



Republique Arabe d'Egypte
Ministere de L'Education et
de L'Enseignement
Enseignement technique
Administration central des
affaires de livres

Mathématiques pures

Deuxième secondaire
Livre de l'élève deuxième semestre
Section scientifique

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Essafty

M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Révisé par

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Adel Mohamed Hamza

M. Nasser Saad Zaghlou

2025-2026

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

Révision et modification

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Akram Fawzy

M. Khaled Sayed El Shehabey

Scientifique Supervision

Conseillere en mathématiques

Mme. Manal Azkoul

Pédagogie Supervision

Dr. Akram Hassan

Avant-propos

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenu de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

- 1 Développé l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.
- 2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opérateur des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.
- 3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :
 - a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.
 - b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

- 4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maître.
- 5 Suggéré des activités variées convenables au contenu pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.
- 6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.
- ★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenu scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptées au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activités visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel comporte également des questions liées à l'environnement et son traitement.

- ★ Chaque leçon, comporte des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.
- ★ La partie illustrative de l'unité se termine par un Résumé qui comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuite Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.
- ★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.
- ★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Unité

1

Suites et Séries

1 - 1 Suites.	8
1 - 2 Séries et Symbole de la somme.	13
1 - 3 Suites arithmétiques.	17
1 - 4 Séries arithmétiques.	24
1 - 5 Suites géométriques.	31
1 - 6 Séries géométriques.	39
Exercices généraux.	

Unité

2

Arrangements et Combinai- sons

2 - 1 Principe de dénombrement.	51
2 - 2 Factorielle - Arrangements.	54
2 - 3 Combinaisons.	59
Exercices généraux.	

SOMMAIRE

Unité

3

Différentiation et Intégration

Unité

4

Trigonométrie

3-1 Taux de variation.	69
3-2 Déivation.	76
3-3 Dérivée des fonctions usuelles.	82
3-4 Dérivée des fonctions trigonométriques.	89
3-5 Applications sur la déivation.	96
3-6 Intégration.	102
Exercices généraux.	

4-1 Angles d'élévation et angles d'abaissement	115
4-2 Formules d'addition	123
4-3 Formules de duplication	130

Exercices généraux.	
---------------------	--



Unité

1

Suites et Séries

Introduction de l'unité

Fibonacci (1170 - 1250)

Fibonacci est né à Pise en Italie. Il a reçu son enseignement de base en Algérie. Il a transmis en Europe, les chiffres arabes, les puissances algébriques et le système décimal utilisé actuellement et préféré au système romain répandu en Europe à cette époque. L'une des questions célèbres de ses œuvres est la suite des nombres suivants : (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,.....)

cette suite est connue par le nom de Fibonacci jusqu'au temps actuel.

Dans cette suite, on remarque que, chaque nombre à partir du troisième terme est la somme des deux termes qui le précédent. On peut déterminer la règle de cette suite par la formule suivante :

$$t_{n+2} = t_n + t_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^+$$

La liste des nombres de Fibonacci a été utilisée pour l'analyse des marchés financiers et dans des algorithmes informatiques comme la technique de Fibonacci qui est une méthode de recherche d'un tableau trié en utilisant un diviser et conquérir algorithme qui rétrécit emplacements possibles à l'aide de nombres de Fibonacci, cette technique est également utilisée dans des affaires biologiques comme les tiges des arbres et l'arrangement des feuilles sur la tige ainsi que l'arrangement de cône de l'arbre de pine.....etc

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître le concept de suite
- Distinguer le concept de suite et celui de la série.
- Reconnaître la suite arithmétique
- Déduire le terme général d'une suite arithmétique et le modéliser sous plusieurs formes.
- Déterminer la moyenne d'une suite arithmétique
- Reconnaître la série finie et la série infinie
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite arithmétique sous plusieurs formes.
- Reconnaître la suite géométrique
- Déduire le terme général d'une suite géométrique
- Déterminer la moyenne d'une suite géométrique
- Déduire la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométriques de deux nombres positifs distincts.

- Calculer la somme de quelques termes d'une suite géométrique.
- Calculer la somme d'une suite géométrique infinie.
- Transformer la fraction décimale en fraction ordinaire
- Modéliser des problèmes quotidiens en utilisant les suites arithmétiques et les suites géométriques comme dans le cas de la population.
- Appliquer les séries dans des problèmes de la vie courante
- Utiliser l'ordinateur pour résoudre des problèmes sur les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Vocabulaires de base

■ Fonction	■ Série	■ Suite géométrique
■ terme	■ Symbole de la somme	■ Raison de la suite géométrique
■ Suite finie	■ Suite arithmétique	■ Moyennes géométriques
■ Suite infinie	■ Raison de la suite arithmétique	■ Série géométrique
■ Suite croissante	■ Moyennes arithmétiques	■ Série géométrique infinie
■ Suite décroissante	■ Série arithmétique	■ Infini

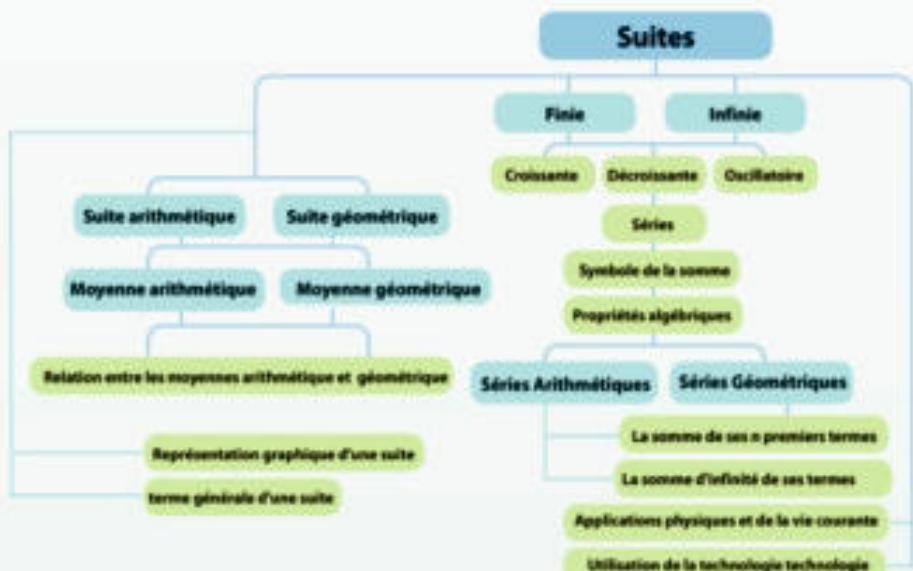
Leçons de l'unité

- Leçon (1 - 1): Suites.
- Leçon (1 - 2): Séries et Symbole de la somme.
- Leçon (1 - 3): Suites arithmétiques .
- Leçon (1 - 4): Suites arithmétiques .
- Leçon (1 - 5): Suites géométriques.
- Leçon (1 - 6): Suites géométriques

Aide pédagogique

Calculatrice scientifique - Logiciel de graphisme.

Organigramme de l'unité



Allez apprendre

- La définition de la suite
- La suite finie et la suite infinie
- Le terme général de la suite
- La représentation graphique d'une suite
- La série et le symbole de la somme

Vocabulaires de base

- Suite
- Suite finie
- Suite infinie
- terme
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Suite constante

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Préliminaire:

Vous avez déjà étudié les patterns comme (1; 3; 5; 7; ...). On sait que le pattern numérique est arrangement d'un ensemble des nombres réels. Dans cette unité, nous allons aborder les patterns d'une étude plus approfondie

**Réfréchissez et discutez**

Etudiez le pattern suivant puis répondez aux questions (1; 4; 7; 10; ...)

- Quelle est la relation entre un terme et le terme qui lui précède ?
- Pouvez-vous déterminer les deux termes suivants dans ce pattern ?
- Pouvez-vous trouver le neuvième terme dans ce pattern sans écrire tous les termes précédents ?

**A apprendre****Définition****1**

La suite est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble (ou un sous-ensemble) des nombres entiers relatifs positifs \mathbb{Z}^+ . Son ensemble image est un sous-ensemble de l'ensemble de nombres réels \mathbb{R} . On note le premier terme par t_1 , le deuxième terme par t_2 , le troisième par t_3 ... etc. le terme général par t_n . On peut exprimer la suite en écrivant ses termes entre parenthèses comme ce qui suit :

$(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$

Elle est notée (t_n) .

Définition :**Suite finie et Suite infinie**

Une suite est finie si le nombre de ses termes est fini (**c.-à-d. on peut les compter**) et une suite est infinie si le nombre de ses termes est infini (**une infinité de termes qu'on ne peut pas les compter**)

Rappelez-vous

La fonction est une relation entre deux ensemble X et Y tels que chaque élément de X apparaît une et une seule fois comme première projection d'un couple du graphe de la relation

Remarques

- Les termes de la suite sont les images des éléments de l'ensemble de définition de la suite..
- Le symbole (t_n) représente une suite tandis que le symbole t_n représente le n^{th} terme.
- L'ordre des termes de la suite est indispensable tandis que l'ordre des éléments de l'ensemble n'a pas d'importance.
- Il ne faut pas répéter un même élément plusieurs fois quand on écrit liste d'un ensemble tandis que les termes de la suite peuvent être répétés .


Exemple

1 Déterminez les suites qui ont le n ème terme donné par la formule suivante:

a $t_n = n^2 - 1$ (cinq termes à partir du premier terme)

b $t_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (une infinité de termes à partir du premier terme)


Solution

a Posons $n = 1$ alors $t_1 = (1)^2 - 1 = 0$, Posons $n = 2$ alors $t_2 = (2)^2 - 1 = 3$,

Posons $n = 3$ alors $t_3 = (3)^2 - 1 = 8$, Posons $n = 4$ alors $t_4 = (4)^2 - 1 = 15$,

Posons $n = 5$ alors $t_5 = (5)^2 - 1 = 24$

La suite est : (0 ; 3 ; 8 ; 15 ; 24)

b Posons $n = 1$ alors $t_1 = \frac{(-1)^1}{2 \times 1 + 1} = \frac{-1}{3}$, Posons $n = 2$ alors $t_2 = \frac{(-1)^2}{2 \times 2 + 1} = \frac{1}{5}$,

Posons $n = 3$ alors $t_3 = \frac{(-1)^3}{2 \times 3 + 1} = \frac{-1}{7}$, Posons $n = 4$ alors $t_4 = \frac{(-1)^4}{2 \times 4 + 1} = \frac{1}{9}$,

Posons $n = 5$ alors $t_5 = \frac{(-1)^5}{2 \times 5 + 1} = \frac{-1}{11}$

La suite est : ($\frac{-1}{3}$ **;** $\frac{1}{5}$ **;** $\frac{-1}{7}$ **;** $\frac{1}{9}$ **;** $\frac{-1}{11}$ **; ...)**. Dans ce cas la suite est appelée une suite oscillatoire (l'un de ses termes est positif et l'autre est négatif ou réciproquement).

Terme général d'une suite:

Le terme général d'une suite (appelé le n ème terme) s'écrit t_n où t_n est l'image de l'élément du rang n dans l'ensemble de définition de la suite, parfois on peut le déterminer à partir de quelques termes donnés de la suite.

Par exemple:

➤ Le terme général de la suite de nombres pairs : (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; ...) est $t_n = 2n$

➤ Le terme général de la suite de nombres impairs : (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...) est $t_n = 2n - 1$

➤ Le terme général de la suite : ($\frac{-1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{-1}{5}$; $\frac{1}{6}$; ...) est $t_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$


Exemple

2 Ecrivez les cinq premiers termes de la suite (t_n) définie par:

$t_1 = 2$ et $t_{n+1} = 2t_n$ pour $n \geq 1$

Solution

Par substitution respective de n par les valeurs : 1; 2; 3; 4; 5 dans la relation. $t_{n+1} = 2t_n$

Posons $n = 1$ $t_2 = 2t_1$ **d'où** $t_2 = 2 \times 2 = 4 = 2^2$

(Par substitution de $t_1 = 2$)

Posons $n = 2$ $t_3 = 2t_2$ **d'où** $t_3 = 2 \times 4 = 8 = 2^3$ (Par substitution de $t_2 = 4$)

Posons $n = 3$ $t_4 = 2t_3$ **d'où** $t_4 = 2 \times 8 = 16 = 2^4$ (Par substitution de $t_3 = 8$)

Posons $n = 4$ $t_5 = 2t_4$ **d'où** $t_5 = 2 \times 16 = 32 = 2^5$ (Par substitution de $t_4 = 16$)

Les cinq premiers termes de la suite sont : (2; 4; 8; 16; 32)

Le terme général de la suite (t_n) est: $t_n = 2^n$

Enrichissez vos connaissances

Quelques suites n'ont pas de règle définie comme la suite des nombres premiers (2; 3; 5; 7; ...)

Réfléchissez:

1- Comment peut-on vérifier la solution précédente ?

P Essayer de résoudre

2 Ecrivez les six premiers termes de la suite (t_n) définie par: $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ pour $n \geq 1$, $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$

Suite croissante et Suite décroissante:

Observez les suites suivantes :

1) (-5; -1; 3; 7; 11; 15;)

(Que remarquez-vous ?)

2) (4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$;)

(Que remarquez-vous ?)

➤ **Dans la première Suite :** $-1 > -5$ d'où $t_2 > t_1$, $3 > -1$ d'où $t_3 > t_2$... etc. pour les autres termes. C'est-à-dire que chacun des termes est plus grand que son terme précédent.

➤ **Dans la deuxième Suite :** $2 < 4$ d'où $t_2 < t_1$, $1 < 2$ d'où $t_3 < t_2$... etc. pour les autres termes. C'est-à-dire que chacun des termes est plus petit que son terme précédent.

Définition:

➤ La suite (t_n) est **croissante** si $t_{n+1} > t_n$

➤ La suite (t_n) est **décroissante** si $t_{n+1} < t_n$

Enrichissez vos connaissances

La suite constante : est une suite dont tous les termes sont égaux. C'est à dire que $t_n = a$. Elle peut être finie ou infinie

Exemple

3 Parmi les suites (t_n) déterminez celle qui est croissante et celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante :

a) $t_n = 2n + 3$

b) $t_n = \frac{1}{3n - 1}$

c) $t_n = \frac{(-1)^n}{2n} + 4$

Solution**a** On trouve t_{n+1} comme suivant:

$$t_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$$

Puis, on trouve: $t_{n+1} - t_n$

$$t_{n+1} - t_n = (2n+5) - (2n+3) = 2 > 0$$

 $t_{n+1} > t_n$ pour toutes les valeurs de n , cela veut dire que la suite est croissante.**b** On trouve t_{n+1} comme suivant :

$$t_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)-1} = \frac{1}{3n+2}$$

Puis, on trouve: $t_{n+1} - t_n$

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-3n-2}{(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{-3}{(3n+2)(3n+1)} < 0 \end{aligned}$$

 $t_{n+1} < t_n$ pour toutes les valeurs de n , cela veut dire que la suite est décroissante.

c $t_{n+1} - t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{(-1)^n}{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

$$= (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \right] = (-1)^{n+1} \left[\frac{n+n+1}{2n(n+1)} \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)} \right]$$

Cette expression est négative lorsque n est impair et positive lorsque n est pair, cela veut dire que la suite n'est ni croissante ni décroissante.**Exercices (1 - 1)****Complétez:**

- 1 La suite est une fonction dont l'ensemble de définition est _____ ou _____
- 2 Le septième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2n^2 + 3$ est _____
- 3 Dans la suite (t_n) où $t_{n+1} = n t_n$, pour $n \geq 1$. Si $t_1 = 1$ alors $t_2 =$ _____
- 4 Le n ième terme de la suite $(-1; 4; -9; 16; \dots)$ est _____

Complétez ce qui suit en utilisant l'un des symboles : $>$, $<$ ou $=$

- 5 Une suite est décroissante si : $t_{n+1} \text{ _____ } t_n$ pour tout $n \geq 1$
- 6 Une suite est constante si : $t_{n+1} \text{ _____ } t_n$ pour tout $n \geq 1$
- 7 Une suite est croissante si : $t_{n+1} \text{ _____ } t_n$ pour tout $n \geq 1$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

8 La suite dont le n ème terme $t_n = \frac{2}{n} - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$ est une suite :

- a croissante
- b décroissante
- c constante
- d oscillatoire

9 Le terme général de la suite $((2 \times 3), (3 \times 4), (4 \times 5), (5 \times 6), \dots)$ est :

- a $(n - 1)(n + 1)$
- b $n(n + 1)$
- c $2n(n + 1)$
- d $(n + 1)(n + 2)$

Répondez aux questions suivantes :

10 Déterminez parmi les suites suivantes celle qui est finie et celle qui est infinie :

- a $(1; 4; 7; 11; \dots)$
- b $(3; 5; 7; 9; \dots; 21)$
- c La suite (t_n) où $t_n = n^2 - 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$
- d La suite (t_n) où $t_n = \frac{2}{n} + 3$, $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

11 Dans chacun des cas suivant, écrivez les cinq premiers termes de la suite dont le terme général est donné par la règle :

- a $t_n = n + n^2$
- b $t_n = \frac{1}{2n - 5}$
- c $t_n = (-1)^n (n - 2)^2$

12 Ecrivez le terme général de chacune des suites suivante :

- a $(2; 5; 8; 11; \dots)$
- b $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots)$
- c $(1; 8; 27; 64; \dots)$
- d $(1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \dots)$

13 Parmi les suites (t_n) déterminez celle qui est croissante et celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante :

- a $t_n = 3n + 5$
- b $t_n = \frac{1}{n} + 2$

Séries et Symbole de la somme

Allez apprendre

- Notion de la série
- Série finie
- Série infinie
- Propriétés algébrique de la somme

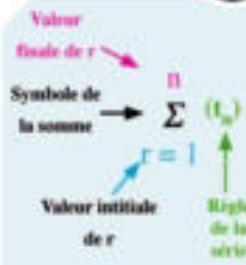
Vocabulaires de base

- Série
- Série finie
- Série infinie
- Symbol de la somme

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Rappelez-vous



Dans notre langage quotidien, on utilise les deux mots « suite » et « série » comme deux mots synonymes. Malgré la forte ressemblance de deux mots dans le langage courant, il existe une différence dans le sens de deux mots en mathématiques, le premier exprime une liste ordonnée des nombres tandis que la série est l'opération de l'addition des termes de la suite.

For Exemple: $(2 ; 5 ; 8 ; 11 ; \dots)$ est une suite, mais $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$ est la série reliée par la suite précédente. On peut utiliser le symbole Σ qui se lit (sigma) pour écrire la série en forme simple.



A apprendre

Définition

Série finie

s'écrit sous la forme: $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_r + \dots + t_n$

Où n est un nombre entier, t_n est le terme du rang n dans la série la valeur numérique de la série finie est appelée la somme des termes de la suite correspondante.

par exemple la série finie: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r + \dots + a_n$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{r=1}^n (a_r)$ qui se lit la somme a_r de $r = 1$ à $r = n$

4

Exemple

1 Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis calculez la somme.

a $\sum_{r=1}^4 (r^2)$

b $\sum_{r=1}^7 (2r - 1)$

c $\sum_{r=1}^n \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r}\right)$

Solution

a $\sum_{r=1}^4 (r^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

b $\sum_{r=1}^7 (2r - 1) = (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1) + (2 \times 5 - 1) + (2 \times 6 - 1) + (2 \times 7 - 1)$
 $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

c $\sum_{r=1}^n \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$
 $= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$
 $= \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1 - n - 1}{n+1} = \frac{-n}{n+1}$

2 Essayer de résoudre

1 Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis calculez la somme.

a $\sum_{r=1}^5 (1 + r^2)$

b $\sum_{r=1}^9 (3r + 2)$

c $\sum_{r=1}^n \left(\frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+1} \right)$

Série infinie

On ne peut pas compter les nombres de termes de la série infinie, par exemple la série: $-3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots$ s'écrit sous la forme of $\sum_{r=1}^{\infty} (-3)^r$.

Le symbole ∞ exprime l'infini de la somme.

Exemple

2 Utilisez le symbole de la somme Σ pour exprimer la série: $2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots$

Solution

\therefore Le terme général de la suite est: $t_r = (r+1)(r+2)$ pour $r \in \mathbb{Z}^*$

$$\therefore 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} (r+1)(r+2)$$

2 Essayer de résoudre

2 Utilisez le symbole de la somme Σ pour exprimer la série:

$$1 \times 2 \times 3 + 3 \times 4 \times 5 + 5 \times 6 \times 7 + \dots$$

Propriétés algébrique de la somme:

1- Soient (t_r) et (e_r) deux suites. Pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $C \in \mathbb{R}$, on a:

a $\sum_{r=1}^n C = C n$

b $\sum_{r=1}^n ct_r = c \sum_{r=1}^n t_r$

c $\sum_{r=1}^n (t_r \pm e_r) = \sum_{r=1}^n t_r \pm \sum_{r=1}^n e_r$

2- $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exemple

3 Calculez par de méthodes différentes $\sum_{r=1}^4 (3 - 2r + r^2)$

Solution**1- Première méthode (Par substitution)**

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 (3 - 2r + r^2) &= (3 - 2 \times 1 + 1^2) + (3 - 2 \times 2 + 2^2) + (3 - 2 \times 3 + 3^2) + (3 - 2 \times 4 + 4^2) \\ &= 2 + 3 + 6 + 11 = 22 \end{aligned}$$

2- Deuxième méthode (En utilisant les propriétés de la somme)

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=1}^4 (3 - 2r + r^2) &= \sum_{r=1}^4 3 - 2 \sum_{r=1}^4 r + \sum_{r=1}^4 r^2 \\
 &= 3 \times 4 - 2 \times \frac{4(4+1)}{2} + \frac{4(4+1)(2 \times 4 + 1)}{6} \\
 &= 12 - 2 \times \frac{4 \times 5}{2} + \frac{4 \times 5 \times 9}{6} \\
 &= 12 - 20 + 30 = 22
 \end{aligned}$$



Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer le résultat d'une série:

- On appuie sur la touche Σ suivant la couleur de la touche d'opération.
- On écrit la règle de la série $(3 - 2r + r^2)$ comme suivant:

3 - 2 ALPHA () () * ALPHA () () x^2

- On utilise la touche (REPLAY) pour déplacer le curseur comme la figure:
- On écrit le rang du dernier terme de la série 4 en haut
- On écrit le rang du terme du début qui est dans l'exemple 1 en bas
- On appuie sur la touche = pour afficher le résultat 22.



P Essayer de résoudre

3 Calculez par de méthodes différentes $\sum_{r=1}^5 (2r^2 - 3r + 5)$ sachant que:

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercices (1 - 2)

1 Complétez ce qui suit:

- a En utilisant le symbole de la somme, la suite $5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 50$ s'écrit _____
- b En utilisant le symbole de la somme, la suite $7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 3 + \dots + 7 \times 20$ s'écrit _____
- c En utilisant le symbole de la somme, la suite $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ s'écrit _____

2 Ecrivez les séries suivantes en utilisant le symbole de la somme:

a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 20$	b $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 60$
c $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21$	d $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

3 Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes:

a $\sum_{r=1}^5 (3r - 2)$	b $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^r - 1 \right)$
---------------------------	-------------------------------------------------------------------------

4 Sachant que $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, Calculez la valeur de chacun de ce qui suit en utilisant le symbole de la somme :

a $\sum_{r=8}^{12} 2(r+5)$ b $\sum_{r=5}^8 (2r^2 - 3r)$

5 **En lien avec l'exploitation minière:** Une mine d'or a produit 4200 kg d'or le premier an. La production diminue 10 % annuellement. Ecrivez les cinq premiers termes de la suite de production, puis trouvez leur somme.

Suites arithmétiques

Allez apprendre

- La définition de la suite arithmétique
- Représentation graphique de la suite arithmétique
- Le n ème terme de la suite arithmétique
- Détermination de la suite arithmétique
- Définition de la moyenne arithmétique
- Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres

Doaa a commencé la lecture d'un roman, elle a lu 10 pages au premier jour, 15 pages au deuxième jour et 20 pages au troisième jour. Si elle a continué à cette façon, alors le nombre de pages lues chaque jour représente une suite qui est: (10 ; 15 ; 20 ; 25 ; ...)



Que remarquez-vous dans cette suite ?

Définition

1

Suite arithmétique:

C'est une suite dont la différence entre un terme et le terme précédent est une valeur constante qui est appelée la raison de la suite et on la note (r).

C'est-à-dire: $r = t_{n+1} - t_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

Vocabulaires de base

- Modèle
- Suite arithmétique
- n ème terme
- la raison d'une suite arithmétique
- le rang d'un terme
- la moyenne arithmétique

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Enrichissez vos connaissances

Suite Harmonique Une suite est dite Harmonique si les inverses de ces termes sont une suite arithmétique, comme $(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \dots)$

Exemple

1 Laquelle parmi les suites suivantes est une suite arithmétique? Pourquoi?

- a (7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19)
- b (27 ; 23 ; 19 ; 15 ; 11 ; ...)
- c $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6})$

Solution

a $\because t_2 - t_1 = 10 - 7 = 3$, $t_3 - t_2 = 13 - 10 = 3$, ...
 $\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 3$
 \therefore la suite est arithmétique de raison = 3

b $\because t_2 - t_1 = 23 - 27 = -4$, $t_3 - t_2 = 19 - 23 = -4$, ...
 $\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = -4$
 \therefore la suite est arithmétique de raison = -4

c $\because t_2 - t_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, $t_3 - t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$
 $\therefore t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$
 \therefore la suite n'est pas arithmétique

2 Essayer de résoudre

1 Laquelle parmi les suites suivantes est arithmétique? Pourquoi?

a (38 ; 33 ; 28 ; 23 ; 18; ...) b (- 14 ; - 8 ; - 2 ; 4 ; 10) c (23 ; 28 ; 33 ; 38 ; 42)

Exemple

2 Déterminez laquelle parmi les suites dont le n ème terme est donné ci-après : est une suite arithmétique et laquelle n'est pas une suite arithmétique, puis déterminez la raison dans le cas de la suite arithmétique.

a $t_n = 2n + 3$

b $t_n = \frac{3}{n} + 2$

Solution

a $\because t_{n+1} - t_n = (2(n+1) + 3) - (2n + 3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$

\therefore la suite est arithmétique de raison 2

b $\because t_{n+1} - t_n = \left(\frac{3}{n+1} + 2\right) - \left(\frac{3}{n} + 2\right)$

$$= \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{3n - 3n - 3}{n(n+1)} = \frac{-3}{n(n+1)}$$

n'est pas constante.

\therefore La suite n'est pas arithmétique.

2 Essayer de résoudre

2 Déterminez laquelle parmi les suites dont le n ème terme est donné ci-après : est une suite arithmétique et laquelle n'est pas une suite arithmétique, puis déterminez la raison dans le cas de la suite arithmétique.

a $t_n = 5 - 3n$

b $t_n = (n+1)^2$

De ce que précède, on déduit que:

- La relations entre les deux variables n et t_n et $t_n = rn + b$ où b et r sont constants r est la raison de la suite.
- Une suite (t_n) est: croissante si $r > 0$, et décroissante si $r < 0$

Utilisé la calculatrice scientifique pour afficher une suite arithmétique:

Pour obtenir la suite arithmétique dont ($a = 10$ et $r = -3$):

- On insère la valeur de a (le nombre 10) puis on appuie sur la touche ensuite la valeur de r en appuyant sur la touche suivie du nombre 3 et la touche pour afficher le deuxième terme. Chaque fois qu'on appuie sur la touche on obtient le terme suivant.



Réflexion critique:

1- Que prévoyez-vous lorsque la raison de la suite arithmétique (t_n) est nulle ($r = 0$)? Expliquez votre réponse.

P Essayer de résoudre

3 Soit la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$:

- Démontrez que (t_n) est une suite arithmétique et trouvez sa raison.
- Démontrez que (t_n) une suite croissante .
- Trouvez le quinzième terme de la suite
- Trouvez la valeur de n lorsque $t_n = 85$

Le nième terme de la suite arithmétique:

De la définition (1), on peut déduire le nième terme de la suite arithmétique (t_n) de premier terme a et de raison r comme suivant:

$t_1 = a$, $t_2 = a + r$ et $t_3 = a + 2r$ ainsi de suite, on déduit le nième terme est:

$$t_n = a + (n-1)r \quad \text{et si } t_n = l \quad (\text{où } l \text{ est la dernier terme, alors } l = a + (n-1)r)$$

Exemple

4 Soit la suite arithmétique (13 ; 16 ; 19 ; ; 100).

- Déterminez le dixième terme.
- Déterminez le nombre de termes de la suite.

Solution

∴ La suite est arithmétique

$$\therefore a = 13, r = 16 - 13 = 3$$

a ∵ $t_n = a + (n-1)r$ $\therefore t_{10} = 13 + (10-1) \times 3$
 $= 13 + 9 \times 3 = 13 + 27 = 40$

b On veut déterminer la valeur de n si $t_n = 100$

$$\therefore t_n = a + (n-1)r \quad \therefore 100 = 13 + (n-1) \times 3$$

$$\therefore 100 = 13 + 3n - 3 \quad \text{D'où } 3n = 100 - 10 = 90 \quad \therefore n = 30$$

2 **Essayer de résoudre**

4 Trouvez le nombre de termes de la suite arithmétique (7 ; 9 ; 11 ; ; 65) puis trouvez la valeur de dixième terme de la fin.

Déterminer la suite arithmétique:

On peut déterminer la suite arithmétique étant donné le premier terme et la raison de la suite.

Exemple

5 Déterminez la suite arithmétique t_n qui a $t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$

Solution

$$t_7 = 18 \text{ et } t_{15} = 34$$

$$\therefore t_n = a + (n - 1)r$$

D'où $a + 6r = 18$. De même $a + 14r = 34$

$$\therefore 8r = 16$$

$$r = 2$$

$$\therefore a + 6 \times 2 = 18$$

$$\therefore a = 18 - 12 = 6$$

On sait que

Si on résout le système, on obtient

Divisant par 8

par substitution dans la première équation

pour trouver le n ème terme , on substitue dans le formule: $t_n = a + (n - 1)r$ par les valeurs de a et r .

$$t_n = 6 + (n - 1) \times 2 = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$$

le premier terme est 6 le raison est 2 et le n ème $2n + 4$

2 **Essayer de résoudre**

5 Déterminez la suite arithmétique (t_n) dont $t_6 = 17$; $t_3 + t_{10} = 37$.

Moyennes arithmétiques:

Lorsqu'on a deux termes non-consécutifs d'une suite arithmétique, les termes situés entre ces termes sont appelés les moyennes arithmétiques. On peut utiliser cette notion pour déterminer les termes manqués situés entre deux termes non-consécutifs d'une suite arithmétique.

Définition

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c où $b - a = c - b$,

D'où $2b = a + c$ alors $b = \frac{a+c}{2}$ **pour celà :** $(a; \frac{a+c}{2}; c)$ **est une suite arithmétique.**

On peut insérer quelques moyennes arithmétiques: x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n entre les deux nombres a et b de sorte que $(a ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n ; b)$ **soit une suite arithmétique.**

2

Expression orale: Quelle relation existe-t-elle entre le nombre des moyennes et le nombre de termes de la suite ?

Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres:



Exemple

6) Insérez 5 moyennes arithmétiques entre 6 et 48.



1- On détermine le nombre de termes de la suite.

Il y'a cinq moyennes entre le premier et le dernier, termes d'une suite arithmétique, alors le nombre de termes de la suite $n = 2 + 5 = 7$

2- On détermine la valeur de r

le n ième terme de la suite arithmétique: $t_n = a + (n - 1) r$

Par substitution de : $a = 6$, $t_n = 48$, $n = 7$

$48 = 6 + (7 - 1) r$ Alors: $6r = 42$

On divise le deux membres par 6 $r = 7$

3- On utilise la valeur de r pour trouver les moyennes arithmétiques

(6) ; 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41 ; (48)

+7 ; +7 ; +7 ; +7 ; +7 ; +7

Les moyennes sont: 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41



Essayer de résoudre

6) Insérez 7 moyennes arithmétiques entre -24 et 16



Déterminez laquelle des suites suivantes est arithmétique et laquelle est non arithmétique, puis déterminez la raison de la suite arithmétique:

1) (34 ; 30 ; 26 ; 22 ; 18)

2) (7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27)

3) (-12 ; -18 ; -24 ; -30 ; -36)

Complétez ce qui suit :

4) Le septième terme de la suite arithmétique (2 ; 5 ; 8 ; ...) est _____

5) Le onzième terme de la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$ est _____

6) Le n ième terme de la suite arithmétique (81 ; 77 ; 73 ; ...) est _____

7) La moyenne arithmétique de deux nombres 8 et 12 est _____

8) Si la moyenne arithmétique de deux nombres x et 26 est 21, alors x est égale à _____

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

9 Les suites suivantes sont toutes arithmétiques sauf la suite :

a $(3; 7; 11; 15; \dots)$

b $(-11; -15; -19; -23; \dots)$

c $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots)$

d $(\frac{21}{5}; \frac{16}{5}; \frac{11}{5}; \frac{6}{5}; \dots)$

10 La suite arithmétique parmi les suites suivantes est :

a $(t_n) = (\frac{n+1}{n})$

b $(t_n) = (n+1)^2$

c $(t_n) = (\frac{3}{n}(n+2))$

d

$(t_n) = (\frac{n^3-1}{n^2+n+1})$

11 Si (t_n) est une suite arithmétique où $t_n = 3n + 2$, alors la moyenne arithmétique de t_5 et t_{11} est :

a 8

b 16

c 22

d 26

12 Si $2a + 1$, $5a - 1$ et $6a + 3$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors a est égal à.

a 1

b 2

c 3

d 5

13 Si a et b sont deux moyennes arithmétiques entre x et y , alors : $\frac{y-x}{b-a}$ est égal à :

a 2

b 3

c 4

d 6

Répondez aux questions suivantes:

14 Déterminez le nombre de termes de la suite arithmétique $(2; 5; 8; \dots; 80)$.

15 Soit la suite $(63; 59; 55; \dots; -133)$. Trouvez :

a la valeur du septième terme

b le nombre des termes de la suite.

16 Trouvez le rang et la valeur du premier terme négatif de la suite arithmétique $(67; 64; 61; \dots)$

17 Trouvez le rang et la valeur du premier terme supérieur à 180 de la suite arithmétique : $(23; 28; 33; 38; \dots)$.

18 Ecrivez les trois premiers termes de la suite $(t_n) = (2 + 5n)$, puis trouvez le rang du terme égale à 72 ; ensuite le rang du premier terme dont la valeur est supérieure à 100.

19 Une suite arithmétique dont le premier terme = 3 , $t_n = 39$ et $t_{2n} = 79$. Quelle est la valeur de n?
Déterminez la suite.

20 Déterminez la suite arithmétique dont le cinquième terme = 21 , et son dixième terme est égal au triple son deuxième.

21 (t_n) est une suite arithmétique dont $t_1 + t_2 = 9$ et $t_5 = 22$, trouvez la suite.

22 Déterminez la suite arithmétique dont le sixième terme = 20 et le rapport entre son quatrième et son dixième termes est 4 : 7.

23 Une suite arithmétique dont le quatrième terme = 11; la somme de son cinquième et son neuvième termes est égale à 40, Déterminez la suite puis le rang du terme dont la valeur est 152.

24 Déterminez la suite arithmétique dont la moyenne entre le troisième terme et le septième terme est égal à 19 et son dixième terme dépasse de 2 au double de son quatrième terme.

25 Soit (t_n) une suite arithmétique dont : $t_2 + t_4 = 42$ et $t_3 \times t_5 = 315$, trouvez la suite.

26 Si $(8 ; a ; \dots ; b ; 68)$ est une suite arithmétique de 16 termes, déterminez les valeurs de a et celle de b.

27 Si $36 ; a ; 24 ; b$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, déterminez les valeurs de a et de b.

28 Si la moyenne arithmétique entre a et b est 8, et la moyenne arithmétique entre $4a$ et $2b$ est 20 ; déterminez les valeurs de a et celle de b.

29 Insérez 16 moyennes arithmétiques entre 27 et - 24.

30 Le neuvième terme d'une suite arithmétique est 25 et la moyenne arithmétique entre ses troisième et cinquième termes est 10. trouvez la suite.

31 On a insérer des moyennes arithmétiques entre 1 et 17 ; le septième moyenne est égale au triple de deuxième moyenne. Calculez le nombre de ces moyennes.

Série arithmétiques

1 - 4

Somme d'une série arithmétique

Le savant allemand Carl Gauss a fait une surprise à son maître quand il avait sept ans, il a mentalement calculé la somme des nombres de 1 à 100. Il remarque que la somme est égale à 50 pairs du nombre dont la somme est 101 qui est égale à $50 \times 101 = 5050$. Pouvez-vous mentalement déterminer la somme de 1 à 20?



Savant allemand-Carl Gauss 1777 - 1855



A apprendre

Somme de n premiers termes d'une série arithmétique

Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant son premier et son dernier terme?

Soit une série arithmétique de premier terme a , de raison r , de dernier terme ℓ , et le nombre de ses termes n . La somme de n termes de cette série noté S_n où:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (\ell - d) + \ell \quad (1)$$

On peut aussi écrire la somme par la façon suivante:

$$S_n = \ell + (\ell - d) + (\ell - 2d) + \dots + (a + d) + a \quad (2)$$

D'après (1) et (2) par addition, on obtient:

$$2S_n = (a + \ell) + (a + \ell) + (a + \ell) + \dots + (a + \ell) \text{ à } n \text{ fois.}$$

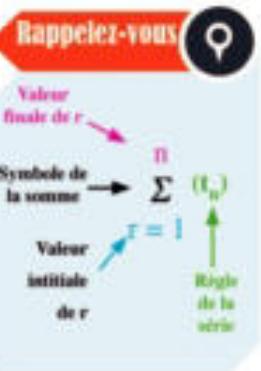
D'où $2S_n = n(a + \ell)$ en divisant par 2

$$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$$



Exemple Utiliser le symbole de la somme Σ

1 Trouvez $\sum_{r=5}^{24} (4r - 3)$



Allez apprendre

- Notion de la série arithmétique
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant ses premier et dernier termes.
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant son premier terme et sa raison

Vocabulaires de base

- Série arithmétique
- Symbol de la somme

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Solution

$$n = 24 - 5 + 1 = 20$$

$$t_n = 4n - 3$$

$$t_5 = 4 \times 5 - 3 = 17, \quad t_{24} = 4 \times 24 - 3 = 93$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (17 + 93) = 1100$$

On trouve le nombre de termes de la suite**Le n ème terme de la suite****Formule de la somme****par substitution de $a = 17$, $l = 93$, $n = 20$** **P Essayer de résoudre****1** Trouvez:

$$\mathbf{a} \quad \sum_{K=1}^{20} (6K + 5)$$

$$\mathbf{b} \quad \sum_{m=7}^{32} (12 - 5m)$$

Exemple**2** Calculez la somme de la série arithmétique $2 + 5 + 8 + \dots + 62$ **Solution**

$$l = a + (n - 1)r$$

$$62 = 2 + (n - 1) \times 3$$

$$\mathbf{D'où:} \quad 3n - 3 + 2 = 62$$

$$3n - 1 = 62$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

$$S_{21} = \frac{21}{2} (2 + 62) = 672$$

Le n ème terme de la suite**par substitution de $a = 2$, $b = 3$ et $n = 62$** **alors $n = 21$** **Formule de la somme****par substitution de $a = 2$, $b = 21$, $n = 62$** **P Essayer de résoudre****2** Calculez:**a** La somme de la série arithmétique $89 + 85 + 81 + \dots + 33$ **b** Le nombre des termes de la suite arithmétique dont le premier terme est égal à 3, son dernier terme est égal à 39 et la somme de n premiers termes est égale à 210.**Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant le premier et la raison.**On sait que $l = a + (n - 1)r$ et $S_n = \frac{n}{2} (a + l)$

par substitution de la première relation à la deuxième, alors :

$$S_n = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1)r]$$

$$\mathbf{alors} \quad S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)r]$$


Exemple

3 Dans la série arithmétique $5 + 8 + 11 + \dots$ trouvez:

- La somme de 20 premiers termes
- La somme de 10 termes à partir du septième terme
- La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}


Solution

$$a = 5, \quad r = 8 - 5 = 3$$

a $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r]$
 $S_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 5 + (20-1) \times 3]$
 $S_n = 10(10 + 19 \times 3)$
 $= 10 \times 67 = 670$

La formule de la somme
par substitution de $a = 5$ et $r = 8 - 5 = 3$
par le calcul

b $t_n = a + (n-1)r$ **le n ème terme de la suite**
 $t_7 = a + 6r$
 $= 5 + 6 \times 3 = 23$
 $S_{10} = \frac{10}{2} \times [2t_7 + (10-1) \times 3]$
 $S_{10} = 5 \times [2 \times 23 + 27]$
 $= 5 \times 73 = 365$

par substitution de $a = 5$, $r = 3$ et $n = 7$
par substitution dans la formule de la somme

c La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}
 $t_n = a + (n-1)r$ **le n ème terme de la suite**
 $t_{10} = a + 9r$
 $= 5 + 9 \times 3 = 32$
 $t_{20} = a + 19r = 5 + 19 \times 3 = 62$
 $S_n = \frac{n}{2} (a + l)$ **Formule de la somme**
 $S_{11} = \frac{11}{2} (t_{10} + t_{20})$
 $= \frac{11}{2} (32 + 62) = 517$

par substitution de $a = 5$, $r = 3$

Formule de la somme

par substitution de $t_{10} = 32$, $t_{20} = 62$, $n = 11$

Réfléchissez:

Est-ce qu'il y a d'autres manières pour trouver la somme des termes de la suite à partir de t_{10} à t_{20} ?


Exemple

4 trouvez la suite arithmétique dont $t_1 = 11$, $t_n = 87$ et $S_n = 980$


Solution

a trouvez la valeur de n

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

$$980 = \frac{n}{2} (11 + 87)$$

$$98 \times \frac{n}{2} = 980 \text{ alors: } n = 20 \text{ terms}$$

b trouvez la valeur de r

$$t_n = a + (n - 1)r$$

$$87 = 11 + 19r$$

$$19r = 87 - 11 = 76$$

$$r = 4$$

c déterminer la suite $t_2 = 11 + 4 = 15$, $t_3 = 15 + 4 = 19$

La suite arithmétique est (11, 15, 19, ..., 87)

La formule de la somme

par substitution de $t_1 = 11$, $t_n = 87$ et $S_n = 980$

par le calcul $t_{20} = 87$

le terme général

par substitution de $t_1 = 11$, $n = 20$; $t_n = 87$

by simplifying

la division par 19


Essayer de résoudre

4 Déterminez la suite arithmétique dont:

a $t_1 = 23$; $t_n = 86$; $S_n = 545$

b $t_1 = 17$; $t_n = -95$; $S_n = -585$



Exercices (1 - 4)



Complétez se qui suit:

1 La somme de n termes d'une suite arithmétique dont le premier terme a et le dernier b est égale à _____

2 La somme de n premiers termes de la suite arithmétique dont le premier terme est a et la raison est r , est _____

3 $\sum_{k=1}^5 (2k + 1) =$ _____

4 La somme de 10 premiers nombres pairs de nombres naturels est _____

5 La somme de nombres naturels impairs supérieur à 10 et inférieur à 30 est égale à _____

6 La somme de nombres naturels qui est divisible par 3 et compris entre 30 et 50 est égale à _____

Choisissez La bonne réponse parmi les réponses données

7 La valeur de la série arithmétique $\sum_{r=1}^5 (2r + 1)$ est égale à :

a 25 **b** 30 **c** 35 **d** 40

8 La série : $4 + 9 + 14 + \dots + 5n - 1$ en utilisant le symbole de la somme s'écrit :

a $\sum_{r=4}^n (5r - 1)$ **b** $\sum_{r=1}^n (5r + 1)$ **c** $\sum_{r=1}^n (5r - 1)$ **d** $\sum_{r=1}^{5n-1} (3r + 1)$

9 La série : $7 + 12 + 17 + 22$ en utilisant le symbole de la somme, s'écrit :

a $\sum_{r=1}^4 (5r + 2)$ **b** $\sum_{r=1}^4 (4r + 3)$ **c** $\sum_{r=1}^4 (7r + 1)$ **d** $\sum_{r=1}^4 (3r + 4)$

10 La somme des termes de la suite arithmétique (3 ; 5 ; 7 ; ... ; (2n + 1)) à partir de son premier terme égale à

a $n(n + 1)$ **b** $n(n + 2)$ **c** $n(n + 5)$ **d** $n(n + 2) n(n + 3)$

Répondez aux questions suivantes:

11 Trouvez la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique (14 ; 18 ; 22 ; ...).

12 Déterminez la somme des 30 premiers termes de la suite (t_n) où $t_n = 2n + 3$

13 Déterminez la somme des termes de la suite arithmétique (2 ; 5 ; 8 ; ... ; 80).

14 Déterminez le nombre de termes qu'il faut additionner de la suite (16 ; 20 ; 24 ; ...) à partir de son premier terme pour obtenir 456.

15 Si la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule : $S_n = 2n(7 - n)$, trouvez:

a t_7

b Le nombre de termes de la suite, à partir du premier terme, qu'il faut additionner pour que la somme soit égale à - 240

16 Trouvez le plus petit nombre de termes qu'il faut prendre de la suite (89 ; 81 ; 73 ; ...) à partir du premier terme pour obtenir une somme négative.

17 Trouvez le plus grand nombre de termes qu'il faut prendre de la suite $(25 ; 21 ; 17 ; \dots)$ à partir du premier terme pour obtenir une somme positive.

18 Soit $(5 ; 8 ; 11 ; \dots)$ une suite arithmétique. Trouvez:

- La somme de 20 premiers termes de la suite.
- La somme de 10 termes à partir du septième terme.
- La somme des termes de la suite à partir du t_{10} à t_{20}

19 Soit une suite $(t_n) = (32 ; 28 ; 24 ; \dots)$. Trouvez:

- Le rang du premier terme négatif de la suite.
- Le nombre de termes, à partir du premier terme, pour que la somme soit supérieure à 0.

20 Soit une suite t_n ($25 ; 23 ; 21 ; \dots$). Trouvez :

- La somme maximale de la suite.
- Le nombre de termes, à partir du premier terme, pour que la somme soit égale à 120. Pourquoi y-a-t-il deux solutions ?

21 Le premier terme d'une suite arithmétique = 12 ; son dernier terme = -26 et la somme de la suite = -140. Déterminer la suite.

22 Soit une suite arithmétique (t_n) . Son deuxième terme = 13 ,et la somme de 10 premiers termes de la suite = -140. Déterminer la suite.

23 Une suite arithmétique dans laquelle $t_4 = 24$ et le rapport entre la somme de ses cinq premiers termes aux cinq termes suivants de la suite est 1 : 2. Déterminez la suite.

24 Le premier terme d'une suite arithmétique dépasse de 2 le double de son cinquième terme et la moyenne arithmétique du troisième et septième termes égale à 16. Déterminez la suite.

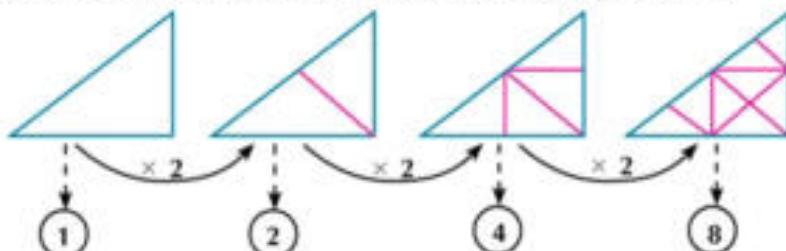
25 **En lien avec l'art:** Une salle de théâtre dans une école a 16 rangs, si le première rang a 16 sièges et chaque rang contient 4 sièges de plus que le rang précédent. Combien y a-t-il de sièges dans le théâtre?

26 **En lien avec le revenu:** Karim commence son travail avec un salaire annuel 19200 L.E. Il touche une prime annuelle de 480 L.E. Quelle est la somme de ses salaires à la fin de dixième année?

Suite géométrique

1 - 5

Observez le nombre des petits triangles. Que remarquez-vous ?



1 Définition

La suite (t_n) où $t_n \neq 0$ est appelée suite géométrique

si $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \text{constant}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

et le constant est appelé la raison de la suite et noté (q)

Allez apprendre

- Définir de la suite géométrique
- Représenter graphiquement
- de la suite géométrique.
- Déterminer la suite géométrique.
- Moyennes géométrique
- Relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique

Exemple

1 Laquelle parmi les suites suivantes est géométrique? Puis déterminez la raison.

a) $(t_n) = (2 \times 3^n)$

b) $(t_n) = (4 n^2)$

c) La suite (t_n) où : $t_1 = 12$, $t_n = \frac{1}{4} \times t_{n-1}$ (pour tout $n > 1$)

Solution

a) $\because \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3^{n+1-n} = 3$ (constant)

\therefore La suite est géométrique de raison $q = 3$

b) $\because \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{4(n+1)^2}{4n^2}$ (n'est pas constant)

\therefore La suite n'est pas géométrique

c) $\because t_n = \frac{1}{4} \times t_{n-1}$ (pour $n > 1$)

$\therefore \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{1}{4}$ (constant)

\therefore La suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

Vocabulaires de base

- Suite géométrique
- Nième terme
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Suite alternante le signe
- Moyenne géométrique

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphique

F **Essayer de résoudre**

1 Parmi les suites suivantes, indiquez laquelle est une suite géométrique puis déterminez la raison dans le cas de la suite géométrique:

a $(t_n) = (96 ; 48 ; 24 ; 12 ; 6 ; 3)$

b $(t_n) = (\frac{1}{243} ; -\frac{1}{81} ; -\frac{1}{27} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{3})$

c $(t_n) = (5 \times 2^n)$

d $(t_n) = (3(n+1)^2)$

Déterminer le *nième terme d'une suite géométrique*

De la définition (1) on peut déduire le *nième terme* de la suite géométrique (t_n) connaissant son premier terme a et sa raison q comme ce que suit:

$t_1 = a$, $t_2 = aq$; $t_3 = aq^2$, Observant la progression de ce modèle, on trouve que le *nième terme* est : $t_n = a q^{n-1}$

Exemple

3 Dans la suite géométrique (2 ; 4 ; 8 ; ...), trouvez:

a Le cinquième terme.

b Le rang du terme qui a pour valeur 512

Solution

$$\because a = 2, q = \frac{4}{2} = 2, t_n = a \times q^{n-1}$$

$$\therefore t_5 = a \times q^4 = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32$$

$$\because t_n = a \times q^{n-1} \quad \therefore 2 \times 2^{n-1} = 512$$

$$\therefore 2^{n-1} = 2^8 \quad \therefore n-1 = 8$$

alors la valeur du cinquième terme est 32 par la division par 2

$$\therefore n = 9$$

Alors le neuvième terme est égal à 512.

Déterminer la suite géométrique:

On peut déterminer la suite géométrique en connaissant son premier terme et sa raison.

Exemple

4 Soit (t_n) une suite géométrique. Dont tout ses termes sont positifs

Si $t_3 + t_4 = 6t_2, t_7 = 320$, trouvez la suite.

Solution

$$\because t_3 + t_4 = 6t_2 \quad \therefore aq^2 + aq^3 = 6 \times aq$$

Par la division de deux membres de deux équations

$$\therefore q^2 + q = 6 \quad \therefore q^2 + q - 6 = 0$$

$$\therefore (q-2)(q+3) = 0 \quad \therefore q = 2 \text{ ou } q = -3 \quad \text{refusée (les termes sont positifs)}$$

$$\therefore t_7 = 320 \quad \therefore aq^6 = 320 \quad \text{par substitution } q = 2$$

$$\therefore a \times 2^6 = 320 \quad \therefore 64a = 320 \quad \text{Divisant les deux membre par 64}$$

$$\therefore a = 5 \quad \text{La suite est } (5; 10; 20; \dots)$$

Utiliser la calculatrice scientifique pour écrire une suite géométrique

Pour écrire la suite géométrique dont $a = 5$ et $q = 2$ par exemple, on suit les étapes suivantes: On écrit la valeur de a (le nombre 5) puis on appuie sur la touche $(=)$ puis la touche (\times) puis on écrit la valeur de q (le nombre 2) puis on appuie sur la touche $(=)$ le deuxième terme de la suite s'affiche, on appuie successivement la touche $(=)$ les termes suivants s'affichent etc.




Exemple

5 **En lien avec l'enseignement:** Le nombre d'élèves de la deuxième secondaire d'une zone éducative augmente à un taux annuel de 4 %. Si le nombre actuel d'élèves est 2400 élèves, quel sera le nombre d'élèves après 6 ans ?


Solution

\therefore Le nombre actuel d'élèves = 2400

$$\therefore \text{Le nombre d'élèves dans la deuxième année} = 2400(1 + 0,04) \\ = 2400(1,04)$$

$$\therefore \text{Le nombre d'élèves dans la troisième année} = 2400(1,04) + 2400(1,04) \times 0,04 \\ = 2400(1,04)(1 + 0,04) = 2400(1,04)^2 \dots \text{etc.}$$

Alors le nombre d'élèves forme une suite géométrique

$$(2400 ; 2400(1,04) ; 2400(1,04)^2 ; \dots)$$

$a = 2400$; $q = 1,04$, $n = 6$ Par substitution dans la formule du n ème terme de la suite géométrique $t_n = a \times q^{n-1}$ $t_6 = (2400) \times (1,04)^5 = 2919,966966$
alors, le nombre d'élèves après 6 ans est égal à 2920 élèves près.

Moyennes géométriques

Les moyennes géométriques, comme les moyennes arithmétiques, sont les termes insérés entre deux termes non consécutifs d'une suite géométrique. On utilise la raison de la suite géométrique pour déterminer les moyennes.

Définition

Si a , b et c et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors b est la moyenne géométrique de deux nombres a et c où : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$
alors $b^2 = a \cdot c$ d'où $b = \pm \sqrt{a \cdot c}$

Expression orale:

Les moyennes géométriques qu'on peut insérer entre deux nombres dépendants sur les signes de deux nombres ». Expliquez cette phrase.


Enrichissez votre connaissance

En statistique, la moyenne géométrique d'un ensemble des nombres positifs $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ est la n ème racine du produit des nombres. La moyenne géométrique =

$$\sqrt[n]{t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n}$$

Insérer des moyennes géométriques entre deux quantités données:

Exemple

6 Déterminez les moyennes géométriques dans la suite: (4 ; ; ; ; ; ; 2916)

Solution

1- On détermine le nombre de termes de la suite

Il y a 5 moyennes entre le premier et le dernier terme de la suite géométrique; alors le nombre de termes est $n = 2 + 5 = 7$

2- On détermine la valeur de q

On utilise la formule : $t_n = a q^{n-1}$

$$2916 = 4 \times q^{7-1}$$

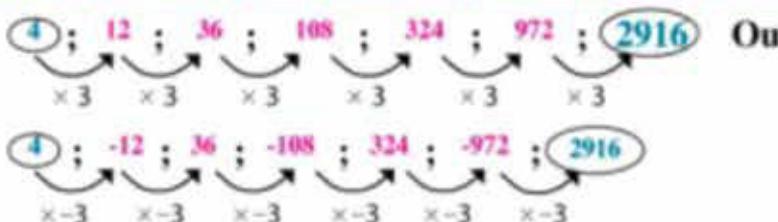
Par substitution : $a = 4$, $t_n = 2916$, $n = 7$

$$\text{D'où } 4 \times q^6 = 2916$$

On divise les deux membres par $4 q^6 = 729$

$$\text{D'où } q^6 = (\pm 3)^6 \text{ d'où } q = \pm 3$$

3- On utilise la valeur de q pour déterminer les moyennes géométriques:



Les moyennes sont 12; 36; 108; 324; 972 ou -12; 36; -108; 324; -972

RETOURNEZ VOS CONNAISSANCES

Relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres :

Si $x \in \mathbb{R}^*$; $y \in \mathbb{R}^*$ où $x \neq y$

alors: la moyenne arithmétique (A) = $\frac{x+y}{2}$ et la moyenne géométrique positive (G) = \sqrt{xy}

$$\therefore A - G = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2}$$

$$\therefore = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} > 0$$

posant l'expression sous forme du carré parfait

$\therefore A > G$, et la moyenne arithmétique positive est plus grande que la moyenne géométrique positive

On a donc : la moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs est plus grande que la moyenne géométrique de ces deux nombres.

Si: $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \rightarrow$ sont des nombres réels positifs, alors :

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}{n}$$

$$\geq \sqrt[n]{t_1 t_2 t_3 \dots t_n}$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si: $t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n$

Pensé critique: Que prévoyez-vous de la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres positifs et égaux?

 **Exemple**

7 Soient $6a$; $3b$; $2c$ et $2d$ des termes positifs d'une arithmétique. Démontrez que $b c > 2 a d$

 **Solution**

$\therefore 3b$ est un moyenne arithmétique de $6a$ et $2c$
et la moyenne arithmétique $>$ la moyenne géométrique

$$\therefore 3b > \sqrt{6a \times 2c} \quad \text{On élève les deux membres de l'inéquation au carré}$$

$$\therefore 9b^2 > 12ac \quad (1)$$

De même $2c$ est un moyenne arithmétique de $3b$ et $2d$

$$\therefore 2c > \sqrt{3b \times 2d} \quad \text{On élève les deux membres de l'inéquation au carré}$$

$$4c^2 > 6bd \quad (2)$$

de (1) et (2)

$$9b^2 \times 4c^2 > 12ac \times 6bd$$

On divise les deux membres de l'inéquation par $36bcd$ où ($b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}_+$)

$$\therefore bc > 2ad$$

 **Exercices (1 - 5)** 

Complétez ce qui suit:

- 1 Le cinquième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2 \times (3)^{n-1}$ est égal à _____
- 2 Le nième terme de la suite géométrique $(3; -6; 12; \dots)$ est _____
- 3 Le sixième terme de la suite géométrique $(\frac{1}{243}; \frac{1}{81}; \frac{1}{27}; \dots)$ est _____
- 4 La moyenne géométrique de deux nombres 4 et 16 est _____
- 5 Si la moyenne géométrique de deux nombres 9 et y est 15, alors y est égal à _____
- 6 Si $a; b; c$ sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors $b < \dots$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données

- 7 Le terme qui suit de la suite géométrique $(8; 6; \frac{9}{2}; \frac{27}{8}; \dots)$ est:

a $\frac{11}{8}$	b $\frac{27}{16}$	c $\frac{9}{4}$	d $\frac{81}{32}$
-------------------------	--------------------------	------------------------	--------------------------

8 Les suites suivantes sont géométriques sauf:

a) $(3; -6; 12; -24; \dots)$

b) $(\log a; \log a^2; \log a^3; \log a^4; \dots)$

c) $(\frac{3}{2}; 1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9})$

d) $(\frac{3b}{2a}; 3; \frac{6a}{b}; \frac{12a^2}{b^2})$ où $a > 0$ $b > 0$

9 La suite géométrique parmi les suites suivantes, est:

a) $(t_n) = (4n^2)$ pour tout $n \geq 1$

b) $(t_n) = (\frac{1}{4} \times t_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$

c) $(t_n) = (2^n - 1)$ pour tout $n \geq 1$

d) $(t_n) = (\log(3 \times 2^n))$ pour tout $n \geq 1$

10 Si a, b, c sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors:

a) $\frac{a+c}{2} > b$

b) $\frac{a+c}{2} < b$

c) $\frac{a+c}{2} = b$

d) $b^2 = a + c$

Répondez aux questions suivantes:

11 Si (t_n) est une suite telle que $t_n = 5 \times 2^n$. Démontre qu'elle est géométrique, puis écrivez leur trois premiers termes.

12 Soit la suite géométrique $(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -1; \dots)$. Déterminez:

a) Son dixième terme

b) Le rang du terme qui dont la valeur = 1024

13 Une suite géométrique de raison $= \frac{1}{2}$ et son troisième terme $= 24$. Trouvez la suite.

14 Déterminez la suite géométrique t_n dont $t_2 = 12$ et $t_7 = 384$.

15 Montrez que la suite (t_n) est une suite géométrique où : $t_n = \frac{3}{8} (2)^n$ puis déterminez son huitième terme et le rang du terme qui est égal à 768.

16 Déterminez la moyenne géométrique de 16 ; 49.

17 Déterminez les deux nombres dont la moyenne arithmétique est 5 et la moyenne géométrique est 3.

18 Déterminez deux nombres positifs dont leur moyenne géométrique positive augmente de 2 à l'un et diminue de 3 à l'autre.

19 Insérez cinq moyennes géométriques et positives entre $\frac{8}{27}$ et $\frac{27}{8}$.

20 On insère quelques moyennes géométriques entre 2 et 1458, de sorte que le rapport entre la somme de deux premières moyennes et la somme de deux dernières moyennes soit égal à 1 : 27 Déterminez le nombre de moyennes.

21 Une suite géométrique dont les termes sont positives, son premier terme est égale au quadruple de son troisième terme et la somme de ses deuxième et cinquième termes = 36. Déterminer la suite.

22 Soient x , y , k , m des termes consécutifs d'une suite géométrique. Démontrez que $x + y > km$

23 **En lien avec l'environnement:** L'eau coule dans un réservoir avec un taux qui se double d'un jour à l'autre. Le premier jour, l'eau coulée est de 12 Litres. Combien de jours faut-il pour couler 1536 Litres dans le réservoir?

24 **En lien avec la population:** Le nombre de la population d'une ville augmente à un taux annuel de 3% Quel sera la population de cette ville après 5 ans? Sachant que le nombre actuel de la population est 600000 habitants?

Séries géométriques

1 - 6

Somme des n termes d'une série géométrique

Une série géométrique est la somme d'une suite géométrique. La somme de n termes d'une suite géométrique est notée S_n .

Somme des n termes d'une série géométrique

trouver la somme des n termes d'une suite géométrique en fonction du son premier terme et sa raison.

