérance et variance d'une distribution géométrique

Moyenne (espérance) $\mu = \frac{1}{S}$

Variance $^{2}\sigma = \frac{1 - S}{S2}$

Écart type σ = la racine carrée positive de la variance

Essayez de résoudre

(2) Dans l'exemple 3, calculez l'espérance et l'écart type

Distribution binomiale

La répétition d'une expérience de Bernoulli un nombre spécifié de fois indépendantes est appelée une expérience de probabilité. expérience de probabilité binomiale

Si les quatre conditions suivantes sont remplies dans un essai randomisé, il est considéré comme un essai de probabilité binomiale :

(1) L'expérience comprend des essaie indépendantes et répétées

(2) Chaque essaie a deux résultats seulement de chaque tentative en succès ou en échec.

(3) La probabilité de succès dans chaque essai est fixée.

(4) Il y a un nombre spécifique de tentatives dans l'expérience.

Remarque: on noté au variable aléatoire binomiale X ~ Bi (N; S) où N nombre l'expérience; S probabilité de succès.

Distribution de probabilité d'une variable aléatoire binomiale

Si X ~ B(r; S) alors:

$$P(X = r) = C_n^r \times S^r \times (1 - S)^{n-r} \text{ , } r = 1; 2; 3; ..., n$$

n :	nombre de essaie dans l'expérience
S :	probabilité de succès dans chaque essai
r :	est le nombre de pistes (nombre requis)

Par exemple : lancer 7 pièces régulier et écrire ensuite le nombre de faces apparaissant sur la face supérieure (expérience binomiale). (Parce qu'elle satisfait les quatre conditions précédentes)

Exemple

4 Dans l'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie régulier 15 fois, la variable aléatoire X exprimait le nombre de faces. Trouvez la probabilité que la face apparaisse 5 fois.

Solution

Soit $X \sim B\ (15; \frac{1}{2})$

$P(X = r) = C_n^r \times S^r (1 - S)^{n-r}$,

$n = 15$, $r = 5$, $S = \frac{1}{2}$

$P(X = 5) = C_{15}^5 \times (\frac{1}{2})^5 (1 - \frac{1}{2})^{15-5} = 0{,}0916$ prés

Exemple

5 Un test de statistiques comprend 50 questions, toutes de type à choix multiples, chacune avec 4 alternatives, dont une seule est correcte. Si toutes ces questions sont répondues au hasard, quelle est la probabilité que les réponses à seulement 10 questions soient correctes ?

Solution

Supposons que $X \sim B\ (50; \frac{1}{4})$

$P(X = r) = C_n^r \times S^r \times (1 - S)^{n-r}$

$n = 50$; $r = 10$; $S = \frac{1}{4}$

$P(X = 10) = C_{10}^{50} \times (\frac{1}{4})^{10} (1 - \frac{1}{4})^{50-10} = 0{,}09852$ prés

Exemple

6 Si la probabilité qu'une équipe gagne un match de football est de 0,6, alors l'équipe joue 7 matchs, trouvez

a La probabilité de gagner seulement 4 matchs

b La probabilité de gagner au moins 6 matchs

c La probabilité de gagner deux matchs au plus

Solution

Supposons que $X \sim B(7; 6; 0)$

a $P(X = 4) = C_7^4 \times (0,6)^4(1 - 0,6)^3 = 0,290304$

b $P(X \geqslant 6) = P(X = 6) + P(X = 7)$

$= C_7^6 \times (0,6)^6 (1 - 0,6) + C_7^7 \times (0,6)^7 \times (1 - 0,6)^0 = 0,1586$

c $P(X \leqslant 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= C_7^0 \ (0,6)^0 \ (0,4)^7 + C_7^1 \ (0,6)^1 \ (0,4)^6 + C_7^2 \ (0,6)^2 \times (0,4)^5 = 0,096256$

Exemple

7 Si $X \sim B(3\,;\ S)$, $P(X \geqslant 1) = \frac{19}{27}$ trouver $P(X = 2)$

Solution

$1 - P(X = 0) = \frac{19}{27}$

$1 - C_3^0 \times (S)^0 \times (1 - S)^3 = \frac{19}{27}$ $\qquad \therefore \ (1 - S)^3 = \frac{8}{27}$

$\therefore \ 1 - S = \frac{2}{3}$ $\qquad \therefore S = \frac{1}{3}$

$P(X = 2) = C_3^2 \times (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3})^1 = \frac{2}{9}$

Espérance et variance de la distribution binomiale

Si X est une variable aléatoire $X \sim B(S)$; alors

Moyenne (espérance) $\mu = r \times S$

Variance $\sigma^2 = r \times S \times (1 - S)$

Écart type σ= la racine carrée positive de la variance

Où n est le nombre d'essais dans l'expérience, S est la probabilité de succès de chaque essai

Exemple

8 De la vie Une: étude a été menée sur les effets secondaires observés chez les enfants après la prise d'un nouveau médicament. L'étude a conclu que 10 % des enfants ayant pris ce médicament présentaient des effets secondaires. Si un médecin donnait ce médicament à 150 enfants, combien devraient en subir montrer ces effets secondaires ?

Solution

$X \sim B\ (150\ ;\ 0{,}1)$

espérance $= r \times S\ = 150 \times 0{,}1 = 15$

On espérance donc à ce que les effets secondaires du nouveau médicament apparaissent chez 15 enfants

Exemple

9 Ahmed a lancé une pièce irrégulière 200 fois, donc le nombre de fois où les piles sont apparues était de 140 fois. Si Ahmed a lancé la pièce 20 fois, trouvez chacun des éléments suivants

a Le nombre espére de fois que les piles apparaîtront lorsque Ahmed lancera la pièce est de 20 fois.

b La variance des fois où les piles apparaissaient lorsque Ahmed lançait la pièce variait de 20 fois

Solution

a $S = \frac{140}{200} = 0{,}7$ $\therefore$ l'espérance $= r \times S = 20 \times 0{,}7 = 14$

b La variance $= \sigma^2 = r \times S \times (1 - S) = 20 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 4{,}2$

Exercices (4 - 3)

Choisissez la bonne réponse parmi les parenthéses:

1 Si la probabilité de succès dans un seul essai est de 0,3, alors la probabilité que le premier succès se produise sur le troisième essai est égale à ....

a 0,147 b 0,21 c 0,343 d 0,09

2 Si la probabilité d'échec dans un certain essai est de 0,8, alors le nombre de essais de expections avant le premier succès est ....

a 3 b 4 c 5 d 6

3. La valeur attendue (moyenne) d'une distribution géométrique avec une probabilité de succès de $\frac{1}{4}$ est égale á ....

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

4. Si la probabilité de succès dans un seul essai est de 0,2, alors la probabilité qu'il faille plus de quatre essaies pour voir le premier succès est égale à ....

a) 0.4096 b) 0,4915 c) 0,5904 d) 0,6723

5. La variance d'une distribution géométrique avec une probabilité de succès de 0,4 est égal à ....

a) 0,25 b) 1,25 c) 3,75 d) 2,75

6. Si la probabilité de succès sur un essai est de 0,25, alors la probabilité que le premier succès se produise avant ou sur le troisième essai est égale à ....

a) $\frac{15}{64}$ b) $\frac{37}{64}$ c) $\frac{7}{16}$ d) $\frac{69}{64}$

7. Si la probabilité de succès d'un essai est de 0,2, alors la probabilité que le premier succès se produise après 3 essais échec est égale à ....

a) 0.1024 b) 0,251 c) 0,512 d) 0,215

8. Si la probabilité de succès d'un essai est S = 0,4 et le nombre d'essais est n = 10 alors la probabilité d'obtenir 4 succès est égale à ....

a) 0,2508 b) 0,4 c) 0,0537 d) 0,0124

9. Si la probabilité de succès d'un essai est S = 0,5 et le nombre d'essais si n = 5 alors la probabilité d'obtenir au moins 3 succès est égale à ....

a) 0,5 b) 0,1825 c) 0,15625 d) 0,84375

10. Si la probabilité de succès d'un essai est h = 0,3 et le nombre de les essais est n = 7, alors la probabilité qu'aucun succès ne se produise est égale à ....

a) 0,001 b) 0,2187 c) 0,5041 d) 0,082

11. Si la probabilité de succès d'un essai est n = 0,75 et le nombre d'essaisissi n = 12 alors la probabilité d'obtenir 11 succès ou plus est égale á ....

a) 0,1584 b) 0,1454 c) 0,1234 d) 0,2668

12. Si la probabilité de succès d'un essai est S = 0,7 et le nombre d'essais est n = 10 alores la probabilité d'obtenir exactement 4 succès est égale à ....

a) 0,0368 b) 0,2001 c) 0,4787 d) 0,2668

13 Si X~B $(5; \frac{2}{3})$, alors $P(X = 4)$ est égal à ....

a $\frac{80}{81}$ **b** $\frac{10}{243}$ **c** $\frac{80}{243}$ **d** $\frac{16}{243}$

14 Si X ~ B (n; S), l'espérance est égale à 8 et la variance = $\frac{20}{3}$ alors la valeur de n..........

a 48 **b** 56 **c** 64 **d** 32

15 Dans l'expérience consistant à jeter une pièce régulier sur le sol 4 fois, la probabilité qu'un côté tombe face. En seulement 3 fois, est égale à ....

a $\frac{1}{16}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{1}{8}$ **d** $\frac{1}{4}$

16 Gana a lancé un dé irrégulier 100 fois et le nombre de fois où le chiffre 2 apparaît était de 10 fois. Si Gana a lancé le dé 30 fois, alors le nombre attendu de fois où le chiffre 2 apparaît est égal à ....

a 2 **b** 3 **c** 6 **d** 9

17 Une calculatrice contient 16 boutons pour les nombres de 0 à 9, en plus des opérations de base, du signe égal et du point décimal. Si Ahmed ferme les yeux et appuie ensuite 20 fois au hasard sur les boutons de cette machine, alors la probabilité qu'il appuie sur les boutons des opérations arithmétiques seulement 3 fois est égal à .... prés

a 0,134 **b** 0,139 **c** 0,239 **d** 0,245

18 Si un joueur gagne 75 % des matchs qu'il joue au cours de sa carrière sportive, alors la probabilité qu'il gagne 3 matchs sur les 5 prochains matchs est égale à ....

a $\frac{135}{512}$ **b** $\frac{45}{512}$ **c** $\frac{5}{1024}$ **d** $\frac{47}{512}$

19 Si la probabilité de succès d'une intervention chirurgicale est de 90 %, alors la probabilité de succès d'au moins une opération. Si l'opération est réalisée trois fois, elle est ....

a 0,001 **b** 0,1 **c** 0,9 **d** 0,999

20 Mona a passé un test à choix multiples de dix questions, chacune comportant quatre alternatives. Si Mona répond au hasard, la probabilité que Mona obtienne 7 bonnes réponses est égale à ....

a 0,00308 **b** 0,25 **c** 0,0308 **d** 0,0307

Réponds aux questions suivantes

1. Une entreprise de production qui fabrique des composants électroniques. La probabilité que la pièce soit défectueuse est de 0,05. L'entreprise inspecte 20 pièces de sa production. au hasard Quelle est la probabilité qu'exactement 2 pièces soient défectueuses ?

2. Dans un centre de service client, si la probabilité que le problème d'un client soit résolu lors du premier appel est de 0,2. Quelle est la probabilité que le problème soit résolu lors du troisième appel ?

3. La probabilité qu'une personne accepte une offre de télémarketing est de 0,1. Quelle est la probabilité que la première personne au cinquième appel accepte ?

4. La probabilité que la commande soit livrée à temps est de 0,9. Si 12 commandes sont livrées, quelle est la probabilité que 10 d'entre elles soient livrées à temps ?

5. Atelier de réparation d'appareils électroménagers, la probabilité de réparer avec succès un appareil particulier est de 0,85. Si 15 appareils sont réparés, quelle est la probabilité que 13 d'entre eux soient réparés avec succès ?

