République Arabe d'Égypte
Ministère de l'Éducation et l'Enseignement
et de l'Enseignement technique
secteur des livres

section lettre

Mathématiques Générales

Deuxième Secondaire

Livre de l'élève — Deuxième Semestre

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Essafty

M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري

2025 - 2026

20 30
رؤية مصر
EGYPT VISION

Révision et modification

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Akram Fawzy

M. Khaled Sayed El Shehabey

Scientifique Supervision

Conseillere en mathématiques

Mme. Manal Azkoul

Pédagogie Supervision

Dr. Akram Hassan

Première édition 2015/2016

Numéro de Dépôt 10556 / 2015

Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 013 - 4

Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maitre.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.
Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Unité 1

Suites et Séries

Introduction de l'unité

Sans doutes, les mathématiques aides à découvrir et modéliser des paternes finies et infinies qui peuvent exister dans des situations variées de la vie courante ainsi que les paternes qu'on peut composer ou former.

On manipule des multitudes de ces paternes dans la vie quotidienne où ils peuvent se trouver sous formes des suites ou des séries. Ces paternes ont étés évolués de théorique au pratique dan les domaines des sciences, du génie et de la statistique. L'ordinateur est devenu la première innovation qui peut être évolué et utilisé comme un outil d'analyse des problèmes complexes des mathématiques et physiques dans tous les domaines.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le concept des suites et le distingue de celui de la série.
- Reconnaitre le terme général d'une suite arithmétique et le modéliser sous plusieurs formes.
- Déterminer la moyenne d'une suite arithmétique et insérer plusieurs moyennes entre deux nombres donnés.
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite arithmétique sous plusieurs formes.
- Reconnaitre le terme général d'une suite géométrique et le modéliser sous plusieurs formes.
- Déterminer la moyenne d'une suite géométrique.
- Insérer plusieurs moyennes géométriques entre deux nombres donnés
- Déduire la relation entre la moyenne arithmétique et moyenne géométriques de deux nombres positifs.
- Calculer la somme de quelques termes d'une suite géométrique.
- Calculer la somme d'une suite géométrique infinie.
- Modéliser des problèmes quotidiens en utilisant les suites arithmétiques et les suites géométriques comme dans le cas de la population.
- Utiliser l'ordinateur pour résoudre des problèmes sur les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Vocabulaires de base

- Fonction
- Terme
- Suite finie
- Suite infinie
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Série
- Symbole de la somme (Σ)
- suite arithmétique
- la raison de la suite arithmétique
- moyenne arithmétique
- série arithmétique
- suite géométrique
- la raison de la suite géométrique
- moyenne géométrique
- série géométrique
- série géométrique infinie
- infini

Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Suites et séries.

Leçon (1 - 2): Suites arithmétiques.

Leçon (1 - 3): Séries arithmétiques.

Leçon (1 - 4): Suites géométriques.

Leçon (1 - 5): Séries géométriques.

Organigramme de l'unité

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels graphiques

Unité (1)

1 - 1 Suites et Séries

Allez apprendre

- La définition de la suite
- La suite finie et la suite infinie
- Le terme général de la suite
- La représentation graphique d'une suite
- La série et le symbole de la somme

Vocabulaires de base

- Suite
- Suite finie
- Suite infinie
- Ensemble
- Terme
- Série
- Le symbole de la somme

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphique

Réfréchissez et discutez

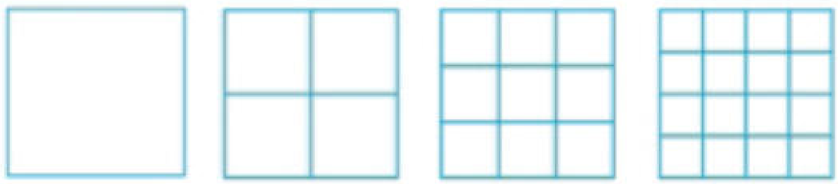


Figure (1) Figure (2) Figure (3) Figure (4)

Le modèle précédant représente un carré que l'on peut partager en petit carreaux:

(1) Déterminez le nombre de petits carreaux de la cinquième figure. Tracez-la.

(2) Pouvez-vous déterminer le nombre de petits carreaux de la huitième figure.

(3) Pouvez-vous trouver la relation entre le nombre de petits carreaux et le numéro de la figure ?

A apprendre La suite

La suite est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble (ou un sous-ensemble) des nombres entiers relatifs positifs $\mathbb{Z}^+$ Son ensemble image est un sous-ensemble de l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$ On note le premier terme par t_1, le deuxième terme par t_2, le troisième par t_3 etc. le terme général par t_n. On peut exprimer la suite en écrivant ses termes entre parenthèses comme ce qui suit : $(t_1 ; t_2 ; t_3 ; ... ; t_n)$ ou par le symbole (t_n).

Rappel

La fonction est une relation entre deux ensemble X et Y tels que chaque élément de X apparait une et une seule fois comme première projection d'un couple du graphe de la relation

Exemple

1 Ecrivez les six premiers termes de chacune des suites suivantes:

a La suite des nombres pairs positifs commençant par le nombre 2

b La suite des nombres compris entre 10 et 30 qui sont divisibles par 3.

Remarques

(1) Les termes de la suite sont les images des éléments de l'ensemble de définition de la suite.

(2) Le symbole (tn) représente une suite tandis que le symbole tn représente le nième terme.

Solution

a (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10, 12)

b (12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24 ; 27)

Essayez de résoudre

1) Écrivez les six premiers termes de chacune des suites suivantes :

a La suite des nombres impairs négatifs qui commence par – 1.

b La suite des nombres compris entre 51 et 81 et qui sont divisibles par 5.

Terme général d'une suite

Le terme général d'une suite (appelé le nième terme) s'écrit t_n où t_n est l'image de l'élément du rang n dans l'ensemble de définition de la suite, parfois on peut le déterminer à partir de quelques termes donnés de la suite.

Par exemple :

- Le terme général de la suite de nombres pairs : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; ... est $t_n = 2n$
- Le terme général de la suite de nombres impairs : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... est $t_n = 2n - 1$
- Le terme général de la suite : $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ est $t_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

Pensé critique : Ya-t-il une règle pour trouver le terme général d'une suite? Justifier votre réponse.

Exemple

2) Écrivez les cinq premiers termes de la suite (t_n) définie par :

$t_1 = -1 ; t_{n+1} = 2\,t_n$ pour $n \geqslant 1$

Solution

Par substitution respective de n par les valeurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 dans la relation $t_{n+1} = 2t_n$:

Posons $n = 1$ alors $t_2 = 2t_1$ d'où $t_2 = 2 \times -1 = -2$ (Par substitution de $t_1 = -1$)

Posons $n = 2$ alors $t_3 = 2t_2$ d'où $t_3 = 2 \times -2 = -4$ (Par substitution de $t_2 = -2$)

Posons $n = 3$ alors $t_4 = 2t_3$ d'où $t_4 = 2 \times -4 = -8$ (Par substitution de $t_3 = -4$)

Posons $n = 4$ alors $t_5 = 2t_4$ d'où $t_5 = 2 \times -8 = -16$ (Par substitution de $t_4 = -8$)

Les cinq premiers termes de la suite sont : (- 1 ; - 2 ; - 4 ; - 8 ; - 16)

Essayez de résoudre

2) Écrivez les six premiers termes de la suite (t_n) définie par : $t_1 = 3$, $t_n = 2\,t_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$

Suite finie et Suite infinie

Une suite est finie si le nombre de ses termes est fini (**c.-à-d. on peut les compter**) et une suite est infinie si le nombre de ses termes est infini (**une infinité de termes qu'on ne peut pas les compter**).

Exemple

3) Écrivez les suites dont le terme général donné par la relation :

a) $t_n = 2n - 1$ (cinq termes à partir du premier terme).

b) $t_n = n^2$ (une infinité de termes à partir du premier terme).

Solution

a) Remplaçons n par les valeurs : 1 , 2, 3 , 4 , 5

$\therefore t_1 = 2(1) + 1 = 3$, $t_2 = 2(2) + 1 = 5$

$t_3 = 2(3) + 1 = 7$, $t_4 = 2(4) + 1 = 9$

$t_5 = 2(5) + 1 = 11$, $\therefore$ la suite est : (3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11) **une suite finie**

b) Remplaçons n par les valeurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ....

$\therefore t_1 = (1)^2 = 1$, $t_2 = (2)^2 = 4$

$t_3 = (3)^2 = 9$, $t_4 = (4)^2 = 16$

$t_5 = (5)^2 = 25$, $\therefore$ la suite est : (1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ....) **une suite infinie**

Essayez de résoudre

3) Ecrivez les suites dont le terme général donné par la relation:

a) $t_n = 1 - 3n$ (cinq termes à partir du premier terme).

b) $t_n = n^3$ (une infinité de termes à partir du premier terme).

Les séries et le symbole de la somme

La série est l'opération de l'addition des termes de la suite.

Par exemple : (2 ; 5 ; 8 ; 11 ; ...) est une suite, mais 2 + 5 + 8 + 11 + ... est la série reliée par la suite précédente. On peut utiliser le symbole " Σ " qui se lit (sigma) pour écrire la série en forme simple.

Exemple

4) Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis calculez la somme.

a) $\sum_{r=1}^{4} r^2$ b) $\sum_{r=3}^{7} (2r - 1)$

Solution

a) Posons r = 1 alors $t_1 = (1)^2 = 1$, posons r = 2 alors $t_2 = (2)^2 = 4$

Posons r = 3 alors $t_3 = (3)^2 = 9$, posons r = 4 alors $t_4 = (4)^2 = 16$

D'où la série est (1 + 4 + 9 + 16) et $\sum_{r=1}^{4} r^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

b Posons $r = 3$ alors $t_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, Posons $r = 4$ alors $t_2 = 2 \times 4 - 1 = 7$

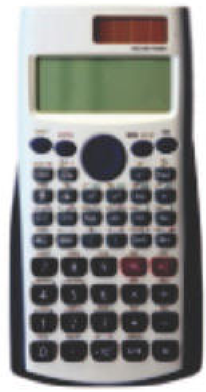
Posons $r = 5$ alors $t_3 = 2 \times 5 - 1 = 9$, Posons $r = 6$ alors $t_4 = 2 \times 6 - 1 = 11$

Posons $r = 7$ alors $t_5 = 2 \times 7 - 1 = 13$

D'où la série est $(5 + 7 + 9 + 11 + 13)$ et $\sum_{r=3}^{7} (2r - 1) = 45$

Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer le résultat d'une série:

La calculatrice est un outil précieux et performant pour effectuer des opérations compliquées à condition de l'insertion minutieuse des données. Parmi ces opérations, le calcul de la somme d'une série, par exemple, on peut vérifier la somme de la série de la question précédente (b): de la manière suivante :



(1) On appuie sur la touche [Σ ▯ log] suivant la couleur de la touche d'opération

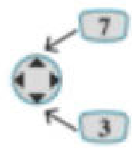
(2) On écrit la règle de la série $(2r - 1)$ comme suivant :

[2] [ALPHA] [)] (x) [−] [1]

(3) On utilise la touche (Replay) pour déplacer le curseur comme la figure

On écrit le rang du dernier terme de la série (7) au dessus ,

On écrit le rang du terme du début qui est dans l'exemple (3) au dessous



(4) On appuie sur la touche [=] pour afficher le résultat 45 sur l'écran qui est le même que le résultat obtenu.

Essayez de résoudre

4 Écrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis déterminez la somme, ensuite vérifiez le résultat par la calculatrice.

a $\sum_{r=1}^{5} (3r - 2)$ **b** $\sum_{r=1}^{4} (r + 1)^2$ **c** $\sum_{r=5}^{9} 3 \times 2r^{-1}$

Exercices (1 – 1)

Complétez :

1. Le cinquième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2n - 1$ est ……………………

2. Le quatrième terme de la suite (t_n) où $t_n = n^2 + 3$ est ……………………

3. Dans la suite (t_n) où $t_{n+1} = n\,t_n$ si $t_1 = 1$ alors $t_2 =$ ……………………

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

4. Le cinquième terme de la suite de nombres naturels divisibles par 5 est ……………

   a 5 b 25 c 20 d 10

5. Le dixième terme de la suite de terme général : $t_n = \frac{2}{n} - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$ est :

   a $\frac{-4}{5}$ b $\frac{-1}{5}$ c $\frac{1}{5}$ d $\frac{4}{5}$

6. La règle de la suite $((2 \times 3)\,;\ (3 \times 4)\,;\ (4 \times 5)\,;\ (5 \times 6)\,;\ \ldots)$ est :

   a $(n - 1)(n + 1)$ b $n(n + 1)$ c $2n(n + 1)$ d $(n + 1)(n + 2)$

Répondez aux questions suivantes :

7. Montrez laquelle des suites suivante est finie ou infinie:

   a $(1\,;\ 4\,;\ 7\,;\ 11\,;\ \ldots)$

   b $(3\,;\ 5\,;\ 7\,;\ 9\,;\ \ldots\,;\ 21)$

   c La suite (t_n) où $t_n = n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$

   d La suite (t_n) où $t_n = \frac{2}{n} + 3$ pour $n \in \{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\}$

8. Dans chacun des cas suivant ; écrivez les cinq premiers termes de la suite dont le terme général est donné par la règle :

   a $t_n = n + n^2$ b $t_n = \frac{1}{2n - 5}$ c $t_n = (\frac{1}{3})^n$ d $t_n = (-1)^n (n - 2)^2$

9. Découvrez la règle puis écrivez le terme suivant :

   a $65\,;\ 69\,;\ 73\,;\ 77\,;\ 81\,;\ \ldots$ b $3\,;\ -6\,;\ 12\,;\ -24\,;\ 48\,;\ \ldots$

   c $\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{4}\,;\ \frac{1}{8}\,;\ \frac{1}{16}\,;\ \frac{1}{32}\,,\ \ldots$ d $1\,;\ 3\,;\ 6\,;\ 10\,;\ 15\,;\ \ldots$

10. Ecrivez le développent de chacune des séries suivantes :

   a $\sum_{r=1}^{5} (3r - 2)$ b $\sum_{r=1}^{8} \left((-1)^r + 4r\right)$

   c $\sum_{r=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{r-1}$ d $\sum_{r=1}^{\infty} (\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1})$

11 Ecrivez le développement de chacune des séries suivantes, puis trouvez la somme de développement et vérifiez la réponse par la calculatrice.

a $\sum_{r=3}^{7} (2r+3)$

b $\sum_{r=2}^{6} (r^2-2)$

c $\sum_{r=1}^{5} 3\times(\frac{1}{2})^{r+1}$

d $\sum_{r=3}^{6} (\frac{1}{r}+2)$

Unité (1)

1 - 2 Suites arithmétiques

Allez apprendre

- La définition de la suite arithmétique
- Représentation graphique de la suite arithmétique
- Le nième terme de la suite arithmétique
- Détermination de la suite arithmétique
- Définition de la moyenne arithmétique
- Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres

Vocabulaires de base

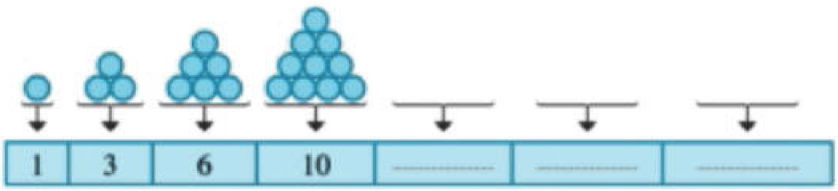
- Modèle
- Suite arithmétique
- nième terme
- la raison d'une suite arithmétique
- le rang d'un terme
- la moyenne arithmétique

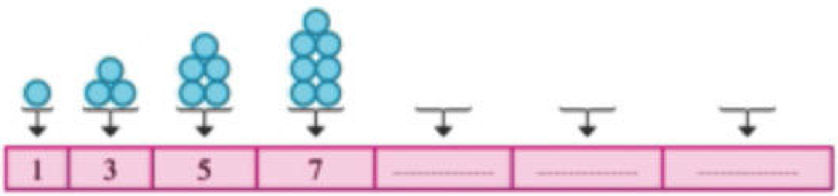
Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Activité

Etudiez chacune des modèles suivantes, puis complétez jusqu'au septième figure.





Répondez aux questions suivantes :

(1) Quels sont les ressemblances et les différences de deux modèles?

(2) Ecrivez les deux suites représentant les deux modèles.

(3) Que remarquez-vous de valeurs de la suite de la deuxième modèle? Peut-on déduire une formule reliant les termes de cette suite? Ecrivez cette formule.

De l'activité précédente, on déduit que :

- Les valeurs du premier modèle augmentent des valeurs variantes tandis que les valeurs de deuxième modèle augmentent avec une valeur constante.
- La suite représentant le deuxième modèle est (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...) chaque terme dépasse le terme qui lui précède d'une valeur constante égale à 2. Pour cela on l'appelle suite arithmétique.

Definition 1

Suite Arithmétique

C'est une suite dont la différence entre un terme et le terme qui lui précède est une valeur constante qui appelée la raison de la suite et on le note par (r)

C'est-à-dire: $r = t_{n+1} - t_n$ pou tout $n \in \mathbb{Z}^+$ (a) On peut la former à l'aide de son premier terme (a) et sa raison (r).