Soit $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$ une suite géométrique dont le premier terme a et la raison q , alors on peut calculer la somme S_n comme suite :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \quad (1)$$

En multipliant les deux membres par q alors :

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n \quad (2)$$

par soustraction membre à membre, on obtient:

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

$$\therefore S_n(1 - q) = a(1 - q^n)$$

En divisant les deux membres par $(1 - q)$ où $1 - q \neq 0$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1$$



Exemple

1 trouvez la somme de la série géométrique dont : $a = 3$, $q = 2$, $n = 8$



Solution

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \text{ la somme d'une suite géométrique}$$

$$S_8 = \frac{3(1 - 2^8)}{1 - 2} \text{ En remplaçant } a = 3, q = 2 \text{ et } n = 8$$

$$S_8 = 3 \times 255 = 765 \quad \text{Simplifiant}$$

Déterminer la somme des n termes d'une suite géométrique en fonction de ses premier et dernier termes.

Allez apprendre

- Somme d'une Série géométrique
- Série géométrique infini.
- La somme d'une Série géométrique infini
- transformer une fraction décimale périodique en une fraction rationnelle

Vocabulaires de base

- La somme d'une suite géométrique
- Suite géométrique infini.
- La somme d'une suite géométrique infinie

Aide pédagogique

- Calculatrice
- Logiciels de graphisme

On sait que: $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$ (1)

et: $t = aq^{n-1}$ En multipliant les deux membres par q

alors $qt = aq^n$ (2)

D'après (2) et (1), alors :

$$S_n = \frac{a - qt}{1 - q}, q \neq 1$$

 **Exemple**

2 Trouvez la somme de la série géométrique : $1 + 3 + 9 + \dots + 6561$

 **Solution**

$$S_n = \frac{a - qt}{1 - q}$$

La formule de la somme d'une suite géométrique

$$S = \frac{1 - 6561 \times 3}{1 - 3}$$

En remplaçant : $a = 1$, $q = 3$ et $t = 6561$

$$S = \frac{19682}{2} = 9841$$

En simplifiant

Utiliser le symbole de la somme:

 **Exemple**

3 Trouvez: $\sum_{q=5}^{12} 3(2)^{q-1}$

La formule de la somme de la série géométrique

$$t_5 = a = 3(2)^{5-1} = 48, q = 2, n = 12 - 5 + 1 = 8$$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_8 = \frac{48(1 - 2^8)}{1 - 2}$$

$$S_8 = 48 \times 255 = 12240$$

En remplaçant: $a = 48$, $q = 2$, $n = 8$

En simplifiant

Réfléchissez : Pouvez-vous calculer la somme dans l'exemple précédent étant données les valeurs de a ; t_n ; q ? Expliquez ?

**Exemple Déterminer la suite géométrique**

4 La somme de n premiers termes de la suite géométrique définie par la formule :

$S_n = 128 - 2^{7-n}$. Déterminez la suite, puis trouvez son septième terme.



Posons : $n = 1$

$$\therefore S_1 = 128 - 2^{7-1} = 128 - 64 = 64 \text{ d'où } t_1 = 64$$

Posons : $n = 2$

$$\therefore S_2 = 128 - 2^{7-2} = 128 - 32 = 96$$

$$\therefore t_1 + t_2 = S_2$$

$$\therefore 64 + t_2 = 96 \quad \therefore t_2 = 96 - 64 = 32$$

Posons : $n = 3$

$$S_3 = 128 - 2^{7-3}$$

$$\text{d'où } S_3 = 128 - 16 = 112$$

$$\therefore t_1 + t_2 + t_3 = S_3$$

$$\text{d'où } t_3 = S_3 - S_2$$

$$\therefore t_3 = 112 - 96 = 16$$

$$\therefore \text{La suite est: } (64; 32; 16; \dots), \quad t_7 = aq^6 = 64 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1$$

Remarquez que: On peut déduire que $\therefore t_n = S_n - S_{n-1}$ d'où on peut trouver les valeurs de a et q

$$\therefore t_7 = S_7 - S_6 = (128 - 2^{7-7}) - (128 - 2^{7-6}) = -1 + 2 = 1$$

**Exemple**

5 **En lien avec la géométrie:** La figure ci-contre représente un triangle équilatéral dont la longueur du côté extérieur est le double de la longueur du côté du triangle intérieur qui a les sommets se trouvent aux milieux des côtés du triangle extérieur. Si on continue de cette manière, calculez la somme de 10 premiers triangles de ce modèle.



Le périmètre du 1^{ère} triangle = $3 \times 40 = 120$

Le périmètre du 2^{nde} triangle = $3 \times 20 = 60$

Le périmètre du 3^{nde} triangle = $3 \times 10 = 30$

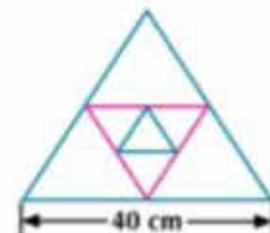
Donc le modèle est : 120, 60, 30, ... C'est une série géométrique

sum of perimeters = $120 + 60 + 30 + \dots$ c'est la somme d'une série géométrique

La somme de la série géométrique : $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant: $a = 120$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$

En utilisant la calculatrice $S_{10} = \frac{120 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \simeq 240$



Rappelez-vous



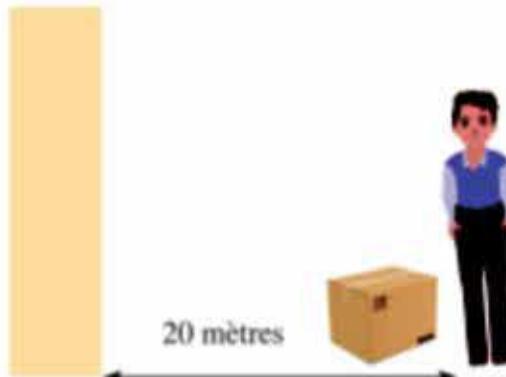
Le périmètre du triangle équilatéral = 3 \times longueur du côté

Séries géométrique infinies



Réfléchissez et discutez

Zyad veut déplacer une boîte vers un mur, qui se trouve à 20 mètres de distance, en plusieurs étapes de sorte que la distance déplacée soit la moitié de la distance restante après chaque étape. Zyad peut-il atteindre le mur ? On peut répondre à cela par l'étude des séries géométriques non finies (infinies)



Définition

Une série géométrique non finie est une suite de termes qui a un nombre infini de termes, si la somme de ses termes est un nombre réel alors elle est convergente ; car la somme tend vers un nombre réel, si la série n'a pas une somme alors elle est divergente

2

Dans le paragraphe réfléchissez et discutez: la somme des distances parcourus est donné par la série : $10 + 5 + 2.5 + 1.25 + \dots$ à chaque fois que le nombre des termes augmente la somme rapproche de 20 mètres, qui est la somme de cette série. Par conséquent on peut considérer que Zyad pouvait atteindre le mur quand les termes de la suite augmentent jusqu'à l'infinie, la figure ci-contre montre la représentation graphique de la somme S_n pour ce la la série est convergente et la somme rapproche d'un nombre réel tel que $|q| < 1$ elle est non convergente et la somme ne rapproche pas d'un nombre réel tel que $|q| \geq 1$



Exemple Les séries convergentes et divergentes

6 La quelle des séries géométriques peut-t-on calculer la somme à l'infini de ses termes ? Expliquez votre réponse.

a $75 + 45 + 27 + \dots$ b $24 + 36 + 54 + \dots$



Solution

a On trouve la raison de la série $q = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$, donc on peut calculer la somme à l'infini de ses termes car $-1 < \frac{3}{5} < 1$

b On trouve la raison de la série $q = \frac{36}{24} = \frac{3}{2} > 1$, donc on ne peut pas calculer la somme à l'infini de ses termes car $\frac{3}{2} > 1$

Rappelez-vous



si $|q| < 1$ alors:

- $1 < q < 1$

si $|q| \geq 1$ alors:

$q \geq 1$ ou $q \leq -1$

Somme des séries géométriques à l'infini :

On a vu que la somme de n termes d'une suite géométrique est donné par la formule $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

Si on addition un nombre infini de ses termes, alors q^n rapproche de zéro si $-1 < q < 1$

Alors la somme devienne :

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - q}$$

Exemple

7 Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes s'il est possible:

a $\frac{81}{8} + \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + \dots$

b $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{25}{24} + \dots$

Solution

a On trouve la raison de la série : $q = \frac{27}{4} : \frac{81}{8} = \frac{27}{4} \times \frac{8}{81} = \frac{2}{3}$

$\because -1 < \frac{2}{3} < 1$ \therefore donc on peut calculer la somme à l'infini

$\because a = \frac{81}{8}$, $q = \frac{2}{3}$ **en utilisant la formule** $S_{\infty} = \frac{a}{1 - q}$

$$\therefore S_{\infty} = \frac{\frac{81}{8}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{81}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{243}{8}$$

b On trouve la raison de la série : $q = \frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

$\because \frac{5}{4} > 1$ \therefore donc la série est divergente et n'a pas de somme.

Exemple**Utiliser le symbole de la somme**

8 Trouvez $\sum_{q=1}^{\infty} 42 \left(\frac{6}{7}\right)^{q-1}$

Solution

La formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini $S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$

Par substitution: $a = 42$ et $q = \frac{6}{7}$; $S_{\infty} = \frac{42}{1-\frac{6}{7}} = 294$

2 Essayer de résoudre

9 trouvez : $\sum_{q=1}^{\infty} 56 \left(\frac{3}{4}\right)^{q-1}$

Convertir une fraction décimale périodique en une fraction ordinaire**Exemple**

9 Mettez $0.\overline{432}$ sous la forme d'une fraction ordinaire.

Solution

Utilisons la formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini

$$0.\overline{432} = 0,432 + 0,000432 + 0,000000432 + \dots$$

La formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini : $S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$

$$\text{Posons } a = \frac{432}{1000}, \quad q = \frac{1}{1000} \quad \text{d'où } S_{\infty} = \frac{\frac{432}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}}$$

$$S_{\infty} = \frac{432}{1000} \times \frac{1000}{999} = \frac{16}{37}$$

En simplifiant


Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1 La somme à l'infini des termes de la suite (8 ; 4 ; 2 ; ...) est :

a 16 **b** 20 **c** 24 **d** 30

2 Si la somme à l'infini des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ est égale à $13\frac{1}{2}$ alors son premier terme:

a 6 **b** 8 **c** 9 **d** 12

3 Si la somme à l'infini des termes d'une suite géométrique de premier terme 12 est égale à 96, alors sa raison:

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{7}{8}$ **d** $\frac{3}{4}$

4 Si la somme de n premiers termes de la suite géométrique définie par la formule $S_n = 3^{n+1} - 4$, alors troisième terme

a 18 **b** 23 **c** 54 **d** 77

5 Une suite géométrique son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes qui le suivent, alors la raison de la suite est égale à :

a 0,5 **b** 0,333 **c** 0,25 **d** 0,666

Répondez aux questions suivantes:

6 trouvez la somme de chacune des suites géométriques suivantes:

a (6 ; 12 ; 24 ; à 6 termes) **b** (125 ; 25 ; 5 ; ... à 6 termes)

c (3 ; -6 ; 12 ; ... ; 768)

7 Parmi les suites géométriques suivantes, laquelle peut-t-on calculer la somme à l'infini ? trouvez cette somme si cela est possible

a (24 ; 12 ; 6 ; ...) **b** (3 ; -6 ; 12 ; ...)

c ($\frac{1}{32}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; ...) **d** ($2 \times 5^{1-n}$)

8 Trouvez la somme à l'infini de chacune des suites géométriques suivantes:

a (3 ; $\sqrt{3}$; 1 ; ...) **b** (t_n) = (3^{3-n})

9 Mettez chacune des fractions décimales suivantes sous la forme d'une fraction ordinaire $0.\overline{7}$; $0.2\overline{4}$; $0.8\overline{63}$. Utilisez la formule de la somme d'une suite géométrique à l'infini.

10 trouvez la suite géométriques dont le premier terme = 243 ; son dernier terme = 1, et la somme de ses termes = 364.

11 Trouvez la suite géométriques dont la somme de ses termes = 1093, son dernier terme 729 et la raison 3

12 Combien de termes de la suite géométrique $(3 ; 6 ; 12 ; \dots)$ faut-il additionner à partir du premier terme pour obtenir $= 381$?

13 Démontrez que la suite $(t_n) = (10 \times 2^{n-2})$ est une suite géométrique, puis trouvez le nombre des termes qu'il faut additionner à partir du premier terme pour obtenir 2555 .

14 Trouvez le nombre de termes de la suite géométrique dont la somme de ses termes égale à $121 \frac{4}{9}$ son premier terme égale à 18 et son dernier terme égale à $\frac{1}{9}$.

15 Soit (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_2 = 6$ et $t_3 - t_1 = 9$. Déterminer la suite et la somme de douze premiers termes de la suite.

16 Une suite géométrique dont la somme de ses cinq premiers termes $= 7.75$ et la somme de ses cinq suivants termes $= 248$. Déterminez la suite.

17 Si le premier terme d'une suite géométrique infinie est $= 18$ et son quatrième terme est $= \frac{16}{3}$. Trouvez la somme.

18 La somme à l'infinie d'une suite géométrique infinie $\frac{375}{4}$, et la somme de ses premier et deuxième termes est égale à 90 . Démontrez qu'il existe deux suites et trouvez-les.

19 Trouvez suite géométrique telle que la somme de ses premier et deuxième termes $= 16$, et la somme de tous termes $= 25$.

20 Une suite géométrique infinie de termes positifs, son premier terme dépasse son deuxième terme de 30 et la somme à l'infini de tous ses termes est égal à $\frac{135}{2}$. Déterminer la suite

21 Soit (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_1 + t_4 = 70$, $t_2 + t_3 = 60$. Dans ce cas là, démontrez qu'il existe deux suites que l'on peut trouver la somme de tous les termes jusqu'à l'infini puis trouvez la somme.

22 Soit (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_2 - t_6 = 45$ et S_4 premiers termes $= 180$. Déterminer la suite. Montrez qu'on peut trouver la somme de tous ses termes jusqu'à l'infinie puis trouvez la somme.

23 Une suite géométrique infinie son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes que le suit, la somme de ses premier et deuxième termes $= 9$. Déterminer la suite.

24 Une suite géométrique infinie, un terme quelconque est égal au double de la somme à l'infini de tous les termes que le suit, si son quatrième terme $= 3$. Déterminer la suite.

25 **En lien avec l'exploitation minière:** Une mine d'or a produit 4200 kg d'or le premier an. La production diminue 10% annuellement. Calculez la production de la mine en huitième année puis trouvez la production de la mine dans les huit premières années


Exercices généraux


Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

- 1 La suite définie par $t_n = \frac{(-1)^n}{3n-2}$ est une suite :
 - a** croissante
 - b** décroissante
 - c** ni croissante ni décroissante
 - d** constante
- 2 La série arithmétique $3 + 7 + 11 + \dots + 35$ s'écrit en utilisant le symbole de la somme à la forme:
 - a** $\sum_{r=1}^8 (4r-1)$
 - b** $\sum_{r=1}^9 (2r-1)$
 - c** $\sum_{r=1}^9 (3r-4)$
 - d** $\sum_{r=1}^8 (3r-4)$
- 3 Si $2a+2$, $6a-2$, $7a$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors a :
 - a** 1
 - b** 2
 - c** 3
 - d** 4
- 4 La somme de la série arithmétique $\sum_{r=3}^8 (2r+1)$ est égal à:
 - a** 64
 - b** 72
 - c** 76
 - d** 80
- 5 Une suite géométrique dont la somme des n premiers termes est donnée par la relation $S_n = 3(3^n - 1)$, alors le troisième terme de la suite est égal à:
 - a** 24
 - b** 36
 - c** 48
 - d** 54
- 6 Répondez aux questions suivantes: Parmi les suites (t_n) définie ci-dessous, déterminez celle qui est croissante, celle qui est décroissante et celle qui n'est ni croissante ni décroissante.
 - a** $(t_n) = (3 - 2n)$
 - b** $(t_n) = (2(\frac{3}{2})^{n-1})$
 - c** $((-1)^n(n+1))$
- 7 Sachant que $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, En utilisant le symbole de la somme Σ trouvez la valeur de chacun de ce qui suit:
 - a** $\sum_{r=1}^n (r+2)$
 - b** $\sum_{r=1}^8 (r^2 - 3)$
- 8 Parmi les suites, déterminez celle qui est arithmétique, celle qui est géométrique, ensuite trouvez la raison de chacune d'elles:
 - a** (21; 14; 7; ...)
 - b** (-7; -12; -17; ...)
 - c** (-3; 12; -48; ...)
 - d** ($\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{5}$; ...)
 - e** ($\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$; ...)
 - f** ($\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{3}$; ...)
- 9 Soit (12; 14; 16; ...) suite arithmétique, trouvez:
 - a** La valeur du huitième terme.
 - b** Le rang du terme dont la valeur 102
- 10 Soit (t_n) suite arithmétique dans laquelle $t_6 = 16$ et $t_{20} = -26$, trouvez la suite.
- 11 Une suite arithmétique dont le sixième terme = 34 et la somme de son septième et de son huitième termes est égale à 88. Déterminez la suite, puis trouvez le rang du terme dont la valeur est plus grande que 105.
- 12 Si la somme des deuxième moyenne et quatrième moyenne d'une suite arithmétique est égale à 12 et la septième moyenne dépasse la troisième moyenne de 4. Quelle est la suite?

13 Une suite géométrique son premier terme = 7 et son cinquième terme = 112. Trouvez la suite.

14 Une suite géométrique dont le troisième terme est égal à l'inverse de son premier terme et son cinquième terme égale à $\frac{1}{125}$. Démontrez qu'il y a deux solutions puis trouvez les deux suites.

15 Si (t_n) est une suite géométrique telle que $t_n = 7 \times (3)^{n-1}$, trouvez la moyenne géométrique entre t_3 et t_7 .

16 Si $4; b, c$ forment une suite arithmétique et $2; b+3; 5$ forment une suite arithmétique et b et c .

17 Si $\frac{1}{2}a; b; c$ sont des quantités positives forment une suite géométrique, démontrez que $4b < 1 + 2c$.

18 **En lien avec la production:** Un puits de pétrole a produit 560 milles barils le premier an. La production diminue 4% annuellement. Calculez la production maximale du puits.

19 **En lien avec la géométrie:** Un rectangle dont les dimensions sont 16 cm et 12 cm. Des milieux de ses cotés, on trace un polygone puis on trace un autre polygone de même façons et on continue de cette manière, calculez la somme des périmètres des triangles obtenus.

20 **En lien avec la santé:** Un malade prend 21 comprimés d'un médicament pendant une semaine. Le médecin lui conseille de diminuer le dosage d'un taux de 3 comprimés par semaine. Après combien de semaines le malade arrêtera ce médicament ?

21 **En lien avec les salaires:** Le salaire mensuel d'un ouvrier est de 1200 L.E au premier année. Ce salaire augmente d'un taux annuel de 10%. Ecrivez en utilisant le symbole de la somme le salaire obtenu pendant cinq années, puis calculez cette somme.

22 **En lien avec l'environnement:** L'eau coule d'un robinet avec un taux de 25 litres pour la première minute, ce taux augmente deux litres chaque minute l'eau coulée est de 12 Litres. Combien de temps faut-il pour que l'eau coulé soit 880 Litres ?

23 Une balle si elle tombe d'une hauteur quelconque, elle répond aux deux tiers de la distance parcourue Si la balle tombe de 90 mètres de hauteur, calculez la somme des distances parcourues jusqu'à son arrêt?

24 Le premier terme d'une suite géométrique = 81 et le sixième terme $\frac{1}{3}$. Trouver la somme à l'infini de ses termes à partir de son troisième terme.

Unité 2

Arrangements et Combinaisons

Introduction de l'unité

Le dénombrement est l'un des compétences de base en mathématiques, souvent on est confronté à des problèmes pour en résoudre on a besoin des procédures et des méthodes variées de dénombrement. Dans cette unité nous allons aborder les différentes stratégies du dénombrement parmi lesquelles le principe fondamental de dénombrement et ses applications parmi lesquelles : la notion de permutation qui exprime le nombre des méthodes de réarrangement possible d'objets d'un ensemble.

Les combinaisons : C'est le choix sans répétitions.

Les grands savant Omar El khayaam, Isaak Newton et Bascal avaient un grand apport pour le fondement de ce domaine, cet apport a une influence jusqu'à aujourd'hui.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaitre le principe de dénombrement et des applications simples.
- Reconnaitre l'introduction des Arrangements et des Combinaisons.
- Utiliser l'ordinateur pour calculer les Arrangements et les combinaisons

Vocabulaires de base

Principe fondamental de dénombrement	Factorielle	Ordre
Principe conditionnelle de dénombrement	Arrangements	Comité
Opération	Combinasions	Sous-ensemble
Diagramme de l'arbre	Eléments	

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Principe de dénombrement.

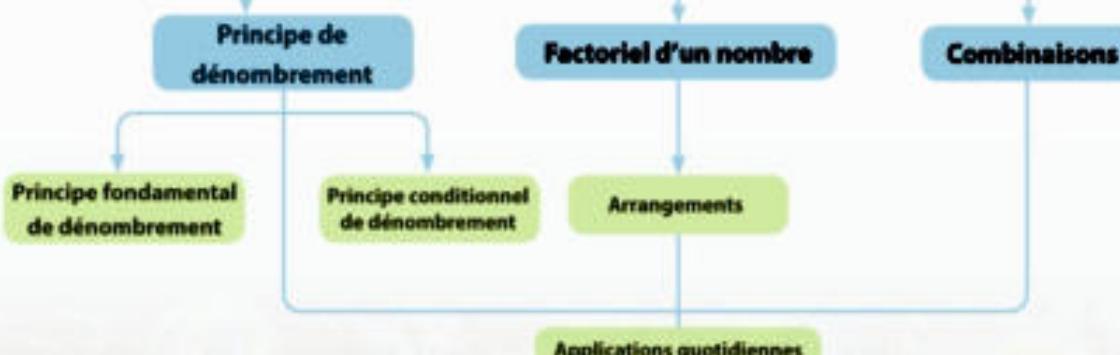
Leçon (2 - 2): Factorielle - Arrangements.

Leçon (2 - 3): Combinaisons

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – Logiciels de graphisme

Organigramme de l'unité



Principe de dénombrement

Allez apprendre

- Notion de principe de dénombrement et applications simples.
- Principe fondamental de dénombrement.
- Principe conditionnelle de dénombrement.

Vocabulaires de base

- Principe fondamental de dénombrement
- Opération
- Diagramme de l'arbre

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



Réfléchissez et discutez

Si on vous a demandé d'habiller une chemise et un pantalon parmi deux chemises et trois pantalons

De combien de façons peut-on choisir la tenue?

chemise B chemise A



Exemple

1 Combien y a-t-il de possibilités de choisir une comité d'un étudiant parmi trois étudiants (Ashraf, Mohamed et Hassan) et d'une étudiante parmi deux étudiantes (Samar et Mona)?



Dans cet exemple, c'est facile de savoir le nombre des méthodes de choix. Par exemple, on peut choisir : Ashraf, Samar ou Ashraf, Mona ou Mohamed, Mona ou Hassan, Samar etc.

Cela peut être exprimé par le diagramme suivant (l'arbre des choix):

Etudiant	Etudiante	Choix
Ashraf	Samar	Ashraf-Samar
	Mona	Ashraf-Mona
Mohamed	Samar	Mohamed-Samar
	Mona	Mohamed-Mona
Hassan	Samar	Hassan-Samar
	Mona	Hassan-Mona

Le nombre des méthodes de choix d'un étudiant parmi trois = 3

Le nombre des méthodes de choix d'une étudiante parmi deux = 2

Le nombre des méthodes de choix = $3 \times 2 = 6$ méthodes



Essayez de résoudre

1 Dans le paragraphe **Réfléchissez et discutez**, déterminez le nombre possible des choix?



Exemple

2 Combien de nombres de trois chiffres peut-on former de sorte que:

- le chiffre des unités soit des éléments {3 ; 7}
- le chiffre des dizaines soit des éléments {2 ; 4 ; 9}
- le chiffre des centaines soit des éléments {1 ; 5}

Solution

Centaines	Dizaines	Unités	Le nombre
1	2	3	123
1	2	7	127
1	4	3	143
1	4	7	147
1	9	3	193
1	9	7	197
5	2	3	523
5	2	7	527
5	4	3	543
5	4	7	547
5	9	3	593
5	9	7	597

A l'aide du diagramme de l'arbre, on trouve que :

Le nombre de façons de choix du chiffre des unités \times Le nombre de façons de choix du chiffre des dizaines \times Le nombre de façons de choix du chiffre des centaines $= 2 \times 3 \times 2 = 12$ méthodes

**A apprendre****Principe fondamental du dénombrement**

Définition : Soient m_1 le nombre de façons d'effectuer un travail quelconque, m_2 le nombre de façons d'effectuer un seconde travail, m_3 le nombre de façons d'effectuer un troisième travail ... etc. alors le nombre de façons d'effectuer ces travaux simultanément $= m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots \times m_n$

**Exemple**

3 Khaled peut choisir l'une des garnitures suivantes : foie, poulet ou poisson et l'une des boissons suivantes : orange, citron ou de la mangue. Combien de repas Khaled peut-il choisir ?



Le nombre de choix des garnitures = 3 manières.

Le nombre de choix des boissons = 3 manières.

Le nombre de choix = $3 \times 3 = 9$ manières.

**Essayez de résoudre**

2 Dans un restaurant, on propose 6 types de pizza, 4 types de salades et 3 types de boissons. Quel est le nombre de repas possible peut-on présenter dans ce restaurant ? Sachant qu'un repas consiste : une pizza, une salade, un bosson?

**Exemple Principe conditionnelle de dénombrement**

4 Combien y a-t-il de manières pour former un nombre de 3 chiffres différents des chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Solution

On commence par le chiffre de centaines (une condition nécessaire que ce nombre ne soit pas zéro)

Le nombre de manières de choisir le chiffre des centaines = 4

place	centaines	dizaines	unités
N de manières	4	4	3

Le nombre de manières de choisir le chiffre des dizaines = 4

Le nombre de manières de choisir le chiffre des unités = 3

∴ Le nombre total de manières = $4 \times 4 \times 3 = 48$ manières

F Essayez de résoudre

3 De combien de façons peut-on former un nombre de quatre chiffres différents des chiffres {2; 3; 4; 7}, de sorte que le chiffre de dizaines soit pairs .


Exercices (2 -1)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

- Le nombre de façons que 4 étudiants occupent 4 sièges situant de même rangé égale à :
 a 1 b $4 + 4$ c 4×4 d $4 \times 3 \times 2 \times 1$
- Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres différents des chiffres { 5 ; 3 ; 0 ; 2 } ?
 a 3×2 b 4×2 c 3×3 d 3×4
- Combien de nombres impaires qui se composent de trois chiffres distincts parmi les chiffres {2 ; 3 ; 6 ; 8} ?
 a $8 \times 6 \times 3$ b $4 \times 3 \times 3$ c $4 \times 3 \times 2$ d $2 \times 3 \times 1$
- Combien de nombres formés de trois chiffres distincts parmi les chiffres {2 ; 3 ; 5} ?
- Combien de nombres formés de quatre chiffres distincts dont le chiffre des unités est 6 peut-on former parmi les chiffres {2 ; 3 ; 6 ; 8} ?
- La plaque d'immatriculation d'un gouvernorat se compose de trois lettres alphabétiques distinctes suivie d'un nombre à trois chiffres distincts et différents (le zéro ne peut être de ces chiffres) Combien pourrait-on avoir de plaques d'immatriculation différentes?
- Combien de nombres formés de trois chiffres différents des nombres {2 ; 5 ; 8 ; 9} et qui sont inférieurs à 900?
- Les numéros des réseaux cellulaires dans un pays consistent onze chiffres. On compose d'abord (025) puis on compose le reste du numéro. Trouvez le nombre maximum des lignes qui peuvent-être chargés dans ces réseaux.

Factorielle - Arrangements

2 - 2



Réfléchissez et discutez

A l'aide de ce que vous avez étudié dans la leçon précédente, répondez aux questions suivantes :

- 1) De combien de façons quatre étudiants peuvent-ils occuper les trois sièges d'une rangée ?
- 2) De combien de manières cinq concurrents peuvent se lever au bord de la piscine pour commencer le concours ?



A apprendre

Définition

1

Factorielle : La factorielle d'un nombre entier positif n s'écrit sous la forme $n!$ il est égal au produit de tous les nombres entiers positifs inférieurs ou égaux à n :

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$$

Note

- Si $n = 0$ alors $0! = 1$
- Si $n = 1$ alors $1! = 1$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \cdot 3!$
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \cdot 5!$

En général : $n! = n(n-1)!$ où $n \in \mathbb{N}^*$



Exemple

1) a) Calculez $\frac{10!}{8!}$ b) Soit $n! = 120$. trouvez la valeur de n .

Solution

a) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$

b) $n! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \therefore n! = 5! \quad \therefore n = 5$



Essayez de résoudre

1) Calculez : a) $\frac{15!}{12!}$ b) $\frac{7!}{5!} + \frac{9!}{7!}$



Exemple

2) Trouvez l'ensemble de solution de l'équation : $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

Allez apprendre

- Factorielle d'un nombre
- Arrangements

Vocabulaires de base

- Factoriel d'un nombre
- Arrangements
- Sub-Permutation

Matriels

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Solution

$$\therefore \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)! \cdot n(n-1)}{(n-2)!} = 30 \quad \therefore n(n-1) = 6 \times 5 \quad \therefore n = 6$$

P Essayez de résoudre

2 Soit $\frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} = \frac{56}{(n+2)!}$, trouvez la valeur de n

Pensé critique : soit $a! = 0!$, quelle est la valeur de n?

Arrangements

Exemple préliminaire : Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à partir des chiffres {2 ; 3 ; 5}?

Les nombres sont : 532 ; 352 ; 523 ; 253 ; 325 ; 235. chacun de ces nombres est appelé un arrangement des chiffres donnés.

Le nombre $= 3 \times 2 \times 1$ **on le note** A_3^3 **qui se lit** (3 A 3).

Le tableau suivant indique comment obtenir le nombre de façons :

centaines	dizaines	unités
1	2	3

Pour cela un arrangement d'un nombre d'objets, c'est de les agencer dans un certain ordre

Definition

Le nombre d'ARRANGEMENTS de n objets distincts pris r à r chaque fois est noté par A_n^r où:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \text{ où } r \leq n, r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}^*$$

Par convention $A_n^0 = 1$

Par exemple :

$$\triangleright A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 2 \times 1 = \frac{6!}{(6-3)!} \quad A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!}$$

$$\triangleright A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{7!}{(7-5)!}$$

De ce que précède, on déduit:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ où } r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}^*, r \leq n$$

Exemple

3 Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :

a) A_7^4

b) A_4^4

c) A_4^3

Solution

a) $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

b) $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Utilisation d'une calculatrice

L'arrangement est symbolisé par ${}^n p_r$ sur une calculatrice scientifique. On utilise les touches $Shift \times$. Pour calculer la valeur de ${}^5 p_2$ on appuie successivement sur les touches:

5 Shift \times 2 =

Réponse = 20

c) $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Que remarquez-vous de deux phrases b et c ?