6. La probabilité qu'un message électronique donné soit indésirable (spam) est de 0,2. Si vous recevez 25 e-mails, quelle est la probabilité que 5 d'entre eux soient des spams ?

7. La probabilité qu'une graine donnée pousse après avoir été plantée est de 0,7. Si un agriculteur plante 30 graines, quelle est la probabilité que 20 d'entre elles poussent ?

8. La probabilité qu'un électeur donné vote pour un candidat donné est de 0,6. Si 10 électeurs sont sélectionnés au hasard, quelle est la probabilité que 8 d'entre eux votent pour ce candidat?

9. La probabilité qu'une personne fasse un don à une campagne particulière est de 0,1. Si 100 personnes sont contactées, quelle est la probabilité que 2 au plus elles fassent un don ?

10. La probabilité qu'une personne trouve une place de stationnement sur son premier essaie est de 0,3. Quelle est la probabilité qu'elle trouve la position sur son quatrième essaie ?

11 La probabilité que le technicien réussisse à réparer la machine lors du premier essai est de 0,6. Quelle est la probabilité que la réparation soit effectuée avec succès lors du deuxième essai ?

12 La probabilité qu'un client accepte une offre de vente particulière est de 0,15. Quelle est la probabilité que le premier client au quatrième appel accepte ?

13 La probabilité de découvrir un dysfonctionnement dans un appareil particulier lors de l'inspection est de 0,1. Quelle est la probabilité de détecter le dysfonctionnement lors de la deuxième inspection ?

14 La probabilité qu'une entreprise obtienne l'approbation réglementaire lors du premier essai est de 0,3. Quelle est la probabilité d'obtenir l'approbation au plus du troisième essai ?

unité 4
4 - 4

Fonction de densité d'une variable aléatoire continue

A apprendre

- fonction de densité

Vocabulaires de base

- *densité de probabilité*

Variable aléatoire continue

Définition

L'ensemble d'image d'une variable aléatoire continue est un intervalle (ouvert ou fermé) de l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire : c'est un ensemble n'est pas dénombrable de l'ensemble des nombres réels.

Par exemple :

- Le salaire d'un ouvrier d'état qui est choisi aléatoirement.
- La température attendue pendant une journée.
- La taille d'un sélectionné à l'équipe de Basket-ball.

Exemple **Variable aléatoire continue**

1. Le point (x ; y) est situé à l'intérieur ou sur le cercle $x^2 + y^2 = 4$ dont le centre est le point L'origine O et de rayon 2 unités. Déterminez l'ensemble image de la variable aléatoire x qui prend pour valeur « la distance de ce point au centre du cercle »

Solution

$\because f = \{ (x , y): x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

$\therefore 0 \leqslant a \leqslant 2$ où a est la distance de (x ; y) au centre du cercle .

$\therefore$ l'ensemble image de la variable aléatoire X = [0 ; 2]

On remarque que tous les points dans cette région vérifient la variable aléatoire x comme l'indique la figure

Essayez de résoudre

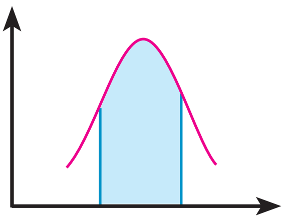
1. L'âge virtuel d'un mobile (x) est 18 heures de fonctionnement. Ecrivez l'ensemble image de x.

Essayez de résoudre

2. Dans ce qui suit, déterminez la variable aléatoire discrète ou continue .
   - a. Le nombre de pagettes produites par une boulangerie pendant une heure.
   - b. Le temps pour que Karim attend son ami Ziad.
   - c. Le nombre de buts marqués par l'équipe gagnant. dans une matche de hand-ball
   - d. Le nombre de violations de la circulation sur la route déserte Caire – Alex inscrit pendant une journée.
   - e. Le temps pour qu'un enseignant explique la leçon 'la variable aléatoire'.

Fonction de densité

D'une variable aléatoire continue on associe une fonction réelle non négative notée f (x) appelée la fonction de densité. L'aire de la région compris entre la courbe de cette fonction dans un intervalle et l'axe des abscisses représente la probabilité de la variable aléatoire dans cet intervalle. On détermine P(a<x<b) par calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-contre .



Cette fonction vérifie les conditions suivantes :

- $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ domaine de la fonction.
- L'aire de la région compris entre la courbe, l'axe des abscisses est égale à 1.

Exemple

2 Si x est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2x - 1), & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{zéro}, & \text{autrement} \end{cases}$$

a **Démontrez que :** $p(1 < X < 3) = 1$

b **Trouvez :** $P(X \leqslant 2)$; $p(X > 2{,}5)$et $p(2 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$.

Solution

$$f(1) = \frac{1}{6} \times (2 - 1) = \frac{1}{6}$$

$$f(3) = \frac{1}{6} \times (6 - 1) = \frac{5}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{6} \times (4 - 1) = \frac{3}{6}$$

$$f(2.5) = \frac{1}{6} \times (5 - 1) = \frac{4}{6}$$

a $P(1 \leqslant x \leqslant 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) \times 2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{6} \times 2 = 1$

b $P(X \leqslant 2) = p(1 \leqslant X \leqslant 2)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right) \times 1$

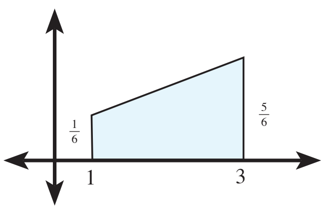
$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

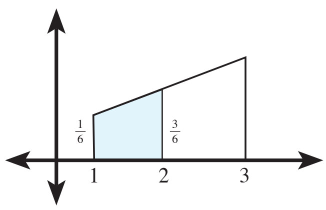
Rappel

Aire d'une rectangle = longueur × largeur

Aire d'un triangle =
$\frac{1}{2}$ **base × hauteur correspondante**

Aire d'un trapèze =
$\frac{1}{2}$ **Somme de deux bases parallèles × hauteur**

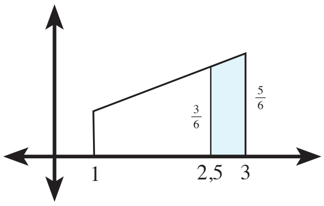




, $P(x > 2{,}5) = p(2{,}5 < x \leqslant 3)$

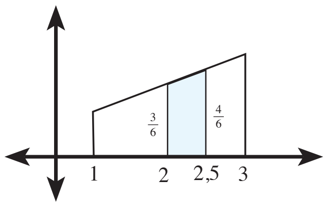
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$



, $P(2 \leqslant x \leqslant 2{,}5) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$



Remarquez que : $p(2 \leqslant x \leqslant 2{,}5) = 1 - [\,p(x \leqslant 2) + p(x \geqslant 2{,}5)\,]$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\right) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$$

Essayez de résoudre

3 Si x est une variable aléatoire continue tel que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(17 - 2x) & \text{si } 1 < x < 6 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

a **Démontrez que** f est une fonction de densité .

b **Trouvez** $P(X > 3)$

c **Trouvez** $P(4 < X < 7)$

Exemple

3 Si x est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + k}{24} & \text{tel que } 1 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

a Trouvez la valeur de k .

b Trouvez $P(X > 3)$

Solution

$\because\ P(1 < x < 4) = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2}\left(\frac{2 + k}{24} + \frac{8 + k}{24}\right) \times 3 = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{10 + 2k}{24} = 1$

$\therefore k = 3$

$f(3) = \frac{6 + 3}{24} = \frac{9}{24}$

$f(4) = \frac{8 + 3}{24} = \frac{11}{24}$,

$\therefore\ P(x > 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{24} + \frac{11}{24}\right) \times 1 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{24} = \frac{5}{12}$

Essayez de résoudre

4 Si x est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{28} & 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

a Trouvez la valeur de a si $P(x < a) = \frac{1}{7}$

b Trouvez la valeur de b si $P(b < x < b + 2) = \frac{1}{2}$

Exercices (4 - 4)

Premièrement : Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1. Si la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 2 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{alors } P(X > 3) =$$

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

2. Si la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est :

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & \text{si } 2 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{alors } k =$$

a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

3. Si la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } -3 < x < 3 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{alors } P(X = 3) =$$

a zero b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{2}$

Deuxièmement : Répondez aux questions suivantes :

4. Si X est une variable aléatoire continue tel que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{18} & \text{si } -3 < X < 3 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement**: $p(X < 0)$ **deuxièmement** : $P(-1 < X < 2)$

5. Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{24} & \text{si } 2 < x < 5 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : $p(3 < X < 5)$ **deuxièmement** : $p(x > 4)$

6. Si X est une variable aléatoire continue tel que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{27} & \text{si } 2 < x < 5 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Premièrement: Démontrez que: f est une fonction de densité

deuxièmement: $P(x > 3)$

7. Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{18} & \text{si } 1 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : $p(X > 3)$ **deuxièmement** : $p(2 < X < 4)$

8. Si X est une variables aléatoire continue dont la fonction de densité est:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de a **deuxièmement** : $p(1 < X < 3)$

9. Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + \mathbf{a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{zéro} & \text{, autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de a **deuxièmement** : $p(1 < X < 3)$

10. Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,x}{2} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de a **deuxièmement** : $p(1 < X < 3)$

11 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{k} & \text{si } 1 < x < 5 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de k **deuxièmement** : p $(2 < X < 3)$

Réflexion créative :

12 Si X est une variables aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } 2 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculez : **a** $P(1 < x < 2)$ **b** la valeur de a qui rend $p(2 < x < \mathbf{a}) = 0{,}5$

13 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{40} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

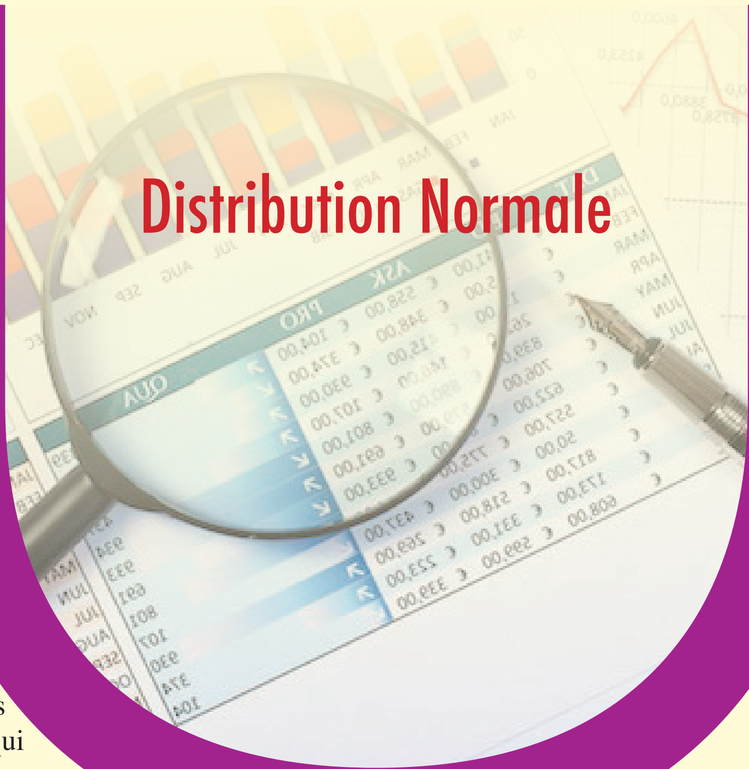
et **a** ; $b \in [1; 5[$ Trouvez

a la valeur de a si $P(a < x < a+2) = \dfrac{7}{20}$

b la valeur de b si $P(X > b) = \dfrac{69}{80}$

Unité
5

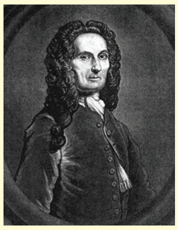
Distribution Normale



introduction

La loi normale est l'une des plus importantes distributions qui est enseignée dans les programmes de statistique grâce à ses différentes utilisations dans les productions de quelques opérations dans les sciences physiques, sociales et économiques où elle traite la plupart des phénomènes dans notre vie quotidienne. Le savant français Abraham de Moivre a été le premier qui a utilisé la distribution normale en 1756 dans l'une de ses publications, également d'autres scientifiques ont participé au développement de cette méthode parmi eux le savant allemand (Karl Friederich Gauss (1777-1855). Parfois on appelle la courbe normale par la courbe de Gauss.