Exemple

1 Laquelle parmi les suites suivantes est arithmétique? Pourquoi?

a $(7\ ;\ 10\ ;\ 13\ ;\ 16\ ;\ 19)$

b $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{6})$

c $t_n = 2n + 3$

Solution

a $\because t_2 - t_1 = 10 - 7 = 3\ ,\quad t_3 - t_2 = 13 - 10 = 3$

De même $t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 3$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 3$ $\quad\therefore$ la suite est arithmétique de raison = 3

b $\because t_2 - t_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\ ;\quad t_3 - t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\therefore t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ $\quad\therefore$ la suite n'est pas arithmétique .

c $\because t_{n+1} - t_n = (2(n+1)+3) - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$

$\therefore$ la suite est arithmétique de raison 2

Essayez de résoudre

1 Laquelle parmi les suites suivantes est arithmétique? Pourquoi?

a $(38\ ;\ 33\ ;\ 28\ ;\ 23\ ;\ 18)$

b $(-14\ ;\ -8\ ;\ -2\ ;\ 4\ ;\ 10)$

c $t_n = 2n + 3$

d $t_n = 1 - \frac{3}{2}n$

Suite croissante et suite décroissante

Une suite (t_n) est croissante si la raison est positive $(d > 0)$ par exemple : $(1\ ;5\ ;9\ ;13\ ;\ ....)$

Une suite (t_n) est décroissante si la raison est négative $(d < 0)$ par exemple : $(4\ ;-1\ ;-6\ ;-11\ ;\ ....)$

Essayez de résoudre

2. Soit la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$

   a. Démontrez que (t_n) est une suite arithmétique et trouvez sa raison.

   b. Démontrez que (t_n) une suite croissante.

   c. Trouvez le quinzième terme de la suite. d. Trouvez la valeur de n lorsque $t_n = 85$?

Détermination du nième terme de la suite arithmétique:

De la définition (1) on peut déduire le nième terme de la suite arithmétique (t_n) de premier terme a et de raison r comme ce qui suit :

$t_1 = a$, $t_2 = a + r$, $t_3 = a + 2\,r$ ainsi de suit, on déduit le nième terme est $\boxed{t_n = a + (n-1)\,r}$

Exemple

3. Soit la suite arithmétique (13 ; 16 ; 19 ; ......; 100)

   a. Déterminez le dixième terme b. Déterminez le nombre de termes de la suite

Solution

$\because$ la suite est arithmétique $\therefore a = 13$, $r = 16 - 13 = 3$

a. $\because t_n = a + (n-1)\,r$ $\therefore t_{10} = 13 + (10 - 1) \times 3$

$= 13 + 9 \times 3 = 13 + 27 = 40$

b. On veut déterminer la valeur de n si $t_n = 100$

$\because t_n = a + (n-1)\,r$ $\therefore 100 = 13 + (n-1) \times 3$ $\therefore 100 = 13 + 3n - 3$

D'où $3n = 100 - 10 = 90$ $\therefore n = 30$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez le nombre de termes de la suite arithmétique (7 ; 9 ; 11 ; ... ; 65) puis trouvez la valeur de dixième terme de la fin.

Déterminer la suite arithmétique

On peut déterminer la suite arithmétique étant donné le premier terme et la raison de la suite.

Exemple

(4) Déterminez la suite arithmétique (t_n) qui a $t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$

Solution

On sait que : $t_7 = 18$ et $t_{15} = 34$

$\because t_n = a + (n-1)\,r$ $\quad\therefore 18 = a + (7-1)\,r$

D'où $a + 6r = 18$ **(1)**

De même $34 = a + (15-1)\,r$

$a + 14r = 34$ **(2)**

Si on résout le système **(1)** et **(2)** on obtient $r = 2$

par substitution dans la première équation

$\therefore a + 6 \times 2 = 18 \quad \therefore\ a = 18 - 12 = 6$

$\therefore$ La suite est (6 ; 8 ; 10 ; ...)

Remarque

Pour trouver la valeur de r

$a + 14r = 34$

$-a - 6r = -18$

en multipliant les termes de la première équation par (-1)

par addition : $8r = 16$

On divise les termes de l'équation par 8

$r = 2$

Utiliser la calculatrice:

Pour vérifier la solution du système d'équations : $a + 6r = 18$; $a + 14r = 34$

En utilisant la calculatrice scientifique, on suivie les étapes suivantes :

Insérer les données

On appuie sur la touche MODE puis on choisit de la lise EQN par son numéro ou par la touche EXE dans certains calculatrices, puis on choisit l'équation linéaire anX + bnY = cn On insère respectivement les coefficients de (X) , (Y) et le terme constant (cn) de la première équation ainsi de même pour la deuxième équation comme suit :

1 = 6 = 18 = 1 = 1 4 = 3 4 =

Les résultats :

- On appuie sur la touche = pour la première fois pour obtenir la valeur de la première inconnue (x), le résultat X = 6
- On appuie une autre fois sur la touche = on obtient la valeur de la deuxième variable (y) le résultat est Y = 2

Pour sortir du programme: on appuie sur les touches : MODE 1

Essayez de résoudre

(4) Déterminez la suite arithmétique (t_n) dont $t_6 = 17$ et $t_3 + t_{10} = 37$

Moyennes arithmétiques

On sait que la moyenne arithmétique (la moyenne) de deux nombres a et b est $\frac{a+b}{2}$

Soit (9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25) une suite arithmétique

- la moyenne arithmétique des premier et troisième termes $= \frac{9+17}{2} = 13$ **Que remarquez -vous?**
- la moyenne arithmétique des deuxième et quatrième termes $= \frac{13+21}{2} = 17$ **Que remarquez- vous?**

Definition 2

Si a ; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c où b - a = c - b ,

c.-à-d 2b = a + c d'où $b = \frac{a+c}{2}$ pour celà : $\left(a\,;\frac{a+c}{2}\,;c\right)$ **est une suite arithmétique.**

On peut insérer quelques moyennes arithmétiques : x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n entre les deux nombres a et b. De sorte que : $(a\,; x_1\,; x_2\,; x_3\,; ...\,; x_n; b)$ **soit une suite arithmétique.**

Expression orale : Complétez :

(1) Si (3, 7, 11, ..., 43 , 47) est une suite arithmétique alors 7, 11, 15, ..., 43 sont appelés ......

(2) le nombre de moyennes arithmétiques = le nombre de termes de la suite ....

(3) le nombre de termes de la suite = le nombre de moyennes arithmétiques ....

Rappel

La moyenne arithmétique de quelques nombres est égale à leur somme divisé par leur nombre

Exemple : Déterminez la moyenne arithmétique de nombres: 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9

La moyenne arithmétique

$= \frac{4+6+7+8+8+9}{6}$

$= 7$

Insérer quelques moyennes arithmétiques entre deux nombres

Exemple

(5) Insérez 5 moyennes arithmétiques entre 6 et 48

Solution

I) On détermine le nombre de termes de la suite

Il y'a cinq moyennes entre le premier et le dernier termes de la suite arithmétique, alors le nombre de termes de la suite $n = 2 + 5 = 7$

II) On détermine la valeur de r : le nième terme de la suite arithmétique: $t_n = a + (n-1)\,r$

Par substitution de : $a = 6$, $t_n = 48$, $n = 7$

$48 = 6 + (7-1)\,r$

Alors $6r = 42$ **on divise le deux membres par** 6 $\therefore r = 7$

III) On utilise la valeur de r pour trouver les moyennes arithmétiques

$$\boxed{6\,;}\ 13\,;\ 20\,;\ 27\,;\ 34\,;\ 41\,;\ \boxed{48}$$

$$+7 \quad +7 \quad +7 \quad +7 \quad +7 \quad +7$$

Les moyennes sont : 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41

Essayez de résoudre

5. Insérez 4 moyennes arithmétiques entre 13 et 48.

Exercices 1 - 2

Déterminez laquelle de suites suivantes est arithmétique et laquelle est non arithmétique, puis déterminez la raison de la suite arithmétique :

1. (12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24)
2. (21 ; 25 ; 29 ; 34 ; 38)
4. (7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7)
2. (x + 2y ; 3x + 3y ; 5x + 4y) où x et y sont deux valeurs positives

Écrivez les cinq premiers termes de chacune de suites arithmétiques dans les cas suivants :

3. $a = 2\,;\ r = 5$
4. $a = 7\,;\ r = -3$
5. $a = -4\,;\ r = \frac{1}{4}$

Complétez :

6. Le septième terme de la suite arithmétique (2 , 5 , 8 , ...) est ....
7. Le onzième terme de la suite (t_n) où $t_n = 3n - 5$ est ....
8. Le nième terme de la suite arithmétique (81 ; 77 ; 73 ; ...) est ....
9. Le nième terme de la suite arithmétique $(\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{4}\,; 0\,; ...)$ est ....

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données:

10. Les suites suivantes sont toutes arithmétiques sauf la suite :

a. (3 ; 7 ; 11 ; 15 ; ...)

b. (-11 ; -15 ; -19 ; -23 ; ...)

c. $(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{5}\,;\frac{1}{6}\,;...)$

d. $(\frac{21}{5}\,;\frac{16}{5}\,;\frac{11}{5}\,;\frac{6}{5}\,;...)$

(11) Si (t_n) est une suite arithmétique où $t_n = 3n + 2$, alors la moyenne arithmétique de t_5 et t_{11} est :

a 8   b 16   c 22   d 26

Répondez aux questions suivantes :

(12) Trouvez le douzième terme et le vingtième terme de la suite arithmétique (4 , 7 , 10 , ...)

(13) Déterminez le nombre de termes de la suite arithmétique (63 , 59 , 55 , ... , - 133)

(13) Déterminez les trois premiers termes de la suite arithmétique (tn) ou $(t_n) = (2 + 5\,n)$ puis trouvez le sang du terme 72 dans cette suite $(t_n) = (2 + 5\,n)$

(14) (t_n) est une suite arithmétique dont $t_1 = -51$; $t_{22} = -156$, trouvez la raison de la suite.

(15) Déterminez la suite arithmétique dont le quatrième terme est égal à 18 et son septième terme est égal à 27.

(16) Une suite arithmétique dont le premier terme $= 3$, $t_n = 39$ et $t_{2n} = 79$, quelle est la valeur de n? Déterminez la suite.

(17) Déterminez la suite arithmétique dont le cinquième terme = 21 et son dixième terme est égal au triple de son deuxième terme.

(18) (T_n) est une suite arithmétique dont $t_1 + t_2 = 9$, $t_5 = 22$. Trouvez la suite.

(19) Déterminez la suite arithmétique dont le sixième terme = 20, et le rapport entre son quatrième et son dixième termes est 4 : 7.

(20) Une suite arithmétique dont le quatrième terme = 11, la somme de son cinquième et son neuvième termes est égale à 40. Déterminez la suite puis le rang du terme dont la valeur est 152.

(21) Si 36 ; a ; 24 ; b sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, déterminez les valeurs de a et b.

(22) Insérez 16 moyennes arithmétiques entre 27 et - 24.

Unité (1)

1 - 3 Série arithmétiques

Allez apprendre

- Notion de la série arithmétique
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant ses premier et dernier termes.
- Déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique connaissant son premier terme et sa raison

Vocabulaires de base

- Série arithmétique
- Symbole de la somme (Σ)

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Somme d'une série arithmétique

Le savant allemand Carl Gauss a fait une surprise à son maitre quand il avait sept an, il a mentalement calculé la somme des nombres de 1 à 100. Il remarque que la somme est égale à 50 pairs du nombre dont la sommes est 101 qui est égale à : $50 \times 101 = 5050$

Pouvez-vous mentalement déterminer la somme de 1 à 20?

German scientist
Karl -Gauss
1777 - 1855

Definition

Série arithmétique

C'est la somme des termes d'une suite arithmétique.

Par exemple : La somme de cinq premiers termes de la suite arithmétique (3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11). Elle est notée $S_5 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

Somme de n premiers termes d'une série arithmétique

I) Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant son premier et son dernier termes.

Soit une série arithmétique de premier terme a, de raison r, de dernier terme b, et le nombre de ses termes n. La somme de n termes de cette série noté S_n où :

$$S_n = a + (a + r) + (a + 2r) + ... + (b - r) + b \qquad (1)$$

On peut aussi écrire la somme par la façon suivante :

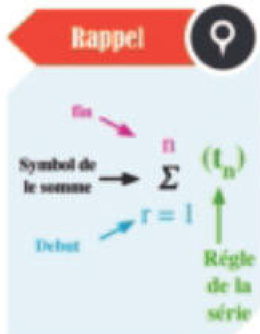
$$S_n = b + (b - r) + (b - 2r) + ... + (a + r) + a \qquad (2)$$

D'après (1) et (2) par addition, on obtient:

$$2S_n = (a + b) + (a + b) + (a + b) + ... + (a + b) \quad \text{n fois}$$

D'où $2S_n = n(a + b)$ **on divise par 2** $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + b)}$

Exemple



① Utiliser le symbole de la somme Σ :

Trouvez $\sum_{r=5}^{24} (4r - 3)$

Solution

Puisque l'expression est du premier degré, alors elle représente une suite arithmétique

$n = 24 - 5 + 1 = 20$ on trouve le nombre de terme de la suite

$t_n = 4n - 3$ Le nième terme de la suite

$t_5 = 4 \times 5 - 3 = 17$, $t_{24} = 4 \times 24 - 3 = 93$

$t_n = \frac{n}{2}(a + b)$ Formule de la somme

$t_{20} = \frac{20}{2}(17 + 93) = 1100$ par substitution de : $a = 17$, $b = 93$, $n = 20$

Essayez de résoudre

① Trouvez :

a) $\sum_{k=1}^{20} (6k + 5)$

b) $\sum_{m=7}^{32} (12 - 5m)$

Exemple

② Calculez la somme de la série arithmétique $2 + 5 + 8 + ... + 62$

Solution

$b = a + (n - 1)r$ Le nième terme de la suite

$62 = 2 + (n - 1) \times 3$ par substitution de $a = 2, r = 3, b = 62$

D'où $3n - 3 + 2 = 62$

$3n - 1 = 62$ alors $n = 21$

$S_n = \frac{n}{2}(a + b)$ Formule de la somme

$S_{21} = \frac{21}{2}(2 + 62) = 672$ par substitution de $a = 2, n = 21, t_n = 62$

Essayez de résoudre

II) Déterminer la somme de n termes d'une série arithmétique connaissant son premier terme et sa raison

On sait que $b = a + (n - 1)d$, $S_n = \frac{n}{2}(a + b)$

par substitution de la première relation à la deuxième, alors:

$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)r]$ alors $\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]}$

Exemple

3. Dans la série arithmétique 5 + 8 + 11 + ... trouvez :

a. La somme de 20 premiers termes.
b. La somme de 10 termes à partir du septième terme.
c. La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}

Solution

$a = 5$, $r = 8 - 5 = 3$

a. $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]$ — La formule de la somme

$S_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 5 + (20 - 1) \times 3]$ — par substitution de $a = 5$ et $r = 8 - 5 = 3$

$S_n = 10\ (10 + 19 \times 3)$

$= 10 \times 67 = 670$ — par le calcule

b. $t_n = a + (n - 1)r$ — le nième terme de la suite

$t_7 = a + 6r$

$= 5 + 6 \times 3 = 23$ — par substitution de $a = 5$, $r = 3$; $n = 7$

$S_{10} = \frac{10}{2} \times [2t_7 + (10 - 1) \times 3]$ — par substitution dans la formule de la somme

$S_{10} = 5 \times [2 \times 23 + 27]$

$= 5 \times 73 = 365$ — par le calcule

c. La somme des termes de la série à partir de t_{10} à t_{20}

$t_n = a + (n - 1)r$ — le nième terme de la suite

$t_{10} = a + 9r$

$= 5 + 9 \times 3 = 32$ — par substitution de $a = 5$, $r = 3$

$T_{20} = a + 19r = 5 + 19 \times 3 = 62$

$S_n = \frac{n}{2}(a + b)$ — Formule de la somme ($n = 20 - 10 + 1 = 11$)

$S_{11} = \frac{11}{2}(t_{10} + t_{20})$

$= \frac{11}{2}(32 + 62) = 517$ — par substitution de $t_{10} = 32$, $t_{20} = 62$, $n = 11$

Déterminer la suite arithmétique

Exemple

(4) Déterminer la suite arithmétique dans laquelle $t_1 = 11$, $t_n = 87$ et $S_n = 980$

Solution

a Trouvez la valeur de n

$S_n = \frac{n}{2}(a + b)$ — **La formule de la somme**

$980 = \frac{n}{2}(11 + 87)$ — **par substitution de $t_1 = 11, t_n = 87 ; S_n = 980$**

$98 \times \frac{n}{2} = 980$ alors : $n = 20$ termes — **par le calcule $t_{20} = 87$**

b Trouvez la valeur de r

$t_n = a + (n - 1) r$ — **le terme général**

$87 = 11 + 19 r$ — **par substitution de $t_1 = 11, n = 20 ; t_n = 87$**

$19 r = 87 - 11 = 76$ — **la division par 19**

$\therefore r = 4$

c déterminer la suite : $t_2 = 11 + 4 = 15$, $t_3 = 15 + 4 = 19$

La suite arithmétique est $(11 ; 15 ; 19 ; \ldots\ldots ; 87)$

Essayez de résoudre

(4) Déterminez la suite arithmétique dont

a $t_1 = 23$, $t_n = 86$, $S_n = 545$ **b** $t_1 = 17$, $t_n = -95$, $S_n = -585$

Exercices 1 - 3

Complétez se qui suit:

1. La somme des nombres entiers consécutifs de 1 à 20 est égale à ....
2. La somme de 10 premiers nombres pairs de nombres naturels est ....
3. La somme de nombres naturels impairs supérieur à 10 et inférieur à 30 est égale à ....
4. La somme de nombres naturels qui est divisible par 3 et compris entre 30 et 50 est égale à ....
5. La somme de neuf premiers termes de la suite arithmétique dont le premier terme est 2 et son dernier terme est 18, est ....
6. $\sum_{k=1}^{5} (2k + 1) =$ ....

