

Section Littéraire

Mathématiques

Générales

Deuxième Secondaire

Livre de l'élève

Premier Semestre

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Essafty

M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Révision de traduction

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Khaled Sayed El shehabey

M. Akram Fawzy



SAKKARA
PUBLISHING

Première édition 2015/2016

Numéro de Dépôt 10555 / 2015

Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 012 - 7

Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenu de ce livre a été fondé et que nous allons résumer dans ce qui suit :

- 1 Développé de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.
- 2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.
- 3 Adopté l'accès des normes nationales et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :
 - a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.
 - b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.Pour cela, on a axé sur les points suivants :
 - l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
 - la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
 - la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
 - l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
 - l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.
- 4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maître.
- 5 Suggéré des activités variées convenables au contenu pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.
- 6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.
- ★ On a réparti le manuel en des unités intégrées et interconnectées. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.
- Le contenu scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activités visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.
- ★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.
- ★ La partie illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Unité 1 Fonctions réelles et représentation graphique

1 - 1 Fonctions réelles	4
1 - 2 Sens de variation des fonctions	11
1 - 3 Fonctions paires et fonctions impaires	16
1 - 4 Représentation graphique des fonctions	23
1 - 5 Équations et inéquations	33

Unité 2 Puissance, Logarithmes et Applications

2 - 1 Puissances fractionnaires	40
2 - 2 Fonction exponentielle et application	46
2 - 3 Equations exponentielles	48
2 - 4 Fonction logarithme et sa représentation graphique	52
2 - 5 Quelques propriétés des logarithmes	57

SOMMAIRE

Unité 3 Limites

- 3 - 1 Introduction aux limites 66
- 3 - 2 Déterminé la limite d'une fonction algébriquement 72
- 3 - 3 Limite d'une fonction à l'infini 79

Unité 4 Trigonométrie

- 4 - 1 Loi de sinus 86
- 4 - 2 Loi de cosinus 95

Unité 1

Fonctions réelles et représentation graphique



Introduction de l'unité

Les fonctions ont plusieurs types et des applications importantes dans les différents domaines de la vie courante : l'astronomie, la médecine, l'économie, le sismographie, le géologie et le démographie. Les fonctions sont utilisées Pour calculer les variables météorologiques et la prévision météorologique. Elles servent également pour diagnostiquer les défauts cardiaques à l'aide de l'Électrocardiographie. Dans le domaine du commerce les fonctions servent n à réaliser les bénéfices maxima en étudiant les fonctions de bénéfice et de cout. On utilise les fonctions dans la médecine sportive pour déterminer le poids optimum [la taille en cm - 100] aussi pour déterminer le pourcentage de graisse corporelle. Elles sont utilisées dans l'industrie pour étudier l'effet de différentes variables sur la qualité de production.

Le savant Suisse de mathématiques et physique, Leonhard Euler (1707-1783) fut l'un de plus important des savants de 18ième siècle, il a généralisé un multitude des expressions mathématiques comme la nation de la fonctions. Il est le premier qui utilisé la notation $y = f(x)$ pour exprimer la fonction en considérant que la fonction est une relation entre les éléments de deux ensembles de sorte qu'on puisse calculer la valeur d'une variable dépendant y à partir d'un autre variable indépendant choisit librement ce qui est enduit à transformer la géométrie en relations arithmétiques ainsi que les rapports trigonométriques, connues par les pharaons et les babéliens et maitrisées par les arabes, en fonctions trigonométriques.

Dans cette unité, on va aborder des différentes formes des fonctions réelles : représentation graphique, transformation le su représentation, logiciels, utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie courante dans les différents domaines.



Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître le concept de la fonction réelle.
- Déterminer l'ensemble de définition l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction réelle.
- Dédire le sens de variation d'une fonction réelle (croissante, décroissante ou constante).
- Identifier les fonctions paires et les fonctions impaires et les distinguer.
- Identifier les fonctions polynômes.
- Tracer les courbes représentatives des fonctions: (carré – valeur absolue – cubique – rationnelle et déduire les propriétés de chacune d'elles.
- Dédire l'effet des transformations : $f(x \pm a) \pm b$, $a f(x \pm b) \pm c$ sur les fonctions précédemment citées.
- Appliquer les transformations précédentes sur le tracé des courbes des fonctions réelles.
- Résoudre des équations de la forme : $lx + bl = c$ $lax + bl = ldx + c$.
- Résoudre des inéquations de la forme: $lax + bl < c$ $lax + bl \leq c$ $lax + bl > c$ $lax + bl \geq c$
- Utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie quotidienne dans les différents domaines.
- Relier les connaissances étudiées sur transformations précédentes aux fonctions trigonométriques sous forme d'activités.
- Utiliser le logiciel Geogebra pour représenter les fonctions graphiquement et voir l'effet des transformations sur ces fonctions.



Vocabulaires de base

- Fonction réelle
- Ensemble de définition
- Ensemble d'arrivée
- Ensemble image
- Une droite vertical
- Fonction définie par morceaux
- Composition de fonctions
- Fonction paire
- Fonction impaire
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Fonction constante
- Fonction polynôme
- Fonction valeur absolue (Module)
- Fonction du second degré
- Fonction rationnelle
- Asymptote
- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Dilatation
- Solution graphique



Leçons de l'unité

- Leçon (1 - 1): Fonctions réelles.
Leçon (1 - 2): Sens de variation des fonctions.
Leçon (1 - 3): Fonctions paires et fonctions impaires.
Leçon (1 - 4): Représentations graphiques des fonctions.
Leçon (1 - 5): Equations et inéquations.



Organigramme de l'unité

Fonctions réelles et représentation graphique

Fonctions réelles

Ensemble de définition

Ensemble image

Sens de variation d'une fonction

Fonction croissante

Fonction décroissante

Fonction constante

Symétrie des fonctions

Fonctions paires

Fonctions impaires

Représentation graphiques des fonctions par les transformations géométriques

Applications

Résolution des équations

Résolution des inéquations



Aides pédagogiques

Calculatrice graphique – Logiciels :
de graphisme Geogebra

Allez apprendre

- ▶ La notion de fonction réelle.
- ▶ Le test de la droite verticale.
- ▶ La fonction définie par morceaux.
- ▶ L'identification de l'ensemble de définition et l'ensemble image de la fonction.
- ▶ Les opérations sur les fonctions.

Vocabulaires de base

- ▶ Fonction
- ▶ Ensemble de définition
- ▶ Ensemble d'arrivée
- ▶ Ensemble image
- ▶ Diagramme sagittale
- ▶ Diagramme cartésien
- ▶ Droite verticale
- ▶ Définition sur plusieurs intervalles (par morceaux).

Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice
- ▶ Logiciels de graphisme

Définition

1

Fonction réelle

Une fonction est dite une fonction réelle si son ensemble de définition et son ensemble d'arrivée sont des parties de nombres réelles $\mathbb{R}$

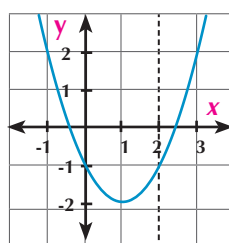
La représentation graphique des fonctions

Si $f: X \longrightarrow Y$ alors l'ensemble des couples (paires ordonnées) qui vérifie la règle de la fonction est appelé le graphe de la fonction est noté $G = \{ (x; y): x \in X; y \in Y; y = f(x) \}$

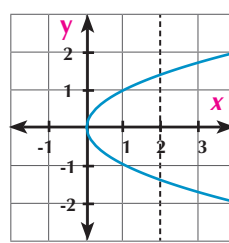
Si on représente cet ensemble dans un repère cartésien, on obtient la courbe représentative de la fonction. Dans l'exemple (1) le graphe de $f = \{ (1; 6), (2; 8), (3; 9), (4; 6) \}$.

**A apprendre****Test de la droite verticale**

Si la droite verticale en tout élément de l'ensemble de définition passe par un seul point des points représentant la relation. La relation est donc est une fonction de $X \longrightarrow Y$



une fonction



n'est pas une fonction

**Exemple****Déterminer les relations qui représentent des fonctions**

- ① Dans chacune des figures suivantes, montre si Y représente une fonction en x ou non.

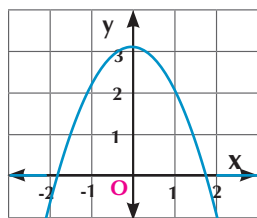


Figure (1)

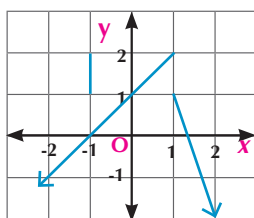


Figure (2)

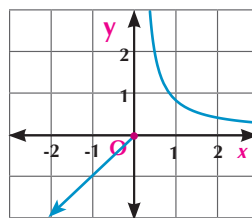


Figure (3)

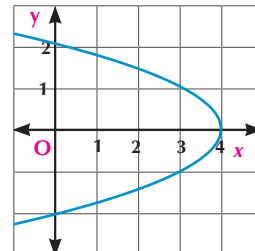


Figure (4)

**Solution**

La figure (1) représente une fonction

La figure (2) ne représente pas une fonction car la droite verticale passant par le point (1 ; 0) coupe la courbe en deux points.

La figure (3) représente une fonction.

La figure (4) ne représente pas une fonction car il existe au moins une droite verticale qui coupe la courbe en plus qu'un point.

**Essayez de résoudre**

- ① Parmi les figures suivantes, laquelle représente une fonction de $X \longrightarrow Y$ Pourquoi?