Carl Friedrich Gauss



Abraham de Moivre

Parmi les plus célèbres applications de la distribution normale est l'évaluation administrative des subordonnés aussi elle est utilisée dans l'étude des reste pour analyser la regéssion, et a une relation avec le control de charts etc.

Objectifs de l'unité

A la fin de cette unité et après avoir exécuté les activités, l'élève doit être capable de :

- Connaitre la distribution normale et ses propriétés.
- Calculer la probabilité de la variable centré réduite
- Calculer la probabilité de la variable non réduite.
- Connaitre la variable aléatoire centré réduite et la courbe normale qui représente sa fonction de densité
- Transforme n'importe qu'elle variable aléatoire normale en variable aléatoire normale centré réduite.
- Trouver les valeurs de probabilité d'une variable aléatoire normale centré réduite à l'aide des tables
- Expliquer Propriétés de la courbe normale et quelques phénomènes qui les exprimés
- Expliquer les résultats obtenu du calcule la probabilité d' une variable aléatoire normale

Vocabulaire de base

- Distribution normale
- Courbe normale
- Distribution normale centrée réduite
- variable aléatoire normale

Leçons de l’unité

Leçon (5-1) Distribution normale

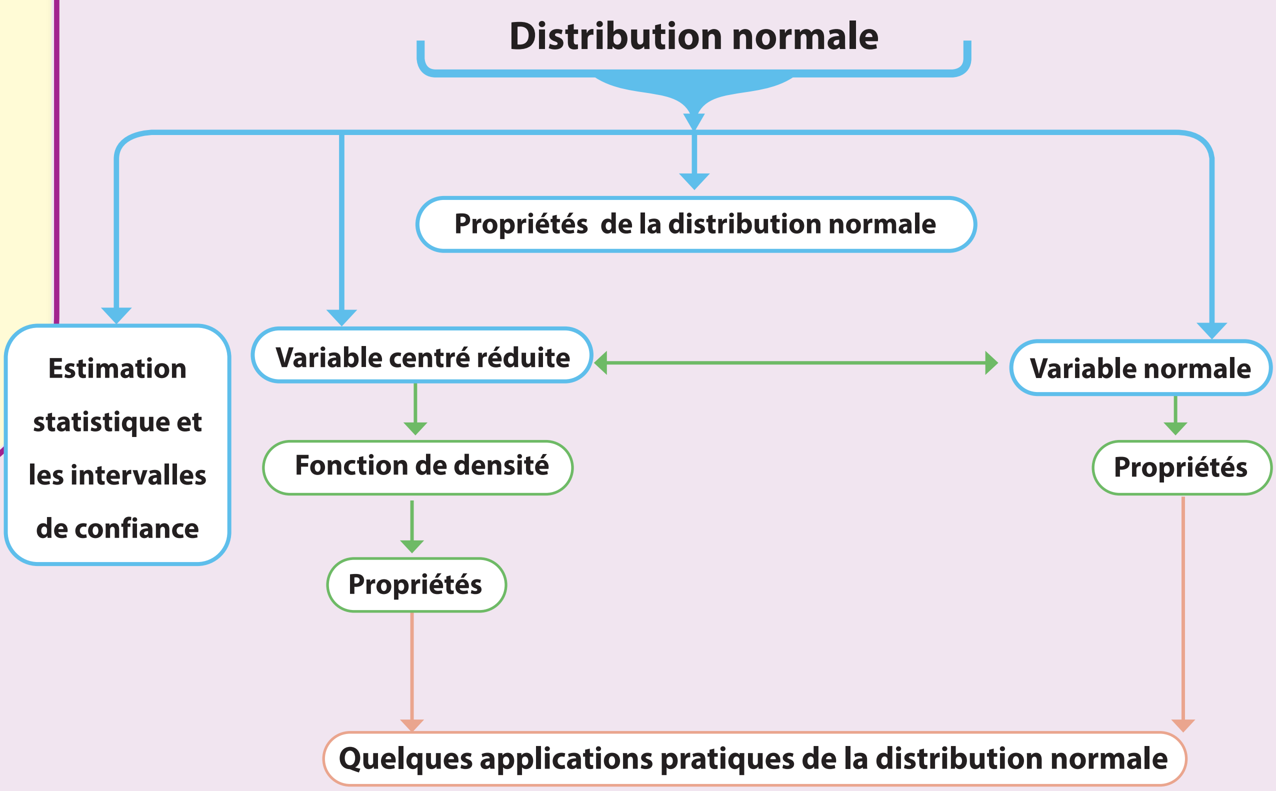
Leçon (5-2) Quelques applications pratiques de la distribution normale

Leçon (5-3) Estimation Statistiques les intervalles de confiance

Aide pédagogique

Calculatrice scientifique

Organigramme de l’unité



Unité 5

5 - 1 Distribution Normale

Allez apprendre

- Variable aléatoire normale
- Propriétés de la courbe normale
- Distribution norantmale centrée réduite
- Propriétés de la fonction de densité d'une distribution normale centrée réduite
- Calculer la probabilité de la variable centré réduite

Vocabulaire de base

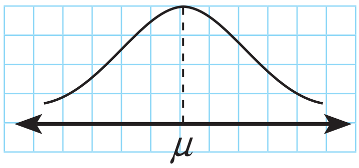
- Distribution normale
- Variable aléatoire normale centré réduite
- Courbe normale
- Distribution normale centré réduite

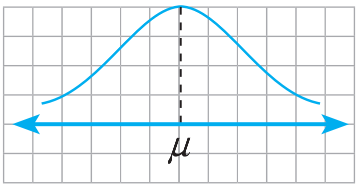
Introduction:

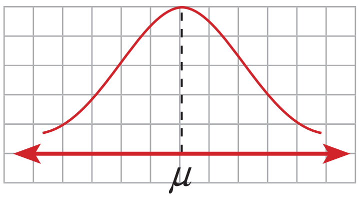
La lois normale est l'une des plus importes distribuions continue de l'importance de ses propriétés théoriques, ainsi que ses résultats sont des intervalles des nombres réelles, par exemples les tailles des adultes, les poids des enfants qui vient de nées, le dégrée de QI chez les jeans. ets. La distribution normale est comme une équation mathématique qui détermine ses direction et sera bien déterminer en connaissant l'espérance (moyenne) μ et l' écart-type σ . Cette courbe ressemble la cloche et elle est symétrique par rapporte à la droite d'équation x = μ et ses extrémités se rapprochent à l'axe des abscisses quand ses valeurs tands vers l'infinité.

Variable aléatoire normale:

Nous dirons qu'une variable aléatoire contenue X est une variable aléatoire normale si son ensemble image verifie les propriétés de la courbe normale]-∞ , ∞[et sa fonction de densité est représenté par une courbe en' cloche'. On appelle aussi cette courbe " courbe de Gauss". L'expression de cette fonction de densité dépend de deux paramètres ; la moyenne arithmétique μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire X comme montrent les figures suivantes.







Propriétés de la courbe normale

(1) Elle a un seul sommet et ses extrémités se rapprochent vers - ∞ et ∞ .

(2) Elle a un axe de symétrie, passant par le sommet et coupe l'axe horizontal en X = μ .

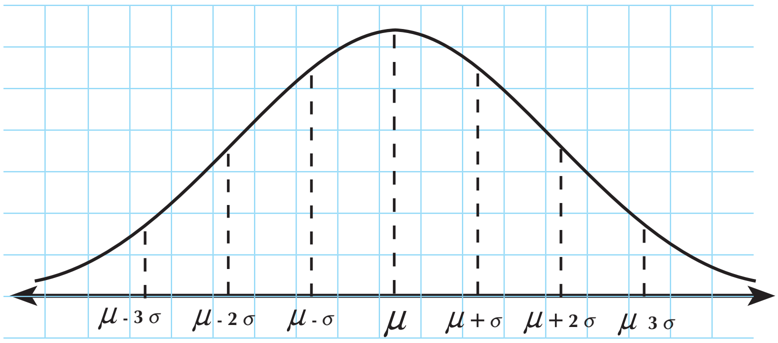
(3) L'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses est égale à l'unité

(4) A cause de la symétrie, la droite d'équation X = μ partage la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses en deux parties d'aires égale à 0 = 0.5.

(5) On peut Calculez l'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses d'après les intervalles suivantes

Aide pédagogique — Calculatrice scientifique.

- De $\mu - \sigma$ à $\mu + \sigma$ = 68,26 % de l'aire totale.
- De $\mu - 2\sigma$ à $\mu + 2\sigma$ = 95,44 % de l'aire totale.
- De $\mu - 3\sigma$ à $\mu + 3\sigma$ = 99,74 % de l'aire totale.

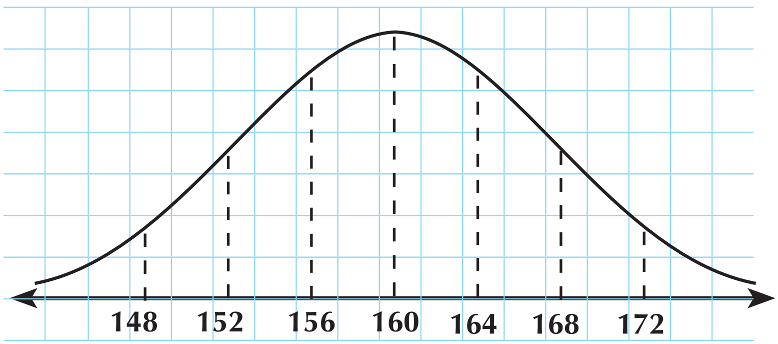


Remarque que: Les effectifs doit être plus grand pour que la distribution normale soit admis

Exemple

1. Si les tailles des élèves d'une école suivent une distribution normale de moyenne 160 cm, et d'écart-type 4 cm. Si on choisit au hasard un élève; Calculez la probabilité qu'il soit :
   - a) plus grand que 172 cm
   - b) plus petit que 156 cm
   - c) compris entre 156 cm et 168 cm

Solution



On a de données : moyenne $\mu = 160$ écart-type $\sigma = 4$

En comparaison les données avec la courbe normale on trouve: $\mu + 3$ x $= 160 + 3 \times 4$ alors,

a) $P(x > 172) = P(x > \mu + 3\sigma)$

$\because$ L'aire de $\mu - 3\sigma$ à $\mu + 3\sigma = 0{,}9974$

$\therefore$ L'aire de μ à $\mu + 3\sigma = 0{,}9974 \div 2 = 0{,}4987$

$\therefore$ L'aire de à droite de $\mu + 3\sigma = 0{,}5 - 0{,}4987 = 0{,}0013$

b) $P(x < 156) = P(x < \mu - \sigma)$

$\because$ L'aire de $\mu - \sigma$ à $\mu + \sigma = 0{,}6826$

$\therefore$ L'aire de μ to $\mu - \sigma = 0{,}6826 \div 2 = 0{,}3413$

$\therefore$ L'aire à gauche de $\mu - \sigma = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

ⓒ $P(156 < x < 168) = P(\mu - \sigma < x < \mu + 2\,\sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu) + P(\mu < x < \mu + 2\,\sigma)$

$$= \frac{0{,}6816}{2} + \frac{0{,}9544}{2} = 0{,}3408 + 0{,}4772 = 0{,}818$$

Essayez de résoudre

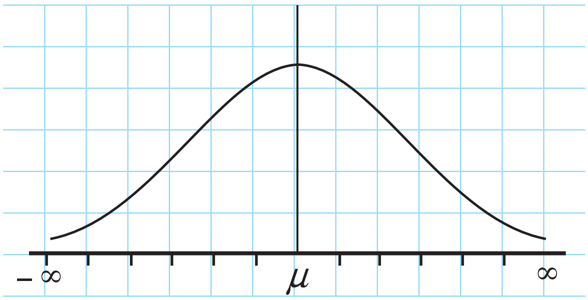
① Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne $\mu = 68$ kg. et de variance 16 kg. Trouvez

ⓐ La probabilité que le poids soit plus grand que 72 kg

ⓑ Le pourcentage des étudiants dont leurs poids compris entre 64 kg. et 72 kg

ⓒ Le nombre des étudiants dont leurs poids plus grand que 64 kg. si le nombre des étudiants de la faculté est 2000 étudiants

La distribution normale centrée réduite:

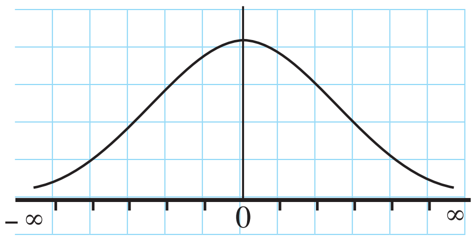


On a noté: pour calculer la probabilité de la distribution normale que les longueurs des intervalles sont multiples de l'écart-type pour qu'on puisse calculer la probabilité, pour ce-là on transforme les distributions normales en distributions normales centrées réduites, par transformé les valeurs de (x) en valeurs centrée réduites (y) en fonction de la moyenne μ et l'écart-type σ; et $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Définition

Si X est une variable aléatoire normale de moyenne μ et l'écart-type σ, alors $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ est une distribution normale de moyenne μ = Zèro et l'écart-type $\sigma = 1$.