Choisissiez La bonne réponse parmi les réponses données

7. La valeur de la série arithmétique $\sum_{r=1}^{4} (2r + 1)$ est égale à :
   - **a** 25
   - **b** 30
   - **c** 35
   - **d** 24
8. La série : $4 + 9 + 14 + ... + 5n - 1$ en utilisant le symbole de la somme s'écrit :
   - **a** $\sum_{r=4}^{n} (5r - 1)$
   - **b** $\sum_{r=1}^{n} (5r - 1)$
   - **c** $\sum_{r=1}^{n} (5r + 1)$
   - **d** $\sum_{r=1}^{5n-1} (3r + 1)$
9. La série : $7 + 12 + 17 + 22$ en utilisant le symbole de la somme, s'écrit :
   - **a** $\sum_{r=1}^{4} (5r + 2)$
   - **b** $\sum_{r=1}^{4} (4r + 3)$
   - **c** $\sum_{r=1}^{4} (7r + 1)$
   - **d** $\sum_{r=1}^{4} (3r + 4)$

Répondez aux questions suivantes

10. Trouvez la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique (14 ; 18 ; 22 ; ...)
11. Trouvez la somme des quinze premiers termes de la suite arithmétique dont le premier terme est 4 et son quinzième terme est 26.

12. Déterminez la somme des nombres pairs de 2 à 40.

13. Déterminez la somme de vingt premiers termes de la série arithmétique (6 + 4 + 2 + ...).

14. Déterminez la somme de 30 premiers termes de la suite (t_n) où $t_n = 2n + 3$

15. Déterminez la somme des termes de la suite arithmétique (2 ; 5 ; 8 ; ... ; 80).

16. Déterminez le nombre des termes qu'il faut additionner de la suite (16 ; 20 ; 24 ; ...) à partir de son premier terme pour obtenir 456.

17. Combien de termes faut-il additionner de la suite (- 16 ; - 14 ; -12 ; ...) à partir de son premier terme pour obtenir zéro?.

18. Déterminez le nombre des termes de la suite (27 ; 24, 21 ; ...) à partir de son premier terme pour que leur somme soit nulle.

19. **Epargne :** Ziad épargne 15 L.E. de son travail quotidienne. S'il épargne chaque jour une somme supérieur à 2 L.E. que le jour précédent. Déterminez la somme qu'il épargne pendent 15 jours.

Unité (1)

1 - 4 Suite géométrique

Allez apprendre

- Définir de la suite géométrique
- Représenter graphiquement de la suite géométrique.
- Le nième terme de la suite géométrique.
- Déterminer la suite géométrique.
- Moyennes géométrique
- Relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique

Vocabulaires de base

- Suite géométrique
- Nième terme
- Suite croissante
- Suite décroissante
- Suite alternante le signe
- Moyenne géométrique

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphique

Activité

(1) Tracez sur une feuille cartonnée un triangle rectangle isocèle.

(2) Découpez le triangles en deux triangle rectangles isocèles.

(3) Répétez le mémé travail comme le montre la figure suivante, et déterminez le nombre de triangles obtenus chaque fois.

(4) Répondez aux questions suivantes:

a Est-ce que le nombre de triangles obtenus forme une suite arithmétique? Expliquez votre réponse.

b Est-ce qu'il y a une relation entre les nombres de la suite obtenue? Quelle est cette relation?

c Pouvez-vous déterminer le nombre de triangles obtenus dans les cinquième et sixième figures?

De l'activité précédente, on déduit que:

La suite des figures obtenues est (1 ; 2 ; 4 ; 8 , ...) et ce n'est pas suite arithmétique car $t_{n+1} - t_n \neq$ constant. Mais on remarque que le quotient de la division d'un terme par le terme précédent est constant qui est égal à 2. Cette suite est appelée une suite géométrique.

Définition 1

➤ La suite (t_n) où $t_n \neq 0$ est appelée suite géométrique

Si $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ = constant pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$ et le constant est appelé la raison de la suite et noté (q) .

Exemple

1 Laquelle parmi les suites suivantes est géométrique? Puis déterminez la raison.

a $t_n = 2 \times 3^n$ **b** $t_n = 4\, n^2$

c La suite (t_n) où : $t_1 = 12$, $t_n = \frac{1}{4} \times t_{n-1}$ (pour tout n > 1)

Solution

a $\because \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3^{n+1-n} = 3$ **(constant)**

$\therefore$ La suite est géométrique de raison $q = 3$

b $\because \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{4\,(n+1)^2}{4n^2}$ **(n'est pas constant)**

$\therefore$ La suite n'est pas géométrique

c $\because (t_n) = (\frac{1}{4} \times t_{n-1})$ (pour $n > 1$)

$\therefore \dfrac{t_n}{t_{n-1}} = \dfrac{1}{4}$ **(constant)**

$\therefore$ La suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

Essayez de résoudre

1. La quelle des suites suivantes est géométrique ? Trouvez la raison pour la suite géométrique:

a $(t_n) = (3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96)$

b $(t_n) = (\frac{1}{243} ; \frac{1}{81} ; \frac{1}{27} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{3})$

c $(t_n) = (5 \times 2^n)$

d $(t_n) = (3\,(n+1)^2)$

Déterminer le nième terme d'une suite géométrique

De la définition (1) on peut déduire le nième terme de la suite géométrique (t_n) connaissant son premier terme a et sa raison q comme ce que suit:

$t_1 = a$, $t_2 = aq$, $t_3 = aq^2$ et $t_4 = aq^3$

Observant la progression de ce modèle, on trouve que le nième terme est: $\boxed{t_n = aq^{n-1}}$

Exemple

(3) Dans la suite géométrique (2 ; 4 ; 8 ; ....) trouvez:

i) Le cinquième terme. ii) Le rang du terme qui a pour valeur 512.

Solution

$\because$ a $= 2$, $q = \frac{4}{2} = 2$, $t_n = a \times (2)^{n-1}$

$\therefore$ $t_5 = ar^4 = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32$ la valeur du cinquième terme est 32

$\because$ $t_n = a \times q^{n-1}$ $\therefore$ $2 \times 2^{n-1} = 512$ par la division par 2

$\therefore$ $2^{n-1} = 2^8$ $\therefore$ $n - 1 = 8$ $\therefore n = 9$

Alors le neuvième terme est égal à 512

Essayez de résoudre

(3) Démontrez que la suite (t_n) où $t_n = 2 \times 3^{n-5}$ est une suite géométrique puis déterminez son septième terme.

Déterminer la suite géométrique

On peut déterminer la suite géométrique en connaissant son premier terme et sa raison.

Exemple

(4) Soit (t_n) une suite géométrique. Si $t_4 = 40$ et $t_7 = 320$, trouvez la suite.

Solution

$\because$ $t_4 = a q^3$ $\therefore$ $a q^3 = 40$ .... (1)

$\because$ $t_7 = a q^6$ $\therefore$ $a q^6 = 320$ .... (2)

Par la division de deux membres de deux équations (1) ; (2)

$\therefore$ $\frac{a q^6}{a q^3} = \frac{320}{40}$ (où $a q \neq 0$) $\therefore q^3 = 8$ $\therefore q = 2$

Par substitution à l'équation (1)

$\therefore a (2)^3 = 40$ d'où : $8 a = 40$

Par la division de deux membres par 8, on obtient $a = 5$

$\therefore$ La suite est (5 ; 10 ; 20 ; ....)

Expression orale :

Qu'en pensez-vous, si la puissance de la base q est un nombre pair? Expliquez votre réponse .

Utiliser la calculatrice scientifique pour écrire une suite géométrique:

Pour écrire la suite géométrique dont $a = 5$, $q = 2$ par exemple, on suit les étapes suivantes: On écrit la valeur de a (le nombre 5) puis on appuie sur la touche [=] puis la touche [×] puis on écrit la valeur de q (le nombre 2) puis on appuie sur la touche [=] le deuxième terme de la suite s' affiche, on appuie successivement la touche [=] les termes suivants s'affichent ...... etc

Essayez de résoudre

4) (t_n) est une suite géométrique dont $t_3 = 12$, $t_8 = 384$. Déterminez la suite

5) Une suite géométrique de termes positifs. Son deuxième terme est égal à 6, son dixième terme est égal à 1536. Déterminez la suite.

Exemple

En lien avec l'enseignement:

5) Le nombre d'élèves de la deuxième secondaire d'une zone éducative augmente à un taux annuel de 4%. Si le nombre actuel d'élèves est 2400 élèves. Quel sera le nombre d'élèves après 6 ans?

Solution

$\because$ Le nombre actuel d'élèves = 2400

$\therefore$ Le nombre d'élèves dans la deuxième année $= 2400 + 2400 \times 4\ \%$
$= 2400\ (1 + 0.04)$
$= 2400\ (1.04)$

Le nombre d'élèves dans la troisième année $= 2400\ (1.04) + 2400(1.04) \times 0.04$
$= 2400\ (1.04)\ (1 + 0.04) = 2400(1.04)^2$ ... etc

Rappel

$4\% = \frac{4}{100} = 0.04$

Alors le nombre d'élèves forme une suite géométrique $(2400\ ;\ 2400(1.04)\ ;\ 2400(1.04)^2\ ;\ ..)$

$a = 2400$, $q = 1{,}04$, $n = 6$

Par substitution dans la formule du nième terme de la suite géométrique $t_n = a \times q^{n-1}$

$t_n = (2400) \times (1{,}04)^5 = 2919{,}966966$

Alors, le nombre d'élèves après 6 ans est égal à 2920 élèves près .

Moyennes géométriques:

Les moyennes géométriques, comme les moyennes arithmétiques, sont les termes insérés entre deux termes non consécutifs d'une suite géométrique. On utilise la raison de la suite géométrique pour déterminer les moyennes.

Définition 2

➢ **Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors b est la moyenne géométrique de deux nombres a et c où: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ alors, $b^2 = a\,c$ d'où $b = \pm\sqrt{a\,c}$**

Enrichissez vos connaissances

En statistique, la moyenne géométrique d'un ensemble des nombres positifs $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ est la nième racine du produit des nombres. La moyenne géométrique = $\sqrt[n]{t_1 \times t_2 \times \ldots \times t_n}$

Déterminer les moyennes géométriques :

Exemple

(6) Insérez 5 moyennes géométriques entre 4 et 2916.

Solution

i) On détermine le nombre de termes de la suite

Il y a 5 moyennes entre le premier et le dernier terme de la suite géométrique; alors le nombre de termes est $n = 5 + 2 = 7$

ii) On détermine la valeur de q

Le nième terme de la suite géométrique : $t_n = a\,q^{n-1}$

Par substitution de: $a = 4$, $t_n = 2916$, $n = 7$

$2916 = 4 \times q^{7-1}$ Alors: $4 \times q^6 = 2916$

On divise les deux termes par 4 : $q^6 = 729$ Alors: $q^6 = (\pm 3)^6$ d'où $q = \pm 3$

iii) On utilise la valeur de q pour déterminer les moyennes géométriques:

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36 \xrightarrow{\times 3} 108 \xrightarrow{\times 3} 324 \xrightarrow{\times 3} 972 \xrightarrow{\times 3} 2916$$ ou

$$4 \xrightarrow{\times -3} -12 \xrightarrow{\times -3} 36 \xrightarrow{\times -3} -108 \xrightarrow{\times -3} 324 \xrightarrow{\times -3} -972 \xrightarrow{\times -3} 2916$$

Les moyennes sont: 12 ; 36 ; 108 ; 324 ; 972 ou - 12 ; 36 ; - 108 ; 324 ; - 972

Pensé critique: Qu'en pensez-vous de la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres réelles positifs égaux?

8 On insère quatre moyennes géométriques entre deux nombres, de sorte que la somme de la première et de la quatrième moyennes soit égale à 90 et la somme de la deuxième et de la troisième moyennes soit égale à 60 ; quelles sont les deux nombres.

Solution

$\because$ Le nombre de moyennes = 4 $\qquad \therefore$ Le nombre de termes de la suite = 4 + 2 = 6

$\therefore$ Posons le premier nombre = a , alors la première et la quatrième moyennes sont t_2 ; t_5

$\therefore t_2 + t_5 = 90 \qquad \therefore a\,q + a\,q^4 = 90$

$\therefore a\,q\,(1 + q^3) = 90 \qquad$ **(1)**

$\because$ La deuxième moyenne et la troisième moyenne sont t_3 et t_4

$\therefore a\,q^2 + a\,q^3 = 60 \qquad \therefore a\,q^2\,(1 + q) = 60 \qquad$ **(2)**

On divise les deux membres de l'équation **(1)** par les deux membres de l'équation **(2)**

$$\frac{aq(1 + q)(1 - q + q^2)}{aq^2\,(1 + q)} = \frac{3}{2}$$

$\therefore 2q^2 - 2q + 2 = 3q \qquad \therefore 2q^2 - 5q + 2 = 0 \qquad \therefore (q - 2)(2q - 1) = 0$

$\therefore q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

Par substitution par $q = 2$ $\qquad \therefore a = 5$

Par substitution par $q = \frac{1}{2}$ $\qquad \therefore a = 160 \qquad$ les deux nombres sont 160 et 5

Exercices 1 - 4

Déterminez les suites géométriques parmi ce qui suit, puis trouvez sa raison:

1. (1 ; 4 ; 9 ; 16 ; ......)
2. (243 ; 81 ; 27 ; 9 ; ......)
3. $(\frac{1}{128} ; \frac{1}{64} ; \frac{1}{32} ; \frac{1}{16} ; ...)$
4. (- 1 ; 3 ; - 9 ; - 27 ; ......)

Dans chacun des cas suivants, écrivez les cinq premiers termes de la suite géométrique :

5. $a = 2$, $q = 4$
6. $a = -4$, $q = 2$
7. $a = 1$, $q = \frac{-1}{2}$
8. $a = -128$, $q = \frac{-1}{2}$

Complétez ce qui suit:

9. Le septième terme de la suite géométrique (64 ; 32 ; 16 ; .....) est égale à ....
10. Le sixième terme de la suite géométrique $(\frac{1}{243} ; \frac{1}{81} ; \frac{1}{27} ; .....)$ est ....
11. Le cinquième terme de la suite (t_n) où $t_n = 2 \times (3)^{n-1}$ est égal à ....
12. Le nième terme de la suite géométrique (3 ; - 6 ; 12 ; ......) est ....
13. La moyenne géométrique de deux nombres 4 et 16 est ....
14. Si la moyenne géométrique de deux nombres 9 et y est 15, alors y est égal à ....
15. Si a ; b ; c sont trois termes positifs et consécutifs d'une suite géométrique, alors b = ...

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données:

16. Le cinquième terme de la suite géométrique $(8 ; 6 ; \frac{9}{2} ; .....)$ est :
   - **a** $\frac{27}{8}$
   - **b** $\frac{27}{16}$
   - **c** $\frac{9}{4}$
   - **d** $\frac{81}{32}$
17. Les suites suivantes sont géométriques sauf :
   - **a** (3 ; -6 ; 12 ; -24 ; ....)
   - **b** (- 2 ; 4 ; 10 ; 16 ; .....)
   - **c** $(\frac{3}{2} ; 1 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{9})$
   - **d** $(\frac{3b}{a} ; 6 ; \frac{12a}{b} ; \frac{24a^2}{b^2} ; ...)$ où $a > 0$, $b > 0$

Répondez aux questions suivantes:

18 Si (t_n) est une suite telle que $t_n = 5 \times 2^n$. Démontre qu'elle est géométrique, puis écrivez leur trios premiers termes.

19 Soit la suite géométrique $\left(\frac{1}{8} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; -1 ; ....\right)$. Déterminez :

a Le dixième terme **b** Le rang du terme dont la valeur = - 1024 .

20 Montrez que la suite (t_n) est une suite géométrique où $t_n = \frac{3}{8}(2)^n$ puis déterminez son huitième terme et le rang du terme qui est égal à 768.

21 Une suite géométrique de raison $= \frac{1}{2}$ et son troisième terme = 24. Trouvez la suite.

22 Une suite géométrique dont le premier terme = 9 et le sixième terme = 288. Trouvez cette suite.

23 Déterminez la suite géométrique (t_n) dont $t_3 = 12$; $t_8 = 384$.

24 Déterminez la suite géométrique dont son troisième terme = 18, son sixième terme = 486.

25 Déterminez la suite géométrique (t_n) dont $t_2 = 10$; $t_6 = 160$.

26 Déterminez la moyenne géométrique de 16 ; 49

Unité (1)

Séries géométriques

1 - 5

Vous avez déjà apprendre que la série est la somme d'une suite, et la somme d'une série arithmétique, et maintenant vous pouvez trouver la somme de la série géométrique suivante?

95 + 285 + 855 + ... 1869885. On remarque la difficulté pour calculer cette somme par les méthodes traditionnelle, pour ce la on a besoin de trouver une formule pour calculer cette somme facilement et rapide. Ce qu'on va connaître maintenant.

La somme d'une série géométrique

La série géométrique est la somme des termes de la suité géométrique et on la note S.

Somme des n premiers termes d'une série géométrique

1) Trouver la somme des n termes d'une série géométrique en fonction du son premier terme et sa raison.

Soit $a + aq + aq^2 + \dots\dots + aq^{n-1}$ une série géométrique dont le premier terme a et la raison q, alors on peut calculer la somme S_n comme suit:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots\dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \qquad \dots (1)$$

En multipliant les deux membres par q alors :

$$qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots\dots + aq^{n-1} + aq^n \qquad \dots (2)$$

Par soustraction membre à membre, on obtient:

$s_n - qs_n = a - aq^n$ c-a-d :

$s_n (1- q) = a(1 - q^n)$

En divisant les deux membres par (1- q) où $1 - q \neq 0$ alors

$$\boxed{s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1}$$

Pensé critique :

Quelle est la valeur de la somme si q = 1 ?