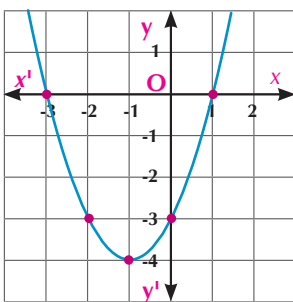


Figure (1)

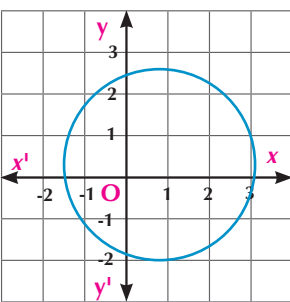


Figure (2)

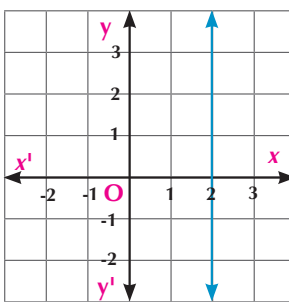


Figure (3)

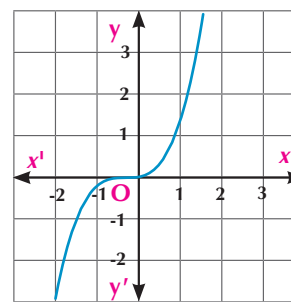


Figure (4)

**Exemple****Détermination de l'ensemble image d'une fonction**

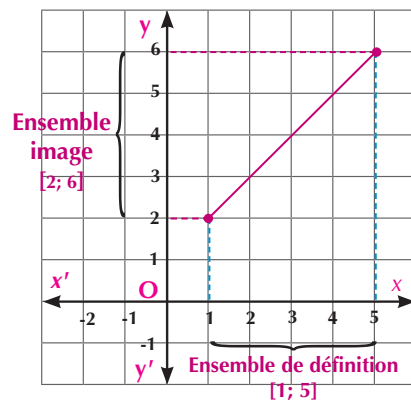
- ② a Soit $f : [1; 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x + 1$
Tracez la courbe représentative de la fonction f, en déduire l'ensemble image de f
- b Soit $g : [1; 5[\longrightarrow \mathbb{R}$ où $g(x) = x + 1$
Tracez la courbe représentative de la fonction g, en déduire l'ensemble image de g.

Solution

- a) La fonction f est une fonction affine f son ensemble de définition est $[1; 5]$ Elle est représentée graphiquement par un segment de droite dont les extrémités sont les deux points de coordonnées $(1; f(1))$ et $(5; f(5))$ ou les deux points de coordonnées $(1; 2)$, $(5; 6)$.

L'ensemble image de $f = [2; 6]$

C'est l'ensemble des ordonnées des points appartenant à la courbe de la fonction.



Essayez de résoudre

- 2 a) Soit $f: [1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = 1 - x$

Tracer la courbe représentative de la fonction f , en déduire l'ensemble image de f .

- b) Soit $g:]-\infty; -1[\rightarrow \mathbb{R}$, où $g(x) = 1 - x$

Tracer la courbe représentative de la fonction g , en déduire l'ensemble image de g .

Fonction définie par morceau

Pour diminuer la consommation de l'électricité, de l'eau et de gaz, on calcule la valeur de la consommation mensuelle suivant des tranches particulières qui relient la quantité de consommation par sa valeur.

Représentation de la fonction définie par morceaux :

Exemple

- 3 Soit $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction, en déduire l'ensemble définition et l'ensemble image de la fonction.

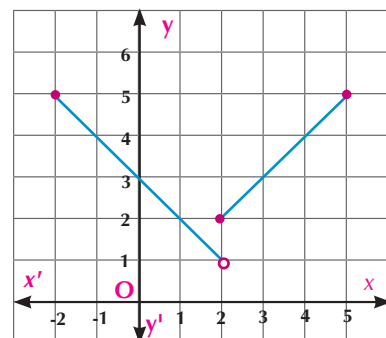
Solution

La fonction est définie par morceaux sur deux intervalles, elle est attribuée par deux règles de définitions.

La première : $f_1(x) = 3 - x$ sur l'intervalle $[-2; 2[$

C'est une fonction affine qui est représentée par un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(-2; 5)$ et $(2; 1)$

en posant un rond vide à l'extrémité du segment de coordonnées $(2; 1)$. car $2 \notin [-2; 2[$ (voir la figure ci-contre)



La deuxième : $f_2(x) = x$ si $2 \leq x \leq 5$ ou sur l'intervalle $[2; 5]$

C'est une fonction affine qui est représentée par **un segment de droite dont les extrémités sont les** Points de coordonnées $(2; 2), (5; 5)$. Donc l'ensemble définition de

$$f = [-2; 2[\cup [2; 5] = [-2; 5]$$

Du graphique, on déduit que :

L'ensemble définition de $f = [-2; 5]$

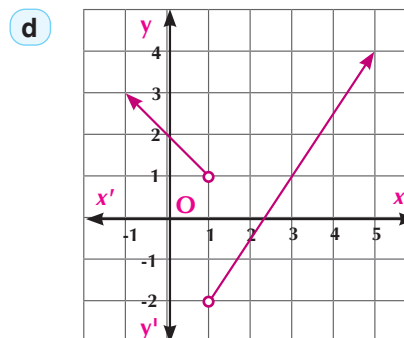
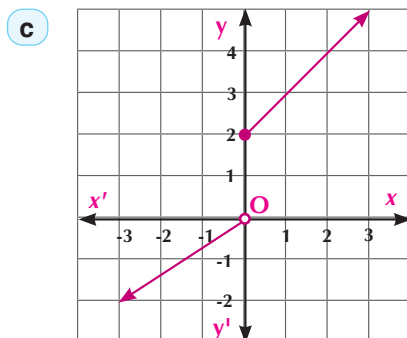
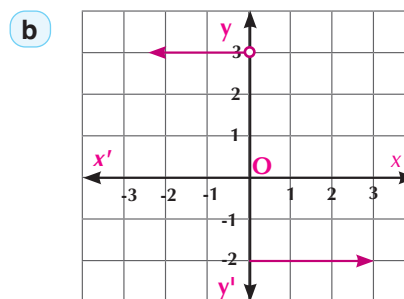
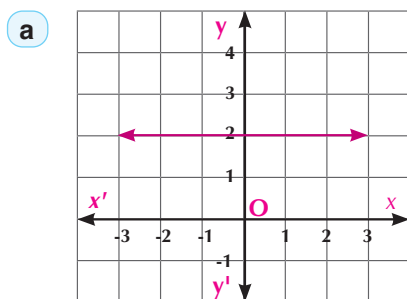
L'ensemble image de $f =]1; 5]$

Essayez de résoudre

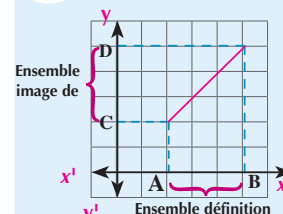
③ Soit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction f . Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction.

④ Dans chacune des figures suivantes, déduisez l'ensemble définition et l'ensemble image de f .



Remarque



Dans la représentation graphique de la fonction f ensemble définition de $f = [a; b]$ ensemble image de $f = [c; d]$

Déterminé de l'ensemble définition d'une fonction réelle et les opérations

On peut déterminer l'ensemble définition d'une fonction réelle à partir de sa règle de définition ou de sa représentation graphique.



Exemple

Détermination de l'ensemble définition d'une fonction

4 Déterminez l'ensemble définition de la fonction:

a $f_1(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$

b $f_2(x) = \sqrt{x-3}$

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$



Solution

a La fonction f_1 n'est pas indéfinie lorsque le dénominateur = 0 pour cela $x^2 - 9 = 0$ alors $x = \pm 3$ l'ensemble définition de f_1 est donc $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$

b La fonction f_2 est définie lorsque le radicand est positive ou nul, c.à.d. toutes les valeurs de x pour lesquelles $x - 3 \geq 0$
 $\therefore x - 3 \geq 0 \quad \therefore x \geq 3 \quad \therefore$ l'ensemble définition de $f_2 = [3 ; +\infty [$



c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$, l'indice de la racine est nombre impair l'ensemble définition de $f_3 = \mathbb{R}$

Remarquez que :

Soient $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ où $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, $g(x)$ est un polynôme

I) Si n est un nombre impair alors l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

II) Si n est un nombre pair alors l'ensemble définition de f est les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$



Essayez de résoudre

5 Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions réelles définies par les règles suivantes:

a $f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

b $f_2(x) = \sqrt{x-3}$

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$

Pensé critique: Trouvez la valeur de k , sachant que l'ensemble définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x^2-6x+k}$ est $\mathbb{R} - \{3\}$.



Activité

Opération sur les fonctions

Soient f_1 et f_2 deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_1 et D_2 respectivement, alors:

1 $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, l'ensemble définition de $(f_1 \pm f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

2 $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, l'ensemble définition de $(f_1 \cdot f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

3 $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où $f_2(x) \neq 0$ l'ensemble définition de $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ est $(D_1 \cap D_2) - Z(f_2)$
 Où $Z(f_2)$ est l'ensemble des zéros de f_2



Rappel

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est l'ensemble des nombres réels ou une partie de cet ensemble

On remarque que: dans tous les cas précédents, l'ensemble définition de la fonction obtenue est égale à l'intersection des ensembles de définition de f_1 et f_2 privé des valeurs qui rend $f_2(x) = 0$ c'est dans le cas de la division.