Propriétés de la fonction de densité de la distribution normale centrée réduite (y).



(1) La courbe est située au dessus de l'axe horizontal (axe des abscisses)

(2) Symétrique par rapport à l'axe vertical (axe des Ordonnées)

(3) Ses extrémités se prolongent à l'infini sans traversées l'axe horizontal

(4) L'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses = 1.

(5) De la symétrie, l'axe vertical partage cette région en deux parties d'aires égale à 0,5

(6) On peut calculer l'aire de la région limitée par la courbe et un intervalle]a , b[à l'aide des tables spéciales (Table des aires situées sous courbe normale, centrée réduite).

Table des aires situées sous une courbe normale, centrée réduite

Pour transformer une distribution normale X en distribution normale centrée réduite Y

On utilise la relation $y = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, à l'aide de la table qui se trouve au livre on peut calculer l'aire demendée :

Dans ce qui suit on montre comment on cherche dans la table des aires situées sous une courbe normale, centrée réduite

y	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0						0,0199				
0,1										
0,2										
0,3										
0,4	0,1554									
0,5										
0,6				0,2357						
2,5								0,4949		
3,5										

$P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}05)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle $[0 \,;\, 0{,}05]$ d'où $y = 0{,}05$ pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 0,0 et la colonne 0,05, on trouve le nombre 0,0199

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}05) = 0{,}0199$

$P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}4)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle $[0 \,;\, 0{,}4]$ d'où $y = 0{,}4$ pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 0,4 et la colonne 0.00 on trouve le nombre 0,1554.

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}4) = 0{,}1554$

$P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}63)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle $[0 \,;\, 0{,}63]$ d'où $y = 0{,}63$ pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 0.6 et la colonne 0,03 , on trouve le nombre 0,2357.

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}63) = 0{,}2357$

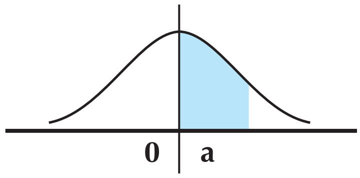
$P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}57)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle $[0 \,;\, 2{,}57]$ d'où $y = 2{,}57$ pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 2,5 et la colonne 0,07 on trouve le nombre 0,4949

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}57) = 0{,}4949$

Calcule de probabilités pour une variable aléatoire normale centrée réduite:

(1) Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [0 ; a] de la table

La table des aires situées sous la courbe normale, centrée réduite donne l'aire approchée de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [0 ; a] où $a \geqslant 0$, c'est-à-dire que la table donne directement $P(0 \leqslant Y \leqslant a)$



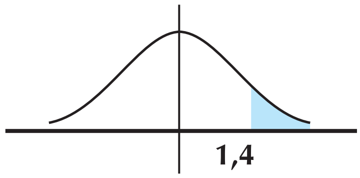
Par exemple: $P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}3) = 0{,}1179$, $P(0 < Y \leqslant 0{,}64) = 0{,}2389$

$P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}7) = 0{,}4554$, $P(0 \leqslant Y < 2{,}45) = 0{,}4929$

Remarque que: $P(Y \geqslant 1{,}4) = 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}4)$

$= 0{,}5 - 0{,}4192$

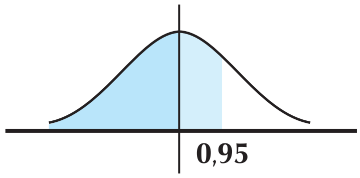
$= 0{,}0808$



De même: $P(Y \leqslant 0{,}95) = 0{,}5 + P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}95)$

$= 0{,}5 + 0{,}3289$

$= 0{,}8289$



(2) Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [- a , 0] de la table

De la symétrie de la courbe par rapport à l'axe verticale on trouve que:

$P(-a \leqslant Y \leqslant 0) = P(0 \leqslant Y \leqslant a)$

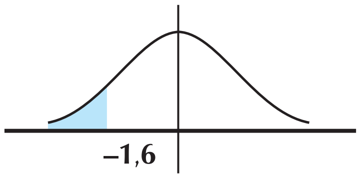
Par Exemple: $P(-1{,}25 \leqslant Y \leqslant 0) = P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}25) = 0{,}3944$

, $P(-2{,}24 \leqslant Y \leqslant 0) = P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}24) = 0{,}4875$

, $P(Y \leqslant -1{,}6) = 0{,}5 - P(-1{,}6 \leqslant Y \leqslant 0)$

$= 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}6)$

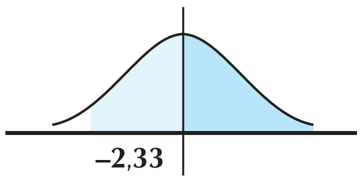
$= 0{,}5 - 0{,}4452 = 0{,}0548$



, $P(Y \geqslant -2{,}32) = 0{,}5 + P(-2{,}32 \leqslant Y \leqslant 0)$

$= 0{,}5 + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}32)$

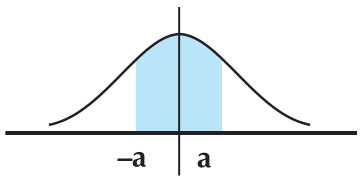
$= 0{,}5 + 0{,}4898 = 0{,}9898$



Remarque: $P(-a \leqslant Y \leqslant a) = 2 \times P(0 \leqslant Y \leqslant a)$

Par Exemple: $P(-1{,}4 \leqslant Y \leqslant 1{,}4) = 2 \times P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}4)$

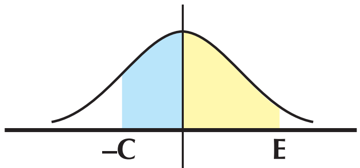
$= 2 \times 0{,}4192 = 0{,}8384$



, $P(-2{,}0 \leqslant Y \leqslant 2{,}0) = 2 \times P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}0) = 2 \times 0{,}4772 = 0{,}9544$

(3) Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [C ; E]:

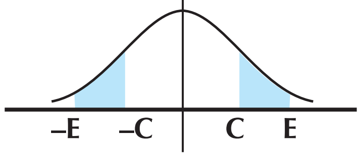
Dans ce cas on préfère d'utiliser le dessin de la courbe normale et on note de la symétrie que, l'axe vertical partage cette région en deux parties d'aires égale à 0,5



Premièrement: $P(-C \leqslant Y \leqslant E)$ si c et E sont positives.

$= P(-C \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant E)$

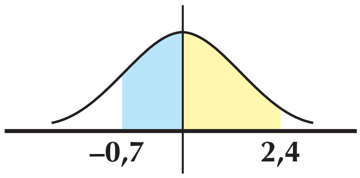
$= P(0 \leqslant Y \leqslant C) + P(0 \leqslant Y \leqslant E)$



Deuxièmement: $P(C \leqslant Y \leqslant E) = P(-E \leqslant Y \leqslant -C)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant E) - P(0 \leqslant Y \leqslant C)$

Par Exemple

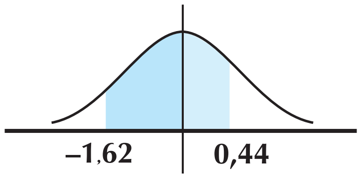


(1) $P(-0{,}7 \leqslant Y \leqslant 2{,}4)$

$= P(-0{,}7 \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}4)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}7) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}4)$ de la symétrie

$= 0{,}2580 + 0{,}4918 = 0{,}7498$

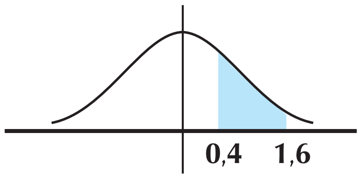


(2) $P(-1{,}62 < Y \leqslant 0{,}44)$

$= P(-1{,}62 < Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}44)$

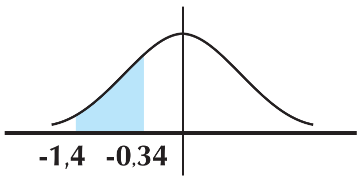
$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}62) + P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}44)$ de la symétrie

$= 0{,}4474 + 0{,}1700 = 0{,}6174$



(3) $P(0{,}4 \leqslant Y < 1{,}6) = P(0 \leqslant Y < 1{,}6) - P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}4)$

$= 0{,}4452 - 0{,}1554 = 0{,}2898$



(4) $P(-1{,}4 < Y < -0{,}34)$

$= P(-1{,}4 < Y \leqslant 0) - P(-0{,}34 < Y \leqslant 0)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}4) + P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}34)$ de la symétrie

$= 0{,}4192 - 0{,}1331 = 0{,}2861$

Exemple **Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale centrée réduite**

(1) Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez

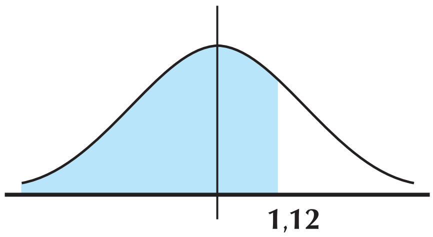
(a) $P(Y \leqslant 1{,}12)$ (b) $P(Y \geqslant 1{,}64)$ (c) $P(0{,}48 \leqslant Y \leqslant 2{,}1)$

Solution

(a) $P(Y \leqslant 1{,}12)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}12) + P(Y \leqslant 0)$

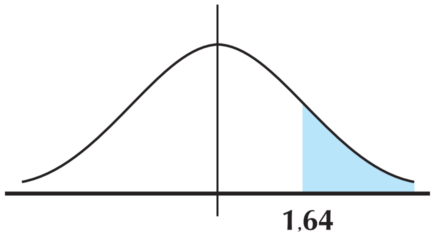
$= 0{,}3686 + 0{,}5 = 0{,}8686$



b $P(Y \geqslant 1{,}64)$

$= P(Y \geqslant 0) - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}64)$

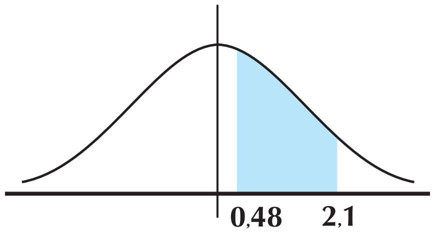
$= 0{,}5 - 0{,}4495 = 0{,}0505$



c $P(0{,}48 \leqslant Y \leqslant 2{,}1)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}1) - P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}48)$