Exemple

1. Trouvez la somme de la série géométrique dont : a = 3 , q = 2 and n = 8

Allez apprendre

- La somme d'une Série géométrique
- Utiliser les symbole de la somme
- Seris géométriques infini.
- La somme d'une Série géométrique infini
- Transformer une fraction décimale périodique en une fraction rationnelle

Vocabulaires de base

- La somme d'une suite géométrique
- Suites géométriques infini.
- La somme d'une suite géométrique infini

Aides pédagogiques

- Calculatrice
- Logiciels de graphisme

Solution

La somme d'une suite géométrique : $s_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant : $a = 3$, $q = 2$, $n = 8$

$s_8 = \dfrac{3(1 - 2^8)}{1 - 2}$ par substitution $s_8 = 3 \times 255 = 765$

Essayez de résoudre

1) Trouvez la somme de séries géométriques dans les quelles:

a) $a = 4$, $q = 3$, $n = 6$ b) $a = 1000$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$

2) Trouvez la somme des n termes d'une série géométrique en fonction du ses premier et dernier termes.

On sait que : $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1 - q}$ .... (1)

et : $b = a\,q^{n-1}$ En multipliant les deux membres par q alors $bq = a\,q^n$ ...... (2)

par substitution de (2) en (1) alors : $\boxed{s_n = \dfrac{a - bq}{1 - q} , q \neq 1}$

2) Trouvez la somme de la série géométrique: $1 + 3 + 9 + \ldots\ldots\ldots + 6561$

Solution

La formule de la somme d'une suite géométrique : $s_n = \dfrac{a - bq}{1 - q}$

En remplaçant : $a = 1$, $q = 3$, $b = 6561$

$s = \dfrac{1 - 6561 \times 3}{1 - 3}$ par simplification $s = \dfrac{19682}{2} = 9841$

En utilisant le symbole de la somme.

Exemple

3) Trouvez : $\sum_{r=5}^{12} 3(2)^{r-1}$

Solution

Puisque l'expression dans le symbole de la somme à la forme d'une puissance, alors il représente une suite géométrique

$t_5 = a = 3(2)^{5-1} = 48$, $q = 2$, $n = 12 - 5 + 1 = 8$

La somme de la série géométrique : $s_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

En remplaçant : $a = 48$, $q = 2$, $n = 8$

$s_8 = \dfrac{48(1 - 2^8)}{1 - 2}$ **par simplification** $s_8 = 48 \times 255 = 12240$

Exemple

Déterminer la suite géométrique

4 Trouvez la suite géométrique dont le premier terme = 243 et son dernier terme = 1 , sachant que la somme de ses terme est 364.

Solution

$\because$ a = 243 , b= 1 , s_n = 364 , $s_n = \dfrac{a - bq}{1 - q}$

$\therefore 364 = \dfrac{243 - q}{1 - q}$ $\therefore 364\,(1 - q) = 243 - q$

$\therefore 364 - 364\,q = 243 - q$ $\therefore 364\,q - q = 364 - 243$

$\therefore 363\,q = 121$ En divisant les deux membres par 363 $\therefore q = \frac{1}{3}$

La suite géométrique est (243 ; 81 ; 27 ; ....)

Essayez de résoudre

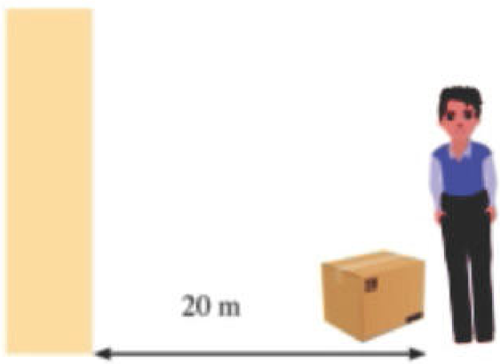
4 Trouvez la suite géométrique dont le premier terme = 243 et son dernier terme = 1 , sachant que la somme de ses terme est 364.

Séries géométrique infinies

Réfléchissez et discutez

Zyad veut déplacer une boite vers un mur, qui se trouve à une distance de 20 mètres, en plusieures étapes de sorte que la distance déplacée égale à la moitié de la distance restante chaque fois. Zyad peut-il atteindre le mur ?

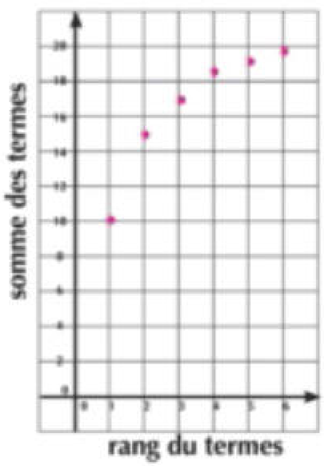
On peut répondre à cette question par l'étude des séries géométriques non finies (infinies).



Définition 2

Une série géométrique infinies est une série qui a un nombre infini des termes. Si la somme de ses termes est un nombre réel alors elle est convergente; car la somme tends vers un nombre réel. Si la série n'a pas de somme, alors elle est divergente.

Dans le paragraphe réfléchissez et discutez, la somme des distances parcourues est donné par la série 10 + 5 + 2.5 +1.25 + ... chaque fois que le nombre des termes augmente la somme rapproche de 20 mètres, qui est la somme de cette série. Par conséquence on peut considérer que Zyad peut atteindre le mur quand les termes de la suite augmententent jusqu'à l'infinie. La figure ci-contre représente la somme S_n, pour cela la série est convergente et la somme rapproche d'un nombre réel lorsque $|q|< 1$ la série est divergente et la somme ne rapproche pas de nombre réel lorsque $|q| \geqslant 1$



Exemple

Les séries convergentes et divergentes

6 Parmi les séries géométriques suivantes, la quelle peut - on calculer la somme à l'infini de ses termes?

a 75 + 45 + 27 + ... b 24 + 36 + 54 + ...

Solution

a On trouve la raison de la série $q = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$ donc on peut calculer la somme à l'infini de ses termes car $-1 < \frac{3}{5} < 1$

b On trouve la raison de la série $q = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ donc on ne peut pas calculer la somme à l'infini de ses termes car $\frac{3}{2} > 1$

Somme des séries géométriques à l'infini

On a vu que la somme de n termes d'une suite géométrique est donné par la formule $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ Si on addition un nombre infini de ses termes, alors q^n rapproche de zéro si $-1 < q < 1$ Alors la somme devienne : $s_\infty = \frac{a}{1 - q}$

Exemple

(7) Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes si cela est possible:

a $\frac{81}{8} + \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + \ldots\ldots$ **b** $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{25}{24} + \ldots\ldots$

Solution

a On trouve la raison de la série $q = \frac{27}{4} \div \frac{81}{8} = \frac{27}{4} \times \frac{8}{81} = \frac{2}{3}$

$\because -1 < \frac{2}{3} < 1$ $\therefore$ donc on peut calculer la somme à l'infini

$\because a = \frac{81}{8}$, $q = \frac{2}{3}$ en utilisant la formule $s_\infty = \frac{a}{1 - q}$

$\therefore s_\infty = \frac{\frac{81}{8}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{81}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{243}{8}$

b On trouve la raison de la série : $q = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

$\because \frac{5}{4} > 1$ $\therefore$ donc la série est divergente et n'a pas de somme

Essayez de résoudre

(7) Trouvez la somme de chacune des séries géométriques suivantes si celà est possible :

a $12 - 24 + 48 - 96 \ldots\ldots$ **b** $\frac{7}{5} + \frac{21}{10} + \frac{63}{20} + \ldots\ldots$

Exemple En utilisant le symbole de la somme

(8) Trouvez $\sum_{r=1}^{\infty} 42\left(\frac{6}{7}\right)^{r-1}$

Solution

La somme d'une suite géométrique à l'infini : $s_\infty = \frac{a}{1 - q}$

par substitutions : $a = 42$ où $q = \frac{6}{7}$: alors $s_\infty = \frac{42}{1 - \frac{6}{7}} = 294$

Exercices 1 - 5

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. La somme des cinq premiers termes de la suite géométrique dans la quelle $a = 1$ et $q = 2$ est égale à :

   a) 32 b) 31 c) 30 d) 29

2. La somme à l'infini des termes de la suite (4 ; 2 ; 1 ; .....) est :

   a) 8 b) 12 c) 16 d) 20

3. Si la somme à l'infinie des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ est égale à 4, alors son premier terme est :

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4. Si la somme à l'infinie des termes d'une suite géométrique de premier terme 12 est égale à 96, alors sa raison :

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{3}{4}$

5. Une suite géométrique son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes suivants, alors la raison de la suite est égale à :

   a) 0,5 b) 0,333 c) 0,25 d) 0,666

Répondre aux questions suivantes:

6. Trouvez la somme de chacune des suites géométriques suivantes :

   a) (6 ; 12 ; 24 ; .... à 6 termes)

   b) (125 ; 25 ; 5 ; .... à 6 termes)

   c) (3 ; - 6 ; 12 ; .... ; 768)

7. Parmi les suites géométriques suivantes, laquelle peut-on calculer la somme à l'infini? Trouvez cette somme si celà est possible:

   a) (24 ; 12 ; 6 ; ...) b) (3 ; - 6 ; 12 ; ...)

   c) $(\frac{1}{32} ; \frac{1}{16} ; \frac{1}{8} ...)$ d) $(2 \times 5^{1-n})$

8. Trouvez la somme à l'infini de chacune des suites géométriques suivantes :

   a) (32 ; 16 ; 8 ; ...) b) $(\frac{81}{16} ; \frac{27}{8} ; \frac{9}{4} ...)$

   c) $(2 ; \sqrt{2} ; 1 ; ...)$ d) $(\frac{27}{4} ; \frac{27}{16} ; \frac{27}{64} ...)$

   d) $(t_n) = (3^{3-n})$ e) $(t_n) = (\frac{2}{3})^{n-1}$

9. Trouvez la suite géométriques dont le premier terme = 243 ; son dernier terme = 1 et la somme de ses termes = 364

10. Trouvez la suite géométriques dont la somme de ses termes = 1093 et son dernier terme = 729 et sa raison = 3.

11. Trouvez la somme de la suite géométriques $(t_n) = (3^{n-1})$ à partir de son quatrième terme jusqu'au son dixième terme.

12. Dans la suite géométrique (1 ; 3 ; 9 ; ....), trouvez le plus petit nombre des termes faut-t-il additionner à partir de son premier terme pour obtenir une somme plus grand que 1000.

13. Trouvez la suite géométriques dont la somme à l'infini = 48 et son deuxième terme = 12 .

14. Combien de termes de la suite géométrique (3 ; 6 ; 12 ; ....) faut- il additionner à partir du premier terme pour obtenir 381?

15. Démontrez que la suite $(t_n) = (10 \times 2^{n-2})$ est une suite géométrique, puis trouvez le nombre des termes qu'il faut additionner à partir du premier terme pour obtenir 2555

16. (t_n) est une suite géométrique, telle que $t_2 = 6$, $t_3 - t_1 = 9$. Déterminer la suite et la somme de douze premiers termes

17. La somme des quatre premiers termes d'une suite géométrique positive = 45, son sixième terme dépasse son deuxième terme de 90. Déterminez la suite.

18. Si le premier terme d'une suite géométrique infinie est 18 et son quatrième terme est $= \frac{16}{3}$, trouvez la somme de la suite?

19. Trouvez la suite géométrique telle que la somme de ses premier et deuxième termes = 16 et la somme de tous les termes = 25.

20. Une suite géométrique infinie son premier terme est égal à la somme à l'infini de tous les termes suivants, la somme de ses premier et deuxième termes = 9. Déterminer la suite .

21. Une suite géométrique infini, un terme quelconque = le double de la somme à l'infini de tous les termes que le suit, si son quatrième terme = 3. Déterminer la suite.

22. **En lien avec le revenu:** une personne commence son travail dans une usine à un salaire de 3600 L.E. et une prime annuelle de 0,6 % du salaire de l'année précédente. Calculez son salaire en septième année et la somme des salaires à la fin des sept premiers années.

23. **En lien avec le revenu :** Le salaire annuel d'une personne commence par 3600 L.E. Une augmentation annuelle de $\frac{1}{20}$ du salaire précédant. Combien son salaire sera t-il après 11 années? Quelle est la somme des salaires après cette période?

24. **En lien avec l'économie :** Quand Karim avait 6 ans il a épargné 150 L.E. puis il épargne le double de ce qu'il épargne l'année précédente. A l'âge de 10 ans Karim veut acheter un Ordinateur qui coûte 5000 L.E. Est-ce que la somme qu'il a épargné est suffisante pour acheter l'Ordinateur? Expliquez votre réponse.

Exercices généraux

1) La série arithmétique: $3 + 7 + 11 .... + 35$ s'écrit en utilisant le symbole de la somme à la forme:

a $\sum_{r=1}^{8} (4r - 1)$ **b** $\sum_{r=1}^{9} (4r - 1)$ **c** $\sum_{r=1}^{9} (3r - 4)$ **d** $\sum_{r=1}^{8} (3r - 4)$

2) Toutes les suites suivantes sont des suites arithmétiques sauf :

a $(11\ ;\ 15\ ;\ 19\ ;\ ...)$ **b** $(-23\ ;\ -28\ ;\ -33\ ;\ ...)$

c $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ ....)$ **d** $(\frac{32}{5}\ ;\ \frac{26}{5}\ ;\ \frac{20}{5}\ ;\ ...)$

3) Si $2a + 2\ ;\ 6a - 2\ ;\ 7a$ sont trois termes consécutives d'une suite arithmétique, alors a :

a 1 **b** 2 **c** 3 **d** 4

4) La somme de la série arithmétique $\sum_{r=3}^{8} (2r + 1)$ est égal à :

a 64 **b** 72 **c** 76 **d** 80

5) Une suite géométrique dont la somme de n premiers termes est donnée par la relation $S_n = 3(3^n - 1)$, alors le cinquième terme de la suite est égal à :

a 162 **b** 243 **c** 81 **d** 729

6) Si la somme de deuxième et quatrième termes d'une suite arithmétique est égale à 2 et la somme de ses sixième, septième et huitième terme est égale à – 45. Trouvez la suite.

7) Trois nombres forment une suite arithmétique dont la somme = 12 et le produit = 48. Trouvez ces nombres .

8) Trois nombres forment une suite arithmétique dont la somme = 27 ; le carré du $2^{ème}$ terme dépasse le produit du 1^{ier} et $3^{ème}$ terme de 16. Trouvez ces nombres.

9) Si on a inséré des moyennes arithmétiques entre 3 et 53, le rapport entre la somme de deux premières moyennes et la somme de deux dernières moyennes est 3 : 13. Trouvez ces moyennes .

10) Dans la suite arithmétique (9 ; 12 ; 15 ; ...). trouvez:

a La somme des 15 premiers termes.

b La somme des termes de la suite à partir de son cinquième terme au quinzième terme

c Le nombre des termes dont la somme = 750 à partir du premier terme.

11) Dans la suite géométrique (2 ; 6 ; 18 ; ……..) trouver le plus petit nombre des termes qu'il faut additionner à partir du 1^{er} terme pour que la somme soit plus grand que 6500.

12) (t_n) est une suite géométrique positive dans la quelle $t_6 = \frac{1}{9} t_4$, $t_3 + t_6 = 28$
Trouvez la suite et la somme de ses dix premiers termes.

13) Une suite géométrique positive dont la somme des ses quatre premiers termes = 60 et la somme des quatre termes qui les suit = 960. Trouvez la suite et la somme de ses septe termes à partir de son troisième terme.

Unité 2

Arrangements et Combinaisons

Introduction de l'unité

Le dénombrement est l'un des compéteces de base en mathématiques, souvent on est cofronté à des problèmes pour en résoudre on a besoin des procedures et des méthodes variées de dénombrement. Dans cette unité nous allons aborder les différentes stratégies du dénombrement parmi lequelles le principe fondamental de dénombrement et ses applications parmi lesquelles : la notion de permutation qui exprime le nombre des méthodes de réarrangement possible d'objets d'un ensemble.

Les combinaisons : C'est le choix sans répétitions.

Les grands savant Omar El khayaam, Isaak Newton et Bascal avaient un grand apport pour le fondement de ce domaine, cet apport a une influence jusqu'à aujourd'hui.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le principe de dénombrement et des applications simples.
- Reconnaître l'introduction des Arrangements et des Combinaisons.
- Utiliser l'ordinateur pour calculer les Arrangements et les combinaisons.

Vocabulaires de base

- Principe fondamental de dénombrement
- Principe conditionnelle de dénombrement
- Opération
- Diagramme de l'arbre
- Factorielle
- Arrangements
- Combinaisons
- Eléments
- Ordre
- Comité
- Sous-ensemble

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Principe de dénombrement.

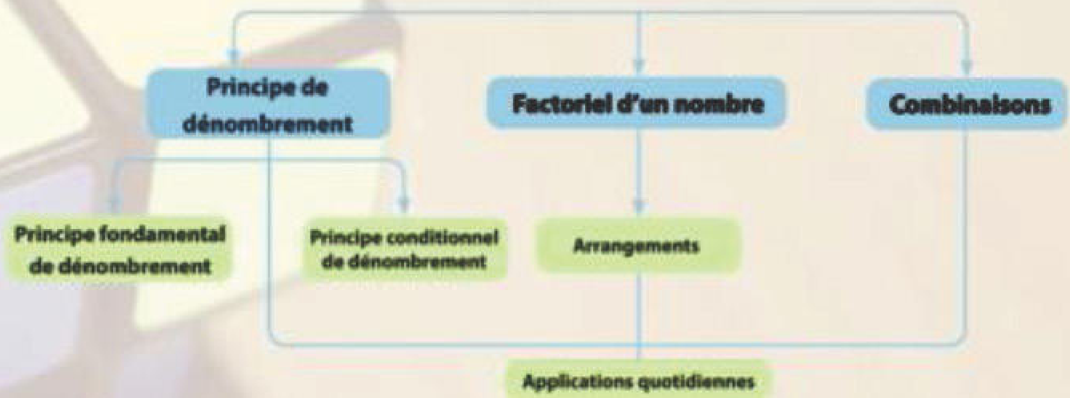
Leçon (2 - 2): Factorielle - Arrangements.