Soient $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_1(x) = 3x - 1$
 $f_2 : [-2; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_2(x) = x - 3$

I) Trouvez la règle et l'ensemble définition de chacune des fonctions suivantes:

- a** $(f_1 + f_2)$ **b** $(f_1 - f_2)$ **c** $(f_1 \cdot f_2)$ **d** $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$

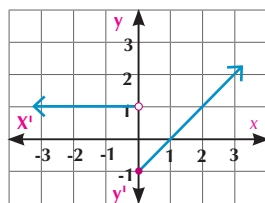
II) Calculez la valeur numérique, si cela est possible, pour chacune des fonctions suivantes :

- a** $(f_1 + f_2)(3)$ **b** $(f_1 - f_2)(-3)$ **c** $(f_1 \cdot f_2)(-2)$
d $(f_1 \cdot f_2)(2)$ **e** $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(4)$ **f** $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(-1)$

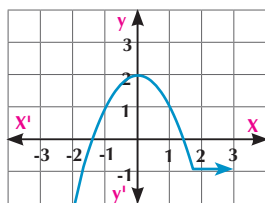
Exercices 1 - 1

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

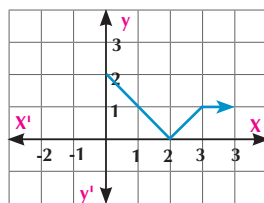
1 Parmi les diagrammes cartésiens suivants, la relation qui ne représente pas une fonction est :



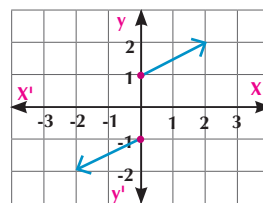
a



b



c



d

Répondre à ce qui suit:

2 Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $X = \{1; 2; -2; -3\}$

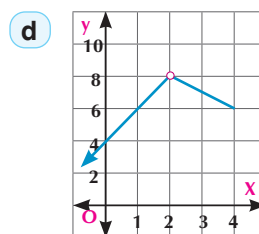
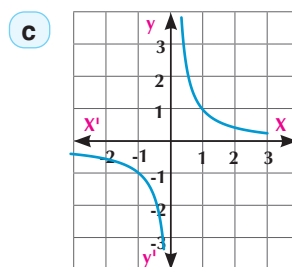
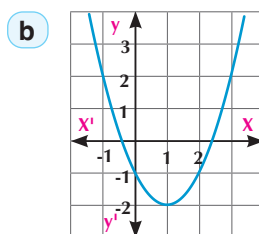
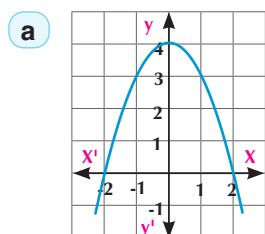
Trouvez l'ensemble image de f sachant que $f(x) = 5x - 3$

3 Soient $g : \{1; 2; 3; 4; 5\} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ où $g(x) = 4x - 3$

a Trouvez l'ensemble image de g

b Si $g(k) = 17$ trouvez la valeur de k

4 Dans chacune des figures suivantes, déduire l'ensemble définition et l'ensemble image de fonction:



- 5) Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f définies par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Puis tracez la courbe représentative de la fonction f . Du graphique, déduisez l'ensemble image.

- 6) Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad \text{Du graphique, déduire l'ensemble image de la fonction.}$$

- 7) Soit $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ Tracez la courbe représentative de la fonction f

Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

- 8) Soit $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ Tracez la courbe représentative de la fonction f

Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

- 9) So it: $f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{si } x < 3 \\ -x^3 & \text{si } 3 \leq x \leq 8 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

Trouvez :

a) $f(2)$

b) $f(3)$

c) $f(10)$

- 10) **En lien avec la commerce:** La fonction f , felle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{Si } 0 \leq x \leq 5000 \\ 2x + 2500 & \text{Si } 5000 < x \leq 15000 \\ \frac{3}{2}x + 10000 & \text{Si } 15000 < x \leq 60000 \end{cases}$$

représente la somme, en L.E reçue par l'une des sociétés de la distribution d'un type des appareils électriques où x est le nombre d'appareil. Trouvz :

a) $f(5000)$

b) $f(10000)$

c) $f(50000)$

- 11) Déterminez l'ensemble de définition de chacune des fonctions réelles suivantes :

a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-5x+6}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$

d) $f(x) = \sqrt{4-x}$

Sens de variation des fonctions

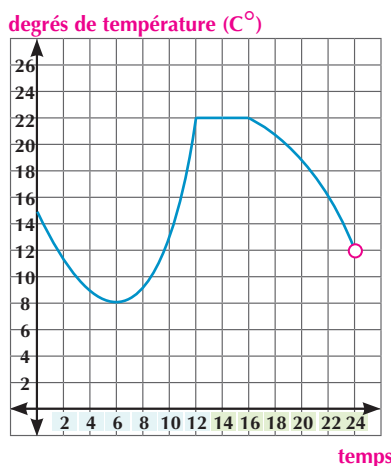


discutez et réfléchissez

Le graphique ci - contre indique les températures enregistrées au Caire pendant un jour. Observez la variation de température par rapport au temps, puis déterminez :

- Les intervalles de décroissance de degrés de température.
- Les intervalles de croissance de degrés de température.
- Les intervalles où la variation de degrés de température est constante.

Les propriétés de la courbe aident à étudier la variation de la fonction pour déterminer les intervalles de croissance, de décroissance et les intervalles où la fonction est constante. Autrement dit, c'est l'étude de la monotonie de la fonction ou son sens de variation.



Allez apprendre



- Sens de variation des fonctions.
- Utilisation du logiciel (Geogebra) pour tracer les courbes représentatives des fonctions

Vocabulaires de base



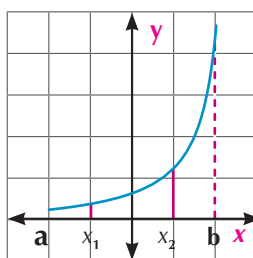
- Sens de variation
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Fonction constante



A apprendre

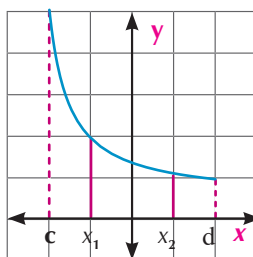
Fonction croissante:

On dit que la fonction f est **croissante** sur un intervalle $]a ; b[$
si pour tout $x_1 \in]a ; b[; x_2 \in]a ; b[$ **si** $x_2 > x_1$
alors : $f(x_2) > f(x_1)$



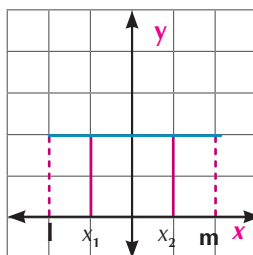
Fonction décroissante:

On dit que la fonction f est **décroissante** sur un intervalle $]c ; d[$
si pour tout $x_1 \in]c ; d[; x_2 \in]c ; d[$ **si** $x_2 > x_1$
alors : $f(x_2) < f(x_1)$



Fonction constante:

On dit que la fonction f est **constante** sur un intervalle $]l ; m[$
si $x_1 \in]l ; m[; x_2 \in]l ; m[$ **si** $x_2 > x_1$
alors : $f(x_2) = f(x_1)$



Aides pédagogiques



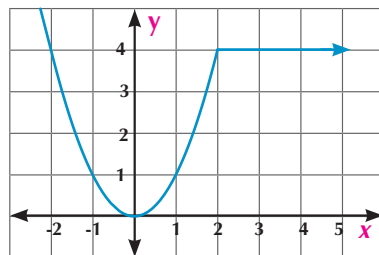
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme.

Exemple

- 1 Étudiez le sens de variation de la fonction représentée dans la figure ci-contre.

Solution

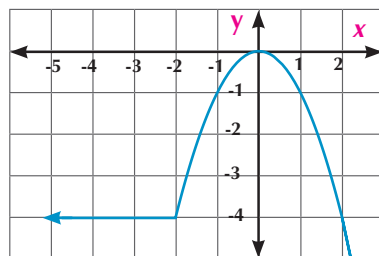
- Ø La fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$
- Ø La fonction est croissante sur l'intervalle $]0 ; 2[$
- Ø La fonction est constante sur l'intervalle $]2 ; +\infty [$



Essayez de résoudre

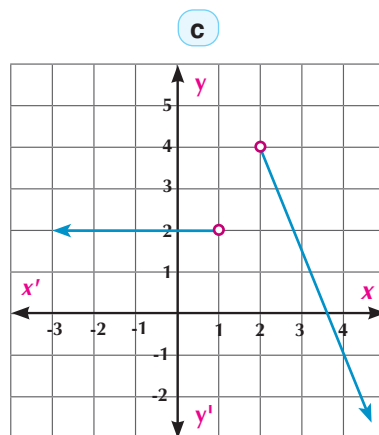
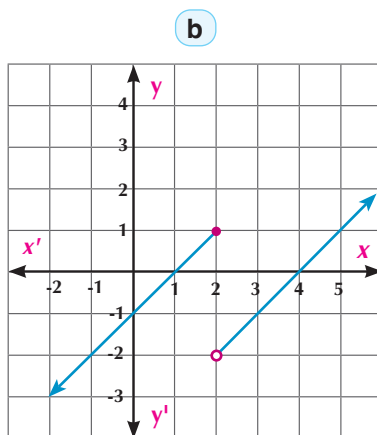
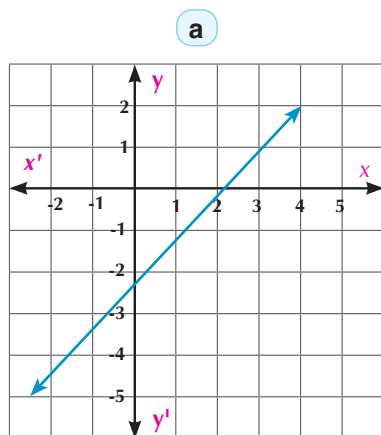
- 1 Dans la figure ci-contre:

Étudiez les intervalles où la fonction est croissante, les intervalles où la fonction est décroissante et les intervalles où la fonction est constante.



