الرياضيات
البحتة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب — الفصل الدراسى الثانى

القسم العلمي

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح — أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى — أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

مراجعة وتعديل

أ. منال عباس أحمد عزقول — د. محمد محي الدين عبد السلام أبو رية

أ. شريف عاطف البرهامي — أ. أحمد إبراهيم الدسوقي

أ. عثمان مصطفى عثمان

إشراف تربوى

د. أكرم حسن محمد

مساعد الوزير لشئون تطوير المناهج التعليمية

والمشرف على الإدارة المركزية لتطوير المناهج

٢٠٢٥–٢٠٢٦

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

1 تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

2 تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

3 تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
- تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
- تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

4 اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

5 اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

6 احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاث مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى
المتتابعات والمتسلسلات

الوحدة الثانية
التباديل والتوافيق

المحتويات

الوحدة الثالثة
التفاضل والتكامل

الوحدة الرابعة
حساب المثلثات

الوحدة
الأولى

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and series

مقدمة الوحدة

فيبوناتشي (Fibonacci) (١١٧٠ م - ١٢٥٠ م)

ولد ليوناردو فيبوناتشي في مدينة بيزا بإيطاليا. وكان تعليمه بالأساس في دول المغرب العربى، وقد جلب الأرقام العربية والأسس الجبرية المستعملة حتى اليوم، وقد قام بتعريف الأوروبيين أنظمة الحساب والكتابة العربية التى فاقت بمراحل النظم الرومانية المنتشرة آنذاك في أوروبا، وقد اشتهر أساسًا بمسألة تقودنا إلى متتابعة الأعداد الآتية والتى تُعرف باسمه حتى الآن وهى:

(١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ٣٤، ٥٥، ٨٩، ١٤٤،......)

ويلاحظ أن كل عدد بداية من العدد الثالث هو ناتج من مجموع العددين السابقين له مباشرة، وتتحدد قاعدة هذه المتتابعة كالآتى:

$ع_{ن+٢} = ع_{ن} + ع_{ن+١}$ ، لكل $ن \in ص^{+}$

وقد استخدمت أعداد فيبوناتشي فى تحليل الأسواق المالية، وفي خوارزميات الكمبيوتر مثل تقنية فيبوناتشي للبحث وهيكلة بيانات تكدس فيبوناتشي وهي تظهر أيضا في الترتيبات البيولوجية، مثل تفريعات الأشجار، ترتيب الأوراق على الساق وترتيب مخروط الصنوبر... إلخ .

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم المتتابعة.
- يميز بين المتتابعة والمتسلسلة.
- يتعرف المتتابعة الحسابية.
- يستنتج الحد العام للمتتابعة الحسابية بصور مختلفة .
- يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية.
- يتعرف المتسلسلة المنتهية وغير المنتهية
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.
- يتعرف المتتابعة الهندسية.
- يستنتج الحد العام للمتتابعة الهندسية.
- يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية.
- يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.
- يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.
- يوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
- يحول الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادي.
- يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية فى تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية.
- يحل تطبيقات حياتية على المتسلسلات.
- يستخدم الحاسبات فى حل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام المتتابعات والمتسلسلات.

المصطلحات الأساسية

- دالة — Function
- حد — Term
- متتابعة منتهية — Finite Sequence
- متتابعة غير منتهية — Infinite Sequence
- متتابعة تزايدية — Increasing Sequence
- متتابعة تناقصية — Decreasing Sequence
- متسلسلة — Series
- رمز التجميع — Summation Notation
- متتابعة حسابية — Arithmetic Sequence
- أساس المتتابعة الحسابية — Common Difference
- أوساط حسابية — Arithmetic Means
- متسلسلة حسابية — Arithmetic Series
- متتابعة هندسية — Geometric Sequence
- أساس المتتابعة الهندسية — Common Ratio
- أوساط هندسية — Geometric Means
- متسلسلة هندسية — Geometric Series
- متسلسلة هندسية غير منتهية — Infinite Geometric Series
- مالانهاية — Infinity

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): المتتابعات.

الدرس (١ - ٢): المتسلسلات ورمز المجموع.

الدرس (١ - ٣): المتتابعات الحسابية.

الدرس (١ - ٤): المتسلسلات الحسابية.

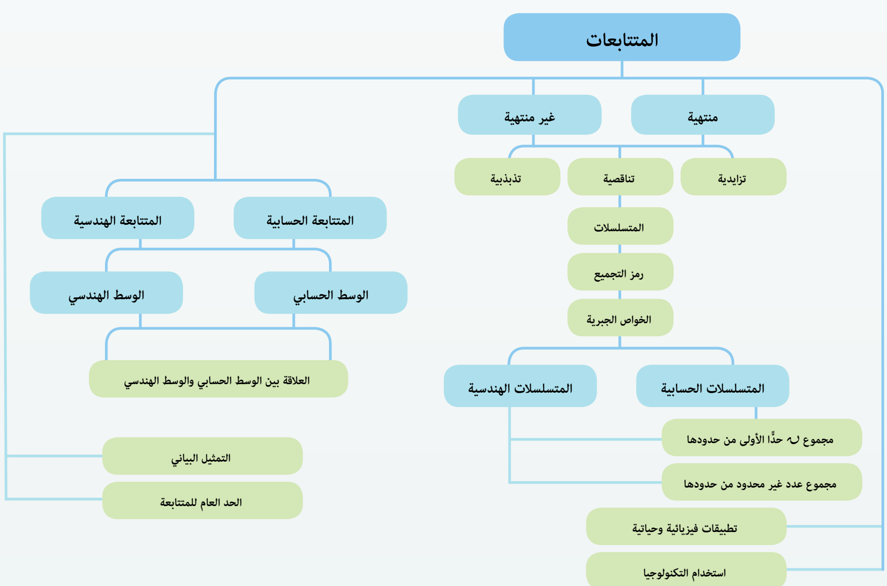
الدرس (١ - ٥): المتتابعات الهندسية.

الدرس (١ - ٦): المتسلسلات الهندسية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية.

مخطط تنظيمي للوحدة



الوحدة الأولى

١ – ١ المتتابعات

Sequences

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة.
- المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية.
- الحد النونى للمتتابعة.
- المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية.

المصطلحات الأساسية

- متتابعة Sequence
- متتابعة منتهية Finite Sequence
- متتابعة غير منتهية Infinite Sequence
- حد Term
- متتابعة تزايدية Increasing Sequence
- متتابعة تناقصية Decreasing Sequence
- متتابعة ثابتة Constant Sequence

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- برامج رسومية

تمهيد:

درست سابقًا الأنماط (مثل: ١، ٣، ٥، ٧، ...) وتعلمت أن النمط العددى هو ترتيب من مجموعة من الأعداد الحقيقية . وفى هذه الوحدة نلقى الضوء على بعض هذه الأنماط ونتناولها بدراسة أكثر عمقًا.

فكر و ناقش

ادرس النمط الآتى ثم أجب عن الأسئلة: (١، ٤، ٧، ١٠، ...)

١) ما العلاقة بين كل حد والذى يليه؟

٢) هل يمكنك إيجاد الحدين التاليين فى النمط؟

٣) هل يمكنك إيجاد الحد التاسع فى هذا النمط (دون الحاجة إلى إيجاد الحدود السابقة له)؟

تذكر أن

الدالة هى علاقة بين مجموعتين س، ص بحيث كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

تعلم

تعريف ١

المتتابعة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص^+$ أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ع حيث يرمز للحد الأول بالرمز $ع_١$، الحد الثانى بالرمز $ع_٢$، الحد الثالث بالرمز $ع_٣$ وهكذا.. والحد النونى بالرمز $ع_ن$ ويمكن التعبير عن المتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتى:

$(ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ ، \dots ، ع_ن)$

أو يرمز لها بالرمز $(ع_ن)$.

لاحظ أن

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

(٢) الرمز $(ع_ن)$ يعبر عن المتتابعة بينما الرمز $ع_ن$ يعبر عن حدها النونى.

(٣) المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.

(٤) عناصر المجموعة لا تتكرر بينما عناصر المتتابعة قد تتكرر.

تعريف:

المتتابعة المنتهية و المتتابعة غير منتهية *Finite and Infinite Sequences*

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيا (أى يمكن حصره أو عده) وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (عدد لا نهائى من العناصر).

مثال

(١) اكتب كلًّا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

(أ) $ع_ن = ن^٢ - ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول)

(ب) $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن + ١}$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول)

الحل

(أ) بوضع ن = ١ فإن $ع_١ = (١)^٢ - ١ = ٠$ ، بوضع ن = ٢ فإن $ع_٢ = (٢)^٢ - ١ = ٣$ ،

بوضع ن = ٣ فإن $ع_٣ = (٣)^٢ - ١ = ٨$ ، بوضع ن = ٤ فإن $ع_٤ = (٤)^٢ - ١ = ١٥$ ،

بوضع ن = ٥ فإن $ع_٥ = (٥)^٢ - ١ = ٢٤$

المتتابعة هى: (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤)

(ب) بوضع ن = ١ فإن $ع_١ = \frac{(-١)^١}{٢ \times ١ + ١} = \frac{-١}{٣}$ ، بوضع ن = ٢ فإن $ع_٢ = \frac{(-١)^٢}{٢ \times ٢ + ١} = \frac{١}{٥}$ ،

بوضع ن = ٣ فإن $ع_٣ = \frac{(-١)^٣}{٢ \times ٣ + ١} = \frac{-١}{٧}$ ، بوضع ن = ٤ فإن $ع_٤ = \frac{(-١)^٤}{٢ \times ٤ + ١} = \frac{١}{٩}$ ،

بوضع ن = ٥ فإن $ع_٥ = \frac{(-١)^٥}{٢ \times ٥ + ١} = \frac{-١}{١١}$

المتتابعة هى: ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-١}{١١}$ ، ......) وتسمى المتتابعة فى هذه الحالة بالمتتابعة التذبذبية (أى أحد حدودها موجب والآخر سالب أو العكس).

الحد العام للمتتابعة

General Term of a Sequence

الحد العام للمتتابعة (ويسمى أحيانا بالحد النونى) ويكتب $ع_ن$ حيث $ع_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن ويمكن استنتاجه أحيانا من خلال حدود معطاة للمتتابعة، وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد ورتبته.

مثال ذلك:

- الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) هو $ع_ن = ٢ ن$
- الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) هو $ع_ن = ٢ ن - ١$
- الحد العام للمتتابعة: ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ......) هو $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٢}$

مثال

(٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى وكذلك الحد العام للمتتابعة ($ع_ن$) المعرفة كالآتى:

$ع_١ = ٢$ ، $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$ حيث ن $\geqslant$ ١

الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فى العلاقة $ع_{ن+١} = ٢ ع_ن$

بوضع ن = ١ $ع_٢ = ٢ ع_١$ أى أن: $ع_٢ = ٢ \times ٢ = ٤ = ٢^٢$ (بالتعويض عن $ع_١ = ٢$)

بوضع ن = ٢ $ع_٣ = ٢ ع_٢$ أى أن: $ع_٣ = ٢ \times ٤ = ٨ = ٢^٣$ (بالتعويض عن $ع_٢ = ٤$)

بوضع ن = ٣ $ع_٤ = ٢ ع_٣$ أى أن: $ع_٤ = ٢ \times ٨ = ١٦ = ٢^٤$ (بالتعويض عن $ع_٣ = ٨$)

بوضع ن = ٤ $ع_٥ = ٢ ع_٤$ أى أن: $ع_٥ = ٢ \times ١٦ = ٣٢ = ٢^٥$ (بالتعويض عن $ع_٤ = ١٦$)

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هى: (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢)

الحد العام للمتتابعة $(ع_ن)$ هو: $ع_ن = ٢^ن$

أضف إلى معلوماتك

بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الأن مثل متتابعة الأعداد الاولية (٢، ٣، ٥، ٧، .....)

فكر:

١- كيف يمكنك التحقق من صحة الحل السابق؟

حاول أن تحل

١) اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة $(ع_ن)$ حيث: $ع_{ن+٢} = ع_{ن+١} + ع_ن$ حيث ن $\geq$ ١ ، $ع_١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٣$

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية: *Increasing and Decreasing Sequences*

تأمل المتتابعات الآتية:

١) (-٥ ، -١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ....) (ماذا تلاحظ)

٢) (٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ....) (ماذا تلاحظ)

- فى المتتابعة الأولى: -١ > -٥ أى أن $ع_٢ > ع_١$ ، ٣ > -١ أى أن $ع_٣ > ع_٢$ وهكذا بالنسبة لبقية الحدود، أى أن كل حد من حدود المتتابعة أكبر من الحد السابق له مباشرة.
- وفى المتتابعة الثانية: ٢ < ٤ أى أن $ع_٢ < ع_١$ ، ١ < ٢ أى أن $ع_٣ < ع_٢$ وهكذا أى أن كل حد من حدود المتتابعة أصغر من الحد السابق له مباشرة.

تعريف:

- تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ **تزايدية** إذا كان $ع_{ن+١} > ع_ن$
- تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ **تناقصية** إذا كان $ع_{ن+١} < ع_ن$

أضف إلى معلوماتك

المتتابعة الثابتة: جميع حدودها متساوية أى: $ع_ن = أ$ وقد تكون منتهية أو تكون غيرمنتهية.

مثال

٣) بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك.

أ) $ع_ن = ٢ن + ٣$ ب) $ع_ن = \frac{١}{٣ن - ١}$ جـ) $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن} + ٤$

الحل

أ نوجد $ع_{ن+١}$ كالآتى: $ع_{ن+١} = ٢(ن + ١) + ٣ = ٢ن + ٥$

نوجد ناتج: $ع_{ن+١} - ع_ن$: $ع_{ن+١} - ع_ن = (٢ن + ٥) - (٢ن + ٣) = ٢ > ٠$

$ع_{ن+١} > ع_ن$ أى أن المتتابعة تزايدية لجميع قيم ن

ب نوجد $ع_{ن+١}$ كالآتى: $ع_{ن+١} = \frac{١}{٣(ن+١) - ١} = \frac{١}{٣ن + ٢}$

نوجد ناتج: $ع_{ن+١} - ع_ن$: $ع_{ن+١} - ع_ن = \frac{١}{٣ن + ٢} - \frac{١}{٣ن - ١} = \frac{٣ن - ١ - ٣ن - ٢}{(٣ن + ٢)(٣ن - ١)} = \frac{-٣}{(٣ن + ٢)(٣ن - ١)} < ٠$

$ع_{ن+١} < ع_ن$ أى أن المتتابعة تناقصية لجميع قيم ن

ج $ع_{ن+١} - ع_ن = \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن+١)} - \frac{(-١)^ن}{٢ن} = \frac{(-١)^{ن+١}}{٢(ن+١)} + \frac{(-١)^{ن+١}}{٢ن}$

$= (-١)^{ن+١}\left[\frac{١}{٢(ن+١)} + \frac{١}{٢ن}\right] = (-١)^{ن+١}\left[\frac{ن + ن + ١}{٢ن(ن+١)}\right]$

$= (-١)^{ن+١}\left[\frac{٢ن + ١}{٢ن(ن + ١)}\right]$

وهذا المقدار موجب عندما ن عدد فردى وسالب عندما ن عدد زوجى أى أن المتتابعة ليست تزايدية ولا تناقصية.

تمارين (١ - ١)

أكمل ما يأتى:

١ المتتابعة هى دالة مجالها هو .... أ، ....

٢ الحد السابع للمتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ٢ن^٢ + ٣$ هو ....

٣ فى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_{ن+١} = ن ع_ن$ حيث $ن \geqslant ١$ إذا كان $ع_١ = ١$ فإن $ع_٣ =$ ....

٤ الحد النونى للمتتابعة (-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ، ......) هو ....

أكمل ما يأتى باستخدام أحد الرموز: > ، < ، أ، =

٥ تكون المتتابعة تناقصية إذا كان: $ع_{ن+١}$ .... $ع_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

٦ تكون المتتابعة ثابتة إذا كان: $ع_{ن+١}$ .... $ع_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

٧ تكون المتتابعة تزايدية إذا كان: $ع_{ن+١}$ .... $ع_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ المتتابعة التى حدها النونى $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل:

أ متتابعة تزايدية ب متتابعة تناقصية ج متتابعة ثابتة د متتابعة تذبذبية

٩ الحد العام للمتتابعة ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ......) هو

أ $(ن - ١)(ن + ١)$ ب $ن(ن + ١)$ ج $٢ن(ن + ١)$ د $(ن + ١)(ن + ٢)$

أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ بين المتتابعات الآتية إذا كانت منتهية أو غير منتهية:

أ (١ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ....)

ب (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، .... ، ٢١)

ج المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ن^٢ - ١$ ، $ن \in ص^+$

د المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = \frac{٢}{ن} + ٣$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

١١ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:

أ $ع_ن = ن + ن^٢$ ب $ع_ن = \frac{١}{٢ن - ٥}$ ج $ع_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

١٢ اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية:

أ (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ......) ب $(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ......)$

ج (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...) د $(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ......)$

١٣ بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى:

أ $ع_ن = ٣ن + ٥$ ب $ع_ن = \frac{١}{ن} + ٢$

١-٢ المتسلسلات ورمز التجميع

Series and Summation Notation

فى لغتنا اليومية نستخدم الكلمتين "المتتابعة" و "المتسلسلة" كمترادفين، وعلى الرغم من وجود ترابط بينهما فى المعنى، فإن هناك فرقًا بينهما فى الرياضيات فالمتتابعة هى عبارة عن قائمة مرتبة من الأعداد فى حين أن المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة. **فمثلا:** (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) هى متتابعة بينما ٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ... هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة، ويمكن استخدام رمز التجميع "$\sum$" ويقرأ (سيجما) لكتابة المتسلسلات بصور مختصرة.

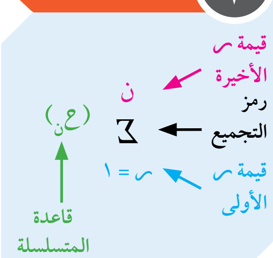
سوف تتعلم

- مفهوم المتسلسلة.
- المتسلسلة المنتهية.
- المتسلسلة غير المنتهية.
- الخواص الجبرية للتجميع.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة Series
- متسلسلة منتهية Finite Series
- متسلسلة غير منتهية Infinite Series
- رمز التجميع Summation Notation

تذكر أن



الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

تعلم

تعريف

المتسلسلة المنتهية: *Finite Series*

تكتب بالصورة: $ع_١ + ع_٢ + ع_٣ + ... + ع_ر + ... + ع_ن$ حيث ن عدد صحيح موجب، $ع_ن$ هو الحد الذى ترتيبه ن فى المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المناظرة

ففى المتسلسلة المنتهية: $أ_١ + أ_٢ + أ_٣ + ... + أ_ر + ... + أ_ن$

يمكن كتابتها بالصورة $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر)$ وتقرأ مجموع $أ_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن

مثال

(١) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك.

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر - ١)$ (ج) $\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}\right)$

الحل

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢) = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠$

(ب) $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر - ١) = (٢ \times ١ - ١) + (٢ \times ٢ - ١) + (٢ \times ٣ - ١) + (٢ \times ٤ - ١)$

$+ (٢ \times ٥ - ١) + (٢ \times ٦ - ١) + (٢ \times ٧ - ١)$

$= ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ = ٤٩$

(ج) $\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}\right) = \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{١}\right) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣}\right) + ... + \left(\frac{١}{ن+١} - \frac{١}{ن}\right)$

$= \frac{١}{٢} - ١ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} + ... + \frac{١}{ن+١} - \frac{١}{ن}$

$= \frac{١}{ن+١} - ١ = \frac{١ - ن - ١}{ن+١} = \frac{-ن}{ن+١}$

حاول أن تحل

(١) اكتب المتسلسلة فى شكل المفكوك ثم أوجد مجموعها:

(أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (ر^٢ + ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر + ٢)$ (ج) $\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر+٢} - \frac{١}{ر+١}\right)$

المتسلسلة غير المنتهية: *Infinite Series*

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها **فمثلا المتسلسلة:** – ٣ + ٩ - ٢٧ + ٨١ – ٢٤٣ + ...

تكتب بالصورة $\sum_{\text{ر}=١}^{\infty} (-٣)^{\text{ر}}$ وقد استخدم الرمز ∞ للدلالة على ذلك.

مثال

(٢) استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة: ٢ × ٣ + ٣ × ٤ + ٤ × ٥ + ...

الحل

∵ الحد العام للمتتابعة هو: $\text{ع}_{\text{ر}} = (\text{ر}+١)(\text{ر}+٢)$ حيث $\text{ر} \in \text{ص}^{+}$

∴ $٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ... = \sum_{\text{ر}=١}^{\infty} (\text{ر}+١)(\text{ر}+٢)$

الخواص الجبرية للتجميع: *Algebraic Properties of Summation*

١- إذا كانت $(\text{ع}_{\text{ر}})$ ، $(\text{هـ}_{\text{ر}})$ متتابعتين ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ ، $\text{جـ} \in \text{ح}$ فإن:

أ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{جـ} = \text{جـ ن}$

ب) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ}\,\text{ع}_{\text{ر}} = \text{أ} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}}$

جـ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}} \pm \text{هـ}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} \pm \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{هـ}_{\text{ر}}$

٢- $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$ ، $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$

مثال

(٣) أوجد بطريقتين مختلفتين $\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٣ - ٢\text{ر} + \text{ر}^{٢})$

الحل

١- الطريقة الأولى (التعويض المباشر)

$$\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٣ - ٢\text{ر} + \text{ر}^{٢}) = (٣ - ٢ \times ١ + ١^{٢}) + (٣ - ٢ \times ٢ + ٢^{٢}) + (٣ - ٢ \times ٣ + ٣^{٢}) + (٣ - ٢ \times ٤ + ٤^{٢})$$

$$= ٢ + ٣ + ٦ + ١١ = ٢٢$$

٢- الطريقة الثانية (استخدام الخواص الجبرية للتجميع)

$$\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٣ - ٢\text{ر} + \text{ر}^{٢}) = \sum_{\text{ر}=١}^{٤} ٣ - ٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ر} + \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ر}^{٢}$$

$$= ٣ \times ٤ - ٢ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} + \frac{٤(٤+١)(٢ \times ٤ + ١)}{٦}$$

$$= ١٢ - ٢ \times \frac{٤ \times ٥}{٢} + \frac{٤ \times ٥ \times ٩}{٦}$$

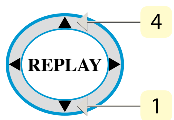
$$= ١٢ - ٢٠ + ٣٠ = ٢٢$$

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة: Using the Scientific Calculator to Find the Result of a Series

- نضغط على مفتاح رمز التجميع Σ حسب اللون المحدد لذلك.
- نكتب قاعدة المتتابعة $(٣ - ٢ر + ر^٢)$ مثلا كالآتي:

3   –   2   ALPHA   )   (×)   +   ALPHA   )   (×) x^2

- نستخدم المفتاح (REPLAY) للتنقل كالآتي:
- لأعلى نكتب 4 ولأسفل نكتب 1
- نضغط على المفتاح = ليعطي على الشاشة الناتج ٢٢



حاول أن تحل

٢) أوجد بطريقتين: $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^٢ - ٣ر + ٥)$ علما بأن:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢} \quad ، \quad \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

تمارين (١ - ٢)

١) أكمل ما يأتي:

أ) المتسلسلة: ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ... + ٥٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

ب) المتسلسلة: ٧ × ١ + ٧ × ٢ + ٧ × ٣ + .. + ٧ × ٢٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

جـ) المتسلسلة: $-\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦}$ ..... تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

٢) اكتب المتسلسلات التالية مستخدما رمز التجميع:

أ) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ٢٠

ب) ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ... + ٦٠

جـ) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨ + ٢١

د) $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + ...$

٣) اكتب مفكوك كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢)$ ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} - ١\right)$

٤) إذا علمت أن $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$ ، فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع Σ قيمة كل مما يأتي:

أ) $\sum_{ر=٨}^{١٢} ٢ر(ر+٥)$ ب) $\sum_{ر=٥}^{٨} (٢ر^٢ - ٣ر)$

٥) الربط بالتعدين: منجم للذهب ينتج في العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب و يتناقص بمعدل ١٠ ٪ سنويًّا من إنتاج العام السابق له مباشرة؟

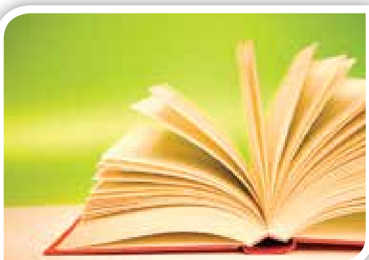
- اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع إنتاج المنجم خلال السنوات الخمس الأولى، ثم أوجد هذا المجموع.

١ـ٣ المتتابعة الحسابية

Arithematic Sequencies

> **سوف تتعلم**
>
> سوف تتعلم:
> - تعريف المتتابعة الحسابية.
> - التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية.
> - الحد النونى للمتتابعة الحسابية.
> - تعيين المتتابعة الحسابية
> - تعريف الوسط الحسابى.
> - إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين.
>
> **المصطلحات الأساسية**
> - متتابعة حسابية Arithematic Sequencies
> - حد نونى The n^{th} Term
> - أساس المتتابعة الحسابية. Commen Difference
> - رتبة الحد. The Order of a Term
> - وسط حسابى. Arithmetic Mean
>
> **الأدوات المستخدمة**
> - آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
> - برامج رسومية

بدأت دعاء فى قراءة إحدى الروايات فقرأت فى اليوم الأول ١٠ صفحات وقرأت فى اليوم الثانى ١٥ صفحة وقرأت فى اليوم الثالث ٢٠ صفحة، فإذا استمرت فى القراءة بهذا النمط فإن متتابعة عدد الصفحات المقروءة في كل يوم هى: (١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ...)



ماذا تلاحظ فى هذه المتتابعة؟

تعريف

المتتابعة الحسابية: *Arithematic Sequence*

هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدرًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة و يرمز له عادة بالرمز (ى)

أى أن: $ى = ع_{ن+1} - ع_ن$ لكل ن ∈ $ص^+$

مثال

(١) أىٌّ من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

أ (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩)

ب (٢٧ ، ٢٣ ، ١٩ ، ١٥ ، ١١ ،.....)

جـ $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦})$

> **أضف إلى معلوماتك**
>
> المتتابعة التوافقية **(Harmonic Sequence)**
>
> تسمى المتتابعة توافقية إذا كان مقلوبات حدودها تكون متتابعة حسابية مثل المتتابعة $(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٧} ، ......)$

الحل

أ ∵ $ع_٢ - ع_١ = ١٠ - ٧ = ٣$ ، $ع_٣ - ع_٢ = ١٣ - ١٠ = ٣$ ، ....

∴ $ع_٢ - ع_١ = ع_٣ - ع_٢ = ع_٤ - ع_٣ = ع_٥ - ع_٤ = ٣$

∴ المتتابعة حسابية أساسها = ٣

ب ∵ $ع_٢ - ع_١ = ٢٣ - ٢٧ = -٤$ ، $ع_٣ - ع_٢ = ١٩ - ٢٣ = -٤$، ....

∴ $ع_٢ - ع_١ = ع_٣ - ع_٢ = ع_٤ - ع_٣ = ع_٥ - ع_٤ = -٤$

∴ المتتابعة حسابية أساسها = -٤

جـ ∵ $ع_٢ - ع_١ = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٦}$ ، $ع_٣ - ع_٢ = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} = -\frac{١}{١٢}$

∴ $ع_٢ - ع_١ \neq ع_٣ - ع_٢$

∴ المتتابعة ليست حسابية

حاول أن تحل

(١) أيٌّ من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

أ (٣٨ ، ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ١٨، ...) ب (-١٤ ، -٨ ، -٢ ، ٤، ١٠) ج (٢٣ ، ٢٨ ، ٣٣ ، ٣٨ ، ٤٢)

مثال

(٢) بين أيًّا من المتتابعات التى يعطى حدها النونى بالعلاقات الآتية تكون حسابية، ثم أوجد أساسها في حال كونها حسابية.

أ $ع_ن = ٢ن + ٣$ ب $ع_ن = \frac{٣}{ن} + ٢$

الحل

أ ∵ $ع_{ن+١} - ع_ن = (٢ (ن + ١) + ٣) - (٢ ن + ٣) = ٢ن + ٢ + ٣ - ٢ن - ٣ = ٢$

∴ المتتابعة حسابية أساسها **٢**

ب ∵ $ع_{ن+١} - ع_ن = \left(\frac{٣}{ن+١} + ٢\right) - \left(\frac{٣}{ن} + ٢\right)$

$= \frac{٣}{ن+١} - \frac{٣}{ن} = \frac{٣ن - ٣ن - ٣}{ن(ن+١)} = \frac{-٣}{ن(ن+١)}$ لا تساوى مقدارًا ثابتًا.

∴ **المتتابعة ليست حسابية.**

حاول أن تحل

(٢) بين أيًّا من المتتابعات التى يعطى حدها النونى بالعلاقات الآتية تكون حسابية، ثم أوجد أساسها في حال كونها حسابية.

أ $ع_ن = ٥ - ٣ ن$ ب $ع_ن = (ن + ١)^٢$

نستنتج مما سبق أن:

- العلاقة بين المتغيرين ن، $ع_ن$ هى: $ع_ن = ى ن + ب$ حيث ب، ى ثابتان ، ى أساس المتتابعة.
- تكون المتتابعة تزايدية إذا كان ى > ٠ ، وتكون تناقصية إذا كانت ى < ٠

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة حسابية:

لكتابة المتتابعة الحسابية التى فيها (أ = ١٠، ى = - ٣) مثلا نتبع الآتى:

- نكتب قيمة أ (العدد ١٠) ثم نضغط علامة [=] ثم نضع قيمة ى بالضغط على [-] ثم (العدد٣) و نضغط علامة [=] فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة [=] تعطى الحدود التالية وهكذا...

حاول أن تحل

(٣) فى المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_ن = ٣ن - ٥$:

أ أثبت أن ($ع_ن$) متتابعة حسابية وأوجد اساسها.

ب بيِّن أن هذه المتتابعة تزايدية.

ج أوجد حدها الخامس عشر.

د إذا كان $ع_ن = ٨٥$ فما قيمة ن.

الحد النونى للمتتابعة الحسابية: *The n^{th} Term*

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية ($ع_ن$) التى حدها الأول أ وأساسها ى كالآتى:

$ع_١$ = أ ، $ع_٢$ = أ + ى ، $ع_٣$ = أ + ٢ ى وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو:

$\boxed{ع_ن = أ + (ن - ١) ى}$ وإذا كان $ع_ن$ = ل (حيث ل هو الحد الأخير) فإن $\boxed{ل = أ + (ن-١) ى}$

مثال

٣ فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ...... ، ١٠٠)

أ أوجد الحد العاشر.

ب أوجد عدد حدود هذه المتتابعة.

الحل

∵ المتتابعة حسابية ∴ أ = ١٣، ى = ١٦ − ١٣ = ٣

أ ∵ $ع_ن$ = أ + (ن − ١) ى ∴ $ع_{١٠}$ = ١٣ + (١٠ − ١) × ٣

= ١٣ + ٩ × ٣ = ١٣ + ٢٧ = **٤٠**

ب المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما ل = ١٠٠

∵ $ع_ن$ = أ + (ن − ١) ى ∴ ١٠٠ = ١٣ + (ن − ١) × ٣

∴ ١٠٠ = ١٣ + ٣ن − ٣ أى أن: ٣ن = ١٠٠ − ١٠ = ٩٠ ∴ ن = **٣٠**

حاول أن تحل

٤ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ٩ ، ١١ ، ...... ، ٦٥) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

تعيين المتتابعة الحسابية: *Identifying the Arithematic Sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى عُلِم حدها الأول والأساس.

مثال

٤ الحدان السابع والخامس عشر فى متتابعة حسابية هما ١٨ ، ٣٤ على الترتيب أوجد أساس هذه المتتابعة وحدها الأول ثم أوجد حدها النونى.

الحل

$ع_٧$ = ١٨، $ع_{١٥}$ = ٣٤ من معطيات المسالة

∵ $ع_ن$ = أ + (ن − ١) ى

∴ أ + ٦ى = ١٨ ، أ + ١٤ى = ٣٤

∴ ٨ى = ١٦ بطرح المعادلتين

ى = ٢ بالقسمة على ٨

∴ أ + ٦ × ٢ = ١٨ بالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ أ = ١٨ − ١٢ = ٦

ولإيجاد الحد النونى نعوض فى القانون: $ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ عن قيمتى أ، ء

$ع_ن = ٦ + (ن - ١) \times ٢ = ٦ + ٢ن - ٢ = ٢ن + ٤$

الحد الأول يساوى ٦ والأساس يساوى ٢ **والحد النونى** هو ٢ن + ٤

الأوساط الحسابية: *Arithmetic means*

عندما يوجد حدان غير متتاليين فى متتابعة حسابية، فتسمى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين أوساطا حسابية، ويمكن استخدام هذا المفهوم فى إيجاد الحدود الناقصة بين هذين الحدين فى المتتابعة الحسابية.

تعريف ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية،

فإن ب تعرف **بالوسط الحسابى** بين الحدين أ ، جـ حيث: ب - أ = جـ - ب

أى أن: ٢ب = أ + جـ فتكون ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$ لذلك فإن: $\left(أ ، \frac{أ + جـ}{٢} ، جـ\right)$ **متتابعة حسابية.**

ويمكن إدخال عدة أوساط حسابية: $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن$ بين العددين أ، ب

بحيث تكون الأعداد: $(أ ، س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن ، ب)$ **متتابعة حسابية.**

تعبير شفهى: ما العلاقة بين عدد الأوساط الحسابية، وبين عدد حدود المتتابعة التى تحتوى هذه الأوساط؟

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين:

Insert a Finite Number of Arithematic Means Between Two Numbers

مثال

٥ أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

١- نوجد عدد حدود المتتابعة.

توجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة، لذا فإن عدد حدود المتتابعة الحسابية

ن = ٢ + ٥ = ٧

٢- نوجد قيمة ء

الحد النونى للمتتابعة الحسابية: $ع_ن = أ + (ن - ١) ء$

بالتعويض عن: أ = ٦ ، $ع_ن$ = ٤٨، ن = ٧

٤٨ = ٦ + (٧ - ١) ء أى أن: ٦ء = ٤٢

بقسمة الطرفين على ٦ ء = ٧

٣- نستخدم قيمة ء لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة

٦ ، ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١ ، ٤٨

+٧ ، +٧ ، +٧ ، +٧ ، +٧ ، +٧

الأوساط المطلوبة هى: ١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١

٩ حاول أن تحل

٥ أدخل ٧ أوساط حسابية بين العددين – ٢٤ ، ١٦

تمارين (١ – ٣)

حدد أياً من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها غير حسابية ثم أوجد الأساس فى حال كونها حسابية:

١ (٣٤ ، ٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ١٨)

٢ (٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٧)

٣ (-١٢ ، -١٨ ، - ٢٤ ، - ٣٠ ، - ٣٦)

أكمل ما يأتى:

٤ الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو ....

٥ الحد الحادى عشر من المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن$ = ٣ن – ٥ هو ....

٦ الحد النونى للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، .....) هو ....

٧ الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو ....

٨ إذا كان الوسط الحسابى للعددين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س تساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٩ جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...)

ب (-١١ ، -١٥ ، -١٩ ، -٢٣ ، ...)

جـ $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦} ...)$

د $(\frac{٢١}{٥} ، \frac{١٦}{٥} ، \frac{١١}{٥} ، \frac{٦}{٥} ، .....)$

١٠ المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى:

أ $(ع_ن) = (\frac{ن+١}{ن})$

ب $(ع_ن) = (ن + ١)^٢$

جـ $(ع_ن) = (\frac{٣}{ن}(ن + ٢))$

د $(ع_ن) = (\frac{ن^٣-١}{ن^٢+ن+١})$

١١ إذا كانت $(ع_ن)$ متتابعة حسابية حيث $ع_ن$ = ٣ن + ٢ فإن الوسط الحسابى بين $ع_٥$ ، $ع_{١١}$ يساوى:

أ ٨ ب ١٦ جـ ٢٢ د ٢٦

١٢ إذا كان ٢أ + ١ ، ٥أ – ١ ، ٦أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى

أ ١ ب ٢ جـ ٣ د ٥

١٣ إذا كانت أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن: $\frac{ص-س}{ب-أ}$ تساوى:

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٤) أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ،٨٠).

(١٥) فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ...... ، - ١٣٣) أوجد:

أ) قيمة الحد السابع ب) عدد حدود المتتابعة

(١٦) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ، .....)

(١٧) أوجد رتبة وقيمة أول حد قيمته أكبر من ١٨٠ فى المتتابعة الحسابية:

(١٨) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتابعة ($ع_{ن}$)= (٢ + ٥ ن) ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من المتتابعة
أوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠

(١٩) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ع_{ن}$ = ٣٩ ، $ع_{٢ن}$ = ٧٩ فما قيمة ن؟ ثم أوجد المتتابعة.

(٢٠) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثانى.

(٢١) ($ع_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = ٩ ، $ع_{٥}$ = ٢٢ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٢) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ :٧

(٢٣) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

(٢٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢.

(٢٥) ($ع_{ن}$) متتابعة حسابية فيها: $ع_{٢}$ + $ع_{٤}$ = ٤٢ ، $ع_{٣}$ × $ع_{٥}$ = ٣١٥ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٦) إذا كانت (٨ ، أ ، ..... ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حدًّا فأوجد قيم أ ، ب

(٢٧) إذا كانت ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمة أ ، ب

(٢٨) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ٤أ ، ٢ب هو ٢٠ ، فأوجد قيمة كل من أ ، ب

(٢٩) أدخل ١٦ وسطا حسابيا بين ٢٧ ، - ٢٤

(٣٠) متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة.

(٣١) إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى. أوجد عدد هذه الأوساط

١–٤ المتسلسلات الحسابية

Arithmetic Series

- متسلسلة حسابية.
- إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير.
- إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس .

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة حسابية . arithmetic series
- رمز المجموع Summation notation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

مجموع المتسلسلة الحسابية: *Sum of Arithmetic Sequence*

كارل جاوس: عالم ألماني
١٧٧٧ م – ١٨٥٥م

أحدث التلاميذ ضوضاء داخل الفصل فأراد المعلم معاقبتهم إذ طلب إليهم جمع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ وذلك حتى يطول الوقت و يعود الهدوء إلى الفصل، لكن لم تمض بضع دقائق حتى تقدم صبي لم يتجاوزعمره ٧ سنوات يسمى كارل جاوس (Karl Gauss) وأبلغه بأن ناتج الجمع هو(٥٠٥٠) فسأله المعلم عن كيفية توصله إلى هذه الإجابة الصحيحة؟

فأجابه بأن ناتج الجمع ١٠١ يتكرر من جمع الأعداد الآتية:

١ + ١٠٠ ، ٢ + ٩٩ ، ٣ + ٩٨ ، ...... ، ٥٠ + ٥١ خمسين مرة

وبالتالي فإن ناتج الجمع هو ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠

تعلم

مجموع ن حدّا الأولى من متتابعة حسابية

Sum of the First nth Terms of an Arithmetic Sequence

أولا: مجموع ن حدًّا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول(أ) والأخير (ل)

و أساسها ى، وعدد حدودها ن يرمز له بالرمز جـن و يعطى بالمتسلسلة التالية:

$$ج_ن = أ + (أ + ى) + (أ + ٢ى) + ... + (ل - ى) + ل \qquad (١)$$

كما يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة:

$$ج_ن = ل + (ل - ى) + (ل - ٢ى) + ... + (أ + ى) + أ \qquad (٢)$$

وبجمع المعادلتين (١)، (٢) ينتج أن:

$$٢ج_ن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) \text{ إلى ن من المرات}$$

أي أن ٢جـن = ن (أ + ل) وبقسمة الطرفين على ٢

$$\boxed{ج_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)}$$

مثال استخدام رمز التجميع Σ

١) أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٤}(٤ر - ٣)$

تذكر أن

- قيمة ر الأخيرة ← ن
- رمز التجميع ← Σ
- قيمة ر الأولى ← ر = ١
- قاعدة المتسلسلة ← (عن)

الحل

$ن = ٢٤ - ٥ + ١ = ٢٠$ نوجد عدد حدود المتتابعة

$ع_ن = ٤ن - ٣$ الحد النونى للمتتابعة

$ع_٥ = ٤ \times ٥ - ٣ = ١٧$ ، $ع_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ - ٣ = ٩٣$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}(١٧ + ٩٣) = ١١٠٠$ بالتعويض عن $أ = ١٧$، $ل = ٩٣$، $ن = ٢٠$

٩ حاول أن تحل

① أوجد:

أ $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٦ك + ٥)$

ب $\sum_{م=٧}^{٣٢} (١٢ - ٥م)$

مثال

② أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢

الحل

$ل = أ + (ن - ١)ى$ الحد النونى للمتتابعة

$٦٢ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$ بالتعويض عن $أ = ٢$، $ى = ٣$، $ل_ن = ٦٢$

أى أن: $٣ن - ٣ + ٢ = ٦٢$

$٣ن - ١ = ٦٢$ فتكون $ن = ٢١$

$حـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ صيغة المجموع

$جـ_{٢١} = \frac{٢١}{٢}(٢ + ٦٢) = ٦٧٢$ بالتعويض عن $أ = ٢$، $ن = ٢١$، $ع_ن = ٦٢$

ثانيًا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

نعلم أن $ل = أ + (ن - ١)ى$ ، $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

وبالتعويض من العلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[أ + أ + (ن - ١)ى]$ أى أن: $\boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ى]}$

مثال

③ فى المتسلسلة الحسابية ٥ + ٨ + ١١ + ... أوجد:

أ مجموع ٢٠ حدًّا الأولى منها.

ب مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

جـ مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

الحل

أ = ٥ ، ء = ٨ - ٥ = ٣

أ) $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$ صيغة المجموع

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} \times [٢ \times ٥ + (٢٠ - ١) \times ٣]$ بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٨ - ٥ = ٣

$جـ_ن = ١٠ (١٠ + ١٩ \times ٣)$

$= ١٠ \times ٦٧ = ٦٧٠$ بالتبسيط

ب) $ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ الحد النوني للمتتابعة

$ع_٧ = أ + ٦ء$

$= ٥ + ٦ \times ٣ = ٢٣$ بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٣ ، ن = ٧

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢} \times [٢ ع_٧ + (١٠ - ١) \times ٣]$ بالتعويض فى صيغة المجموع

$جـ_{١٠} = ٥ \times [٢ \times ٢٣ + ٢٧]$

$= ٥ \times ٧٣ = ٣٦٥$ بالتبسيط

جـ) مجموع حدود المتتابعة ابتداء من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$ الحد النوني للمتتابعة

$ع_{١٠} = أ + ٩ء$

$= ٥ + ٩ \times ٣ = ٣٢$ بالتعويض عن أ = ٥ ، ء = ٣

$ع_{٢٠} = أ + ١٩ ء = ٥ + ١٩ \times ٣ = ٦٢$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ صيغة المجموع

$جـ_{١١} = \frac{١١}{٢} (ع_{١٠} + ع_{٢٠})$

$= \frac{١١}{٢} (٣٢ + ٦٢) = ٥١٧$ بالتعويض عن $ع_{١٠} = ٣٢$ ، $ع_{٢٠} = ٦٢$، ن = ١١

فكر:

هل توجد حلول أخرى لإيجاد مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$

مثال

٤) أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها: $ع_١ = ١١$ ، $ع_ن = ٨٧$ ، $جـ_ن = ٩٨٠$

الحل

أ) إيجاد قيمة ن

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ صيغة المجموع

$٩٨٠ = \frac{ن}{٢} (١١ + ٨٧)$ بالتعويض عن $ع_١ = ١١$، $ع_ن = ٨٧$ ، $جـ_ن = ٩٨٠$

$٩٨ \times \frac{ن}{٢} = ٩٨٠$ فيكون: ن = ٢٠ حدًّا بالتبسيط

ب إيجاد قيمة ى

$ع_ن = أ + (ن - ١) ى$	الحد النونى
$٨٧ = ١١ + ١٩ ى$	بالتعويض عن $ع_١ = ١١$، $ن = ٢٠$ ، $ع_ن = ٨٧$
$١٩ ى = ٨٧ - ١١ = ٧٦$	بالتبسيط
$ى = ٤$	وبالقسمة على ١٩

ج تكوين المتتابعة: $ع_٢ = ١١ + ٤ = ١٥$، $ع_٣ = ١٥ + ٤ = ١٩$

المتتابعة الحسابية هى (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ... ، ٨٧)

حاول أن تحل

٢ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها

أ $ع_١ = ٢٣$ ، $ع_ن = ٨٦$ ، $جـ_ن = ٥٤٥$

ب $ع_١ = ١٧$ ، $ع_ن = -٩٥$ ، $جـ_ن = -٥٨٥$

تمـــارين (١ – ٤)

أكمل ماياتى

١ مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل هو ....

٢ مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ى هو ....

٣ $\sum_{ك=١}^{٥} (٢ك + ١) =$ ....

٤ مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى ....

٥ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى ....

٦ مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

٧ قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر + ١)$ يساوى:

أ ٢٥ ب ٣٠ ج ٣٥ د ٤٠

٨ قيمة المتسلسلة: ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن – ١ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ر - ١)$ ب $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر + ١)$ ج $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر - ١)$ د $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ر + ١)$

٩ قيمة المتسلسلة: ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى:

أ $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ر + ٢)$ ب $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ر + ٣)$ ج $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ر + ١)$ د $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ٤)$

١٠ مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ن + ١)) ابتداء من حدها الأول يساوى:

أ ن(ن + ١) ب ن(ن + ٢) ج ن(ن + ٥) د ن(ن + ٢) ن(ن + ٣)

أجب عن الأسئلة الآتية

(١١) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ...).

(١٢) أوجد مجموع ٣٠ حدًّا الأولى من المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن = ٢ن + ٣$

(١٣) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠).

(١٤) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤، ٢١ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليتلاشى المجموع.

(١٥) إذا كان مجموع ن من متتابعة حسابية يتعين بالقانون: $جـ_ن = ٢ن(٧ - ن)$ فأوجد:

أ) $ع_٧$

ب) عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداء من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا – ٢٤٠

(١٦) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبا.

(١٧) أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبا.

(١٨) في المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) أوجد:

أ) مجموع ٢٠ حدًّا الأولى منها.

ب) مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

جـ) مجموع حدود المتتابعة بدأ من $ع_{١٠}$ إلى $ع_{٢٠}$.

(١٩) في المتتابعة $(ع_ن) = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...)$.

أ) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

ب) أوجد عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر من الصفر.

(٢٠) في المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...). أوجـد:

أ) أكبر مجموع للمتتابعة.

ب) عدد الحدود التي مجموعها = ١٢٠ ابتداء من الحد الأول " فسِّر وجود جوابين "

(٢١) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = - ٢٦ ، ومجموع حدودها = - ١٤٠ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٢) $(ع_ن)$ متتابعة حسابية حدها الثاني = ١٣ ، ومجموع العشر حدود الأولى منها = ٢٣٥ أوجد هذه المتتابعة.

(٢٣) متتابعة حسابية فيها $ع_٤ = ٢٤$ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ ، أوجد هذه المتتابعة.

(٢٤) متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابي لحديها الثالث والسادس يساوي ١٦ ، فما هي المتتابعة؟ وكم حدًّا يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر؟

(٢٥) الربط بالنشاط الفني: مسرح مدرسي يتسع لـ ١٦ صفا ، فإذا كان الصف الأول يحتوي على ١٦ مقعدا، وكل صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار ٤ مقاعد. كم عدد المقاعد بهذا المسرح؟

(٢٦) الربط بالدخل: بدأ كريم العمل براتب سنوي قدره ١٩٢٠٠ جنيها ، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيها. فكم يكون مجموع ما يحصل عليه من رواتب في نهاية السنة العاشرة؟

١ـــ٥ المتتابعة الهندسية

Geometric Sequences

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الهندسية
- التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية.
- الحد النونى للمتتابعة الهندسية.
- تعيين المتتابعة الهندسية.
- الأوساط الهندسية.
- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين.

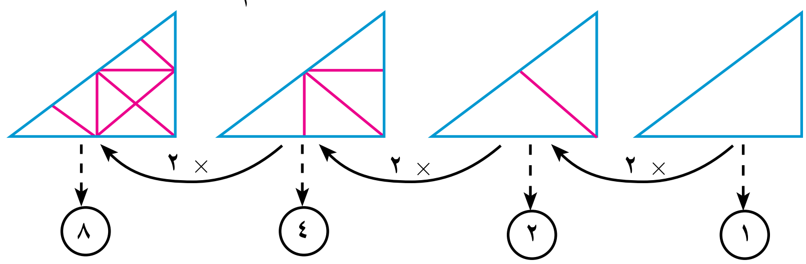
المصطلحات الأساسية

- متتابعة هندسية Seqences Geometric
- حد نونى n^{th} Term
- متتابعة تزايدية Increasing Seqence
- متتابعة تناقصية decreasing Sequence
- متتابعة متناوبة الإشارة Alternating Signal Sequence
- وسط هندسى Geometric Mean

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- Scientific Calculator
- برامج رسومية

تأمل المثلثات الصغرى فى كل شكل من الأشكال الآتية ثم أوجد عددها. ماذا تلاحظ؟



تعريف

تسمى المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية

إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = مقدارًا ثابتًا لكل $ن \in ص^+$

ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (ر)

مثال

١ بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ الآتية هندسية وأوجد أساس كل منها:

أ $(ع_ن) = (٢ \times ٣^ن)$ ب $(ع_ن) = (٤ ن^٢)$

جـ المتتابعة $(ع_ن)$ حيث: $ع_١ = ١٢$ ، $ع_ن = \frac{١}{٤} \times ع_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$)

الحل

أ $\because \frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{٢ \times ٣^{ن+١}}{٢ \times ٣^ن} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ (مقدار ثابت)

$\therefore$ المتتابعة هندسية وأساسها ر = ٣

ب $\because \frac{ع_{ن+١}}{ع_ن} = \frac{٤(ن+١)^٢}{٤ ن^٢}$ (ليس مقدارًا ثابتًا)

$\therefore$ المتتابعة ليست هندسية

جـ $\because ع_ن = \frac{١}{٤} \times ع_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$)

$\therefore \frac{ع_ن}{ع_{ن-١}} = \frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت)

$\therefore$ المتتابعة هندسية وأساسها ر $= \frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(١) بين أيًّا من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها فى حال كونها هندسية:

أ $(ع_ن) = (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ٣)$ ب $(ع_ن) = (\frac{١}{٢٤٣} ، -\frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٧} ، -\frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣})$

ج $(ع_ن) = (٥ \times ٢^ن)$ د $(ع_ن) = (٣ (ن + ١)^٢)$

الحد النونى للمتتابعة الهندسية: *The n th Term*

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الهندسية $(ع_ن)$ التى حدها الأول أ وأساسها ر كالآتى:

$ع_١ = أ$، $ع_٢ = أر$، $ع_٣ = أر^٢$ وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو: $\boxed{ع_ن = أ ر^{ن-١}}$

مثال

(٢) فى المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) أوجد:

أ الحد الخامس ب رتبة الحد الذى قيمته ٥١٢

الحل

$\because أ = ٢$ ، $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $ع_ن = أ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ع_٥ = أر^٤ = ٢ \times ٢^٤ = ٢ \times ١٦ = ٣٢$ أى أن قيمة الحد الخامس تساوى ٣٢

$\because ع_ن = أ \times ر^{ن-١}$ $\therefore ٢ \times ٢^{ن-١} = ٥١٢$ وبقسمة الطرفين على ٢

$\therefore ٢^{ن-١} = ٢^٨$ $\therefore ن - ١ = ٨$ $\therefore ن = ٩$

أى أن الحد الذى قيمته ٥١٢ هو الحد التاسع

تعيين المتتابعة الهندسية: *Identifying The Geometric Sequence*

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول والأساس؟

مثال

(٣) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة، فإذا كان $ع_٣ + ع_٤ = ٦ع_٢$، $ع_٧ = ٣٢٠$ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

$\because ع_٣ + ع_٤ = ٦ع_٢$ $\therefore أر^٢ + أر^٣ = ٦ \times أر$

$\therefore أر (ر + ر^٢) = ٦ \times أر$ وبقسمة الطرفين على أر (حيث أ، ر لا يساويان الصفر)

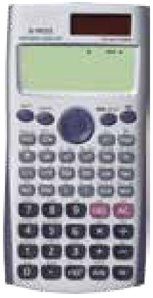
$\therefore ر^٢ + ر = ٦$ أى أن: $ر^٢ + ر - ٦ = ٠$

$\therefore (ر - ٢)(ر + ٣) = ٠$ $\therefore ر = ٢$ أ، $ر = -٣$ مرفوض (لأن الحدود موجبة)

$\because ع_٧ = ٣٢٠$ $\therefore أر^٦ = ٣٢٠$ وبالتعويض عن ر = ٢

$أ \times ٢^٦ = ٣٢٠$ $\therefore ٦٤أ = ٣٢٠$ وبقسمة الطرفين على ٦٤

$أ = ٥$ المتتابعة هى (٥، ١٠، ٢٠، ......)



استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة هندسية

لكتابة المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ٥ ، ر = ٢ مثلا نتبع الآتى:
نكتب قيمة أ (العدد ٥) ثم نضغط علامة (=) ثم نضغط على المفتاح(×) ونضع قيمة ر (العدد ٢) ثم نضغط علامة (=) فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة (=) تعطى الحدود التالية وهكذا ....

مثال

٤ الربط بالتعليم: إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية في إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤ ٪ سنويًّا، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب. فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات؟

الحل

∵ عدد الطلاب حاليا = ٢٤٠٠

∴ عدد الطلاب فى السنة الثانية = ٢٤٠٠ (١ + ٠,٠٤)

= ٢٤٠٠ (١,٠٤)

∴ عدد الطلاب فى السنة الثالثة = ٢٤٠٠(١,٠٤) + ٢٤٠٠(١,٠٤) × ٠,٠٤

= ٢٤٠٠(١,٠٤) (١ + ٠,٠٤) = ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} وهكذا ...

أى أن أعداد الطلاب تكون متتابعة هندسية (٢٤٠٠ ، ٢٤٠٠(١,٠٤) ، ٢٤٠٠(١,٠٤)^{٢} ، ...)

أ = ٢٤٠٠، ر = ١,٠٤ ، ن = ٦ وبالتعويض فى قانون الحد النونى للمتتابعة الهندسية ح$_{ن}$ = أ × ر$^{ن-١}$

ح$_{ن}$ = (٢٤٠٠) × (١,٠٤)^{٥} = ٢٩١٩,٩٦٦٩٦٦

أى أن عدد الطلاب بعد ٦ سنوات يساوى ٢٩٢٠ طالبًا تقريبًا.

الأوساط الهندسية: *Geometric Means*

الأوساط الهندسية كما فى الأوساط الحسابية هى الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين فى متتابعة هندسية، ويستخدم أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد هذه الأوساط.

تعريف ٢

إذا كانت ا، ب، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسى بين العددين ا، جـ حيث: $\frac{ب}{ا} = \frac{جـ}{ب}$ أى أنه ب^{٢} = ا جـ

فتكون ب = ± $\sqrt{ا\ جـ}$

أضف إلى معلوماتك

يعرف الوسط الهندسى لمجموعة من القيم الحقيقية الموجبة ح$_{١}$، ح$_{٢}$، ح$_{٣}$، ....، ح$_{ن}$ بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم أى أن: الوسط الهندسى (GM) = $\sqrt[ن]{ح_{١} \times ح_{٢} \times ... \times ح_{ن}}$

تعبير شفهى:

الأوساط الهندسية التى يمكن إدخالها بين عددين تعتمد على إشارة هذين العددين . فسِّر هذه العبارة.

إدخال عدد من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين:

مثال

٥ أوجد الأوساط الهندسية فى المتتابعة: (٤ ، .... ، .... ، .... ، .... ، .... ، ٢٩١٦)

الحل

١- نوجد عدد حدود المتتابعة

يوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير فى المتتابعة الهندسية

لذا فإن عدد حدود المتتابعة $ن = ٢ + ٥ = ٧$

٢- نوجد قيمة ر

باستخدام القانون: $ل = أ ر^{ن-١}$

$٢٩١٦ = ٤ \times ر^{٧-١}$ بالتعويض عن: $أ = ٤$، $ل = ٢٩١٦$، $ن = ٧$

أى أن: $٤ \times ر^{٦} = ٢٩١٦$ بقسمة الطرفين على ٤ $ر^{٦} = ٧٢٩$

أى أن: $ر^{٦} = (\pm ٣)^{٦}$ ومنها $ر = \pm ٣$

٣- نستخدم قيمة ر لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة

الأوساط هى:

$$٤ \xrightarrow{\times ٣} ١٢ \xrightarrow{\times ٣} ٣٦ \xrightarrow{\times ٣} ١٠٨ \xrightarrow{\times ٣} ٣٢٤ \xrightarrow{\times ٣} ٩٧٢ \xrightarrow{\times ٣} ٢٩١٦$$

أ،

$$٤ \xrightarrow{\times -٣} -١٢ \xrightarrow{\times -٣} ٣٦ \xrightarrow{\times -٣} -١٠٨ \xrightarrow{\times -٣} ٣٢٤ \xrightarrow{\times -٣} -٩٧٢ \xrightarrow{\times -٣} ٢٩١٦$$

الأوساط المطلوبه هى ١٢، ٣٦، ١٠٨، ٣٢٤، ٩٧٢ أ، - ١٢، ٣٦، - ١٠٨، ٣٢٤، - ٩٧٢

أضف إلى معلوماتك

إذا كانت: $ع_١، ع_٢، ع_٣، \ldots ع_ن$ أعداد حقيقية موجبة فإن:

$$\frac{ع_١ + ع_٢ + ع_٣ + \ldots + ع_ن}{ن} \geq \sqrt[ن]{ع_١ ع_٢ ع_٣ \ldots ع_ن}$$

وتتحقق المساواة فقط عندما: $ع_١ = ع_٢ = ع_٣ = \ldots = ع_ن$

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين:

إذا كان س، ص $\in ع^{+}$، س $\neq$ ص

فإن: الوسط الحسابى (ع) $= \frac{س + ص}{٢}$، الوسط الهندسى الموجب (هـ) $= \sqrt{س ص}$

$$\therefore ع - هـ = \frac{س + ص}{٢} - \sqrt{س ص}$$

$$= \frac{س - ٢\sqrt{س ص} + ص}{٢}$$

$$\therefore \quad = \frac{(\sqrt{س} - \sqrt{ص})^{٢}}{٢} > ٠$$

(بوضع المقدار على صورة مربع كامل)

$\therefore ع > هـ$ وحيث إن الوسط الهندسى الموجب أكبر من الوسط الهندسى السالب

> فيكون الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

تفكير ناقد: ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين حقيقيين موجبين متساويين؟

مثال

٦ إذا كانت ٦أ ، ٣ب ، ٢جـ ، ٢ ء كميات موجبة فى تتابع حسابى.

أثبت أن ب جـ > ٢ أ ء

الحل

∵ ٣ب وسط حسابى بين ٦أ ، ٢جـ

وحيث إن الوسط الحسابى > الوسط الهندسى الموجب

∴ ٣ ب > $\sqrt{٦أ \times ٢ جـ}$ وبتربيع الطرفين

∴ ٩ ب^{٢} > ١٢ أ جـ (١)

وبالمثل ٢جـ وسط حسابى بين ٣ب، ٢ء

∴ ٢جـ > $\sqrt{٣ب \times ٢ ء}$ وبتربيع الطرفين

٤جـ^{٢} > ٦ب ء (٢)

ومن (١)، (٢)

٩ب^{٢} × ٤جـ^{٢} > ١٢ أجـ × ٦ب ء

وبقسمة الطرفين على ٣٦ب جـ (ب ، جـ ∈ ع$_{+}$)

∴ ب جـ > ٢ أ ء

تمارين (١ – ٥)

أكمل ما يأتى

(١) الحد الخامس من المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ = ٢ × (٣)$^{ن-١}$ يساوى ....

(٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...) هو ....

(٣) الحد السادس من المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ...) هو ....

(٤) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

(٥) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص تساوى ....

(٦) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب > ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) الحد التالى فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، ...) هو:

أ $\frac{١١}{٨}$ ب $\frac{٢٧}{١٦}$ جـ $\frac{٩}{٤}$ د $\frac{٨١}{٣٢}$

(٨) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ......) ب (لو أ ، لو أ^{٢} ، لو أ^{٣} ، لو أ^{٤} ، ...)

جـ ($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$) د ($\frac{٣ب}{أ٢}$ ، ٣ ، $\frac{٦أ}{ب}$ ، $\frac{١٢أ^{٢}}{ب^{٢}}$)

(٩) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى:

أ (ع$_{ن}$) = (٤ ن^{٢}) لكل ن ≥ ١ ب (ع$_{ن}$) = ($\frac{١}{٤}$ × ع$_{ن-١}$) لكل ن ≥ ٢

جـ (ع$_{ن}$) = (٢^{ن} - ١) لكل ن ≥ ١ د (ع$_{ن}$) = (لو (٣ × ٢^{ن})) لكل ن ≥ ١

(١٠) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن:

أ $\frac{أ + جـ}{٢} <$ ب ب $\frac{أ + جـ}{٢} >$ ب

جـ $\frac{أ + جـ}{٢} =$ ب د ب^{٢} = أ + جـ

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) إذا كانت $(ع_{ن})$ متتابعة حيث $ع_{ن} = ٥ \times ٢^{ن}$ أثبت أنها متتابعة هندسية ثم أوجد حدودها الثلاثة الأولى.

(١٢) فى المتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٨} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، -١ ، ...)$ أوجد:

أ حدها العاشر.

ب رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤

(١٣) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤ . أوجد هذه المتتابعة.

(١٤) أوجد المتتابعة الهندسية التى فيها $ع_{٣} = ١٢$ ، $ح_{٨} = ٣٨٤$.

(١٥) بيِّن أن المتتابعة $(ع_{ن})$ حيث: $ع_{ن} = \frac{٣}{٨}(٢)^{ن}$ هى متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨

(١٦) أوجد الوسط الهندسى بين ١٦ ، ٤٩

(١٧) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣.

(١٨) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ و يقل عن الآخر بمقدار ٣.

(١٩) أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{٨}{٢٧}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$

(٢٠) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين هى ١: ٢٧. أوجد عدد تلك الأوساط.

(٢١) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة، وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ، مجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦، أوجد هذه المتتابعة.

(٢٢) إذا كانت س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى أثبت أن س + ل $>$ ص + ع.

(٢٣) الربط بالبيئة: يصب الماء في خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب في اليوم الأول ١٢ لترا فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترا؟

(٢٤) الربط بالسكان: يزداد عدد السكان فى إحدى المدن بمعدل ثابت ٣ ٪ كل سنة . كم يكون عدد سكان هذه المدينة بعد ٥ سنوات إذا علم أن عدد السكان الحالى هو ٦٠٠ ٠٠٠ نسمة.

١–٦ المتسلسلات الهندسية

Geometric Series

سوف تتعلم

- مجموع المتسلسلة الهندسية .
- تكوين المتتابعة الهندسية .
- المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر إعتيادى .

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة هندسية Geometric Series
- متسلسلة هندسية غير منتهية Infinite Geometric Series

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- برامج رسومية Graphical Programs

مجموع المتسلسلة الهندسية: Sum of the Geometric Series

نعلم أن المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية و يرمز لمجموع ن حدًّا منها بالرمز جـ$_{ن}$.

مجموع ن حدّا الأولى من متسلسلة هندسية

Sum of the First n Terms of a Geometric Series

أولا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-١}$ متسلسلة هندسية حدها الأول أ، أساسها ر فإنه يمكن إيجاد المجموع جـ$_{ن}$ لهذه المتسلسلة كما يلى:

جـ$_{ن}$ = أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-٢}$ + أر$^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر فإن:

رجـ$_{ن}$ = أر + أر^{٢} + أر^{٣} + ... + أر$^{ن-١}$ + أر^{ن} (٢)

وبطرح المعادلتين يكون:

جـ$_{ن}$ - رجـ$_{ن}$ = أ – أر^{ن}

أى أن: جـ$_{ن}$(١ - ر) = أ(١–ر^{ن})

وبقسمة الطرفين على (١ - ر) بشرط أن ١ - ر $\neq$ ٠

$$\boxed{جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} ،\ ر \neq ١}$$

مثال

١ أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها: أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ٨

الحل

جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

جـ$_{٨}$ = $\frac{٣(١ - ٢^{٨})}{١ - ٢}$ بالتعويض عن: أ = ٣، ر = ٢، ن = ٨

جـ$_{٨}$ = ٣ × ٢٥٥ = ٧٦٥ وبالتبسيط

ثانيا: إيجاد مجموع ن حدًّا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن: جـ$_{ن}$ = $\frac{أ - أر^{ن}}{١ - ر}$ (١)

وأن: ل = أ ر$^{ن-١}$ وبضرب الطرفين فى ر

فتكون ل ر = أ ر^{ن} (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) فإن: $\boxed{جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} ،\ ر \neq ١}$

مثال

(٢) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية: ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

الحل

$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ = \frac{١ - ٦٥٦١ \times ٣}{١ - ٣}$ بالتعويض عن: أ = ١، ر = ٣، ل = ٦٥٦١

$جـ = \frac{١٩٦٨٢}{٢} = ٩٨٤١$ بالتسبيط

استخدام رمز التجميع *Using the Summation Notation*

مثال

(٣) أوجد $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣(٢)^{ر-١}$

الحل

$ع_٥ = أ = ٣(٢)^{٥-١} = ٤٨$ ، ر = ٢ ، ن = ١٢ – ٥ + ١ = ٨

$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ صيغة مجموع المتتابعة الهندسية

$جـ_٨ = \frac{٤٨(١ - ٢^{٨})}{١ - ٢}$ بالتعويض عن: أ = ٤٨، ر = ٢، ن = ٨

$جـ_٨ = ٤٨ \times ٢٥٥ = ١٢٢٤٠$ بالتبسيط

فكر: هل يمكنك إيجاد المجموع فى المثال السابق بمعلومية أ ، ل ، ر ؟ كيف ذلك

مثال تكوين المتتابعة الهندسية

(٤) إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون: $جـ_ن = ١٢٨ - ٢^{٧-ن}$

فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها السابع.

الحل

بوضع: ن = ١ ∴ $جـ_١ = ١٢٨ - ٢^{٧-١} = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤$ أي أن $ع_١ = ٦٤$

بوضع: ن = ٢ ∴ $جـ_٢ = ١٢٨ - ٢^{٧-٢} = ١٢٨ - ٣٢ = ٩٦$

∵ $ع_١ + ع_٢ = جـ_٢$ ∴ $٦٤ + ع_٢ = ٩٦$ ∴ $ع_٢ = ٩٦ - ٦٤ = ٣٢$

بوضع: ن = ٣ جـ$_{٣}$ = ١٢٨ – ٢$^{٧-٣}$ أي أن جـ$_{٣}$ = ١٢٨ – ١٦ = ١١٢

∵ ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$ = جـ$_{٣}$ أي أن ع$_{٣}$ = جـ$_{٣}$ – جـ$_{٢}$

∴ ع$_{٣}$ = ١١٢ – ٩٦ = ١٦

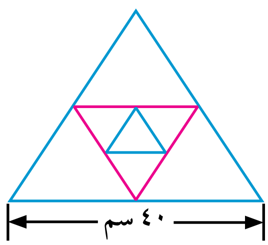
∴ المتتابعة هي: (٦٤، ٣٢، ١٦، ......) ، ع$_{٧}$ = أر^{٦} = ٦٤ $(\frac{١}{٢})^{٦}$ = ١

لاحظ أن: مما سبق يمكن استنتاج أن ع$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ - جـ$_{ن-١}$ ومنها نوجد قيمتى أ، ر ومن ذلك فإن

ع$_{٧}$ = جـ$_{٧}$ - جـ$_{٦}$ = (١٢٨ – ٢$^{٧-٧}$) - (١٢٨ – ٢$^{٧-٦}$) = - ١ + ٢ = ١

مثال

٥ الربط بالهندسة يبين الشكل المقابل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط.