2 Essayez de résoudre

3 Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : a) $A_5^2 + A_6^3$

b) $\frac{A_5^5}{A_5^4}$

3 Exemple

4 De combien de façons distinctes cinq étudiants peuvent-ils occuper les sept sièges d'une rangée ?

4 Solution

On a 7 sièges, on veut en choisir 5 chaque fois

\therefore Le nombre de façons = $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

Utiliser d'une calculatrice : 7 SHIFT \times (apr) 5 =

2 Essayez de résoudre

5 Combien de mots de cinq lettres différentes peut-on former de l'alphabet arabe ?

3 Exemple

6 Soit $A_7^r = 840$, trouvez la valeur de $(r - 4)!$

4 Solution

On divise le nombre 840 par 7 puis on divise le résultat par 6 ensuite on divise le résultat par 5 ...etc jusqu'à ce qu'on obtient 1

\therefore Le nombre $840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = A_7^4$

$$\therefore A_7^r = A_7^4 \quad \therefore r = 4 \quad \therefore (r - 4)! = 0! = 1$$

840	7
120	6
20	5
4	4
1	

2 Essayez de résoudre

6 Soit $A_9^{r+1} = 504$, trouvez la valeur de $(r + 1)!$

Pensé critique : 1) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : A_7^7 et $7!$

Que remarquez-vous ?

Exercices (2 - 2)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

- 1 De combien de façons différentes peut-on choisir un président et un vice président d'une comité formée de 12 membres
 a 2 b 23 c 66 d 132
- 2 Si $A_5^r = 60$, alors r est égal à :
 a 4 b 3 c 2 d 5
- 3 Si $A_n^3 = 120$, alors n est égal à :
 a 6 b 5 c 4 d 3
- 4 Le nombre de façons d'arranger les lettres du mot « voir » est égal à :
 a 4 b 9 c 10 d 24
- 5 Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres {3, 4, 5, 6} ?
 a 48 b 30 c 12 d 4
- 6 Le numéro de téléphone se compose de 8 caractères

9	c	—	—	—	—	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---

 c est l'un des chiffres 3 ; 4 ; 5 ; 8 tandis que chacun des autres caractères est un chiffre quelconque. Combien de numéros possibles peut-on avoir ?
 a 499 999 b 4 000 000 c 4 999 999 d 10 000 000
- 7 Hussam peut choisir l'une des garnitures suivantes : Rissole, poulet ou poisson et l'une de deux boissons suivantes : jus ou eaux gazeuse. Combien de repas Khaled peut-il choisir ? (Utilisez l'arbre d'étalement pour résoudre le problème)
- 8 Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ?
- 9 Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ?
- 10 Combien y a-t-il de nombres pairs formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ?
- 11 De combien de manières peut-on former une comité d'une femme et d'un homme parmi 4 femmes et 3 hommes ?

12 Un magasin de crème glacée offre trois volumes : petit, moyen, grand et cinq saveurs : fraise, mangue, citron, lait, chocolat. Quel est le nombre de choix possibles pour acheter une crème glacée

13 Parmi l'ensemble des lettres {a ; b; c ; d; e ; f}, trouvez le nombre de manières de choisir

a une seule lettre. **b** deux lettres distinctes.

14 Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :

a $7! \div 5!$ **b** $32! - 3!$ **c** $A_5^3 \times 2!$
d $A_3^3 \times A_2^2$ **e** $A_8^1 + A_8^2$ **f** $A_7^0 + A_7^7$

15 Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :

a $n! = 24$ **b** $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$
c $A_{15}^n = 2730$ **d** $A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 = 50$

16 Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :

a $A_7^n = 210$ **b** $n(2n-1)! = 12$

17 Si $A_n^4 = 14 \times A_{n-2}^3$ trouvez la valeur de n.

18 De combien de façons différentes peut-on choisir un président, un vice-président et secrétaire d'une comité formée de dix membres.

19 Démontrez que : $\frac{(n+2)!}{n!} = A_{n+2}^2$





Combinaisons

Allez apprendre

- Notion des combinaisons et applications simples.
- Triangle de Pascale.

Préface

On veut sélectionner deux équipes parmi quatre { a ; b ; c ; d } pour un match de football. Les choix possibles sont :

(a ; b), (a ; c), (a ; d), (b ; a), (b ; c),
(b ; d), (c ; a), (c ; b), (c ; d), (d ; a), (d ; b), (d ; c).



De ce qui précède, on remarque que le choix (a ; b) est différent de celui de (b ; a).....etc.

Si on veut choisir sans prendre l'ordre en compte, alors les choix possibles sont : {a ; b}, {a ; c}, {a ; d}, {b ; c}, {b ; d}, {c ; d}. Chacun de ces choix est appelé une « combinaison ».

A apprendre

Définition

Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts noté C_n^r où $r \leq n$, $r \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}^+$

Dans la préface précédente :

Le nombre de façons différentes de choisir 2 objets parmi 4 objets distincts noté C_4^2 qui se lit (4 C 2) ou $\binom{4}{2}$, qui se lit « 2 au dessus de 4 ». On remarque dans cette préface que le nombre de façons de choix = 6

C'est-à-dire : $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$, $C_n^r = \frac{A_n^r}{r!}$

Exemple

1 Calculez :

a) C_7^5

b) C_7^2 (Que remarquez-vous)?

Solution

a) $C_7^5 = \frac{A_7^5}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 21$

b) $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de Graphisme

Tip

Enrichissez vos connaissances une combinaison peut s'écrire sous la

forme de $C_n^r = \binom{r}{n}$

On remarque que : $C_7^5 = C_7^2$ $(5 + 2 = 7)$

Corolaires importantes : $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $C_n^r = C_n^{n-r}$

 **Essayez de résoudre**

1) Sans utiliser une calculatrice calculez C_{12}^9 et C_{17}^{14}

 **Activité**

Utiliser d'une calculatrice

On peut utiliser les touches   pour écrire le symbole des combinaisons (C_n^r)

1) Utilisez la calculatrice pour trouver la valeur de $C_5^4 + C_7^2$

 **Solution**

Appuyez successivement sur les touches

Réponse = 26

 **Exemple**

2) Si : $C_{28}^r = C_{28}^{2r+47}$ trouvez la valeur de r .

 **Solution**

$$\because C_{28}^r = C_{28}^{2r+47}$$

Soit : $r = 2r + 47$ d'où : $r = 47$ refusée car elle est supérieure à la valeur de n .

$$\text{Ou : } r + 2r + 47 = 28$$

$$\therefore 3r = 75$$

$$\therefore r = 25$$

 **Essayez de résoudre**

3) Si $C_{28}^r = C_{28}^{2r+5}$, trouvez la valeur de r .



Remarquez-que

$$(1) \frac{C_{27}^{14}}{C_{27}^{13}} = \frac{27-13}{14} = 1$$

$$(2) \frac{C_{36}^{25}}{C_{36}^{23}} = \frac{C_{36}^{25}}{C_{36}^{24} \times C_{36}^{24}} = \frac{C_{36}^{24}}{C_{36}^{23}}$$

Formule du rapport

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

 **Exemple**

3) Si $C_n^6 : C_n^5 = \frac{1}{3}$, trouver la valeur de $(n-2)!$

 **Solution**

$$\because \frac{C_n^6}{C_n^5} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{n-6+1}{6} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{n-5}{6} = \frac{1}{3} \quad \therefore n = 7$$

$$\therefore (n-2)! = (7-2)! = 5! = 120$$

 **Essayez de résoudre :**

3) Si $C_7^r : C_7^{r-1} = \frac{1}{3}$, trouver la valeur de r .

Formule de l'addition

(2) $C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r$

**Exemple**

4) Si $A_{n+1}^{r+1} : C_{n+1}^{r+1} = 720 : 1$ et $C_n^{r-2} + C_n^{r-3} = 56$, trouver la valeur numérique de n et r.



$$A_{n+1}^{r+1} : C_{n+1}^{r+1} = 720 : 1$$

$$(r+1)! = 720 \quad (r+1)! = 6!$$

$$\therefore C_n^{r-2} + C_n^{r-3} = 56 \quad \therefore C_n^3 + C_n^2 = 56 \quad \therefore C_{n+1}^3 = 56$$

$$\therefore C_{n+1}^3 = C_8^3 \quad \therefore n+1 = 8 \quad \therefore n = 7$$

**Essayez de résoudre :**

4) Si $C_{13}^r : C_{13}^{r+1} = 9 : 5$, $C_n^{r-2} + C_n^{r-1} = 3432$, trouver la valeur numérique de n et r.

**Exemple**

5) De combien de façons peut-on choisir un équipe de 4 personnes parmi un ensemble de 9 personnes?



Puisque le choix est indépendant de l'ordre, alors chacun de ces choix est une combinaison.

$$\text{Le nombre de façons} = C_9^4 = \frac{A_9^4}{4!} = 126$$

**Essayez de résoudre :**

5) Dans un concours de jeu d'échecs, 7 personnes y ont participé. Trouvez le nombre de matches sachant qu'un concourant joue un seul match?

Exemple principe du dénombrement

6 De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 2 hommes et une femme parmi 7 hommes et 5 femmes?

Solution

Le nombre de façons de choisir deux hommes de 7 hommes = $C_7^2 = 21$

Le nombre de façons de choisir une femme de 5 femmes = $C_5^1 = 5$

Appliquant le principe du dénombrement, le nombre de façons = $21 \times 5 = 105$ façons

Pensé critique : De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 4 hommes ou 3 femmes parmi 6 hommes et 5 femmes ?

P Essayez de résoudre

6 Une classe comprend 10 garçons et 8 filles. De combien de façons peut-on former une comité pentagonal d'étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

**Activité****Triangle de Pascal**

Blaise Pascale (1623 - 1662) :

Il est un philosophe, mathématicien et physicien français, il a introduit la théorie de probabilités.

Aussi, il a créé un système ternaire des nombres qui est appelé le triangle de Pascale, il a également inventé une calculette pour effectuer les opérations de l'addition et de la soustraction.



Observez le triangle de Pascale ci-contre, puis répondez aux questions suivantes :

- Que remarquez-vous de la manière d'écriture des nombres dans ce triangle ?
- Existe-t-il une relation entre les éléments d'une ligne et les éléments de la ligne suivante ?
- Y-t-il une symétrie entre les nombres situant sur les cotés latéraux du triangle ?

D'après l'activité précédent, on remarque que :

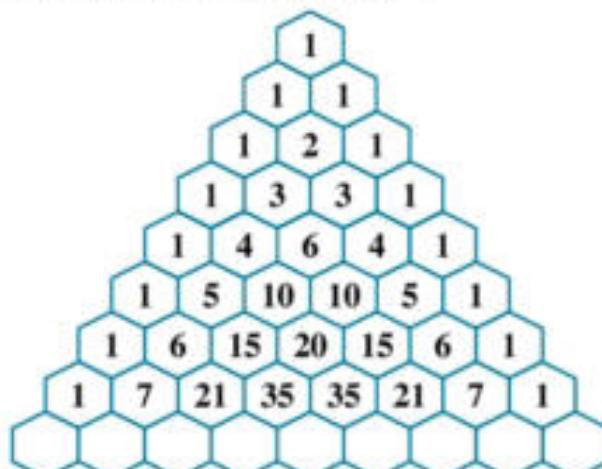
Dans la formule C_n^r , si n est le nombre de lignes et r le nombre de colonne

➤ **La première ligne :** représente ($n = 1$) d'éléments parmi $r = 0$ ou $r = 1$

D'où: $C_1^0 = 1$, $C_1^1 = 1$

➤ **La deuxième ligne :** représente ($n = 2$) d'éléments parmi $r = 0$ ou $r = 1$ ou $r = 2$

D'où: $C_2^0 = 1$, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$... etc.



On remarque également que :

- Chaque ligne commence par 1 car $C_n^0 = 1$, et se termine par 1 car $C_n^n = 1$
- Chaque nombre dans une ligne, sauf la première, est égal à la somme de deux nombres qui lui sont au dessus.
- Dans la troisième ligne on trouve : 1, 1 + 2, 2 + 1, 1
- Dans la troisième ligne on trouve : 1, 1 + 3, 3 + 3, 3 + 1, 1 ... etc.
- Si n est pair, il y a une symétrie par rapport au nombre médian
- Si n est impair, il y a une symétrie par rapport aux deux nombres médians
- Cela s'accommode avec la relation $C_n^r = C_n^{n-r}$

Application sur l'activité :

Démontrez que : $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$



Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

- 1 Le nombre de choix de 3 personnes parmi 5 personnes est égal à _____
 a 15 b 10 c 20 d 35
- 2 Le nombre de façons de répondre seulement à 4 questions parmi 6 est égal à _____
 a 30 b 15 c 24 d 10
- 3 Le nombre de façons de choisir une boule rouge et une autre blanche parmi 5 boules rouges et 3 boules blanches est égal à _____
 a 15 b 8 c 60 d 2
- 4 Si $C_n^5 : C_n^4 = 3 : 1$, alors la valeur de n est :
 a 7 b 9 c 17 d 19

Répondez aux questions suivantes :

- 5 Calculez C_6^3 , C_9^1 , C_{12}^{11} et C_{100}^0
- 6 Si $C_n^3 = 120$, trouvez la valeur de C_n^{n-9}
- 7 Si $C_{n+1}^4 = \frac{5}{2} C_n^3$, trouvez la valeur de n .
- 8 Si $C_n^3 = 30 \frac{1}{3} n$, trouvez la valeur de n .
- 9 De combien de manières une comité pentagonal peuvent prendre une décision majoritaire ?

10 Une classe comprend 10 garçons et 8 filles. De combien de façons peut-on former un comité de cinq étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

11 Ecrivez chacun de ce qui suit en fonction des arrangements :

a) C_8^3 b) C_{19}^2 c) C_5^0 d) C_x^{x-y}

12 Ecrivez chacun de ce qui suit en utilisant la formule nC_n

a) $\frac{A_8^2}{2!}$ b) $\frac{A_9^3}{3!}$ c) $\frac{A_{10}^4}{4!}$ d) $\frac{A_8^0}{0!}$

13 Trouve la valeur:

$$\frac{C_{17}^6 + C_{17}^5}{C_{18}^5}$$

14 Démontre que

$$\frac{C_{25}^4 + C_{24}^3}{C_{24}^3 + C_{23}^2} = \frac{58}{9}$$


Exercices généraux

Complétez ce qui suit :

- 1) Le nombre de façons de former un nombre de deux chiffres distincts parmi les nombres : 1, 2, 3, 4 est égal à _____
- 2) Si on vous a demandé de codé un coffre en utilisant 3 trois chiffres différents de zéro, alors le nombre de façons est égal à _____
- 3) Si $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^n$, alors $n =$ _____
- 4) Si $n! = 1!$ alors $n =$ _____

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

- 5) Un homme voulait choisir une voiture parmi les modèles a ; b ; c et les couleurs : Blanche ; Rouge ; Argentée ; Noir . De combien de manières peut-il choisir une voiture ?
 a) 7 b) 12 c) 14 d) 24
- 6) Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1 ; 3 ; 6 ; 7?
 a) 9 b) 12 c) 24 d) 64
- 7) Soient $X = \{x : x \in \mathbb{N} ; 1 \leq x \leq 5\}$ et $Y = \{(a, b) : a, b \in X \text{ et } a \neq b\}$. Quel le nombre d'éléments de Y ?
 a) 7 b) 10 c) 20 d) 25
- 8) $C_{12}^4 + C_{12}^3$ égale à
 a) 715 b) 710 c) 716 d) 720
- 9) Si $A_n^r = 336$ et $C_n^r = 56$ alors n et r sont
 a) (3 ; 2) b) (8 ; 3) c) (7 ; 4) d) (7 ; 3)
- 10) Une personne a 8 amis ; alors nombre de manières d'inviter un ami ou plus pour dîner est
 a) 250 b) 200 c) 255 d) 256
- 11) Si $C_n^{10} = C_n^{14}$, alors C_{25}^n égale à
 a) 24 b) 25 c) 1 d) 49
- 12) Calculez :
 a) C_5^5 b) $6!$ c) A_{23}^1
 d) C_{50}^{49} e) $\frac{13!}{14!}$ f) A_4^4

13 Si $C_{2n-1}^3 = 84$? trouvez la valeur de $(n - 5)!$

14 Si $A_8^{r+1} = 336$; trouvez la valeur de C_{2r}^4

15 Soient $A_{n+m}^3 = 210$ et $C_{n+m}^4 = 715$, trouvez la valeur de n et celle de m

16 De combien de façons peut-on choisir sept étudiants parmi 10 pour faire un voyage touristique?

17 On a choisi trois étudiants parmi n étudiants pour assister à un colloque. Si le nombre de façons de choix était 10, trouvez n

18 De combien de façons peut-on élire une comité formé d'un homme et de deux femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

19 Parmi 4 professeurs; on veut choisir un professeur pour former les élèves à passer l'olympiade puis un autre pour préparer les examens. De combien de façons peut-on faire ce choix ?

20 Le nombre des équipes participants au tournoi de football est 12. Si chaque équipe joue deux matches avec chacun des autres équipes. Quel est le nombre de matches de ce tournoi ?

21 Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42$

b $12 \times n! = (n+2)!$

c $(n-4)! = 120$

d $(n-5)! = 1$

e $C_n^3 = 84$

f $C_{12}^r = C_{12}^{2r+3}$

Unité 3

Dérivation et Intégration

Introduction de l'unité

Isaac NEWTON (1642 – 1727) a créé le calcul différentiel et intégral. Leibnitz (1646 – 1716), indépendamment de NEWTON a créé la science de la Dérivation ou la dérivation à l'issue de ses recherches pour trouver les tangentes aux courbes et le calcul des valeurs maximales et minimales des fonctions algébriques ou des fonctions qui modélisent des problèmes sociaux et économiques. NEWTON a présenté l'intégration comme une opération réciproque de la dérivation tandis que Leibnitz l'a présentée comme la limite de des sommes de Riemann, il l'a notée S comme un sigle du mot « somme ». Cette notation est transformée au symbole utilisé actuellement \int qui est près de la lettre S . La science de la Dérivation et de l'intégration est évolué grâce aux apports des plusieurs savants parmi lesquels Berkeley, Lagrange, Laplace, Gauss et Weierstrass. La création de la géométrie analytique a également un grand rôle au développement de cette science.

Compétence attendu de l'unité :

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- ❖ Reconnaître la notion de fonction de variation, le taux de variation et le nombre.
- ❖ Déduire la première dérivée d'une fonction.
- ❖ Reconnaître l'interprétation géométrique de la première dérivée (La pente de la tangente).
- ❖ Étudier la dérivabilité d'une fonction (la dérivé droite et la dérivé gauche).
- ❖ Déduire la relation entre la dérivation et la continuité.
- ❖ Déterminer quelques règles de la Dérivation (dérivation).
- ❖ La dérivée :
 - ▶ de la fonction constante
 - ▶ de la fonction $f(x) = x^n$
 - ▶ de la fonction $f(x) = x$
 - ▶ de la fonction $f(x) = a x^n$
 - ▶ de la somme et la différence de deux fonctions
 - ▶ du produit de deux fonctions
 - ▶ du quotient de deux fonctions
 - ▶ de la fonction composée
 - ▶ de la fonction $y = (f(x))^n$
 - ▶ des fonctions trigonométriques.
- ❖ Utiliser la dérivée dans des applications géométriques comme trouver l'équation de la tangente de la courbe en un point qui lui appartient.
- ❖ Reconnaître la notion intégral – La primitive
- ❖ Reconnaître et déduire les règles de l'intégration.
 - ▶ $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
 - ▶ $\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$ où a constante
 - ▶ $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
 - ▶ $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{n(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C ; n \neq -1$
 - ▶ $\int \sin a x \, dx = -\frac{1}{a} \cos a x + C$ où a constante
 - ▶ $\int \cos a x \, dx = \frac{1}{a} \sin a x + C$ où a constante
 - ▶ $\int \sec^2 a x \, dx = \frac{1}{a} \tan a x + C$ où a constante
 - ▶ $\int f'(x) [f(x)]^n \, dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C$

Vocabulaire de base

Variation	Une fonction dérivable
Taux de variation	Première dérivée
Nombre dérivé	Produit Quotient
Limite de nombre dérivé	Fonction composée
Dérivé à gauche	Fonctions trigonométriques
Dérivé à droite	Intégrale
Dérivabilité	Primitive

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – ordinateur –
Logiciel de graphisme .

Leçons de l'unité

- Leçon (3 - 1): Taux de variation
- Leçon (3 - 2): Dérivation.
- Leçon (3 - 3): Dérivée des fonctions usuelles .
- Leçon (3 - 4): Dérivée des fonctions trigonométriques
- Leçon (3 - 5): Applications sur la dérivation.
- Leçon (3 - 6): Intégration.

Organigramme de l'unité



Unité 3

3 - 1

Taux de variation

Allez Apprendre

- ▶ Fonction de variation.
- ▶ Fonction de taux de variation.
- ▶ Nombre dérivé.

Vocabulaires de base

- ▶ Fonction de variation.
- ▶ Fonction de taux de variation.
- ▶ Nombre dérivé

Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice scientifique



Réfléchissez et discutez

Si une balle de tennis et un ballon de foot tombent en même temps de même hauteur, laquelle de deux balles arrive au sol le premier ? vérifiez votre réponse sachant que la résistance de l'aire est négligeable.

La science de la Dérivation s'intéresse à l'étude de la variation qui se produit dans une variable à la suite d'une autre variable.

Le changement qui survient sur le temps du mouvement de la balle ($t_2 - t_1$) conduit à une variation correspondante de sa vitesse ($v_2 - v_1$), alors on peut comparer la moyenne de la variation de la vitesse par rapport à l'unité du temps de chacun de deux ballons. Pour cela, on calcule le taux $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$.

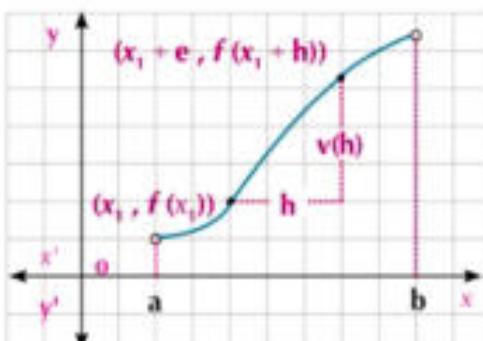


A apprendre

fonction de variation

Si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, alors une variation de valeur de x from x_1 à x_2 sur l'ensemble de définition de f implique à une variation de valeur de valeur de y : de $f(x_1)$ à $f(x_2)$, d'où la variation de $x = \Delta x$ (qui se lit delta x) = $x_2 - x_1$ et la variation de $y = \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

Soit $(x_1, f(x_1))$ un point de la courbe de la fonction f , alors pour toute variation de son abscisse de x_1 à $x_2 = x_1 + h$ où $x_1 + h \in [a; b]$ et $h \neq 0$, correspond à une variation de son ordonnée qui est déterminée par la relation : $V(h) = f(x_1 + h) - f(x_1)$



La fonction V est appelée fonction de variation de f en $x = x_1$

Remarque: Les deux symboles Δx ou h représentent la variation de x

 **Exemple**

1 Si $f(x) = 3x^2 + x - 2$

et x varie de 2 à $2 + h$. Trouvez la fonction de variation v puis calculez la variation de f pour:

a $h = 0.3$

b $h = -0.1$

 **Solution**

$$\because f(x) = 3x^2 + x - 2, x \text{ varie de } 2 \text{ à } 2 + h$$

$$\therefore x_1 = 2, f(2) = 3 \times 4 + 2 - 2 = 12, \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} f(2 + h) &= 3(2 + h)^2 + (2 + h) - 2 = 12 + 12h + 3h^2 + 2 + h - 2 \\ &= 3h^2 + 13h + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(h) &= f(2 + h) - f(2) \\ &= (3h^2 + 13h + 12) - 12 = 3h^2 + 13h \end{aligned}$$

a pour $h = 0.3$

$$\begin{aligned} v(0.3) &= 3(0.3)^2 + 13 \times 0.3 \\ &= 4.17 \end{aligned}$$

b pour $h = -0.1$

$$\begin{aligned} v(-0.1) &= 3(-0.1)^2 + 13(-0.1) \\ &= -1.27 \end{aligned}$$

 **Essayez de résoudre**

1 Soit $f(x) = x^2 - x + 1$. Trouvez la fonction de variation v en $x = 3$, puis calculez :

a $v(0.2)$

b $v(-0.3)$

**A apprendre****Taux de variation**

En divisant la fonction de variation v par h où $h \neq 0$, on obtient une nouvelle fonction T qui est appelée fonction de variation moyenne de f en $x = x_1$ telle que :

$$T(h) = \frac{v(h)}{h} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

 **Exemple :**

2 Si $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x^2 + 1$. Trouvez :

a la fonction de taux de variation en $x = 2$, puis calculez $T(0.3)$

b le taux de variation lorsque x varie de 3 à 4

 **Solution**

a $f(x_1) = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$, $f(x_1 + h) = f(2 + h)$

$$\therefore f(2 + h) = (2 + h)^2 + 1 = h^2 + 4h + 5$$

$$\therefore a(h) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\therefore a(h) = \frac{h^2 + 4h + 5 - 5}{h} = h + 4 \quad \text{et} \quad a(0.3) = 4.3$$

b Lorsque x varie de 3 à 4 ; alors $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

$$f(3) = 9 + 1 = 10 \quad ; \quad f(4) = 16 + 1 = 17$$

$$\text{Taux de variation} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 10}{4 - 3} = 7$$

5 Essayez de résoudre :

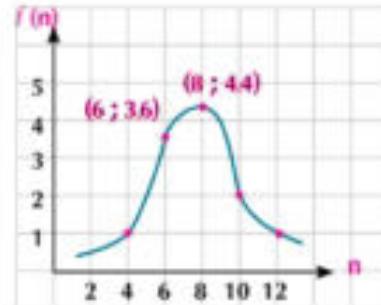
2 Soit $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Trouvez :

a Fonction de taux de variation lorsque $x = 2$, puis trouvez $T(0,2)$
b Taux de variation lorsque x varie de 4,5 à 3

Exemple :

3 La figure ci-contre montre la courbe $s = f(t)$ où s représente les ventes totales dans un marché des ventes des ordinateurs en millions de livres égyptiennes, t représente le temps en mois. A l'aide de la figure, trouvez la moyenne de la variation des ventes totales lorsque t varie :

a de 4 à 8 **b** de 8 à 10



Solution

a De la figure : $f(8) = 4.4$ et $f(4) = 1$

$$\text{Taux de variation de } f = \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \frac{4.4 - 1}{4} = 0.85 \text{ million livres / mois}$$

C'est à dire la moyenne des ventes totales augmente de 0,85 millions de livres par mois pendant cette période.

b De la figure : $f(10) = 2$ et $f(4) = 1$

$$\text{Taux de variation de } f = \frac{f(10) - f(4)}{10 - 4} = \frac{2 - 1}{6} = -0.17 \text{ million livres / mois}$$

C'est à dire la moyenne des ventes totales diminue de 0,17 million de livres par mois pendant cette période.

5 Essayez de résoudre :

3 En utilisant la figure de l'exemple 3 ; trouvez le taux de variation des ventes totales lorsque le temps varie :

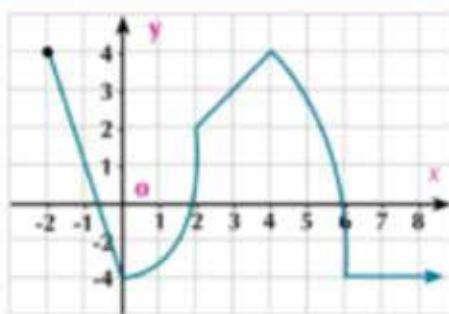
a de 4 à 6

b de 6 à 10

c de 4 à 12

Réflexion critique :

La figure ci-contre montre la courbe de la fonction f où $y = f(x)$. Déterminez les intervalles dans lesquels la moyenne de la variation de f est constante. Expliquez votre réponse.

**A apprendre****Nombre dérivé**

Soient $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$ et $x_1, x_1 + h \in [a ; b]$:

Le nombre dérivé de f en x_1 est $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} T(h)$ à condition que cette limite existe.

**Exemple**

4 (4) Dans ce qui suit, trouvez le nombre dérivé de f en $x = x_1$ puis trouvez le nombre dérivé de f aux valeurs données de x :

a $f(x) = 3x^2 + 2$ en $x = 2$

**Solution**

a $\because f(x) = 3x^2 + 2 \quad \therefore \text{en } x = x_1, \text{ alors } f(x_1) = 3x_1^2 + 2,$
 $f(x_1 + h)^2 = 3(x_1 + h)^2 + 2 = 3x_1^2 + 6x_1 h + 3h^2 + 2$

$$\begin{aligned} \text{Le nombre dérivé de } f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x_1 h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x_1 + 3h) = 6x_1 \end{aligned}$$

Lorsque $x = 2 \quad \therefore x_1 = 2$ et le nombre dérivé de $f = 6 \times 2 = 12$

Applications quotidiennes :**Exemple**

6 On jette un caillou dans l'eau stagnante. Il se forme une vague circulaire dont le rayon croît en conservant sa forme. Déterminez la limite du taux de variation de son aire par rapport à la longueur de son rayon lorsque le rayon est égal à 3,5 cm ($\pi = \frac{22}{7}$).

Solution

Modalisation

Soit la longueur du rayon de la vague = x cm

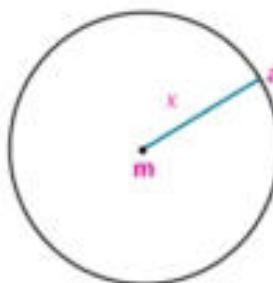
∴ Aire de la vague $a = \pi x^2$ cm²

$$A = f(x) = \pi x^2$$

Lorsque x varie de x_1 à $x_1 + h$

$$\begin{aligned} \text{Donc le taux de variation de } a &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(x_1 + h)^2 - \pi x_1^2}{h} \\ &= \pi \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1 + h)^2 - x_1^2}{h} = 2\pi x_1 \end{aligned}$$

Lorsque $x = x_1 = 3.5$ ∴ le taux de variation de $a = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 = 22$



5 Essayez de résoudre

6 Une plaque métallique a la forme d'un carré se dilate régulièrement en conservant sa forme.

Calculez le taux de variation de son aire lorsque sa longueur varie de 3 à 3,4 puis calculez la limite du taux de variation de son aire si la longueur de son côté est égale à 5 cm.

Exemple

7 Dans une réaction chimique, la quantité résultante d'une matière A après n secondes est donnée par la relation : $y = t^3$ mg. milligrammes. Trouvez le taux de variation instantané de la production de la matière A en $n = 2$ secondes.