Exemple

- 2 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction

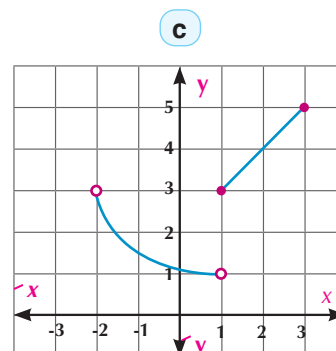
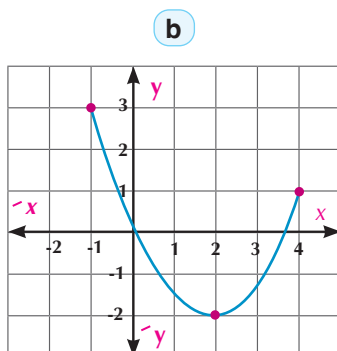
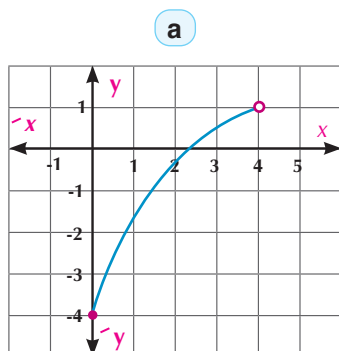


Solution

- L'ensemble définition de $f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty [$, L'ensemble image de $f =]-\infty ; +\infty [$ la fonction est croissante sur $]-\infty ; +\infty [$
- L'ensemble définition de $f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty [=]-\infty ; +\infty [$ la fonction est croissante sur $]-\infty ; 2[$ et la fonction est croissante sur $]2 ; +\infty [$
- L'ensemble définition de $f =]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty [$, L'ensemble image de $f =]-\infty ; 4[$ la fonction est constante sur $]-\infty ; 1[$, la fonction est décroissante sur $]2 ; +\infty [$

Essayez de résoudre

- 2 Dans chacune des figures suivantes, déduire l'ensemble définition, l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction :





Exercices 1 - 2



- ① Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions.
Du graphique, déduire l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction:

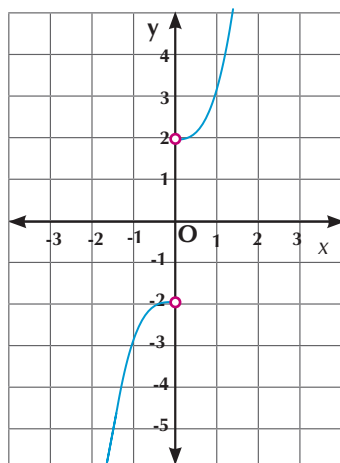


Fig (1)

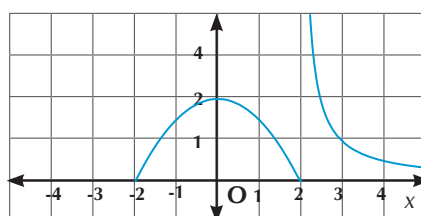


Fig (2)

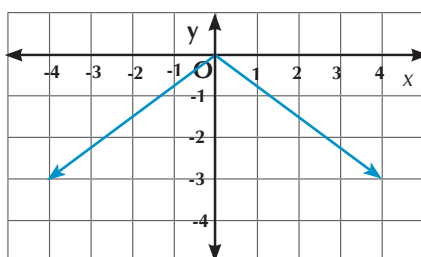


Fig (3)

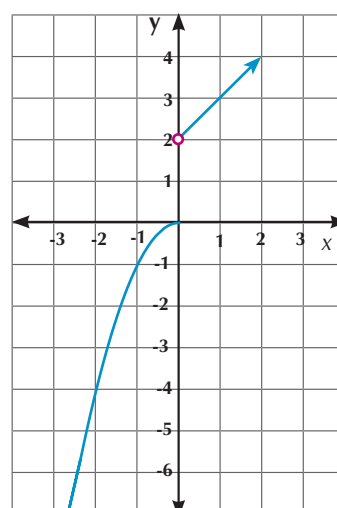
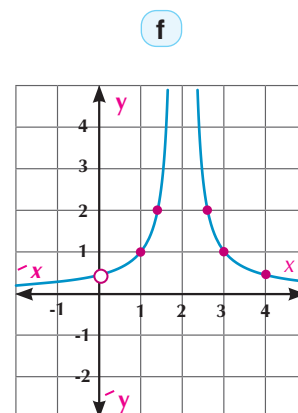
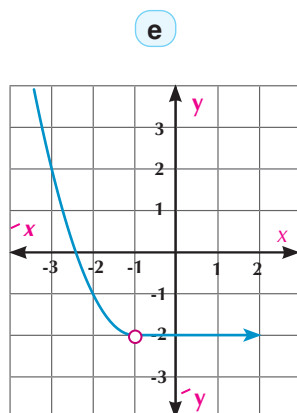
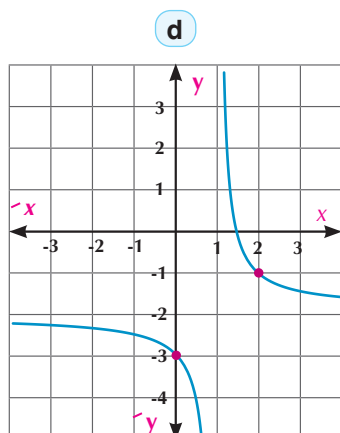
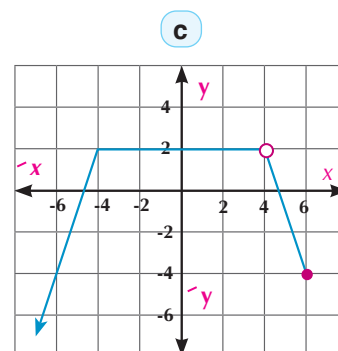
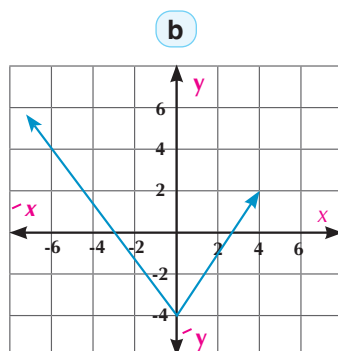
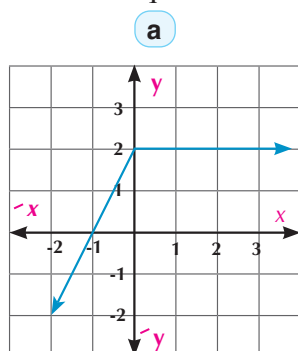


Fig (4)

- ② Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble définition, l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction :



③ Soit $f: [-2 ; 6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{Si } x < 1 \\ x & \text{Si } 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction f . Du graphique, déduire l'ensemble définition de la fonction et étudier son sens de variation

Allez apprendre

- ▶ La symétrie des courbes représentatives des fonctions.
- ▶ Les fonctions paires
- ▶ Les fonctions impaires

Vocabulaires de base

- ▶ Symétrie
- ▶ Fonction paire
- ▶ Fonction impaire

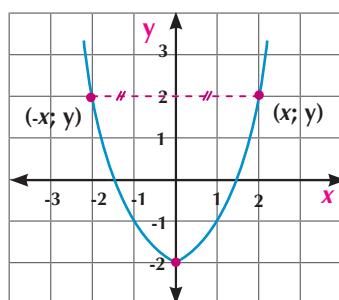
Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de graphisme

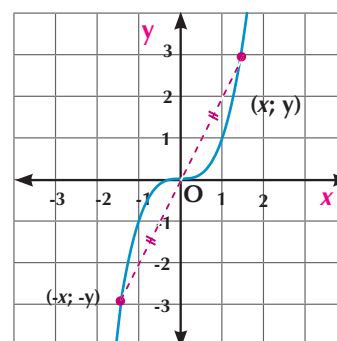
On peut identifier facilement des propriétés géométriques de la courbe représentative d'une fonction f où $y = f(x)$. Ces propriétés peuvent être utilisées pour l'étude des fonctions et leurs applications. Parmi ces propriétés la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et la symétrie par rapport à l'origine.

Préliminaire

Vous avez déjà étudié la notion de la symétrie par rapport à une droite où on peut plier la figure le long de la droite pour obtenir deux demi-figures superposables. Vous avez également étudié la symétrie par rapport à un point.



symétrie par rapport à l'axe des y **Figure (1)**



symétrie par rapport à l'origine. **Figure (2)**

Dans la figure (1):

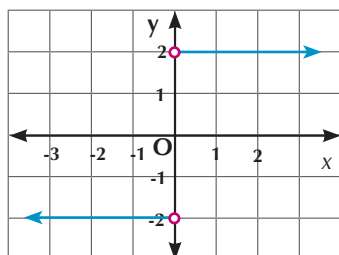
le point $(-x; y)$ situé sur la courbe de la fonction est l'image du point $(x; y)$ situé sur la même courbe par la symétrie par rapport à l'axe des y.

Dans la figure (2):

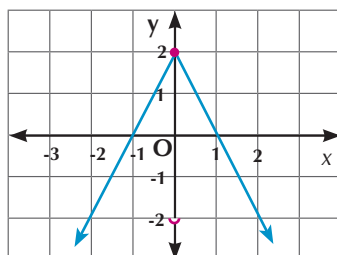
La représentation graphique de la relation entre x et y montre une symétrie par rapport au point d'origine où le point $(-x; -y)$ de la courbe est l'image du point $(x; y)$ situé sur la même courbe.

Essayez de résoudre

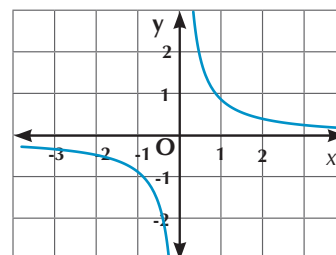
- ① Dans chacune des figures suivantes, montrer si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y ou par rapport au point d'origine.



(a)



(b)



(c)

Pensé critique :

Est-ce que toutes les courbes représentatives des fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine ? **Pourquoi?**

Fonctions paires et fonctions impaires**A apprendre**

Fonction paire : On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est paire si pour tout $-x$ et x appartenant à l'ensemble de définition de la fonction $f(-x) = f(x)$. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y .

Fonction impaire : On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est impaire si pour tout $-x$ et x appartenant à l'ensemble de définition de la fonction $f(-x) = -f(x)$. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point d'origine.