الحل

محيط المثلث الأكبر = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

محيط المثلث الأصغر التالى = ٣ × ٢٠ = ٦٠

محيط المثلث التالى للمثلث الأصغر = ٣ × ١٠ = ٣٠

أى أن النمط هو: ١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، .... إلى ١٠ حدود

مجموع المحيطات = ١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + ... وهى مجموع متسلسلة هندسية

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

بالتعويض عن: أ = ١٢٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

وبالتبسيط واستخدام الآلة الحاسبة جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٢٠(١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}}$ ≃ ٢٤٠

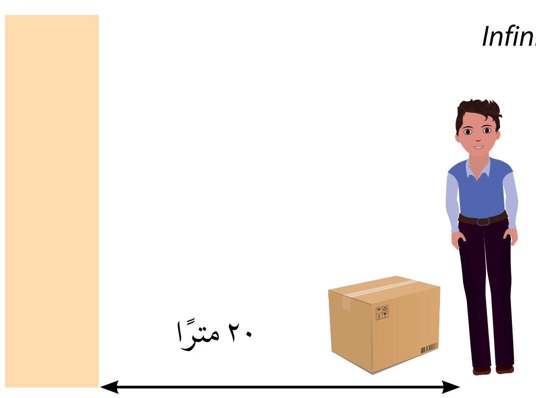
تذكر أن

محيط المثلث المتساوى الأضلاع = ٣ × طول ضلعه

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية *Infinite geometric series*

فكر و ناقش

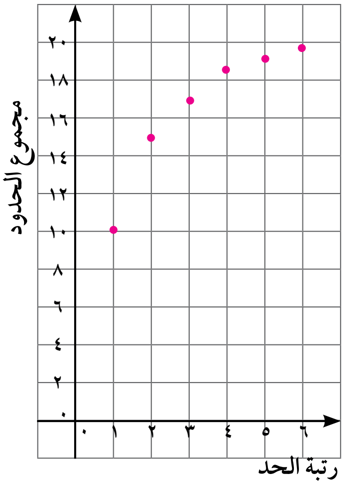
أراد زياد نقل صندوق فى اتجاه حائط يبعد عنه مسافة ٢٠ مترًا على عدة مراحل بحيث تبلغ المسافة التى ينقل إليها الصندوق تساوى نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة، فهل يستطيع زياد أن يصل إلى الحائط؟



يُمكنك الإجابة على ذلك من خلال دراستك المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

تعريف ٢

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود ، و إذا كان مجموعها عددًا حقيقيًّا، فإنها تكون متقاربة؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقى، أما إن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة.



فى بند فكر وناقش مجموع المسافات التى يقطعها زياد تُعطى بالمتسلسلة: ١٠ + ٥ + ٢,٥ +١,٢٥ + ... وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من ٢٠ مترًا، وهو المجموع الفعلي لها، وبالتالى يمكن اعتبار أن زياد يصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية، والشكل الموضح يبين التمثيل البيانى للمجموع $جـ_ن$ لذلك فإن المتسلسلة التقاربية يقترب مجموعها من عدد حقيقى حيث $|ر| < ١$ وتكون غير تقاربية إذا لم يقترب المجموع من عدد حقيقى حيث $|ر| \geq ١$

تذكر أن

إذا كانت $|ر| < ١$ فإن: $-١ < ر < ١$

وإذا كانت $|ر| \geq ١$ فإن: $ر \geq ١$ أو $ر \leq -١$

مثال

٦ أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لانهائى من حدودها ؟ فسِّر إجابتك

أ ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...   ب ٢٤ + ٣٦ + ٥٤ + ...

الحل

أ نوجد أساس المتسلسلة الهندسية $ر = \frac{٤٥}{٧٥} = \frac{٣}{٥}$ فالمتسلسلة تقاربية لأن: $-١ < \frac{٣}{٥} < ١$

ب نوجد أساس المتسلسلة الهندسية $ر = \frac{٣٦}{٢٤} = \frac{٣}{٢}$ فالمتسلسلة تباعدية لأن: $\frac{٣}{٢} > ١$

مجموع المتتابعات الهندسية غير المنتهية

Sum of Infinite Geometric Series

علمنا أن مجموع ن حدًّا من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن $ر^ن$ يقترب من صفر عندما تكون $-١ < ر < ١$

ويصبح المجموع: $\boxed{جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}}$

مثال

٧ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

أ $\frac{٨١}{٨} + \frac{٢٧}{٤} + \frac{٩}{٢} + ...$ ب $\frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٦} + \frac{٢٥}{٢٤} + ...$

الحل

أ نوجد أساس المتتابعة الهندسية: $ر = \frac{٢٧}{٤} \div \frac{٨١}{٨} = \frac{٢٧}{٤} \times \frac{٨}{٨١} = \frac{٢}{٣}$

$\because -1 < \frac{٢}{٣} < 1$ $\therefore$ يوجد للمتسلسلة مجموع

$\because$ أ $= \frac{٨١}{٨}$ ، ر $= \frac{٢}{٣}$ وبالتعويض فى صيغة المجموع جـ$_\infty$ $= \frac{أ}{١ - ر}$

$\therefore$ جـ$_\infty$ $= \frac{\frac{٨١}{٨}}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٨١}{٨}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٤٣}{٨}$

ب نوجد أساس المتتابعة الهندسية: ر $= \frac{٥}{٦} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٦} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٤}$

$\because \frac{٥}{٤} > 1$ $\therefore$ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع

مثال

استخدام رمز التجميع

٨ أوجد $\sum_{ر = ١}^{\infty} ٤٢ \left(\frac{٦}{٧}\right)^{ر - ١}$

الحل

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: جـ$_\infty$ $= \frac{أ}{١ - ر}$

بالتعويض عن: أ $= ٤٢$ ، ر $= \frac{٦}{٧}$: فتكون جـ$_\infty$ $= \frac{٤٢}{١ - \frac{٦}{٧}} = ٢٩٤$

تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى

Converting a Recurring Decimal Into a Common Fraction

مثال

٩ ضع $٠,\overline{٤٣٢}$ على صورة كسر اعتيادى

الحل

أولا: باستخدام مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$٠,\overline{٤٣٢} = ٠,٤٣٢ + ٠,٠٠٠٤٣٢ + ٠,٠٠٠٠٠٠٤٣٢ + ...$

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: جـ$_\infty$ $= \frac{أ}{١ - ر}$

بوضع أ $= \frac{٤٣٢}{١٠٠٠}$ ، ر $= \frac{١}{١٠٠٠}$ فتكون جـ$_\infty$ $= \frac{\frac{٤٣٢}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠٠}}$

جـ$_\infty$ $= \frac{٤٣٢}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠٠}{٩٩٩} = \frac{١٦}{٣٧}$ بالتبسيط

حاول أن تحل

١ ضع كلًا من الكسور العشرية التالية على صورة كسر اعتيادى $٠,\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٦٣}$ ، $٠,٤\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٦٥٤}$

تمارين (١ - ٦)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....) هو:

أ ١٦ ب ٢٠ جـ ٢٤ د ٣٠

٢) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى:

أ ٦ ب ٨ جـ ٩ د ١٢

٣) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى:

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٧}{٨}$ د $\frac{٣}{٤}$

٤) متتابعة هندسية مجموع ن حدًّا الأولى منها يعطى بالعلاقة $جـ_ن = ٣^{ن+١} - ٤$ فإن الحدالثالث منها يساوى:

أ ١٨ ب ٢٣ جـ ٥٤ د ٧٧

٥) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى:

أ ٠,٥ ب ٠,٣٣٣ جـ ٠,٢٥ د ٠,٦٦٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

٦) أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

أ (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ... إلى ٦ حدود) ب (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، .... إلى ٦ حدود)

جـ (٣ ، - ٦ ، ١٢ ، .... ، ٧٦٨)

٧) أى من المتتابعات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن:

أ (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ....) ب (٣ ، - ٦ ، ١٢ ، ....)

جـ ($\frac{١}{٣٢}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ....) د ($٢ \times ٥^{١-ن}$)

٨) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

أ (٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، ...) ب $(ع_ن) = (٣^{٣-ن})$

٩) ضع كلا من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسور اعتيادية باستخدام المتتابعة الهندسية اللانهائية: $٠,\overline{٧}$ ، $٠,٢\overline{٤}$ ، $٠,٨\overline{٦٣}$

١٠) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤

١١) أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣

١٢) كم حدًّا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١.

⑬ أثبت أن المتتابعة $(ع_ن) = (١٠ \times ٢^{ن-٢})$ هى متتابعة هندسية، وأوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول التى مجموعها ٢٥٥٠

⑭ أوجد عدد حدود المتتابعة الهندسية التى مجموع حدودها $\frac{٤}{٩}$ ١٢١ وحدها الأول يساوى ٨١ وحدها الأخير يساوى $\frac{١}{٩}$.

⑮ $(ع_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_٢ = ٦$ ، $ع_٣ - ع_١ = ٩$. أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًّا الأولى منها.

⑯ متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨. أوجد هذه المتتابعة.

⑰ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منتهية = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$. فما مجموعها؟

⑱ إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{٣٧٥}{٤}$ ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٩٠ ، فأثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما.

⑲ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥.

⑳ متتابعة هندسية غير منتهية، حدودها موجبة، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$. أوجد هذه المتتابعة.

㉑ $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ع_١ + ع_٤ = ٧٠$ ، $ع_٢ + ع_٣ = ٦٠$ أثبت أنه توجد متتابعتان، وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما، وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول.

㉒ $(ع_ن)$متتابعة هندسية فيها $ع_٢ - ع_٦ = ٤٥$ ، $جـ_٤$ الأولى= ١٨٠ ، أوجد المتتابعة، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع.

㉓ متتابعة هندسية غير منتهية، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة.

㉔ متتابعة هندسية غير منتهية، وأى حد فيها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، إذا كان حدها الرابع = ٣. فأوجد هذه المتتابعة.

㉕ الربط بالتعدين: منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠ ٪ سنويًّا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى.

تمــاريـن عامة على الوحدة الأولى

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ تسمى المتتابعة التى قاعدتها: $ع_ن = \frac{(-١)^ن}{٣ن - ٢}$ بأنها متتابعة:

أ تزايدية　ب تناقصية　ج تذبذبية　د ثابتة

٢ تكتب المتسلسلة الحسابية: ٣ + ٧ + ١١ ...... + ٣٥ باستخدام رمز المجموع كالآتى:

أ $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٤ر - ١)　ب $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٢ر - ١)　ج $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٣ر - ٤)　د $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٣ر - ٤)

٣ إذا كان ٢أ + ٢ ، ٦أ - ٢ ، ٧أ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى:

أ ١　ب ٢　ج ٣　د ٤

٤ قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨}$ (٢ر + ١) يساوى:

أ ٦٤　ب ٧٢　ج ٧٦　د ٨٠

٥ متتابعة هندسية مجموع ن حدًّا الأولى منها يعطى بالعلاقة $جـ_ن = ٣ (٣^ن - ١)$ فإن الحد الثالث منها يساوى:

أ ٢٤　ب ٣٦　ج ٤٨　د ٥٤

٦ بين أيًّا من المتتابعات $(ع_ن)$ تزايدية وأيها تناقصية، وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى:

أ $(ع_ن) = (٣ - ٢ن)$　ب $(ع_ن) = (٢ (\frac{٣}{٢})^{ن-١})$　ج $((-١)^ن (ن + ١))$

٧ إذا علمت أن $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$ ، فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتى:

أ $\sum_{ر=١}^{ن}$ (ر + ٢)　ب $\sum_{ر=١}^{٨}$ (ر^٢ - ٣)

٨ حدد أيًّا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها هندسية ثم أوجد الأساس لكل منها.

أ (٢١ ، ١٤ ، ٧ ، ...)　ب (-٧ ، -١٢ ، -١٧ ، ...)　ج (-٣ ، ١٢ ، -٤٨ ، ...)

د $(\frac{١}{٥} ، \frac{٤}{٥} ، \frac{٧}{٥} ، ...)$　هـ $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{-٣} ، \frac{٢}{٩} ، ...)$　و $(\frac{١}{٣} ، \frac{٥}{٦} ، \frac{٤}{٣} ، ...)$

٩ فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ , ١٦ ، ...) أوجد:

أ قيمة حدها الثامن.　ب رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢

١٠ $(ع_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ع_٦ = ١٦$ ، $ع_{٢٠} = -٢٦$. أوجد هذه المتتابعة.

١١ متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة.

١٢ إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة.

١٣ متتابعة هندسية حدها الأول = ٧، حدها الخامس = ١١٢. أوجد هذه المتتابعة.

١٤ متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الأول وحدها الخامس يساوى $\frac{١}{١٢٥}$ أثبت أن هناك حلين، ثم أوجد المتتابعتين.

١٥ ($ع_ن$) متتابعة هندسية حيث $ع_ن = ٧ \times (٣)^{ن-١}$. أوجد الوسط الهندسى بين $ع_٣$ ، $ع_٧$

١٦ إذا كانت ٤، ب، جـ فى تتابع حسابى، وكانت ٢، ب + ٣ ، ٥ جـ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة كل من ب، جـ

١٧ إذا كانت $\frac{١}{٢}$ أ ، ب ، جـ كميات موجبة فى تتابع هندسى فأثبت أن ٤ب < أ + ٢جـ

١٨ الربط بالانتاج: بئر إنتاجها من البترول فى السنة الأولى ٥٦٠ ألف برميل، وكان إنتاجها يتناقص سنويًّا بمعدل ٤ ٪ عن إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد أقصى إنتاج لهذه البئر.

١٩ الربط بالهندسة: مستطيل طوله ١٦ سم وعرضه ١٢ سم , نصفت أضلاعه ثم نصفت أضلاع الشكل الحادث من توصيل منتصفات الأضلاع وهكذا بتكرار ما سبق إلى اللانهاية. أوجد مجموع محيطات الأشكال المرسومة.

٢٠ الربط بالصحة: يتناول مريض نوعا من الدواء، وقد نصحه الطبيب أن يُقلِّل عدد حبات هذا الدواء بمعدل ٣ حبات كل أسبوع عن الأسبوع الذى يسبقه مباشرة ، فإذا بدأ المريض بتناول ٢١ حبة من الدواء فى الأسبوع الأول، بعد كم أسبوعًا سوف يتوقف المريض تمامًا عن استخدام هذا الدواء؟

٢١ الربط بالأجور: يتقاضى عامل راتبًا شهريًّا قدرة ١٢٠٠ جنيه فى العام الأول ثم يزداد أجره بمعدل ١٠ ٪ سنويًّا من مرتب السنة السابقة لها مباشرة. اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع ما يتحصل عليه العامل من أجر خلال خمس سنوات، ثم أوجد هذا المجموع.

٢٢ الربط بترشيد المياه: تندفع المياه بمعدل ٢٥ لترا فى الدقيقة الأولى من صنبور للمياه، ثم تزداد بعد ذلك بمعدل لترين فى كل دقيقة تالية لها. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما يصب من الماء ٨٨٠ لترا ؟

٢٣ كرة إذا سقطت من ارتفاع معين عن سطح الأرض، فإنها ترتد إلى ثلثى الارتفاع الذى سقطت منه. فإذا أُسقطت من ارتفاع ٩٠ مترًا، فأوجد مجموع المسافات التى تقطعها حتى تسكن؟

٢٤ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٨١ , حدها السادس يساوى $\frac{١}{٣}$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الثالث.

الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق
Permutations, Combinations

مقدمة الوحدة

العد من المهارات الأساسية فى الرياضيات ، فكثيرًا ما تواجهنا مسائل نحتاج فى حلها إلى إجراء عمليات عد بطرق مختلفة ، ومن خلال هذه الوحدة سوف نتعرف على إستراتيجيات مختلفة للعد، ومنها مبدأ العد الأساسى، ومن أهم تطبيقاته:

التباديل التى تستخدم فى معرفة عدد الطرق التى يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة.

التوافيق: وهى الاختيار دون مراعاة الترتيب.

ولقد كان للعلماء العظام مثل عمر الخيام وإسحق نيوتن وبسكال الدور الأكبر فى هذا المجال والذى لايزال ساريًا حتى اليوم.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق والعلاقة بينها.
- يستخدم الحاسوب فى حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى Fundamental Counting Principle
- مبدأ العد المشروط Conditional Principle of Counting
- عملية Operation
- شجرة بيانية Tree Diagram
- مضروب Factorial
- تباديل Permutations
- توافيق Combinations
- عناصر Elements
- ترتيب Order
- لجنة Committee
- مجموعة جزئية Subset

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): مبدأ العد .

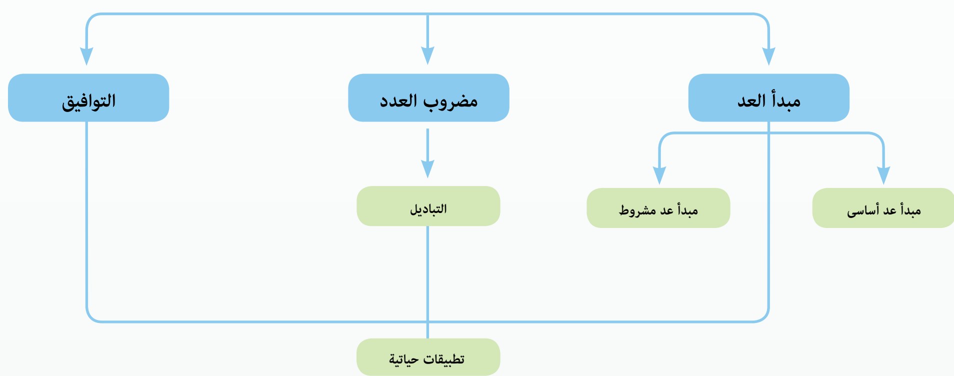
الدرس (٢ - ٢): التباديل.

الدرس (٢ - ٣): التوافيق.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية *Scientific Calculator*
- برامج رسومية للحاسوب *Graphical Computer Programs*

مخطط تنظيمي للوحدة



٢–١ مبدأ العد

Fundamental Principle of Counting

سوف تتعلم

- مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- مبدأ العد الأساسي.
- مبدأ العد المشروط.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسي Fundamental Counting Principle
- عملية Operation
- شجرة بيانية Tree Diagram

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

فكر و ناقش

إذا طلب منك ارتداء قميص وبنطلون من بين ٢ قميص و٣ بنطلون. فكم عدد طرق الاختيار؟

مثال

(١) كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (أشرف - محمد - حسن) وطالبة من بين طالبتين (سمر - منى).

الحل

فى هذا المثال نجد من السهل معرفة عدد طرق الاختيار، فمثلا يمكننا اختيار أشرف ، سمر أو أشرف ، منى أو محمد ، منى أو حسن ، سمر... الخ وسوف نعبر عن ذلك بالمخطط البيانى التالى و يسمى بمخطط الشجرة البيانية:

الطلاب	الطالبات	الأختيار
اشرف	سمر	اشرف ، سمر
	منى	أشرف ، منى
محمد	سمر	محمد ، سمر
	منى	محمد ، منى
حسن	سمر	حسن ، سمر
	منى	حسن ، منى

عدد طرق اختيار طالب من ثلاثة طلاب = ٣ طرق

عدد طرق اختيار طالبة من طالبتين = ٢ طريقة

∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

حاول أن تحل

(١) فى فكر وناقش كم عدد طرق الاختيار الممكنة؟

مثال

(٢) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢، ٤، ٩} ورقم المئات من العناصر {١، ٥}؟

الحل

خانة الآحاد	خانة العشرات	خانة المئات	العدد
٣	٢	١	١٢٣
		٥	٥٢٣
	٤	١	١٤٣
		٥	٥٤٣
	٩	١	١٩٣
		٥	٥٩٣
٧	٢	١	١٢٧
		٥	٥٢٧
	٤	١	١٤٧
		٥	٥٤٧
	٩	١	١٩٧
		٥	٥٩٧

من الشجرة البيانية نجد أن:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد × عدد طرق اختيار رقم العشرات × عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ ×٣×٢=١٢ طريقة

الأمثلة السابقة توضح التعريف الآتى:

تعلم

مبدأ العد الأساسى *Fundamental Counting Principle*

تعريف: إذا كان عدد طرق إجراء عمل مايساوى م$_{١}$ طريقة ، وكان عدد طرق إجراء عمل ثان م$_{٢}$ طريقة، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث م$_{٣}$ طريقة وهكذا... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معا = م$_{١}$ × م$_{٢}$ × م$_{٣}$ × ... × م$_{ن}$

مثال

٣ كم عدد الاختيارات التى يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروبًا واحداً من المشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو)

الحل

عدد طرق اختيار الوجبة = ٣ طرق ، عدد طرق اختيار المشروب = ٣ طرق

عدد طرق الاختيار = ٣ ×٣ = ٩ طرق.

حاول أن تحل

٢ مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطة ، ٣ أنواع من المشروبات. كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميًّا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلاطة والمشروبات؟

مثال

(مبدأ عد مشروط) *Conditional Principle of Counting*

٤ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}؟

الحل

نبدأ بخانة المئات المشروطة (لايمكن استخدام الصفر جهة اليسار)

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٣

∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٤

حاول أن تحل

٣ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧}، بحيث يكون رقم العشرات زوجيًّا.

تمارين (٢ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى:

أ ١ ب ٤ + ٤ جـ ٤ × ٤ د ٤ ×٣ ×٢ ×١

٢ عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام { ٥، ٣، ٠، ٢} يساوى:

أ ٣ × ٢ ب ٤ × ٢ جـ ٣ × ٣ د ٣ × ٤

٣ عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣، ٦، ٨} تساوى:

أ ٨ × ٦ × ٣ ب ٤ × ٣ × ٣ جـ ٤ × ٣ × ٢ د ٢ × ٣ × ١

٤ كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر { ٢، ٣، ٥}؟

٥ كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذ ة من العناصر { ٢، ٣، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد ٦؟

٦ تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها؟ بفرض أنه لايوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص؟

٧ كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٢، ٥، ٨، ٩} بحيث تكون أصغر من ٩٠٠؟

٨ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار ، أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.

٢–٢ مضروب العدد - التباديل

Factorial of a Number - Permutations

سوف تتعلم
- مضروب العدد
- التباديل

المصطلحات الأساسية
- مضروب العدد *Factorial of a Number*
- التباديل *Permutatuins*
- التباديل الجزئية *Sub–Permutatuins*

الأدوات المستخدمة
- آله حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

فكر و ناقش

استعن بما درسته فى الدرس السابق للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) كم عدد طرق جلوس أربعة طلاب على ثلاثة مقاعد فى صف؟

٢) كم عدد طرق وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام سباحة استعدادًا للقفز؟

تعلم

تعريف

المضروب: مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة $\underline{|ن}$ ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث:

$\underline{|ن} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢) \dots ٣ \times ٢ \times ١$

لاحظ أن:

- عندما ن = ٠ فإن $\underline{|٠} = ١$ - عندما ن = ١ فإن $\underline{|١} = ١$
- $\underline{|٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤ \times \underline{|٣}$ ،
- $\underline{|٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٦\,\underline{|٥}$

وبوجه عام فإن: $\underline{|ن} = ن\,\underline{|ن-١}$ حيث ن $\in$ ص$^+$

مثال

١) أ) أوجد $\dfrac{\underline{|١٠}}{\underline{|٨}}$ ب) إذا كان $\underline{|ن} = ١٢٠$ فما قيمة ن

الحل

أ) $\dfrac{\underline{|١٠}}{\underline{|٨}} = \dfrac{١٠ \times ٩\,\underline{|٨}}{\underline{|٨}} = ١٠ \times ٩ = ٩٠$

ب) $\underline{|ن} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \underline{|ن} = \underline{|٥}$ لذلك فإن ن = ٥

حاول أن تحل

١) أوجد: أ) $\dfrac{\underline{|١٥}}{\underline{|١٢}}$ ب) $\dfrac{\underline{|٧}}{\underline{|٥}} + \dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|٧}}$

مثال

٢) أوجد مجموعة حل المعادلة:- $\dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٢}} = ٣٠$

الحل

$\because \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-٢}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\underline{|\text{ن}-٢}}{\underline{|\text{ن}-٢}} = ٣٠$ $\therefore \text{ن}(\text{ن}-١) = ٦ \times ٥$ $\therefore \text{ن} = ٦$

٩ حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\frac{١}{\underline{|\text{ن}}} + \frac{٢}{\underline{|\text{ن}+١}} = \frac{٥٦}{\underline{|\text{ن}+٢}}$ فأوجد قيمة ن

تفكير ناقد: إذا كان: $\underline{|\text{أ}} = \underline{|٠}$ فما قيمة أ؟

التباديل *Permutations*

مثال تمهيدى: من مجموعة الأرقام {٢، ٣، ٥} كم عدد الأعداد التى يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة منها؟

الأعداد هى: ٥٣٢ ، ٣٥٢ ، ٥٢٣ ، ٢٥٣ ، ٣٢٥، ٢٣٥ يسمى كل عدد من هذه الأعداد تبديله للأرقام

وعددها = ٣ × ٢ × ١ وتكتب $^{٣}\text{ل}_{٣}$ وتقرأ (٣ لام ٣).

والجدول التالى يوضح ذلك:

المئات	العشرات	الآحاد
٣	٢	١

لذلك فإن التبديلة لعدد من الأشياء هى وضعها فى ترتيب معين.

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ حيث:

$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢) \ldots (\text{ن}-\text{ر}+١)$ حيث $\text{ر} \leqslant \text{ن}$, $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$

فمثلا:

$\blacktriangleleft\ ^{٦}\text{ل}_{٣} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times \frac{٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-٣}}$

$^{٦}\text{ل}_{٣} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-٣}}$

$\blacktriangleleft\ ^{٧}\text{ل}_{٥} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \frac{٢ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٧-٥}}$

نستنتج مما سبق أن:

$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$ حيث $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ ، $\text{ر} \leqslant \text{ن}$

مثال

(٣) أوجد قيمة كل من:

أ) $^{٧}\text{ل}_{٤}$ ب) $^{٤}\text{ل}_{٤}$ جـ) $^{٤}\text{ل}_{٣}$

الحل

أ) $^{٧}\text{ل}_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$

ب) $^{٤}\text{ل}_{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

جـ) $^{٤}\text{ل}_{٣} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ ماذا تلاحظ من العبارتين ب ، جـ؟

استخدام الحاسبة

يرمز للتباديل بالحاسبة العلمية بالرمز $^{n}P_{r}$ ونستخدم فيها المفاتيح Shift × لحساب قيمة $^{٥}\text{ل}_{٢}$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح

5 Shift × 2 =

الجواب = ٢٠

حاول أن تحل

٣ احسب قيمة كل من: أ $\text{ل}^{٥}_{٢} + \text{ل}^{٦}_{٣}$ ب $\dfrac{\text{ل}^{٥}_{٥}}{\text{ل}^{٥}_{٤}}$

مثال

٤ أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد.

الحل

لدينا ٧ مقاعد يراد اختيار خمسة منها فى كل مرة

∴ عدد الطرق = $\text{ل}^{٧}_{٥} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٢٥٢٠$

استخدام الآلة الحاسبة: 7 SHIFT × (npr) 5 =

حاول أن تحل

٤ كم يبلغ عدد الكلمات التى يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية.

مثال

٥ إذا كان $\text{ل}^{٧}_{\text{ر}} = ٨٤٠$ فأوجد قيمة $\underline{|\text{ر} - ٤}$

الحل

٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٤	٤
١	

نبدأ بقسمة العدد ٨٤٠ على ٧ ثم بقسمه ناتج القسمة على ٦ ثم نقسم ناتج القسمة على ٥

وهكذا حتى نصل إلى العدد ١

∴ العدد $٨٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = \text{ل}^{٧}_{٤}$

∴ $\text{ل}^{٧}_{\text{ر}} = \text{ل}^{٧}_{٤}$ ∴ ر = ٤   ∴ $\underline{|\text{ر} - ٤} = \underline{|٠} = ١$

حاول أن تحل

٥ إذا كان $\text{ل}^{٩}_{\text{ر}-١} = ٥٠٤$ فأوجد قيمة $\underline{|\text{ر} + ١}$

تفكير ناقد: أوجد قيمة كلاً من: $\text{ل}^{٧}_{٧}$ ، $\underline{|٧}$ **ماذا تلاحظ؟**

تمــارين (٢ – ٢)

اختر الأجابة الصحيحة من بين الإجابات:

① لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة

أ ٢ ب ٢٣ ج ٦٦ د ١٣٢

② إذا كان $^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠ فإن ر تساوى

أ ٤ ب ٣ ج ٢ د ٥

③ إذا كانت $^{ن}ل_{٣}$ = ١٢٠ فإن قيمة ن:

أ ٦ ب ٥ ج ٤ د ٣

④ عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى

أ ٤ ب ٩ ج ١٠ د ٢٤

⑤ عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوى

أ ٤٨ ب ٣٠ ج ١٢ د ٤

⑥ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل

٩	جـ	......	......	......	......	......	......

جـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣، ٤، ٥، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد، كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة؟

أ ٤٩٩٩٩٩ ب ٤٠٠٠٠٠٠ ج ٤٩٩٩٩٩٩ د ١٠٠٠٠٠٠٠

أجب عن ما يأتي:

⑦ بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - سمك) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثِّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية)

⑧ كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

⑨ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤؟

⑩ كم عددًا زوجيًّا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤؟

⑪ بكم طريقةٍ يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و ٤ سيدات؟

⑫ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات

(صغير ، متوسط ، كبير)

(فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة)

كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحدة من الآيس كريم؟

١٣ من مجموعة الحروف { أ ، ب، جـ ، د، هـ ، و} أوجد

أ عدد طرق اختيار حرف واحد

ب عدد طرق اختيار حرفين مختلفين

١٤ أوجد قيمة كلٍّ من:

أ $\underline{|٧} \div \underline{|٥}$ ب $٣\,\underline{|٢} - \underline{|٣}$ ج ${}^{٥}ل_{٣} \times \underline{|٢}$

د ${}^{٣}ل_{٣} \times {}^{٢}ل_{٢}$ هـ ${}^{٨}ل_{١} + {}^{٨}ل_{٢}$ و ${}^{٧}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{٧}$

١٥ أوجد قيمة ن التي تحقق كل من:

أ $\underline{|ن} = ٢٤$ ب $\dfrac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ١}} = ٤٢$

ج ${}^{١٥}ل_{ن} = ٢٧٣٠$ د ${}^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

١٦ أوجد قيمة ن إذا كان:

أ ${}^{٧}ل_{ن} = ٢١٠$ ب $ن\,\underline{|٢ن - ١} = ١٢$

١٧ إذا كان ${}^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٣}$ فأوجد قيمة ن.

١٨ أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص.

١٩ من بين ثمانية طلاب، بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الآخر) للاشتراك فى فرق كرة القدم، وكرة السلة وكرة الطائرة على الترتيب.

٢٠ أثبت أن: $\dfrac{\underline{|ن + ٢}}{\underline{|ن}} = {}^{ن+٢}ل_{٢}$

٢-٣ التوافيق

Combinations

سوف تتعلم

- مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- مثلث باسكال.

المصطلحات الأساسية

- توافيق Combinations
- عناصر Elements
- ترتيب Order
- لجنة Committee
- مجموعة جزئية Subset

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية - حاسب آلي

أضف إلى معلوماتك

يمكن أن تكتب التوافيق على الصورة $\text{ن}\text{ق}_{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ر}}$

تمهيد

يراد اختيار ناديين من بين مجموعة مكونة من أربعة أندية { أ ، ب جـ ، د} في إحدى مباريات كرة القدم ، فإن كل التبديلات الممكنة هي:

(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، ى) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ)، (ب ، ى)، (جـ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، ى) ، (ى ، أ) ، (ى ، ب) ، (ى ، جـ).

نلاحظ من البيان السابق أن الاختيار (أ ، ب) يختلف عن الاختيار (ب، أ) وهكذا...

فإذا أردنا الاختيار مما سبق دون مراعاة للترتيب فإن جميع الاختيارات الممكنة هى:

{ أ ، ب} ، { أ ، جـ} ، { أ ، ى} ، {ب ، جـ} ، {ب ، ى} ، { جـ ، ى}.

و يسمى كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقه"

التوافيق Combinations

تعريف

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر فى نفس الوقت هو $\text{ن}\text{ق}_{\text{ر}}$ حيث ، ر $\leqslant$ ن ، ر $\in$ ط ، ن $\in$ ص$^+$

فى التمهيد السابق نجد أن:

يرمز لعدد توافيق ٤ عناصر مأخوذة منها ٢ فى كل مرة بالرمز $^{٤}\text{ق}_{٢}$ وتقرأ (٤ قاف ٢)

أو بالرمز $\binom{٤}{٢}$ وتقرأ (٤ فوق ٢)

ونلاحظ فى هذا التمهيد أن عدد طرق الأختيار = ٦ طرق

أى أن: $^{٤}\text{ق}_{٢} = \frac{^{٤}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$ أى $\boxed{\text{ن}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}}$

مثال

١) أوجد ناتج كل من

أ) $^{٧}\text{ق}_{٥}$

ب) $^{٧}\text{ق}_{٢}$ (ماذا تلاحظ)

الحل

أ) $^{٧}\text{ق}_{٥} = \frac{^{٧}\text{ل}_{٥}}{\underline{|٥}} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٢١$

ب) $^{٧}\text{ق}_{٢} = \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} = ٢١$

نلاحظ أن: ${}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٥}} = {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٢}}$ (لاحظ أن: ٥ + ٢ = ٧)

نتائج هامة: ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{\text{ن}|}}{\underline{\text{ر}|}\ \underline{\text{ن - ر}|}}$ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن-ر}}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة ${}^{\text{١٢}}\text{ق}_{\text{٩}}$ ، ${}^{\text{١٧}}\text{ق}_{\text{١٤}}$ بدون استخدام الحاسبة.