$= 0{,}4821 - 0{,}1844 = 0{,}2977$



Essayez de résoudre

2 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez

a $P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}82)$ **b** $P(Y \geqslant 2{,}32)$

c $P(Y \leqslant 1{,}64)$ **d** $P(1{,}08 \leqslant Y \leqslant 3{,}12)$

Exemple

2 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez :

a $P(Y \leqslant -0{,}56)$ **b** $P(Y \geqslant -1{,}06)$

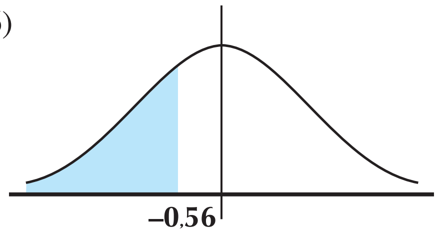
c $P(-1{,}2 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$ **d** $P(-2{,}2 \leqslant Y \leqslant -0{,}46)$

Solution

a $P(Y \leqslant -0{,}56)$

$= P(Y \geqslant 0{,}56)$

$= 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}56) = 0{,}5 - 0{,}2123 = 0{,}2877$

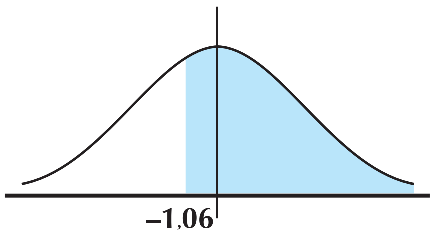


b $P(Y \geqslant -1{,}06)$

$= P(Y \leqslant 1{,}06)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}06) + 0{,}5$

$= 0{,}0636 + 0{,}5 = 0{,}5636$

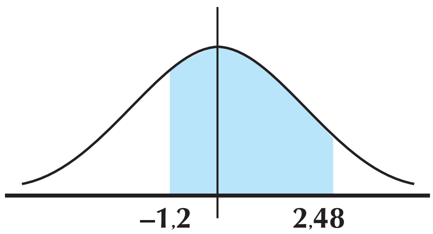


c $P(-1{,}2 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$

$= P(-1{,}2 \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}2) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$

$= 0{,}3849 + 0{,}4934 = 0{,}8783$

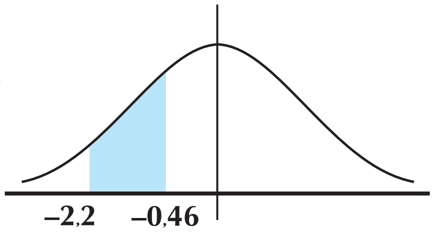


d P(- 2,2 ⩽ Y ⩽ - 0,46)

= P(- 2,2 ⩽ Y ⩽ 0) - P(- 0,46 ⩽ Y ⩽ 0)

= P(0 ⩽ Y ⩽ 2,2) – P(0 ⩽ Y ⩽ 0,46)

= 0,4861 – 0,1772 = 0,3089



Essayez de résoudre

3 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez

a P(Y ⩽ - 0,56) **b** P(Y ⩾ - 1,06)

c P(- 1,2 ⩽ Y ⩽ 2,48) **d** P(- 2,2 ⩽ Y ⩽ - 0,46)

Exemple

Transformer d'une variable normale en variable normale centrée réduite :

3 Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ , trouvez:

a $P(X > \mu - 1{,}5\sigma)$ **b** $P(X < \mu - 0{,}5\sigma)$

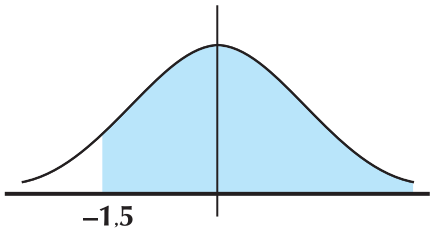
c $P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma)$

Solution

a $P\left(Y > \dfrac{\mu - 1{,}5\sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(Y > -1{,}5)$

$= P(-1{,}5 < Y < 0) + 0{,}5$

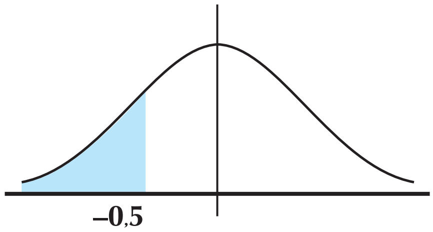
$= P(0 < Y < 1{,}5) + 0{,}5 = 0{,}4332 + 0{,}5 = 0{,}9332$



b $P(X < \mu - 0{,}5\sigma) = P\left(Y < \dfrac{\mu - 0{,}5\sigma - \mu}{\sigma}\right)$

$= P(Y < -0{,}5) = P(Y > 0{,}5)$

$= 0{,}5 - P(0 < Y < 0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 = 0{,}3085$

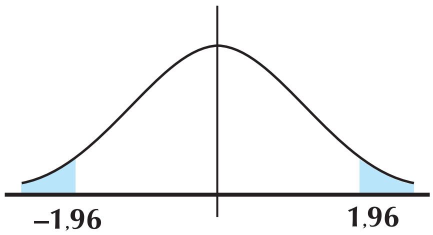


c $P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma)$

$= P\left(\dfrac{\mu - 1{,}96\sigma - \mu}{\sigma} < Y < \dfrac{\mu - 1{,}96\sigma - \mu}{\sigma}\right)$

$= P(-1{,}96 < Y < 1{,}96)$

$= 2\,P(0 < Y < 1{,}96) = 2 \times 0{,}4750 = 0{,}95$



Essayez de résoudre

4 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ, trouvez:

a $P(X < \mu - 2{,}1\sigma)$ **b** $(X > \mu + 0{,}8\sigma)$

c $P(\mu - 1{,}48\sigma < X < \mu + 1{,}48\sigma)$

Exemple

4 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez k dans les cas suivantes:

a $P(Y \geqslant K) = 0{,}1056$

b $P(Y \leqslant K) = 0{,}1151$

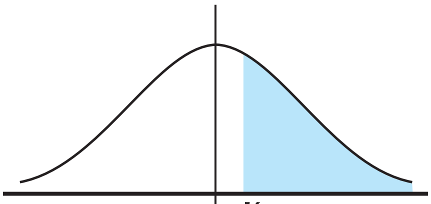
c $P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

d $P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}1) = 0{,}2906$

Solution

a On remarque que l'aire:

L'aire $< 0{,}5$ et le signe de l'inéquation «plus grand que» alors k se trouve dans l'intervalle positif, comme indique la figure ci-contre.



$\because P(Y \geqslant K) = 0{,}1056$

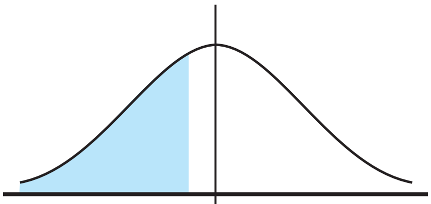
$\therefore 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}1056$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5 - 0{,}1056 = 0{,}3944$

On cherche d'un nombre (a) dans la table de l'aire qui est égale à l'aire 0,3944 on le trouve dans la ligne 1,2 et la colonne 0,05, c'est-à-dire **K = 1,25**

b On remarque que:

l'aire: $< 0{,}5$, et le signe de l'inéquation ' plus petit que, alors k se trouve dans l'intervalle négatif, comme indique la figure ci-contre



$\because P(Y \leqslant K) = 0{,}1151$

De la symétrie on trouve que : $P(Y \geqslant K) = 0{,}1151$

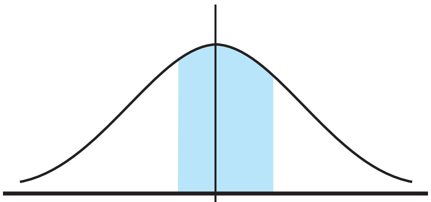
$\therefore 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}1151$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5 - 0{,}1151 = 0{,}3849$

$\therefore$ **K = - 1.2** (**Remarque que k se trouve dans la partie négatif**)

c On remarque que :

l'aire > 0.5 et l'une d'extrémités de l'inéquation se trouve dans l'intervalle négatif, alors k se trouve dans l'intervalle positif, comme indique la figure ci-contre



$\because P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

$\therefore P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}44) + P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

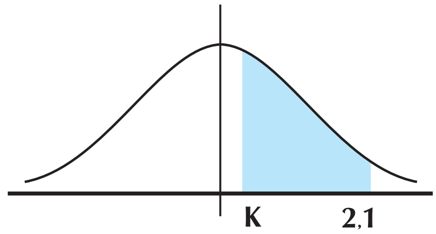
$\therefore 0{,}1700 + P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588 - 0{,}1700 = 0{,}3888$

$\therefore$ **K = 1,22**

d On remarque que :

l'aire $< 0{,}5$ et l'une d'extrémités de l'inéquation se trouve dans l'intervalle, positif, alors k se trouve dans l'intervalle positif, aussi comme indique la figure ci-contre:



$\because$ P $(K \leqslant Y \leqslant 2{,}1) = 0{,}2906$

$\therefore$ $P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}1) - P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}2906$

$\therefore$ $P(0 \leqslant Y \leqslant K) = P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}1) - 0{,}2906$

$= 0{,}4821 - 0{,}2906 = 0{,}1915$ $\therefore$ $\mathbf{K = 0{,}5}$

Essayez de résoudre

5 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez k dans chacun des cas suivants

a $P(Y \geqslant K) = 0{,}1980$ **b** $P(Y \leqslant K) = 0{,}1980$

c $P(-2{,}4 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}7970$ **d** $P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}5) = 0{,}8238$

Exemple

5 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ

a Si: $P(X \geqslant 180) = 0{,}0062$, $\mu = 165$ Calculez σ

b Si: $P(X > 35) = 0{,}8643$, $\sigma = 5$ Calculez μ

c Si: $P(X \leqslant 170) = 0{,}0228$, $\sigma = 7$ Calculez μ

d Si: $P(X \leqslant K) = 0{,}8944$, $\mu = 125$, $\sigma = 8$ Calculez K

e Si: $P(X > K) = 0{,}9452$, $\mu = 50$, $\sigma = 5$ Calculez K

Solution

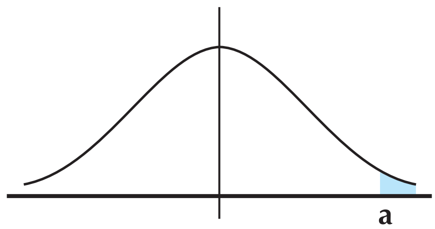
a $P(X \geqslant 180) = P\left(Y \geqslant \dfrac{180 - 165}{\sigma}\right) = 0{,}0062$

$\therefore P(Y \geqslant a) = 0{,}0062$ si $a = \dfrac{15}{\sigma}$, $a > 0$

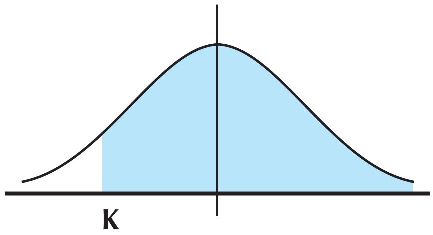
$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant a) = 0{,}5 - 0{,}0062 = 0{,}4938$

$\therefore a = 2{,}5$

$\therefore \dfrac{15}{\sigma} = \dfrac{5}{2}$ $\therefore \sigma = \dfrac{2 \times 15}{5}$ $\therefore \mathbf{\sigma = 6}$



b) $P(X > 35) = P(Y > \frac{35 - \mu}{5}) = 0{,}8643$



$\therefore\ P(Y > K) = 0{,}8643$ si

$\therefore\ K = \frac{35 - \mu}{5}$, $K < 0$

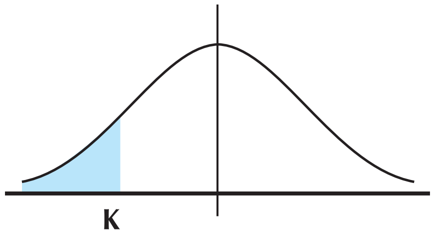
$\therefore\ P(0 \leqslant Y \leqslant -K) + 0{,}5 = 0{,}8643$