Remarque que : Beaucoup de fonction ne sont pas ni paires ni impaire. Pour étudier la parité d'une fonction, il faut chercher l'existence de x et $-x$ dans l'ensemble de définition de la fonction, sinon la fonction n'est pas ni paire ni impaire. Dans ce cas, ce n'est pas utile de chercher $f(-x)$

**Exemple**

1 Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes .

a $f(x) = x^2$

b $f(x) = x^3$

c $f(x) = \sqrt{x+3}$

d $f(x) = \cos x$

Solution

a $f(x) = x^2$, Ensemble de définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ pour tout $-x$ et x appartenant à $\mathbb{R}$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

C.à.d : $f(-x) = f(x)$

$\therefore$ La fonction f est paire

b $f(x) = x^3$, Ensemble de définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ pour tout $-x$ et x appartenant à $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

C.à.d : $f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ La fonction f est impaire

Remarque importante :

La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = ax^n$ où $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}^+$ est appelée fonction exponentielle, Cette fonction est paire si n est un nombre paire et elle est impaire si n est un nombre impaire

c) $f(x) = \sqrt{x+3}$, Ensemble définition de $f = [-3; +\infty[$

Remarque que $4 \in [-3; +\infty[$ et $-4 \notin [-3; +\infty[$

$\therefore$ Pour tout $x \in [-3; +\infty[$ et $-x \in [-3; +\infty[$

$\therefore$ La fonction f est ni paire ni impaire.

d) $f(x) = \cos x$, Ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ Pour tout $-x$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

C.à.d. $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ La fonction f est paire



Remarque

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

Essayez de résoudre

2) Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = x^2 + \cos x$

c) $f(x) = x^3 - \sin x$

d) $f(x) = x^2 \cos x$

e) $f(x) = x^3 \sin x$

f) $f(x) = x^3 \cos x$

g) $f(x) = x^3 + x^2$

h) $f(x) = \sin x + \cos x$

i) $f(x) = \sin x \cos x$

Que déduisez-vous ?

Propriétés importantes :

Si f_1 et f_2 sont des fonctions paires et g_1 et g_2 sont des fonctions impaires, alors :

1) $f_1 + f_2$ est une fonction paire.

2) $g_1 + g_2$ est une fonction impaire.

3) $f_1 \times f_2$ est une fonction paire.

4) $g_1 \times g_2$ est une fonction paire.

5) $f_1 \times g_2$ est une fonction impaire.

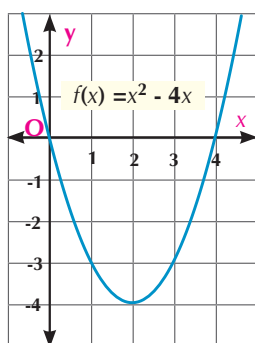
6) $f_1 + g_2$ est une fonction qui est ni paires ni impaire.

En utilisant les propriétés précédentes, vérifiez votre réponse obtenues en Essayez de résoudre (2)

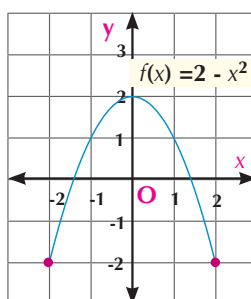
Exemple

2) Chacune des figures suivantes est une représentation de la fonction f ; Déterminer graphiquement si la fonction est paire ou impaire ou ni paire ni impaire puis vérifier la réponse algébriquement.

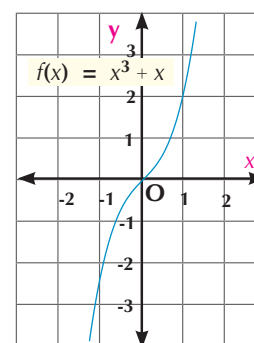
c



b



a



Solution

a) $f(x) = x^3 + x$; de la représentation graphique, on remarque que :

L'ensemble définition $f = \mathbb{R}$ et la courbe de la fonction est symétrique par rapport au point d'origine. Donc la fonction est impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$$\because \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } -x \in \mathbb{R} \quad \therefore f(-x) = (-x)^3 + (-x)$$

En simplifiant :

$$f(-x) = -x^3 - x$$

Prendre (-1) facteur commun

$$f(-x) = -(x^3 + x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc la fonction est impaire.

- b** $f(x) = 2 - x^2$, de la représentation graphique, on remarque que

L'ensemble définition de $f = [-2; 2]$, et la courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la fonction est paire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$$\because \text{Pour tout } x \in [-2; 2], -x \in [-2; 2] \quad \therefore f(-x) = 2 - (-x)^2$$

En simplifiant

$$f(-x) = 2 - x^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc la fonction est paire

- c** $f(x) = x^2 - 4x$, de la représentation graphique, on remarque que :

L'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, et la courbe de la fonction n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni symétrique par rapport au point d'origine. Donc la fonction est ni paire ni impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$x \in \mathbb{R}$:

$$\because \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \quad \therefore f(-x) = (-x)^2 - 4(-x)$$

En simplifiant

$$f(-x) = x^2 + 4x \neq f(x) \quad \therefore f \text{ n'est pas pair}$$

Mais

$$-f(x) = -x^2 + 4x$$

Donc

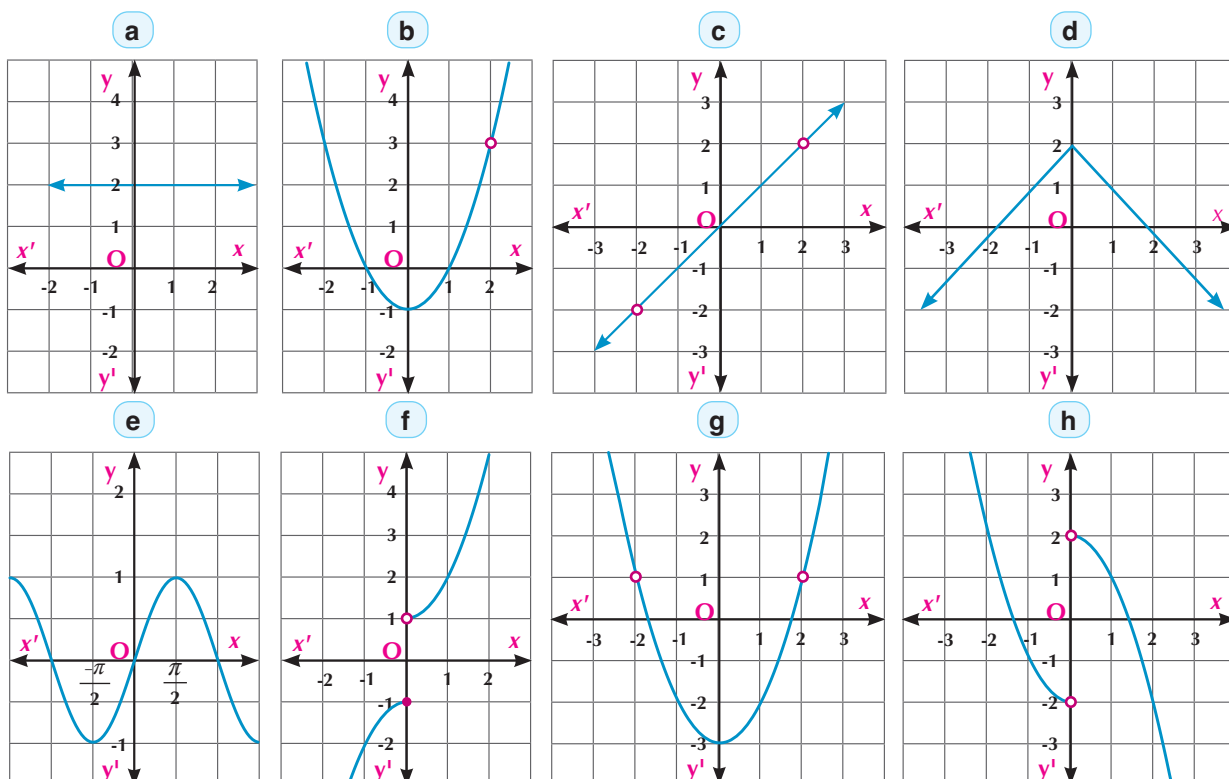
$$f(-x) \neq -f(x)$$

$\therefore f$ n'est pas impaire

Donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

Essayez de résoudre

- 3 Dans chacune des figure suivantes, déterminer si la fonction est paire ou impaire ou n'est pas paire ni impaire.





Exercices 1 - 3



- 1 Indiquez si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport au point d'origine. Expliquez la réponse.

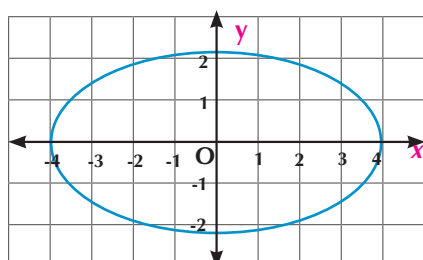


Fig (1)

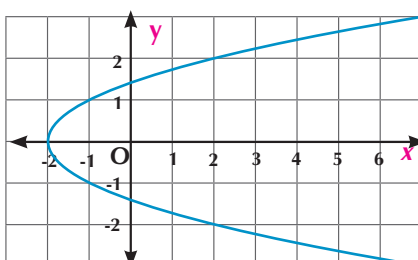


Fig (2)

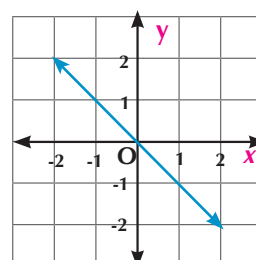


Fig (3)

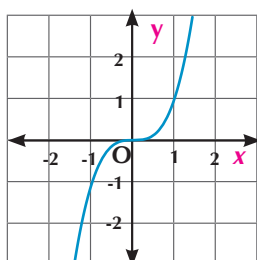


Fig (4)

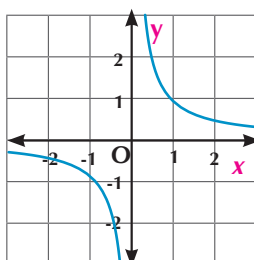


Fig (5)

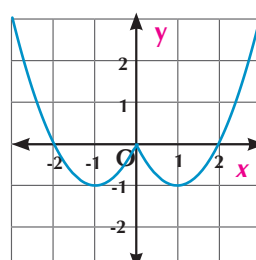


Fig (6)

- 2 Trouvez l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes en déterminant sa parité.