نشاط

استخدام الحاسبة

يمكن استخدام المفاتيح ÷ SHIFT من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق($^{n}c_{r}$)

١) باستخدام الحاسبة أوجد قيمة ${}^{\text{٥}}\text{ق}_{\text{٤}} + {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٢}}$

الحل

بالضغط على المفاتيح بالتتابع = 2 ÷ SHIFT 7 + 4 ÷ SHIFT 5 ⟵ ابدأ

الناتج = ٢٦

مثال

(٢) إذا كان: ${}^{\text{٢٨}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{٢٨}}\text{ق}_{\text{٢ر - ٤٧}}$

الحل

∵ ${}^{\text{٢٨}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{٢٨}}\text{ق}_{\text{٢ر - ٤٧}}$

اما: ر = ٢ ر - ٤٧ أي أن: ر = ٤٧

وهى اكبر من قيمة ن ، لذلك هى ترفض

أو: ر + ٢ ر - ٤٧ = ٢٨ ∴ ٣ ر = ٧٥ ∴ ر = ٢٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت ${}^{\text{٢٨}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{٢٨}}\text{ق}_{\text{٢ر - ٥}}$ فأوجد قيمة ر.

قانون النسبة *Ratio rule*

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر-١}}} = \frac{\text{ن - ر + ١}}{\text{ر}}$$

لاحظ أن

(١) $\dfrac{{}^{\text{٢٧}}\text{ق}_{\text{١٤}}}{{}^{\text{٢٧}}\text{ق}_{\text{١٣}}} = \dfrac{\text{٢٧ - ١٣}}{\text{١٤}} = \text{١}$

(٢) $\dfrac{{}^{\text{٣٦}}\text{ق}_{\text{٢٥}}}{{}^{\text{٣٦}}\text{ق}_{\text{٢٣}}} = \dfrac{{}^{\text{٣٦}}\text{ق}_{\text{٢٥}}}{{}^{\text{٣٦}}\text{ق}_{\text{٢٤}}} \times \dfrac{{}^{\text{٣٦}}\text{ق}_{\text{٢٤}}}{{}^{\text{٣٦}}\text{ق}_{\text{٢٣}}}$

مثال

(٣) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٦}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ أوجد قيمة $\underline{\text{ن - ٢}|}$

الحل

∵ $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٦}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٥}}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}}$ ∴ $\dfrac{\text{ن - ٦ + ١}}{\text{٦}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}}$ ∴ $\dfrac{\text{ن - ٥}}{\text{٦}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}}$ ∴ ن = ٧

∴ $\underline{\text{ن - ٢}|} = \underline{\text{٧ - ٢}|} = \underline{\text{٥}|} = \text{١٢٠}$

حاول أن تحل

(٣) احسب قيمة ر إذا كان : ${}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{ر - ١}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

قانون الجمع (٢) $\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$

مثال

٤) إذا كان $\,{}^{\text{ن}+١}\text{ل}_{\text{ر}+١} : {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٧٢٠ : ١$ ، $\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-٣} = ٥٦$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

الحل

$${}^{\text{ن}+١}\text{ل}_{\text{ر}+١} : {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٧٢٠ : ١$$

$$|\underline{\text{ر}+١} = ٧٢٠ \qquad |\underline{\text{ر}+١} = |\underline{٦} \qquad \therefore \text{ر} = ٥$$

$$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-٣} = ٥٦ \qquad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ٥٦ \qquad \therefore {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٣} = ٥٦$$

$$\therefore {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٣} = {}^{٨}\text{ق}_{٣} \qquad \therefore \text{ن}+١ = ٨ \qquad \therefore \text{ن} = ٧$$

حاول أن تحل

٤) إذا كان $\,{}^{١٣}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{١٣}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ : ٥$ ، $\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = ٣٤٣٢$ **أوجد** كلًّا من ن ، ر

مثال

٥) بكم طريقة يمكن اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص.

الحل

حيث أن الاختيار لايعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقا.

عدد الاختيارات $= {}^{٩}\text{ق}_{٤} = \dfrac{{}^{٩}\text{ل}_{٤}}{|\underline{٤}} = ١٢٦$

حاول أن تحل

٥) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين . أوجد عدد مباريات المسابقة.

مثال

مبدأ العد

٦) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و ٥ سيدات؟

الحل

عدد طرق اختيار رجلين من ٧ رجال $= {}^{٧}\text{ق}_{٢} = ٢١$

عدد طرق اختيار سيدة من ٥ سيدات $= {}^{٥}\text{ق}_{١} = ٥$

وطبقا لمبدأ العد فإن عدد طرق تكوين اللجنة = ٢١×٥ = ١٠٥ طريقة

تفكير ناقد: بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦رجال و ٥ سيدات؟

حاول أن تحل

٦) فصل دراسى به ١٠ طلاب، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

نشاط

مثلث باسكال

بليز باسكال (1623 - 1662):

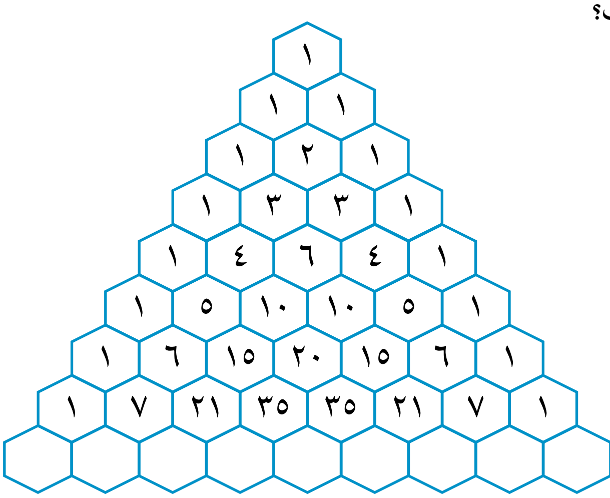
هو فيلسوف فرنسى ورياضى وفيزيائى قدم نظرية الاحتمالات، وصمم تنظيمًا ثلاثيًّا من الأرقام سمى مثلث بسكال فى حساب الاحتمالات واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدى عمليات الجمع والضرب.

تأمل مثلث الأعداد المقابل ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١- ماذا تلاحظ عن كيفية كتابة الأعداد فى هذا المثلث؟

٢- هل توجد علاقة بين عدد عناصر كل صف والصف الذى يليه مباشرة؟

٣- هل يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبي ضلعى المثلث؟



بعد أجراء النشاط يمكن ملاحظة مايلى:

- **الصف الأول:** يمثل ($ن = ١$) من العناصر مأخوذ منها $ر = ٠$ أو $ر = ١$

وبالتالى فإن: $^{١}ق_{٠} = ١$ ، $^{١}ق_{١} = ١$

- **الصف الثانى:** يمثل ($ن = ٢$) من العناصر مأخوذ منها $ر = ٠$ أو $ر = ١$ أو $ر = ٢$ فى كل مرة.

فيكون: $^{٢}ق_{٠} = ١$، $^{٢}ق_{١} = ٢$ ، $^{٢}ق_{٢} = ١$ وهكذا

كما نلاحظ أن:

- كل صف يبدأ بالواحد لأن $^{ن}ق_{٠} = ١$ ، وينتهى بالواحد لأن $^{ن}ق_{ن} = ١$
- كل عدد فى أى صف باستثناء الصف الأول يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه فى الصف الذى يعلوه مباشرة.
- **ففى الصف الثالث نجد:** ١ ، ١ + ٢ ، ٢ + ١، ١
- **وفى الصف الرابع نجد:** ١ ، ١ + ٣ ، ٣ + ٣ ، ٣ + ١ ، ١ وهكذا.
- يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت ن زوجية)
- وتماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت ن فردية)
- وهذا مايطابق العلاقة السابقة $^{ن}ق_{ر} = ^{ن}ق_{ن-ر}$

تطبيق على النشاط:

أثبت أن: $^{٥}ق_{٠} + ^{٥}ق_{١} + ^{٥}ق_{٢} + ^{٥}ق_{٣} + ^{٥}ق_{٤} + ^{٥}ق_{٥} = ٢^{٥}$

تمـــارين (٢ – ٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات

(١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى.....................

أ ١٥ ب ١٠ جـ ٢٠ د ٣٥

(٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى.....................

أ ٣٠ ب ١٥ جـ ٢٤ د ١٠

(٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء يساوى.....................

أ ١٥ ب ٨ جـ ٦٠ د ٢

(٤) إذا كان ${}^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٣ : ١$ فإن ن تساوى:

أ ٧ ب ٩ جـ ١٧ د ١٩

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) احسب قيمة ${}^{٦}ق_{٣}$ ، ${}^{٩}ق_{١}$ ، ${}^{١٢}ق_{١١}$ ، ${}^{١٠٠}ق$.

(٦) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة ${}^{ن}ق_{ن-٩}$

(٧) إذا كان ${}^{ن+١}ق_{٤} = \frac{٥}{٢}\ {}^{ن}ق_{٣}$ فأوجد قيمة ن.

(٨) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣}\ ٣٠ن$ فأوجد قيمة ن.

(٩) بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية؟

(١٠) يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

(١١) اكتب بدلالة التباديل كل من:

أ ${}^{٨}ق_{٣}$ ب ${}^{١٩}ق_{٢}$ جـ ${}^{٥}ق.$ د ${}^{س}ق_{س-ص}$

(١٢) اكتب مستخدمًا الصورة ${}^{ن}ق_{ر}$ كل ممايأتى:

أ $\frac{{}^{٨}ل_{٢}}{\underline{٢|}}$ ب $\frac{{}^{٩}ل_{٣}}{\underline{٣|}}$ جـ $\frac{{}^{١٠}ل_{٤}}{\underline{٤|}}$ د $\frac{{}^{٨}ل.}{\underline{.|}}$

(١٣) أوجد قيمة: $\frac{{}^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{{}^{١٨}ق_{٥}}$

(١٤) أثبت أن : $\frac{{}^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{{}^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}} = \frac{٥٨}{٩}$

تمـــاريـن عامة على الوحدة الثانية

أكمل مايأتى:

(١) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام ١، ٢، ٣، ٤ يساوى.............................

(٢) إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٣ أرقام ليس بينها الصفر، فإن عدد الطرق يساوى.............................

(٣) إذا كان ^{٤}ق$_{٠}$ + ^{٤}ق$_{١}$ + ^{٤}ق$_{٢}$ + ^{٤}ق$_{٣}$ + ^{٤}ق$_{٤}$ = ٢^{ن} فإن ن =.............................

(٤) إذا كان $\underline{|ن}$ = $\underline{|١}$ فإن ن =.............................

اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات { أ، ب، جـ} وأراد أن يختار لونها من بين الألوان:{ أبيض، أحمر ، فضى ، أسود} بكم طريقة يمكن أختيار السيارة .

أ ٧   ب ١٢   جـ ١٤   د ٢٤

(٦) كم عدد يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١، ٣، ٦، ٧

أ ٩   ب ١٢   جـ ٢٤   د ٦٤

(٧) إذا كانت سـ = {س:س ∈ط ، ١ ≤ س≤ ٥} وكانت صـ = {(أ، ب): أ، ب∈ سـ ، أ ≠ب} كم عدد عناصر صـ

أ ٧   ب ١٠   جـ ٢٠   د ٢٥

(٨) ^{١٢}ق$_{٤}$ + ^{١٢}ق$_{٣}$ يساوى

أ ٧١٥   ب ٧١٠   جـ ٧١٦   د ٧٢٠

(٩) إذا كان ^{ن}ل$_{ر}$ = ٣٣٦ ، ^{ن}ق$_{ر}$ = ٥٦ فإن ن ، ر هما

أ (٣، ٢)   ب (٨ ، ٣)   جـ (٧، ٤)   د (٧، ٣)

(١٠) شخص له ٨ أصدقاء ، عدد طرق دعوة صديق أو أكثر منهم للعشاء

أ ٢٥٠   ب ٢٠٠   جـ ٢٥٥   د ٢٥٦

(١١) إذا كان ^{ن}ق$_{١٠}$ = ^{ن}ق$_{١٤}$ فإن ^{٢٥}ق$_{ن}$ يساوى

أ ٢٤   ب ٢٥   جـ ١   د ٤٩

(١٢) احسب قيمة كل من:

أ $^{٥}\text{ق}_{٥}$ ب $\underline{|٦}$ جـ $^{٢٣}\text{ل}_{١}$

د $^{٥٠}\text{ق}_{٤٩}$ هـ $\frac{\underline{|١٣}}{\underline{|١٤}}$ و $^{٤}\text{ل}_{٤}$

(١٣) إذا كان $^{٢\text{ن}-١}\text{ق}_{٣} = ٨٤$ فما قيمة $\underline{|\text{ن} - ٥}$

(١٤) إذا كان $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}+١} = ٣٣٦$ فما قيمة $^{٢\text{ر}}\text{ق}_{٤}$

(١٥) إذا كان $^{\text{ن}-\text{م}}\text{ل}_{٣} = ٢١٠$ ، $^{\text{ن}+\text{م}}\text{ق}_{٤} = ٧١٥$ فأوجد قيمة كل من م ، ن

(١٦) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية.

(١٧) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد(ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب

(١٨) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجل وسيدتين من بين ٧ رجال و ٥ سيدات؟

(١٩) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار . أوجد عدد طرق الأختيار؟

(٢٠) يبلغ عدد فرق الدورى الممتاز لكرة القدم ١٢ فريقًا، فإذا كان كل فريق يلعب مبارتين مع كل فريق من باقى الفرق. أوجد عدد مباريات الدورى بأكمله.

(٢١) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

أ $\frac{\underline{|\text{ن} + ٣}}{\underline{|\text{ن} + ١}} = ٤٢$ ب $١٢ \times \underline{|\text{ن}} = \underline{|\text{ن} + ٢}$ جـ $\underline{|\text{ن} - ٤} = ١٢٠$

د $\underline{|\text{ن} - ٥} = ١$ هـ $^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} = ٨٤$ و $^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{١٢}\text{ق}_{٢\text{ر}+٣}$

الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل

Calculus

مقدمة الوحدة

ابتكر اسحاق نيوتن (١٦٤٢م - ١٧٢٧م) حساب التفاضل والتكامل ، ونافسه فى ذلك ليبنتز (١٦٤٦م - ١٧١٦م) مستقلاً عنه - حيث نشأ علم التفاضل (Differentiation) أو الاشتقاق مرتبطا بمشكلة إيجاد مماسات لمنحنيات وحساب قيم عظمى وصغرى لدوال رياضية بحتة أو دوال تنمذج مشكلات مجتمعية واقتصادية . أما التكامل (Integration) فقد رأى نيوتن أنه عملية عكسية للتفاضل بينما رآه ليبنتز كنهاية مجاميع، وينسب له استخدام حرف S للتعبير عن التكامل (من Summation) ثم تحول إلى الرمز المعروف حاليًا $\int$ والقريب من S ، وقد تقدم علم التفاضل والتكامل على أيدى كثيرين منهم بيركلى ، لاجرانج، لابلاس ، جاوس ، وايرشتراس - كما ساعد ابتكار الهندسة التحليلية فى تطور هذا العلم.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة. وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يتعرف التفسير الهندسى للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يبحث قابلية الدالة للاشتقاق (المشتقة اليمنى - المشتقة اليسرى).
- يستنتج العلاقة بين الاشتقاق و الاتصال .
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق (التفاضل).
  - مشتقة الدالة الثابتة.
  - مشتقة الدالة د: د(س) = $س^ن$
  - مشتقة الدالة د : د(س) = س
  - مستقة الدالة د: د(س) = أ $س^ن$
  - مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما.
  - مشتقة حاصل ضرب دالتين.
  - مشتقة خارج قسمة دالتين.
  - مشتقة دالة الدالة - قاعدة السلسلة.
  - مشتقة الدالة ص = $(د(س))^ن$
  - مشتقة الدوال المثلثية.
- يستخدم المشتقات في تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس والعمودي لمنحنى عند نقطة عليه.
- يتعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.
- يتعرف ويستنتج قواعد التكامل الآتية:
  - $\int س^ن \, ى س = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$
  - $\int أ د(س) \, ى س = أ \int د(س) \, ى س$. حيث أ ثابت
  - $\int [د(س) \pm ر(س)] \, ى س = \int د(س) \, ى س \pm \int ر(س) \, ى س$
  - $\int (أ س + ب)^ن \, ى س = \frac{1}{أ(ن+1)} (أ س + ب)^{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$
  - $\int جا أ س \, ى س = \frac{-1}{أ} جتا أ س + ث$ حيث أ ثابت
  - $\int جتا أ س \, ى س = \frac{1}{أ} جا أ س + ث$ حيث أ ثابت
  - $\int قا^2 أ س \, ى س = \frac{1}{أ} ظا أ س + ث$ حيث أ ثابت
  - $\int د'(س) \, [د(س)]^ن \, ى س = \frac{1}{ن+1} [د(س)]^{ن+1} + ث$

المصطلحات الأساسية

التغير	Variation
متوسط التغير	Average Rate of Change
معدل التغير	Rate of Change
المشتقة الأولى	First Derivative
المشتقة اليسرى	Left Derivative
المشتقة اليمنى	Right Derivative
الاشتقاق	Differentiation
دالة قابلة للاشتقاق	Differintiable Functions
حاصل الضرب	Product
خارج القسمة	Quotient
قاعدة السلسلة	Chain Rule
الدوال المثلثية	Trigonometric Functions
تكامل	Integration
مشتقة عكسية	Antiderivative

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): معدل التغير.

الدرس (٣ - ٢): الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٣): قواعد الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٤): مشتقات الدوال المثلثية.

الدرس (٣ - ٥): تطبيقات على المشتقة.

الدرس (٣ - ٦): التكامل.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

مخطط تنظيمي للوحدة

٣ - ١ معدل التغير

Rate of Change

سوف تتعلم

- مفهوم دالة التغير.
- مفهوم متوسط التغير.
- مفهوم معدل التغير.

المصطلحات الأساسية

- دالة التغير *Function of Variation*
- متوسط التغير *Average Rate of Change*
- معدل التغير *Rate of Change*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

إذا سقطت كرة تنس طاولة وكرة قدم من نفس الارتفاع ، وفى نفس اللحظة، وبفرض إهمال تأثير مقاومة الهواء لهما، أى الكرتين تصطدم بالأرض أولاً ؟ فسر إجابتك.

يهتم علم التفاضل بدراسة التغير الذى يحدث فى متغير ما كنتيجة لتغير متغير آخر، فالتغير الحادث فى زمن حركة الكرة ($ن_٢ - ن_١$) يؤدى إلى تغير مناظر فى سرعتها ($ع_٢ - ع_١$) ، وبذلك يمكن مقارنة متوسط تغير السرعة بالنسبة لوحدة الزمن لكل من الكرتين بحساب المعدل $\frac{ع_٢ - ع_١}{ن_٢ - ن_١}$

تعلم

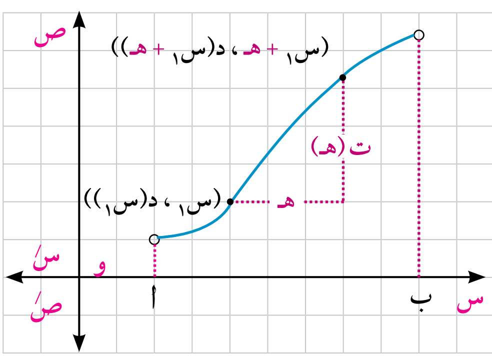
دالة التغير Function of Variation

إذا كانت د:]أ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) فإن أى تغير فى قيمة س من $س_١$ إلى $س_٢$ في مجال د يقابله تغير فى قيمة ص من د($س_١$) إلى د ($س_٢$) وعليه فإن :

مقدار التغير فى س = $\triangle$ س (و يقرأ دلتا س) = $س_٢ - س_١$ ،

مقدار التغير فى ص = $\triangle$ص = د($س_٢$) - د($س_١$)

وباعتبار ($س_١$ ، د($س_١$)) نقطة على منحنى الدالة د، فإن لكل تغير فى إحداثيها السينى من $س_١$ إلى $س_٢$= $س_١$ + هـ بحيث $س_١$ + هـ ∈] أ ، ب[، هـ ≠ ٠ يحدث تغير مناظر فى إحداثيها الصادى يتعين بالعلاقة :



ت(هـ) = د($س_١$ + هـ) - د($س_١$)

وتسمى الدالة ت بدالة التغير فى د عند س = $س_١$

ملاحظة:

كلا الرمزين $\triangle$س أو هـ يمثلان التغير فى س

مثال

(١) إذا كانت د(س) = ٣$س^٢$ + س - ٢

وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ت, ثم احسب مقدار التغير فى د عندما

(أ) هـ = ٠,٣ (ب) هـ = -٠,١

الحل

∵ د (س) = ٣ $س^٢$ + س - ٢ ، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ

∴ $س_١$ = ٢ ، د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ - ٢ = ١٢ ، ويكون :

د (٢ + هـ) = ٣ (٢ + هـ)^٢ + (٢ + هـ) - ٢ = ١٢ + ١٢هـ + ٣$هـ^٢$ + ٢ + هـ - ٢

= ٣ $هـ^٢$ + ١٣هـ + ١٢

ت (هـ) = د(٢ + هـ) - د(٢)

= (٣$هـ^٢$ + ١٣ هـ + ١٢) - ١٢ = ٣$هـ^٢$ + ١٣ هـ

(أ) عندما هـ = ٠,٣

ت(٠,٣) = ٣(٠,٣)^٢ + ١٣ × ٠,٣

= ٤,١٧

(ب) عندما هـ = -٠,١

ت(-٠,١) = ٣ (-٠,١)^٢ + ١٣ (-٠,١)

= -١,٢٧

حاول أن تحل

(١) إذا كانت د(س) = $س^٢$ - س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب:

(أ) ت(٠,٢) (ب) ت(-٠,٣)

تعلم

دالة متوسط التغير *Function of Average Rate of Change*

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة م، تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = $س_١$ حيث :

$$م (هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} \quad \text{أو} \quad \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

مثال

(٢) إذا كانت د:[٠،∞[⟵ ع حيث د(س) = $س^٢$ + ١ فأوجد :

(أ) دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم إحسب م (٠,٣)

(ب) متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٣ إلى ٤

الحل

(أ) د($س_١$) = د(٢) = (٢)^٢ + ١ = ٥ ، د ($س_١$ + هـ) = د (٢ + هـ)

∴ د(٢+هـ) = (٢ + هـ)^٢ + ١ = $هـ^٢$ + ٤ هـ + ٥

$\because\ \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$

$\therefore\ \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{هـ}^{٢} + ٤\text{هـ} + ٥ - ٥}{\text{هـ}} = \text{هـ} + ٤$ ويكون $\text{م}(٠,٣) = ٤,٣$

ب عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ فإن $\text{س}_{١} = ٣$ ، $\text{س}_{٢} = ٤$

ويكون د(٣) = ٩ + ١ = ١٠ ، د(٤) = ١٦ + ١ = ١٧

متوسط التغير $= \frac{\text{د}(\text{س}_{٢}) - \text{د}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{١٧ - ١٠}{٤ - ٣} = ٧$

حاول أن تحل

٢ إذا كانت د(س) = $\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١$ فأوجد :

أ دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م (٠,٢)

ب متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

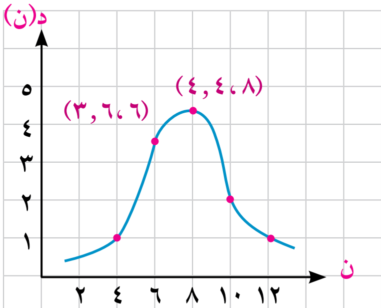
مثال

٣ يوضح الشكل المقابل المنحنى ر = د(ن) حيث ر جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات.

ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

أ ن = ٤ إلى ن = ٨ ب ن = ٨ إلى ن = ١٠



الحل

أ من الرسم : د(٨) = ٤,٤ ، د(٤) = ١

متوسط التغير فى د $= \frac{\text{د}(٨) - \text{د}(٤)}{٨ - ٤} = \frac{٤,٤ - ١}{٤} = ٠,٨٥$ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه شهريا خلال هذه الفترة .

ب من الرسم : د(١٠) = ٢ ، د(٨) = ٤,٤

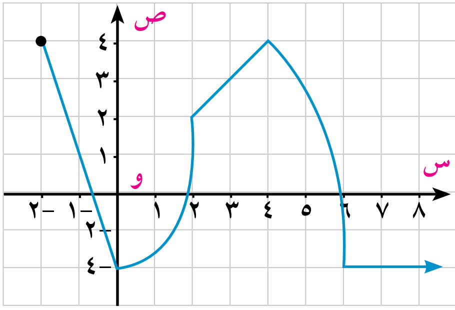
متوسط التغير فى د $= \frac{\text{د}(١٠) - \text{د}(٨)}{١٠ - ٨} = \frac{٢ - ٤,٤}{٢} = -١,٢$ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه شهريًّا خلال هذه الفترة.

حاول أن تحل

٣ مستخدمًا الشكل الموضح فى مثال (٣) أوجد متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

أ ن = ٤ إلى ن = ٦ ب ن = ٦ إلى ن = ١٠ ج ن = ٤ إلى ن = ١٢



تفكير ناقد:

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س). حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك

تعلم

دالة معدل التغير *Function of Rate of Change*

إذا كانت د:] أ ، ب[⟵ ع حيث ص = د(س) ، س، ، س، + هـ ∋] أ ، ب[فإن :

دالة معدل التغير فى د عند س، = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}}$ م (هـ) بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

④ أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = س، ، ثم أوجد هذا المعدل عند قيمة س المعطاة

د(س) = ٣س^٢ + ٢ عندما س = ٢

الحل

∵ د(س) = ٣س^٢ + ٢ ∴ عندما س = س، فإن د(س،) = ٣س$_١^٢$ + ٢،

د(س، + هـ)^٢ = ٣ (س، + هـ)^٢ + ٢ = ٣س$_١^٢$ + ٦ س، هـ + ٣ هـ^٢ + ٢

دالة معدل التغير فى د = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦ س_١ هـ + ٣ هـ^٢}{هـ}$ = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}}$ (٦س، + ٣ هـ) = ٦س،

عند س = ٢ ∴ س، = ٢ ويكون معدل التغير في د = ٦ × ٢ = ١٢

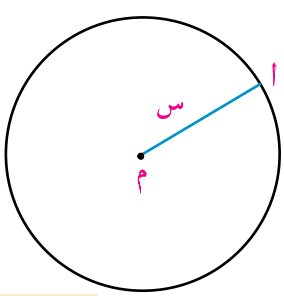
تطبيقات حياتية

مثال

⑤ سقط حجر فى ماء ساكن، فتكونت موجة دائرية تتسع بانتظام، بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى . أوجد معدل التغير فى مساحة سطحها بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ٣,٥سم (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

نمذجة المشكلة:



بفرض أن طول نصف قطر الموجه = س سم

∴ مساحة الصفيحة مـ = π س^٢ سم^٢

ويكون مـ = د(س) = π س^٢

عندما س تتغير من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$

فإن دالة معدل التغير فى م = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\pi (س_١ + هـ)^٢ - \pi س_١^٢}{هـ}$

$= \pi \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢}{هـ} = ٢ \pi س_١$

عندما س = $س_١$ = ٣,٥ ∴ معدل التغير فى م = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ٢٢

حاول أن تحل

(٤) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣سم إلى ٣,٤سم، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥سم.

مثال

(٦) فى تفاعل كيميائى ناتجه النهائى المادة أ، وجد أن مقدار المادة الناتجة بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ص = $ن^٣$ ملليجرم . أوجد المعدل اللحظى لإنتاج المادة أ عندما ن = ٢ ثانية .

الحل

بفرض أن ص = د(ن) = $ن^٣$ فيكون :

المعدل اللحظى لإنتاج المادة أ هو نفسه معدل التغير فى د.

عند ن = $ن_١$ فإن دالة معدل التغير فى د = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(ن + هـ) - د(ن)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(ن + هـ)^٣ - ن^٣}{هـ} = ٣ ن^٢$

عند ن = $ن_١$ = ٢ ثانية ∴ المعدل اللحظى لانتاج المادة أ = $٣(٢)^٢$ = ١٢ ملليجرام/ ث

حاول أن تحل

(٥) يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن(مقيسة بالدقائق)بالعلاقة د(ن) = $٢ن^٣$ + ١٠٠ ملليجرام

أوجد معدل النمو اللحظى للدالة د عندما ن = ٥

تمـــاريـن (٣ – ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى ....

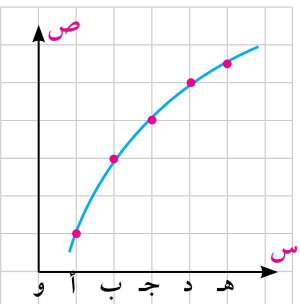
أ ٠,٣٢ ب ٠,٤٨ جـ ٣,٦ د ٧,٢

٢) إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د(٢) = ٦ فإن د(٤) تساوى ....

أ - ٤ ب ٧ جـ ٨ د ١٦

٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم يساوى ....

أ ١٢٥ ب ٣٤٣ جـ ٢١٨ د ١٠٩



٤) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س) فى أى الفترات التالية يكون متوسط التغير فى د هو الأكبر

أ [أ ، ب] ب [ب ، جـ]

جـ [جـ ، د] د [أ ، هـ]

أجب عن مايأتى:

٥) إذا كانت د(س) = $س^٢$ + ٢ س - ١ أوجد التغير فى د عندما

أ تتغير س من ٢ إلى ٢,١ ب س = - ٢ ، هـ = ١

٦) أوجد دالة متوسط التغير فى د عندما س = $س_١$، ثم استنتج معدل تغير د عند قيمة $س_١$ المبينة فيمايلى :

د(س) = $٢س^٣$، $س_١$ = ٢

٧) الربط بالمساحات: صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع، احسب معدل التغيير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨سم.

٨) الربط بالحجوم : كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي، فأوجد معدل التغيير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧سم.

الربط بالهندسة:

٩) فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروى. احسب متوسط التغير في مساحة سطحها الكروى عندما يتغير طول نصف قطرها من ٥,٠سم إلى ٦,٠سم، علمًا بأن مساحة سطح الكرة يساوي ٤ π $نق^٢$ حيث نق طول نصف قطر الكرة .

١٠) صفيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوي ضعف ارتفاعها المناظر، تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها. احسب متوسط التغير في مساحتها إذا تغير ارتفاعها من ٨ سم إلى ٨,٤ سم.

٣ – ٢ الاشتقاق

Differentiation

سوف تتعلم

- المشتقة الأولى للدالة
- المشتقة اليسرى للدالة.
- المشتقة اليمنى للدالة
- قابلية الاشتقاق عند نقطة.
- العلاقة بين الاشتقاق والاتصال

المصطلحات الأساسية

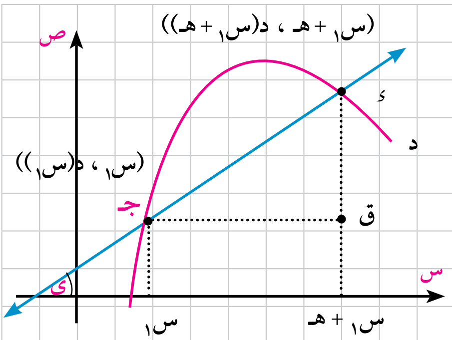
- المشتقة الأولى First Derivative
- المشتقة اليسرى Left Derivative
- المشتقة اليمنى Right Derivative
- الاشتقاق Differentiation
- دالة قابلة للاشتقاق Differintiable Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

(١) يوضح شكل (١) منحنى د: [أ ، ب] ⟵ ع حيث ص = د(س) ، $\overleftrightarrow{جـ ى}$ قاطعا له فى النقطتين جـ (س١ ، د(س١)) ، ى (س١ + هـ ، د(س١ + هـ)). أوجد ميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ى}$.



شكل (١)

(٢) باعتبار س تتغير من س١ إلى س١ + هـ قارن بين دالة متوسط التغير فى د ، وميل القاطع $\overleftrightarrow{جـ ى}$.

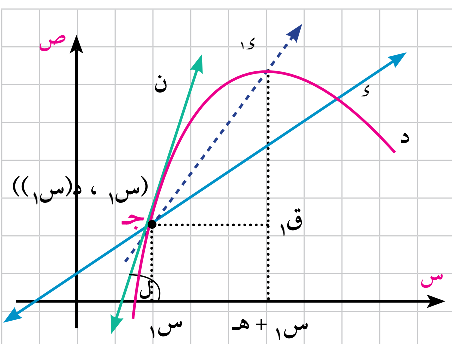
هل العلاقة التالية صحيحة ؟

$$\text{ميل القاطع } \overleftrightarrow{جـ ى} = \text{ظا ى} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} = م\ (هـ)$$

(٣) إذا كانت النقطة جـ (س١، د(س١)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د ، وتحركت النقطة ى على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ لتأخذ $\overleftrightarrow{جـ ى}$ الوضع $\overleftrightarrow{جـ ن}$ ويصبح مماسًا للمنحنى عند جـ .

أى أن هـ ⟵ صفر

أوجد ميل المماس لمنحنى د عند جـ



شكل (٢)

لاحظ أن:

$$\text{ميل المماس عند جـ} = \text{ظا ل} = \lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} \text{ إن وجدت}$$

أي أن :

> ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند النقطة (س١، د(س١))
> يساوى معدل التغير فى د عند س = س١

مثال

① أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٥ عند النقطة أ(٢، ٧)، ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٥ = ٧ ∴ النقطة أ (٢، ٧) تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند (س = ٢) = معدل التغير فى د عند (س = ٢)

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} - ٥ - ٧}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٢ هـ + ٣ هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (١٢ + ٣ هـ) = ١٢$$

ويكون ظا ل = ١٢ ∴ ل = ظا$^{-١}$(١٢) ≃ ٨٥ َ١٤ °

حاول أن تحل

① أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٤ عند النقطة أ (١، - ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة .

تعلم

الدالة المشتقة *The Derivative Function*

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د ، وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا فى المتغير س يطلق عليها " الدالة المشتقة" أو : المشتقة الأولى للدالة" أو " المعامل التفاضلى الأول"

تعريف

إذا كانت د :] أ ، ب [⟵ ع ، س ∈] أ ، ب [فإن **الدالة المشتقة دَ** :

$$دَ(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

رموز الدالة المشتقة :

إذا كانت ص = د(س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

صَ أو دَ وتقرأ " مشتقة ص" أو " مشتقة د"

$\frac{ءص}{ءس}$ وتقرأ " دال ص دال س " أو " مشتقة ص بالنسبة إلى س"

لاحظ أن ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_{١}$، د(س$_{١}$)) هو دَ(س$_{١}$)

مثال

(٢) أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د(س) = س^{٢} - س + ١ مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧)

الحل

∵ د(س) = س^{٢} - س + ١

∴ د(س + هـ) = (س + هـ)^{٢} - (س + هـ) + ١ = س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} - س - هـ + ١ ,

د(س + هـ) - د(س) = (٢س + هـ - ١) هـ

∵ دَ(س) = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د(س + هـ) - د(س)}}{\text{هـ}}$ ∴ دَ(س) = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{(٢س + هـ - ١) هـ}}{\text{هـ}}$

دَ(س) = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ (٢س + هـ - ١) دَ(س) = ٢س - ١

∵د(- ٢) = (- ٢)^{٢} - (- ٢) + ١ = ٧ ∴ النقطة (- ٢، ٧) تقع على منحنى د

ميل المماس عند النقطة (- ٢ ، ٧) = دَ(- ٢) = ٢(- ٢) - ١ = - ٥

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = ٣ س^{٢} + ٤س + ٧ فأوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (- ١ ، ٦)

تعلم

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة *Differentiable at a Point*

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمي إلى مجال الدالة) إذا وفقط إذا كانت دَ(أ) لها وجود حيث

دَ(أ) = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د(أ + هـ) - د(أ)}}{\text{هـ}}$

و إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة] جـ ، ى [نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة.

فى مثال (٢) : نجد أن لكل س∈ ع يوجد مشتقة للدالة د حيث دَ(س) = ٢س - ١ ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للاشتقاق على ع

مثال

(٣) أثبت ان د(س) = $\frac{\text{س - ١}}{\text{س + ١}}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ مجال د = ع - {-١} ∴ د معرفة عند س = ٢ ، د (٢) = $\frac{١}{٣}$

دَ(٢) = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د(٢ + هـ) - د(٢)}}{\text{هـ}}$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\frac{\text{٢ + هـ - ١}}{\text{٢ + هـ + ١}} - \frac{١}{٣}}{\text{هـ}}$

= نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{٣ + ٣هـ - ٣ - هـ}}{\text{٣ هـ (٣ + هـ)}}$ = نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{٢ هـ}}{\text{٣هـ(٣ + هـ)}}$ = $\frac{٢}{٩}$ ∈ ع ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن د(س) = س^{٢} - س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى *Right and Left Derivative*

إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ (حيث أ تنتمي إلى مجال الدالة)، وكانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فنبحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ ، بأن نوجد المشتقة اليمنى للدالة و يرمز لها دَ(أ$^{+}$) والمشتقة اليسرى و يرمز لها دَ(أ$^{-}$) حيث :

المشتقة اليمنى دَ(أ$^{+}$) = $\underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{د(أ + هـ) - د(أ)}}{\text{هـ}}$ ، المشتقة اليسرى دَ(أ$^{-}$) = $\underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{د(أ + هـ) - د(أ)}}{\text{هـ}}$

وتكون الدالة د قابلة للاشتقاق عند أ إذا وفقط إذا كان دَ(أ$^{+}$) = دَ(أ$^{-}$)، ويرمز لمشتقة الدالة بالرمز دَ(أ)

مثال

(٤) بين أن الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{عندما س} \leqslant ٢ \\ \text{س + ٢} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ مجال د = ع

∴ الدالة معرفة عند س = ٢ ، د(٢) = (٢)^{٢} = ٤

∴

دَ(٢$^{-}$) = $\underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{د(٢ + هـ) - د(٢)}}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{(٢ + هـ)}^{٢} \text{ - ٤}}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{٤ هـ + هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$

∴ دَ(٢$^{-}$) = ٤

،

دَ(٢$^{+}$) = $\underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{د (٢ + هـ) - د(٢)}}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{(٢ + هـ + ٢) - ٤}}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}}$ = ١

∴ دَ(٢$^{+}$) = ١

∵ دَ(٢$^{+}$) ≠ دَ(٢$^{-}$) ∴ دَ(٢) ليس لها وجود ؛ أى أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

حاول أن تحل

(٤) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢ حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} \text{ - ٥} & \text{عندما س} < ٢ \\ \text{٤س - ٩} & \text{عندما س} \geqslant ٢ \end{cases}$

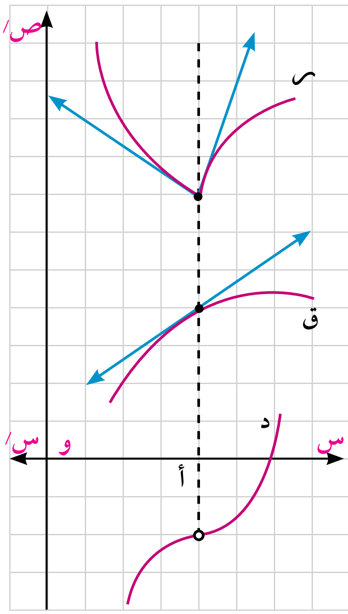
تفكير ناقد:

- ابحث اتصال كل من الدالتين فى بندى مثال (٤) ، وحاول أن تحل (٤) واستنتج العلاقة بين قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة فى مجالها واتصالها عند نفس النقطة .

- هل الدالة د حيث د(س) = |س - ٢| قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟

الاشتقاق والاتصال
Derivative and Continuity

➤ إذا كانت الدالة د حيث ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.



يوضح الشكل المقابل أن:

١ - اتصال دالة عند نقطة لايعنى بالضرورة أنها قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة كما فى الدالتين ر، ق

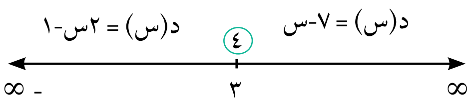
٢ - إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = أ كما فى الدالة د

ملاحظة هامة: عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها ، يفضل بحث اتصالها عند هذه النقطة أولاً، فإذا كانت متصلة نبحث الاشتقاق و إذا كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للأشتقاق)

مثال

٥ ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٣ حيث د(س) = $\begin{cases} ٢س - ١ & \text{عندما } س < ٣ \\ ٧ - س & \text{عندما } س \geqslant ٣ \end{cases}$

الحل



بحث الاتصال عند س = ٣

(١) د(٣) = ٧ - ٣ = ٤

(٢) د(٣⁻) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ (٢ س - ١) = ٥ ، د(٣⁺) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ (٧ - س) = ٤

∵ د(٣⁻) ≠ د(٣⁺) ∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ د(س) غير موجودة ، د غير متصلة عند س = ٣

∵ د غير متصلة عند س = ٣ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

حاول أن تحل

٥ ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ ٢س + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

٦ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^٢ + أ & \text{عندما } س \leqslant ٢ \\ أ س + ب & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن أ + ب يساوى:

أ ٤ ب - ٤ ج - ٨ د ٨

تمــارين (٣ – ٢)

أجب عن مايأتى:

١) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} - ٥ عند س = ٣ وبين المعنى الهندسى لمشتقة الدالة عند س = ٣

٢) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = ١ - ٥س - ٣س^{٢} عند النقطة (- ١، ٣)، ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب دقيقة.

٣) أوجد مستخدمًا التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\sqrt{\text{٣س} + ١}$ ب) د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

٤) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{٤ - س}^{٢} & \text{عندما س} \leqslant ١ \\ \text{٢س + ١} & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١

٥) أوجد قيمة الثابت أ إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ حيث

د(س) = $\begin{cases} \text{٢س + ٣} & \text{عندما س} < ٢ \\ \text{أ س}^{٢}\text{ + ٨ س - ١} & \text{عندما س} \geqslant ٢ \end{cases}$

٦) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢}\text{ + ١} & \text{عندما س} \geqslant ٢ \\ \text{٤ س - ٣} & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت أ ثم ابحث قابليتها اشتقاق الدالة عند س = ٢

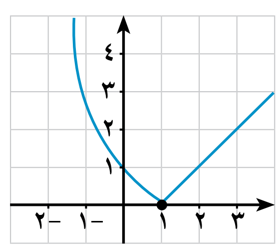
٧) إذا كان د(س) = أ س^{٢} + ب حيث أ و ب ثابتان أوجد :

أ) المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س، ص).

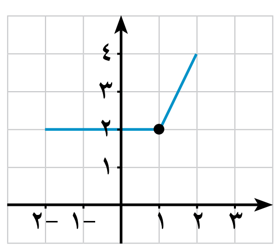
ب) قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢، -٣) الواقعة عليه يساوى ١٢.

٨) قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية، وأثبت أن كلًّا منها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ١.

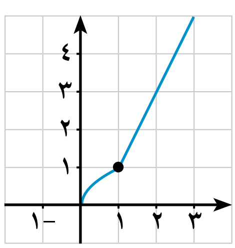
أ



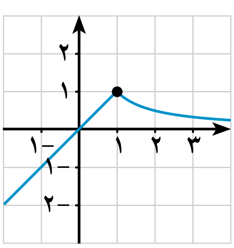
ب



جـ



د



٣ – ٣ قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

استكشف

١ - أوجد باستخدام تعريف المشتقةالأولى للدالة مشتقة كلاً من :

د(س) = س^{٣} د(س) = س^{٥}

٢ - هل يمكنك اكتشاف مشتقة د(س) = س^{٧} دون استخدام التعريف؟

٣ - هل يمكنك استنتاج قاعدة لمشتقة الدالة د حيث د(س) = س^{ن} ؟

تعلم

مشتقة الدالة — Derivative of a Function

١ - مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث: جـ ∈ ع فإن: $\frac{ء ص}{ء س} = ٠$

لاحظ أن :

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = دَ(س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = دَ(س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{جـ - جـ}{هـ}$ = صفرًا (هـ ≠ ٠)

٢ - مشتقة الدالة د(س) = س^{ن}

إذا كانت ص = س^{ن} حيث: ن ∈ ع فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن س$^{ن - ١}$

إذا كانت ص = س فإن: $\frac{ء ص}{ء س} = ١$

إذا كانت ص = أ س^{ن} حيث: أ ، ن ∈ ع فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = أ ن س$^{ن - ١}$

مثال

① أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ في كل ممايأتي:

أ ص = - ٣ ب ص = س^{٤} جـ ص = ٥س

د ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ هـ ص = $\sqrt[٧]{س^{٣}}$

الحل

أ ∵ ص = - ٣ ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٠$ ب ∵ ص = س^{٤} ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ س^{٣}

سوف تتعلم

- مشتقة الدالة الثابتة.
- مشتقة د(س) = س^{ن}
- مشتقة د(س) = س
- مشتقة د(س) = أس^{ن}
- مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما.
- مشتقة حاصل ضرب دالتين.
- مشتقة خارج قسمة دالتين.
- مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) .
- مشتقة ص = (د(س))^{ن}.

المصطلحات الأساسية

- المشتقة الأولى First Derivative
- حاصل ضرب Product
- خارج قسمة Quotient
- قاعدة السلسلة Chain Rule

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب.

ج ∵ ص = ٥ س ∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥$

د ∵ $\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}^{٢}} = ٣\,\text{س}^{-٢}$ ∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٦\,\text{س}^{-٣}$

هـ ∵ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}$ حيث س $\geqslant$ ٠.

حاول أن تحل

١ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ فى كل ممايأتى:

أ ص = $-\sqrt{٢}$ ب ص = $\frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$ ج ص = $\frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$ د ص = $\sqrt{\text{س}^{٥}}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ، فإن ع $\pm$ ق تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ويكون $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ع} \pm \text{ق}) = \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} \pm \frac{\text{د ق}}{\text{د س}}$ وبصفة عامة ، فإن :

إذا كانت د$_١$ ، د$_٢$ ،....، د$_ن$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{د}_١ \pm \text{د}_٢ \pm \text{د}_٣ \pm ... \pm \text{د}_ن)(\text{س}) = \text{د}'_١(\text{س}) \pm \text{د}'_٢(\text{س}) \pm \text{د}'_٣(\text{س}) \pm ... \pm \text{د}'_ن(\text{س})$$

مثال

٢ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ فى كل ممايأتى:

أ ص = $٢\,\text{س}^{٦} + \text{س}^{-٩}$ ب ص = $\frac{\sqrt{\text{س}} - ٢\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}$

الحل

أ ∵ ص = $٢\,\text{س}^{٦} + \text{س}^{-٩}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٢\,\text{س}^{٥} - ٩\,\text{س}^{-١٠}$

ب ∵ ص = $\frac{\sqrt{\text{س}} - ٢\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}$

$= ١ - ٢\sqrt{\text{س}} = ١ - ٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠ - ٢ \times \frac{١}{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٢} - ١} = -\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

حاول أن تحل

٢ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كان:

أ ص = $٣\,\text{س}^{٨} - ٢\,\text{س}^{٥} + ٦\,\text{س} + ١$ ب ص = $\frac{٥}{\text{س}} + \text{س}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣}\,\text{س} - ٤$

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت ع ، هـ دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س، فإن الدالة (ع . هـ) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون: $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ع} . \text{هـ}) = \text{ع}\,\frac{\text{د هـ}}{\text{د س}} + \text{هـ}\,.\,\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

مثال

③ أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ إذا كان ص = (س^٢ + ١) (س^٣ + ٣) ثم أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ عندما س = - ١

الحل

∵ ص = (س^٢ + ١) (س^٣ + ٣)

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ = (س^٢ + ١) × ٣س^٢ + (س^٣ + ٣) × ٢ س

= ٣س^٤ + ٣س^٢ + ٢س^٤ + ٦س

= ٥س^٤ + ٣س^٢ + ٦س

عند س = - ١ ∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ = ٥ (- ١)^٤ + ٣(- ١)^٢ + ٦ (- ١) = ٢

حاول أن تحل

③ أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ إذا كان ص = (٤س^٢ - ١) (٧ س^٣ + س) ثم أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ عندما س = ١

مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كانت ع ، ه دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت ه (س) ≠ ٠

فإن الدالة($\frac{\text{ع}}{\text{ه}}$) تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ ($\frac{\text{ع}}{\text{ه}}$) = $\frac{\text{ه } \frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}} - \text{ ع } \frac{\text{ى ه}}{\text{ى س}}}{\text{ق}^٢}$

أى ($\frac{\text{ع}}{\text{ه}}$)$'$ = $\frac{\text{ه ع}' - \text{ع ه}'}{\text{ه}^٢}$

مثال

④ أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ إذا كان ص = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٣ + ١}$

الحل

∵ ص = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٣ + ١}$ ∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ = $\frac{(\text{س}^٣ + ١) \times ٢\text{س} - (\text{س}^٢ - ١) \times ٣\text{س}^٢}{(\text{س}^٣ + ١)^٢}$

∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ = $\frac{٢\text{ س}^٤ + ٢\text{س} - ٣\text{ س}^٤ + ٣\text{ س}^٢}{(\text{س}^٣ + ١)^٢}$

= $\frac{- \text{س}^٤ + ٣\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{(\text{س}^٣ + ١)^٢}$

حاول أن تحل

④ أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ إذا كان ص = $\frac{\text{س}^٣ + ٢\text{ س}^٢ - ١}{\text{س} + ٥}$

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) (*Chain rule*)

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

إذا كانت ص = $(٣س^٢ - ١)^٤$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

هل تحتاج إلى عمليات حسابية مطولة؟ ، هل وجدت صعوبة فى إيجاد الدالة المشتقة؟

سبق لك دراسة تركيب الدوال وعلمت أن :

(د ∘ ر) (س) = د[ر (س)]

فإذا كان د، ر دالتين حيث ص = د(ع)، ع = د(س) فإن ص = د[ر (س)]

ونقول أن ص دالة الدالة س

نظرية

إذا كانت ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، كانت ع = ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص = د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

ويكون: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

مثال

٥ إذا كانت ص = $(س^٢ - ٣س + ١)^٥$ **فأوجد** $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

بفرض ع = $س^٢ - ٣ س + ١$ ∴ ص = $ع^٥$

واضح أن ص قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع (كثيرة حدود فى ع) ويكون $\frac{ءص}{ءع} = ٥ ع^٤$

وكذلك ع قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س (كثيرة حدود فى س) ويكون $\frac{ءع}{ءس} = ٢ س - ٣$ ،

بتطبيق قاعدة السلسلة ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٥ع^٢ \times (٢س - ٣)$ ،

بالتعويض عن ع

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٥ (س^٢ - ٣ س + ١)^٤ \times (٢ س - ٣)$

حاول أن تحل

⑤ أوجد $\frac{دص}{دس}$ باستخدام قاعدة السلسلة فى عمل تعاونى وتحقق من صحة عملك السابق.

مثال

⑥ إذا كانت ص = $\sqrt[3]{ع}$ ، ع = $س^٢ - ٣س + ٢$ **فأوجد** $\frac{دص}{دس}$

الحل

$\because$ ص = $ع^{\frac{١}{٣}}$ $\qquad \frac{دص}{دع} = \frac{١}{٣} ع^{-\frac{٢}{٣}}$

$\because$ ع = $س^٢ - ٣س + ٢$ $\qquad \frac{دع}{دس} = ٢س - ٣$

$\because \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{١}{٣} ع^{-\frac{٢}{٣}} (٢س - ٣)$ $\quad \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}(٢س - ٣)(س^٢ - ٣س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}}$

حاول أن تحل

⑥ إذا كانت ص = $٣ع^٢ - ١$ ، ع = $\frac{٥}{س}$ **فأوجد** $\frac{دص}{دس}$

مشتقة الدالة $[د(س)]^ن$

إذا كانت ع = $[د(س)]^ن$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى ،

فإن: $\frac{دع}{دس} = ن\,[د(س)]^{ن-١} \times د'(س)$

مثال

⑦ أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كان

أ) ص = $(٦س^٣ + ٣س + ١)^{١٠}$ $\qquad$ ب) إذا كانت ص = $\left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٥$

الحل

أ) ص = $(٦س^٣ + ٣س + ١)^{١٠}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ١٠(٦س^٣ + ٣س + ١)^٩ \times \frac{د}{دس}(٦س^٣ + ٣س + ١)$

$= ١٠(١٨س^٢ + ٣)(٦س^٣ + ٣س + ١)^٩$

$= ٣٠(٦س^٢ + ١)(٦س^٣ + ٣س + ١)^٩$

ب) ص = $\left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٥$ $\qquad \therefore \frac{دص}{دس} = ٥\left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٤ \times \frac{(س + ١)\times ١ - (س - ١)\times ١}{(س + ١)^٢}$

$= ٥\left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٤ \times \frac{س + ١ - س + ١}{(س + ١)^٢}$

$= \frac{١٠}{(س + ١)^٢} \times \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٤ = \frac{١٠(س - ١)^٤}{(س + ١)^٦}$

حاول أن تحل

(٧) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت $ص = \left(\frac{٥س^{٢}}{٣س^{٢} + ٢}\right)^{٣}$

مثال

(٨) إذا كان $د(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س - ٤$ أوجد قيم س التي تجعل $دَ(س) = ٢$

الحل

$دَ(س) = \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} - ٢ \times ٢س + ٥ \times ١$

$= س^{٢} - ٤س + ٥$

عندما $دَ(س) = ٢$ $\quad \therefore س^{٢} - ٤س + ٥ = ٢$ $\quad$ ويكون $س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

$\because (س - ١)(س - ٣) = ٠$ $\quad \therefore س = ١$ أو $س = ٣$

حاول أن تحل

(٨) أوجد قيم س التي تجعل $دَ(س) = ٧$ في كل ممايأتي:

أ) $د(س) = س^{٣} - ٥س + ٢$ $\qquad$ ب) $د(س) = (س - ٥)^{٧}$

تمــاريـن (٣ - ٣)

أكمل كلًّا ممايأتي:

(١) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right) =$ ....

(٢) $\frac{ء}{ءس}(٥\pi) =$ ....

(٣) $\frac{ء}{ءس}\left(س^{\frac{١}{٢}}\right) =$ ....

(٤) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\right) =$ ....

(٥) $\frac{ء}{ءس}(٥س^{٢} + ٣س + ٢) =$ ....

(٦) $\frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{٢}س^{٧} - \frac{س^{٥}}{٥} + \pi\right) =$ ....

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية بالنسبة إلى س.

(٧) $ص = ٢س^{٦} + ٣\sqrt{س}$

(٨) $ص = \frac{٤س^{٢} - ٣س + ٢\sqrt{س}}{س}$

(٩) $ص = س(٣س^{٢} - \sqrt{س})$

(١٠) $ص = \frac{٤س^{٢} - س + ٣}{\sqrt{س}}$

(١١) $ص = (س - ١)(س + ١)(س^{٢} + ١)(س^{٤} + ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية

(١٢) $ص = (س^{٢} + ٣)(س^{٣} - ٣س + ١)$

(١٣) $ص = (س^{٢} - \sqrt{س})(س^{٢} + ٢\sqrt{س})$

(١٤) ص = (٢ س^{٤} - ٣س + ٤) (س^{٢} - + $\sqrt{\text{س}}$ + $\frac{٢}{\text{س}}$)

(١٥) ص = $\frac{\text{٥س - ٢}}{\text{٥ س + ١}}$

(١٦) ص = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٢س + ٥}}{\text{س}^{٢}\text{ - ٥س + ١}}$

(١٧) ص = $\frac{\text{س - ٢}}{\text{س + ٥}}$

(١٨) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٢ لكل ممايأتي:

أ ص = (س^{٣} + س - ٩)^{٥}

ب ص = $\sqrt[٣]{\text{(٢س}^{٣}\text{ + ٤س + ٣)}^{٢}}$

جـ ص = ع^{٢} ، ع = ٣س^{٢} - ٢

د ص = ٢ع^{٣} ، ع = ٨س - ١١

هـ ص = $\frac{\text{ع - ١}}{\text{ع + ١}}$ ، ع = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س - ١}}$

(١٩) إذا كان ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٨ عندما س = ١، وكان متوسط تغير ص عندما تتغير س من - ١ إلى ٢ يساوي ٧ أوجد قيمتي الثابتين أ ، ب.

(٢٠) أوجد قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقط المبينة فى كل ممايأتى:

أ ص = $\left(\frac{\text{س}^{٢}\text{ - ٢}}{\text{٣ + س}^{٢}}\right)^{٧}$ عند س = ٠

ب ص = (س^{٢} + ١)^{٥}(س^{٢} - س + ١)$^{-٤}$ عند س = ١

نشاط

(٢١) الربط بالحجوم يصب زيت بمعدل ١٠سم^{٣}/ث فى برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠سم.
أوجد معدل ارتفاع الزيت فى البرميل.

٣ – ٤ مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- مشتقة الدوال المثلثية
  - د(س) = جا س
  - د(س) = جتا س
  - د(س) = ظا س
  - د(س) = ظتا س
  - د(س) = قا س
  - د(س) = قتا س

المصطلحات الأساسية

- مشتقة *Derivative*
- دالة مثلثية *Trigonometric Function*

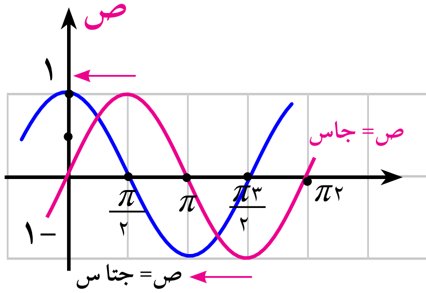
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

استكشف

في دراستنا هذه تكون قياسات الزوايا بالتقدير الدائرى.

يوضح الشكل المقابل منحنى دالة الجيب ص = جا س وعند إزاحته إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ يرسم منحنى دالة جيب التمام ص = جتا س



كما أن : جتا س = جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$ = جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$، لذلك يكتفى بإيجاد مشتقة جا س باستخدام التعريف واستنتاج باقى المشتقات المثلثية الأخرى.

مشتقات الدوال المثلثية *Derivatives of Trigonometric Function*

تعلم

مشتقة دالة الجيب

(١) إذا كانت د(س) = جا س **فإن** د̀(س) = جتا س

$\because$ د(س) = جا س ، د(س + هـ) = جا (س + هـ)

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س جتا هـ} + \text{جتا س جاهـ} - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جتا س جا هـ}}{\text{هـ}} + \frac{\text{جا س (جتا هـ} - ١)}{\text{هـ}} \right]$$

$$= \text{جتا س} \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} + \text{جا س} * \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا هـ} - ١}{\text{هـ}}$$

$$= \text{جتاس} \times ١ + \text{جا س} \times ٠ = \text{جتا س}$$

أى أن : $\boxed{\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{جاس}) = \text{جتاس}}$

✳ (البرهان غير مقرر على الطالب)

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإن :

$\frac{ء}{ء س}$ (جا ع) = جتا ع . $\frac{ء ع}{ء س}$ [قاعدة السلسلة]

مثال

① أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتى :

أ ص = ٥ جا س ب ص = س^{٣} جا س ج ص = ٢ جا (٣س + ٤)

الحل

أ ∵ ص = ٥ جا س ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ × $\frac{ء}{ء س}$ (جا س) = ٥ جتا س

ب ∵ ص = س^{٣} جا س ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = س^{٣} × $\frac{ء}{ء س}$ (جا س) + جا س × $\frac{ء}{ء س}$ (س^{٣})

= س^{٣} جتا س + ٣ س^{٢} جا س

ج ∵ ص = ٢ جا (٣س +٤)

بوضع ع = ٣س + ٤ فتكون : ص = ٢ جا ع

∴ $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٣ ، $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ٢ جتا ع وبتطبيق قاعدة السلسلة ($\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ع}$ × $\frac{ء ع}{ء س}$)

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا ع × ٣ = ٢ جتا (٣س + ٤) × ٣ = ٦ جتا (٣س + ٤)

ويمكن إيجاد $\frac{ء ص}{ء س}$ مباشرة باستخدام التعميم السابق كالآتي:

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ × جتا (٣ س + ٤) × ٣ = ٦ جتا (٣ س + ٤)

حاول أن تحل

① أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتى :

أ ص = س^{٢} + جا س ب ص = جا $\frac{\pi}{٤}$ - ٧ جا س ج ص = ٥ جا (٣- ٢س)

تعلم

(٢) مشتقة دالة جيب التمام

إذا كانت ص = جتا س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = - جا س

(٣) مشتقة دالة الظل

إذا كانت ص = ظا س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ س

لاحظ أن:

(١) $\frac{ء}{ءس}$ (جتا س) = $\frac{ء}{ءس}$ [جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)]

= جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) × -١

= - جا س

(٢) $\frac{ء}{ءس}$ (ظا س) = $\frac{ء}{ءس}$ ($\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$)

= $\frac{\text{جتا س × جتا س - (-جا س) × جا س}}{\text{جتا}^٢ \text{ س}}$

= $\frac{\text{جتا}^٢ \text{ س + جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢ \text{ س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}}$ = قا^٢ س

مثال

(٢) أوجد المشتقة الأولى لكل من :

أ ص = ٢ جتاس - ظا ٥س ب ص = ظا (١ - س^٢) ج ص = جتا^٣ (٤س^٢ -٧)

الحل

أ ∵ ص = ٢ جتاس - ظا ٥س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (- جا س) - قا^٢ ٥ س * ٥ = - ٢ جا س - ٥ قا^٢ ٥ س

ب ∵ ص = ظا (١ - س^٢) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ (١- س^٢) × -٢س = -٢س قا^٢(١- س^٢)

ج ∵ ص = جتا^٣ (٤س^٢ -٧) بفرض ص = جتا^٣ ع حيث ع = ٤س^٢ -٧

∴ $\frac{ءص}{ءع}$ = ٣ جتا^{٢}ع × - جا ع = -٣ جا ع جتا^٢ ع ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٨ س

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ = - ٢٤س جا ع جتا^{٢}ع

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = - ٢٤ س جا (٤س^٢ - ٧) جتا^٢ (٤س^٢ -٧)

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من:

أ ص = ٢ ظا٣س ب ص = ٢ جتا (٤ -٣س^٢) ج ص = ٢ جا س جتا س

د ص = ٢ س ظاس هـ ص = ظا^٢ ٣ س و ص = ظا ٤س^٣

مثال

(٣) إذا كان $\text{ص} = \dfrac{\text{جتا س}}{\text{١ - جا س}}$ فأثبت أن $(\text{١ - جا س})\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١}$ ثم أوجد $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عندما $\text{س} = \dfrac{\pi}{\text{٦}}$

الحل

$\because \text{ص} = \dfrac{\text{جتا س}}{\text{١ - جا س}}$ $\qquad \therefore \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{(\text{١ - جاس})(\text{-حاس}) - \text{جتا س}(\text{- جتا س})}{(\text{١ - جا س})^{\text{٢}}}$

$\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{\text{- جا س + جا}^{\text{٢}}\text{س + جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{(\text{١ - جا س})^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{١ - جا س}}{(\text{١ - جا س})^{\text{٢}}}$

$\therefore \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{\text{١}}{\text{١ - جا س}}$ أي أن: $(\text{١ - جا س})\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١}$

عندما $\text{س} = \dfrac{\pi}{\text{٦}}$ فإن $\left(\text{١ - جا } \dfrac{\pi}{\text{٦}}\right)\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١}$

$\left(\text{١} - \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\right)\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١}$ $\qquad \therefore \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{٢}$

تذكر أن

$\text{جا}^{\text{٢}}\text{ س + جتا}^{\text{٢}}\text{ س} = \text{١}$

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت $\text{ص} = \text{٢س جا س جتا س}$ **فأثبت أن:** $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س}$

(٤) مشتقة دالة ظل تمام الزاوية

إذا كانت $\text{ص} = \text{ظتا س}$ حيث $\text{س} \in \text{ع}$ ، $\text{س} \neq \text{ن}\pi$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$

فإن: $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{ظتا س}) = \text{- قتا}^{\text{٢}}\text{س}$

(٥) مشتقة القاطع

إذا كانت $\text{ص} = \text{قا س}$ حيث:

$\text{س} \in \text{ع}$ ، $\text{س} \neq \dfrac{(\text{٢ن + ١})\pi}{\text{٢}}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$

فإن:

$\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{قاس}) = \text{قا س ظا س}$ (تحقق من ذلك)

(٦) مشتقة قاطع التمام

إذا كانت $\text{ص} = \text{قتا س}$ حيث

$\text{س} \in \text{ع}$ ، $\text{س} \neq \text{ن}\pi$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$

فإن: $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{قتا س}) = \text{- قتا س ظتا س}$ تحقق من ذلك

مثال

① أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ ص = ٣ س^{٥} + ٤ ظتا س

ب ص = ٣ قا س - ٥ ظا س

ج ص = س^{٣} قتا س

د ص = $\frac{١ - ظتا س}{١ + ظتا س}$

الحل

أ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ × ٥س^{٤} + ٤ (- قتا^{٢} س) = ١٥ س^{٤} - ٤ قتا^{٢}س

ب $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ (قا س ظا س) - ٥ قا^{٢}س = قاس [٣ ظا س - ٥ قا س]

ج $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} قتا س + س^{٣} (- قتا س ظتا س) = س^{٢} قتاس [٣ - س ظتا س]

د $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(١ + ظتا س) (قتا^{٢}س) - (١ - ظتاس) (- قتا^{٢}س)}{(١ + ظتا س)^{٢}}$

= $\frac{قتا^{٢}س[١ + ظتا س + ١ - ظتا س]}{(١ + ظتا س)^{٢}}$ = $\frac{٢ قتا^{٢} س}{(١ + ظتا س)^{٢}}$

حاول أن تحل

④ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت ص تساوى:

أ ٢ جا س - ٣ ظتا س

ب جتا س + ٤ قا س

ج قا س ظا س

د قتا س ظتا س

هـ $\frac{قا س}{١ + قا س}$

و $\frac{١ - قتا س}{١ + قتا س}$

تمارين (٣ - ٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت : ص = جا (٢ س+٥) فإن ص َ=

أ ٢ جتا ٢س ب - ٢ جتا ٢ س ج جتا (٢ س + ٥) د ٢ جتا (٢س +٥)

(٢) إذا كانت ص = ٣س - جتا ٢ س فإن صَ=

أ ٣ - جا ٢ س ب ٣ + جا ٢ س ج ٣ + ٢ جا ٢ س د ٣ - ٢ جا ٢ س

(٣) إذا كانت ص = ٣ جتا (٢ - ٤س) فإن صَ=

أ ٤ جا (٢ - ٤س) ب ١٢ جا (٢ - ٤س) ج - ٦ جا (٢ - ٤س) د - ١٢ جا (٢ - ٤س)

(٤) إذا كانت د(س) = ظا (٥س - π) فإن دَ ($\frac{\pi}{٤}$) =.....

أ ٥ ب ٥$\sqrt{٢}$ ج ١٠ د ١٠$\sqrt{٣}$

أكمل كلًّا ممايأتي:

(٥) $\frac{ء}{ء س}$ (جتا س - جا س) = ...

(٦) $\frac{ء}{ء س}$ (ظا ٣ س^{٢}) = ...

(٧) $\frac{ء}{ء س}$ (حتا٢π) = ...

(٨) $\frac{ء}{ء س}$ (جتا^{٢} س + جا^{٢} س) = ...

(٩) $\frac{ء}{ء س}$ (س جتا س) = ...

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل ممايأتى:

(١٠) ص = جا (٤س + ٧)

(١١) ص = جا (س^{٢} + ٣)

(١٢) ص = جتا (٥س + ٣)

(١٣) ص = ٣ ظا (٢س + ٣)

(١٤) ص = ظا (- ٥س^{٢} + ١٩)

(١٥) ص = $\frac{\text{طاس}}{\text{س}}$

(١٦) ص = س جا (٣ س - ٢)

(١٧) ص = $\frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$

(١٨) ص = س^{٢} جا (٢س^{٢} + ٥)

(١٩) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتاس}}$

(٢٠) ص = قا^{٢}س - ١

(٢١) ص = جا ($\frac{١}{\text{س}^{٢}}$)

(٢٢) ص = ظا $\sqrt{س}$

(٢٣) ص = ٤ جتا^{٥}س

(٢٤) ص = ٤ س + ٥ جا٤ س

(٢٥) ص = س^{٣} - ٢ قا س

(٢٦) ص = قتا (٢ - ٣س)

(٢٧) ص = ظتا (π - $\frac{١}{س}$)

(٢٨) ص = جتا ٢ س - ٥ ظتا ٣ س

(٢٩) ص = ظا ٣ س - قتا ٢ س

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية:

(٣٠) ص = ٥ - جا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٣١) ص = جا س + جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٣٢) ص = س جتا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٣٣) ص = س $\sqrt{جا س}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٣٤) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) لكل مما يأتي:

أ) ص = ٢ ظتا س + $\sqrt{٢}$ قا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ب) ص = ٣ ظا س - قتا^{٢} س عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$

(٣٥) أثبت أن المماس للمنحنى ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$.