$P(-K < Y \leqslant 0) = 0{,}8643 - 0{,}5 = 0{,}3643$ $\qquad \therefore K = -1{,}1$

$\therefore \frac{35 - \mu}{5} = -1{,}1$ $\qquad \therefore 35 - \mu = -5{,}5$

$\therefore \mu = 35 + 5{,}5$ $\qquad \therefore \mu = 40{,}5$

c) $P(X \leqslant 170) = P(Y \leqslant \frac{170 - \mu}{7}) = 0{,}0228$



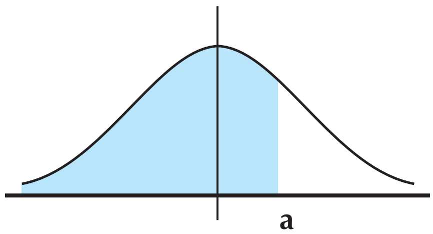
$\therefore P(Y \leqslant K) = 0{,}0228$ si $K = \frac{170 - \mu}{7}$, $K < 0$

$\therefore P(K \leqslant Y \leqslant 0) = 0{,}5 - 0{,}0228 = 0{,}4772$

$\therefore K = -2$

$\therefore \frac{170 - \mu}{7} = -2$ $\qquad \therefore 170 - \mu = -14$ $\qquad \therefore \mu = 170 + 14$ $\qquad \mu = 184$

d) $P(X \leqslant K) = P(Y \leqslant \frac{K - 125}{8}) = 0{,}8944$



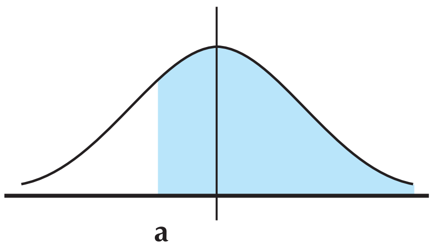
$\therefore P(Y \leqslant a) = 0{,}8944$

si $a = \frac{K - 125}{8}$, $a > 0$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant a) = 0{,}8944 - 0{,}5 = 0{,}3944$ $\qquad \therefore a = 1{,}25$

$\therefore \frac{K - 125}{8} = 1{,}25$ $\qquad \therefore K - 125 = 10$ $\qquad \therefore K = 125 + 10$ $\qquad \therefore K = 135$

e) $P(X > K) = P(Y > \frac{K - 50}{5}) = 0{,}9452$



$\therefore P(Y > a) = 0{,}9452$

si $a = \frac{K - 50}{5}$, $a < 0$

$\therefore P(0 \leqslant Y < -a) = 0{,}9452 - 0{,}5 = 0{,}4452$ $\qquad \therefore a = -1{,}6$

$\therefore \frac{K - 50}{5} = -1{,}6$ $\qquad \therefore K - 50 = -8$ $\qquad \therefore K = 50 - 8$ $\qquad K = 42$

EssayeY de résoudre

6) Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ , et d'écart- type σ, $P(X < 19) = 0{,}7734$ et $P(X > 10) = 0{,}9332$, Calculez la valeur de μ et σ.

Exercices 5 - 1

1 Si y est une variable normale centrée réduite, Calculez:

a $P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}15)$, $P(0 \geqslant Y \geqslant 2{,}42)$

b $P(-0{,}04 \leqslant Y \leqslant 0)$, $P(-1{,}63 \leqslant Y \leqslant 0)$

c $P(-0{,}7 \leqslant Y \leqslant 0{,}7)$, $P(-1{,}65 \leqslant Y \leqslant 1{,}65)$

d $P(-2{,}42 \leqslant Y \leqslant 1{,}67)$, $P(-1{,}73 \leqslant Y \leqslant 0{,}64)$

e $P(0{,}74 \leqslant Y \leqslant 1{,}02)$, $P(1{,}4 \leqslant Y \leqslant 2{,}2)$

f $P(-2{,}1 \leqslant Y \leqslant -0{,}92)$, $P(-1{,}5 \leqslant Y \leqslant -0{,}84)$

g $P(Y \leqslant 1{,}44)$, $P(Y \leqslant 2{,}05)$

h $P(Y \leqslant -1{,}14)$, $P(Y \leqslant -2{,}32)$

i $P(Y \leqslant 0{,}65)$, $P(Y \leqslant 1{,}42)$

j $P(Y \leqslant -0{,}45)$, $P(Y \leqslant -1{,}6)$

2 Si Y est une variable normale centrée réduite, trouvez la valeur du nombre k qui vérifie:

a $P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}3554$

b $P(K \leqslant Y \leqslant 0) = 0{,}4120$

c $P(-K \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}2206$

d $P(Y \leqslant K) = 0{,}9754$

e $P(Y \leqslant K) = 0{,}1977$

f $P(Y \geqslant K) = 0{,}0934$

g $P(Y \geqslant K) = 0{,}9955$

h $P(K \leqslant Y \leqslant 1{,}11) = 0{,}6660$

i $P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}22) = 0{,}2446$

j $P(-1{,}7 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}3261$

3 Si Y est une variable normale centrée réduite, si on a:

a $P(Y \leqslant K) = 0{,}1736$ Trouvez: $P(K \leqslant Y \leqslant 1{,}7)$

b $P(Y \geqslant K) = 0{,}0207$ Trouvez: $P(0{,}56 \leqslant Y \leqslant K)$

c $P(Y \leqslant K) = 0{,}8944$ Trouvez: $P(-0{,}7 \leqslant Y \leqslant K)$

d $P(0{,}4 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}3110$ Trouvez: $P(Y \leqslant K)$

e $P(1{,}4 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}0770$ Trouvez: $P(-1{,}4 \leqslant Y \leqslant K)$

f $P(K \leqslant Y \leqslant 1{,}7) = 0{,}8586$ Trouvez: $P(K \leqslant Y \leqslant 0{,}75)$

4 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ, et d'écart- type σ Si

a $P(X \leqslant 90) = 0{,}0668$, $\mu = 102$ Calculez σ

b $P(X \geqslant 62) = 0{,}0548$, $\mu = 50$ Calculez σ

c $P(X \geqslant 48) = 0{,}0228$, $\sigma = 4$ Calculez μ

d $P(X > 68) = 0{,}1056$, $\sigma = 6{,}4$ Calculez μ

e $P(X \geqslant 42) = 0{,}8944$, $\sigma = 6{,}4$ Calculez μ

f $P(\mu - K\sigma \leqslant x \leqslant \mu + K\sigma) = 0{,}438$ Calculez K

g $P(X \leqslant K) = 0{,}2119$, $\mu = 42$, $\sigma = 5$ Calculez K

h $P(X \leqslant K) = 0{,}8413$, $\mu = 72$, $\sigma = 8$ Calculez K

i $P(X > K) = 0{,}9772$, $\mu = 60$, $\sigma = 4$ Calculez K

5 Répondez aux questions suivants:

a Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne 120, d'écart- type 10 et $p(X < K) = 0{,}9599$, trouvez la valeur de k

b Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne μ, et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez la valeur de μ Si $p(X \leqslant 35) = 0{,}0228$

c Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 8$, et d'écart- type $\sigma = 2$ Si $P(K \geqslant X) = 0{,}1056$, trouvez:

Premièrement: La valeur de k **Deuxièmement:** $P(X \leqslant 10)$

d Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne μ et d'écart- type σ , trouvez $P(\mu - \frac{1}{4}\sigma \leqslant X \leqslant \mu + \frac{1}{2}\sigma)$

e Si Y est une variable centrée normale réduite, trouvez k qui vérifie

Premièrement: $P(Y > K) = 0{,}0281$

Deuxièmement: $P(-1 < Y < K) = 0{,}7918$

f Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne 18 et d'écart- type 2,5 , Trouvez

Premièrement: $P(X < 15)$

Deuxièmement: $P(17 < X < 21)$

g Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 24$ et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez:

Premièrement: $P(X \geqslant 32{,}5)$

Deuxièmement: $P(14 < X < 29)$

h Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 48$ et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez:

Premièrement: $P(43 < X < 59)$

Deuxièmement: la valeur de K Si $P(x > K) = 0{,}1841$.

i Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 17$ et 17et d'écart- type $\sigma = 2$, trouvez:

Premièrement: $P(16 \leqslant X \leqslant 20)$

Deuxièmement: $P(X > 15)$

j Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne 32 et de variance 16 . Trouvez:

Premièrement: $P(X < 25)$

Deuxièmement: $P(28 < X < 35)$

k Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 8$ et d'écart- type $\sigma = 2$, trouvez:

Premièrement: $P(X \leqslant 10)$

Deuxièmement: Si $P(X \geqslant K) = 0{,}1056$, trouvez La valeur de k.

Unité 5

5 - 2 Quelques applications pratiques de la distribution normale

Allez apprendre

- Application pratiques de la distribution normale

Vocabulaire de base

- Distribution normale
- Variable aléatoire normale
- Courbe normale
- Distribution normale centrée réduite

Introduction:

Dans la leçon précédente, nous avons appris la distribution normale et ses propriétés et nous avons appris la variable aléatoire normale centrée réduite et comment le calculer de la distribution normale connaissant la moyenne et d'écart- type, nous avons appris comment calculer de probabilités pour une variable aléatoire normale centrée réduite en utilisant la table des aires. Dans cette leçon on apprendera quelques déférentes utilisations de la variable aléatoire normale pour étudier quelques Phénomènes.

Exemple **En lien avec l'industriel**

1 Une machine dans une usine produit des cylindres dont les longueurs suivent une distribution normale de moyenne 56 cm et d'écart- type 2 cm. Un cylindre est accepté si sa longueur est comprise entre 51 cm et 60 cm. On choisit au hasard une chantions de 1000 cylindres. Combien le nombre estimé de cylindres acceptés ?

Solution

Soit X une variable aléatoire normale qui représente les longueurs de cylindre,

$\therefore$ La probabilité que le cylindre est accepté = P (51 < X < 60)

$= P\left(\frac{51 - 56}{2} < y < \frac{60 - 56}{2}\right)$

$= P(-2,5 < y < 2)$

$= P(-2,5 < y \leqslant 0) + P(0 \leqslant y < 2)$

$= 0,4938 + 0,4772 = 0,9710$

$\therefore$ Le nombre estimé des cylindre acceptés = $1000 \times 0,9710 = 971$ cylindres

Essayez de résoudre

1 En lien avec le revenu: Si le revenu mensuel d'un groupe de 200 ouvriers d'une usine suit une distribution normale de moyenne 175 L.E. et d'écart-type 10 L.E., trouvez le nombre des ouvriers dont le revenu est compris entre 170 L.E.et 180 L.E.

Exemple

1) En lien avec l'enseignement: Si les notes des élèves d'une école suit une distribution normale de moyenne $\mu = 44$ et d'écart-type σ, Sachant que 22.66% des élèves ont obtenu des notes supérieures à 50. Trouvez σ.

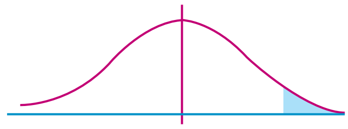
Solution

Soit X une variable aléatoire normale qui représente les notes des élèves

$\therefore P(X > 50) = \frac{22{,}26}{100}$

$\therefore P(y > \frac{50 - 44}{\sigma}) = 0.2266$

$\therefore P(y > K) = 0{,}2266$ si $K = \frac{6}{\sigma}$, $K > 0$



$\therefore P(0 \leqslant y < K) = 0{,}5 - 0{,}2266 = 0{,}2734$

$\therefore K = 0{,}75$ $\qquad \therefore \frac{6}{\sigma} = 0{,}75$ $\qquad \therefore \sigma = \frac{6}{0{,}75} = 8$

Essayez de résoudre

2) Si les notes des élèves à un examen suivent une distribution normale de moyenne 60 et d'écart-type 12. On choisit au hasard un élève, calculez la probabilité que sa note soit compris entre 66 et 75, si 15% des meilleurs élèves ont obtenu la mention excellente. Trouvez la plus petite note permet d'obtenir la mention excellente

Exemple

2) En lien avec la taille: Les tailles des élèves d'un Lycée suivent une distribution normale de moyenne 160 cm et d'écart-type $\sigma = 5$ cm, Déterminez la probabilité que la différence de la taille d'un élève de μ ne dépasse pas 8 cm.