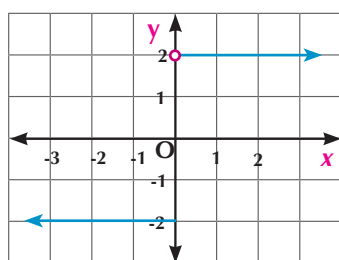


Fig (a)

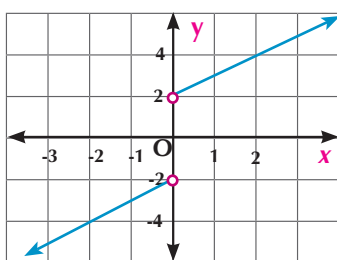


Fig (b)

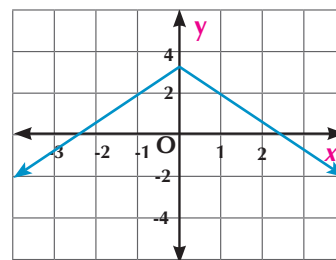


Fig (c)

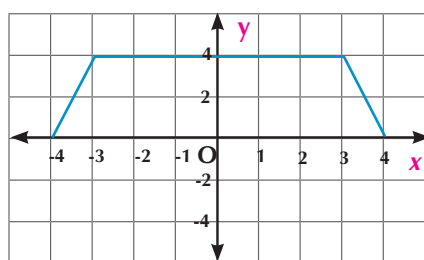


Fig (d)

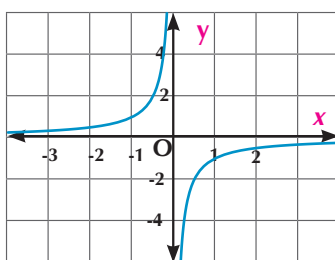


Fig (e)

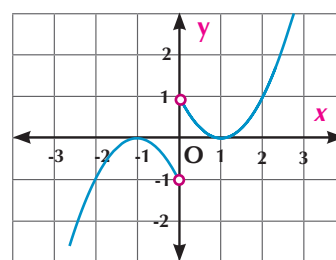


Fig (f)

3) Etudiez la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

b) $f(x) = 3x - 4x^3$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 - 3x$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 3}$

f) $f(x) = x \cos x$

4) Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions réelles définies par $f_1(x) = x^5$; $f_2(x) = \sin x$ et $f_3(x) = 5x^2$
Parmi les fonctions suivantes, indiquez celle qui sont paires, celle qui sont impaires et celle qui ne sont ni paires ni impaires.

a) $f_1 + f_2$

b) $f_1 + f_3$

c) $f_1 \times f_2$

d) $f_3 \times f_2$

5) Observez les figures puis répondre aux questions suivantes :

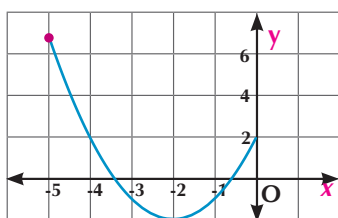


Fig (1)

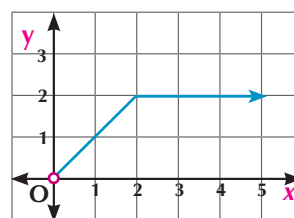


Fig (2)

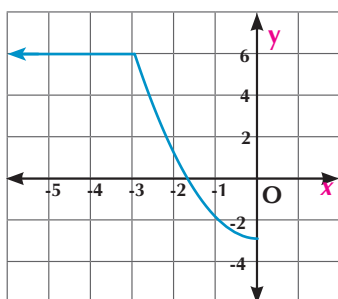


Fig (3)



Fig (4)

- I) Complétez la représentation graphique des figures (1) et (3) pour obtenir une fonction paire dans son ensemble de définition.
- II) Complétez la représentation graphique des figures (2) et (4) pour obtenir une fonction impaire dans son ensemble de définition.
- III) Trouvez ensuite l'ensemble de définition; l'ensemble image et le sens de variation dans chaque cas.

Rprésentation graphique des fonctions

Unité 1

1 - 4

Fonction polynôme

Vous avez déjà étudié les fonctions polynômes dont l'expression algébrique est sous la forme: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$

où : $a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n \in \mathbb{R} ; a_n \neq 0 ; n \in \mathbb{N}$

L'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sont l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (sauf indication contraire), Ces fonctions sont appelées fonctions de degré n . Le degré d'une fonction polynôme non nulle est la plus grande puissance prise par la variable indépendante x . Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques fonctions polynômes.

Remarquez:

- 1- Si $f(x) = a_0 ; a_0 \neq 0$ alors f est appelée une fonction polynôme constante.
- 2- Les fonctions polynôme de premier degré sont appelées des fonctions affines, les fonctions de second degré sont appelées fonction carrées et celles du troisième degré sont appelées fonctions cubes.
- 3- Si on additionne ou soustrait des fonctions de puissances différentes, on obtient une fonction polynôme.
- 4- Les zéros d'une fonction polynôme sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction avec l'axe des abscisses.

Tracé des courbes représentatives des fonctions.

(I): Fonctions polynôme:



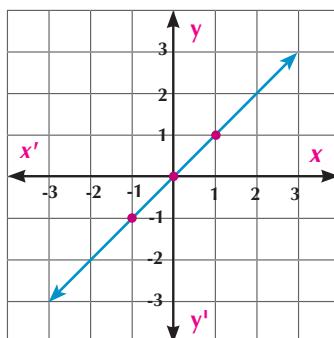
A apprendre

Le graphique ci-dessous représente la courbe de la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- 1) f une fonction affine dont la forme la plus simple est : $f(x) = x$ dans ce cas on dit que f est une fonction linéaire

La fonction f associe chaque nombre à lui-même, elle est représentée par une droite passant par le point de coordonnées $(0; 0)$, et de pente = 1

(Vérifiez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire, f est croissante sur $\mathbb{R}$)



Allez apprendre



- Fonctions polynômes (affine, carrée, cubique)
- Fonction valeur absolue (module)
- Fonction rationnelle
- Utiliser les transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions
 - $y = f(x) + a$
 - $y = f(x + a)$
 - $y = f(x + a) + b$
 - $y = -f(x)$
 - $y = af(x)$
 - $y = af(x + b) + c$
- Les transformations de quelques fonctions trigonométriques.

Vocabulaires de base



- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Verticale
- Horizontale
- Asymptote

Aides pédagogiques



- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

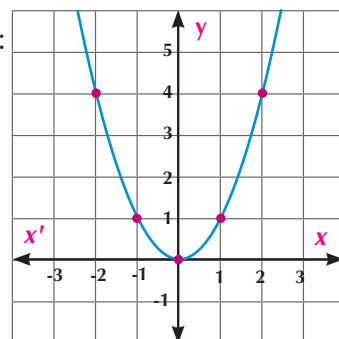
- 2) f une fonction du seconde degré dont la forme la plus simple est:

$$f(x) = x^2$$

dans ce cas on dit que f est une fonction carrée

La fonction f associe un nombre à son carré, elle est représentée graphiquement par une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et de sommet le point de coordonnées (0; 0)

(Vérifiez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction paire, f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et f est croissante sur $]0; +\infty[$)



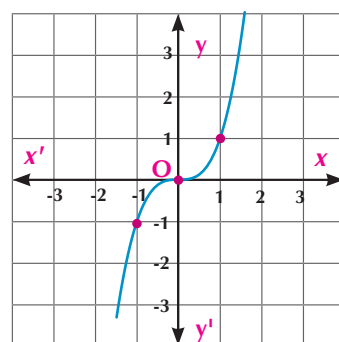
- 3) f une fonction cubique dont la forme la plus simple est:

$$f(x) = x^3$$

dans ce cas on dit que f est une fonction cubique

La fonction f associe le nombre par son cube, elle représentée graphiquement par une courbe dont le point de coordonnées (0; 0) est un centre de symétrie

(Vérifiez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire, f est croissante sur $\mathbb{R}$)



Exemple

- 3) Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Solution

- 1) Si $x < 2$, $f(x) = x^2$

on trace $f(x) = x^2$ pour tout $x \in]-\infty; 2[$

en posant un rond vide au point de coordonnées

(2; 4) figure (1)

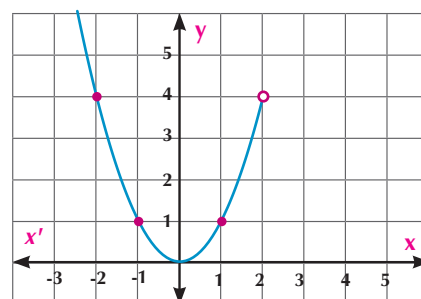


Fig (1)

- 2) Si $x > 2$: $f(x) = 4$

On trace la fonction constante $f(x) = 4$ pour tout $x \in]2; +\infty[$ dans le même graphique figure (2)

Remarquez que l'ensemble définition de $f = \mathbb{R} - \{2\}$, l'ensemble image de $f =]0; +\infty[$

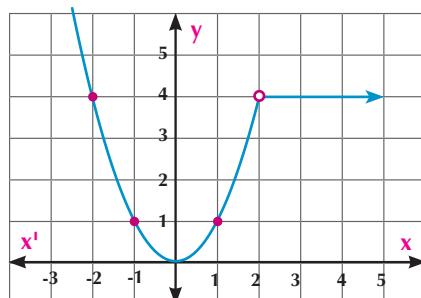


Fig (2)

Essayez de résoudre

1 Tracez la courbe représentative de la fonction f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en déduisez l'ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.}$$



A apprendre

Fonction valeur absolue (module)

La forme la plus simple de la fonction valeur absolue (module) est

$$f(x) = |x| ; x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

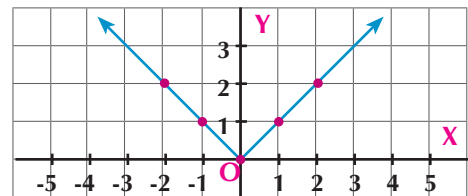
Remarquez que: $|-3| = |3| = 3$, $|0| = 0$; $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$

C'est à dire que: $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $\sqrt{x^2} = |x|$

La fonction f est représentée par deux demi-droites

d'origine le point de coordonnées dont la pente de l'une = 1 et celle de l'autre = -1

(Vérifiez que: l'ensemble image de $f = [0; +\infty[$, f est une fonction paire, f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et f est croissante sur $]0; +\infty[$)



A apprendre

Fonction rationnelle

La forme la plus simple de la fonction rationnelle est:

$$f(x) = \frac{1}{x} ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

La fonction f qui est appelée la fonction inverse, elle relie

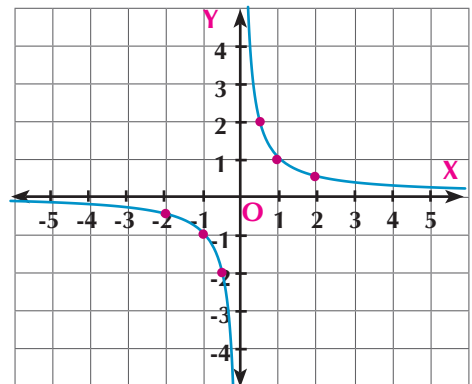
chaque nombre par son inverse, elle est représentée

graphiquement par une hyperbole une courbe dont le

point de coordonnées $(0; 0)$ est un centre de symétrie

($x = 0$ et $y = 0$ sont les asymptotes de la courbe)

(Vérifiez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R} - \{0\}$, f est une fonction impaire, f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et f est décroissante sur $]0; +\infty[$)



La transformation géométrique de la courbe d'une fonction



Travail coopératif

(I) La transformation verticale de la courbe de la fonction

Travaillez avec votre camarade

- Tracez la courbe représentative de la fonction f : $f(x) = x^2$ en utilisant le logiciel Geogebra
- Posez la le curseur sur le sommet de la courbe et tirez-la une unité verticalement vers le haut. Observez la nouvelle règle de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ **figure (1)**.