Leçon (2 - 3): Combinaisons

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – Logiciels de graphisme

Organigramme de l'unité



Unité 2

2 - 1 Principe de dénombrement

Allez apprendre

- Notion de principe de dénombrement et applications simples.
- Principe fondamental de dénombrement.
- Principe conditionnelle de dénombrement .

Vocabulaires de base

- Principe fondamental de dénombrement
- Operation
- Diagramme de l'arbre

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

Si on vous a demandé d'habiller une chemise et un pantalon parmi deux chemises et trois pantalons
De combien de façons peut-on choisir le tenue?

Exemple

1. Combien y a-t-il de possibilités de choisir une comité d'un étudiant parmi trois étudiants (Ashraf, Mohamed et Hassan) et d'une étudiante parmi deux étudiantes (Samar et Mona)?

Solution

Dans cet exemple, c'est facile de savoir le nombre des méthodes de choix. Par exemple, on peut choisir : Ashraf , Samar ou Ashraf , Mona ou Mohamed , Mona ou Hassan , Samar .... etc.
Cela peut être exprimé par le diagramme suivant (l'arbre des choix):

Etudiant	Etudiante	Choix
Ashraf	Samar	Ashraf· Samar
	Mona	Ashraf· Mona
Mohamed	Samar	Mohamed· Samar
	Mona	Mohamed· Mona
Hassan	Samar	Hassan· Samar
	Mona	Hassan· Mona

Le nombre des méthodes de choix d'un étudiant parmi trois = 3
Le nombre des méthodes de choix d'une étudiante parmi deux = 2
Le nombre des méthodes de choix = $3 \times 2 = 6$ méthodes

Essayez de résoudre

1. Dans le pragraph **Réfléchissez et discutez** , déterminez le nombre possible des choix?

Exemple

2. Combien de nombres de trois chiffres peut-on former de sorte que:
   - le chiffre des unités soit des éléments $\{3 ; 7\}$
   - le chiffre des dizaines soit des éléments $\{2 ; 4 ; 9\}$
   - le chiffre des centaines soit des éléments $\{1 ; 5\}$

Solution

Centaines	Dizaines	Unités	Le nombre
1	2	3	123
		7	127
	4	3	143
		7	147
	9	3	193
		7	197
5	2	3	523
		7	527
	4	3	543
		7	547
	9	3	593
		7	597

A l'aide du diagramme de l'arbre, on trouve que :

Le nombre de façons de choix du chiffre des unités × Le nombre de façons de choix du chiffre des dizaines × Le nombre de façons de choix du chiffre des centaines = 2 × 3 × 2 = 12 méthodes

A apprendre

Principe fondamental du dénombrement

Définition : Soient m_1 le nombre de façons d'effectuer un travail quelconque, m_2 le nombre de façons d'effectuer un seconde travail, m_3 le nombre de façons d'effectuer un troisième travail … etc. alors le nombre de façons d'effectuer ces travaux simultanément = $m_1 \times m_2 \times m_3 \times ... \times m_n$

Exemple

(3) Khaled peut choisir l'une des garnitures suivantes : foie, poulet ou poisson et l'une des boissons suivantes : orange, citron ou de la mangue. Combien de repas Khaled peut-il choisir ?

Solution

Le nombre de choix des garnitures = 3 manières.

Le nombre de choix des boissons = 3 manières.

Le nombre de choix = 3 × 3 = 9 manières.

Essayez de résoudre

(2) Dans un restaurant, on propose 6 types de pizza, 4 types de salades et 3 types de bossons. Quel est le nombre de repas possible peut-on présenter dans ce restaurant ? Sachant qu'un repas consiste : une pizza, une salade, un bosson?

Exemple **Principe conditionnelle de dénombrement**

(4) Combien y a-t-il de manières pour former un nombre de 3 chiffres différents des chiffres {0 , 1 , 2 , 3 , 4}?

Solution

On commence par le chiffre de centaines (une condition nécessaire que ce nombre ne soit pas zéro)

Le nombre de manières de choisir le chiffre des centaines = 4

Le nombre de manières de choisir le chiffre des dizaines = 4

place	centaines	dizaines	unités
N.de manières	4	4	3

Le nombre de manières de choisir le chiffre des unités = 3

$\therefore$ Le nombre total de manières $= 4 \times 4 \times 3 = 48$ manières

Essayez de résoudre

3) De combien de façons peut-on former un nombre de quatre chiffres différents des chiffres {2; 3; 4; 7}, de sorte que le chiffre de dizaines soit pairs .

Exercices (2 -1)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Le nombre de façons que 4 étudiants occupent 4 sièges situant de même rangé égale à :

a) 1 b) $4 + 4$ c) 4×4 d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

2) Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres différents des chiffres { 5 ; 3 ; 0 ; 2} ?

a) 3×2 b) 4×2 c) 3×3 d) 3×4

3) Combien de nombres impaires qui se composent de trois chiffres distincts parmi les chiffres {2 ; 3 ; 6 ; 8}?

a) $8 \times 6 \times 3$ b) $4 \times 3 \times 3$ c) $4 \times 3 \times 2$ d) $2 \times 3 \times 1$

4) Combien de nombres formés de trois chiffres distincts parmi les chiffres {2 ; 3 ; 5}?

5) Combien de nombres formés de quatre chiffres distincts dont le chiffre des unités est 6 peut-on former parmi les chiffres {2 ; 3 ; 6 ; 8} ?

6) La plaque d'immatriculation d'un gouvernorat se compose de trois lettres alphabétiques distinctes suivie d'un nombre a trois chiffres distincts et différents (le zéro ne peut être de ces chiffres) Combien pourrait-on avoir de plaques d'immatriculation différentes?

7) Combien de nombres formés de trois chiffres différents des nombres {2 ; 5 ; 8 ; 9} et qui sont inferieurs à 900?

8) Les numéros des réseaux cellulaires dans un pays consistent onze chiffres. On compose d'abord (025) puis on compose le reste du numéro. Trouvez le nombre maximum des lignes qui peuvent-être chargés dans ces réseaux.

Factorielle – Arrangements

2 - 2

Réfléchissez et discutez

A l'aide de ce que vous avez étudiez dans la leçon précédente, répondez aux questions suivantes :

1) De combien de façons quatre étudiants peuvent-ils occuper les trois sièges d'une rangée ?

2) De combien de manières cinq concourant peuvent se lever au bord de la piscine pour commencer le concours?

Allez apprendre

- Factorielle d'un nombre
- Arrangements

A apprendre

Définition 1

Factorielle : La factorielle d'un nombre entier positif n s'écrit sous la forme n! il est égal au produit de tous les nombres entiers positifs inferieurs ou égale à n :

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3\times 2\times 1$$

Vocabulaires de base

- Factoriel d'un nombre
- Arrangements
- Sub-Permutation

Note

- Si $n = 0$ alors $0! = 1$
- Si $n = 1$ alors $1! = 1$
- $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 4\ 3!$,

  $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 6 : 5!$

En général : $n! = n\,(n-1)!$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Exemple

1) a) Calculez $\frac{10!}{8!}$ b) Soit $n! = 120$. trouvez la valeur de n.

Solution

a) $\frac{10!}{8!} = \frac{10\times 9\times 8!}{8!} = 10\times 9 = 90$

b) $n! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \qquad \therefore n! = 5! \qquad \therefore\ n = 5$

Essayez de résoudre

1) Calculez : a) $\frac{15!}{12!}$ b) $\frac{7!}{5!} + \frac{9!}{7!}$

Exemple

2) Trouvez l'ensemble de solution de l'équation : $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

Solution

$\because \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!\, n\,(n-1)}{(n-2)!} = 30 \qquad \therefore\ n(n-1) = 6 \times 5 \qquad \therefore\ n = 6$

Essayez de résoudre

(2) Soit $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{2}{(n+1)!} = \dfrac{56}{(n+2)!}$. trouvez la valeur de n

Pensé critique : soit $a! = 0!$. quelle est la valeur de n?

Arrangements

Exemple préliminaire : Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à partir des chiffres {2 ; 3 ; 5}?

Les nombres sont : 532 ; 352 ; 523 ; 253 ; 325; 235. chacun de ces nombres est appelé un arrangement des chiffres donnés.

Le nombre $= 3 \times 2 \times 1$ **on le note** A_3^3 **qui se lit** (3 A 3).

Le tableau suivant indique comment obtenir le nombre de façons :

centaines	dizaines	unités
1	2	3

Pour cela un arrangement d'un nombre d'objets, c'est de les agencer dans un certain ordre

Définition 1

Le nombre d'ARRANGEMENTS de n objets distincts pris r à r chaque fois est noté par A_n^r où:

$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ où $r \leq n$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Par convention $A_n^0 = 1$

Par exemple :

- $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 \times \dfrac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}\ 3 \times 2 \times 1 = \dfrac{6!}{(6-3)!} \qquad A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!}$
- $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \dfrac{2 \times 1}{2 \times 1} = \dfrac{7!}{(7-5)!}$

De ce que précède, on déduit:

$A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ où $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \leq n$

Utilisation d'une calculatrice

L'arrangement est symbolisé par ^nP_r sur une calculatrice scientifique On utilise les touches Shift × **Pour calculer la valeur de $^5P_2$ on appuie successivement sur les touches:**

5 Shift × 2 =

Réponse = 20

Exemple

(3) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :

a A_7^4 b A_4^4 c A_4^3

Solution

a $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ b $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Que remarquez-vous de deux phrases b et c ?

Essayez de résoudre

(3) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : **a** $A_5^2 + A_6^3$ **b** $\dfrac{A_5^5}{A_5^4}$

Exemple

(4) De combien de façons distinctes cinq étudiants peuvent-ils occuper les sept sièges d'une rangée ?

Solution

On a 7 sièges, on veut en choisir 5 chaque fois

$\therefore$ Le nombre de façons $= A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

Utiliser d'une calculatrice : 7 SHIFT × (npr) 5 =

Essayez de résoudre

(4) Combien de mots de cinq lettres différentes peut-on former de l'alphabet arabes ?

Exemple

(6) Soit $A_7^r = 840$, trouvez la valeur de $(r - 4)!$

Solution

840	7
120	6
20	5
4	4
1	

On divise le nombre 840 par 7 puis on divise le résultat par 6 ensuite on divise le résultat par 5 …etc jusqu'à ce qu'on obtient 1

$\therefore$ Le nombre $840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = A_7^4$

$\therefore\ A_7^r = A_7^4$ $\qquad\therefore\ r = 4$ $\qquad\therefore\ (r - 4)! = 0! = 1$

Essayez de résoudre

(6) Soit $A_9^{r-1}\ _{-1} = 504$, trouvez la valeur de $(r + 1)!$

Pensé critique : 1) Calculez la valeur de chacun de ce qui suit : A_7^7 et $7!$

Que remarquez-vous ?

Exercices (2 - 2)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. De combien de façons différentes peut-on choisir un présédent et un vice président d'une comité formée de 12 membres

   a) 2 b) 23 c) 66 d) 132

2. Si $A_5^r = 60$, alors r est égal à :

   a) 4 b) 3 c) 2 d) 5

3. Si $A_n^3 = 120$, alors n est égal à :

   a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

4. Le nombre de façons d'arranger les lettres du mot « voir » est égal à :

   a) 4 b) 9 c) 10 d) 24

5. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres {3, 4, 5, 6}?

   a) 48 b) 30 c) 12 d) 4

6. Hussam peut choisir l'une des garnitures suivantes : Rissole, poulet ou poisson et l'une de deux boissons suivantes : jus ou eaux gazeuse. Combien de repas Khaled peut-il choisir? (Utilisez l'arbre d'étalement pour résoudre le problème)

7. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4?

8. Combien y a-t-il de nombres formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4?

9. Combien y a-t-il de nombres pairs formés de deux chiffres distincts des chiffres 1 ; 2 ; 3; 4?

10. De combien de manières peut-on former une comité d'une femme et d'un homme parmi 4 femmes et 3 hommes ?

11. Un magasin de crème glacée offre trois volumes : petit, moyen, grand et cinq saveurs : fraise, mangue, citron, lait, chocolat. Quel est le nombre de choix possibles pour acheter une crème glacée

12. Parmi l'ensemble des lettres {a ; b; c ; d; e ; f}, trouvez le nombre de manières de choisir

    a) une seule lettre. b) deux lettres distinctes.

13. **Calculez la valeur de chacun de ce qui suit :**

    a) $7! + 5!$ b) $32! - 3!$ c) $A_5^3 \times 2!$

    d) $A_3^3 \times A_2^2$ e) $A_8^1 + A_8^2$ f) $A_7^0 + A_7^7$

(14) **Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :**

a $n! = 24$ b $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$

c $A_{15}^{n} = 2730$ d $A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 = 50$

(15) Dans chacun des cas suivant, trouvez la valeur de n :

a $A_7^n = 210$ b $n(2n-1)! = 12$

(16) Si $A_n^4 = 14 \times A_{n-2}^3$ trouvez la valeur de n.

(17) De combien de façons différentes peut-on choisir un président, un vice-président et secrétaire d'une comité formée de dix membres.

(18) De combien de façons le professeur de l'éducation physique peut-il choisir trois étudiants l'un aprés l'autre Parmi huit pour participer à l'équipe de football, basket-ball, volly-ball respectivement ?

(19) Démontrez que : $\frac{(n+2)!}{n!} = A_{n+2}^2$

Unité 2

2 - 3 Combinaisons

Allez apprendre

- Notion des combinaisons et applications simples.
- Triangle de Pascale.

Vocabulaires de base

- Combinaisons
- Objets
- Ordre
- Comité
- Sous-ensemble

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de Graphisme

Tip

Enrechissez vos connaissances une combinaison peut s'écrire sous la forme of $C_n^r = \binom{r}{n}$

Préface

On veut sélectionner deux équipes parmi quatre { a ; b; c ; d} pour un matche de football. Les choix possibles sont:

(a ; b), (a ; c), (a ; d), (b ; a) , (b ; c), (b ; d), (c ; a), (c ; b), (c ; d), (d ; a), (d ; b), (d ; c).

De ce qui précède, on remarque que le choix (a ; b) est différent de celui de (b ; a).......etc.

Si on veut choisir sans prendre l'ordre en compte, alors les choix possibles sont : {a ; b}, {a ; c}, {a ; c}, {b ; c}, {b ; d}, {c ; d}. and each Chacun de ces choix est appelé une « combinaison ».

A apprendre

Définition

Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts noté C_n^r où $r \leq n$, $r \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}^+$

Dans la préface précédente :

Le nombre de façons différentes de choisir 2 objets parmi 4 objets distincts noté C_4^2 qui se lit (4 C 2) ou $\binom{4}{2}$. qui se lit « 2 au dessus de 4 »

On remarque dans cette préface que le nombre de façons de choix = 6

C'est-à-dire : $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2\,!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$, $\boxed{C_n^r = \frac{A_n^r}{r\,!}}$

Exemple

1 Calculez:

a C_7^5

b C_7^2 (Que remarquez-vous)?

Solution

a $C_7^5 = \frac{A_7^5}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 21$

b $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

On remarque que : $C_7^5 = C_7^2$ $(5 + 2 = 7)$

Corolaires importantes : $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $C_n^r = C_n^{n-r}$

Essayez de résoudre

1) Sans utilisez une calculatrice calculez C_{12}^{9} et C_{17}^{14}

Activité

Utiliser d'une calculatrice

On peut utiliser les touches SHIFT + pour écrire le symbole des combinaisons (C_n^r)

1) Utilisez la calculatrice pour trouver la valeur de $C_5^4 + C_7^2$

Solution

Appuyez successivement sur les touches

5 SHIFT + 4 + 7 SHIFT + 2 =

Réponse = 26

Exemple

2) Si : $C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-47}$ trouvez la valeur de r.

Solution

$\because C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-47}$

Soit : r = 2 r - 47 d'où : r = 47 refusée car elle est supérieur à la valeur de n.

Ou : $r + 2r - 47 = 28$ $\therefore 3r = 75$ $\therefore r = 25$

Essayez de résoudre

2) Si $C_{28}^{r} = C_{28}^{2r-5}$, trouvez la valeur de r.

Exemple

3) De combien de façons peut-on choisir un équipe de 4 personnes parmi un ensemble de 9 personnes?

Solution

Puisque le choix est indépendant de l'ordre, alors chacun de ces choix est une combinaison.

Le nombre de façons $= C_9^4 = \dfrac{A_9^4}{4!} = 126$

Essayez de résoudre

3) Dans un concours de jeu d'échecs, 7 personnes y ont participé. Trouvez le nombre de matches sachant qu'un concourant joue un seul matche?

Exemple principe du dénombrement

(4) De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 2 hommes et une femme parmi 7 hommes et 5 femmes?

Solution

Le nombre de façons de choisir deux hommes de 7 hommes = $C_7^2 = 21$

Le nombre de façons de choisir une femme de 5 femmes = $C_5^1 = 5$

Appliquant le principe du dénombrement, le nombre de façons = $21 \times 5 = 105$ façons

Pensé critique : De combien de façons peut-on élire une comité comprenant 4 hommes ou 3 femmes parmi 6 hommes et 5 femmes ?

Essayez de résoudre

(4) Une classe comprend 10 garçons et 8 filles De combien de façons peut-on former une comité pentagonal d'étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

Activité Triangle de Pascal

Blaise Pascale (1623 - 1662) :

Il est un philosophe, mathématicien et physicien français, il a introduit la théorie de probabilités.