Solution

Supposons que $y = f(t) = t^3$, alors le taux de variation instantané de la production de la matière A est la limite du taux de variation de f .

$$\begin{aligned} \text{En } t = t_1, \text{ alors la limite du taux de variation de } f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n + h) - f(n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n + h)^3 - n^3}{h} = 3n^2 \end{aligned}$$

En $t = t_1 = 2$ seconds

∴ La limite du taux de variation instantané de la production de la matière A = $3(2)^2 = 12$ milligrammes/secondes

5 Essayez de résoudre

7 La taille de l'échantillon de bactéries en un instant t (mesuré en minutes) est donnée par la relation : $y = 2t^3 + 100$ milligrammes. Trouvez le taux de variation instantané de la fonction f en $t = 5$

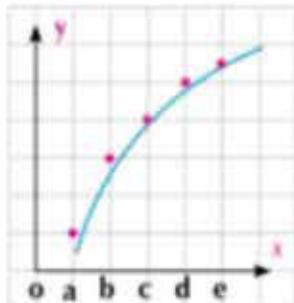
Exercices 3-1

Choisissez la bonne réponse parmi les proposés :

- 1 Si le taux de variation de $f = 2.4$ lorsque x varie de -3 à 3.2 ; alors la variation de f est égale à
 - a 0.32
 - b 0.48
 - c 3.6
 - d 7.2
- 2 Si le taux de variation de $f = 5$ lorsque x varie de -2 à 4 ; $f(2) = 6$, alors $f(4)$ égale
 - a -4
 - b 7
 - c 8
 - d 16
- 3 Le taux de variation du volume d'un cube lorsque son arête varie de 5 cm à 7 cm est égale à _____
 - a 125
 - b 343
 - c 218
 - d 109
- 4 La figure ci-contre, représente la courbe de la fonction f où $y = f(x)$. Dans quel intervalle parmi les suivants, le taux de variation de f est le plus grand?
 - a $[a ; b]$
 - b $[b ; c]$
 - c $[c ; d]$
 - d $[a ; e]$

Répondez aux questions suivantes :

- 5 Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$, trouvez la variation de f lorsque
 - a x varie de 2 à 2.1
 - b $x = -2$ et $h = 1$
- 6 Dans ce qui suit, trouvez la fonction du taux de variation de f en $x = x_1$, puis déduisez le nombre dérivé de f en x_1 :
 - a $f(x) = 2x^3$ en $x_1 = 2$
- 7 **En lien avec les aires :** Une plaque métallique a la forme d'un carré. Sous l'effet du froid, elle se contracte en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire par rapport à la longueur de son côté lorsque sa longueur est égale à 8cm .
- 8 **En lien avec les volumes :** Une sphère métallique se délatte sous l'effet de la chaleur en conservant sa forme. Calculez la limite du taux de variation de son volume par rapport à la longueur de son rayon quand la longueur de son rayon est égale à 7 cm .



En lien avec la géométrie :

- 9 Une bulle sphérique de savon se dilate en conservant sa forme, calculez le taux de variation de son aire lorsque le rayon se varie de 0,5 à 0,6 sachant que l'aire de la sphère = $4\pi r^2$ (r est le rayon de la sphère).
- 10 Une plaque triangulaire dont la longueur de sa base est égale au double de la hauteur correspondante à cette base. Elle se dilate sous l'effet de la chaleur en conservant sa forme. Calculez le taux de variation de son aire lorsque son hauteur varie de 10 cm à 8,4 cm.

Unité 3

Dérivation

3 - 2

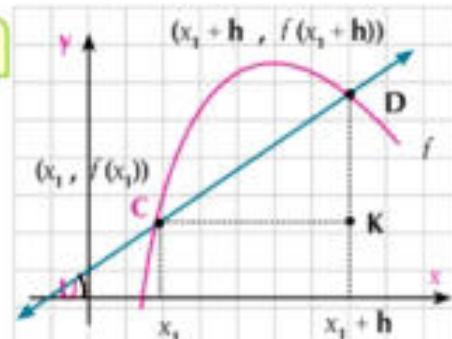
Allez apprendre

- Première dérivée.
- Interprétation géométrique de la Première dérivée.
- Pente de la tangente.



Réfléchissez et discutez

1 La figure (1) montre la courbe de la fonction $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$. \overleftrightarrow{CD} coupe la courbe aux points $C(x_1, f(x_1))$ et $D(x_1 + h, f(x_1 + h))$.

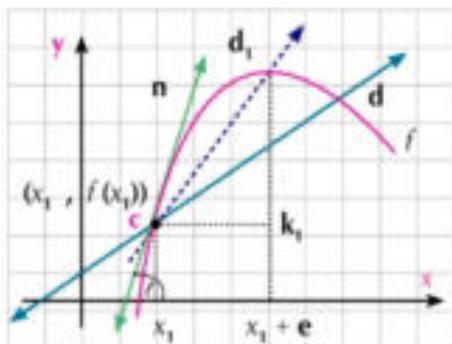


Trouvez la pente de la sécante \overleftrightarrow{CD} .

fig. (1)

2 Si x varie de x_1 à $x_1 + h$, comparez le taux de variation de f et la pente de la sécante \overleftrightarrow{CD} . La relation suivante est-elle vraie ?
 $\text{La pente de la sécante } \overleftrightarrow{CD} = \tan \theta = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = T(h)$

3 Si le point $C(x_1, f(x_1))$ est un point fixe de la courbe représentative de la fonction f . Le point D se déplace sur la courbe pour qu'il se rapproche du point C . \overleftrightarrow{CD} prend la position de \overleftrightarrow{CN} . Elle devient une tangente de la courbe en C . C'est-à-dire $h \rightarrow 0$



Trouvez la pente de la tangente de la courbe de f en C .

fig. (2)

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Remarquez que :

La pente de la tangente en $C = \tan \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

C'est-à-dire :

La pente de la tangente de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est égale à la limite du taux de variation de f en $x = x_1$


Exemple

1 Trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = 3x^2 - 5$ au point $(2 ; 7)$ puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.


Solution

$\therefore f(2) = 3(2)^2 - 5 = 7 \quad \therefore$ le point des coordonnées $(2 ; 7)$ appartient à la courbe représentative de f

La pente de la tangente en $(x = 2)$ = le nombre dérivé de f en $(x = 2)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 \therefore \text{La pente de la tangente} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 5 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 3h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 3h) = 12 \\
 \tan \varphi &= 12 \quad \therefore \varphi = \tan^{-1}(12) \simeq 85^\circ 14'
 \end{aligned}$$


Essayez de résoudre:

1 Trouver la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 - 4$ au point $(1 ; -3)$ puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.


A apprendre
Première dérivée

Pour toute valeur de x de l'ensemble de définition de la fonction f , correspond une seule valeur de la limite du taux de variation de f . Donc le nombre dérivé est aussi une fonction de la variable x qu'on l'appelle la première dérivée de la fonction f

Définition

Si $f: [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in [a ; b]$, alors **la dérivée f'** :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ à condition que la limite existe}$$

Symboles de la dérivée :

Si $y = f(x)$, on note la première dérivée par :

y' ou f' qui se lit f prime ou y prime

$\frac{dy}{dx}$ qui se lit dy sur dx ou la dérivée de y par rapport à x

Remarquez que la pente de la tangente de la courbe $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est $f'(x_1)$

Exemple :

2 En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^2 - x + 1$ puis trouvez la pente de la tangente au point de coordonnées $(-2 ; 7)$

Solution

$$\because f(x) = x^2 - x + 1$$

$$\therefore f(x+h) = (x+h)^2 - (x+h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1,$$

$$f(x+h) - f(x) = (2x + h - 1)h$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x + h - 1)h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) \quad f'(x) = 2x - 1$$

$$\therefore f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7 \quad \therefore \text{ le point } (-2 ; 7) \text{ est situé sur la courbe de } f$$

$$\text{La pente de la tangente au point de coordonnées } (-2 ; 7) = f'(-2) = 2(-2) - 1 = -5$$

Essayez de résoudre

2 En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$ puis trouvez la pente de la tangente au point de coordonnées $(-1 ; 6)$.

A apprendre**Dérivabilité d'une fonction**

On dit que la fonction f est dérivable en $x = a$ (a appartient à l'ensemble de définition de f) si et seulement si $f'(a)$ existe où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Si la dérivé d'une fonction f existe pour tout x appartenant à l'intervalle $[c ; d]$, on dit que la fonction est dérivable sur cette intervalle.

Dans l'exemple (2) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une dérivé de fonction f où $f'(x) = 2x - 1$ pour cela la fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .

Exemple

3 Démontrez que la fonction f telle que $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable en $x = 2$

Solution

$$\because \text{ L'ensemble de définition de } f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad \therefore f \text{ est définie en } x = 2, f(2) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h-1}{2+h+1} - \frac{1}{3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h - 3 - h}{3h(3+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{3h(3+h)} = \frac{2}{9} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\therefore f \text{ est dérivable en } x = 2$$

5 Essayez de résoudre

3) Démontez que la fonction f telle que $f(x) = x^2 - x + 1$ est dérivable en $x = 1$

Dérivée à droite et dérivée à gauche

Si f est une fonction définie en $x = a$ (où a appartient à l'ensemble de définition de la fonction) et la règle à gauche de la fonction est différente de celle à la droite de la fonction, on détermine la dérivée à droite $f'(a^+)$ et la dérivée à gauche $f'(a^-)$ où :

$$\text{La dérivée à droite } f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ la dérivée à gauche } f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La fonction est dérivable si et seulement si $f'(a^+) = f'(a^-)$. La dérivée de la fonction est notée $f'(a)$

Exemple

4) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ n'est pas dérivable en $x = 2$

Solution

\because L'ensemble de définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore f$ est définie en $x = 2$; $f(2) = (2)^2 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore f'(2^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} & f'(2^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} & &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h+2) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} & &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \\ & \therefore f^-(2^-) = 4 & \therefore f^-(2^+) = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f'(2^+) \neq f'(2^-)$

$\therefore f'(2)$ n'existe pas, c'est-à-dire que la fonction f n'est pas dérivable en $x = 2$

5 Essayez de résoudre

4) Etudiez la dérivation de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 2 \\ 4x - 9 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

Pensé critique :

- Dans les paragraphes Exemple 4 et Essayez de résoudre 4, étudiez la continuité de deux fonctions et déduisez la relation entre la dérivation d'une fonction en un point et la continuité de la fonction en même point.
- Est-ce que la fonction f telle que $f(x) = |x - 2|$ est dérivable en $x = 2$?

Dérivabilité et Continuité

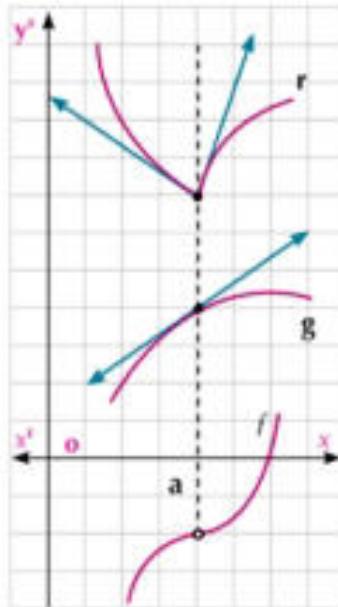
Théorème

➤ Si la fonction f telle que $y = f(x)$ est dérivable en $x = a$, alors f est continue en $x = a$.

La figure ci-contre indique :

- La continuité de la fonction en un point ne veut pas nécessairement dire qu'elle dérivable en ce point, comme dans le cas des fonctions f et g .
- Si la fonction n'est pas continue en $x = a$, alors la fonction n'est pas dérivable en $x = a$, comme dans le cas de la fonction f .

Remarque importante : En étudiant la dérivabilité d'une fonction en un point de son ensemble de définition, il est préférable d'étudier d'abord sa continuité en ce point soit la fonction continue alors on étudie sa dérivabilité soit elle n'est pas continue en ce point dans ce cas la fonction n'est pas dérivable en ce point.



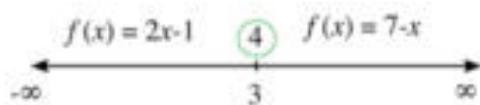
Exemple

5) Etudiez la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 3 \\ 7-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

Solution

Etude de continuité de la fonction en $x = 3$

$$(1) f(3) = 7 - 3 = 4$$



$$(2) f(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x-1) = 5, \quad f(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (7-x) = 4$$

$$\therefore f(3^-) \neq f(3^+) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ n'existe pas et } f \text{ n'est pas continue en } x = 3$$

$$\therefore f \text{ n'est pas continue en } x = 3$$

$$\therefore f \text{ n'est pas dérivable en } x = 3$$

Essayez de résoudre

5) Etudiez la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en $x = 1$

6) Si la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ ax + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est dérivable en $x = 2$; alors $a + b$ égale à :

a) 4

b) -4

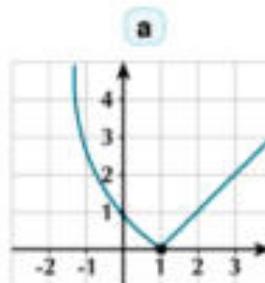
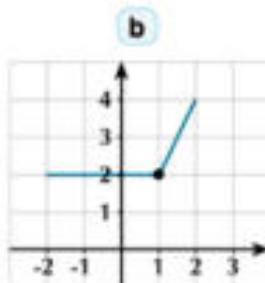
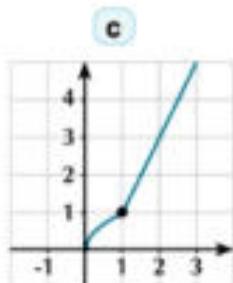
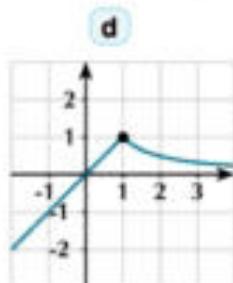
c) -8

d) 8


Exercices (3 - 2)


Répondez aux questions suivantes :

- 1 En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^2 - 5$ en $x = 3$; puis expliquez le sens géométrique de la dérivée de la fonction en $x = 3$.
- 2 En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = 1 - 5x - 3x^2$; puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.
- 3 En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée des fonctions définies ci-dessous:
 - a $f(x) = \sqrt{3x + 1}$
 - b $f(x) = \frac{1}{x}$
- 4 Étudiez la dérivable de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$
- 5 Soit une fonction $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ a x^2 + 8x - 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ continue en $x = 2$. Trouvez la valeur de constant a .
- 6 Soit une fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} a x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ continue en $x = 2$. Trouvez la valeur de constant a , puis étudiez dérivable de la fonction en $x = 2$
- 7 Si $f(x) = a x^2 + b$ où a et b sont constant, trouvez :
 - a la première dérivée de la fonction f au point $(x ; y)$
 - b les valeurs de a et b si la pente de la tangente de la courbe de la fonction f au point $(2 ; -3)$ qui lui appartient est égale à 12
- 8 Comparez entre la dérivée à droite et la dérivée à gauche de chacune des fonctions suivantes, puis démontrez que chacune d'elles n'est pas dérivable en $x = 1$.



Unité 3

3 - 3

Dérivée des fonctions usuelles

Découvrez

Allez apprendre

- Dérivée de la fonction constante
- Dérivée de la fonction $f(x) = x^n$
- Dérivée de la fonction $f(x) = x$
- Dérivée de la fonction $f(x) = ax^n$
- Dérivée de la somme et la différence de deux fonctions
- Dérivée du produit de deux fonctions
- du quotient de deux fonctions
- Dérivée de la fonction composée
- Dérivée de la fonction $y = (f(x))^n$.

Vocabulaire de base

- Première dérivée.
- Produit.
- Quotient.
- Fonction composée.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

A apprendre

Dérivée d'une fonction

1 - Derivative of the constant function

Si $y = c$ où $c \in \mathbb{R}$, alors $\frac{dy}{dx} = 0$

Remarquez que :

$$y = f(x) = c, \quad f(x+h) = c$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \text{zero} \quad (h \neq 0)$$

2 - Dérivée de la fonction $f(x) = x^n$

Si $y = x^n$ où $n \in \mathbb{R}$, alors $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

Si $y = x$, alors $\frac{dy}{dx} = 1$

Si $y = a x^n$ où $a, n \in \mathbb{R}$, alors $\frac{dy}{dx} = a n x^{n-1}$

Exemple

1) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = -3$

b) $y = x^4$

c) $y = 5x$

d) $y = \frac{3}{x^2}$

e) $y = \sqrt{x^3}$

Solution

a) $\because y = -3 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

b) $\because y = x^4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4 x^3$

c) $\because y = 5x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 5$

d) $\because y = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -6x^{-3}$

e) $\because y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ où $x \geq 0$

Essayez de résoudre

1 Dans ce qui suit, trouve $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = -\sqrt{2}$

b) $y = \frac{4}{3}\pi x^3$

c) $y = \frac{-4}{x^3}$

d) $y = \sqrt[3]{x^5}$

Dérivée de la somme ou de la différence de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x , alors $f \pm h$ est aussi dérivable par rapport à x , $\frac{d}{dx}(f \pm h) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dh}{dx}$ et en générale :

Si f_1, f_2, \dots, f_n sont des fonctions dérivables par rapport à x ; alors:

$$\frac{d}{dx}(f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm \dots \pm f_n)(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm f_3'(x) \pm \dots \pm f_n'(x)$$

Exemple

2 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = 2x^6 + x^{-9}$

b) $y = \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

Solution

a) $\because y = 2x^6 + x^{-9}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^5 - 9x^{-10}$

b) $\because y = \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

$= 1 - 2\sqrt{x} = 1 - 2x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 2 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = -x^{-\frac{1}{2}}$

Essayez de résoudre

2 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = 3x^8 - 2x^5 + 6x + 1$

b) $y = \frac{5}{x} + x\sqrt{x} + \sqrt{3}x - 4$

Dérivée du produit de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x , alors la fonction $(f \times h)$ est aussi dérivable par rapport à x et on a: $\frac{d}{dx}(f \times h) = f \frac{dh}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}$


Exemple

3 Si $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$, trouvez $\frac{dy}{dx}$ puis trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = -1$


Solution

$$\begin{aligned} \because y &= (x^2 + 1)(x^3 + 3) & \therefore \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 1) \times 3x^2 + (x^3 + 3) \times 2x \\ & & &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ & & &= 5x^4 + 3x^2 + 6x \\ \text{en } x = -1 & & \therefore \frac{dy}{dx} &= 5(-1)^4 + 3(-1)^2 + 6(-1) = 2 \end{aligned}$$


Essayez de résoudre

3 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$, puis $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$

Dérivée du quotient de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x et $h(x) \neq 0$, alors la fonction $(\frac{f}{h})$ est aussi dérivable par rapport à x et

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{h} \right) = \frac{g \frac{dz}{dx} - z \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

C'est-à-dire $(\frac{f}{h})' = \frac{hf' - hf}{h^2}$


Exemple

4 Si $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$, trouvez $\frac{dy}{dx}$


Solution

$$\begin{aligned} \because y &= \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} & \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^3 + 1) \times 2x - (x^2 - 1) \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2} \\ & & \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2} \\ & & &= \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$


Essayez de résoudre

4 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x + 5}$

Dérivée de la fonction composée**Travail coopératif****Travaillez avec votre camarade**

Si $y = (3x^2 - 1)^4$; trouvez $\frac{dy}{dx}$

Est-ce que vous avez trouvé des opérations ? Est-ce que vous avez trouvé une difficulté à trouver la dérivée ?

Vous avez déjà étudié la composé d'une fonction, on sait que :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Si f et g sont deux fonctions telles que $y = f(z)$, et $z = g(x)$, alors $y = f[g(x)]$, on dit que y est une fonction en x

Théorème

Si $y = f(z)$ est une fonction dérivable par rapport à z , et $z = h(x)$ est dérivable par rapport à x , alors $y = f(h(x))$ est dérivable par rapport à x et : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

Ce théorème est connu par Règle de la dérivée en chaîne

**Exemple**

5 Si $y = (x^2 - 3x + 1)^5$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Solution

$$\text{Soit } z = x^2 - 3x + 1 \quad \therefore y = z^5$$

y est dérivable par rapport à z (fonction polynôme en z)

$$\text{et } \frac{dy}{dz} = 5z^4$$

h est dérivable par rapport à x (fonction polynôme en x)

$$\text{et } \frac{dz}{dx} = 2x - 3$$

En appliquant la règle de la dérivée en chaîne :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 5z^4 \times (2x - 3)$$

En substituant de z

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \times (2x - 3)$$

5 Essayez de résoudre

5 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ en appliquant la règle de la dérivée en chaîne dans le paragraphe **Travail coopératif** et vérifiez votre travail précédent dans ce paragraphe.

 **Exemple**

6 Si $y = \sqrt[3]{z}$, $z = x^2 - 3x + 2$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

 **Solution**

$$\because y = z^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}}$$

$$\because z = x^2 - 3x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} (2x - 3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (2x - 3) (x^2 - 3x + 2)^{-\frac{2}{3}}$$

5 Essayez de résoudre

6 Si $y = 3z^2 - 1$ et $z = \frac{5}{x}$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Déivation de la fonction de forme $[f(x)]^n$

Si $y = [f(x)]^n$, où f est dérivable par rapport à x et n est un nombre naturel,

alors $\frac{dy}{dx} = n [f(x)]^{n-1} \times f'(x)$

 **Exemple**

7 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$

a $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$

b $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5$

 **Solution**

a $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 10 (6x^3 + 3x + 1)^9 \times \frac{d}{dx} (6x^3 + 3x + 1) \\ &= 10 (18x^2 + 3) (6x^3 + 3x + 1)^9 \\ &= 30 (6x^2 + 1) (6x^3 + 3x + 1)^9\end{aligned}$$

b $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 5 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \times \frac{(x+1) \times 1 - (x-1) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= 5 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \times \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{10}{(x+1)^2} \times \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 = \frac{10(x-1)^4}{(x+1)^6}\end{aligned}$$

5 Essayez de résoudre

7) si $y = \left(\frac{5x^2}{3x^2 + 2}\right)^3$, trouvez $\frac{dy}{dx}$

Exemple

8) Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 4$, trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$

Solution

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 5 \times 1 \\&= x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Lorsque } f'(x) &= 2 \quad \therefore x^2 - 4x + 5 = 2 \quad \text{d'où } x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \therefore (x-1)(x-3) &= 0 \quad \therefore x = 1 \quad \text{où} \quad x = 3\end{aligned}$$

5 Essayez de résoudre

8) Dans ce qui suit, trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 7$:

a) $f(x) = x^3 - 5x + 2$

b) $f(x) = (x-5)^7$

**Exercices 3 - 3**

Complétez ce qui suit :

1) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^3}\right) =$ _____

2) $\frac{d}{dx} (5\pi) =$ _____

3) $\frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{2}}) =$ _____

4) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) =$ _____

5) $\frac{d}{dx} (5x^2 + 3x + 2) =$ _____

6) $\frac{d}{dx} (\sqrt{2}x^7 - \frac{x^5}{5} + \pi) =$ _____

Trouvez le dérivé premier de chacune des fonctions suivantes par rapport à x .

7) $y = 2x^6 + 3\sqrt{x}$

8) $y = \frac{4x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x}$

9) $y = x(3x^2 - \sqrt{x})$

10) $y = \frac{4x^2 \cdot x + 3}{\sqrt{x}}$

11) $y = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$

Trouvez le dérivé premier de chacune des fonctions suivantes :

12) $y = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$

13) $y = (x^2 - \sqrt{x})(x^2 + 2\sqrt{x})$

14) $y = (2x^4 - 3x + 4)(x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{x})$

15) $y = \frac{5x - 2}{5 - x + 1}$

16) $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x + 1}$

17) $y = \frac{x - 2}{x + 5}$

18) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = 2$

a) $y = (x^3 + x - 9)^5$

b) $y^3 = 3x^2 - 4$

c) $y = \sqrt[3]{(2x^3 + 4x + 3)^2}$

d) $y = z^2 \quad , \quad z = 3x^2 - 2$

e) $y = 2z^3 \quad , \quad z = 8x - 11$

f) $y = \frac{z - 1}{z + 1} \quad , \quad z = \frac{x + 1}{x - 1}$

19) Soient $y = a - x^3 + b - x^2$; $\frac{dy}{dx} = 8$ en $x = 1$, et le taux de variation de y lorsque x varie de -1 à 2 est égale à 7 . Trouvez les valeurs de deux constantes a et b .20) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$ aux points dont l'abscisse est indiquée :

a) $y = \left(\frac{x^2 - 2}{3 + x^2}\right)^7 \quad \text{en } x = 0$

b) $y = (x^2 + 1)^5 (x^2 - x + 1)^{-4} \quad \text{en } x = 1$



Activité

21) **En lien avec les volumes.** On verse de l'huile avec un taux de $10 \text{ cm}^3/\text{s}$ dans un baril cylindrique dont le rayon de la base est égale à 90 cm . Trouvez le taux d'élévation de l'huile dans le baril.



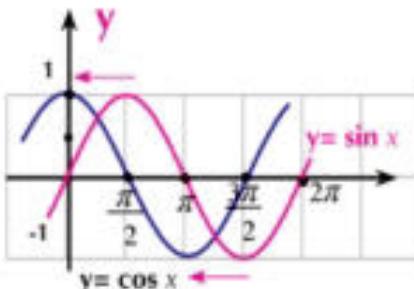
A découvrir

Dans cette partie d'étude les mesures des angles sont données en radians.

La figure ci-contre indique la courbe représentative de la fonction sinus

$y = \sin x$ lorsqu'on le déplace à gauche d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, on obtient la fonction cosinus $y = \cos x$

Ainsi que : $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Pour cela, il suffit de trouver la dérivée de $\sin x$ et on en déduit les autres dérivées des fonctions trigonométriques.



Allez apprendre

► Dérivées des fonctions

trigonométriques :

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$f(x) = \tan x$

Dérivée des fonctions trigonométriques



A apprendre

Dérivée de la fonction sinus

Si $f(x) = \sin x$, alors $f'(x) = \cos x$

$\because f(x) = \sin x$, $f(x+h) = \sin(x+h)$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x \sin h}{h} + \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} \right] \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= \cos x \times 1 + \sin x \times 0 = \cos x \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

* (La démonstration ne peut pas être l'objet d'un examen)

Vocabulaire de base

► Dérivée

► Fonctions

trigonométriques

Aides pédagogiques

► Calculatrice scientifique

► Logiciel de graphisme

En général : Si z est une fonction dérivable par rapport à x , alors :

$$\frac{d}{dx} [\sin z] = \cos z \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{[La règle de la dérivée en chaîne]}$$

Exemple

1 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = 5 \sin x$

b) $y = x^3 \sin x$

c) $y = 2 \sin (3x + 4)$

Solution

a) $\because y = 5 \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \times \frac{d}{dx} (\sin x) = 5 \cos x$$

b) $\because y = x^3 \sin x$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= x^3 \times \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin x \times \frac{d}{dx} (x^3) \\ &= x^3 \cos x + 3x^2 \sin x \end{aligned}$$

c) $\because y = 2 \sin (3x + 4)$

Posons $z = 3x + 4$ alors : $y = 2 \sin z$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 3, \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cos z \quad \text{En appliquant la règle de la dérivée en chaîne } (\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \cos z \times 3 = 2 \cos (3x + 4) \times 3 = 6 \cos (3x + 4)$$

On peut trouver $\frac{dy}{dx}$ directement en utilisant la généralisation précédente, comme suivant :

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \cos (3x + 4) \times 3 = 6 \cos (3x + 4)$$

5 Essayer de résoudre

1 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = x^2 + \sin x$

b) $y = \sin \frac{\pi}{4} - 7 \sin x$

c) $y = 5 \sin (3-2x)$

A apprendre

1- La dérivée de la fonction cosinus

Si $y = \cos x$ alors $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

2- La dérivée de la fonction tangente

Si $y = \tan x$ alors $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

Remarquez que :

$$\begin{aligned}
 (1) \frac{d}{dx} (\cos x) &= \frac{d}{dx} [\sin(\frac{\pi}{2} - x)] \\
 &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \times -1 \\
 &= -\sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \frac{d}{dx} (\tan x) &= \frac{d}{dx} (\frac{\sin x}{\cos x}) \\
 &= \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x) \times \sin x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
 \end{aligned}$$

Exemple**2 trouvez la dérivée première de ce qui suit :**

a $y = 2 \cos x - \tan 5x$ **b** $y = \tan(1 - x^2)$ **c** $y = \cos^2(4x^2 - 7)$

Solution

a $\because y = 2 \cos x - \tan 5x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(-\sin x) - \sec^2 5x \times 5 = -2 \sin x - 5 \sec^2 5x$$

b $\because y = \tan(1 - x^2)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2(1 - x^2) \times -2x = -2x \sec^2(1 - x^2)$

c $\because y = \cos^3(4x^2 - 7)$ posons $y = \cos^3 z$. Supposons que $z = 4x^2 - 7$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = 3 \cos^2 z \times -\sin z = -3 \sin z \cos^2 z, \quad \frac{dz}{dx} = 8x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = -24x \sin z \cos^2 z$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -24x \sin(4x^2 - 7) \cos^2(4x^2 - 7)$$

3 Essayer de résoudre

2 Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = 2 \tan 3x$ **b** $y = 2 \cos(4 - 3x^2)$ **c** $y = 2 \sin x \cos x$

d $y = 2x \tan x$ **e** $y = \tan^2 3x$ **f** $y = \tan 4x^3$

Exemple

3 Soit $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Démontrez que $(1 - \sin x) \frac{dy}{dx} = 1$, puis trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

Solution

$$\therefore y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$



Rappel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \sin x} \quad \text{d'où: } (1 - \sin x) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{6}, \text{ alors } (1 - \sin \frac{\pi}{6}) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$(1 - \frac{1}{2}) \frac{dy}{dx} = 1 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2$$

4. Essayer de résoudre

3) Soit $y = 2x \sin x \cos x$. Démontrez que $\frac{dy}{dx} = \sin 2x + 2x \cos 2x$

4 - La dérivée de la fonction cotangente

Si $y = \cot x$ où $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

alors: $\frac{d}{dx} (\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

5 - La dérivée de la fonction sécante

Si $y = \sec x$ où :

$$x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

alors:

$$\frac{d}{dx} (\sec x) = \sec x \tan x \quad \text{(justifiez)}$$

6 - La dérivée de la fonction cosécante :

Si $y = \operatorname{cosec} x$ où

$$x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Alors : $\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x \quad \text{justifiez}$

1 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

$$y = \text{cosec } x$$

a) $y = 3x^5 + 4 \cot x$

b)

$$y = 3 \sec x - 5 \tan x$$

c) $y = x^3 \text{cosec } x$

d) $y = \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x}$

 **Solution**

a) $\frac{dy}{dx} = 3 \times 5x^4 + 4(-\text{cosec}^2 x) = 15x^4 - 4 \text{cosec}^2 x$

b) $\frac{dy}{dx} = 3(\sec x \tan x) - 5 \sec^2 x = \sec x [3 \tan x - 5 \sec x]$

c) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{cosec } x + x^3(-\text{cosec } x \cot x) = x^2 \text{cosec } x [3 - x \cot x]$

d)
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \cot x)(\csc^2 x) - (1 - \cot x)(-\csc^2 x)}{(1 + \cot x)^2} \\ &= \frac{\csc^2 x [1 + \cot x + 1 - \cot x]}{(1 + \cot x)^2} = \frac{2 \csc^2 x}{(1 + \cot x)^2} \end{aligned}$$

 **Essayez de résoudre**

1 Déterminez $\frac{dy}{dx}$, si y est égale à :

a) $2 \sin x - 3 \cot x$

b) $\cos x + 4 \sec x$

c) $\sec x \tan x$

d) $\text{cosec } x \cot x$

e) $\frac{\sec x}{1 + \sec x}$

f) $\frac{1 - \text{cosec } x}{1 + \text{cosec } x}$

**Exercices 3 - 4**

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 Si $y = \sin(2x+5)$, alors $y' =$

a $2 \cos 2x$ b $-2 \cos 2x$ c $\cos(2x+5)$ d $2 \cos(2x+5)$

2 Si $y = 3x - \cos 2x$, alors $y' =$

a $3 - \sin 2x$ b $3 + \sin 2x$ c $3 + 2 \sin 2x$ d $3 - 2 \sin 2x$

3 Si $y = 3 \cos(2 - 4x)$, alors $y' =$

a $4 \sin(2 - 4x)$ b $12 \sin(2 - 4x)$ c $-6 \sin(2 - 4x)$ d $-12 \sin(2 - 4x)$

4 Si $f(x) = \tan(5x - \pi)$, alors $f'(\frac{\pi}{4}) = \dots$

a 5 b $5\sqrt{2}$ c 10 d $10\sqrt{3}$

Complétez ce qui suit :

5 $\frac{d}{dx}(\cos x - \sin x) = \dots$

6 $\frac{d}{dx}(\tan 3x^2) = \dots$

7 $\frac{d}{dx}(\cos 2\pi) = \dots$

8 $\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \dots$

9 $\frac{d}{dx}(x \cos x) = \dots$

Dans chacun des cas suivants, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

10 $y = \sin(4x + 7)$

11 $y = \sin(x^2 + 3)$

12 $y = \cos(5x + 3)$

13 $y = 3 \tan(2x + 3)$

14 $y = \tan(-5x^2 + 19)$

15 $y = \frac{\tan x}{x}$

16 $y = x \sin(3x - 2)$

17 $y = \frac{x}{\cos x}$

18 $y = x^2 \sin(2x^2 + 5)$

19 $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

20 $y = \sec^2 x - 1$

21 $y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

22) $y = \tan \sqrt{x}$

23) $y = 4 \cos^5 x$

24) $y = 4x + 5 \sin 4x$

25) $y = x^3 - 2 \sec x$

26) $y = \operatorname{cosec}(2 - 3x)$

27) $y = \cotg(\pi - \frac{1}{x})$

28) $y = \cos 2x - 5 \cotg 3x$

29) $y = \tan 3x - \operatorname{cosec} 2x$

Trouvez la pente de la tangente à chacune des courbes suivantes :

30) $y = 5 - \sin x$ si $x = \frac{\pi}{4}$

31) $y = \sin x + \sin 2x$ si $x = \frac{\pi}{2}$

32) $y = x \cos 2x$ si $x = \frac{\pi}{4}$

33) $y = x \sqrt{\sin x}$ si $x = \frac{\pi}{2}$

34) Déterminez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ dans tout ce qui suit:

a) $y = 2 \cotg x + \sqrt{2} \sec x$ en $x = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 3 \tan x - \csc^2 x$ en $x = \frac{3\pi}{4}$

35) Démontrez que la tangente à la courbe d'équation $y = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{2}$ fait un angle de $\frac{3\pi}{4}$ avec le sens positif de l'axe des abscisses.