(٣٦) إذا كانت ص = جا^{٢}س - جتا^{٢}س أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جا ٢ س

(٣٧) إذا كانت ص = (جا س + جتا س)^{٢} أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جتا ٢ س

(٣٨) إذا كانت ص = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$ أثبت أن (١ + جتا س) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

(٣٩) إذا كانت ص = قا ٤ س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

تطبيقات على المشتقة

٣ـ٥

Application of the Derivative

سوف تتعلم

- ميل المماس لمنحنى الدالة
- ميل العمودى

المصطلحات الأساسية

- ميل المماس *Slope of the tangent*
- ميل العمودى *Slope of the normal*
- الإزاحة *Displacement*
- السرعة *Velocity*
- العجلة *Acceleration*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تذكر أن

ميل المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ يساوى $\frac{-أ}{ب}$

تمهيد

تتطلب التطبيقات الهندسية على مشتقة الدالة إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تقع عليه كذلك تذكر العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين.

ميل المماس والعمودى على منحنى

Slope of the Tangent and the Normal to a Curve

علمت فى هذه الوحدة أن:

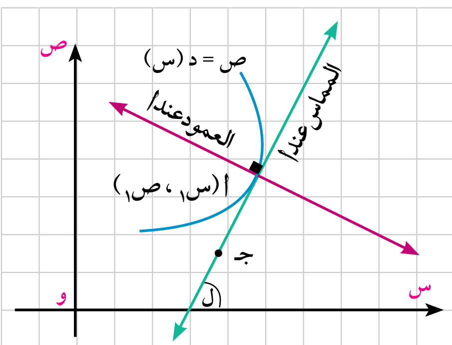
➢ المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د(س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه.

أى أن: ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة أ (س$_١$، ص$_١$) الواقعة عليه

$= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١، ص_١)}$.

ويكون

ظا ل $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١، ص_١)}$



حيث ل قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

لاحظ أن:

إذا كان م$_١$، م$_٢$ ميلى مستقيمين معلومين ل$_١$، ل$_٢$ فإن:

➢ ل$_١$//ل$_٢$ إذا وفقط إذا كان م$_١$ = م$_٢$ **(شرط التوازى)**

➢ ل$_١$⊥ل$_٢$ إذا وفقط إذا كان م$_١$ م$_٢$ = -١ **(شرط التعامد)**

وعلى ذلك فإن :

ميل العمودى على المنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) الواقعة عليه = $-\frac{١}{\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١، ص_١)}}$

مثال

(١) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = $س^٣ - ٤س + ٣$ والتى يصنع عندها المماس زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

∵ ص = $س^٣ - ٤س + ٣$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - ٤$

∴ المماس يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ ميل المماس = ظا ١٣٥ = -١

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - ٤ = -١$ ∴ $٣س^٢ = ٣$ ∴ س = ±١

عندما س = -١ ∴ ص = $(-١)^٣ - ٤(-١) + ٣ = ٦$

، عندما س = ١ ∴ ص = ١ - ٤ + ٣ = ٠

∴ النقط هى (-١ ، ٦) ، (١ ، ٠)

حاول أن تحل

(١) أوجد النقط التى تقع على المنحنى ص = $س^٢ - ٢س + ٣$ والتى عندها يكون المماس للمنحنى:

أ) موازيًا محور السينات ب) عموديًّا على المستقيم س - ٤ ص + ١ = ٠

مثال

(٢) أوجد ميل العمودى على المنحنى ص = ظا $(\pi - \frac{٢}{٣}س)$ عند النقطة $(\pi، \sqrt{٣})$

الحل

∵ ص = ظا $(\pi - \frac{٢}{٣}س)$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٢}{٣}$ قا$^٢(\pi - \frac{٢}{٣}س)$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(\pi، \sqrt{٣}) = -\frac{٢}{٣}$ قا$^٢ (\pi - \frac{٢\pi}{٣})$

$= -\frac{٢}{٣}$ قا$^٢ \frac{\pi}{٣} = \frac{-٢}{٣} \times ٤ = \frac{-٨}{٣}$

ميل العمودى عند النقطة $(\pi، \sqrt{٣}) = \frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها العمودى على المنحنى ص = $\sqrt{٢س^٢ + ٧}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (-٣، ٥) لأقرب دقيقة.

تفكير إبداعى:

أوجد قيمة أ التى تجعل المستقيم ص = ٤س + أ مماسًا للمنحنى ص = $س^٢ + ٥$

تعلم

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى *Equation of the Tangent and the Normal to a Curve*

إذا كانت ($س_1$، $ص_1$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة فإن:

١ - معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ($س_1$، $ص_1$) هى :

ص - $ص_1$ = م (س - $س_1$)

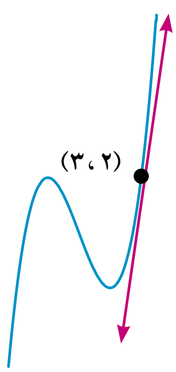
٢ - معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة ($س_1$، $ص_1$) هى :

ص - $ص_1$ = $\frac{-1}{م}$ (س - $س_1$)

مثال

٣ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢$س^3$ - ٤$س^2$ + ٣ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ٢

الحل



∵ ص = ٢ $س^3$ - ٤$س^2$ + ٣

∴ عند س = ٢ ∴ ص = ٢$(٢)^3$ - ٤$(٢)^2$ + ٣ = ٣

∴ النقطة (٢ ، ٣) تقع على المنحنى

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦$س^2$ - ٨س ∴ $[\frac{ءص}{ءس}]_{(٢، ٣)}$ = ٦$(٢)^2$ - ٨(٢) = ٨

∴ ميل المماس = ٨ وتكون معادلته

ص - ٣ = ٨ (س - ٢) أى ص - ٨ س + ١٣ = ٠

ميل العمودى = $\frac{-1}{8}$ وتكون معادلته

ص - ٣ = $\frac{-1}{8}$ (س -٢) أى ٨ ص + س - ٢٦ = ٠

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = $\frac{س+٣}{س+١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١.

هل النقطة أ (-٣، ٤) تقع على المماس ؟ فسر إجابتك

مثال

٤ أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٤ س - ظا س عند النقطة ($\frac{\pi}{4}$ ، د($\frac{\pi}{4}$))

الحل

$\because$ ص = ٤س - ظا س $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ - قا^{٢}س

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ م = ٤ - قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = ٢

وبالتعويض عن س= $\frac{\pi}{٤}$ في معادلة المنحنى نجد أن: ص = π- ظا $\frac{\pi}{٤}$ = π - ١

أي أن: النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π -١) تقع على المنحنى

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π -١) هي: ص - (π -١) = ٢ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

ص - π + ١ = ٢ س - $\frac{\pi}{٢}$ ص = ٢ س + $\frac{\pi}{٢}$ - ١

حاول أن تحل

٤ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = س جا٢ س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

مثال

٥ إذا كان المنحنى ص = أس^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨س +٥ عند النقطة (-١، -٣) فأوجد قيمتى أ ، ب.

الحل

$\because$ النقطة (-١ ، -٣) تقع على المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

$\therefore$ -٣ = أ(-١)^{٣} + ب(-١)^{٢} أى أ-ب = ٣ (١)

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

$\because$ المستقيم ص = ٨س + ٥ مماس للمنحنى عند النقطة (-١، -٣)

$\therefore$ $[\frac{ءص}{ءس}]_{(-١ ، -٣)}$ = ميل المستقيم = ٨

$\therefore$ ٣ أ (-١)^{٢} + ٢ ب(-١) = ٨ أى ٣ أ - ٢ ب = ٨ (٢)

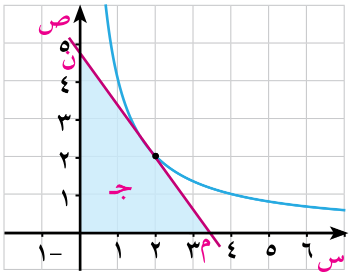
بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن: أ = ٢ ، ب = -١

حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب عند النقطة (١، ٣) الواقعة عليه يساوي ٥

مثال الربط بالمساحات

٦ إذا كان المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ عند النقطة جـ فى الربع الأول يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين م، ن فأثبت أن مساحة $\triangle$ م و ن ثابتة، ولا تعتمد على موضع النقطة جـ الواقعة على منحنى الدالة.



الحل

∵ ص = ٤س$^{-١}$

نفرض أن جـ (أ ، $\frac{٤}{أ}$)   ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٤}{س^٢}$

∴ ميل المماس عند جـ (أ ، $\frac{٤}{أ}$) يساوي $\frac{-٤}{أ^٢}$

معادلة المماس عندها هي : ص - $\frac{٤}{أ}$ = - $\frac{٤}{أ^٢}$ (س - أ)

بالضرب × أ^٢ ∴ أ^٢ ص - ٤ أ = -٤س + ٤ أ

∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ هي أ^٢ ص + ٤ س = ٨ أ

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مع محور السينات فإن ص = ٠

∴ س = ٢ أ   أي أن و م = ٢أ من الوحدات

لإيجاد نقط تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مع محور الصادات فإن س = ٠

∴ ص = $\frac{٨}{أ}$ أي أن و ن = $\frac{٨}{أ}$ من الوحدات

∴ مساحة△ م و ن = $\frac{١}{٢}$ × ٢ أ × $\frac{٨}{أ}$ = ٨ وحدة مربعة

وهي كمية ثابتة لاتعتمد على إحداثيي نقطة جـ الواقعة على المنحنى.

٩ حاول أن تحل

الربط بالمساحات:

٦ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى ص = س^٢ - ٦س + ١٣ عند النقطة (٤، ٥) الواقعة عليه.

تمـــارين (٣ – ٥)

١ أكمل كلًّا مما يأتي:

أ ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند أي نقطة عليه هو ....

ب ميل المماس للمنحنى ص = جتا س عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ يساوي ....

جـ إذا كان المستقيم ص = ٨ - ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣، -١) فإن د$^/$(٣) يساوي ....

د المماس للمنحنى ص = (٣ س -٥)^٣ عند النقطة (٢،١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوي ....

هـ ميل العمودى على المنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى ....

و معادلة المماس للمنحنى ص = (س-١)^{٢} عند النقطة (٢ ، ١) هى ....

أجب عن ما يأتي:

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ -١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س =١

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\frac{س+٣}{س-٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣، ٦) ....

٤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} - ٦س^{٢} - ١٥س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات .

٥ أوجد النقط على المنحنى ص =٣س^{٣} - ١١س + ٥ والتى يكون عندها المماس

أ موازيًا للمستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠ ب عموديًّا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

جـ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها =-١١

٦ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (س - ٢) (س + ١) عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

٧ أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى ص = $\frac{س^{٢} - ١}{٢ - س^{٢}}$ عندما س = ٠

٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢ جاس + جتا س عند النقطة (٠، ١).

٩ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى ص = س^{٢} + س -١ عند النقطة (١، ١) يكون عموديًّا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ - $\sqrt{س}$ عند نفس النقطة .

التكامل

٣-٦

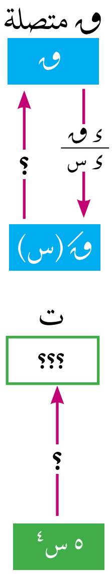
Integration

سوف تتعلم

- المشتقة العكسية للدالة
- تكامل بعض الدوال الجبرية
- تكامل الدوال المثلثة

استكشف

درست الاشتقاق وأصبحت قادرًا على إيجاد المشتقة قَ إذا علمت الدالة ق حيث قَ(س) = $\frac{د}{د س}$ ق(س) وسوف نتناول فى هذا الدرس عملية عكسية لعملية الاشتقاق بمعنى أن إذا عُلِمَت المشتقة قَ **فكيف نحصل على الدالة الأصلية ؟**



لإيجاد دالة أصلية مشتقتها بالنسبة إلى س هى ٥س^{٤}

نفرض د(س) = ٥س^{٤}

ولنبدأ بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

ن س$^{ن-١}$ = ٥س^{٤} ∴ ن - ١ = ٤ ، ن = ٥

فيكون ت(س) = س^{٥} أو س^{٥}+ ٣ أو س^{٥} -٢

تسمى الدالة ت دالة المشتقة العكسية أو الدالة الاصلية للدالة د

المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسية *Antiderivative*
- تكامل *Integraation*

تعلم

المشتقة العكسية *Anti derivative*

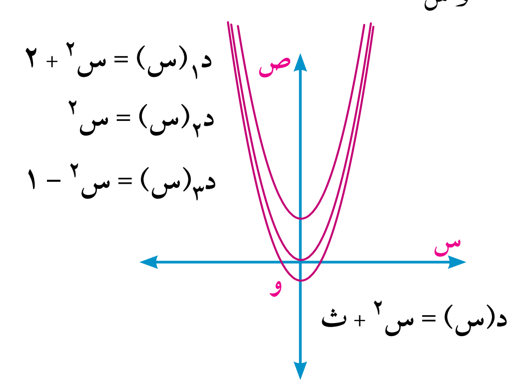
إذا كانت ص = س^{٢}

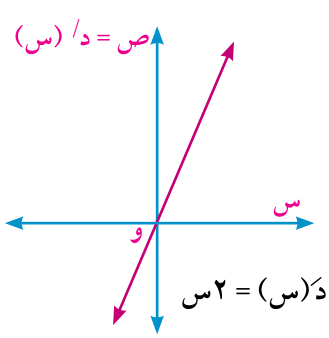
فإن المشتقة الأولى هى $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س

أما استنتاج الدالة ص من الدالة المشتقة $\frac{د ص}{د س}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية.

فمثلاً س^{٢} هى مشتقة عكسية للدالة ٢س لاحظ أن ٢س لها العديد من المشتقات العكسية منها س^{٢} - ١ ، س^{٢} + ٢ ، س^{٢} + ث حيث ث ∈ ع ، ... جميعها مشتقتها ٢ س.

∴ $\frac{د}{د س}$ (س^{٢} + ث) = ٢ س حيث (ث) مقدار ثابت والأشكال الآتية توضح ذلك.





الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تعريف

يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت َ(س) = د(س) لكل س فى مجال د.

مثال

(١) أثبت أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س^{٣}.

الحل

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون ت َ(س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤س^{٣} = ٢ س^{٣}

∴ ت َ(س) = د(س) أى أن الدالة(ت) مشتقة عكسية للدالة د

حاول أن تحل

(١) بين أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س^{٥}

تفكير ناقد:

ما العلاقة بين ت$_{١}$، ت$_{٢}$ إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة د؟

التكامل غير المحدد *Indefinite Integral*

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة، ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س) ء س

[ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف

إذا كان ت َ(س) = د(س) فإن $\int$ د(س) ء س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت إختيارى (ثابت التكامل).

لاحظ أن:

$\frac{ء}{ء س}$ (س^{٣} + ٥) = ٣س^{٢} ∴ $\int$ ٣ س^{٢} ء س = س^{٣} + ث

$\frac{ء}{ء س}$ (س^{٥} - ٣) = ٥س^{٤} ∴ $\int$ ٥ س^{٤} ء س = س^{٥} + ث

$\frac{ء}{ء س}$ (٢س^{٧}) = ١٤س^{٦} ∴ $\int$ ١٤ س^{٦} ء س = ٢س^{٧} + ث

ولتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

(٢) تحقق من صحة كل مايأتى:

أ) $\int$ س^{٧} ء س = $\frac{١}{٨}$ س^{٨} + ث

ب) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ ء س = $\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ + ث

الحل

أ $\because \frac{ء}{ءس}\left(\frac{1}{8}س^{8}+ث\right)=س^{7}$ $\therefore \int س^{7}\,ءس=\frac{1}{8}س^{8}+ث$

ب $\because \frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{1+س^{2}}+ث\right)=\frac{2س}{2\sqrt{1+س^{2}}}=\frac{س}{\sqrt{1+س^{2}}}$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{1+س^{2}}}\,ءس=\sqrt{1+س^{2}}+ث$

حاول أن تحل

٢ تحقق من صحة كل ممايأتي:

أ $\int س^{-4}\,ءس=\frac{-1}{3}س^{-3}+ث$

ب $\int س\sqrt{1+س^{2}}\,ءس=\frac{1}{3}(1+س^{2})^{\frac{3}{2}}+ث$

قاعدة:

$\int س^{ن}\,ءس=\frac{س^{ن+1}}{ن+1}+ث$ حيث ث ثابت، $ن\neq -1$

مثال

٣ أوجد:

أ $\int س^{5}\,ءس$

ب $\int س^{-3}\,ءس$

جـ $\int س^{\frac{2}{5}}\,ءس$

د $\int \frac{1}{\sqrt[5]{س^{3}}}\,ءس$

الحل

أ $\int س^{5}\,ءس=\frac{س^{5+1}}{5+1}+ث=\frac{1}{6}س^{6}+ث$

جـ $\int س^{\frac{2}{5}}\,ءس=\frac{1}{\frac{7}{5}}س^{\frac{2}{5}+1}+ث$

$=\frac{5}{7}س^{\frac{7}{5}}+ث$

ب $\int س^{-3}\,ءس=\frac{س^{-3+1}}{-2}+ث=-\frac{1}{2}س^{-2}+ث$

د $\int \frac{1}{\sqrt[5]{س^{3}}}\,ءس=\int س^{\frac{-3}{5}}\,ءس$

$=\frac{1}{\frac{2}{5}}س^{\frac{-3}{5}+1}+ث=\frac{5}{2}س^{\frac{2}{5}}+ث$

حاول أن تحل

٣ أوجد:

أ $\int س^{8}\,ءس$

ب $\int س^{\frac{2}{3}}\,ءس$

جـ $\int \sqrt[7]{س^{5}}\,ءس$

د $\int 7س^{\frac{7}{9}}\,ءس$

خواص التكامل: *Properties of Integration*

إذا كان د، ر دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فإن:

١- $\int \text{أ د(س) ء س} = \text{أ} \int \text{د(س) ء س}$ حيث أ ثابت $\neq ٠$

٢- $\int [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}] \text{ ء س} = \int \text{د(س) ء س} \pm \int \text{ر(س) ء س}$

مثال

٤ أوجد: أ $\int (\text{٤ س} + \text{٣س}^{٢}) \text{ ء س}$ ب $\int \frac{(\text{س}^{٢}+٢)^{٢}}{\text{س}^{٢}} \text{ ء س}$

الحل

أ $\int (\text{٤س} + \text{٣س}^{٢}) \text{ ء س}$

$= \int \text{٤س ء س} + \int \text{٣س}^{٢} \text{ ء س}$

$= ٤ \int \text{س ء س} + ٣ \int \text{س}^{٢} \text{ ء س}$

$= \frac{٤}{٢} \text{س}^{٢} + ٣ \times \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} + \text{ث}$

$= ٢ \text{ س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{ث}$

ب $\int \frac{(\text{س}^{٢}+٢)^{٢}}{\text{س}^{٢}} \text{ ء س}$

$= \int \frac{\text{س}^{٤} + \text{٤س}^{٢} + ٤}{\text{س}^{٢}} \text{ ء س}$

$= \int \text{س}^{٢} \text{ ء س} + \int \text{٤ ء س} + \int \text{٤س}^{-٢} \text{ ء س}$

$= \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} + \text{٤ س} - \text{٤س}^{-١} + \text{ث}$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ $\int (٢ + \sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}) \text{ ء س}$ ب $\int (\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \sqrt{\text{س}} + ٣) \text{ ء س}$

بعض قواعد التكامل: *Some rules of integration*

١- $\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}} \text{ ء س} = \frac{١}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$ ، ن $\neq -١$

٢- $\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}} \text{ دَ(س) ء س} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$، حيث ث ثابت، ن عدد نسبى $\neq -١$

تفكير ناقد:

هل يمكنك التحقق من صحة العلاقتين السابقتين عن طريق تعريف المشتقة العكسية؟ وضح ذلك.

مثال

٥ أوجد:

أ $\int \left((٣ - \text{٢س})^{٥} + ٣ \right) \text{ ء س}$ ب $\int \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)^{٤}} \text{ ء س}$

جـ $\int (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)^{-٧}\,(٢\text{س} - ٣)\, \text{ء س}$ 　　 د $\int (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{١١}\,(٣\text{س} - ١)\, \text{ء س}$

الحل

أ $\int \left((٣ - ٢\text{س})^{٥} + ٣\right) \text{ء س} = \int (٣ - ٢\text{س})^{٥}\, \text{ء س} + \int ٣\, \text{ء س}$

$= \dfrac{(٣ - ٢\text{س})^{٦}}{٦ \times -٢} + ٣\text{س} + \text{ث} = \dfrac{-١}{١٢}(٣ - ٢\text{س})^{٦} + ٣\text{س} + \text{ث}$

ب $\int \dfrac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)^{٤}}\, \text{ء س} = \int \dfrac{(\text{س} - ٢) + ٥}{(\text{س} - ٢)^{٤}}\, \text{ء س} = \int \dfrac{\text{س} - ٢}{(\text{س} - ٢)^{٤}}\, \text{ء س} + \int \dfrac{٥}{(\text{س} - ٢)^{٤}}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{س} - ٢)^{-٣}\, \text{ء س} + ٥\int (\text{س} - ٢)^{-٤}\, \text{ء س}$

$= \dfrac{(\text{س} - ٢)^{-٢}}{-٢ \times ١} + \dfrac{٥(\text{س} - ٢)^{-٣}}{-٣ \times ١} + \text{ث} = \dfrac{-١}{٢(\text{س} - ٢)^{٢}} - \dfrac{٥}{٣(\text{س} - ٢)^{٣}} + \text{ث}$

جـ $\int (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)^{-٧}\,(٢\text{س} - ٣)\, \text{ء س}$

$\because$ د(س) $= \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥$ ، $\because$ د̸(س) $= ٢\text{س} - ٣$

$\therefore \int (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)^{-٧}\,(٢\text{س} - ٣)\, \text{ء س} = \dfrac{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)^{-٦}}{-٦} + \text{ث}$

$= \dfrac{-١}{٦}(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)^{-٦} + \text{ث}$

د $\int (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{١١}\,(٣\text{س} - ١)\, \text{ء س}$

$\because$ د(س) $= ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١$ ، $\because$ د̸(س) $= \frac{١}{٢}(٦\text{س} - ٢)$

$\therefore \frac{١}{٢}\int (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{١١}\,(٦\text{س} - ٢)\, \text{ء س} = \frac{١}{٢}\, \dfrac{(٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{١٢}}{١٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٤}(٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{١٢} + \text{ث}$

٩ حاول أن تحل

٥ أوجد:

أ $\int (٣\text{س} + ٥)^{-٩}\, \text{ء س}$ 　　 ب $\int (\text{س} + ١)(\text{س} + ٣)^{٧}\, \text{ء س}$

جـ $\int (\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢)^{٩}\,(٢\text{س} + ٣)\, \text{ء س}$ 　　 د $\int \text{س}(٤\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٤)^{٥}\,(٢\text{س} - ١)\, \text{ء س}$

ابحث: من مصادر المعرفة والشبكة العنكبوتية عن $\int \dfrac{١}{\text{س}}\, \text{ء س}$

تكامل الدوال المثلثية

Integration of Some Trignometric Functions

١- $\int$ جاس ء س = − جتا س + ث

٢- $\int$ جتا س ء س = جا س + ث

٣- $\int$ قا^2 س ء س = ظا س + ث

٤- $\int$ قتا^2 س ء س = ـ ظتا س + ث

٥- $\int$ قا س ظا س ء س = قا س + ث

٦- $\int$ قتا س ظتا س ء س = ـ قتا س + ث

حيث ث ثابت إختيارى

تذكر أن

بعض العلاقات المثلثية

أ) جتا^2 س + جا^2 س =١

ب) جتا^2 س − جا^2 س
= جتا ٢ س

جـ) ١ + ظا^2 س = قا^2 س

د) ٢ جا س جتا س
= جا ٢ س

مثال

٦ أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ (س - جا س) ء س

ب) $\int$ (٤ جتا س + $\frac{١}{جتا^2 س}$ + ١) ء س

الحل

أ) $\int$ (س - جا س) ء س = $\frac{١}{٢}$ س^2 + جتا س + ث

ب) $\int$ (٤ جتا س + $\frac{١}{جتا^2 س}$ + ١) ء س = $\int$ (٤ جتا س + قا^2 س + ١) ء س

= ٤ جا س + ظا س + س + ث

حاول أن تحل

٦ أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ (٦ جتا س - ٨ جا س) ء س

ب) $\int$ (٣ + ٤ ظا^2 س) ء س

مثال جدول التكامل

٧ أوجد التكاملات التالية:

أ) $\int$ (جا س + جتا س) ء س

ب) $\int$ قا س (قا س - ظا س) ء س

جـ) $\int$ $\frac{١}{١ - جتا^2 س}$ ء س

د) $\int$ $\frac{جتا س}{١ - جتا^2 س}$ ء س

الحل

أ) $\int$ (جا س + جتا س) ء س = $\int$ جا س ء س + $\int$ جتا س ء س

= - جتا س + جا س + ث

ب) $\int$ (قا س - ظا س) قا س ء س = $\int$ قا^2 س ء س - $\int$ قا س ظا س ء س

= ظا س - قا س + ث

تذكر أن

جتا^2 س + جا^2 س = ١

١ + ظا^2 س = قا^2 س

ظتا^2 س + ١ = قتا^2 س

ج $\int \frac{1}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ء س} = \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ء س} = \int \text{قتا}^2\text{س}\,\text{ء س} = -\,\text{ظتا س} + \text{ث}$

د $\int \frac{\text{جتا س}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ء س} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ء س} = \int \frac{1}{\text{جا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\,\text{ء س}$

$= \int \text{قتا س ظتا س}\,\text{ء س} = -\,\text{قتا س} + \text{ث}$

حاول أن تحل

٧ أوجد:

أ $\int (\text{جا س} + \text{قا}^2\text{س})\,\text{ء س}$

ب $\int \text{قا س}\,(\text{جتا}^2\text{س} + \text{ظا س})\,\text{ء س}$

ج $\int \text{قتا س}\,(\text{ظتا س} - \text{قتا س})\,\text{ء س}$

د $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{1-\text{جا س}}\,\text{ء س}$

نتائج هامة:

١ - $\int \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ء س} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

٢ - $\int \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ء س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

٣ - $\int \text{قا}^2(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ء س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

٤ - $\int \text{قتا}^2(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ء س} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظتا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

٥ - $\int \text{قا}(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ظا}(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ء س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{قا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

٦ - $\int \text{قتا}(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ظتا}(\text{أ س} + \text{ب})\,\text{ء س} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{قتا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

حيث ث ثابت اختيارى

تفكير ناقد:

تحقق من صحة العلاقات السابقة بإيجاد المشتقة العكسية مستخدما قاعدة السلسلة.

مثال

٨ أوجد:

أ $\int \text{جتا}(2\text{س} + 3)\,\text{ء س}$

ب $\int \left(\text{قا}^2\frac{\text{س}}{2} - \text{جا}\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)\right)\text{ء س}$

الحل

أ $\int \text{جتا}(2\text{س} + 3)\,\text{ء س} = \frac{1}{2}\,\text{جا}(2\text{س} + 3) + \text{ث}$

ب $= \int \text{قا}^2\left(\frac{1}{2}\text{س}\right)\text{ء س} - \int \text{جا}\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)\text{ء س}$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2} - \left[\frac{-1}{-1}\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)\right] + \text{ث}$

$= 2\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right) + \text{ث}$

حاول أن تحل

٨ أوجد:

أ) $\int \text{جا}(\text{٣س} - ٥)\ \text{ى س}$

ب) $\int \text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٣} - ٢\right)\ \text{ى س}$

مثال

الصور القياسية للتكامل

٩ أوجد:

أ) $\int \text{جا}(\text{٢س} - ٥)\ \text{ى س}$

ب) $\int \text{قا}^{٢}(٥ - \text{٣س})\ \text{ى س}$

ج) $\int \text{قتا}^{٢}\left(\frac{\text{س} + ٣}{٢}\right)\ \text{ى س}$

د) $\int \text{قا ٢س ظا ٢س ى س}$

الحل

أ) $\int \text{جا}(\text{٢س} - ٥)\ \text{ى س} = -\frac{١}{٢}\ \text{جتا}(\text{٢س} - ٥) + \text{ث}$

ب) $\int \text{قا}^{٢}(٥ - \text{٣س})\ \text{ى س} = -\frac{١}{٣}\ \text{ظا}(٥ - \text{٣س}) + \text{ث}$

ج) $\int \text{قتا}^{٢}\left(\frac{١}{٢}\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)\ \text{ى س} = -٢\ \text{ظتا}\left(\frac{\text{س} + ٣}{٢}\right) + \text{ث}$

د) $\int \text{قا ٢س ظا ٢س ى س} = \frac{١}{٢}\ \text{قا ٢س} + \text{ث}$

حاول أن تحل

٩ أوجد:

أ) $\int (\text{جا ٣س} - \text{قا}^{٢}\text{٢س})\ \text{ى س}$

ب) $\int \text{٦ قا٢س}\ (\text{ظا٢س} + \text{جتا}^{٢}\text{٢س})\ \text{ى س}$

ج) $\int [١ + \text{ظتا}^{٢}(\text{٣س} - ١)]\ \text{ى س}$

د) $\int \frac{\text{جا}^{٢}(\text{٢س} - ٣)}{١ - \text{جتا}(\text{٢س} - ٣)}\ \text{ى س}$

معلومة إثرائية

التكامل المحدد

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{س})\ \text{ى س} = \text{د(ب)} - \text{د(أ)}$$

تمـــارين (٣ - ٦)

أكمل كلًّا مما يأتي:

١) المشتقة العكسية للدالة $(\text{٣س}^{٢} - \text{٢س} + ٥)$ هي..........

٢) $\int (\frac{٥}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{٥})\, \text{ى س} =$ ....

٣) $\int (\text{٤س} - \text{جا}\, \frac{\pi}{٣})\, \text{ى س} =$ ....

٤) $\int (\text{س} + ٥)^{٣}\, \text{ى س} =$ ....

٥) $\int (\text{س} + ٢)\, (\text{س}^{٢} + \text{٤س} - ٧)^{١١}\, \text{ى س} =$ ....

٦) $\int (\text{جتا س جتا}\, \frac{\pi}{٤} - \text{جا س جا}\, \frac{\pi}{٤})\, \text{ى س} =$ ....

٧) $\int \frac{\text{حتا}^{٢}\text{س}}{١ + \text{جا س}}\, \text{ى س} =$ ....

٨) $\int \text{٢ظا س قا}^{٢}\text{س ى س} =$ ....

احسب التكاملات الآتية :

٩) $\int \text{٩س}^{٨}\, \text{ى س}$

١٠) $\int \text{١٢س}^{-٢}\, \text{ى س}$

١١) $\int ٥\sqrt{\text{س}^{٣}}\, \text{ى س}$

١٢) $\int -\frac{٨}{٥}\, \text{ف}^{-٣}\, \text{ى ف}$

١٣) $\int ٢(\text{٣ع}^{٢} - ٥)\, \text{ى ع}$

١٤) $\int \text{٣س}^{٢} + \text{س} - ٢\,)\, \text{ى س}$

١٥) $\int (٣\sqrt{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}})\, \text{ى س}$

١٦) $\int (\text{أس}^{٢} + \text{٥س} + \text{جـ})\, \text{ى س}$

١٧) $\int \text{س}(\text{س} + ٣)\, \text{ى س}$

١٨) $\int \text{س}^{٢}\, (\text{٣س} - \frac{٥}{\text{س}})\, \text{ى س}$

١٩) $\int (\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)\, \text{ى س}$

٢٠) $\int (\text{س} - ٥)\, (\text{س} + ١)\, \text{ى س}$

٢١) $\int (\sqrt{\text{س}} - ١)^{٢}\, \text{ى س}$

٢٢) $\int (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٢}\, \text{ى س}$

٢٣) $\int \frac{\text{٢س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢}}\, \text{ى س}$

٢٤) $\int \frac{\text{س}^{٧} - \text{٤س}^{٥} + \text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}}\, \text{ى س}$

٢٥) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}\, \text{ى س}$

٢٦) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}\, \text{ى س}$

٢٧) $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ٤}\, \text{ى س}$

٢٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦}{\text{س} - ٢}\, \text{ى س}$

٢٩) $\int ٦(\text{س} - ٢)^{٥}\, \text{ى س}$

٣٠) $\int ٣(\text{س} + ٣)^{-٤}\, \text{ى س}$

٣١) $\int (٨ - \text{٣س})^{٤}\, \text{ى س}$

٣٢) $\int (\text{٢ع} - ٣)^{\frac{٧}{٣}}\, \text{ى ع}$

٣٣) $\int \frac{١٢}{(\text{٢س} - ٥)^{٤}}\, \text{ى س}$

٣٤) $\int \frac{٧}{\sqrt{\text{س} + ٤}}\, \text{ى س}$

٣٥) $\int (\text{س} - ١)\, (\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ١)\, \text{ى س}$

٣٦) $\int \sqrt{\text{س} - ٣}\, (\text{س} - ٣)^{٤}\, \text{ى س}$

(٣٧) $\int (\text{س}^{٢} - ٢)^{٢} \, \text{ء س}$

(٣٨) $\int \text{س}(٣\text{س}^{٢} - ٥)^{٣} \, \text{ء س}$

(٣٩) $\int \text{س}(٥\text{س}^{٢} + ٢)^{-٧} \, \text{ء س}$

(٤٠) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٤}+١)^{٦}} \, \text{ء س}$

(٤١) $\int (٧ \,\text{جا س} - ٢ \,\text{جتا س}) \, \text{ء س}$

(٤٢) $\int (\text{حا} \,٢\text{س} - ٣ \,\text{جتا س}) \, \text{ء س}$

(٤٣) $\int ٩(\text{جتا س} - \text{قا}^{٢}\, ٣\text{س}) \, \text{ء س}$

(٤٤) $\int (٣ + ٥\,\text{قا}^{٢}\text{س}) \, \text{ء س}$

(٤٥) $\int \text{جا}(٥\text{س} - ١) \, \text{ء س}$

(٤٦) $\int \text{جتا}(٢ - \text{س}) \, \text{ء س}$

(٤٧) $\int \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right) \, \text{ء س}$

(٤٨) $\int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س}) \, \text{ء س}$

(٤٩) $\int ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س} \, \text{ء س}$

(٥٠) $\int (٤ - \text{جا}^{٢}\text{س}) \, \text{ء س}$

(٥١) $\int \sqrt{٣} \,\text{جتا س} \, \text{ء س}$

(٥٢) $\int \text{قتا}^{٢}(٢\text{س} + ٣) \, \text{ء س}$

(٥٣) $\int \text{ظا س جتا س} \, \text{ء س}$

(٥٤) $\int (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}) \,\text{جتا}^{٢}\text{س} \, \text{ء س}$

تمـــاريـن عامة على الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ (حتا^{٢} س + جا^{٢} س) =

أ ١   ب ٠   ج س   د ٢(حتاس + جا س)

٢) إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}$ فإن د$'$(- ٤) =

أ $\frac{-٤}{٥}$ ب ٥   ج $\frac{١}{١٠}$ د $\frac{١}{١٠}$

٣) $\int$ (س^{٢} - ٣) ى س =

أ ٢س   ب س^{٣} - ٣س   ج $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س + ث   د ٢س - ٣ + ث

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا س - جا أ}}{\text{س - أ}}$ =

أ جتا س   ب ١   ج جتا أ   د جا (س - أ)

٥) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س - ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى

أ ١   ب $\frac{١}{١٢}$ ج ٥   د ١٠

٦) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ (٢ - ٣س)$^{-٢}$

أ ١٢ س$^{-٢}$ - ٢٧ س$^{-٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ (٢ - ٣س)$^{-١}$ ج ٦ (٢ - ٣س)$^{-٣}$ د - ٢ (٢ - ٣س)$^{-٣}$

٧) $\int \frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ [د(س)] ى س = ...