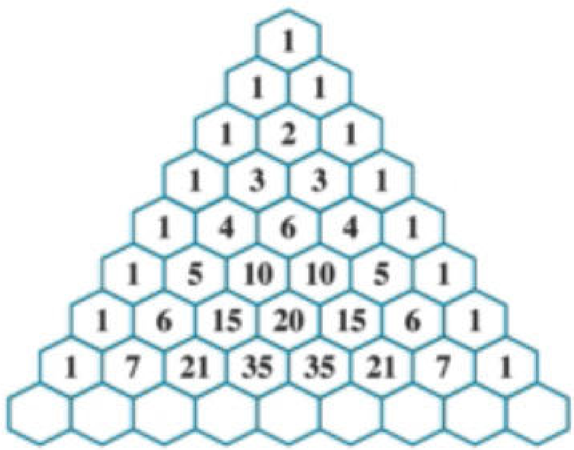
Aussi, il a crée un système ternaire des nombres qui est appelé le triangle de Pascale, il a également inventé une calculette pour effectuer les opérations de l'addition et de la soustraction.

Observez le triangle de Pascale ci-contre, puis répondez aux questions suivantes :

1- Que remarquez-vous de la manière d'écriture des nombres dans ce triangle ?

2- Existe-t-il une relation entre les éléments d'une ligne et les éléments de la ligne suivante?

3- Y-t-il une symétrie entre les nombres situant sur les cotés latéraux du triangle ?



D'après l'activité précédent, on remarque que :

Dans la formule C_n^r , si n est le nombre de lignes et r le nombre de colonne

- **La première ligne :** représente (n = 1) d'éléments parmi r = 0 ou r = 1

  D'où: $C_1^0 = 1$, $C_1^1 = 1$

- **La deuxième ligne :** représente (n = 2) d'éléments parmi r = 0 ou r = 1 ou r = 2

  D'où: $C_1^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$ ... etc.

On remarque également que :

- Chaque ligne commence par 1 car $C_n^0 = 1$, et se termine par 1 car $C_n^n = 1$
- Chaque nombre dans une ligne, sauf la première, est égal à la somme de deux nombres qui lui sont au dessus.
- **Dans la troisième ligne on trouve :** 1 , 1 + 2 , 2 + 1, 1
- **Dans la troisième ligne on trouve :** 1 , 1 + 3 , 3 + 3 , 3 + 1 , 1 ... etc.
- Si n est pair, il y a une symétrie par rapport au nombre médian
- Si n est impair, il y a une symétrie par rapport aux deux nombres médians
- Cela s'accommode avec la relation $C_n^r = C_n^{n-r}$

Application sur l'activité :

Démontrez que : $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$

Exercices (2 - 3)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Le nombre de choix de 3 personnes parmi 5 personnes est égal à ....

   a 15   b 10   c 20   d 35

2. Le nombre de façons de répondre seulement à 4 questions parmi 6 est égal à ....

   a 30   b 15   c 24   d 10

3. Le nombre de façons de choisir une boule rouge et une autre blanche parmi 5 boules rouges et 3 boules blanches est égal à ....

   a 15   b 8   c 60   d 2

Répondez aux questions suivantes :

4. Calculez C_6^3 , C_9^1 , C_{12}^{11} et C_{100}^0
5. Si $C_n^3 = 120$, trouvez la valeur de C_n^{n-9}
6. Si $C_{n+1}^4 = \frac{5}{2} C_n^3$, trouvez la valeur de n.
7. Si $C_n^3 = 30\frac{1}{3}$ n, trouvez la valeur de n.
8. De combien de manières une comité pentagonal peuvent prendre une discision majoritaire ?

9. Une classe comprend 10 garçons et 8 filles De combien de façons peut-on former un comité de cinq étudiants comprenant 3 garçons et deux filles ?

10. Ecrivez chacun de ce qui suit en fonction des arrangements :

a C_8^3 b C_{19}^2 c C_5^0 d C_x^{x-y}

11. Ecrivez chacun de ce qui suit en utilisant la formule ^nC_n

a $\frac{A_8^2}{2!}$ b $\frac{A_9^3}{3!}$ c $\frac{A_{10}^4}{4!}$ d $\frac{A_8^0}{0!}$

Exercices généraux

Complétez ce qui suit :

1. Le nombre de façons de former un nombre de deux chiffres distincts parmi les nombres : 1, 2, 3, 4 est égal à ....

2. Si on vous a demandé de codé un coffre en utilisant 3 trois chiffres différents de zéro, alors le nombre de façons est égal à ....

3. Si $n! = 1!$ alors $n =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

4. Un homme voulait choisir une voiture parmi les modèles a ; b ; c et les couleurs : Blanche ; Rouge ; Argentée ; Noir . De combien de manières peut-il choisir une voiture ?

a 7 b 12 c 14 d 24

5. Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1 ; 3 ; 6 ; 7?

a 9 b 12 c 24 d 64

6. Soient $X = \{x : x \in \mathbb{N} ; 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ et $Y = \{(a , b): a , b \in x \text{ et } a \neq b\}$. Quel le nombre d'éléments de Y ?

a 7 b 10 c 20 d 25

7. $C_{12}^4 + C_{12}^3$ égale à

a 715 b 710 c 716 d 720

8. Si $A_n^r = 336$ et $C_n^r = 56$ alors n et r sont

a (3 ; 2) b (8 ; 3) c (7 ; 4) d (7 ; 3)

9. Une personne a 8 amis ; alors nombre de manières d'invité un ami ou plus pour diner est

a 250 b 200 c 255 d 256

(10) Si $C_n^{10} = {}^nC_n^{14}$, alors C_{25}^{n} égale à

a 24 b 25 c 1 d 49

(11) Calculez :

a C_5^5 b $6!$ c A_{23}^{1}

d C_{50}^{49} e $\frac{13!}{14!}$ f A_4^4

(13) Si $C_{2n-1}^{3} = 84$? trouvez la valeur de $(n - 5)!$

(14) Si $A_8^{r+1} = 336$; trouvez la valeur de C_{2r}^{4}

(15) Soient $A_{n-m}^{3} = 210$ et $C_{n+m}^{4} = 715$, trouvez la valeur de n et celle de m

(16) De combien de façons peut-on choisir sept étudiants parmi 10 pour faire un voyage touristique?

(17) On a choisit trois étudiants parmi n étudiants pour assister à un colloque. Si le nombre de façons de choix était 10, trouvez n

(18) De combien de façons peut-on éluer une comité formé d'un homme et de deux femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

(19) Parmi 4 professeur; on veut choisir un professeur pour former les élèves à passer l'olymbiade puis un autre pour préparer les examens. De Combien de façons peut-on pour faire ce choix ?

(21) Trouvez l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42$ b $12 \times n! = (n+2)!$ c $(n-4)! = 120$

d $(n-5)! = 1$ e $C_n^3 = 84$ f $C_{12}^{r} = C_{12}^{2r+3}$

Unité 3

Dérivation et Intégration

Introduction de l'unité

Sans doute, le calcul dSSiérentiel et intégral est considéré comme une nouvelle science utilisée dans plusieurs branches de connaissance et divers sciences tel que : la géométrie, la physique, la médecine, l'économie et la géographie. Le calcul différentiel est basé sur l'étude des différentiel et variations à travers des calculs y compris les moyennes et les taux de variations. On remarque que la comparaison de la variation avec le taux de variation comme la variation de la température, des prix, de la vitesse, de la production ainsi que l'étude de comportement des fonctions comme les fonctions des coûts et des bénéfices dans l'économie, pour maximiser les bénéfices ou l'étude de l'effet de prendre un médicament précis afin de diminuer le délai du traitement ou l'étude des schémas des tremblements de terre dans les constructions des immeubles et le calcul des taux de variation et autres.
Mais le calcul intégral est basé sur la recherche de la quantité en fonction de la connaissance de son taux de variation. Il est utilisé dans le calcul de l'aire au dessous de la courbe et l'intensité du travail fourni par l'effet d'une force variable. Le calcul dSSiérentiel et intégral comprend le calcul des opérations avec des quantités trop petites contrairement à l'Algèbre.
Finalement, l'étude de cette matière nous aidera à résoudre la majorité des problèmes qui se chevauchent avec les sciences précises sur lesquelles est basée l'évolution scientSiique et civile que nous souhaitons pour notre pays

Compétence attendu de l'unité

A l'issue de l'étude de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Reconnaître la notion fonction de La moyenne de variation et le taux de variation
- Déduire la première dérivée d'une fonction.
- Reconnaître l'interprétation géométrique de la première dérivée (La pente de la tangente).
- Déterminer La dérivée de, fonctions usuelles.
  - la fonction constante .
  - la fonction f: $f(x) = x^n$
  - la fonction f : $f(x) = x$
  - la fonction f: $f(x) = a\,x^n$
  - la somme et la différence de deux fonctions
  - le produit de deux fonctions.
  - fonction composée
  - le quotient de deux fonctions .
  - fonction composée et $y = (f(x))^n$
- Utiliser la dérivée dans des applications géométriques comme trouver l'équation de la tangente de la courbe en un point qui lui appartient
- Reconnaître la notion intégral – La dérivée réciproque.
- Reconnaître la notion intégral – La dérivée réciproque:
  - $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$, $n \neq -1$
  - $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$, dx ou a constante
  - $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx \int f(x) \pm [g(x)]\,dx$
  - $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c$, $n \neq -1$

Vocabulaire de base

- Variation
- fonction de variation moyenne
- fonction du taux de variation
- Dérivation
- Une fonction dérivable
- première dérivée
- produit
- division
- mon-dérivable
- Integration

Leçons de l'unité

Lesson (3 - 1): Taux de variation.
Lesson (3 - 2): Dérivation.
Lesson (3 - 3): Dérivee des fonctions usuelles.
Lesson (3 - 4): Intégration

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique - ordinateur

Organigramme de l'unité

Unité 3

3 - 1 Taux de variation

Allez apprendre

- Fonction de variation.
- Fonction du taux de variation.
- Nombre dérivé

Vocabulaires de base

- Fonction de variation.
- Fonction du taux de variation.
- Nombre dérivé

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique

Réfléchisse et discutez

Pourquoi on laisse des espaces entre les rails ou des fragments entre les parties des ponts métalliques ?

Si la température augmente de 30° à 42° dans un délai du temps ou diminue de 48° à 22° dans un autre délai du temps, calculez la variation des températures dans chaque délai.............Que remarquez-vous ?

Si la longueur de l'un des rails est L mètres et sa température x se varie de x_1 à x_2 alors une variation s'est passée au température, on a donc:

La variation de $x =$ la valeur de x á la fin de la variation - la valeur de x au début de la variation Est-ce que la longueur du rail se varie suivant la variation de sa température ?

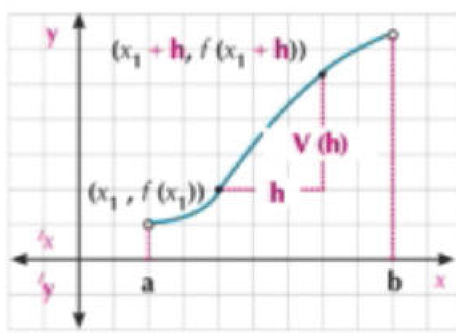
A apprendre fonction de variation

Si $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$ alors une variation de valeur de x : de x_1 à x_2 sur l'ensemble de définition de f implique à une variation de valeur de y : de $f(x_1)$ á $f(x_2)$

d'où la variation de $x = \Delta x$ (qui se lit delta x) $= x_2 - x_1$,

et la variation de $y = \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

Soit $(x_1 \,, f(x_1))$ un point de la courbe de la fonction f, alors pour toute variation de son abscisse de x de x_1 à $x_2 = x_1 + h$ où $x_1 + h \in]a\,,b[$, $h \neq 0$ correspond á une variation de son ordonnée qui est déterminée par la relation:



$v(h) = f(x_1 + h) - f(x_1)$. La fonction v est appelée fonction de variation de f en $x = x_1$

Remarque :

Les deux symboles Δx et h représentent la variation de x

Exemple

(1) Si $f(x) = 3x^2 + x - 2$ et x varie de 2 à 2 + h, trouvez la fonction de variation v puis calculez la variation de f pour :

(a) h = 0,3 (b) h = - 0,1

Solution

$\because f(x) = 3x^2 + x - 2$, x varie de 2 à 2 + h

$\therefore x_1 = 2$, $f(2) = 3 \times 4 + 2 - 2 = 12$, et :

$$f(2 + h) = 3(2 + h)^2 + (2 + h) - 2 = 12 + 12h + 3h^2 + 2 + h - 2$$
$$= 3h^2 + 13h + 12$$

$$v(h) = f(2 + h) - f(2)$$
$$= (3h^2 + 13h + 12) - 12 = 3h^2 + 13h$$

(a) Pour h = 0,3

$v(0,3) = 3(0,3)^2 + 13 \times 0,3$
$= 4,17$

(b) Pour h = - 0,1

$v(-0,1) = 3(-0,1)^2 + 13(-0,1)$
$= -1,27$

Essayez de résoudre

(1) Soit $f(x) = x^2 - x + 1$. Trouvez la fonction de variation v en $x = 3$ puis calculez :

(a) $v(0,2)$ (b) $v(-0,3)$

A apprendre

fonction de taux de variation

En divisant la fonction de variation v par h où h ≠ 0 on obtient une nouvelle fonction T qui est appelée fonction de taux de variation de f en $x = x_1$ telle que :

$$T(h) = \frac{v(h)}{h} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemple

(2) Si $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x^2 + 1$ Trouvez :

(a) la fonction Le taux de variation en $x = 2$ puis calculez T (0,3)

(b) Le taux de variation lorsque x varie de 3 à 4

Solution

(a) $f(x_1) = f(2) = (2)^2 + 1 = 5$, $f(x_1 + h) = f(2 + h)$

$\therefore f(2+h) = (2+h)^2 + 1 = h^2 + 4h + 5$

$\because T(h) = \dfrac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$

$\therefore T(h) = \dfrac{h^2 + 4h + 5 - 5}{h} = h + 4$ et $T(0{,}3) = 4{,}3$

b Lorsque x varie de 3 à 4 alors $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

et $f(3) = 9 + 1 = 10$, $f(4) = 16 + 1 = 17$

Taux de variation $= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{17 - 10}{4 - 3} = 7$

Essayez de résoudre

(2) Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$; trouvez :

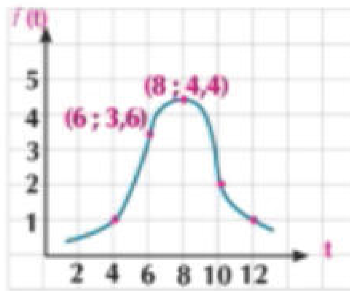
a Fonction de taux de variation lorsque $x = 2$ puis trouvez $T(0{,}2)$

b Taux de variation lorsque x varie de 4,5 à 3

Exemple

(3) La figure ci-contre montre la courbe de $s = f(t)$ où s représente les ventes totales dans un marché des ventes des ordinateurs en millions livres égyptiennes, t représente le temps en mois. A l'aide de la figure, trouvez la moyenne de la variation des ventes totales lorsque t varie de :

a 4 à 8 **b** 8 à 10



Solution

a De la figure : $f(8) = 4{,}4$; $f(4) = 1$

Taux de variation de $s = \dfrac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \dfrac{4{,}4 - 1}{4} = 0{,}85$ millions livres / mois

C'est à dire la moyenne des ventes totales augmente de 0,85 millions livres par mois pendant cette période.

b De la figure : $f(10) = 2$; $f(8) = 4{,}4$

Taux de variation de $s = \dfrac{f(10) - f(8)}{10 - 8} = \dfrac{2 - 4{,}4}{2} = -1{,}2$ millions livres / mois

C'est à dire la moyenne des ventes totales diminue de 0,85 millions livres par mois pendant cette période.

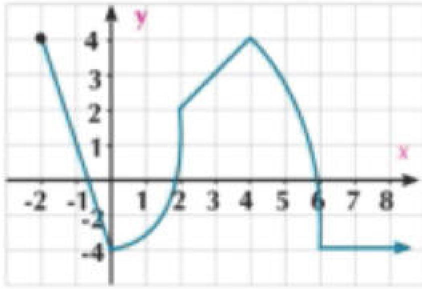
Essayez de résoudre

(3) En utilisant la figure de l'exemple 3, trouvez le taux de variation des ventes totales lorsque le temps varie de:

a 4 à 6 **b** 6 à 10 **c** 4 à 12

Réflexion critique :

La figure ci-contre montre la courbe de la fonction f où $y = f(x)$. Déterminez les intervalles dans lesquels le taux de variation de f est constante. Expliquez votre réponse.



A apprendre

Nombre dérivé

Soient $f :]a ; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, $x_1 \in]a ; b[$ et $(x_1 + h) \in]a, b[$:

Le nombre dérivé de f en $x = x_1$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} T(h)$ à condition que cette limite existe

Exemple

(4) Dans ce qui suit, trouvez le nombre dérivé de f en $x = x_1$ puis trouvez le nombre dérivé aux valeurs données de x

(a) $f(x) = 3x^2 + 2$ en $x = 2$

Solution

(a) $\because f(x) = 3x^2 + 2 \qquad \therefore$ en $x = x_1$ alors $f(x_1) = 3x^2{}_1 + 2,$

$$f(x_1 + h)^2 = 3(x_1 + h)^2 + 2 = 3x_1^2 + 6x_1 h + 3h^2 + 2$$

Nombre dérivé de $f = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x_1 h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6x_1 + 3h) = 6x_1$$

Lorsque $x = 2 \qquad \therefore x_1 = 2$ et le nombre dérivé de $f = 6 \times 2 = 12$

Exercices 3 - 1

Choisissez la bonne réponse parmi les proposés

1. Si le taux de variation de $f = 2{,}4$ lorsque x varie de 3 à 3,2; alors la variation de f est égale à ....

a 0,32 b 0,48 c 3,6 d 7,2

2. Si le taux de variation de $f = 5$ lorsque x varie de 2 á 4 , $f(2) = 6$ alors $f(4)$ égale ....

a - 4 b 7 c 8 d 16

3. Le taux de variation du volume d'un cube lorsque son arête varie de 5 cm à 7 cm est égale á ....

a 125 b 343 c 218 d 109

4. Le taux de variation de f où $f(x) = x^2 + 3x + 5$ lorsque x varie de 1 à 3 est égale à ......

a 1 b 3 c 7 d 9

Répondez aux questions suivantes :

5. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$; trouvez la variation de f lorsque

a x varie de 2 à 2,1 b $x = -2$, $h = 1$

6. Dans ce qui suit, trouvez le taux de variation de f en $x = x_1$ puis déduisez le nombre dérivé de f en x_1:

a $f(x) = 2x^3$, $x_1 = 2$

7. En lien avec les aires: Une plaque métallique a la forme d'un carré. Elle se contracte, sous l'effet du froid en conservant sa forme. Calculez la limite de taux de variation de son aire par rapport à la longueur de son côté lorsque sa longueur est égale à 8cm.