36) Soit $y = \sin^2 x - \cos^2 x$, Démontrez que $\frac{dy}{dx} = 2 \sin 2x$

37) Soit $y = (\sin x + \cos x)^2$, Démontrez que $\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$

38) Soit $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, Démontrez que $(1 + \cos x) \frac{dy}{dx} = 1$

39) Si $y = \sec 4x$, trouvez le taux de variation de y par rapport à x en $x = \frac{\pi}{4}$

Applications sur la dérivation

Préface

Les applications géométriques sur la dérivée d'une fonction nécessitent l'équation de la droite étant donnée sa pente de la droite et un point qui lui appartient. Il est également nécessaire de rappeler la relation entre les pentes de deux droites parallèles ainsi que la relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires.

La pente de la tangente et la pente de la normale à une courbe

On a appris dans cette unité que :

- La première dérivée de la fonction f où $y = f(x)$, veut dire la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction en un point $(x ; y)$ appartenant à la courbe.

Cela veut dire que : la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point (x_1, y_1) qui lui appartient

$$= \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(x_1, y_1)}$$

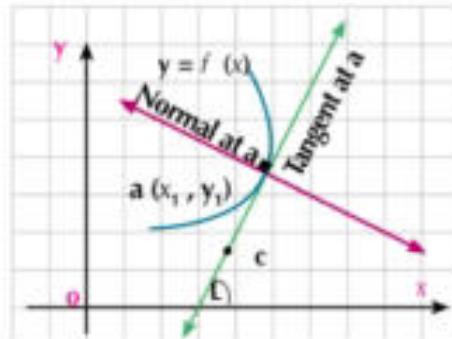
$$\text{et } \tan L = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(x_1, y_1)}$$

où L est la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses.

Remarquez que :

- Si m_1 et m_2 sont les pentes de deux droites ℓ_1 et ℓ_2 alors :
- $\ell_1 \parallel \ell_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$ (condition de parallélisme)
- $\ell_1 \perp \ell_2$ si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$ (condition de perpendicularité)

Pour cela : La pente de la normale à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1 ; y_1)$ qui lui appartient = $- \frac{1}{\left[\frac{dy}{dx} \right]_{(x_1, y_1)}}$



Allez apprendre

- Pente de la tangente
- Pente de la normale

Vocabulaire de base

- Pente de la tangente
- Pente de la normale
- Déplacement
- Vitesse
- Accélération

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Rappel

La pente de la droite d'équation

$$ax + by + c = 0$$

égale à $\frac{-a}{b}$

Exemple

1 Trouvez les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = x^3 - 4x + 3$ auxquels la tangente fait un angle positif de mesure égale à 135° avec la direction positive de l'axe des abscisses.

Solution

$$\because y = x^3 - 4x + 3 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$$

\therefore La tangente fait un angle positif de mesure égale à 135°

\therefore La pente de la tangente $= \tan 135^\circ = -1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4 = -1 \quad \therefore 3x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm 1$$

$$\text{Lorsque } x = -1 \quad \therefore y = (-1)^3 - 4(-1) + 3 = 6$$

$$\text{Lorsque } x = 1 \quad \therefore y = 1 - 4 + 3 = 0$$

\therefore Les coordonnées des points sont $(-1; 6), (1; 0)$

Essayez de résoudre :

1 Trouvez les coordonnées des points de la courbe $y = x^2 - 2x + 3$ auxquels la tangente à la courbe :

a est parallèle à l'axe des abscisses

b perpendiculaire à la droite d'équation $x - 4y + 1 = 0$

Exemple

2 Trouvez la pente de la normale à la courbe d'équation $y = \tan(\pi - \frac{2}{3}x)$ au point de coordonnées $(\pi; \sqrt{3})$

Solution

$$\because y = \tan(\pi - \frac{2}{3}x) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} \sec^2(\pi - \frac{2}{3}x)$$

$$\text{La pente de la tangente au point de coordonnées } (\pi; \sqrt{3}) = -\frac{2}{3} \sec^2(\pi - \frac{2\pi}{3})$$

$$= -\frac{2}{3} \sec^2 \frac{\pi}{3} = -\frac{2}{3} \times 4 = -\frac{8}{3}$$

$$\text{La pente de la normale au point de coordonnées } (\pi; \sqrt{3}) = \frac{3}{8}$$

Essayez de résoudre

2 Trouvez la mesure de l'angle positif que fait la normale à la courbe d'équation $y = \sqrt{2x^2 + 7}$ direction positive de l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-3; 5)$ à une minute près.

Réflexion créative :

Trouvez la valeur de a pour que la droite d'équation $y = 4x + a$ soit tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + 5$

**A apprendre****Equation de la tangente et de la normale à la courbe**

Si (x_1, y_1) est un point de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$, m est la pente de la tangente en ce point, alors:

1 - Equation de la tangente à la courbe au point (x_1, y_1) est : $y - y_1 = m(x - x_1)$

2 - Equation de la normale (la perpendiculaire) à la courbe au point (x_1, y_1) est :

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

**Exemple**

3 Trouvez l'équation de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = 2x^3 - 4x^2 + 3$ aux points qui lui appartiennent et d'abscisses = 2

**Solution**

$$\therefore y = 2x^3 - 4x^2 + 3$$

$$\therefore \text{En } x = 2$$

$$\therefore y = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 3 = 3$$

∴ Les coordonnées du point sont $(2 ; 3)$ se trouve sur la courbe

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x$$

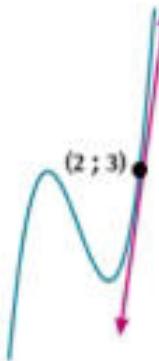
$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,3)} = 6(2)^2 - 8(2) = 8$$

La pente de la tangente = 8 Equation de la tangente est

$$y - 3 = 8(x - 2) \quad \text{i.e. } y - 8x + 13 = 0$$

La pente de la normale = $-\frac{1}{8}$ Equation de la normale est

$$y - 3 = -\frac{1}{8}(x - 2) \quad \text{D'où } 8y + x - 26 = 0$$

**Essayez de résoudre**

3 Trouvez l'équation de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = \frac{x+3}{x+1}$ aux points qui lui appartiennent et d'abscisses = 1.

Est-ce que le point de coordonnées $(-3 ; 4)$ appartient à la tangente ? **Pourquoi ?**

 Exemple

4 Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 4x - \tan x$ au point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$

 Solution

$$\because y = 4x - \tan x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4 - \sec^2 x$$

$$\text{Lorsque } x = \frac{\pi}{4} \quad m = 4 - \sec^2 \frac{\pi}{4} = 2$$

Substituant par $x = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation **on trouve que** : $y = \pi - \tan \frac{\pi}{4} = \pi - 1$

C'est-à-dire que le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, \pi - 1)$ appartient à la courbe

\therefore L'équation de la tangente au point des coordonnées $(\frac{\pi}{4}, \pi - 1)$ est : $y - (\pi - 1) = 2(x - \frac{\pi}{4})$

$$y - \pi + 1 = 2x - \frac{\pi}{2} \quad y = 2x + \frac{\pi}{2} - 1$$

 Essayez de résoudre

5 Trouvez l'équation de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = x \sin 2x$ au point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

 Exemple

5 Si la droite $y = 8x + 5$ est tangente à la courbe $y = ax^3 + bx^2$ au point $(-1; -3)$, trouvez a et b.

 Solution

\because Le point de coordonnées $(-1; -3)$ appartient à la courbe $y = ax^3 + bx^2$

$$\therefore -3 = a(-1)^3 + b(-1)^2 \quad \text{i.e.} \quad a - b = 3 \quad (1)$$

$$\text{La pente de la tangente en un point quelconque} = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx$$

\therefore La droite $y = 8x + 5$ est tangente à la courbe au point $(-1, -3)$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(-1, -3)} = \text{la pente de la droite} = 8$$

$$\therefore 3a(-1)^2 + 2b(-1) = 8 \quad \text{i.e.} \quad 3a - 2b = 8 \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on trouve que $a = 2$ et $b = -1$

 Essayez de résoudre

5 Si la pente de la tangente de la courbe $y = x^2 + ax + b$ au point $(1; 3)$ qui lui appartient est égale à 5, trouvez a et b

**Exemple** En lien avec les aires

6 La tangente à la courbe d'équation $y = \frac{4}{x}$ au point C qui se trouve au premier quadrant coupe les axes des coordonnées en deux points M et N. Démontrez que l'aire du $\triangle OMN$ est constante et n'est pas liée à la position du point C appartenant à la courbe.

**Solution**

$$\therefore y = 4x^{-1}$$

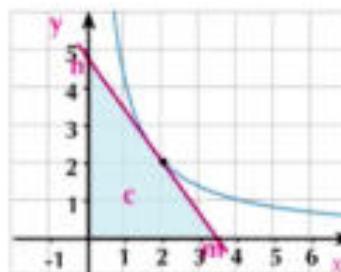
On suppose que $C(a, \frac{4}{a})$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2}$

\therefore La pente de la normale au point $C(a, \frac{4}{a})$ égale $\frac{4}{a^2}$

L'équation de la tangente en A est : $y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a)$

Multippliant par a^2 $\therefore a^2 y - 4a = -4x + 4a$

$$\therefore \text{L'équation de } \overleftrightarrow{MN} \text{ est } a^2 y + 4x = 8a$$



Pour déterminer le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses, on pose $y = 0$

$$\therefore x = 2a \quad \text{alors } OM = 2a \text{ unités de longueur}$$

Pour déterminer le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, on pose $x = 0$

$$\therefore y = \frac{8}{a} \quad \text{d'où } ON = \frac{8}{a} \text{ unités de longueur}$$

$$\therefore \text{L'aire du } \triangle OMN = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{8}{a} = 8 \text{ unités carrées}$$

Qui est une quantité constante n'est pas liée à la position du point C appartenant à la courbe.

**Essayez de résoudre**En lien avec les aires:

6 Trouvez l'aire de la surface du triangle limité par l'axe des abscisses, la tangente et la normale à la courbe d'équation $y = x^2 - 6x + 13$ au point de coordonnées (4 ; 5) qui appartient à la courbe.

**Exercices 3 - 5**

1 Complétez ce qui suit :

a La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f telle que $y = f(x)$ en un point quelconque qui lui appartient est _____

b La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \cos X$ si $x = \frac{\pi}{3}$ égale à _____

c Si la droite d'équation $y = 8 - 3x$ est une tangente à la courbe de la fonction f au point de coordonnées $(3 ; -1)$, alors $f'(3) =$ _____

d La tangente à la courbe d'équation $y = (3x - 5)^3$ au point de coordonnées $(2 ; 1)$ fait un angle positif avec la direction positif de l'axe des abscisses dont la tangente est égale à _____

e La pente de la normale à la courbe d'équation $y = \sin 2x$ au point appartenant à la courbe et d'abscisse $x = \frac{\pi}{6}$ égale à _____

f L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (x - 1)^2$ au point de coordonnées $(2 ; 1)$ est _____

Répondez aux questions suivantes :

2 Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + \frac{1}{x} - 1$ avec la direction positive de l'axe des abscisses $x = 1$

3 Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x+3}{x-2}$ avec la direction positive de l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3 ; 6)$. _____

4 Trouvez les points de la courbe $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ auxquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses .

5 Trouvez les coordonnées des points de la courbe $y = 3x^3 - 11x + 5$ auxquels la tangente à la courbe

a est parallèle à la droite d'équation $2x + y - 5 = 0$

b est perpendiculaire à la droite d'équation $25y + x = 6$

c fait un angle positif avec la direction positif de l'axe des abscisses dont la tangente = -11

6 Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = (x - 2)(x + 1)$ aux points d'intersection avec les axes des coordonnées

7 Trouvez l'équation de la normale à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + 1}{2 - x^2}$ au point d'abscisse $x = 0$

8 Trouvez l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 2 \sin x + \cos x$ au point de coordonnées $(0 ; 1)$.

9 Présentez que la tangente à la courbe $y = x^2 + x - 1$ au point de coordonnées $(1 ; 1)$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ au même point .

Intégration

3 - 6



A découvrir

D'après votre étude précédent, vous êtes capable à trouver la dérivée F' étant donné la fonction F où $F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$. Dans cette leçon, nous allons étudier une opération réciproque de la dérivée c.-à-d. répondre à la question : Comment retrouvez la fonction principale (d'origine) en connaissant sa dérivée F' ?

Pour trouver la fonction d'origine (primitive) dont la dérivée par rapport à x est $5x^4$, on suppose que $f(x) = 5x^4$

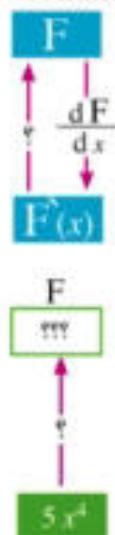
Puis on commence par un opération réciproque de la dérivation

$$n \cdot x^{n-1} = 5x^4 \quad \therefore n - 1 = 4, n = 5$$

$$\text{Donc } F(x) = x^5 \quad \text{ou} \quad x^5 + 3 \quad \text{ou} \quad x^5 - 2$$

La fonction F est appelée (nommée) la dérivée réciproque ou la fonction primitive (d'origine) de la fonction f

F est continue



Allez apprendre

- Primitive (Dérivée réciproque).
- Intégration de quelques fonctions algébriques.
- Intégration de quelques fonctions trigonométriques

Vocabulaire de base

- Primitive (Dérivée réciproque).
- Intégration



A apprendre

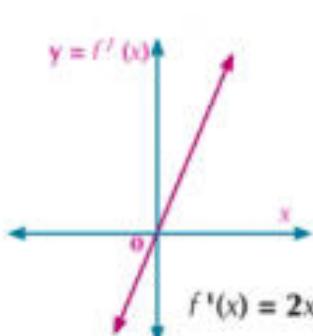
Primitive (Dérivée réciproque)

Si $y = x^2$ alors la première dérivée est $\frac{dy}{dx} = 2x$

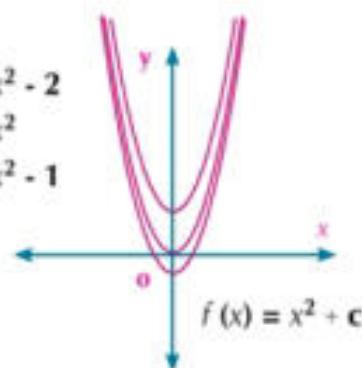
Pour retrouver la fonction primitive y à partir de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ on passe par un processus appelé primitive (integral) ou la dérivée réciproque.

Par exemple x^2 est la primitive (la dérivée réciproque) de la fonction $2x$. Remarquez que $2x$ admet plusieurs primitive comme $x^2 - 1$, $x^2 + 2$, $x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$ toutes ces fonctions ont la dérivée est $2x$.

$\therefore \frac{d}{dx} (x^2 + c) = 2x$ où (c) est une constante. Les figures suivantes indique cela.



$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 2 \\ f_2(x) &= x^2 \\ f_3(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme.

Définition

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f , si $F(x) = f(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f .

Exemple

1 Démontrez que : la fonction F telle que $F(x) = \frac{1}{2}x^4$ est une primitive de la fonction f où $f(x) = 2x^3$.

Solution

On trouve la dérivée de la fonction F , ∴ $F'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 = 2x^3$

∴ $F'(x) = f(x)$ c'est à dire la fonction (F) est une primitive de la fonction f

Essayez de résoudre

1 Montrez que la fonction F où $F(x) = \frac{1}{2}x^6$ est une primitive de la fonction f où $f(x) = 3x^5$

Pensé critique :

Quelle est la relation entre F_1 et F_2 si elles sont des primitives de la fonction f ?

Intégral illimitée

L'ensemble des primitives de la fonction f est appelée l'intégral illimitée de cette fonction. On la note $\int f(x) dx$ [qui se lit intégral de la fonction de x par rapport x]

Définition

Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int f(x) dx = F(x) + c$
où c est une constante

Remarquez que :

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 5) = 3x^2 \quad \therefore \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

$$\frac{d}{dx}(x^5 - 3) = 5x^4 \quad \therefore \int 5x^4 dx = x^5 + c$$

$$\frac{d}{dx}(2x^7) = 14x^6 \quad \therefore \int 14x^6 dx = 2x^7 + c$$

Pour déterminer la valeur de la constante c , on doit savoir la valeur de l'intégral en une valeur de la variable x (C'est en dehors du programme).

Exemple

2 Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes :

a $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

b $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + c$

Solution

a) $\because \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{8} x^8 + c \right) = x^7 \quad \therefore \int x^7 dx = \frac{1}{8} x^8 + c$

b) $\because \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+x^2} + c \right) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + c$

5 Essayez de résoudre

2) Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes :

a) $\int x^{-4} dx = \frac{-1}{3} x^{-3} + c$ b) $\int x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

Règle:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ où **c** est une constante, **n** est un nombre rationnel **n** $\neq -1$

Exemple Trouvez :

3) a) $\int x^5 dx$

b) $\int x^3 dx$

c) $\int x^{\frac{2}{5}} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx$

Solution

a) $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{1}{6} x^6 + c$

b) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4} x^4 + c$

c) $\int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{1}{\frac{7}{5}} x^{1+\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + c$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{1-\frac{3}{4}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{1}{4}} + c$

5 Essayez de résoudre

3) Trouvez :

a) $\int x^8 dx$

b) $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^5} dx$

d) $\int 7x^{-\frac{3}{2}} dx$

Propriétés de l'intégration

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle :

1- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$ où a est une constante différente de zéro

2- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

 **Exemple**

4 Trouvez : **a** $\int (4x + 3x^2) dx$

b $\int \frac{(x^2 + 2)^2}{x^2} dx$

 **Solution**

a $\int (4x + 3x^2) dx$
 $= \int 4x dx + \int 3x^2 dx$
 $= 4 \int x dx + 3 \int x^2 dx$
 $= \frac{4}{2} x^2 + 3 \times \frac{1}{3} x^3 + C$
 $= 2x^2 + x^3 + C$

b $\int \frac{(x^2 + 2)^2}{x^2} dx$
 $= \int \frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^2} dx$
 $= \int x^2 dx + \int 4 dx + \int 4x^2 dx$
 $= \frac{1}{3} x^3 + 4x - 4x^{-1} + C$

 **Essayez de résoudre**

4 Trouvez :

a $\int (2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$

b $\int (\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3) dx$

Quelques règles de l'intégration

1- $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \times \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2- $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \text{ où } C \text{ constante et } n \text{ est un nombre rationnel } \neq -1$

Pensé critique:

1- Pouvez-vous vérifier que les deux relations précédentes sont correctes en utilisant la définition de la primitive? Argumentez votre solution

 **Exemple**

5 Trouvez :

a $\int ((3 - 2x)^5 + 3) dx$

b $\int \frac{x+3}{(x-2)^4} dx$

c $\int (x^2 - 3x + 5)^{-7} (2x - 3) dx$

d $\int (3x^2 - 2x + 1)^{11} (3x - 1) dx$

Solution

a $\int ((3-2x)^5 + 3) dx = \int (3-2x)^5 dx + 3 \int dx$
 $= \frac{(3-2x)^6}{6 \times -2} + 3x + c = \frac{-1}{12} (3-2x)^6 + 3x + c$

b $\int \frac{x+3}{(x-2)^4} dx = \int \frac{(x-2)+5}{(x-2)^4} dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^4} dx + \int \frac{5}{(x-2)^4} dx$
 $= \int (x-2)^{-3} dx + 5 \int (x-2)^{-4} dx$
 $= \frac{(x-2)^2}{-2 \times 1} + \frac{5(x-2)^{-3}}{-3 \times 1} + c = \frac{-1}{2(x-2)^2} - \frac{5}{3(x-2)^3} + c$

c $\int (x^2 - 3x + 5)^{-7} (2x - 3) dx$
 $\because f(x) = x^2 - 3x + 5, \quad \therefore f'(x) = 2x - 3$
 $\therefore \int (x^2 - 3x + 5)^{-7} (2x - 3) dx = \frac{(x^2 - 3x + 5)^6}{6} + c$
 $= \frac{-1}{6} (x^2 - 3x + 5)^6 + c$

d $\int (3x^2 - 2x + 1)^{11} (3x - 1) dx$
 $\because f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{2} (6x - 2)$
 $\therefore \frac{1}{2} \int (3x^2 - 2x + 1)^{11} (6x - 2) dx = \frac{1}{2} \frac{(3x^2 - 2x + 1)^{12}}{12} + c$
 $= \frac{1}{24} (3x^2 - 2x + 1)^{12} + c$

5 Essayez de résoudre**5** Trouvez :

a $\int (3x+5)^{-9} dx$

b $\int (x+1)(x+3)^7 dx$

c $\int (x^2 + 3x - 2)^9 (2x + 3) dx$

d $\int x(4x^3 - 3x^2 + 4)^5 (2x - 1) dx$

Cherchez : des ressources sur le WEB pour retrouver : $\int \frac{1}{x} dx$

Intégration de quelques fonctions trigonométriques

Rappel

Quelques relations trigonométriques

a $\cos^2 X + \sin^2 X = 1$

b $\cos^2 X - \sin^2 X = \cos 2X$

c $1 + \tan^2 X = \sec^2 X$

d $2 \sin X \cos X = \sin 2X$

Intégral infini

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c$

$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$

$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \operatorname{Sec} x + c$

$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

Où c est une constante arbitraire
Où c est une constante arbitraire

Exemple

6 Trouvez les intégrations suivantes :

a $\int (x - \sin x) \, dx$

b $\int (4 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + 1) \, dx$

Solution

a $\int (x - \sin x) \, dx = \frac{1}{2} x^2 + \cos x + c$

b $\int (4 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + 1) \, dx = \int (4 \cos x + \sec^2 x + 1) \, dx$
 $= 4 \sin x + \tan x + x + c$

5 Essayez de résoudre

6 Trouvez les intégrations suivantes :

a $\int (6 \cos x - 8 \sin x) \, dx$

b $\int (3 + 4 \tan^2 x) \, dx$

Corollaires importantes :

1 - $\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$

2 - $\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$

3 - $\int \sec^2(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$

4 - $\int \operatorname{cosec}^2(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg}(ax + b) + C$

5 - $\int \sec(ax + b) \operatorname{tg}(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + C$

6 - $\int \operatorname{cosec}(ax + b) \operatorname{cotg}(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec}(ax + b) + C$

Où c est une constante arbitraire

Pensé critique :

1- Vérifiez les relations précédentes en trouvant la primitive et en utilisation la règle de la dérivée en chaîne

 **Exemple**

7 Trouvez :

a $\int \cos(2x+3) dx$

b $\int (\sec^2 \frac{x}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - x)) dx$

 **Solution**

a $\int \cos(2x+3) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$

b
$$\begin{aligned} & \int \sec^2(\frac{1}{2}x) dx - \int \sin(\frac{\pi}{4} - x) dx \\ &= \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} - [\frac{-1}{-1} \cos(\frac{\pi}{4} - x)] + C \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} - \cos(\frac{\pi}{4} - x) + C \end{aligned}$$

 **Essayez de résoudre**

7 Trouvez :

a $\int \sin(3x-5) dx$

b $\int \cos(\frac{x}{3} - 2) dx$

 **Exemple** formes usuelles de primitives

2 Trouvez :

a $\int \sin(2x-5) dx$

b $\int \sec^2(5-3x) dx$

c $\int \cosec^2(\frac{x+3}{2}) dx$

d $\int \sec 2x \tg 2x dx$

 **Solution**

a $\int \sin(2x-5) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-5) + C$

b $\int \cosec^2(5-3x) dx = -\frac{1}{3} \tg(5-3x) + C$

c $\int \cosec^2(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) dx = -2 \cotg(\frac{x+3}{2}) + C$

d $\int \sec 2x \tg 2x dx = \frac{1}{2} \cosec 2x + C$

 **Essayez de résoudre**

2 Trouvez :

a $\int (\sin 3x - \sec^2 2x) dx$

b $\int 6 \sec 2x (\tan 2x + \cos^2 2x) dx$

c $\int [1 + \cotg^2(3x-1)] dx$

d $\int \frac{\sin^2(2x-3)}{1 - \cos(2x-3)} dx$

N.B $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$



Exercices 3 - 6

**Complétez ce qui suit :**

(1) La primitive de la fonction $(3x^2 - 2x + 5)$ est ____

(2) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{5} \right) dx = ____$

(4) $\int (x+5)^3 dx = ____$

(6) $\int (\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}) dx = ____$

(8) $\int 2 \tan x \sec^2 x dx = ____$

(3) $\int (4x - \sin \frac{\pi}{3}) dx = ____$

(5) $\int (x+2)(x^2 + 4x - 7)^{11} dx = ____$

(7) $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx = ____$

Calculez les intégrales suivantes :

(9) $\int 9x^8 dx$

(10) $\int 12x^2 dx$

(11) $\int 5\sqrt{x^3} dx$

(12) $\int \frac{8}{5}c^3 dc$

(13) $\int 2(3z^2 - 5) dz$

(14) $\int 3x^2 + x - 2 dx$

(15) $\int (3\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}) dx$

(16) $\int (ax^2 + 5x + c) dx$

(17) $\int x(x+3) dx$

(18) $\int x^2(3x - \frac{5}{x}) dx$

(19) $\int (x-2)(x+2) dx$

(20) $\int (x-5)(x+1) dx$

(21) $\int (\sqrt{x} - 1)^2 dx$

(22) $\int (x + \frac{1}{x})^2 dx$

(23) $\int \frac{2x^2 + 3}{x^2} dx$

(24) $\int \frac{x^7 - 4x^5 + x^3}{x^3} dx$

(25) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx$

(26) $\int \frac{x^3 - 27}{x - 3} dx$

(27) $\int \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} dx$

(28) $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} dx$

(29) $\int 6(x-2)^5 dx$

(30) $\int 3(x+3)^4 dx$

(31) $\int (8 - 3x)^4 dx$

(32) $\int (2z-3)^{\frac{7}{3}} dz$

(33) $\int \frac{12}{(2x-5)^4} dx$

(34) $\int \frac{7}{\sqrt{x+4}} dx$

(35) $\int (x-1)(x^2 - 2x + 1) dx$

(36) $\int \sqrt{x-3} (x-3)^4 dx$

37 $\int (x^2 - 2)^2 \, dx$

39 $\int x(5x^2 + 2)^7 \, dx$

41 $\int (7 \sin x - 2 \cos x) \, dx$

43 $\int 9(\cos x - \sec^2 3x) \, dx$

45 $\int \sin(5x - 1) \, dx$

47 $\int \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \, dx$

49 $\int 2 \cos^2 x \, dx$

51 $\int \sqrt{3} \cos x \, dx$

53 $\int \operatorname{tg} x \cos x \, dx$

38 $\int x(3x^2 - 5)^3 \, dx$

40 $\int \frac{x^3}{(x^4 + 1)^6} \, dx$

42 $\int (\sin 2x - 3 \cos x) \, dx$

44 $\int (3 + 5 \sec^2 x) \, dx$

46 $\int \cos(2 - x) \, dx$

48 $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$

50 $\int (4 - \sin^2 x) \, dx$

52 $\int \operatorname{cosec}^2(2x + 3) \, dx$

54 $\int (1 + \tan^2 x) \cos^2 x \, dx$


Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) $\frac{d}{dx} (\cos^2 x + \sin^2 x) =$

a 1 **b** 0 **c** x **d** $2(\cos x + \sin x)$

2) Si $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, alors $f'(-4) =$

a $-\frac{4}{5}$ **b** 5 **c** $\frac{1}{10}$ **d** $-\frac{1}{10}$

3) $\int (x^2 - 3) dx =$

a $2x$ **b** $x^3 - 3x$ **c** $\frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ **d** $2x - 3 + C$

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} =$

a $\cos x$ **b** 1 **c** $\cos a$ **d** $\sin(x - a)$

5) La pente de la tangente à la courbe de la fonction $y = (2x - 3)^5$ si $x = 2$ est égale à

a 1 **b** $\frac{1}{12}$ **c** 5 **d** 10

6) $\frac{d}{dx} (2 - 3x)^{-2}$

a $12x^{-2} - 27x^{-4}$ **b** $\frac{1}{3}(2 - 3x)^{-1}$ **c** $6(2 - 3x)^{-3}$ **d** $-2(2 - 3x)^{-3}$

7) $\int \frac{d}{dx} [f(x)] dx =$ _____

a $f(x)$ **b** $f(x) + c$ **c** $\frac{d}{dx} (f(x))$ **d** $\int f(x) dx$

8) Étudiez la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes:

a $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \\ 4x & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

9) Dans ce qui suit, trouvez :

a $y = x^5 - 2\sqrt[3]{x^5}$ **b** $y = (4x^2 + 1)(1 - 4x^2)$

c $y = \sqrt[3]{(2x + 1)^5}$ **d** $y = (x^3 - 3x^2 + 2)^5$

- 10 Si $y = x \sin x - 3 \cos x$ trouvez $\frac{dy}{dx}$
- 11 Si $y = (z - 1)^5$, $z = x^2 + 3$ trouvez $\frac{dy}{dx}$
- 12 Trouvez les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = (x - 3)^2$ auxquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$
- 13 Si la pente de la tangente à la courbe de fonction d'équation $y = x^2 + ax + b$ au point de coordonnées $(2; -2)$ égale à -1 ; trouvez les valeurs de a et de b .