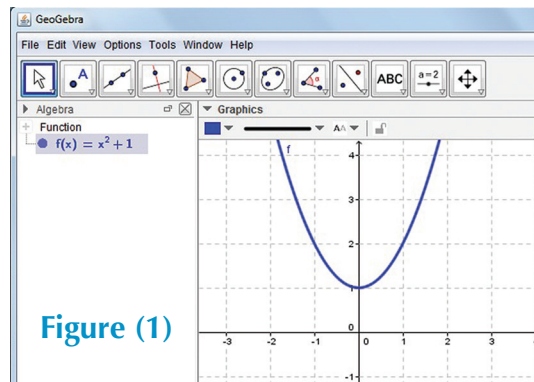


Figure (1)

- Tirez le sommet de la courbe aux points des coordonnées (0 ; 2) et (0 ; 3) et rédigez vos remarques à chaque fois.
- Tirez la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ deux unités verticalement vers le bas et observez le changement de la règle de la fonction, vous trouvez une nouvelle règle: $f(x) = x^2 - 2$ **Figure (2)**

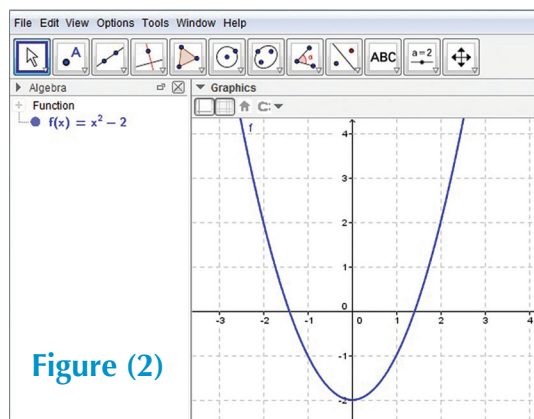


Figure (2)

Réfléchissez : Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $g(x) = x^2 - 5$ à partir de la courbe de la fonction $f(x) = x^2$?

De ce que précède, on remarque que :

Si $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x^2 - 2$; alors :

- La courbe de $g(x)$ est la même que (superposable à) la courbe de $f(x)$ par une translation d'amplitude a unité dans la direction positive de l'axe des ordonnées.
- La courbe de $g(x)$ est la même que (superposable à) la courbe de $f(x)$ par une translation d'amplitude deux unité dans la direction négative de l'axe des ordonnées.

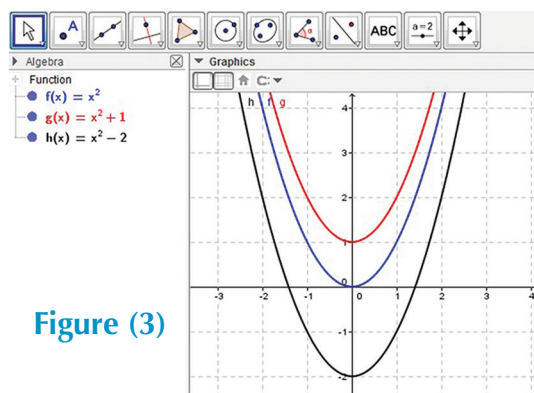


Figure (3)

Pensé critique : En utilisant la courbe de $f(x) = x^3$, montrez comment peut-on tracer la courbe De chacune des fonctions définies ci-dessous:

a) $g(x) = x^3 + 4$

b) $h(x) = x^3 - 5$


A apprendre
Tracé de la courbe de $y = f(x) + a$

Pour une fonction f ; la courbe d'équation $y = f(x) + a$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par une translation d'amplitude a unité dans la direction $\overrightarrow{oy}$, si $a > 0$; ou $\overrightarrow{oy'}$ si $a < 0$


Exemple

- 4 La figure ci – contre indique les courbes des fonction f , g et h Ecrire la règle de g et celle de h sachant que $f(x) = |x|$

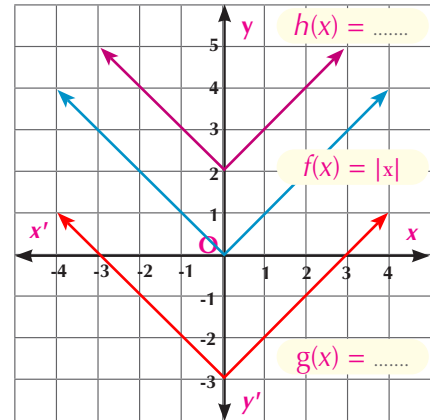

Solution

$\therefore$ La courbe de $g(x)$ est la même que celle de $f(x)$ mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des ordonnées. $\overrightarrow{oy'}$

$$r(x) = f(x) - 3 \quad \therefore f(x) = |x| \quad \therefore g(x) = |x| - 3$$

$\therefore$ La courbe de $h(x)$ est la même que celle de $f(x)$ mais déplacée 2 unités dans la direction positive de l'axe des ordonnées. $\overrightarrow{oy}$

$$\therefore h(x) = f(x) + 2 \quad \therefore f(x) = |x| \quad \therefore h(x) = |x| + 2$$

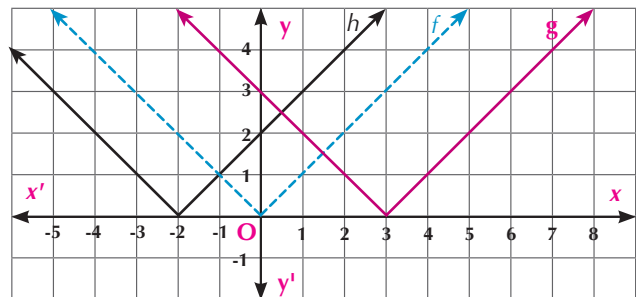

A apprendre
Tracé de la courbe de $y = f(x + a)$

Pour une fonction f la courbe d'équation $y = f(x + a)$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation d'amplitude a unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$ ou $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$

Remarquez que : Dans la figure ci-contre
: $f(x) = |x|$:

- 1) La courbe de la fonction g est la même que celle de f mais déplacée 3 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox}$
 $\therefore g(x) = |x - 3|$ l'origine de deux demi-droites est le points de coordonnées (3 ; 0)

- 2) La courbe de h est la même que celle de f mais déplacée 2 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox}$
 $\therefore g(x) = |x + 2|$, et l'origine de deux demi-droites est le points de coordonnées (-2 ; 0)


Exemple

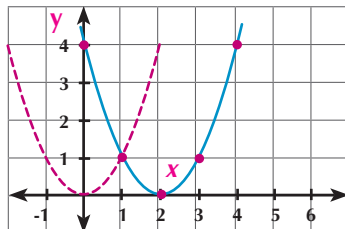
- 5 Utilisez la courbe de la fonction f telle que : $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que :

a $g(x) = (x - 2)^2$

b $h(x) = (x + 3)^2$

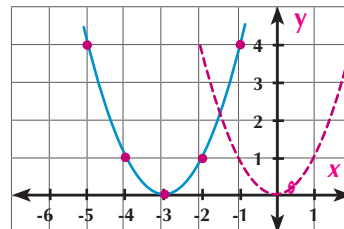
Solution

a



Ô La courbe de $g(x) = (x - 2)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée deux unités dans la direction positive de l'axe des abscisses. Les coordonnées du sommet de la courbe sont $(0; 2)$.

b



Ô La courbe de $h(x) = (x + 3)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des abscisses. Les coordonnées du sommet de la courbe sont $(-3; 0)$.