Unité 3

3 - 2 Dérivation

Allez apprendre

- La première dérivée
- Interprétation géométrique de la premiere dérivée (pente de la tangente)

Vocabulaires de base

- La premi're dérivée
- Pente
- Tangente

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels graphisme

Réfléchisse et discuss

(1) La figure (1) montre la courbe de la fonction $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $y = f(x)$, $\overleftrightarrow{CD}$ coupe la courbe aux points $c(x_1, f(x_1))$, $d(x_1 + h, f(x_1 + h))$. Trouvez la pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD}$.

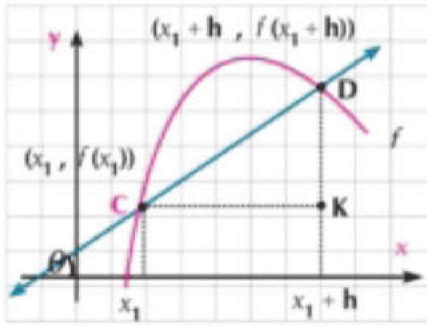


Figure (1)

(2) Si x varie de x_1 à $x_1 + h$ comparez le taux de variation de f et la pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD}$. La relation suivante est-elle vraie ? La pente de la sécante $\overleftrightarrow{CD} = \tan\theta = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = T(h)$

(3) Si le point C $(x_1, f(x_1))$ est un point fixe de la courbe représentative de la fonction f. Le point D se déplace sur la courbe pour qu'il se rapproche du point C $\overleftrightarrow{CD}$ prend la position de $\overleftrightarrow{CN}$. Elle devient une tangente à la courbe en C. C'est-à-dire $h \longrightarrow 0$.
Trouvez la pente de la tangente à la courbe de f en C.

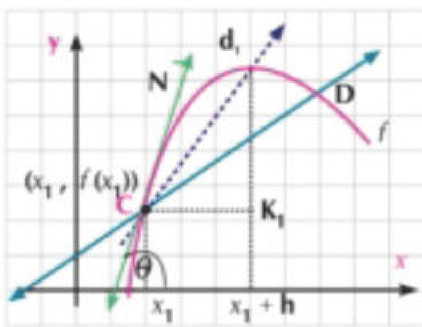


Figure (2)

Remarque :

La pente de la tangente en C = $\tan\theta = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

C'est-à-dire

La pente de la tangente de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est égale à la limite du taux de variation de f en $x = x_1$

Exemple

1) Trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = 3x^2 - 5$ au point A (2 ; 7) puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.

Solution

$\because f(2) = 3(2)^2 - 5 = 7$ $\quad\therefore$ le point des coordonnées (2 ; 7) appartient à la courbe représentative de f

La pente de la tangente en $(x = 2)$ = nombre derivé de f en $(x = 2)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\therefore \text{ La pente de la tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 5 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (12 + 3h) = 12$$

et $\tan\theta = 12$ $\quad\therefore\ \theta = \tan^{-1}(12) \simeq 85° 14'$

Essayez de résoudre

1) Trouver la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 - 4$ au point A (1 ; - 3)puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses à une minute près.

A apprendre

Première dérivée

Pour toute valeur de x de l'ensemble de définition de la fonction f, correspond une seule valeur à la limite du taux de variation de f. Donc le nombre dérivé est aussi une fonction de la variable x qu'on l'appelle la dérivée de la fonction f.

Définition

Si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in]a, b[$ alors la dérivée f' :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ à condition que la limite existe.

Symboles de la dérivée :

Si $y = f(x)$on note la première dérivée par

f' ou y' qui se lit f prime ou y prime

$\frac{dy}{dx}$ qui se lit dy sur dx ou la dérivée de y par rapport à x

Remarquez que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ est $f'(x_1)$

Exemple

(2) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^2 - x + 1$ puis trouvez la pente de la tangente au point de coordonnées (- 2 ; 7)

Solution

$\because f(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore f(x + h) = (x + h)^2 - (x + h) + 1 \quad = x^2 + 2x\,h + h^2 - x - h + 1$,

$f(x + h) - f(x) = (2x + h - 1)\,h$

$\because f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\qquad \therefore f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2x + h - 1)\,h}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h - 1)$ $f'(x) = 2x - 1$

$\because f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$

$\therefore$ Le point de coordonnées (- 2 ; 7) est situé sur la courbe de f

La pente de la tangente au point (- 2 ; 7) = $f'(-2) = 2(-2) - 1 = -5$

Essayez de résoudre

(2) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$, puis trouvez la pente de la tangente au point (- 1 ; 6).

A apprendre *dérivabilité d'une fonction*

On dit que la fonction f est dérivable en $x = a$ (a appartient à l'ensemble de définition de f) si et seulement si $f'(a)$ existe où $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple

(3) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = \sqrt{x - 1}$ puis trouvez $f'(5)$

Solution

$\because f(x) = \sqrt{x - 1}$ $\qquad \therefore$ L'ensemble de définition de $f = [\,1\,;\,\infty[$

$\therefore f(x + h) = \sqrt{x + h - 1}$

$f(x + h) - f(x) = \sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1}}{h}$ en multipliant par le conjugué du numérateur

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, x > 1$$

Remarquez que la fonction n'est pas dérivable en $x = 1$ car la limite n'existe pas

$$f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

Essayez de résoudre

(3) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez la dérivée de la fonction f où $f(x) = \sqrt{x+5}$

Exercices 3 - 2

(1) Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée de la fonction :

a $f(x) = 5x + 2$

b $f(x) = 3x^2$

c $f(x) = x^3 - 1$

d $f(x) = x^2 + 2x.$

(2) Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée de la fonction f puis déterminez les valeurs de x auxquelles la fonction n'est pas dérivable

a $f(x) = \frac{1}{x}$

b $f(x) = \frac{1}{x+3}$

c $f(x) = \frac{3}{2x-5}$

d $f(x) = \sqrt{x-4}$

(3) Trouvez la première dérivée de la fonction f où $f(x) = x^3 + 4$ puis trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f au point de coordonnées (-1, 3) qui lui appartient.

(4) Trouvez la première dérivée de la fonction f où $f(x) = ax + b$ au point (x, y) où a et b sont deux nombres réels, b ∈ R.

(5) Trouvez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $f(x) = 3x^2 - 8$ au point A (2 ; 4) puis trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses.

Unité 3

3 - 3 Derivée des fonctions usuelles

Allez apprendre

- Dérivée d'une fonction constante
- Dérivée de $f(x) = x^n$
- Dérivée de $f(x) = x$
- Dérivée de $f(x) = ax^n$
- Dérivée de la somme et la différence de deux fonction
- Dérivée du produit de deux fonctions
- Dérivée du quotient de deux fonction
- Dérivée d'une fonction composée
- Dérivée de $y = (f(x))^n$.

Vocabulaires de base

- La première dérivée
- Produit
- Quotient
- Règle de la dérivée d'une fonction composée.

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels graphisme

Découvrez

1 - En utilisant la définition, trouvez la première dérivée de ce qui suit:

$f(x) = x^3$ $\qquad\qquad$ $f(x) = x^5$

2 - Pouvez-vous découvrir la dérivée de $f(x) = x^7$ sans utiliser la définition?

3 - Pouvez-vous déduire une règle pour trouver la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^n$?

A apprendre

Dérivé d'une fonction

1 - Dérivée d'une fonction constante

Si $y = c$ $\quad$ **où:** $c \in \mathbb{R}$ $\quad$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = 0$

Remarque que:

$y = f(x) = c$, $\quad f(x + h) = c$

$$\because \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \ (h \neq 0)$$

2 - Dérivée d'une fonction $f(x) = x^n$

Si $y = x^n$ $\quad$ **où:** $n \in \mathbb{R}$ $\quad$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

Si $y = x$ $\quad$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = 1$

Si $y = a x^n$ $\quad$ **où:** $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{R}$ $\quad$ **alors:** $\frac{dy}{dx} = a n x^{n-1}$

Example

(1) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = -3$ $\qquad$ **b** $y = x^4$ $\qquad$ **c** $y = 5x$

d $y = \frac{3}{x^2}$ $\qquad$ **e** $y = \sqrt{x^3}$

Solution

a $\because y = -3$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$ $\qquad$ **b** $\because y = x^4$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3$

c $\because\ y = 5x \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = 5$

d $\because y = \dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2} \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = -6x^{-3}$

e $\because y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ où $x \geqslant 0$

Essayez de résoudre

1. Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = x^7$ **b** $y = x^{10}$ **c** $y = x^{\frac{3}{2}}$ **d** $y = x^{-4}$

e $y = x^{-\frac{5}{3}}$ **f** $y = \dfrac{1}{x^5}$ **g** $y = \sqrt{x^9}$ **h** $y = \sqrt[3]{x^7}$

i $y = 3x^6$ **j** $y = -2x^{-5}$ **k** $y = \pi x^{-4}$ **l** $y = -4\sqrt[3]{x}$

Dérivée de la somme et la différence de deux fonctions

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x , alors $f \pm h$ est aussi derivable par rapport à x , $\dfrac{d}{dx}(f \pm h) = \dfrac{df}{dx} \pm \dfrac{dh}{dx}$ et en générale :

$$\frac{d}{dx}(f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm \ldots \pm f_n)(x) = f_1'(x) \pm f'_2(x) \pm f'_3(x) \pm \ldots \pm f'_n(x)$$

Example

2. Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = 2x^6 + x^{-9}$ **b** $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

Solution

a $\because\ y = 2x^6 + x^{-9}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 12x^5 - 9x^{-10}$

b $\because\ y = \dfrac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

$= 1 - 2\sqrt{x} = 1 - 2x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 0 - 2 \times \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -x^{-\frac{1}{2}}$

Essayez de résoudre

2. Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = 3x^2 + 5$ **b** $y = 2x^3 - 4x + 7$ **c** $y = 3x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$

d $y = 7x^4 - \dfrac{1}{4x}$ **e** $y = 3x^8 - 2x^{-5} + 8$ **f** $y = \dfrac{5}{x} + x\sqrt{x} + -4$

Dérivée du produit de deux fonctions:

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x alors la fonction (f × h) est aussi dérivable par rapport à x et $\frac{d}{dx}(f \times h) = f\ \frac{dh}{dx} + h\ .\ \frac{df}{dx}$

Example

③ Si $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ trouvez $\frac{dy}{dx}$ puis trouvez $x = -1$

Solution

$\because y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) \times 3x^2 + (x^3 + 3) \times 2x$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

en $x = -1$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 5(-1)^4 + 3(-1)^2 + 6(-1) = 2$

Essayez de résoudre

③ Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = (2x + 3)(3x - 1)$

b) $y = (2x + 5)^2$

c) $y = \sqrt{x}\ (\sqrt{x} + 4)$

d) $y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

e) $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$ puis $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$

Dérivée du quotient de deux fonctions:

Si f ; h sont deux fonctions dérivables par rapport à la variable x et $h(x) \neq 0$ alors la fonction $(\frac{f}{h})$ est aussi dérivable par rapport à x et $\frac{d}{dx}(\frac{f}{h}) = \frac{h\frac{df}{dx} - f\frac{dh}{dx}}{h^2}$

C'est-à-dire $(\frac{f}{h})' = \frac{hf' - fh'}{h^2}$

Example

④ Si $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$ trouvez $\frac{dy}{dx}$

Solution

$\because y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 + 1) \times 2x - (x^2 - 1) \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$
$$= \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

Essayez de résoudre

(4) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

(a) $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (b) $y = \frac{2x+5}{1-4x}$ (c) $y = \frac{2x^2-1}{x+5}$

Dérivée d'une fonction composée

Définition

Si $y = f(z)$ est une fonction dérivable par rapport à z et $z = h(x)$ est dérivable par rapport à x alors $y = f(h(x))$ est dérivable par rapport à x et : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$

Remarquez qu' y est une fonction composée en x

Cette régle est appellée (régle de la dérivée en chaîne)

Example

(5) Si $y = (x^2 - 3x + 1)^5$ **trouvez** $\frac{dy}{dx}$

Solution

Soit $z = x^2 - 3x + 1$ $\therefore y = z^5$

y est dérivable par rapport à z (fonction polynôme en z) et $\frac{dy}{dz} = 5z^4$

est dérivable par rapport à x (fonction polynôme en x) et $\frac{dz}{dx} = 2x - 3$,

En appliquant la règle de la dérivée de la fonction d'une fonction composée

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 5z^2 \times (2x - 3)$,

En substituant de z $\therefore \frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \times (2x - 3)$

Essayez de résoudre

(5) Si $y = (2x+3)^5$; **trouvez** $\frac{dy}{dx}$

Dérivée de la fonction $[f(x)]^n$

Si $y = [f(x)]^n$ où f est dérivable par rapport à x et n est un nombre naturel ,

alors: $\frac{dy}{dx} = n\,[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$

Example

(6) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

a $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$

b $y = (\frac{x-1}{x+1})^5$

Solution

a $y = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 10(6x^3 + 3x + 1)^9 \times \frac{d}{dx}(6x^3 + 3x + 1) = 10(18x^2 + 3)(6x^3 + 3x + 1)^9$

$= 30(6x^2 + 1)(6x^3 + 3x + 1)^9$

b $y = (\frac{x-1}{x+1})^5$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 5(\frac{x-1}{x+1})^4 \times \frac{(x+1)\times 1 - (x-1)\times 1}{(x+1)^2}$

$= 5(\frac{x-1}{x+1})^4 \times \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$

$= \frac{10}{(x+1)^2} \times (\frac{x-1}{x+1})^4 = \frac{10(x-1)^4}{(x+1)^6}$

Essayez de résoudre

(6) Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$ a $y = (2x^3 - 4x + 1)^9$ b $y = (\frac{5x^2}{3x^2+2})^3$

Example

(7) Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$

Solution

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 5 \times 1$

$= x^2 - 4x + 5$

Lorsque $f'(x) = 2$ $\therefore x^2 - 4x + 5 = 2$ $\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$

$\because (x-1)(x-3) = 0$ $\therefore x = 1$ ou $x = 3$

Essayez de résoudre

(7) Dans ce qui suit, trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 7$:

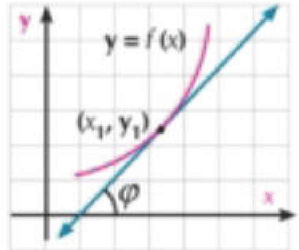
a $f(x) = x^3 - 5x + 2$

b $f(x) = (x-5)^7$

Pensé critique:

Si $y = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$; trouvez $\frac{dy}{dx}$

Application géométrique sur la dérivée



D'après l'interprétation géométrique de la première dérivée de la fonction f où $y = f(x)$ on a trouvé que la pente de la tangente m au point $(x_1; y_1)$ est égale à la première dérivée de la fonction en ce point .

C'est-à-dire $m = \frac{dy}{dx}$ au point $(x_1; y_1)$ et on peut l'écrire sous la forme $m=[\frac{dy}{dx}]_{(x_1;y_1)}$

et si la mesure de l'angle que fait la tangente avec la direction positive de l'axe des abscisses est φ alors $m = \tan\varphi = [\frac{dy}{dx}]_{(x_1;y_1)}$

Remarquez que:

1 Si m_1, m_2 sont les pentes de deux droites ℓ_1 et ℓ_2 :

$\ell_1 // \ell_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$ (condition de parallélisme)

, $\ell_1 \perp \ell_2$ si et seulement si $m_1 \, m_2 = -1$ (condition de perpendicularité)

2 La pente de la tangente en un point est appelée la pente de la courbe en ce point et la perpendiculaire à la tangente de la courbe au point de contact est appelée la normale à la courbe en ce point .

$\therefore$ la pente de la normale au point $(x_1; y_1) = \frac{-1}{[\frac{dy}{dx}]_{(x_1;y_1)}}$

Example

(8) Trouvez la pente de la tangente et de la normale à la courbe d'équation $y = 2x^3 - 4x + 5$ au point de coordonnées (-2 ; -3) qui lui appartient.