Trouvez l'équation de la tangente à la courbe des fonctions définies ci-dessous aux points de coordonnées donnés :

- 14 $y = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ au point de coordonnées $(4; 4)$
- 15 $y = (x^2 + x)(x^3 + 5)$ au point de coordonnées $(-2; -6)$
- 16 $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ au point de coordonnées $(\pi; 1)$

Trouvez l'équation de la normale à la courbe des fonctions définies ci-dessous aux points de coordonnées donnés :

- 17 $y = \frac{x+2}{x-2}$ au point de coordonnées $(3, 5)$
- 18 $y = \tan x$ au point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}, 1)$

Trouvez les intégrations suivantes :

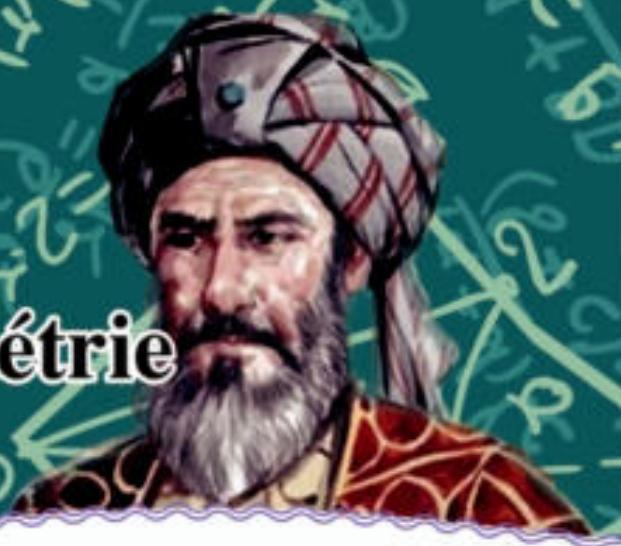
- 19 $\int (x^2 - 3x - 1) dx$
- 20 $\int (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}) dx$
- 21 $\int (4 - 3x)^7 dx$
- 22 $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$
- 23 $\int (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^9 dx$
- 24 $\int \frac{x+2}{(3+x)^5} dx$

25 Trouvez les intégrations suivantes :

a $\int (x^3 + \sqrt{x}) dx$	b $\int (x^2 + 1)^2 dx$	c $\int x^2 (x^2 - 3) dx$
d $\int 3(3x+1)^3 dx$	e $\int 2x(x^2 - 4)^3 dx$	f $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x)^2} dx$
g $\int (\cos 2x - x) dx$	h $\int (x^2 - 3x + 1)^3 (4x - 6) dx$	

Unité 4

Trigonométrie



Introduction de l'unité

Al-Battani (Abū Abdullāh Muhammād ibn Jābir ibn Sinān ar-Raqqī al-harrānī as-sabi al-Battānī), il est vécu entre (235-317 Hégire) env. (850-929 J.-C.). Il était l'un des célèbres astronomes et mathématiciens qui est intéressé à la trigonométrie comme une science indépendante de l'astronomie. Il est le premier qui a imbriqué l'algèbre en trigonométrie. Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs et en partie celui de la tangente, et il en a dressé des tables formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne.

Abu l-Wafā (328-388 Hégire) env. (940-988 j.c.) a bien étudié les œuvres d'al-Battānī en trigonométrie, il éclairé les points ambigus et créé l'inverse de cosinus (sécante) et l'inverse de sinus (cosécante). Il a utilisé des idées sur les tangentes (ou « ombres ») pour développer des méthodes de calcul des tangentes et des cotangentes. Il a créé plusieurs formules trigonométriques remarquables qui portent son nom (al-Battānī):

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \sec^2 A = 1 + \tan^2 A, \csc^2 A = 1 + \cot^2 A \text{ et autres.}$$

Dans cette unité, on va aborder des applications de la vie courante, les angles d'élévation et d'abaissement, comme application pratique sur les règles de sinus et de cosinus, ainsi que des identités trigonométriques les formules de la somme de deux angles et celles de duplication d'un angle. A la fin de cet unité, l'étudiant reconnaîtra la formule de Héron pour résoudre un triangle connaissant les longueurs de ses cotés et des applications quotidiennes sur cette formule.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- ➊ Résoudre des problèmes quotidiens sur l'angle d'élévation, l'angle d'abaissement et les directions.
- ➋ Déduire les identités trigonométriques de la somme et de différence de deux angles (Formules de la somme).

- ➌ Reconnaître et déduire les identités trigonométriques du double et de la moitié d'un angle (Formules duplication).
- ➍ Déduire la formule de Héron et l'utiliser pour calculer l'aire d'un triangle et résoudre des problèmes quotidiennes.
- ➎ Utiliser la calculatrice pour résoudre des problèmes sur les identités trigonométriques.

Vocabulaires de base

Angle	Fonction de cosinus
Angle d'élévation	Formules d'addition
Angle d'abaissement	Formules de duplication
Fonction trigonométrique	Formules de l'angle moitié
Fonction de sinus	Formule de Héron

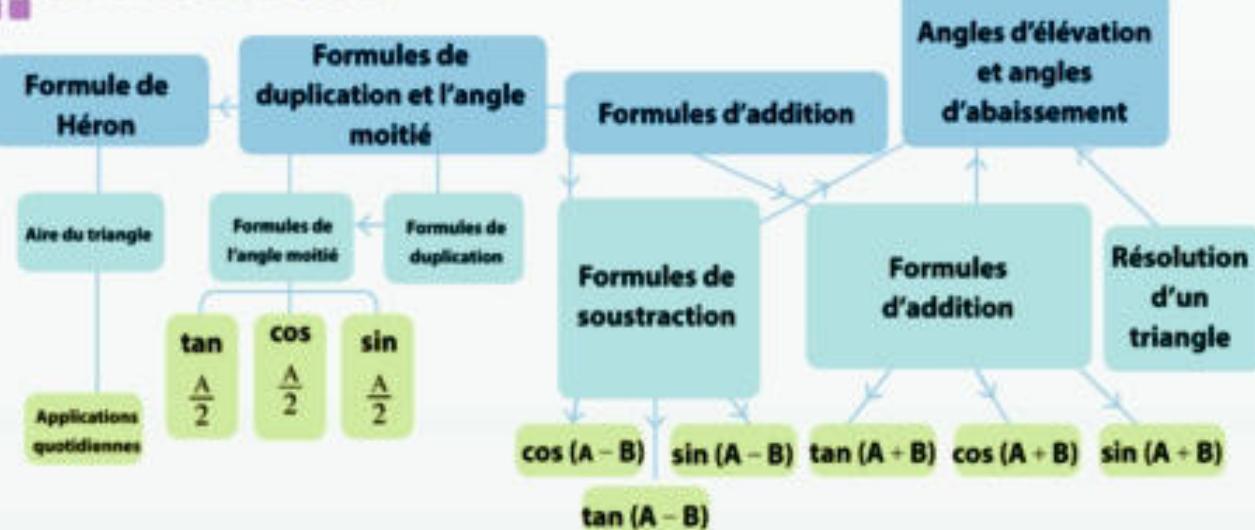
Leçons de l'unité

Lesson (4 - 1): Angles d'élévation et angles d'abaissement
 Lesson (4 - 2): Formules d'addition.
 Lesson (4 - 3): Formules de duplication.
 Lesson (4 - 4): Formule de Héron.

Aide pédagogique

Calculatrice scientifique - Réseau Internationale d'information

Unit planning guide



Unité 4

Angles d'élévation et angles d'abaissement

4 - 1



Activité

Vous avez déjà appris les angles d'élévation et les angles d'abaissement comme application de la résolution d'un triangle rectangle. Vous pouvez trouver la hauteur d'un minaret qui se trouve à une distance connue sans la mesurer directement..

Après avoir étudié les règles de sinus, la règle de cosinus et la résolution d'un triangle quelconque en utilisant ces deux règles, on peut étudier des applications plus approfondies de la résolution d'un triangle quelconque.

- Cherchez dans la bibliothèque ou sur le réseau Internationale des Informations, des situations variées qui nécessitent les angles d'élévation et les angles d'abaissement comme une application de la résolution d'un triangle quelconque pour y résoudre. Puis écrivez une liste de ces situations en relevant des notes sur chacune de ces situations.

Vocabulaires de base

- Angle.
- Angle d'élévation.
- Angle d'abaissement

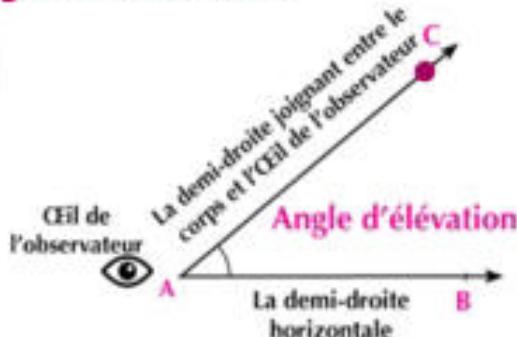
Angle d'élévation et angle d'abaissement



A apprendre

Angle d'élévation

Si une personne A observe un point C qui se trouve au-dessus du plan horizontal de vu \overrightarrow{AB} , alors l'angle formé par \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} est appelé l'angle d'élévation de C par rapport au plan horizontal de vu de la personne A.

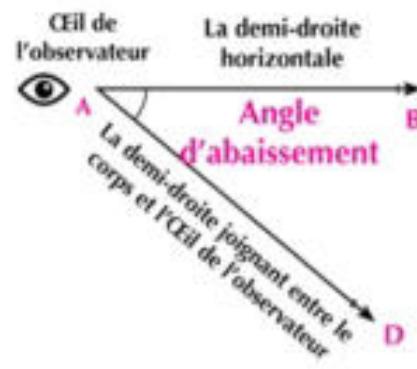


Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Angle d'abaissement

Si une personne A observe un point D qui se trouve au-dessous du plan horizontal de vu \overrightarrow{AB} , alors l'angle formé par \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} est appelé l'angle d'abaissement de C par rapport au plan horizontal de vu de la personne A.



Remarque :

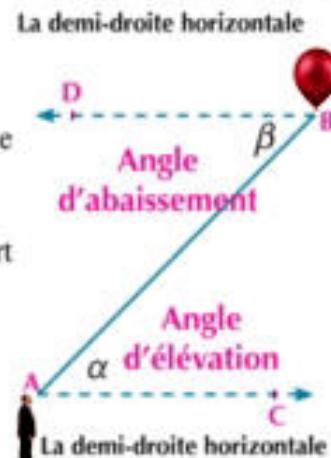
1- Dans la figure ci-contre :

$\angle CAB$ est l'angle d'élévation du ballon par rapport à la personne en A.

$\angle DBA$ est l'angle d'abaissement de la personne en A par rapport au ballon.

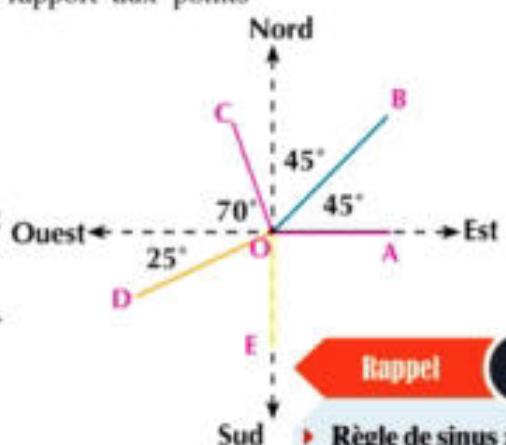
Dans ce cas $\alpha = \beta$

où α est l'angle d'élévation et β est l'angle d'abaissement.



2- Pour déterminer la position d'un point par rapport aux points cardinaux d'un point donné :

- A se trouve à l'Est de O
- B se trouve au Nord-est de O
- C se trouve dans la direction 70° Nord par rapport à l'ouest de O
- D se trouve dans la direction 25° Sud par rapport à l'ouest de O
- E se trouve au Sud de O

**Rappel**

► **Règle de sinus :** Les longueurs des cotés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles qui lui sont opposés.

► **La mesure d'un angle extérieur à un triangle en sommet est égale à la somme des mesures de deux intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.**

Exemple

1 D'un point du sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 25° . S'il parcourt 57 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors $52^\circ 30'$. Calculer la hauteur de la tour à un mètre près.

Solution

Dans la figure ci-contre :

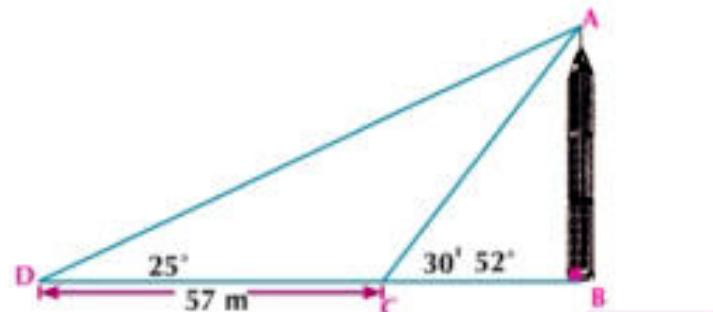
$$\begin{aligned} m(\angle CAD) &= 52^\circ 30' - 25^\circ \\ &= 27^\circ 30' \end{aligned}$$

Dans $\triangle ACD$:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin 25^\circ} &= \frac{57}{\sin 27^\circ 30'} \\ \therefore AC &= \frac{57 \times \sin 25^\circ}{\sin 27^\circ 30'} \end{aligned} \quad (1)$$

Dans $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin 52^\circ 30'} = \frac{AC}{\sin 90^\circ}$$



$$\therefore AB = AC \times \sin 52^\circ 30' \quad (2)$$

D'après (1) et (2), alors :

$$AB = \frac{57 \times \sin 25^\circ}{\sin 27^\circ 30'} \times \sin 52^\circ 30'$$

$AB \approx 41$ m, C-à-d la hauteur de la tour égale à 41 mètres près.



5 7 x sin 2 5 (x sin 5 2 ... 3 0 ...) + sin 2
7 ... 3 0 ... =

E Essayez de résoudre

1 D'un point au sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 20° . S'il parcourt 50 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 42° . Calculez la hauteur de la tour à un mètre près.

E Exemple

2 Un tour de 100 m de hauteur est construite sur un rocher. D'un point sur la terre, on a mesuré les deux angles d'élévation du sommet et de la base de la tour. On a trouvé 76° et 46° respectivement. Trouver la hauteur du rocher à un mètre près.

E Solution

$$m(\angle ADB) = 76^\circ - 46^\circ = 30^\circ$$

$$m(\angle A) = 90^\circ - 76^\circ = 14^\circ$$

$$\text{Dans le triangle } ABD : \frac{BD}{\sin 14^\circ} = \frac{100}{\sin 30^\circ}$$

$$BD = \frac{100 \sin 14^\circ}{\sin 30^\circ} \quad (1)$$

$$\text{Dans le triangle } BCD : \frac{BC}{\sin 46^\circ} = \frac{BD}{\sin 90^\circ}$$

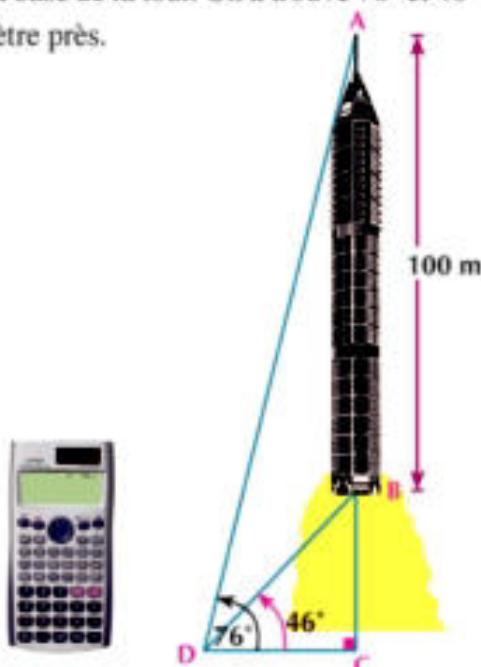
$$BC = BD \sin 46^\circ \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on obtient :

$$BC = \frac{100 \sin 14^\circ}{\sin 30^\circ} \times \sin 46^\circ \approx 35 \text{ m}$$

On utilise la calculatrice comme suivant :

1 0 0 x sin 1 4) x sin 4 6)
+ sin 3 0) =



E Essayez de résoudre

2 Un tour de 12 m de hauteur est construite sur une colline. D'un point sur la terre, on a mesuré les deux angles d'élévation du sommet et de la base de la tour. On a trouvé 32° et 24° respectivement. Trouver la hauteur de la colline à un mètre près.

**Exemple**

3 Du sommet d'une colline, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 22° et 30° . Calculer la hauteur de la colline. Si la hauteur de la tour est 50 mètres, calculez la hauteur de la colline à un mètre près. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.



Dans la figure ci-contre:

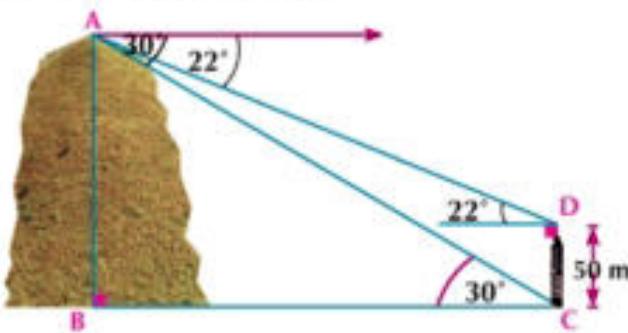
$$m(\angle DAC) = 30^\circ - 22^\circ = 8^\circ$$

$$m(\angle CDA) = 90^\circ + 22^\circ = 112^\circ$$

Dans le triangle ACD

$$\frac{AC}{\sin 112^\circ} = \frac{50}{\sin 8^\circ}$$

$$AC = \frac{50 \sin 112^\circ}{\sin 8^\circ} \quad (1)$$



Dans le triangle ACB

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 90^\circ} \quad \therefore AB = AC \sin 30^\circ \quad (2)$$

Substituons par (1) en (2), alors :

$$AB = \frac{50 \sin 112^\circ \times \sin 30^\circ}{\sin 8^\circ} \approx 167 \text{ mètres.}$$

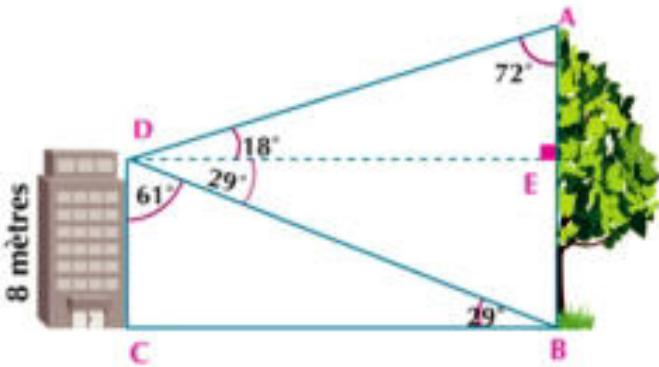
5 0 x sin 1 1 2) x sin 3 0) + sin 8) =

**Essayez de résoudre**

3 Du sommet d'un rocher de 80 m de hauteur, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 24° et 35° . Calculez la hauteur de la tour. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.

**Exemple**

4 Du d'une maison de 8 m de hauteur, la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'un arbre est de 18° et la mesure de l'angle d'abaissement de sa base est 29° . Déterminez la distance entre la bases de la maison et celle de l'arbre, ainsi que la hauteur de la tour à deux décimales près sachant que la base de la tour et la base de la maison sont situées dans un même plan horizontal.



$$m(\angle A) = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$$

$$m(\angle BDC) = 90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$$

Dans $\triangle BCD$: $\because \frac{8}{\sin 29^\circ} = \frac{BC}{\sin 61^\circ}$
 $\therefore BC = \frac{8 \times \sin 61^\circ}{\sin 29^\circ} \approx 14,43$ mètres.

La distance entre la base de la maison et celle de l'arbre $\approx 14,43$ mètres

Dans $\triangle AED$:

$$\because \frac{DE}{\sin 18^\circ} = \frac{ED}{\sin 72^\circ} \quad \text{Remarquez que } (ED = BC)$$

$$\therefore AE = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} \times BC \quad \therefore AE = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} \times 14,43 \approx 4,69 \text{ m}$$

\therefore La hauteur de l'arbre $\approx 8 + 4,69 \approx 12,69$ m

5 Essayez de résoudre

4 D'un sol horizontal, deux hommes observent, en même temps, un ballon. Le premier a trouvé que l'angle d'élévation du ballon mesure 63° le deuxième a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation est 39° . Si la distance entre les deux hommes est 800 mètres, le ballon et les deux hommes sont situés dans un même plan vertical et la projection du ballon sur le sol se trouve entre les deux hommes, trouver la hauteur du ballon de la surface de la terre à un mètre près.

Exemple

5 Du point A au bord d'une rivière, un homme observe un arbre situé au point B de l'autre côté de la rivière, il trouve que B est situé à 20° nord par rapport à l'est de A. Il parcourt 300 m parallèlement à la rivière vers l'ouest jusqu'au point C. B est alors situé à 46° nord par rapport à l'est de C. Calculez, à un mètre près la largeur de la rivière sachant que les deux bords de la rivière sont parallèles et les points B et C sont situés dans un même plan vertical.

Solution

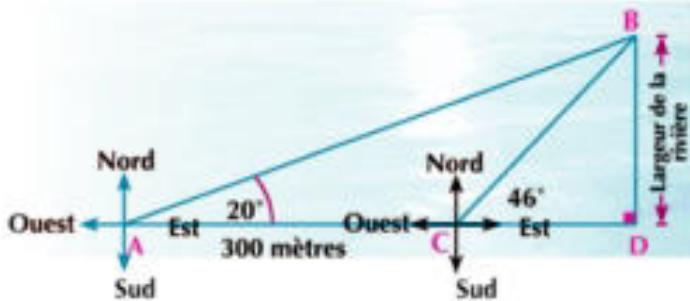
Soit BD largeur de la rivière

Dans le triangle ABC

$$m(\angle ABC) = 46^\circ - 20^\circ = 26^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin 20^\circ} = \frac{300}{\sin 26^\circ}$$

$$BC = \frac{300 \sin 20^\circ}{\sin 26^\circ} \quad (1)$$



Dans le triangle BDC :

$$\because \frac{BD}{\sin 46^\circ} = \frac{BC}{\sin 90^\circ} \quad \therefore BD = BC \times \sin 46^\circ \quad \therefore BD = \frac{300 \times \sin 20^\circ}{\sin 26^\circ} \times \sin 46^\circ \approx 168 \text{ mètres}$$

3 0 0 × sin 2 0 (× sin 4 6 (+ sin 2 6 (=

6 Essayez de résoudre

6 Du point A au bord d'une rivière, un homme observe un arbre situé au point B de l'autre côté de la rivière, il trouve que B est situé à 37° nord par rapport à l'est de A. Il parcourt 200 m parallèlement à la rivière vers l'ouest jusqu'au point C. B est alors situé à 15° nord par rapport à l'est de C. Calculez à un mètre près la largeur de la rivière.

Exemple

7 **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau est parti d'un certain point dans la direction de $68^\circ 25'$ ouest par rapport au Sud avec une vitesse de 15 km/h. Au même moment un autre bateau est parti du même point vers $53^\circ 48'$ Nord par rapport à l'est avec une vitesse de 8 km/h. Trouver la distance qui sépare les deux bateaux 3 heures après leur départ à deux décimales près.

Solution

$$\therefore \text{Vitesse uniforme} = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{temps}}$$

$$\text{Distance parcourue} = \text{vitesse uniforme} \times \text{temps}$$

$$\therefore AB = 15 \times 3 = 45 \text{ km}$$

$$AC = 8 \times 3 = 24 \text{ km}$$

$$\therefore m(\angle B AD) = 90^\circ - 68^\circ 25' = 21^\circ 35'$$

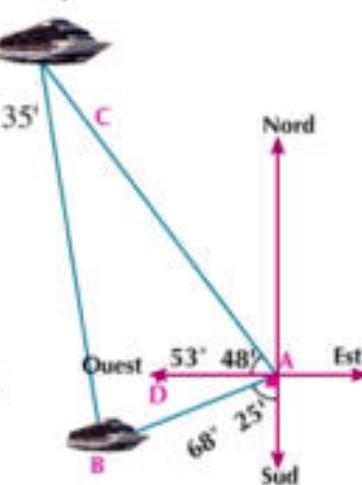
$$\therefore m(\angle B AC) = 21^\circ 35' + 53^\circ 48' \\ = 75^\circ 23'$$

Dans le triangle ABC :

En utilisant la règle de cosinus

$$(BC)^2 = (45)^2 + (24)^2 - 2 \times 45 \times 24$$

$$\cos 75^\circ 23' \quad \therefore BC \approx 45.34 \text{ km}$$

**Rappel****Règle de cosinus**

$$\begin{aligned} a^2 &= \\ b^2 + c^2 - 2bc \cos A &= \end{aligned}$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

De même pour les longueurs des autres cotés et les mesures des autres angles

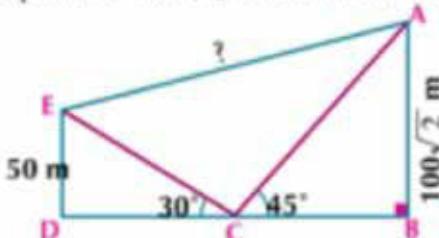
4 5 χ^2 + 2 4 χ^2 - 2 \times 4 5 \times 2 4 \times cos 7 5
 ... 2 3 ... 1 = $\sqrt{}$ Ans =

Essayez de résoudre

7 **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau est parti d'un certain point dans la direction de 70° Est par rapport au Sud avec une vitesse de 12 km/h. Au même moment un autre bateau est parti du même point vers 55° Nord par rapport à l'est avec une vitesse de 5 km/h. Trouver la distance qui sépare les deux bateaux deux heures après leur départ à deux décimales près.

Exercices 4 - 1

- D'un point du sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure $20^\circ 35'$. S'il parcourt 50 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 42° . Calculer la hauteur de la tour à un mètre près.
- Du sommet d'une maison de 15 mètres de hauteur, on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'une tour est 67° et la mesure de l'angle d'abaissement de la base de la tour est 35° . Trouvez la hauteur de la tour à un mètre près, sachant que la base de la tour et celle de la maison sont dans un même plan horizontal.
- Du sommet d'une tour de 65 mètres de hauteur, on a trouvé que les mesures des angles d'abaissements de deux points A et B qui sont situés sur un plan horizontal sont 32° et $21^\circ 12'$ respectivement. Si D représente la base de la tour $A \in \overline{BD}$, trouver la longueur de AB à un mètre près.
- Du sommet d'une colline, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé 15° et 26° . Si la hauteur de la tour est 50 mètres, calculez la hauteur de la colline à un mètre près. On suppose que la base de la colline et de la tour sont dans un même plan horizontal.
- Un minaret de 60 mètres de hauteur est construit sur une colline près du bord de la mer. D'un bateau situé à la surface de la mer, on a mesuré les angles d'élévation du sommet et la base du minaret, on les a trouvés de 70° et 45° respectivement. Trouver la hauteur de la colline par rapport à la surface de la mer à un mètre près.
- Dans la figure ci-contre:** Soient deux ballons d'altitudes respectives $100\sqrt{2}$ et 50 mètres. Ils observent un corps (C) situé dans le plan vertical passant par les deux ballons. Si les mesures des angles d'abaissements sont 45° et 30° respectivement, Calculez la distance entre les deux ballons à un mètre près.
- Du sommet d'un rocher de 80 m de hauteur, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a trouvé respectivement 24° et 35° . Calculer la hauteur de la tour. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.
- Du sommet d'une maison, un homme observe une voiture qui s'est arrêtée au même plan horizontal que la maison. Il trouve que l'angle d'abaissement de la voiture est 70° , il est descendue verticalement vers le bas d'une distance de 12 mètres la mesure de l'angle d'abaissement de la voiture devient alors 30° . Trouvez la hauteur de la maison et la distance entre la base de la maison et la voiture à un mètre près.
- D'un point sur la surface de la mer, on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet d'un arbre mesure 50° . D'un autre point situant à 45 mètres d'altitude et se trouvant juste au-dessous du point précédent, on a retrouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet de l'arbre mesure 30° . Trouvez la hauteur de l'arbre à un mètre près.



10 Du sommet d'une montagne de 100 mètres d'altitude par rapport à la surface de la mer, un homme observe un rocher qui se trouve à une distance de 22 mètres de la montagne. Il a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation du sommet du rocher mesure $42^\circ 37'$. Trouvez la hauteur du rocher par rapport à la surface de la mer à un mètre près sachant que la montagne et le rocher sont situés sur un même sol horizontal.

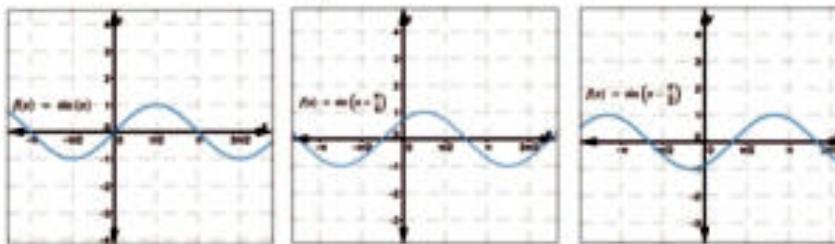
11 Deux hommes commencent à se mouvoir, en même temps et d'un même point. Le premier dans la direction 40° ouest par rapport au nord à une vitesse de 32 mètres/minute et le deuxième dans la direction 70° sud par rapport à l'ouest à une vitesse de 38 mètres/minute. Calculez la distance entre les deux hommes 5 minutes après le mouvement.