أ د(س)   ب د(س) + ث   ج $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ (د(س))   د $\int$ د(س) ى س

٨) ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = { س^{٢} - ١ عندما س < ٢ ، ٤س عندما س > ٢ }   عند س = ٢

ب د(س) = { س^{٢} + ١ عندما س ≥ ١ ، ٢س عندما س < ١ }   عند س = ١

٩ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل ممايأتى:

أ ص = س^{٥} - ٢ $\sqrt{\text{س}^{٣}}$

ب ص = (٤س^{٢}+١) (١ - ٤س^{٢})

جـ ص = $\sqrt[٣]{(\text{٢س}+١)^{٥}}$

د ص = (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢)^{٥}

١٠ إذا كانت ص = س جا س - ٣ جتا س فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

١١ إذا كان ص = (ع -١)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٣ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

١٢ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = (س - ٣)^{٢} - ١ والتي عندها المماس يوازي المستقيم ٢س + ص - ٣ = ٠

١٣ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢}+ أس + ب يساوى -١ عند النقطة (٢، -٢) أوجد قيمة كل من أ ،ب .

أوجد معادلة المماس لمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

١٤ ص = $\sqrt{\text{س}}$ + $\frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}$ عند النقطة (٤، ٤)

١٥ ص = (س^{٢} + س) (س^{٣} + ٥) عند النقطة (-٢، -٦)

١٦ ص = $\frac{\text{١ + جا س}}{\text{١ - جا س}}$ عند النقطة (π ، ١)

أوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

١٧ ص = ($\frac{\text{س + ٢}}{\text{س - ٢}}$) عند النقطة (٣، ٥)

١٨ ص = ظا س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$، ١)

أوجد التكاملات الآتية:

١٩ $\int$ (س^{٢} - ٣س - ١) ءس

٢٠ $\int$ ($\frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}$ + $\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$) ءس

٢١ $\int$ (٤ - ٣س)^{٧} ءس

٢٢ $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} ءس

٢٣ $\int$ (جتا س - جا س)(جا س + جتا س)^{٩} ءس

٢٤ $\int$ $\frac{\text{س + ٢}}{(\text{س + ٣})^{٥}}$ ءس

٢٥ أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ (س^{٣} + $\sqrt{\text{س}}$) ءس

ب $\int$ (س^{٢} + ١)^{٢} ءس

جـ $\int$ س^{٢} (س^{٢} - ٣) ءس

د $\int$ ٣(٣ س +١)^{٣} ءس

هـ $\int$ ٢س (س^{٢} - ٤)^{٣} ءس

و $\int$ $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{(\text{س}^{٣} - ٣\text{س})^{٢}}$ ءس

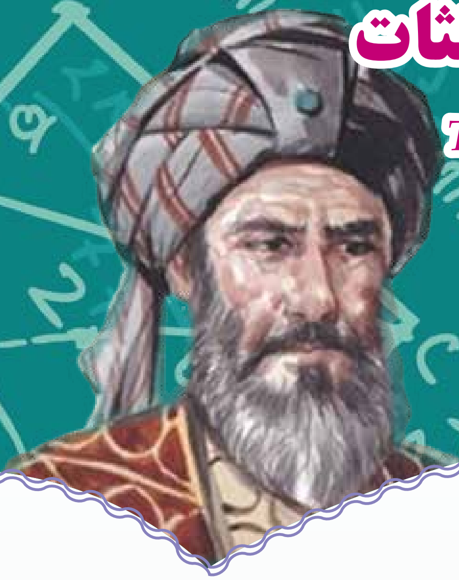
ز $\int$ (جتا ٢س - س) ءس

ح $\int$ (س^{٢} - ٣س + ١)^{٣} (٤س - ٦) ءس

الوحدة
الرابعة

حساب المثلثات

Trigonometry



مقدمة الوحدة

عاش محمد بن جابر بن سنان أبو عبدالله البتانى ما بين (٢٣٥ - ٣١٧هـ) الموافق (٨٥٠ - ٩٢٩م) وكان من مشاهير الفلكيين والرياضيين، وقد اهتم اهتمامًا كبيرًا بعلم حساب المثلثات وفصله كعلم مستقل عن علم الفلك، وهو أول من أدخل علم الجبر على حساب المثلثات، كما ألف جداول لجيب التمام (جتا) وجيب الزاوية (جا) وظل تمام الزاوية (ظتا)، وظل الزاوية (ظا) من صفر إلى تسعين درجة، وهذه الجداول لا تزال تستخدم حتى الآن مع تعديلات قليلة، كما طور كثيرًا من المتطابقات المثلثية، وقد درس محمد بن يحيا بن إسماعيل بن العباس أبو الوفا البوزجانى (٣٢٨ - ٣٨٨ هـ) الموافق (٩٤٠ - ٩٩٨م) مؤلفات البتانى فى علم حساب المثلثات دراسة جيدة؛ وأوضح النقاط الغامضة منها وقد ابتكر مقلوب جيب التمام (قا)، ومقلوب الجيب (قتا)، كما ألف جداول لكل من جا، ظا لكل عشر دقائق وله متطابقات مثلثية معروفة باسمه مثل:

جا أ = ٢جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ظا أ = $\frac{جاأ}{جتاأ}$ ، قا^{٢} أ = ١ + ظا^{٢}أ ، قتا أ = ١ + ظتا^{٢}أ وغيرها.

وتتناول هذه الوحدة دراسة تطبيقات حياتية تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق عملى على قاعدتى الجيب وجيب التمام ، وكذلك دراسة المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع وفرق زاويتين وضعف الزاوية .

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يحل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض والاتجاهات.
- يستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- يتعرف ويستنتج المتطابقات المثلثية الخاصة بضعف الزاوية ونصف الزاوية.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل مسائل على المتطابقات المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- زاوية Angle
- زاوية ارتفاع Angle of Elevation
- زاوية انخفاض Angle of Depression
- دالة مثلثية Trigonometric Function
- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين Trigonometric Functions of the sum of Measures of Two Angles
- الدوال المثلثية للفرق بين قياسى زاويتين Trigonometric Function of the Difference Between the Measures of Two Angles
- الدوال المثلثية لضعف الزاوية Trigonometric Functions of Double – Angle
- الدوال المثلثية لنصف الزاوية Trigonometric Functions of Half – an Angle

دروس الوحدة

الدرس (٤ – ١): زوايا الارتفاع والانخفاض.

(تطبيقات على حل المثلثات)

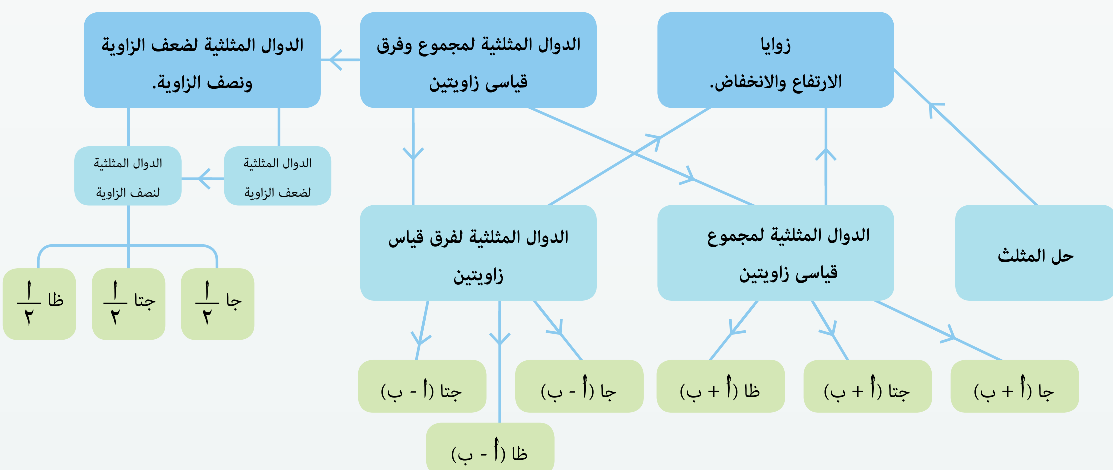
الدرس (٤ – ٢): الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.

الدرس (٤ – ٣): الدوال المثلثية لضعف الزاوية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية– الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

مخطط تنظيمى للوحدة



٤-١ زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

Angles of elevation and of depression applications of solving the triangle

سوف تتعلم

- مفهوم زاوية الارتفاع
- مفهوم زاوية الانخفاض.
- حل تطبيقات على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

المصطلحات الأساسية

- زاوية Angle
- زاوية ارتفاع Angle of Elevation
- زاوية انخفاض Angle of Depression

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

نشاط

تعلمت مسبقًا زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية، حيث أمكنك إيجاد ارتفاع مئذنة عن سطح الأرض وأنت تبعد عنها مسافة معلومة دون أن تقوم بالقياس الفعلى لطول هذه المئذنة.

والآن بعد دراستك لقانوني (قاعدتى) الجيب وجيب التمام، وحل المثلث بوجه عام باستخدام هذين القانونين، يمكننا دراسة تطبيقات أكثر عمقًا على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض بوجه عام.

- ابحث فى مراجع الرياضيات بمكتبتك المدرسية أو باستخدام الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) عن مواقف متنوعة يستخدم فى حلها زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث بوجه عام، ثم اكتب قائمة بهذه المواقف، ودون ملاحظاتك على كل منها.

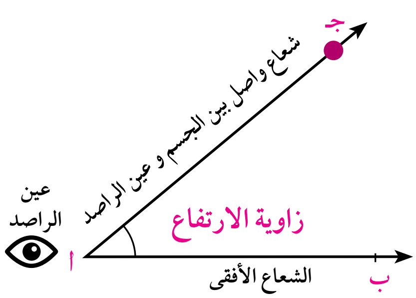
والآن سوف نراجع معك مفهوم زاويتى الارتفاع والانخفاض.

زوايا الارتفاع والانخفاض *angles of elevation and depression*

تعلم

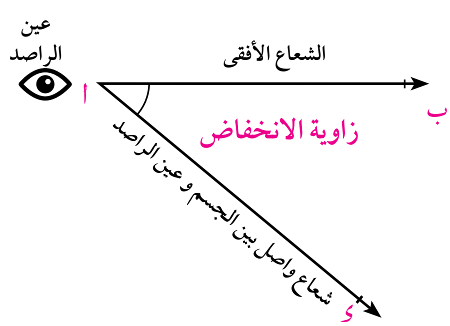
زاوية الارتفاع *angle of elevation*

إذا رصد شخص أ نقطة جـ أعلى من مستوى نظره الأفقى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ،فإن الزاوية بين $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ تسمى زاوية ارتفاع جـ عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.



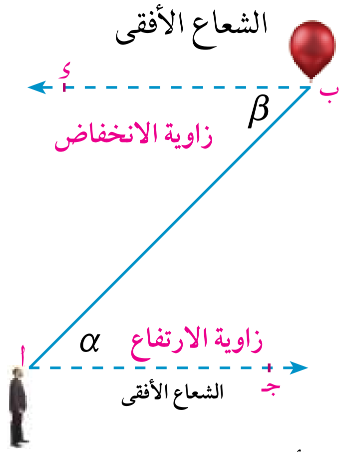
زاوية الانخفاض *angle of depression*

إذا رصد شخص أ نقطة ء أسفل من مستوى نظره الأفقى $\overleftarrow{\text{أب}}$ فإن الزاوية بين $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ تسمى زاوية انخفاض ء عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.



ملاحظات:

١- فى الشكل المقابل:



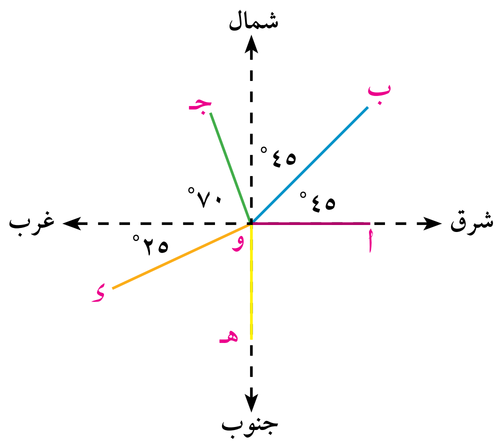
∠ جـ أ ب هى زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للشخص عند أ.

∠ ى ب أ هى زاوية انخفاض الشخص عند أ بالنسبة للبالون.

وفى هذه الحالة يكون $\alpha = \beta$

حيث α هى قياس زاوية الارتفاع، β هى قياس زاوية الانخفاض.

٢- لتحديد نقطة ما بالنسبة للجهات الأصلية من نقطة معلومة نجد من الشكل التالى أن:



أ تقع شرق و

ب تقع شمال شرق و

جـ تقع فى اتجاه ٧٠° شمال غرب و

ى تقع فى اتجاه ٢٥° جنوب غرب و

هـ تقع جنوب و

مثال

(١) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار الراصد فى خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٣٠َ ٥٢°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

تذكر أن

- قانون (قاعدة) الجيب: تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- قياس أى زاوية خارجة للمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها.

الحل

من الشكل المقابل:

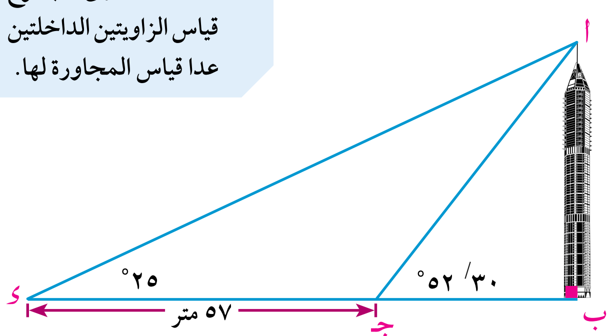
ق (∠ جـ أ ى) = ٣٠َ ٥٢° - ٢٥°

= ٣٠َ ٢٧°

فى △ أ جـ ى:

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٢٥°} = \frac{٥٧}{\text{جا } ٣٠َ\ ٢٧°}$

∴ $\text{أ جـ} = \frac{٥٧ \times \text{جا } ٢٥°}{\text{جا } ٣٠َ\ ٢٧°}$ (١)



فى △ أ ب جـ:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٣٠َ\ ٥٢°} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ أ ب = أ جـ × جا ٣٠َ ٥٢°　　　(٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) يكون:

أ ب = $\frac{٥٧ \times \text{جا } ٢٥°}{\text{جا } ٣٠' \, ٢٧°}$ × جا ٣٠َ ٥٢°

أ ب ≃ ٤١ متر ، أى أن ارتفاع البرج هو ٤١ متر تقريبًا.

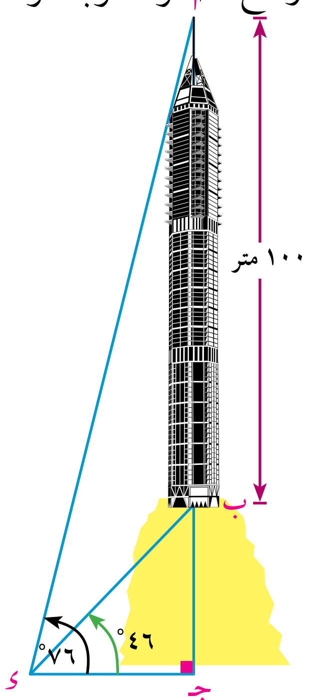
إبدأ ← 5 7 × sin 2 5) × sin 5 2 °'" 3 0 °'") ÷ sin 2 7 °'" 3 0 °'" =

حاول أن تحل

١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٠° ، ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

مثال

٢) برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقام على صخرة، من نقطة على سطح الأرض فى المستوى الأفقى المار بقاعدة الصخرة قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدتا ٧٦° ، ٤٦° على الترتيب، أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر.



الحل

ق (∠ أ ى ب) = ٧٦° - ٤٦° = ٣٠°

ق (∠ أ) = ٩٠° - ٧٦° = ١٤°

فى المثلث أ ب ى:　　$\frac{\text{ب ى}}{\text{جا } ١٤°} = \frac{١٠٠}{\text{جا } ٣٠°}$

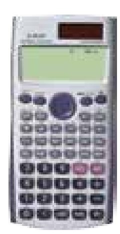
ب ى = $\frac{١٠٠ \text{ جا } ١٤°}{\text{جا } ٣٠°}$　　(١)

فى المثلث ب جـ ى:　　$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٤٦°} = \frac{\text{ب ى}}{\text{جا } ٩٠°}$

ب جـ = ب ى جا ٤٦°　　(٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج أن

ب جـ = $\frac{١٠٠ \text{ جا } ١٤°}{\text{جا } ٣٠°}$ × جا ٤٦° ≃ ٣٥ متر



استخدم الآلة الحاسبة بالترتيب التالي:

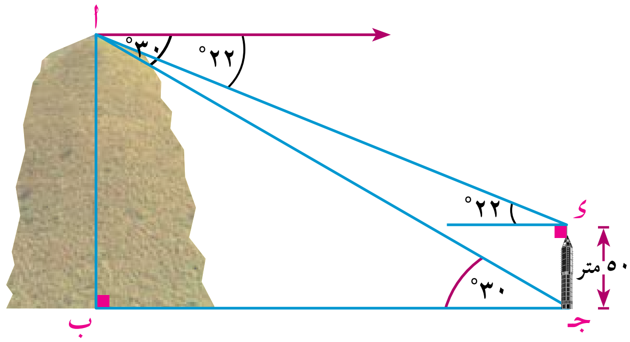
إبدأ ← 1 0 0 × sin 1 4) × sin 4 6) ÷ sin 3 0) =

حاول أن تحل

٢) برج ارتفاعه ١٢ مترًا مقامًا فوق تل، فإذا كان قياسا زاويتى ارتفاع قمة البرج وقاعدته من نقطة على سطح الأرض هما ٣٢° ، ٢٤° على الترتيب. أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

مثال

٣ من قمة تل رصد رجل قياس زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته فكانت ٢٢° ، ٣٠° على الترتيب ، فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا ، فأوجد ارتفاع التل لأقرب متر. علمًا بأن قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد.



الحل

من الشكل المقابل:

و (∠ ى أ جـ) = ٣٠° - ٢٢° = ٨°

و (∠ جـ ى أ) = ٩٠° + ٢٢° = ١١٢°

فى المثلث أ جـ ى   أ جـ / جا ١١٢° = ٥٠ / جا ٨°

أ جـ = ٥٠ جا ١١٢° / جا ٨°   (١)

فى المثلث أ جـ ب

أ ب / جا ٣٠° = أ جـ / جا ٩٠°   ∴ أ ب = أ جـ جا ٣٠°   (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج أن:

أ ب = ٥٠ جا ١١٢° × جا ٣٠° / جا ٨° ≃ ١٦٧ متر.

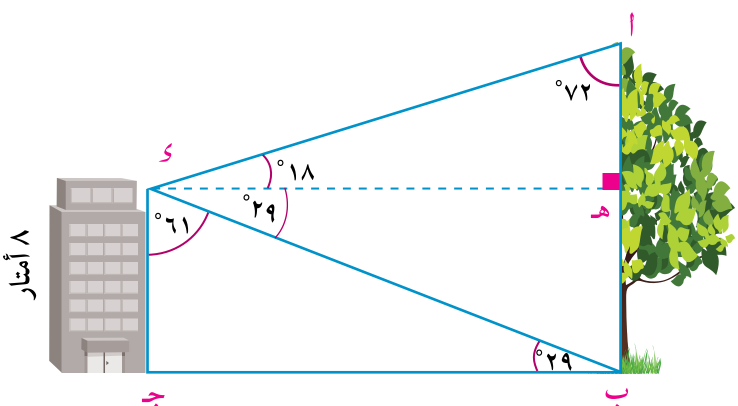
إبدأ ← 5 0 × sin 1 1 2) × sin 3 0) ÷ sin 8) =

حاول أن تحل

٣ من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا ، قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة ببرج فوجدتا ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

مثال

٤ من قمة منزل ارتفاعه ٨ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ١٨° ، قياس زاوية انخفاض قاعدتها ٢٩° أوجد المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة، وكذلك أوجد ارتفاع الشجرة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد ، مقربًا لرقمين عشريين.



الحل

و (∠ أ) = ٩٠° - ١٨° = ٧٢°

و (∠ ب ى جـ) = ٩٠° - ٢٩° = ٦١°

فى △ ب جـ ى: ∵ ٨ / جا ٢٩° = ب جـ / جا ٦١°

$\therefore$ ب جـ $= \dfrac{\text{٨}\times\text{جا ٦١}^\circ}{\text{جا ٢٩}^\circ} \simeq$ ١٤,٤٣ متر

المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة $\simeq$ ١٤,٤٣ متر

فى $\triangle$ أ هـ ى:

$\therefore \dfrac{\text{أ هـ}}{\text{جا ١٨}^\circ} = \dfrac{\text{هـ ى}}{\text{جا٧٢}^\circ}$ لاحظ أن (هـ ى = ب جـ)

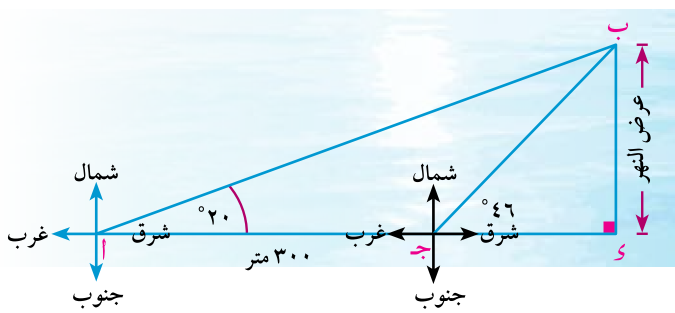
$\therefore$ أ هـ $= \dfrac{\text{جا ١٨}^\circ}{\text{جا ٧٢}^\circ}\times$ ب جـ

$\therefore$ أ هـ $= \dfrac{\text{جا ١٨}^\circ}{\text{جا ٧٢}^\circ}\times$ ١٤,٤٣ $\simeq$ ٤,٦٩ متر

$\therefore$ ارتفاع الشجرة $\simeq$ ٨ + ٤,٦٩ = ١٢١,٦٩ متر

مثال

٥ من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة جـ ، وجد أن نقطة ب فى اتجاه ٤٦° شمال الشرق. أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، جـ فى مستوى أفقى واحد.



الحل

نفرض أن عرض النهر هو $\overline{\text{ب ى}}$

فى المثلث أ ب جـ

ق($\angle$ أ ب جـ) = ٤٦° - ٢٠° = ٢٦°

$\dfrac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٢٠}} = \dfrac{\text{٣٠٠}}{\text{جا ٢٦}^\circ}$

ب جـ $= \dfrac{\text{٣٠٠ جا ٢٠}^\circ}{\text{جا ٢٦}^\circ}$ (١)

فى المثلث ب ى جـ

$\therefore \dfrac{\text{ب ى}}{\text{جا ٤٦}^\circ} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٩٠}^\circ}$ $\therefore$ ب ى = ب جـ × جا ٤٦° $\therefore$ ب ى $= \dfrac{\text{٣٠٠}\times\text{جا٢٠}^\circ}{\text{جا ٢٦}^\circ}\times$ جا ٤٦° $\simeq$ ١٦٨ متر

إبدأ → 3 0 0 × sin 2 0) × sin 4 6) ÷ sin 2 6) =

مثال

٦ الملاحة البحرية: تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٢٥َ ٦٨° غرب الجنوب بسرعة مقدارها ١٥ كم / ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٤٨َ ٥٣° شمال الغرب بسرعة ٨ كم / ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ٣ ساعات مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

الحل

$\because$ السرعة المنتظمة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الذى قطعت فيه المسافة}}$

المسافة المقطوعة = السرعة المنتظمة × الزمن الذى قطعت فيه المسافة

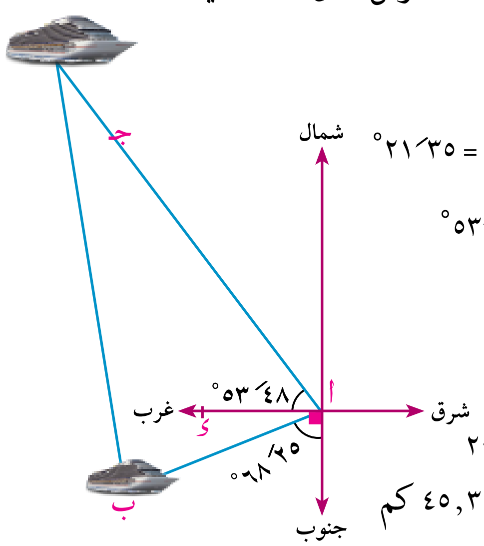
$\therefore$ أ ب = ١٥ × ٣ = ٤٥ كم

أ جـ = ٨ × ٣ = ٢٤ كم

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ب أ ء) = ٩٠° - ٢٠َ ٦٨° = ٣٥َ ٢١°

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ب أ جـ) = ٣٥َ ٢١° + ٤٨َ ٥٣°

= ٢٣َ ٧٥°



فى المثلث أ ب جـ

بتطبيق قاعدة جيب التمام

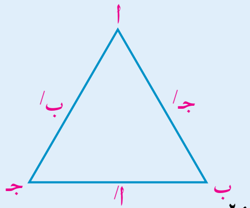
(ب جـ)^{٢} = (٤٥)^{٢} + (٢٤)^{٢} - ٢ × ٤٥ × ٢٤ جتا ٢٣َ ٧٥°

$\therefore$ ب جـ $\simeq$ ٤٥,٣٤ كم

إبدأ ← 4 5 x^2 + 2 4 x^2 - 2 × 4 5 × 2 4 × Cos 7 5 ,,, 2 3 ,,,) = √ Ans =

تذكر أن

قاعدة جيب التمام



أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا أ

ومنه

جتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢ بَ جـَ}}$

وهكذا بالنسبة لأطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الأخرى.

حاول أن تحل

٤ الملاحة البحرية: تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٧٠° شرق الجنوب بسرعة مقدارها ١٢ كم / ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق بسرعة ٥ كم / ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

تمـاريـن (٤ - ١)

١ رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٣٥َ ٢٠° ، ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٢°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

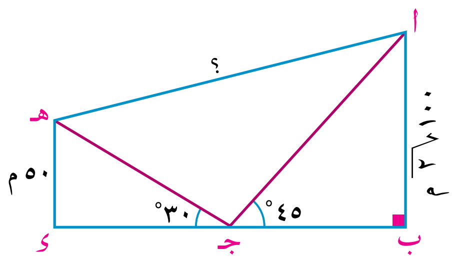
٢ من قمة منزل ارتفاعه ١٥ مترًا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٦٧° ، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٥°، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدة البرج وقاعدة المنزل فى مستوى أفقى واحد.

٣ من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا قيست زاويتى انخفاض النقطتين أ ، ب على المستوى الأفقى فكانتا ٣٢° ، ١٢َ ٢١° على الترتيب، فإذا كانت ء تمثل قاعدة البرج ، أ $\in$ $\overline{\text{ء ب}}$ ، أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب متر.

٤ من قمة التل وجد راصد أن قياس زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته هما ١٥°، ٢٦° على الترتيب، فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا، فاحسب ارتفاع التل لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد

٥ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ البحر، قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجدتا ٧٠° ، ٤٥°على الترتيب. أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر.

٦ **فى الشكل المقابل**: بالونان أ ، هـ ارتفاعهما $١٠٠\sqrt{٢}$ ، ٥٠ مترا. رصد جسم على الأرض (جـ) يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى انخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب. أوجد البعد بين البالونين مقربًا لأقرب متر.



٧ من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا، قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فوجدتا ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر، علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

٨ من قمة منزل رصد شخص سيارة ساكنة على نفس المستوى الأفقى المقام عليه المنزل فوجد أن قياس زاوية انخفاضها ٧٠°، وعندما هبط الشخص رأسيًّا لأسفل مسافة ١٢ مترًا، وجد أن قياس زاوية انخفاض السيارة أصحبت ٣٠°، أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر، والمسافة بين المنزل والسيارة.

٩ من نقطة ما على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة تساوى ٥٠°، ومن نقطة أخرى على ارتفاع ٤٥ مترًا من النقطة السابقة وفوقها تماماً، وجد أن قياس زاوية انخفاض قمة الشجرة تساوى ٣٠°، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب متر.

١٠ من قمة جبل ارتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر، رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة، فوجد أن قياسها ٣٧´٤٢°، أوجد ارتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا، علمًا بأنهما مقامين على أرض أفقية واحدة.

١١ تحرك شخصان من نفس النقطة، وفى نفس الوقت الأول فى اتجاه ٤٠° غرب الشمال بسرعة ٣٢ مترًا / دقيقة، والثانى فى اتجاه ٧٠° جنوب الغرب بسرعة ٣٨ متر / دقيقة، أوجد لأقرب متر المسافة بينهما بعد ٥ دقائق.

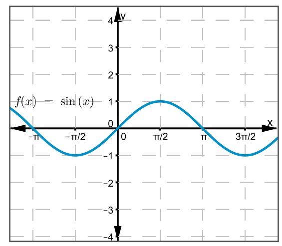
٤ – ٢ الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

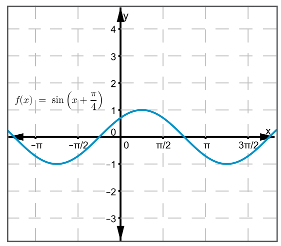
Trigonometric functions of sum and difference of the measures of two angles

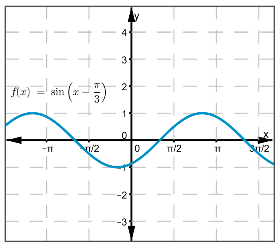
فكر و ناقش

استخدم برنامج جيوجبرا (geo-gebra) فى رسم الدوال الآتية:

د(س) = جاس ، ص = جا (س) + $(\frac{\pi}{4})$ ، م (س) = جا (س) - $(\frac{\pi}{3})$







من خلال دراستك لمفهوم التحويلات الهندسية - ماذا تلاحظ؟

لاحظ أن الدالة الثانية الموضحة بالشكل الثاني تتضمن جمع الزاويتين س ، $\frac{\pi}{4}$ والدالة الثالثة الموضحة بالشكل الثالث تتضمن طرح الزاويتين س ، $\frac{\pi}{3}$.

لذلك كان من الضرورى استخدام قوانين النسب المثلثية لمجموع زاويتين أو فرق زاويتين، وذلك لإيجاد الدوال المثلثية لزاوية محددة، فمثلًا لإيجاد قيمة جا ٧٥° يمكننا وضعها بالصورة جا (٣٠° + ٤٥°) ، كذلك جتا ١٥° يمكن وضعها على الصورة جتا (٦٠° - ٤٥°)، أو جتا (٤٥° - ٣٠°) وهكذا....

تعلم

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين:

Trigonometric functions of sum and difference of the measures of two angles

من الشكل المقابل: (البرهان لايمتحن فيه الطالب)

لاحظ أن ور(⦣أ) = ور (⦣ع ل م) لماذا؟

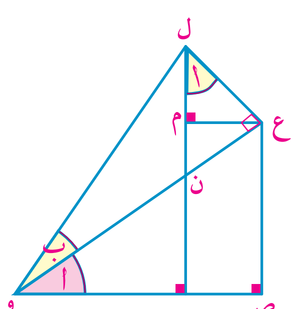
جا (أ + ب) = $\frac{\text{ل س}}{\text{ل و}}$ = $\frac{\text{م س}}{\text{ل و}}$ + $\frac{\text{ل م}}{\text{ل و}}$

= $\frac{\text{ع ص}}{\text{ل و}}$ + $\frac{\text{ل م}}{\text{ل و}}$

= $\frac{\text{ع ص}}{\text{ل و}}$ × $\frac{\text{ع و}}{\text{ع و}}$ + $\frac{\text{ل م}}{\text{ل و}}$ × $\frac{\text{ع ل}}{\text{ع ل}}$

= $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع و}}$ × $\frac{\text{ع و}}{\text{ل و}}$ + $\frac{\text{ل م}}{\text{ع ل}}$ × $\frac{\text{ع ل}}{\text{ل و}}$

= جا أ × جتا ب + جتا أ × جا ب



(لاحظ أن: ع ص = م س – لماذا؟)

سوف تتعلم

- استنتاج الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين.
- حل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين.
- استخدم متطابقات المجموع والفرق فى إثبات صحة بعض المتطابقات الأخرى.