Solution

Soit X une variable aléatoire normale qui représente les tailles des élèves, La différence de la taille d'un élève à $\mu = |x - \mu|$" c'est-à-dire la différence absolue de la taille et μ"

$\therefore P(|X - \mu| < 8) = P(|X - 160| < 8)$

$\therefore P(-8 < X - 160 < 8)$

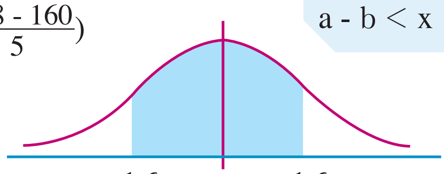
$= P(152 < X < 168)$

$= P(\frac{152 - 160}{5} < y < \frac{168 - 160}{5})$

$= P(-1{,}6 < y < 1{,}6)$

$= 2 \times P(0 \leqslant y < 1{,}6)$

$= 2 \times 0{,}4452 = 0{,}8904$



Rappelle

L'expression:

$|x - a| < b$

équivalant à

L'expression:

$-b < x - a < b$

D'où

$a - b < x < a + b$

Essayez de résoudre

3 **En lien avec le poids:** Si les poids des élèves d'une école primaire suivent une distribution normale de moyenne 30 kg et d'écart-type 5 kg , calculez le pourcentage d'élèves dont le poids dépasse 45 kg et le pourcentage d'élèves dont le poids est compris entre 25 kg et 35 kg.

Exemple

3 **En lien avec le travail:** Si les salaires des ouvriers d'une usine suivent une distribution normale de moyenne μ = 75 LE et d'écart-type σ = 10, Calculez:

a) le pourcentage des ouvriers dont les salaires dépasse 90 LE.
b) le pourcentage des ouvriers dont les salaires inférieur à 55 L.E
c) le pourcentage des ouvriers dont les salaires est compris entre 60 et 80 L.E.

Solution

a) $\because$ P (X > 90) = P (Y > $\frac{90 - 75}{10}$)
= 0,5 – P (0 ⩽ Y ⩽ 1,5) = 0,5 – 0,4332 = 0,0668
$\therefore$ le pourcentage des ouvriers dont les salaires dépasse 90 LE = 6,68%

b) $\because$ P (X < 55) = P (y < $\frac{55 - 75}{10}$) = P (Y < - 2)
= 0.5 - P (0 ⩽ Y ⩽ 2) = 0,5 – 0,4772 = 0,0228
$\therefore$ le pourcentage des ouvriers dont les salaires inférieur 55 LE = 2,28% du nombre total

c) $\because$ P (60 ⩽ X ⩽ 80) = P ($\frac{60 - 75}{10}$ ⩽ Y ⩽ $\frac{80 - 75}{10}$)
= P (- 1,5 ⩽ Y ⩽ 0,5) = P (0 ⩽ Z ⩽ 1,5) +
P (0 ⩽ Y ⩽ 0,5) = 0,1915 + 0,4332 = 0,6247
$\therefore$ le pourcentage des ouvriers dont les salaires est compris entre 60 LE et 80 LE = 62,47% du nombre totale des ouvriers de l'usine.

Essayez de résoudre

4 Soient les notes des élèves d'un examen suivent une distribution normale de moyenne 76 et d'écart-type 15. Si 15% des éléves sont des meilleurs et obtient des notes plus grand que α , et 10% des élèves sont des mouvais éléves et obtient des notes plus petit que β : Trouvez

a) le plus petite valeur des α pour qu'un élève soit de meilleur élèves
b) la note d' échec β (la note minimale)

Exercices 5 - 2

1. Si le revenu mensuel de 1000 familles dans une ville suit une distribution normale de moyenne 170 L.E. et d'écart-type 20 L.E. On choisit une famille au hasard, trouvez :
   a. La probabilité pour que son revenu soit compris entre 160 L.E.et 200 L.E
   b. Le nombre des familles dont le revenu dépasse 150 L.E

2. Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 68,5 kg et d'écart-type 2,5 kg
   a. Calculez le pourcentage des étudiants dont le poids est compris entre 67,5 kg et 71 kg
   b. Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont le poids dépasse 71 kg

3. On choisit un échantillon de 200 élèves d'une école, si leurs âges suivent une distribution normale de moyenne 16,6 et d'écart-type 1,2 Trouvez le nombre des élèves dont leurs âges est inférieur à 16 ans.

4. Les tailles de 2000 étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 170 cm et d'écart-type 8 cm , trouvez le nombre des étudiants dont la taille est inférieur à 176 cm

5. Si le revenu mensuel de 300 familles représente une variable aléatoire X qui suit une distribution normale de moyenne $\mu = 500$ LE et d'écart-type $\sigma = 20$ L.E, trouvez
   a. Le nombre des familles dont le revenu dépasse 530 L.E
   b. Le revenu maximal de 4% des familles dont les petits revenus.

6. Si le revenu mensuel de 200 familles représente une variable aléatoire X qui suit une distribution normale de moyenne $\mu = 400$,et écart-type $\sigma = 80$ LE, trouvez:
   a. La probabilité pour que le revenu mensuel d'une famille soit 500 L.E au plus.
   b. Le nombre des familles dont le revenu mensuel est 500 L.E. au plus

7. Si le temps de fonctionnement (par heurs) pour une sorte de batterie suit une distribution normale de moyenne 2000 h. et d'écart-type 120 h L.E. Quelle est la probabilité pour qu'une batterie fonctionne plus que 1800 h

8 Si le revenu mensuel de 500 ouvriers suit une distribution normale de moyenne 180 L.E. et d'écart-type 15 L.E. Trouvez le nombre des ouvriers dont le revenu mensuel est inférieure que 198 L.E

9 Si la hauteur de l'eau de pluie pendant le mois de février suit une distribution normale de moyenne $\mu = 3$ cm et de variance $\sigma^2 = 4$ cm^2, Trouvez la probabilité pour que la hauteur de l'eau de pluie pendant le mois de février l'année prochaine soit:

a Plus grand que 1 cm **b** compris ente 3,5 cm et 4 cm

10 Si les températures pendant le mois d'août suit une distribution normale de moyenne $\mu = 35$ degrés et d'écart-type $\sigma = 5$ degrés, Trouvez la probabilité pour que la température pendant un jour de ce mois soit :

a Comprise entre 28 et 38 degrés. **b** plus grande que 39 degrés .

c Comprise entre 26 degrés et 32 degrés.

11 1000 jeune hommes ont présenté au département de recrutement, leurs tailles suivent une distribution normale de moyenne 170 cm et d'écart-type 10cm , Trouvez le nombre des jeunes hommes

a dont la taille est inférieure à 190 cm

b Qui sont refusées, sachant que la taille minimale pour accepter est 155 cm

12 Si les longueurs d'une certainne sorte de plantes suivent une distribution normale de moyenne 50 cm et d'écart-type σ Si les longueurs de 10.56% de cette plante sont plus petit que 45 cm, Calculez la variance de longueurs de cette plante.

13 Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 65 kg et d'écart-type σ . Si les poids de 33% des étudiants dépasse 70 kg.

a Calculez σ

b Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont le poids sont Inférieure à 67,5 kg

14 Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 68,5 kg et d'écart-type 2,5 kg .

a Calculez le pourcentage des étudiants dont les poids compris entre 67,5 kg et 71 kg

b Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont le poids sont supérieure à 71 kg

15 Si les notes des élèves d'une école suit une distribution normale de moyenne $\mu = 42$ et d'écart-type σ Sachant que 26.11% des élèves ont obtenu des notes supérieures à 50 Trouvez σ.

16 Si les notes dans l'examen de mathématiques suivent une distribution normale de moyenne 70 et d'écart-type 5. Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont les notes sont supérieures à 78.

17 Une usine produit des cylindres dont les longueurs suivent une distribution normale de moyenne 56 cm et d'écart- type 2 cm. Un cylindre est accepté si sa longueur est comprise entre 51 cm et 60 cm. On choisit au hasard une échantillon de1000 cylindres. Déterminez le nombre estimé de cylindres d'acceptés ?

18 Si les rayons des spirales produites par une usine suivent une distribution normale de moyenne 25 cm et d'écart- type 20 cm. Une spirale est défectueuse si son rayon est inférieur à 20 cm ou supérieure à 28 cm, On choisit au hasard une spirale. Quelle est la probabilité qu'elle est défectueuse.

19 Si les poids des animaux expérimentaux suivent une distribution normale de moyenne μ gm et d'écart- type 10 gm ; Si P (x $\geqslant$ 180) = 0,1587, Calculez la moyenne μ

20 Si les notes des étudiants dans un examen suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ, Calculez :

a la probabilité d'obtenir une note plus grand que $(\mu - \sigma)$.

b le pourcentage d'obtenir une note compris entre : $(\mu - 2\sigma)$ et $(\mu + 2\sigma)$.

21 Si les longueurs d'une certainne sorte de plants suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type 4 Si les longueurs de 10.56% de cette plante sont plus petit que 45 cm, Calculez la moyenne μ de cette plante.

22 Si les températures pendant le mois de Janvier suit une distribution normale de moyenne 16° et d'écart-type 4° Trouvez la probabilité pour que la température pendant un jour de ce mois soit :

a Compris entre 14° et 20°

b plus grand que 15°

23 Dans l'une des communautés on a trouvé que le pourcentage d'intelligence suivent une distribution normale de moyenne 104,6 et d'écart-type 6,25 . Calculez :

a le pourcentage de personnes dont le pourcentage d'intelligence est compris entre 90 et 120

b le pourcentage de personnes dont le pourcentage d'intelligence dépasse 110

Unité 5

5 - 3

Estimation Statistiques et les intervalles de confiance

Vous apprendre

- Estim la moyenne depopulation avec un point
- Estimez la moyenne depopulation avec une estimation d'intervalle de confiance

Vocabulaire de base

- La Valeur critique Paramètre
- Le Taux d'erreur Statistiques
- Estimation d'intervalle Estimation
- Estimation ponctuelle
- Estimation de l'intervalle de confiance
- Distribution normale.

Introduction:

Paramètre :

Une valeur numérique constante qui caractérise une population et qui est souvent inconnue. Comme la moyenne μ et est estimée par la moyenne de l'échantillon $\overline{x}$

Estimation :

Il s'agit d'une statistique qui dépend des valeurs de l'échantillon et reflète une valeur proche du paramètre de la population dans son ensemble et de sa distribution. Elle a deux méthodes

(1) Estimation ponctuelle

Il s'agit d'une valeur unique calculée à partir de l'échantillon qui est utilisée pour estimer un paramètre inconnu de la population.

Comme la moyenne arithmétique d'un échantillon aléatoire $\overline{x}$, qui sert à estimer une moyenne pour la population μ.

(2) Estimation d'intervalle de confiance

Il s'agit de trouver une période spécifique au cours de laquelle le paramètre de population devrait se situer dans un certain pourcentage ou avec une certaine probabilité. Cette période est appelée intervalle de confiance

Intervalle de confiance: Un intervalle de valeurs utilisé en statistique pour estimer la valeur d'un paramètre inconnu de la population.

Interprétation de l'intervalle de confiance: Un intervalle de confiance de 95% signifie que lorsqu'une expérience de la même taille est répétée 100 fois, nous sommes sûrs que 95 fois sur 100, l'estimation du paramètre se situe dans l'intervalle de confiance.

niveau de confiance

Il s'agit de la probabilité que l'intervalle de confiance contienne la vraie valeur du paramètre de population étudié et que sa valeur soit égale à (1-α), où α est le pourcentage de l'erreur dans l'estimation.