Réfléchissez et discutez

Utilisez le logiciel géogébra pour tracer la courbe de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$$f(x) = \sin x, y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), m(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$



A partir de la notion des transformations géométriques: Que remarquez-vous ?

La fonction représentée dans la deuxième figure comprend la somme de deux angles x et $\frac{\pi}{4}$.

La fonction représentée dans la troisième figure comprend la différence de deux angles x et $\frac{\pi}{3}$.

Pour cela, on doit utiliser les formules d'addition pour trouver les fonctions trigonométriques d'un angle de mesure donnée par exemple: pour calculer $\sin 75^\circ$, on la met sous la forme $\sin(30^\circ + 45^\circ)$, de même pour $\cos 15^\circ$ on la met sous la forme $\cos(60^\circ - 45^\circ)$ où $\cos(45^\circ - 30^\circ)$ etc



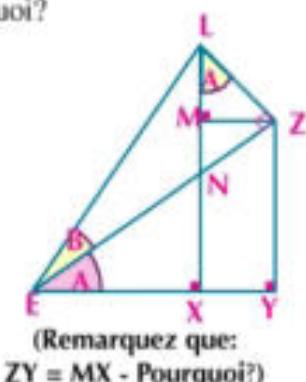
A apprendre

Formules d'addition

Dans la figure ci-contre : (la démonstration ne peut pas être l'objet d'un examen)

Remarquez que: $m(\angle A) = m(\angle ZLM)$. Pourquoi?

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \frac{LX}{LE} = \frac{MX}{LE} + \frac{LM}{LE} \\ &= \frac{ZY}{LE} + \frac{LM}{LE} \\ &= \frac{ZY}{LE} \times \frac{ZE}{ZE} + \frac{LM}{LE} \times \frac{LZ}{LZ} \\ &= \frac{ZY}{ZE} \times \frac{ZE}{LE} + \frac{LM}{LZ} \times \frac{LZ}{LE} \\ &= \sin A \times \cos B + \cos A \times \sin B \end{aligned}$$



Allez apprendre

- Déduire les formules d'addition.
- Résoudre des applications variées sur les formules d'addition
- Démontrer des identités trigonométriques en utilisant les formules d'addition

Vocabulaires de base

- Fonction trigonométriques
- Fonction de sinus
- Fonction de cosinus
- Fonction de tangente
- Formules d'addition

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Alors $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

Remplissons $(-B)$ par $of B$, on obtient :

$$\sin [A + (-B)] = \sin A \cos (-B) + \cos A \sin (-B)$$

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Utiliser la même figure pour démontrer :

$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Il résulte que :

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Exemple

1 Calculez :

a $\sin 75^\circ$

b $\cos 15^\circ$

Que remarquez-vous?

Solution

a $\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b $\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

On remarque que : $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$

Essayez de résoudre

1 Calculez :

a $\cos 105^\circ$

b $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

c $\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ$

Exemple

2 Si $\sin A = \frac{3}{5}$ où $90^\circ < A < 180^\circ$ et $\cos B = -\frac{5}{13}$

Où $180^\circ < B < 270^\circ$

Trouvez : $\cos (A - B)$, $\sin (A + B)$

Rappel

$$\sin (-A) = -\sin A$$

$$\cos (-A) = \cos A$$

$$\tan (-A) = -\tan A$$

Rappel

$$\sin (180 - A) = \sin A$$

$$\cos (180 - A) = -\cos A$$

$$\sin (180 + A) = -\sin A$$

$$\cos (180 + A) = -\cos A$$

Solution $\therefore A \in \text{deuxième quadrant}$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{5} \quad \cos A = -\frac{4}{5}$$

 $\therefore B \in \text{troisième quadrant}$

$$\therefore \sin B = -\frac{12}{13} \quad \cos B = -\frac{5}{13}$$

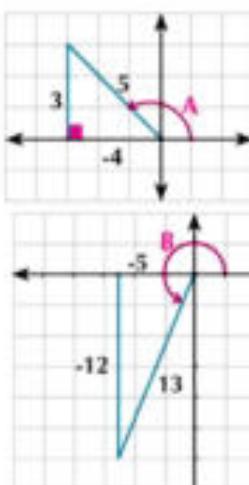
D'où:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{16}{65}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{33}{65}$$

**5 Essayez de résoudre**

2 Si $\cos A = \frac{4}{5}$ et $\cos B = \frac{12}{13}$ où A et B sont les mesures de deux angles aigu. Trouvez sans utiliser une calculatrice :

a $\sin(A + B)$

b $\sec(A - B)$

3 Dans le triangle ABC, $\cos A = -\frac{3}{5}$ et $\sin B = \frac{5}{13}$. Trouvez $\sin C$ sans utiliser une calculatrice.

Exemple

3 **En lien avec l'électricité:** L'intensité de courants électrique est donné par la relation :

$$I = \frac{5}{2} \sin 165^\circ t$$

a Réformulez la relation précédente en utilisant les formules d'addition.**b** Trouvez l'intensité électrique après une minute**Solution**

$$I = \frac{5}{2} \sin 165^\circ t$$

La relation donnée

$$I = \frac{5}{2} \sin(45^\circ t + 120^\circ t)$$

car $165^\circ = 45^\circ + 120^\circ$

$$= \frac{5}{2} \sin(45^\circ + 120^\circ)$$

par substitution $n = 1$ second

$$= \frac{5}{2} [\sin 45^\circ \cos 120^\circ + \cos 45^\circ \sin 120^\circ] \quad \text{En utilisant la formule de la somme}$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

par substitution par les rapport trigonométrique

$$= \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Multipliant par $\sqrt{2}$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8}$$

En simplifiant

5 **Essayez de résoudre**

4 L'intensité de courants électriques est donné par la relation $I = \frac{3}{2} \cos 285^\circ t$

a Reformulez la relation précédente en utilisant les formules d'addition.
b Trouvez l'intensité électrique après une minute

Formules d'addition de la tangente

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

Divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos A \cos B \neq 0$, alors:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

Remplaçons $(-B)$ par B , alors:

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

où A et $B \neq \frac{\pi}{2} (2n+1)$; $n \in \mathbb{Z}$

Exemple

4 Sans utiliser une calculatrice, démontrez que :

a $\tan 50^\circ = \frac{1 + \tan 5^\circ}{1 - \tan 5^\circ}$

b $\tan(45^\circ - A) = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$

Solution

a Membre gauche = $\tan 50^\circ$

$$= \tan(45^\circ + 5^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 5^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 5^\circ} = \frac{1 + \tan 5^\circ}{1 - \tan 5^\circ} = \text{Membre droite}$$

b Membre gauche = $\tan(45^\circ - A)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1 + \tan 45^\circ \tan A} = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} \\ &= \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A}} \times \frac{\cos A}{\cos A} = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \text{Membre droite} \end{aligned}$$

**Rappel**

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

5 **Essayez de résoudre**

5 Si A et B sont les mesures de deux angles aigus positifs tels que $\sin A = \frac{12}{13}$, et $\sin B = \frac{4}{5}$, trouvez la valeur de $\tan(A - B)$

6 Si A , B et C sont les mesures des angles aigus positifs tels que $\tan B = \frac{4}{3}$, $\tan C = 7$, démontrez que $A = 45^\circ$

7 Si $\tan A = \frac{5}{6}$ et $\tan B = \frac{1}{11}$, démontrez que $(A + B) = 45^\circ$.

Exemple

5 Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes où $0^\circ < x < 360^\circ$

a $\tan x + \tan 20^\circ + \tan x \tan 20^\circ = 1$

b $\sin(x + 30^\circ) = 2 \cos x$

Solution

a $\because \tan x + \tan 20^\circ + \tan x \tan 20^\circ = 1$

$\therefore \tan x + \tan 20^\circ = 1 - \tan x \tan 20^\circ$

$\therefore \frac{\tan x + \tan 20^\circ}{1 - \tan x \tan 20^\circ} = 1$ (Divisons les deux membre de l'équation par: $1 - \tan x \tan 20^\circ$)

D'où: $\tan(x + 20^\circ) = 1$

$\therefore x + 20^\circ$ se trouve au premier quadrant

$\therefore \tan(x + 20^\circ) = \tan 45^\circ \quad x + 20^\circ = 45^\circ \quad x = 25^\circ$

ou $x + 20^\circ$ se trouve au troisième quadrant

$\tan(x + 20^\circ) = \tan 225^\circ \quad x + 20^\circ = 225^\circ \quad x = 205^\circ$

Ensemble des solutions: $\{25^\circ, 205^\circ\}$

b $\because \sin(x + 30^\circ) = 2 \cos x$

$\therefore \sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ = 2 \cos x$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 2 \cos x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{3}{2} \cos x$$

Divisons les deux membre de l'équation par $\cos x$, où: $\cos x \neq 0$

$$\therefore \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{d'où: } \tan x = \sqrt{3} > 0$$

$\therefore x$ se trouve au premier ou troisième quadrant.

$x = 60^\circ$ ou $x = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$

Ensemble des solutions: $\{60^\circ, 240^\circ\}$

Essayez de résoudre

8 Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes où $0^\circ < x < 360^\circ$

a $\sin x \cos 20^\circ - \cos x \sin 20^\circ = \frac{1}{2}$

b $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercices 4 - 2

Complétez ce qui suit:

1 $\sin 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 40^\circ \sin 10^\circ =$ _____

2 $\frac{\tan 75^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 75^\circ \tan 15^\circ} =$ _____

3 $\cos 70^\circ \cos 20^\circ - \sin 70^\circ \sin 20^\circ =$ _____

4 $\sin(X + Y) \cos Y - \cos(X + Y) \sin Y =$ _____

5 Si $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, alors $\tan(A + B) =$ _____

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

6 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) =$

a $\frac{1}{2}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)$

b $\frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$

c $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)$

d $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta)$

7 $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$ est égal à

a 0

b $\frac{1}{2}$

c 1

d $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8 $\sin 5x \sin 3x + \cos 5x \cos 3x$ est égal à

a $\cos 2x$

b $\cos 8x$

c $\sin 8x$

d $\sin 2x$

9 $\tan 15^\circ$ est égal à

a $2 + \sqrt{3}$

b $-\sqrt{3} - 2$

c $\sqrt{3} - 2$

d $2 - \sqrt{3}$

10 Si $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, $\tan(A + B)$ est égal à

a 1

b $-\frac{5}{6}$

c $\frac{1}{6}$

d $\frac{5}{6}$

11 $\cot(2\pi - \frac{5\pi}{12}) =$

a $2 + \sqrt{3}$

b $2 - \sqrt{3}$

c $-2 - \sqrt{3}$

d $\sqrt{3} - 2$

Simplifiez :

12) $\cos(A - B) - \cos(A + B)$

13) $\sin(A + B) - \sin(A - B)$

14) $\cos A \cos(A + \frac{\pi}{2}) + \sin A \sin(A + \frac{\pi}{2})$

15) $\cos 40^\circ \cos x - \sin 40^\circ \sin x$

16) Si $\sin A = \frac{-8}{17}$ où $180^\circ < A < 270^\circ$ et $\cos B = \frac{-5}{13}$ où $90^\circ < B < 180^\circ$

Sans utiliser une calculatrice trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a) $\cos(A - B)$

b) $\sin(A + B)$

c) $\tan(A - B)$

17) Si $\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{3}{2}$, trouvez la valeur de $\tan \theta$.

18) Soit $\frac{\cos(A + B)}{\cos(A - B)} = \frac{1}{3}$, Démontrez que: $2\sin A \sin B = \cos A \cos B$

puis démontrez que : $2\tan A = \cot B$ sachant que $\tan A = \frac{2}{5}$, trouvez $\tan B$, ensuite trouvez $\tan(A - B)$

19) Soient A et B deux angles aigus où $\tan A = \frac{4}{5}$, $\tan B = \frac{1}{9}$, démontrez que $A + B = 45^\circ$.

20) Si $\cos A = 0,6$, $\cos B = 0,8$, où A et B sont les mesures de deux angles aigus.

Sans utiliser une calculatrice trouvez la valeur de chacun de ce qui suit:

a) $\sin(A + B)$

b) $\cos(A - B)$

c) $\tan(A - B)$

21) Si A et B sont les mesures de deux angles aigus $\cos A = \frac{3}{5}$ et $\tan B = \frac{8}{15}$, Sans utiliser une calculatrice trouvez la valeur de chacun de ce qui suit:

a) $\sin(A + B)$

b) $\tan(A - B)$

c) $\sec(A - B)$

d) $\cot(A + B)$

22) Si $\sin A \sin B = \frac{1}{2}$ et $\cos A \cos B = \frac{1}{3}$, où A et B sont les mesures de deux angles aigus, Trouvez la valeur de: $\cos(A + B)$ et $\cos(A - B)$.

23) Si $\sin A = \frac{3}{5}$ où $0^\circ < A < 90^\circ$ et $\tan B = -7$ où $90^\circ < B < 180^\circ$, démontrez que $A + B = 135^\circ$

24) Si $x + y + z = 90^\circ$, démontrez que $\tan x \tan y + \tan y \tan z + \tan z \tan x = 1$

25) **Réflexion créative:** Si $\tan A = \frac{2}{3}$ où $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$, $\tan B = \frac{1}{5}$ où $0 < B < \frac{\pi}{2}$,

trouvez la valeur de: $\tan(A + B)$, $\cos(A + B)$, démontrez que $A + B = \frac{5\pi}{4}$

4 - 3

Allez apprendre

- Déduire les formules de duplication
- Déduire les formules de l'angle moitié
- Utiliser les formules trigonométriques dans des applications rares
- Utiliser les formules de duplication pour démontrer d'autres formules

Vocabulaires de base

- Fonction trigonométriques double de l'angle
- Angle moitié
- Fonction sinus
- Fonction cosinus
- Fonction tangente

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique



Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà étudié les formules d'addition. Maintenant, une question à aborder :

Etant données la mesure d'un angle A , peut-on déduire les fonctions trigonométriques au double de l'angle A (formules de duplication)? Discutez les réponses obtenues avec votre professeur.



A apprendre

Formules de duplication

Vous savez que :

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

(posons $B = A$)

$$\therefore \sin(A + A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$\therefore \sin 2A = 2\sin A \cos A \quad \text{pour tout } A \in \mathbb{R} \quad (1)$$

De même :

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

pour tout $A \in \mathbb{R}$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \text{où } \tan A \text{ est définie, } \tan^2 A \neq 1$$

Rappel



Relations trigonométriques de base :

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

$$\tan^2 C + 1 = \sec^2 C$$

$$\cot^2 C + 1 = \csc^2 C$$

$$\csc C = \frac{1}{\sin C}$$

$$\sec C = \frac{1}{\cos C}$$

$$\tan C = \frac{\sin C}{\cos C}$$

$$\cot C = \frac{1}{\tan C}$$

$$\tan C = \frac{1}{\cot C}$$

Expression orale :

1- Réécrire les formules précédentes dans le cas où on double $2A$ devient $4A$.



Exemple

Formules de duplication

1 Soit $\sin A = \frac{4}{5}$ où $0^\circ < A < 90^\circ$. Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de chacune de ce qui suit :

a) $\sin 2A$

b) $\cos 2A$

c) $\tan 2A$

Solution

$$\because \sin A = \frac{4}{5}$$

\therefore A se trouve dans le premier quadrant

$$\therefore \cos A = \frac{3}{5}$$

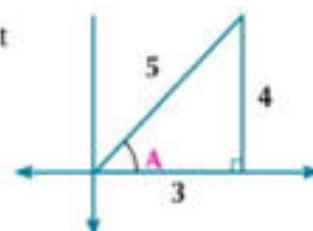
(positif car A est un angle aigu)

a) $\sin 2A$

$$= 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

b) $\cos 2C$

$$= 1 - 2 \sin^2 A = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = \frac{7}{25}$$



(vous pouvez utiliser d'autres formules de duplication de cosinus)

c) $\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

Essayez de résoudre

1) Si $\cos A = \frac{4}{5}$, $0^\circ < A < 90^\circ$, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit sans utiliser une calculatrice:

a) $\sin 2A$

b) $\cos 2A$

c) $\tan 2A$

Exemple Formules de duplication

2) Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit sans utiliser une calculatrice :

a) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$ b) $2 \cos^2 22^\circ 30' - 1$

Solution

a) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 2 \times 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $2 \cos^2 22^\circ 30' - 1 = \cos (2 \times 22^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Essayez de résoudre

2) Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit sans utiliser une calculatrice :

a) $2 \sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30'$ b) $2 \cos^2 75^\circ - 1$ c) $\cos^2 67,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ$

d) $\frac{2 \tan 22^\circ 30'}{1 - \tan^2 22^\circ 30'}$

e) $\frac{2 \cos^2 165^\circ - 1}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ}$

Utiliser les formules de l'angle moitié**A apprendre**

Vous avez déjà étudié: $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$ (formule de duplication)

D'où: $2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$ (de propriétés des expressions algébriques)

$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$ (Divisons les deux membres par 2)

$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ de même pour obtenir les formules de: $\cos \frac{A}{2}$ et $\tan \frac{A}{2}$

$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$, $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$, $\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$ où $\cos A \neq -1$

le signe est déterminé selon le quadrant dans lequel est situé $\frac{A}{2}$



Exemple Utiliser les formules de l'angle moitié

3 Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a $\sin \frac{\theta}{2}$ sachant que, $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$ b $\cos 75^\circ$

c $\tan 22^\circ 30'$

Solution

a $\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$
 $\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}} = \pm \sqrt{\frac{8}{10}}$
 $\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2}{5} \sqrt{5}$

$\therefore 180^\circ < \theta < 270^\circ$ en divisant par 2; alors $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2}{5} \sqrt{5}$ (le signe est positif car l'angle se trouve dans second quadrant)

b $\cos 75^\circ = \cos \frac{150^\circ}{2}$ (car $75^\circ = \frac{150^\circ}{2}$)
 $= \sqrt{\frac{1 + \cos 150^\circ}{2}}$ ($0 < 75^\circ < 90^\circ$) Le signe est positif car l'angle se trouve au premier quadrant
 $= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2

$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ En simplifiant

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}}{2}$$

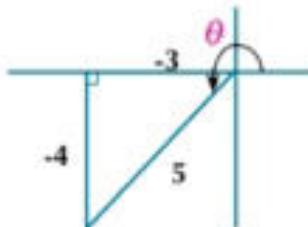
$$\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

c $\tan 22^\circ 30' = \tan \frac{45^\circ}{2}$ (car $22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$)

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} \quad 0 < (22.5^\circ < 90^\circ) \text{ le signe est positif car l'angle se trouve au premier quadrant}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

En multipliant par le conjuguée de dénominateur ($2 - \sqrt{2}$)



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(4+2)-4\sqrt{2}}{4-2}} \\
 &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1
 \end{aligned}$$

5 Essayez de résoudre

3 Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a $\cos \frac{\theta}{2}$ étant donnée $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$
 b $\cos 22^\circ 30'$ c $\tan 15^\circ$.

Exemple vérifiez une identité trigonométrique

4 Démontrez que: $\csc^2 x + \cot 2x = \cot x$, en utilisant pour calculer $\cot 15^\circ$.

Solution

$$\begin{aligned}
 \text{Membre droit} &= \frac{1}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} \\
 &= \frac{1 + (2\cos^2 x - 1)}{2 \sin x \cos x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \text{ (membre gauche)}
 \end{aligned}$$

Posons $x = 15^\circ$ dans l'identité: $\csc 2x + \cot 2x = \cot x$

$$\therefore \cot 15^\circ = \csc 30^\circ + \cot 30^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

5 Essayez de résoudre

4 Démontrez que : $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ puis trouvez la valeur de : $\frac{1 - \tan^2 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$

Exemple Trouver la valeur d'un rapport trigonométrique

5 Si $4 \cos 2C + 3 \sin 2C = 0$, sans utiliser une calculatrice trouvez $\tan C$, où C est la mesure d'un angle aigu positif.

Solution

$$\begin{aligned}
 \therefore 4 \cos 2C + 3 \sin 2C &= 0 & \therefore 4 \cos 2C &= -3 \sin 2C \\
 \therefore \frac{\sin 2C}{\cos 2C} &= \frac{4}{-3} & \therefore \tan 2C &= \frac{4}{-3} \\
 \therefore \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} &= \frac{4}{3} & \therefore 6 \tan C &= -4 + 4 \tan^2 C \\
 \therefore 2 \tan^2 C - 3 \tan^2 C - 2 &= 0 & \\
 (2 \tan C + 1)(\tan C - 2) &= 0 & \therefore \tan C &= -\frac{1}{2} \text{ (refusée)} \text{ où } \tan C = 2
 \end{aligned}$$

Réfléchissez: Utiliser les formules trigonométriques de l'angle moitié pour trouver la valeur de $\tan C$.

5 Essayez de résoudre

5 Si $4 \sin \theta + 3 \cos \theta = 3$, sans utiliser une calculatrice démontrez que $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{4}{3}$, où θ est la mesure d'un angle aigu positif.

6 Exemple Résoudre des équations trigonométriques

6 Déterminez les valeurs de x comprise entre 0 et 2π et qui vérifient l'équation :

a $\sin 2x = \sin x$

b $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$

c $\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} = 1$

7 Solution

a $\because \sin 2x = \sin x$

$2 \sin x \cos x = \sin x$

(car: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)

$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi$

les valeurs de x qui vérifient l'équation sont:

$\frac{\pi}{3}, \pi$ ou $\frac{5\pi}{3}$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

b $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

(car: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

soit $\cos 2x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \right)$

ou $\cos x = \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2n\pi \right)$

où $n \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$

$2x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$

En divisant par 2

$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ $x = \frac{2\pi}{3} + n\pi$

posons $n = 0, 1$:

$x = \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{5\pi}{3}$

les valeurs de x qui vérifient l'équation sont:

$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Réfléchissez: Avez-vous d'autres solutions?

Trouvez l'une de ces solutions.

c $\because \tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} = 1$

$\therefore 2 \tan \frac{x}{2} = 1 - \tan^2 \frac{x}{2}$

$\therefore \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = 1$ $\therefore \tan x = 1$

(La tangente est positive dans le premier et troisième quadrants)

Dans le premier quadrant: $x = \frac{\pi}{4}$

Dans le troisième quadrant: $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

\therefore Les valeurs de x qui vérifient l'équation sont $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$.

5 Essayez de résoudre

6 Déterminez les valeurs de x comprise entre 0 et 2π et qui vérifient l'équation $\cos x + \cos 2x = 0$.

7 **En lien avec la géométrie:** XYZ est un triangle tel que $x = 12\text{cm}$, $y = 18\text{cm}$, $z = 15\text{cm}$. Démontrez que $m(\angle Y) = 2 m(\angle X)$.



Exercices 4 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

- 1 Si $\cos C = \frac{1}{3}$, alors $\cos 2C$ égale à
 - a 0
 - b $-\frac{2}{3}$
 - c $-\frac{7}{9}$
 - d $\frac{2}{3}$
- 2 $\sin A \cos A$ égale à
 - a $\frac{1}{2} \sin 2A$
 - b $\sin 2A$
 - c $\cos 2A$
 - d $\frac{1}{2} \cos 2A$
- 3 $\cos^2 C - \cos 2C$ égale à
 - a $\sin C$
 - b $\cos C$
 - c $\sin^2 C$
 - d $\tan C$
- 4 $1 - 2 \sin^2 50^\circ$ égale à
 - a $\sin 100^\circ$
 - b $\cos 50^\circ$
 - c $\cos 100^\circ$
 - d $\sin 50^\circ$
- 5 $1 + \cos 4A$ égale à
 - a $2 \cos^2 4A$
 - b $\cos^2 2A$
 - c $\cos^4 2A$
 - d $2 \cos^2 2A$
- 6 Sans utiliser une calculatrice, calculez : $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ dans chacun des cas suivants:

<ul style="list-style-type: none"> a $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ c $\csc \theta = \frac{5}{3}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> b $\cos \theta = \frac{1}{3}$, $0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$ d $\cot \theta = \frac{3}{2}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
- 7 Sans utiliser une calculatrice, calculez: $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ dans chacun des cas suivants :

<ul style="list-style-type: none"> a $\cos \theta = \frac{1}{4}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ c $\tan \theta = \frac{4}{3}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> b $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ d $\sin \theta = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
- 8 Sachant que $\cos A = \frac{5}{13}$, où A est la mesure d'un angle aigu, sans utiliser une calculatrice, calculez :
 $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$, $\cos \frac{A}{2}$
- 9 Sachant que A est la mesure d'un angle aigu et $\cos 2A = \frac{119}{169}$, sans utiliser une calculatrice, calculez : $\sin A$, $\cos A$, $\tan 2A$

10 Si $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$. Sans utiliser une calculatrice, calculez: $\cos \frac{A}{2}$, $\sin A$, $\cos A$

11 Si $\cos B = -\frac{4}{5}$, $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$. Sans utiliser une calculatrice, calculez $\frac{\sin 2B}{2 \cos 2B}$

12 Exprimez chacun de ce que suit en utilisant un seul rapport trigonométrique:

a $\sin 35^\circ \cos 35^\circ$ b $\frac{\tan 40^\circ}{1 - \tan^2 40}$ c $\sin 25^\circ \cos 35^\circ - \cos 25^\circ \sin 35^\circ$

d $\frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 50^\circ \tan 40^\circ}$ e $\cos^2 25^\circ - \sin^2 25^\circ$ f $\frac{1 - \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$

13 Trouvez les valeurs de x compris entre 0° et 2π et que vérifie chacune des équations suivantes:

a $\sin 2x = \sin x$ b $\sin^2 2x + 2 \sin 2x + 1 = 0$ c $\cos x - 2 \sin^2 \frac{1}{2}x = 0$

14 Démontrez les identités suivantes :

a $\frac{1 - \cos 2A}{3 + \cos 2A} = \frac{\sin^2 A}{1 + \cos^2 A}$ b $\frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$


Exercices généraux
I: Angles d'élévation et d'abaissement

- 1 D'un point du sol, un homme observe le sommet d'une tour, il a trouvé que son angle d'élévation mesure 22° . S'il parcourt 50 mètres sur une route horizontale vers la base de la tour, l'angle d'élévation du sommet de cette tour mesure alors 36° . Calculer la hauteur de la tour à un mètre près.
- 2 Du sommet d'une colline, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base d'une tour, on a respectivement trouvé $15^\circ 18'$ et $26^\circ 42'$. Si la hauteur de la tour est 20 mètres, calculez la hauteur de la colline à un mètre près.
- 3 Du sommet d'une tour de 10 m de hauteur, on a mesuré les deux angles d'abaissement du sommet et de la base minaret, on a respectivement trouvé $14^\circ 28'$ et 42° . Calculez la hauteur de la tour. On suppose que la base du rocher et de la tour sont dans un même plan horizontal.
- 4 **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau navigue dans la direction sud-est à une vitesse de 24 km/h. Un voyageur observe deux points fixes dans la direction 25° ouest par rapport au nord. Quatre heures plus tard, le voyageur trouve que l'un de ces deux points devient dans la direction 23° sud par rapport à l'ouest et l'autre dans la direction 17° nord par rapport à l'ouest. Trouver la distance entre les deux points sachant que les deux points et le voyageur sont dans un même plan horizontal.
- 5 **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau se déplace en ligne droite vers un rocher à une vitesse uniforme de 300 mètres/minute. Dans un moment, il a trouvé que l'angle d'élévation du sommet du rocher est 35° deux minutes plus tard, l'angle d'élévation du rocher devient 60° . Calculez la hauteur du rocher.
- 6 **En lien avec la navigation maritime:** Un bateau est parti d'un certain point dans la direction de 12° Ouest par rapport au Sud avec une vitesse de 11 km/h. Au même moment un autre bateau est parti du même point vers 68° Nord par rapport à l'Est avec une vitesse de 6,5 km/h. Trouver la distance qui sépare les deux bateaux 3 heures après leur départ.
- 7 D'un point sur un sol horizontal, un homme observe un ballon qui se meut verticalement vers le haut à une vitesse constante de 20 mètres/minute il a trouvé que l'angle d'élévation du ballon est 35° . Trois minutes plus tard et du même point l'angle d'élévation du ballon devient 15° . Trouvez la distance entre cet homme et la projection du ballon sur le sol à un mètre près.

II: Formules d'addition et formules de duplication

- 1 Sans utiliser une calculatrice démontrez que:

a) $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

b)
$$\frac{\cos 40^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ \sin 10^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = 2\sqrt{3}$$

c) $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 Démontrez que:

a $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$, puis trouvez la valeur de $\cos 15^\circ$

b $\frac{2\sin A \cdot \cos 2A}{\sin^2 A} = \sec^2 \frac{A}{2}$ c $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$ d $\frac{1 - \cos C - \sin C}{1 - \cos C + \sin C} = \tan \frac{C}{2}$

3 Sans utiliser un calculatrice, Calculez:

a $\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$

b $\frac{\sin 25^\circ \cos 20^\circ + \cos 25^\circ \sin 20^\circ}{\sin 80^\circ \cos 35^\circ + \cos 80^\circ \sin 35^\circ}$

4 Si $\sin A = \frac{-12}{13}$ où $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ sans utiliser un calculatrice, Calculez $\sin 2A$, $\cos 2A$

5 Si $\tan A = \frac{1}{3}$ où $0 < A < \frac{\pi}{3}$ sans utiliser un calculatrice, Calculez $\frac{1 + \sin 2A}{1 + \cos 2A}$

6 Si $\sin C = \frac{5}{13}$ où $\frac{\pi}{2} < C < \pi$, $\cos B = \frac{4}{5}$ où $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\tan 2A$, $\sin(B - A)$

7 Si $\cos C = \frac{3}{4}$ où $C \in]0, \frac{\pi}{3}[$, $\tan B = \frac{-12}{5}$ où $B \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\cos(A + B)$, $\tan 2B$

8 Si $\tan 2A = \frac{3}{4}$, sans utiliser un calculatrice, Calculez $\tan A$

9 Si $\tan A = \frac{1}{7}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ où $A, B \in]0, \frac{\pi}{3}[$ sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\tan(A + 2B) = 1$

10 Si $\sin A = \frac{4}{5}$ où $A \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cot B = \frac{5}{12}$ où $B \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ sans utiliser un calculatrice, Calculez: $\tan(A - B)$, $\sin 2B$

المواصفات الفنية:

١٥٨٧/١٠/١٥/٢٢/٢/٢٢	رقم الكتاب:
٨٢ × ٥٧ سم	مقاس الكتاب:
١/٨	طبع المتن:
٤ ألوان	طبع الغلاف:
٤ ألوان	ورق المتن:
٨٠ جم أبيض	ورق الغلاف:
٢٠٠ جم كوشيه	عدد الصفحات بالغلاف:
١٢٦ صفحة	

<http://elearning.moe.gov.eg>