Solution

$\because y = 2x^3 - 4x + 5$

$\therefore$ La pente de la tangente en un point quelconque $= \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 4$

Au point des coordonnées (-2 ; -3)

La pente de la tangente $= [\frac{dy}{dx}]_{(-2,-3)} = 6(-2)^2 - 4 = -20$

La pente de la perpendiculaire (la normale) $= \frac{-1}{\text{La pente de la tangente}} = \frac{-1}{20}$

Essayez de résoudre

(8) Dans ce qui suit, trouvez la pente de la tangente et de la normale aux courbes suivantes aux points donnés :

a $y = x - 7$ en $x = -1$ **b** $y = \frac{5}{x-3}$ en $x = 2$

c $y = (x^3 - 2)(x + 1)$ en $x = 1$

Example

(9) Trouvez les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = x^2 - 6x + 5$ auxquels :

a) la pente de la tangente = 2
b) la tangente // l'axe des abscisses
c) la tangente ⊥ la droite d'équation $4y + x - 1 = 0$

Solution

$\because y = x^2 - 6x + 5$

$\therefore$ La pente de la tangente en un point quelconque $= \frac{dy}{dx} = 2x - 6$

a) $\because \frac{dy}{dx} = 2 = 2x - 6 \quad \therefore 2x = 8$ i.e. $x = 4$

$\therefore y = (4)^2 - 6(4) + 5 = -3$

La pente de la tangente = 2 au point de coordonnées (4 ; -3).

b) $\because$ La tangente // l'axe des abscisses $\therefore$ La pente de la tangente = la pente de l'axe des abscisses = 0

$\frac{dy}{dx} = 2x - 6 = 0 \qquad \therefore x = 3 , y = 9 - 18 + 5 = -4$

la tangente // l'axe des abscisses au point de coordonnées (3 ; -4)

c) la tangente ⊥ la droite d'équation: $4y + x - 1 = 0$ dont la pente est $\frac{-1}{4}$

La pente de la tangente $= -1 : \frac{-1}{4} = 4$

$2x - 6 = 4 \qquad \therefore x = 5, y = 0$

$\therefore$ la tangente ⊥ la droite d'équation $4y + x - 1 = 0$ au point (5, 0)

Rappel
La pente de la droite $ax + by + c = 0$ est $\frac{-a}{b}$

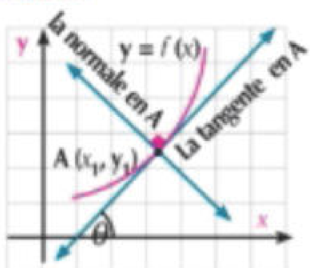
Essayez de résoudre

(9) Trouvez les points de la courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2$ auxquels la tangente:

a) l'axe des abscisses
b) ⊥ la droite d'équation : $x + 9y + 3 = 0$

A apprendre — **Équation de la tangente à la courbe**

Si (x_1, y_1) est un point de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$, m est la pente de la tangente en ce point, alors. Équation de la tangente à la courbe au point de coordonnées $(x_1; y_1)$ est



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Remarque : Equation de la normale à la courbe au point de coordonnées $(x_1 ; y_1)$ est :

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

Example

10 Trouvez l'équation de la tangente et de la perpendiculaire (la normale) à la courbe d'équation $y = 2x^2 - 5x + 1$ aux points qui lui appartient et d'abscisses = 2

Solution

$\because$ Le point appartient à la courbe $\therefore$ il vérifie son équation

En $x = 2$, $y = 2(2)^2 - 5(2) + 1 = -1$ $\therefore$ le point est (2; -1)

$\because \frac{dy}{dx} = 4x - 5$ $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 4 \times 2 - 5 = 3$

Au point des coordonnées (2; -1) la pente de la tangente = 3 et la pente de la perpendiculaire (la normale) = $\frac{-1}{3}$

$\therefore$ Equation de la tangente est

$y - (-1) = 3(x - 2)$

$y + 1 = 3x - 6$

$y - 3x + 7 = 0$

, Equation de la normale est

$y - (-1) = \frac{-1}{3}(x - 2)$

$3y + 3 = -x + 2$

$3y + x + 1 = 0$

Essayez de résoudre

10 Dans ce qui suit, trouvez l'équation de la tangente et de la normale aux courbes suivantes aux points qui lui appartiennent :

a $y = x^3 + x^2 - 1$ en $x = -2$

b $y = (3x - 5)^7$ en $x = 2$

Exercices 3 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées:

1. Le taux de variation de $x^3 + 4$ par rapport à x en $x = 2$ est égale à

   a 4 **b** 8 **c** $\frac{1}{4}$ **d** 12

2. La pente de la tangente de la courbe d'équation $y = 3x - x^3$ en $x = 0$ est égale à

   a 3 **b** 0 **c** - 3 **d** 6

3. La tangente à la courbe d'équation $y = x^2 - 8x + 2$ est parallèle à l'axe des abscisses en $x =$:

   a -8 **b** 2 **c** 4 **d** 0

4. Si la droite $x + y = 5$ est une tangente à la courbe d'équation $y = 3x^2 + 5x + 1$ en $x =$

   a 1 **b** 5 **c** 3 **d** -1

Complétez ce qui suit :

5. $\frac{d}{dx}(2x) =$ ....
6. $\frac{d}{dx}(3x^2 + 1) =$ ....
7. $\frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 1)$ ....
8. $\frac{d}{dx}(x + \sqrt{x})$ ....
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) =$ ....
10. $\frac{d}{dx}(5\pi) =$ ....
11. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) =$ ....
12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) =$ ....
13. $\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x + 2) =$ ....
14. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\,x^7 - \frac{x^5}{5} + \pi\right) =$ ....
15. Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

   a $y = 3x^5$ **b** $y = \frac{3}{4}x^{-8}$ **c** $y = \frac{3}{2x^2}$ **d** $y = 4\sqrt{x}$

Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée par rapport à x .

16. $y = x^3 + 3x^2 - 5$
17. $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 7x - 9$
18. $y = 2x^6 + 3\sqrt{x}$

19 $y = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$

20 $y = (x^2 - \sqrt{x})(x^2 + 2\sqrt{x})$

21 $y = \dfrac{5x - 2}{5 \quad x + 1}$

22 $y = \dfrac{x - 2}{x + 5}$

23 Dans ce qui suite, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$ aux points donnés :

a $y = (x^2 - 2)^7$ at $x = 0$

b $y = (x^2 - x + 1)^{-4}$ en $x = 1$

24 Dans ce qui suit, trouvez $\dfrac{dy}{dx}$:

a $y = (x + 3)^7$

b $y = (2x^2 - 3)^4$

c $y = (x^3 + x - 1)^5$

d $y = \sqrt[5]{(2x^3 - 4x + 7)^2}$

e $y = z^2$, $z = 3x^2 + 2$

25 Trouvez les points de la courbe d'équation $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ auxquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

26 Trouvez les pointe de la courbe d'équation $y = x^3 - 9x^2 - 16x + 1$ aux quels la pente de la courbe est égale à 5

27 Trouvez l'équation de la tangente et de la perpendiculaire (la normale) à la courbe d'équation $y = 3x^2 - 7x + 2$ au point $(2 ; 0)$ qui lui appartient .

28 Trouvez l'équation de la tangente à chacune des courbes d'équation suivantes aux points dont l'abscisse est indiquée:

a $y = (x + 3)^3$, $x = -1$

b $y = \dfrac{3}{x - 2}$, $x = 4$

c $y = \sqrt{x + 7}$, $x = 2$

d $y = (x - 5)(x + 5)$, $x = -3$

Unité 3

3 - 4 Intégration

Allez apprendre

- La primitive d'une fonction
- Intégral algébriques illimité
- Intégral de quelques fonctions algébriques

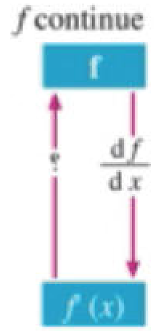
Vocabulaires de base

- La dérivée réciproque
- Intégral

Aides pedagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels graphisme.

A découvrir



D'après votre étude précédant, vous savez que la dérivée de la fonction f où $f(x) = x^3 + c$ et c est une constante est $f'(x) = 3x^2$.

c'est-à-dire $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ Dans ce cas là, la fonction f est appelée (nommée) la fonction principale (d'origine) de la fonction f'

Dans cette leçon, nous allons étudier une opération réciproque de la dérivée Comment trouvez la fonction primitive en connaissant sa dérivée ?

Pour trouver la fonction principale dont la dérivée par rapport à x est $5x^4$ soit $f(x) = 5x^4$

nous allons commencer par une méthode réciproque de la dérivée

$n\,x^{n-1} = 5x^4 \qquad \therefore n - 1 = 4 \;,\; n = 5$

$F(x) = x^5$ ou $x^5 + 3$ ou $x^5 - 2$

La fonction F est appelée la fonction primitive (d'origine).

Pouvez-vous découvrir la fonction primitive (d'origine) si :

a $f(x) = 2x$ **b** $f(x) = 7x^6$

A apprendre

Primitive

Si $y = x^2$ alors la première dérivée est $\frac{dy}{dx}$ est appelée intégral ou la primitive

Par exemple x^2 est prémitive de la fonction $2x$ Remarquez que $2x$ admet plusieurs prémitive comme $x^2 + 1$, $x^2 + 2$, $x^2 - 3$, ... Leurs dérivées $2x$ mais le constant est différent c .

$\therefore \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$ où (c) est constante.

Définition

On dit que la fonction F est une prémitive de la fonction f si $F'(x) = f(x)$ pour tout x appartient à l'ensemble de définition de f.

Exemple

1. Démontrez que : la fonction F où $F(x) = \frac{1}{2}x^4$ est une prémitive de la fonction f où $f(x) = 2x^3$.

Solution

On trouve la dérivée de la fonction F $\quad \therefore F'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 = 2x^3$

$\therefore F'(x) = f(x)$ **c'est á dire la fonction** (F) est une prémitive de la fonction f

Essayez de résoudre

1. Montrez que la fonction F où $F(x) = \frac{1}{2}x^6$ est une prémitive de la fonction f où $f(x) = 3x^5$

Pensé critique:

Quelle est la relation F_1,et F_2 si elles sont des prémitive de la fonction f ?

Intégral illimitée

L'ensemble des primitives de la fonction f est appelle l'intégral illimitée de cette fonction. On la note $\int f(x)\,dx$ **[qui se lit intégral de la fonction de x par rapport à x]**

Définition

si $F'(x) = f(x)$ alors $\int f(x)\,dx = F(x) + c$
où c est une constante.

Remarquez que : $\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2 \quad \therefore \int 3x^2\,dx = x^3 + c$

$\frac{d}{dx}(2x^7) = 14x^6 \quad \therefore \int 14x^6\,dx = 2x^7 + c$

Pour déterminer la valeur de la constante c , on doit savoir la valeur de l'intégral en une valeur de la variable x (C'est en dehors du programme)

Exemple

2. **Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes :**

a) $\int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

b) $\int (7x^6 + \frac{4}{x^3})\,dx = x^7 - \frac{2}{x^2} + c$

Solution

a $\because \dfrac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}x^8 + c\right) = x^7$ $\therefore \int x^7\, dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

b $\because \dfrac{d}{dx}\left(x^7 - \dfrac{2}{x^2} + c\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^7 - 2x^{-2} + c\right)$

$= 7x^6 - 2\,(-2)\,x^{-3} = 7x^6 + \dfrac{4}{x^3}$

$\therefore \int \left(7x^6 + \dfrac{4}{x^2}\right) dx = x^7 - \dfrac{2}{x^2} + c$

Essayez de résoudre

(2) **Vérifiez que les égalités suivantes sont correctes:**

a $\int x^{-4}\, dx = \frac{-1}{3}\, x^{-3} + c$ **b** $\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

Exemple

(3) En utilisant la définition de l'intégral, trouvez la prémitive de la fonction f où:

a $f(x) = 5x^4$ **b** $f(x) = 18\, x^5$ **c** $f(x) = -3\, x^{-4}$

Solution

a $I(x) = \int 5x^4\, dx = x^5 + c$

b $I(x) = \int 18\, x^5\, dx = \int 3(6\, x^5)\, dx = 3\, x^6 + c$

c $I(x) = \int -3\, x^{-4} dx = x^{-3} + c$

Essayez de résoudre

(3) En utilisant la définition de l'intégral, trouvez la prémitives de ce qui suit: $20x^4$, $-5x^{-4}$

Pour trouver les prémitives des fonctions en utilisant la définition précédante, on a besoins de temps et d'effort, c'est pour celà, on utilise quelques formules simples de l'intégral (règles de l'intégral) qui facilitent le travail.

Règle (1):

$\int x^n\, dx = \dfrac{1}{n+1}\, x^{n+1} + c$ où **c** est une constante , **n** est un nombre rationnel , $n \neq -1$

Exemple

Trouvez :

(4) **a** $\int x^5\, dx$ **b** $\int x^{-3}\, dx$ **c** $\int x^{\frac{2}{3}}\, dx$ **d** $\int \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

Solution

a $\int x^5 \, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{1}{6} x^6 + c$

b $\int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-3+1}}{-2} + c = -\frac{1}{2} x^{-2} + c$

c $\int x^{\frac{2}{5}} \, dx = \frac{1}{\frac{7}{5}} x^{1+\frac{2}{5}} + c$

$= \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + c$

d $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \, dx = \int x^{\frac{-3}{5}} \, dx$

$= \frac{1}{\frac{2}{5}} x^{1-\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + c$

Essayez de résoudre

4 Trouvez :

a $\int x^8 \, dx$ **b** $\int x^{\frac{2}{3}} \, dx$ **c** $\int x^{\frac{7}{9}} \, dx$ **d** $\int \sqrt[7]{x^5} \, dx$

Règle (2) :

$$\int a \, . \, f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx \quad \text{où a est une constante}$$

Exemple

5 **a** $\int 3x^4 \, dx = 3 \int x^4 \, dx = 3 \times \frac{1}{5} x^5 + c = \frac{3}{5} x^5 + c$

b $\int 8x^{-5} \, dx = 8 \int x^{-5} \, dx = 8 \times \frac{1}{-4} x^{-4} + c = -2 x^{-4} + c$

Corollaire

$$\int a \, dx = a \, x + c$$

Donc:

$\int 5 \, dx = 5x + c$, $\int -9 \, dt = -9t + c$

$\int dx = x + c$, $\int \sqrt{7} \, dz = \sqrt{7} \, z + c$

Essayez de résoudre

5 Trouvez :

a $\int 3x^4 \, dx$ **b** $\int -2z \, dz$ **c** $\int -x \, dx$ **d** $\int -\frac{dx}{5}$

Règle (3) :

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Exemple

(6) Trouvez : **a** $\int (4x + 3x^2)\, dx$ **b** $\int \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}\, dx$

Solution

a $\int (4x + 3x^2)\, dx$

$= \int 4x\, dx + \int 3x^2\, dx$

$= 4\int x\, dx + 3\int x^2\, dx$

$= \frac{4}{2}x^2 + 3 \times \frac{1}{3}x^3 + c$

$= 2x^2 + x^3 + c$

b $\int \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}\, dx$

$= \int \frac{(x - 4)(x + 2)}{x + 2}\, dx$

$= \int (x - 4)\, dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + c$

Essayez de résoudre

(6) Trouvez :

a $\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$ **b** $\int (\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3)\, dx$

c $\int 2x(x + 3)\, dx$ **d** $\int \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}\, dx$

Règle (4) :

$$\int [(ax + b)^n\, dx = \frac{1}{a(n + 1)}(ax + b)^{n+1} + c \,,\; n \neq -1$$

Pensé critique:

1- Pouvez-vous vérifier que la relation précédente est correcte en utilisant la définition de la primitive? Argmentez votre solution.

Exemple

(7) Trouvez :

a $\int (3x - 2)^5\, dx$ **b** $\int (2x - 7)^{-3}\, dx$

c $\int \frac{7}{\sqrt{3x - 4}}\, dx$ si $x > \frac{4}{3}$

Solution

a $\int (3x-2)^5\,dx = \dfrac{1}{3(5+1)}(3x-2)^{5+1} + c = \dfrac{1}{18}(3x-2)^6 + c$

b $\int (2x-7)^{-3}\,dx = \dfrac{1}{2(-3+1)}(2x-7)^{-3+1} + c = -\dfrac{1}{4}(2x-7)^{-2} + c$

c $\int \dfrac{7}{\sqrt{3x-4}}\,dx = \int 7(3x-4)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{7}{3(-\frac{1}{2}+1)}(3x-4)^{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \dfrac{7}{3(-1+\frac{1}{2})}(3x-4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{14}{3}\sqrt{3x-4} + c$

Essayez de résoudre

7) Trouvez: **a** $\int 9(4-3x)^2\,dx$ **b** $\int \dfrac{15}{(3x-5)^6}\,dx$

Exercices 3 - 4

Trouvez:

1) $\int x^2\,dx$
2) $\int x^7\,dx$
3) $\int 8x\,dx$
4) $\int -4x^3\,dx$
5) $\int 9x^8\,dx$
6) $\int 12x^{-4}\,dx$
7) $\int 5\,dx$
8) $\int (5\sqrt{x}\,dx$
9) $\int -3x^7\,dx$
10) $\int -\frac{8}{5}x^{-3}\,dx$
11) $\int \frac{7}{3}t^6\,dn$
12) $\int \frac{12}{5}f^5\,df$
13) $\int (x+1)\,dx$
14) $\int (5-2t)\,dn$
15) $\int (t^3-6t^4)\,dn$
16) $\int (x^3+x^2+x)\,dx$
17) $\int 2(3x^2+7)\,dx$
18) $\int (ax^2-bx+c)\,dx$
19) $\int x(x+3)\,dx$
20) $\int 7x^2(x^4-1)\,dx$
21) $\int (x-1)(x+1)\,dx$
22) $\int (x-2)(2-x)\,dx$
23) $\int (2x+3)(x-1)\,dx$
24) $\int x^2(2x+\frac{1}{x})\,dx$
25) $\int \dfrac{3x^2-4x}{x}\,dx$
26) $\int \dfrac{x^7+5x^6-x^3}{x^3}\,dx$
27) $\int \dfrac{x^2-1}{x-1}\,dx$
28) $\int \dfrac{x^3-27}{x-3}\,dx$
29) $\int \dfrac{x^3+8}{x^2-2x+4}\,dx$
30) $\int \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}\,dx$
31) $\int (x+4)^3\,dx$
32) $\int 7(2x-7)^6\,dx$
33) $\int (8-3n)^4\,dn$
34) $\int 6(x-3)^{-4}\,dx$
35) $\int (2x-3)^{\frac{7}{3}}\,dx$
36) $\int 15\sqrt{(3x-2)^5}\,dx$