For example:

Si $\alpha = 0{,}05$, alors le niveau de confiance $= (1 - \alpha) = 0{,}95 = 95\%$

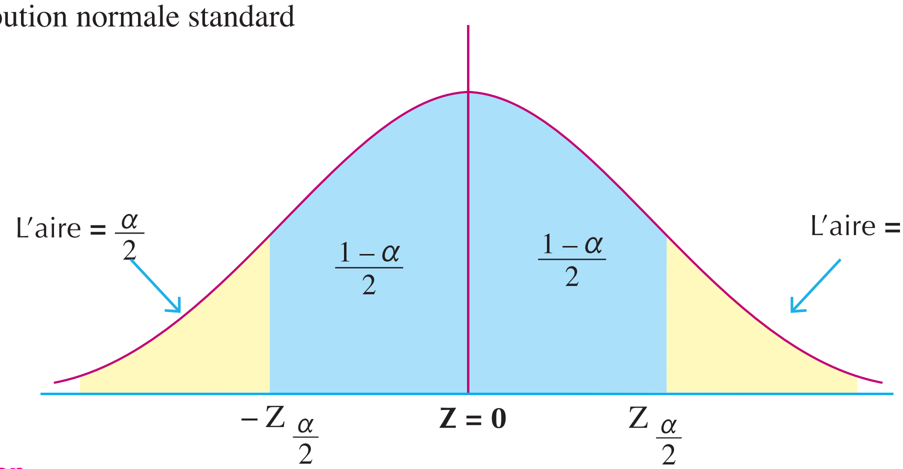
Si $\alpha = 0{,}01$, alors le niveau de confiance $= (1 - \alpha) = 0{,}99 = 99\%$

Valeur critique : $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Pour trouver la valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, nous calculons l'aire $\frac{1-\alpha}{2}$ à partir du tableau des aires sous la courbe de distribution normale standard, nous obtenons la valeur de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Example

1 Trouvez la valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ correspondant au niveau de confiance de 95 % en utilisant la distribution normale standard



Solution

$\because$ niveau de confiance 95%

$\therefore$ $1 - \alpha = 0{,}95$

$\therefore$ $\frac{1-\alpha}{2} = 0{,}95/2 = 0{,}475$ c'est à dire

i.e $P(0 < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}475$

En recherchant cette valeur dans le tableau de distribution normale standard

Tableau des aires sous la courbe normale standard

0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	☐
0,4441	0,4429	0,4418	0,4406	0,4394	0,4382	0,4370	0,4357	0,4345	0,4332	1,5
0,4545	0,4535	0,4525	0,4515	0,4505	0,4495	0,4484	0,4474	0,4463	0,4452	1,6
0,4633	0,4625	0,4616	0,4608	0,4599	0,4591	0,4582	0,4573	0,4564	0,4554	1,7
0,4706	0,4699	0,4693	0,4686	0,4678	0,4671	0,4664	0,4656	0,4649	0,4641	1,8
0,4767	0,4761	0,4756	0,4750	0,4744	0,4738	0,4732	0,4726	0,4719	0,4713	1,9

Try to solve

1 Trouvez la valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ correspondant au niveau de confiance de 99% en utilisant la distribution normale standard

Erreur d'estimation

Lorsqu'un échantillon est utilisé pour estimer la moyenne de la population, l'erreur dans l'estimation est représentée par le symbole E

À un niveau de confiance de $1 - \alpha$, qui est déterminé par la relation suivante : $\boxed{E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}}}$

Où σ est l'écart type et nest la taille de l'échantillon

Intervalle de confiance pour la population moyenne μ

Si un échantillon aléatoire de taille n est prélevé dans une population qui suit une distribution normale avec une moyenne μ et une variance $\sigma 2$

Alors $\boxed{\mu \in \left] \overline{X} - E \, ; \, \overline{X} + E \right[}$

Où $E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}}$ à niveau de confiance $(1 - \alpha)$, $\overline{x}$, est la moyenne arithmétique de l'échantillon, E est l'erreur d'estimation $\overline{x}$ Les deux limites E;¯x+E sont appelées limites inférieure et supérieure-de l'intervalle de confiance

Remarques

(1) Lors de la recherche de l'intervalle de confiance, nous nous contenterons du niveau de confiance de 95 %, qui correspond à la valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ D'après le tableau des aire sous la courbe normale standard

(2) Si la taille de l'échantillon est supérieure à 30, σ elle est inconnue, on peut considérer que l'écart type de la population σ est l'écart type de l'échantillon.

Étapes suivies pour trouver l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population μ

(1) Nous trouvons la valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ correspondant au niveau de confiance de 95%, qui est de 1,96 .

(2) Nous trouvons l'erreur d'estimation où σ est l'écart type de la population, n est la taille de l'échantillon $E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}}$

(3) Nous trouvons l'intervalle de confiance $\left] \overline{X} - E \, , \, \overline{X} + E \right[$

Example

2 A Une étude a été menée sur un échantillon de femmes concernant le rythme cardiaque. Si la taille de l'échantillon était de 49, l'écart type pour la population féminine était $\alpha = 12.5$, et la moyenne arithmétique de l'échantillon était $\overline{x} = 76.5$. En utilisant un niveau de confiance de 95 %.

a Trouver l'erreur d'estimation

b Trouvez l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population μ

c Interpréter l'intervalle de confiance

Solution

$\because$ niveau de confiance 95% $\therefore$ valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

a où $\bar{x} = 76{,}5$; $\sigma = 12{,}5$, $n = 49$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Erreur d'estimation $E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{12.5}{\sqrt{49}} \times 1{,}96 = 3.5$

b l'intervalle de confiance est

$]\ \overline{X} - E\ ;\ \overline{X} + E\ [\ =\ ]\ 76{,}5 - 3{,}5\ ;\ 76{,}5 + 3{,}5\ [\ =\ ]\ 73\ ;\ 80[$

c **Interprétation**

Lors du choix de 100 échantillons aléatoires de même taille (n = 49) et du calcul de l'intervalle de confiance pour chaque échantillon, nous nous attendons à ce que 95 intervalles contiennent la vraie valeur de la moyenne de la population μ.

Essayes de résoudre

2 Une étude a été menée sur un échantillon de femmes concernant la fréquence cardiaque. Si la taille de l'échantillon était de 64, l'écart type pour la population féminine était $\sigma=3{,}6$ et la moyenne arithmétique de l'échantillon $\bar{x} = 18.4$ En utilisant un niveau de confiance de 95 %.

a Trouver l'erreur d'estimation

b Trouvez l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population μ

c Interpréter l'intervalle de confiance

Exemple

3 La taille de l'échantillon est de 49. Si la moyenne arithmétique de l'échantillon est de 60 et sa variance est de 144, en utilisant un niveau de confiance de 95 %

a Trouver l'erreur d'estimation

b Trouvez l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population μ

c Interpréter l'intervalle de confiance

Solution

$\because$ niveau de confiance 95% $\therefore$ valeur critique $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

a où $\bar{x} = 60$; $\sigma = 12$; $n = 49$; $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Erreur d'estimation $E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{12}{\sqrt{49}} \times 1{,}96 = 3{,}36$

b l'intervalle de confiance est

$]\ \overline{X} - E\ ,\ \overline{X} + E\ [\ =\ ]\ 60 - 3{,}36\ ;\ 60 + 3{,}36\ [\ =\ ]\ 56{,}64\ ;\ 63{,}36\ [$

(c) **Interprétation**

Lors du choix de 100 échantillons aléatoires de même taille (n = 49) et du calcul de l'intervalle de confiance pour chaque échantillon, nous nous attendons à ce que 95 intervalles contiennent la vraie valeur de la moyenne de la population μ.

Exercises 5 - 3

1. UN échantillon de taille (n). Si la moyenne arithmétique de l'échantillon est de 13 et son écart type est de 12 en utilisant un niveau de confiance de 95% Si l'erreur d'estimation est égale à 2,352, alors la taille de l'échantillon est égale à... ....

(a) 25 (b) 36 (c) 50 (d) 100

2. Un échantillon de 225 personnes, avec un niveau de confiance de 95 %, si l'erreur d'estimation est égale à 0,784, alors l'écart type de l'échantillon est égal à ....

(a) 25 (b) 5 (c) 6 (d) 36

3. Si la limite supérieure de l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne d'un échantillon est égale à 7,25 avec une erreur d'estimation de 1,25, alors la moyenne de l'échantillon est égale à ....

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

4. Si l'intervalle de confiance pour la moyenne d'un échantillon est] 9.3 , 10.7 [alors la moyenne arithmétique de l'échantillon est égale à ....

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11

5. Si l'intervalle de confiance pour la moyenne d'un échantillon est] 9,02 ; 10,98 [et l'écart type de l'échantillon est égal à 4 avec un niveau de confiance de 95 %, alors la taille de l'échantillon est égale à ....

(a) 30 (b) 49 (c) 225 (d) 64

6. If Si la limite inférieure de l'intervalle de confiance pour la moyenne de l'échantillon est égale à 23,04 avec un niveau de confiance de 95 % et la taille de l'échantillon est de 625 et la moyenne arithmétique de l'échantillon est égale à 25, alors l'écart type des données pour cet échantillon est égal à ....

(a) 25 (b) 26 (c) 27 (d) 28

7. Si la limite supérieure de l'intervalle de confiance pour la moyenne d'un échantillon est de 31,96 avec un niveau de confiance de 95 % et que la moyenne arithmétique de l'échantillon est égale à 30 et que l'écart type de l'échantillon est de 7, alors la taille de l'échantillon est égale à ....

(a) 25 (b) 36 (c) 49 (d) 64

8) Si la moyenne d'un groupe statistique μ satisfait l'inégalité dans un échantillon de 36, elle satisfait l'inégalité $36 - 1.96 \times \frac{5}{6} < \mu < 36 + 1.96 \times \frac{5}{6}$ en utilisant un niveau de confiance de 95 %, alors l'écart type de l'échantillon est égal à ....

a) 1,96 b) 5 c) 6 d) 36

9) En utilisant un niveau de confiance de 95 %, nous avons calculé que la moyenne d'un échantillon de 100 personnes était de (50 ± 2) kilogrammes, alors quelle est la taille d'échantillon attendue si nous voulons réduire le taux d'erreur à 1 kilogramme tout en maintenant le même niveau de confiance et le même écart type ?

a) 200 b) 250 c) 300 d) 400

Répondez aux questions suivantes

1) Vous disposez d'un échantillon de 50 étudiants d'une université qui ont obtenu un score à un test particulier. Le score moyen de l'échantillon est de 75 et l'écart type est de 10. Calculez l'intervalle de confiance à 95 % pour le score moyen de la population

2) Un échantillon de 100 salariés a été prélevé et la durée moyenne hebdomadaire du travail a été estimée à 38 heures et l'écart type à 4 heures. Calculer l'intervalle de confiance à 95 % pour la durée moyenne hebdomadaire du travail.

3) Un échantillon de 49 étudiants a été prélevé, et leur score moyen était de 72 et l'écart type était de 6. Calculez l'intervalle de confiance à 95 % pour les scores moyens des étudiants.

4) Un échantillon de 100 clients a été prélevé et la valeur moyenne de la facture de 250 L.E et l'écart type était de 20 L.E. Calculez l'intervalle de confiance à 95 % pour la valeur moyenne de la facture.

5) La durée moyenne du sommeil dans un échantillon de 400 personnes est de 7,2 heures et l'écart type est de 1,1 heure. Calculez l'intervalle de confiance à 95 % pour le nombre d'heures de sommeil.

6) Un échantillon de 15 entreprises a été prélevé et il a été constaté que les bénéfices annuels moyens sont de 250 000 L.E et que l'écart type est de 3 000 L.E. Calculez l'intervalle de confiance à 95 % pour les bénéfices annuels moyens.