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية Trigonometric functions
- دالة جيب Sine function
- دالة جيب التمام Cosine function
- دالة ظل Tangent function
- الدوال المثلثية لمجموع قياسي زاويتين Trigonometric functions of sum of the measures of two angles
- الدوال المثلثية فرق قياس زاويتين Trigonometric functions of difference of the measures of two angles

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فيكون **جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب**

وبوضع (- ب) بدلًا من ب ينتج أن:

جا [أ + (- ب)] = جا أ جتا (- ب) + جتا أ جا (- ب)

جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

استخدم نفس الشكل لأثبات:

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

ثم استنتج أن: **جتا (أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب**

تذكر أن

جا (-أ) = - جا أ

جتا (-أ) = جتا أ

ظا (-أ) = - ظا أ

مثال

(١) أوجد:

أ) جا ٧٥° ب) جتا ١٥° ماذا تلاحظ؟

الحل

أ) جا ٧٥° = جا (٣٠° + ٤٥°) = جا ٣٠° جتا ٤٥° + جتا ٣٠° جا ٤٥°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$

ب) جتا ١٥° = جتا (٤٥° - ٣٠°) = جتا ٤٥° جتا ٣٠° - جا ٤٥° جا ٣٠°

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$

نلاحظ أن: جا٧٥° = جتا ١٥°

حاول أن تحل

(١) أوجد.

أ) جتا ١٠٥° ب) جا ٧٥° جتا ١٥° + جتا ٧٥° جا ١٥°

جـ) جتا ٨٠° جتا ٢٠° + جا ٨٠° جا ٢٠°

تذكر أن

جا (١٨٠-أ) = جا أ

جتا (١٨٠-أ) =- جتا أ

جا (١٨٠+أ) = - جا أ

جتا (١٨٠-أ) = - جتا أ

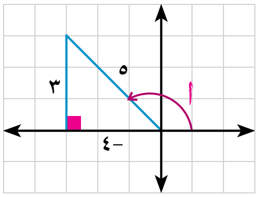
مثال

(٢) إذا كان جا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < أ < ١٨٠°، جتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$

حيث ١٨٠° < ب < ٢٧٠°

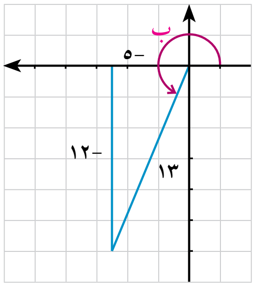
أوجد جتا (أ - ب)، جا (أ + ب)

الحل



∵ أ ∈ الربع الثانى ∴ جا أ = $\frac{٣}{٥}$ حتا أ = $\frac{-٤}{٥}$

∵ ب ∈ الربع الثالث ∴ جاب = $\frac{-١٢}{١٣}$ حتاب = $\frac{-٥}{١٣}$



فيكون:

جتا(أ - ب) = حتا أ حتاب + جا أ جاب

$= (\frac{-٤}{٥})(\frac{-٥}{١٣}) + (\frac{٣}{٥})(\frac{-١٢}{١٣}) = \frac{-١٦}{٦٥}$

جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + حتا أ جا ب

$= (\frac{٣}{٥})(\frac{-٥}{١٣}) + (\frac{-٤}{٥})(\frac{-١٢}{١٣}) = \frac{٣٣}{٦٥}$

حاول أن تحل

٢ إذا كان حتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، حتاب = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة.

أ جا(أ + ب) ب قا(أ - ب)

٣ فى المثلث أ ب جـ ، حتا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، أوجد جا جـ بدون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال

الربط بالكهرباء: إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة: ت = $\frac{٥}{٢}$ جا ١٦٥° ن

أ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام مجموع قياسى زاويتين.

ب أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

الحل

ت = $\frac{٥}{٢}$ جا ١٦٥° ن العلاقة المعطاة

ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (٤٥° ن + ١٢٠° ن) لأن ١٦٥° = ٤٥° + ١٢٠°

= $\frac{٥}{٢}$ جا (٤٥° + ١٢٠°) بالتعويض عن ن = ١ ثانية

= $\frac{٥}{٢}$ [جا ٤٥° جتا ١٢٠° + جتا ٤٥° جا ١٢٠°] استخدام مفكوك مجموع قياسى زاويتين

$= \frac{٥}{٢} [\frac{١}{\sqrt{٢}} (-\frac{١}{٢}) + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}]$ بالتعويض عن قيم النسب المثلثية

$= \frac{٥}{٢} \times \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ بضرب كلاً من البسط والمقام × $\sqrt{٢}$

$= \frac{(\sqrt{٦} - \sqrt{٢})}{٨}$ بالتبسيط

حاول أن تحل

٤ إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن

أ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسي زاويتين.

ب أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

دالة الظل لمجموع وفرق قياسى زاويتين:

Tangent function of sum and difference of the measures of two angles

$$\text{ظا }(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{جا }(\text{أ}+\text{ب})}{\text{جتا }(\text{أ}+\text{ب})} = \frac{\text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب ≠ ٠ يكون:

$$\boxed{\text{ظا }(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}}$$

وعند وضع (-ب) بدلا من ب فإن:

$$\boxed{\text{ظا }(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}}}$$

حيث أ، ب ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ن + ١)، ن ∈ ص

مثال

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

أ $\text{ظا } ٥٠° = \frac{١ + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٥°}$

ب $\text{ظا }(٤٥° - \text{أ}) = \frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$

الحل

أ الطرف الأيمن = ظا٥٠°

$$= \text{ظا}(٤٥° + ٥°) = \frac{\text{ظا}٤٥° + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٤٥° \text{ ظا}٥°} = \frac{١ + \text{ظا}٥°}{١ - \text{ظا}٥°} = \text{الطرف الأيسر}$$

ب الطرف الأيمن = ظا(٤٥° - أ)

$$= \frac{\text{ظا}٤٥° - \text{ظا أ}}{١ + \text{ظا}٤٥° \text{ ظا أ}} = \frac{١ - \text{ظا أ}}{١ + \text{ظا أ}}$$

$$= \frac{١ - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{١ + \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}} \times \frac{\text{جتا أ}}{\text{جتا أ}} = \frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}} = \text{الطرف الأيسر}$$

لاحظ أن

$\text{ظا أ} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$

حاول أن تحل

٥ إذا كان كل من أ، ب قياسى زاويتين حادتين موجبتين، حيث جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$، جا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، أوجد قيمة ظا(أ - ب)

٦ إذا كان أ، ب ، جـ قياسات زوايا مثلث حيث ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، ظا جـ = ٧ ، أثبت أن ق = ٤٥°

٧ إذا كان ظاأ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظاب = $\frac{١}{١١}$ ، فاثبت أن (أ + ب) = ٤٥°

مثال

٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث ٠° < س < ٣٦٠°

أ ظاس + ظا٢٠° + ظاس ظا ٢٠° = ١ ب جا (س+٣٠°) = ٢ جتا س

الحل

أ ∵ ظا س + ظا٢٠° + ظاس ظا ٢٠° = ١

∴ ظا س + ظا٢٠° = ١ - ظا س ظا ٢٠°

∴ $\frac{\text{ظاس + ظا ٢٠°}}{\text{١ - ظا س ظا٢٠°}}$ = ١ (وذلك بقسمة طرفى المعادلة على: ١ - ظا س ظا ٢٠°)

أى أن: ظا (س + ٢٠°) = ١

∴ س + ٢٠ تقع في الربع الأول

∴ ظا (س + ٢٠°) = ظا ٤٥° س + ٢٠° = ٤٥° س = ٢٥°

أو س + ٢٠° تقع في الربع الثالث

ظا (س + ٢٠°) = ظا ٢٢٥° س + ٢٠° = ٢٢٥° س = ٢٠٥°

مجموعة الحل هى {٢٥°، ٢٠٥°}

ب ∵ جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س

∴ جا س جتا ٣٠° + جتا س جا ٣٠° = ٢ جتا س

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س + $\frac{١}{٢}$ جتا س = ٢ جتا س

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا س = $\frac{٣}{٢}$ جتا س

بقسمة الطرفين على جتا س ، حيث: جتا س ≠ ٠

∴ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$ أى أن ظا س = $\sqrt{٣}$ > ٠

∴ **س تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث ويكون**

س = ٦٠° أو س = ٦٠° +١٨٠° = ٢٤٠°

مجموعة الحل هى { ٦٠°، ٢٤٠° }

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث ٠° < س < ٣٦٠°

أ جا س جتا ٢٠° - جتا س جا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ ب جتا ٢ س جتا س + جا ٢ س جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تمارين (٤ - ٢)

أكمل كل مما يأتي:

(١) حا٤٠° حتا١٠° - حتا٤٠° جا ١٠° =.........................

(٢) $\frac{\text{ظا ٧٥° - ظا ١٥°}}{\text{١ + ظا ٧٥° ظا ١٥°}}$ =.........................

(٣) حتا٧٠° حتا٢٠° - جا٧٠° جا٢٠° =.........................

(٤) جا(س + ص) حتاص - جتا(س + ص) جاص =..........

(٥) إذا كان ظاأ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (أ + ب) =..........

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) جا$(\theta + \frac{\pi}{٦})$ =

أ $\frac{١}{٢}$ (حتاθ + $\sqrt{٣}$ جاθ) ب $\frac{١}{٢}$ (حتاθ+ حاθ)

جـ $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتاθ+ حاθ) د $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتاθ+ $\sqrt{٢}$ جاθ)

(٧) حا٧٥° حتا١٥° + حتا٧٥° جا١٥° تساوي

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١ د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٨) حاه س جا٣س + حتاه س حتا٣س تساوي

أ حتا٢س ب جتا ٨ س جـ حا٨ س د حا٢س

(٩) ظا١٥° تساوي

أ ٢ + $\sqrt{٣}$ ب - $\sqrt{٣}$ - ٢ جـ $\sqrt{٣}$ - ٢ د ٢ - $\sqrt{٣}$

(١٠) إذا كان ظاأ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (أ + ب) يساوي

أ ١ ب - $\frac{٥}{٦}$ جـ $\frac{١}{٦}$ د $\frac{٥}{٦}$

(١١) ظتا $(٢\pi - \frac{٥\pi}{١٢})$ =

أ ٢ +$\sqrt{٣}$ ب ٢ - $\sqrt{٣}$ جـ -٢- $\sqrt{٣}$ د $\sqrt{٣}$ - ٢

ضع فى أبسط صورة:

(١٢) جتا(أ - ب) - جتا(أ + ب)

(١٣) جا(أ + ب) - جا(أ - ب)

(١٤) حتا أ جتا(أ + $\frac{\pi}{٢}$) + جا أ جا(أ + $\frac{\pi}{٢}$)

(١٥) حتا ٤٠° حتاس - جا ٤٠° جاس

(١٦) إذا علمت أن جا أ = $\frac{-٨}{١٧}$ حيث ١٨٠° > أ > ٢٧٠° ، جتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$ حيث ٩٠° > ب > ١٨٠°

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من:

أ جتا(أ - ب) ب جا(أ + ب) ج ظا(أ - ب)

(١٧) إذا كان ظا(θ + ٤٥°) = $\frac{٣}{٢}$ ، فأوجد قيمة ظاθ.

(١٨) إذا علمت أن $\frac{\text{جتا(أ + ب)}}{\text{جتا(أ - ب)}}$ = $\frac{١}{٣}$ ، فاثبت أن ٢حا أ جاب = حتا أ حتاب

ثم أثبت أن: ٢ظا أ = ظتاب. و إذا علمت أن ظا أ = $\frac{٢}{٥}$ فأوجد ظا ب ، ومن ثم أوجد ظا(أ - ب)

(١٩) إذا كان أ ، ب زاويتان حادتان ، حيث ظا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٩}$ ، برهن أن أ + ب = ٤٥°.

(٢٠) إذا كانت حتا أ = ٠,٦ ، حتاب = ٠,٨ ، حيث أ ، ب قياسي زاويتان حادتان،

أوجد بدون استخدام الالة الحاسبة قيمة كل من:

أ جا(أ + ب) ب جتا(أ - ب) ج ظا(أ - ب)

(٢١) إذا كان أ ، ب زاويتين حادتين حيث حتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظاب = $\frac{٨}{١٥}$ ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من:

أ جا(أ + ب) ب ظا(أ - ب) ج قا(أ - ب) د ظتا(أ + ب)

(٢٢) إذا كان جا أ جاب = $\frac{١}{٢}$ ، حتا أ حتاب = $\frac{١}{٣}$ ، حيث أ ، ب قياسي زاويتان حادتان.

أوجد قيمة كل من: جتا(أ + ب) ، جتا(أ - ب)

(٢٣) إذا كان جا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠° > أ > ٩٠° ، ظا ب = - ٧ حيث ٩٠° > ب > ١٨٠° ، أثبت أن أ + ب = ١٣٥°

(٢٤) إذا كان س + ص + ع = ٩٠° ، أثبت أن ظا س ظا ص + ظا ص ظا ع + ظا ع ظا س = ١

(٢٥) تفكير إبداعى: إذا كان ظا أ = $\frac{٢}{٣}$ حيث π > أ > $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ حيث ٠ > أ > $\frac{\pi}{٢}$ ،

أوجد قيمة كل من ظا(أ + ب) ، جتا(أ + ب) ، ومن ذلك أثبت أن أ + ب = $\frac{٥\pi}{٤}$

٤–٣ الدوال المثلثية لضعف الزاوية

The Trigonometric Functions of the Double-Angle

سوف تتعلم

- استنتاج الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- الدوال المثلثية لنصف الزاوية
- حل تطبيقات متنوعة على الدوال المثلثية لضعف الزاوية.
- استخدام متطابقات ضعف الزاوية فى إثبات صحة متطابقات أخرى.

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية. Trigonometic function
- ضعف زاوية double – angle
- نصف الزاوية half – angle
- دالة جيب Sine function
- دالة جيب التمام Cosine function
- دالة ظل Tangent fuction

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فكر و ناقش

سبق أن درست الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين، والآن نطرح سؤالًا: إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة، فهل يمكنك استنتاج الدوال المثلثية لضعف الزاوية ٢أ استنتاجًا مما درسته فى الدرس السابق؟

ناقش معلمك فى الإجابات التى توصلت إليها.

تعلم

الدوال المثلثية لضعف الزاوية:

The trigonornetric functions of the double - angle

تعلم أن:

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب (بوضع ب = أ)

∴ جا (أ + أ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

∴ جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ لكل أ ∈ ح (١)

بالمثل يكون:

جتا ٢ أ = جتا^٢ أ - جا^٢ أ لكل أ ∈ ح

= ٢ جتا^٢ أ - ١

= ١ - ٢ جا^٢ أ

ظا ٢ أ = $\frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ}$ حيث ظا أ معرفه، ظا^٢ أ ≠ ١

تذكر أن

العلاقات الاساسيه بين الدوال المثلثية:

جا^٢ ح + جتا^٢ ح = ١

ظا^٢ ح + ١ = قا^٢ ح

ظتا^٢ ح + ١ = قتا^٢ ح

قتا ح = $\frac{١}{جا ح}$

قا ح = $\frac{١}{جتا ح}$

ظا ح = $\frac{جا ح}{جتا ح}$

ظتا ح = $\frac{١}{ظا ح}$ ،

ظا ح = $\frac{١}{ظتا ح}$

تعبير شفهى:

١– اكتب صورة القوانين السابقة إذا ضاعفنا الزاوية ٢أ لتصبح ٤أ؟

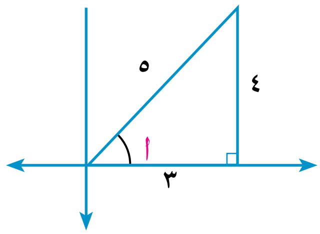
مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

١ إذا علمت أن جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٠° < أ < ٩٠° ، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ جا ٢أ ب جتا ٢أ ج ظا ٢أ

الحل



∵ جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ∵ أ تقع في الربع الأول

∴ جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ (موجب لأن أ زاوية حادة)

أ) حا٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

ب) حتا٢أ = ١ - ٢ جا^٢ أ = ١ - ٢ × $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{-٧}{٢٥}$

(يمكنك استخدام الصور الأخرى لقانون جيب تمام ضعف الزاوية)

ج) ظا٢أ = $\frac{\text{جا٢أ}}{\text{جتا٢أ}}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ÷ ($\frac{-٧}{٢٥}$) = $\frac{-٢٤}{٧}$

حاول أن تحل

(١) إذا كان جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠° < أ < ٩٠° أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ) جا ٢أ ب) جتا ٢أ ج) ظا ٢أ

مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ) ٢ جا ١٥° جتا ١٥ ب) ٢جتا^٢ ٣٠َ ٢٢° - ١

الحل

أ) ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا ٢ × ١٥° = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

ب) ٢ جتا^٢ ٣٠َ ٢٢° - ١ = جتا (٢ × ٣٠َ ٢٢°) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى:

أ) ٢ جا ٣٠َ ٢٢° جتا ٣٠َ ٢٢° ب) ٢ جتا^٢ ٧٥° - ١ ج) جتا^٢ ٦٧,٥° - جا^٢ ٦٧,٥°

د) $\frac{\text{٢ظا ٣٠َ ٢٢°}}{\text{١- ظا}^٢\text{ ٣٠َ ٢٢°}}$ هـ) $\frac{\text{٢جتا}^٢\text{ ١٦٥° - ١}}{\text{جا ٧٥° جتا ٧٥°}}$

الدوال المثلثية لنصف الزاوية *The trigonornetric functions of the half-angle*

تعلم

سبق وأن علمت أن: جتا أ = ١ - ٢ جا^٢ $\frac{أ}{٢}$ (متطابقة ضعف الزاوية)

أى أن: ٢ جا^٢ $\frac{أ}{٢}$ = ١ - جتا أ (من خواص المقادير الجبرية)

جا^٢ $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{\text{١ - جتا أ}}{٢}$ (بقسمة الطرفين على ٢)

$جا \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - جتا أ}{٢}}$ وبالمثل يمكن إيجاد الدوال المثلثية لكل من: $جتا \frac{أ}{٢}$ ، $ظا \frac{أ}{٢}$

$جا \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - جتا أ}{٢}}$ ، $جتا \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ + جتا أ}{٢}}$ ، $ظا \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - جتا أ}{١ + جتا أ}}$ حيث $جتا أ \neq -١$

يتم تحديد الاشارة وفقًا للربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{أ}{٢}$

مثال

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ $جا \frac{\theta}{٢}$ علمًا بأن ، $جتا \theta = -\frac{٤}{٥}$ ، $٢٧٠° > \theta > ١٨٠°$

ب $جتا ٧٥°$

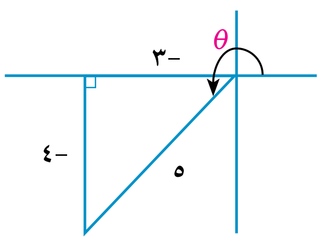
جـ $ظا ٢٢َ٣٠°$

الحل

أ $\because جا \frac{\theta}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - جتا\theta}{٢}}$

$\therefore جا \frac{\theta}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - (-\frac{٣}{٥})}{٢}} = \pm\sqrt{\frac{٨}{١٠}}$

$\therefore جا \frac{\theta}{٢} = \pm\frac{٢}{\sqrt{٥}} = \pm\frac{٢}{٥}\sqrt{٥}$



$\because ١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ وبالقسمة على ٢ فإن $٩٠° < \frac{\theta}{٢} < ١٣٥°$

$\therefore جا \frac{\theta}{٢} = \frac{٢}{٥}\sqrt{٥}$ (الإشارة موجبة لأنها تقع في الربع الثاني)

ب $جتا ٧٥° = جتا \frac{١٥٠°}{٢}$ (لأن $٧٥° = \frac{١٥٠°}{٢}$)

$= \sqrt{\frac{١ + جتا ١٥٠°}{٢}}$ $(٠ < ٧٥° < ٩٠°)$ تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢}} = \sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٣}}{٤}}$ بضرب البسط والمقام × ٢

$\frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٣}}}{٢}$ بالتبسيط

$\frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٣}}}{٢} = \frac{\sqrt{\frac{٤ - ٢\sqrt{٣}}{٢}}}{٢} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{٣} - ١)^٢}{٢}}}{٢}$

$\frac{(\sqrt{٣} - ١)}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

جـ $ظا ٢٢َ٣٠° = ظا \frac{٤٥°}{٢}$ (لأن $٢٢,٥° = \frac{٤٥°}{٢}$)

$= \sqrt{\frac{١ - جتا ٤٥°}{١ + جتا ٤٥°}}$ $٠ < (٢٢,٥° < ٩٠°)$ تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}}} = \sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٢ + \sqrt{٢}}}$ بالضرب في مرافق المقام $(٢ - \sqrt{٢})$

$$= \sqrt{\frac{٢-\sqrt{٢}}{٢+\sqrt{٢}} \times \frac{٢-\sqrt{٢}}{٢-\sqrt{٢}}} = \sqrt{\frac{(٤+٢)-٤\sqrt{٢}}{٤-٢}}$$

$$= \sqrt{٣-٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٢-٢\sqrt{٢}+١} = \sqrt{(\sqrt{٢}-١)^{٢}} = \sqrt{٢}-١$$

حاول أن تحل

③ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من: (أ) جتا $\frac{\theta}{٢}$ علمًا بأن جا$\theta = -\frac{٤}{٥}$ ، $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$

(ب) حتا $٢٢°٣٠'$ (جـ) ظا $١٥°$.

مثال

إثبات صحة متطابقة مثلثية

④ أثبت صحة المتطابقة: قتا٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س ، ثم استخدم المتطابقة السابقة لإيجاد قيمة ظتا $١٥°$.

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{١}{\text{جا٢س}} + \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا٢س}} = \frac{١+\text{جتا٢س}}{\text{جا ٢ س}}$

$= \frac{١+(٢\text{جتا}^{٢}\text{س}-١)}{\text{٢ جا س جتا س}} = \frac{\text{٢ جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{٢ جا س جتاس}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ = ظتا س (الطرف الأيسر)

بوضع س = $١٥°$ في المتطابقة: قتا ٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س

∴ ظتا $١٥°$ = قتا $٣٠°$ + ظتا $٣٠°$ = $٢ + \sqrt{٣}$

حاول أن تحل

④ أثبت أن: جتا ٢ س = $\frac{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}$ ومن ذلك أوجد قيمة $\frac{١-\text{ظا}^{٢}١٥°}{١+\text{ظا}^{٢}١٥°}$

مثال

إيجاد قيمة نسبة مثلثية

⑤ إذا كان ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠ فأوجد بدون استخدام الآله الحاسبة قيمة ، ظا حـ ، حيث حـ قياس زاوية حادة موجبة.

الحل

∵ ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠ ∴ ٤جتا ٢ حـ = -٣ جا ٢ حـ

∴ $\frac{\text{جا٢حـ}}{\text{جتا ٢ حـ}} = \frac{٤}{-٣}$ ∴ ظا ٢ حـ = $\frac{٤}{-٣}$

∴ $\frac{\text{٢ ظا حـ}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{حـ}} = \frac{-٤}{٣}$ ∴٦ظا حـ = -٤ + ٤ ظا^{٢} حـ

∴٢ظا^{٢} حـ -٣ ظا حـ - ٢ = صفر

(٢ ظا حـ + ١) (ظا حـ - ٢) = صفر ∴ظا حـ = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض)أو ظا جـ = ٢

فكر: استخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية لإيجاد قيمة ظا حـ.

حاول أن تحل

٥ إذا كان ٤ جا هـ + ٣ جتا هـ = ٣ ، فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ، ظا $\frac{هـ}{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، حيث هـ قياس زاوية حادة موجبة.

مثال

حل المعادلات المثلثية

٦ أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتي تحقق المعادلات الآتية:

أ جا ٢ س = جا س

ب جتا^٢ س - جا^٢ س = - $\frac{١}{٢}$

جـ ظا^٢ $\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

الحل

أ ∵ جا ٢ س = جا س

٢ جا س جتا س = جا س

(لأن: جا٢س = ٢ جا س جتا س)

جا س (٢جتا س - ١) = ٠

جا س = ٠

س = π

جتا س = $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٥\pi}{٣}$

قيم س التى تحقق المعادلة هى:

$\frac{\pi}{٣}$ أو π أو $\frac{٥\pi}{٣}$

فكر: هل لديك حلول أخرى؟ أوجد أحد هذه الحلول.

جـ ∵ ظا^٢ $\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

∴ ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١ - ظا^٢ $\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{٢ظا \frac{س}{٢}}{١ - ظا^٢ \frac{س}{٢}}$ = ١ ∴ ظا س = ١

(ظا موجب فى كل من الربعين الأول والثالث)

فى الربع الأول: س = $\frac{\pi}{٤}$

فى الربع الثالث: س = π + $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٥\pi}{٤}$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى $\frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{٥\pi}{٤}$

ب جتا^٢ س - جا^٢ س = - $\frac{١}{٢}$

جتا ٢س = - $\frac{١}{٢}$

(لأن: جتا٢س = جتا^٢ س - جا^٢ س)

إما جتا ٢س = جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ن π)

أو جتا ٢س = جتا ($\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ن π)

حيث ن ∈ ص

٢س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ن π

٢س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π

بالقسمة على (٢)

س = $\frac{\pi}{٣}$ + π ن س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ن π

بوضع ن = ٠ ؛ ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ ؛ س = $\frac{٤\pi}{٣}$

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ س = $\frac{٥\pi}{٣}$

قيم س التى تحقق المعادلة هى:

$\frac{\pi}{٣}$ ؛ $\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتي تحقق المعادلة جتا س + جتا ٢س = ٠

٧ الربط بالهندسة: س ص ع مثلث فيه س َ = ١٢سم، ص َ = ١٨سم، ع َ = ١٥سم. أثبت ان ق(∠ص) = ٢ق(∠س).

تمارين (٤ – ٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت جتا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن جتا ٢ حـ تساوي

أ صفر　ب $\frac{-٢}{٣}$　جـ $\frac{-٧}{٩}$　د $\frac{٢}{٣}$

٢ جاأ جتا أ تساوي

أ $\frac{١}{٢}$ جا ٢أ　ب جا ٢أ　جـ جتا ٢أ　د $\frac{١}{٢}$ جتا ٢أ

٣ جتا^{٢} حـ - جتا ٢ حـ تساوي

أ جا حـ　ب جتا حـ　جـ جا^{٢} حـ　د ظا حـ

٤ ١ - ٢ جا^{٢} ٥٠ تساوي

أ جا ١٠٠°　ب جتا ٥٠°　جـ جتا ١٠٠°　د جا ٥٠°

٥ ١ + جتا ٤أ تساوي

أ ٢ جتا^{٢} ٤أ　ب جتا^{٢} ٢أ　جـ جتا^{٢} ٤أ　د ٢جتا^{٢} ٢أ

٦ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: جا ٢θ ، جتا ٢ θ، ظا ٢θ إذا كان:

أ جا θ = $\frac{٤}{٥}$، ٠° $< \theta <$ ٩٠°　ب جتا θ = $\frac{١}{٣}$، ٠° $< \theta < \frac{\pi}{٢}$

جـ قتاθ = $\frac{-٥}{٣}$، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$　د ظتا θ = $\frac{-٣}{٢}$، ١٨٠° $< \theta <$ ٢٧٠°

٧ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: جا ٢θ ، جتا ٢ θ، جا $\frac{\theta}{٢}$ ، جتا $\frac{\theta}{٢}$:

أ جتا θ = $\frac{١}{٤}$، ٠° $< \theta <$ ٩٠°　ب جاθ = $\frac{٣}{٥}$، ٩٠° $< \theta <$ ١٨٠°

جـ ظاθ = $\frac{٤}{٣}$، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$　د جاθ = $\frac{١٥}{١٧}$، $\frac{٣\pi}{٢} < \theta <$ ٢π

٨ إذا علمت ان جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، حيث أ قياس زاوية حادة، أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة:

جا ٢أ ، جتا ٢أ، ظا ٢أ ، جتا $\frac{أ}{٢}$

٩ إذا كان أ قياس زاوية حادة، جتا ٢أ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: حاأ ، حتاأ ، ظا٢أ

١٠ إذا كان جا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: جتا $\frac{أ}{٢}$ ، جا أ ، حتاأ

١١ إذا كان جتا ب = $\frac{-٤}{٥}$ ، π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\frac{\text{جا ٢ ب}}{\text{٢ جتا٢ ب}}$

١٢ عبر عن كل مما يأتى فى صورة نسبة مثلثية واحدة:

أ جا ٣٥° جتا ٣٥°

ب $\frac{\text{ظا ٤٠°}}{\text{١ - ظا}^٢\text{ ٤٠}}$

جـ جا ٢٥° جتا ٣٥° - حتا٢٥° جا٣٥°

د $\frac{\text{ظا ٥٠° - ظا ٤٠°}}{\text{١ + ظا ٥٠° ظا ٤٠°}}$

هـ حتا^٢ ٢٥ - جا^٢ ٢٥

و $\frac{١ - \text{جتا } \theta + \text{جا}\theta}{١ + \text{جتا}\theta + \text{جا}\theta}$

١٣ أوجد قيم س المحصورة بين ٠، ٢π والتى تحقق كل معادلة مما يأتى:

أ جا ٢ س = جا س

ب جا^٢ ٢س + ٢ جا ٢ س + ١ = ٠

جـ جتا س - ٢ جا^٢ $\frac{١}{٢}$ س = ٠

١٤ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ $\frac{\text{١ - جتا ٢أ}}{\text{٣ + جتا ٢أ}} = \frac{\text{جا}^٢\text{أ}}{\text{١ + جتا}^٢\text{أ}}$

ب $\frac{\text{ظتا}\theta\text{ - ١}}{\text{ظتا}\theta\text{ + ١}} = \frac{\text{جتا٢}\theta}{\text{١ + جا ٢}\theta}$

تمـــاريـن عامة على الوحدة الرابعة

أولًا: مسائل على زاويا الارتفاع والانخفاض

١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٢° ثم سار على طرق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد قياسها ٣٦°، أوجد ارتفاع البرج لاقرب متر.

٢) من قمه تل وجد راصد أن قياسى زاويتى انخفاض قمة برج وقاعدته هما ١٨َ ١٥° ، ٤٢َ ٢٦° على الترتيب، فإذا كان ارتفاع البرج ٢٠ مترًا، فاحسب ارتفاع التل لاقرب متر.

٣) من قمه برج ارتفاعه ١٠ أمتار قاس رجل زاويتى ارتفاع وانخفاض أعلى نقطة من مئذنة وأسفل نقطة فيها على سطح الأرض فوجد هما ٢٨َ ١٤°، ٤٢° على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج والمئذنة مقامين على مستوى أفقى واحد، فاحسب لأقرب متر ارتفاع المئذنة.

٤) الملاحة البحرية تسير سفينة نحو الشمال الشرقى بسرعة ٢٤ كم/ ساعة، شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه ٢٥° غرب الشمال، وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى فى اتجاه ١٧° شمال الغرب، أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر، علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد.

٥) الملاحة البحرية يتحرك قارب بخارى فى الماء فى خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠٠متر/ دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها ٣٥°، وبعد دقيقتين ومن نفس القارب ثم رصدت زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها ٦٠° احسب ارتفاع الصخرة.

٦) الملاحة البحرية تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلومتر/ ساعة، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلو متر/ ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من لحظة تحركهما معًا.

٧) من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى ٣٥° ، وبعد ثلاث دقائق أعاد الرصد من نفس النقطة، فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبحت ١٥° ، أوجد بعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لاقرب متر.

ثانيًا: مسائل على الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياسى زاويتين وضعف الزاوية

١) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت صحة كل مما يأتى:

أ) $\text{ظا } ٧٥^\circ = ٢ + \sqrt{٣}$

ب) $\dfrac{\text{جتا } ٤٠^\circ \text{ جتا } ١٠^\circ + \text{جا } ٤٠^\circ \text{ جا } ١٠^\circ}{\text{جا } ١٥^\circ \text{ جتا } ١٥^\circ} = ٢\sqrt{٣}$

ج) $\text{جتا } ٧٥^\circ = \dfrac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

(٢) أثبت صحة كل مما يأتي:

(أ) حتا^٢ أ = $\frac{١}{٢}$ (١+ جتا ٢أ) ومن ذلك أوجد قيمة جتا ١٥°

(ب) $\frac{\text{٢جا أ - جتا ٢ أ}}{\text{جا}^٢\text{ أ}}$ = قا^٢ $\frac{أ}{٢}$

(جـ) $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{١ + جتا ٢س}}$ = ظا س

(د) $\frac{\text{١- جتا حـ - جا حـ}}{\text{١- جتا حـ + جا حـ}}$ = ظا $\frac{حـ}{٢}$

(٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) جا $\frac{٢\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$ - جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ جا $\frac{\pi}{٦}$

(ب) $\frac{\text{جا ٢٥° جتا ٢٠° + جتا٢٥° جا٢٠°}}{\text{جا ٨٠° جتا ٣٥° + جتا٨٠° جا٣٥°}}$

(٤) إذا كان جا أ = $\frac{-١٢}{١٣}$ حيث $\frac{٣\pi}{٢}$ < أ < ٢π فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة جا ٢أ ، جتا ٢أ

(٥) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٣}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٣}$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة $\frac{\text{١ + جا ٢ أ}}{\text{١ + جتا ٢ أ}}$

(٦) إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < أ < π ، جتا ب = $\frac{-٤}{٥}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: ظا ٢أ، جا (ب - أ)

(٧) إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[، ظا ب = $\frac{-١٢}{٥}$ حيث ب ∋] $\frac{\pi}{٣}$، π [، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كلاً من: جتا (أ + ب) ، ظا ٢ب

(٨) إذا كان ظا ٢أ = $\frac{-٣}{٤}$ ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة ظا أ

(٩) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$, ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ , ب ∋] ٠ , $\frac{\pi}{٣}$ [

فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: ظا (أ + ٢ب) = ١

(١٠) إذا كان جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث أ ∋] ٠ , $\frac{\pi}{٢}$ [، ظتا ب = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ب ∋] π , $\frac{٣\pi}{٢}$ [

فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة فيما كلًا من: ظا (أ - ب) ، جا ٢ب