Essayez de résoudre

2 Utilisez la courbe de la fonction f telle que : $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que :

a $g(x) = (x + 4)^2$

b $h(x) = (x - 3)^2$

Pensé critique : Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $f(x) = x^2$, à partir de la courbe de la fonction $g(x) = (x - 3)^2 + 2$

Tracé de la courbe de $y = f(x + a) + b$

De ce qui précède, on déduit que : la courbe d'équation $y = f(x + a) + b$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation horizontale d'amplitude a unités (dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$, ou $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$), suivi par translation verticale d'amplitude b unités (dans la direction $\overrightarrow{oy}$ si $b > 0$ ou $\overrightarrow{oy'}$ si $b < 0$)

Essayez de résoudre

3 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que :

a $g(x) = (x + 2)^2 - 4$

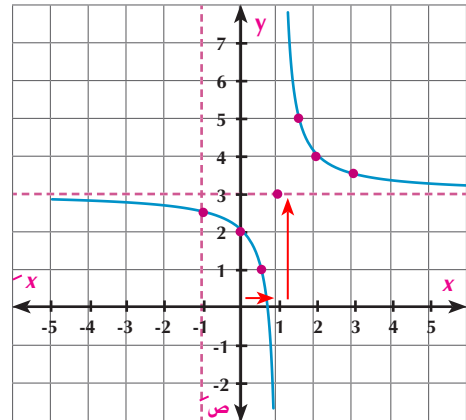
b $h(x) = (3 - x)^2 - 1$

**Exemple****Application des transformations géométriques pour tracer les courbes**

- 6 Tracez la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = \frac{1}{x-1} + 3$ Du graphique : déduisez l'ensemble définition et le sens de variation de la fonction

**Solution**

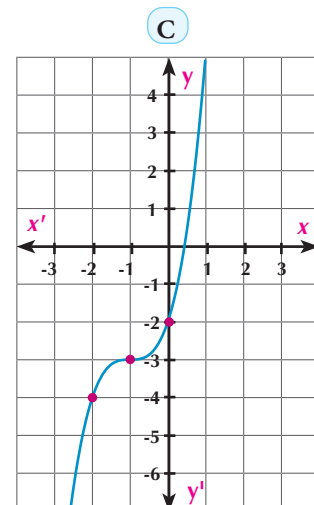
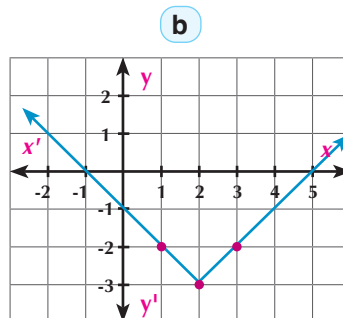
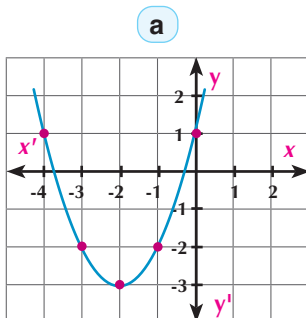
La courbe de g est la même que celle de $f(x) = \frac{1}{x}$ par une translation d'amplitude une unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ ($a = -1 < 0$) suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$. Le point coordonnées $(2; 0)$ est le centre de symétrie de la courbe. Ensemble image de $g = \mathbb{R} - \{3\}$
Sens de variation de g : g est décroissante sur $] -\infty; 1[$ et décroissante sur $] 1; \infty [$



Pensé critique : Peut-on dire que la fonction $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ est décroissante sur son ensemble définition ? Justifiez votre réponse.

**Essayez de résoudre**

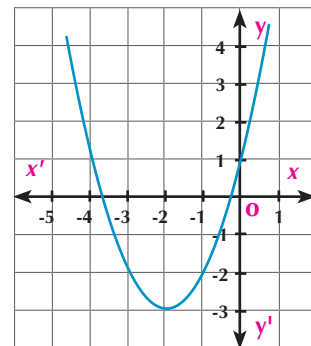
- 4 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ pour représenter chacune des fonctions définie ci-après :
- a $g(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ b $h(x) = \frac{2x-3}{x-2}$
- 5 Ecrivez la règle de chacune des fonctions représentées graphiquement par les figures suivantes :



Remarque : On peut tracer la courbe de $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en utilisant la translation verticale et la translation horizontale de la courbe de $g(x) = x^2$ comme suivant.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 1 \text{ en complétant le carré} \\ &= (x^2 + 4x + 4) - 3 \\ &= (x + 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

x	x	x^2
	1	x
		x

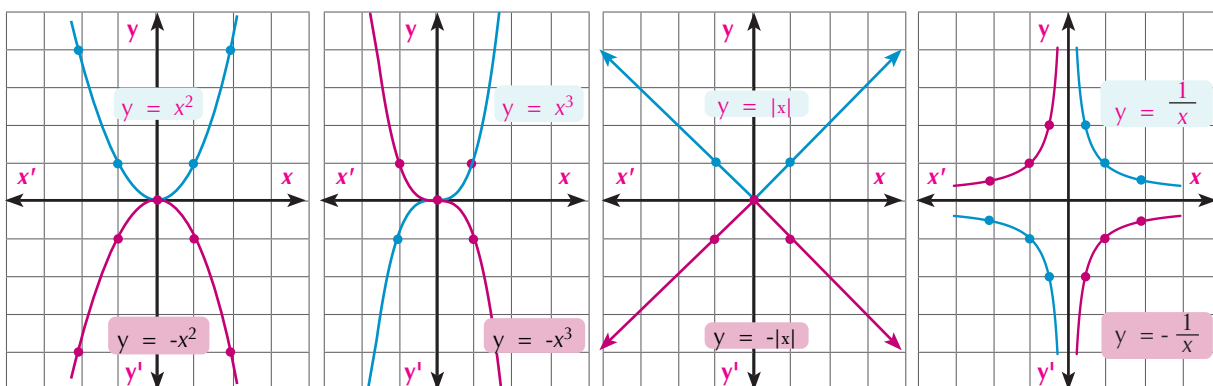


C'est-à-dire que la courbe de la fonction f est le même que la courbe de la fonction g où $g(x) = x^2$ par une translation d'implitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{ox'}$, suivi par une translation d'implitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{oy'}$ qui est représenté dans la figure ci-contre.

Application : En utilisant la calculatrice graphique, tracez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 6x + 7$ en déduisant l'ensemble définition et le sens de variation de la fonction.

(III): Symétrie de la courbe représentative d'une fonction par rapport à l'axe des abscisses

Les figures suivantes montrent la symétrie de quelques fonctions usuelles par rapport à l'axe des abscisses.



Que remarquez-vous ? Et qu'en déduisez-vous ?



A apprendre

Tracé de la fonction $y = -f(x)$ Pour une fonction f la courbe de $y = -f(x)$ est l'image de la courbe de $y = f(x)$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple

Application des transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions

7 Utilisez les courbes des fonctions usuelles pour tracer les courbes des fonctions g , h et i telles que:

a $g(x) = -(x - 3)^2$

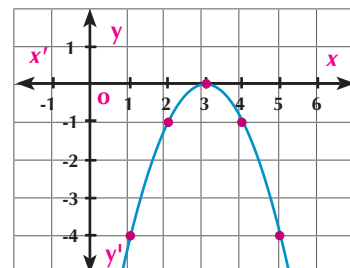
b $h(x) = 4 - |x + 3|$

c $i(x) = 2 - \frac{1}{x - 3}$



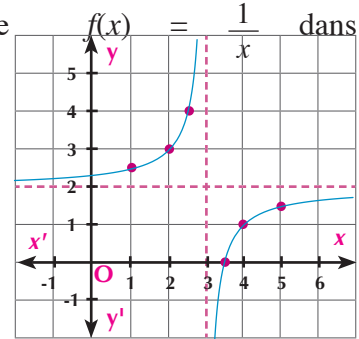
Solution

a La courbe de $g(x)$ est l'image de celle de $f(x) = x^2$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$. Les coordonnées du centre de la symétrie de la courbe sont $(3; 0)$. La courbe est ouverte vers le bas.



- b** La courbe de $h(x)$ est l'image de celle de $f(x) = |x|$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\vec{ox'}$, et d'une translation d'amplitude 4 unités dans la direction $\vec{oy}$. Les coordonnées d'origine de deux demi-droites sont $(-3 ; 4)$. La courbe est ouverte vers le bas.

- c** La courbe de $i(x)$ est l'image de celle de $f(x) = \frac{1}{x}$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\vec{ox}$, et d'une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\vec{oy}$. Les coordonnées du centre de la courbe sont $(3 ; 2)$.



Essayez de résoudre

- 6** Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe de la fonction g telle que :

a $g(x) = 3 - (x + 1)^2$

b $g(x) = -(x - 3)^3$

c $g(x) = 3 - |x - 5|$

Puis justifiez votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique.



Exercices 1 - 4



- 1** Tracez la courbe représentative de la fonction f du graphique

a $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

c $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données :

- 2** La courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 + 4$ est le même que celle de la fonction $f(x) = x^2$ par une translation d'amplitude 4 unités dans la direction :

a $\vec{ox}$

b $\vec{ox'}$

c $\vec{oy}$

d $\vec{oy'}$

- 3** La courbe représentative de la fonction $g(x) = |x + 3|$ est le même que celle de la fonction $f(x) = |x|$ par une translation d'amplitude 3 unités dans la direction :

a $\vec{ox}$

b $\vec{ox'}$

c $\vec{oy}$

d $\vec{oy'}$

- 4** Les coordonnées du sommet de la courbe de la fonction $f(x) = (2 - x)^2 + 3$ sont :

a $(2 ; 3)$

b $(2 ; -3)$

c $(-2 ; 3)$

d $(-2 ; -3)$

5) Les coordonnées du centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = 2 - (x+1)^3$ sont :

- a) (1; 2) b) (-1; 2) c) (2; 1) d) (2; -1)

6) Les coordonnées du centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$ sont :

- a) (3; -4) b) (-3; -4) c) (3; 4) d) (-3; 4)

7) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

- a) $f_1(x) = x^2 - 4$ b) $f_2(x) = (x-3)^2$ c) $f_3(x) = (x-1)^2 - 2$

8) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

- a) $f_1(x) = |x| + 1$ b) $f_2(x) = |x + 2|$ c) $f_3(x) = |x - 3| - 2$

Ø **Puis déterminez les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes des coordonnées dans chaque cas.**

9) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^3$.

pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

- a) $f_1(x) = f(x) - 3$ b) $f_2(x) = f(x - 2)$ c) $f_3(x) = f(x + 3) + 2$

Ø **Puis déterminez les coordonnées de centre de symétrie dans chaque cas.**

10) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$

pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

- a) $g(x) = f(x - 3)$ b) $g(x) = f(x) + 2$ c) $g(x) = f(x - 2) + 2$

11) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$

pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

- a) $f_1(x) = 4 - x^2$ b) $f_2(x) = -(x-3)^2$ c) $f_3(x) = 2 - (x+3)^2$

Résolution des équations et inéquations de la valeur absolue

Unité 1

1 - 5

Real Functions

(I) Résolution des équations



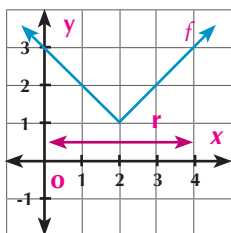
Réfléchissez et discutez

Dans un même repère tracez les courbes représentatives de deux fonctions f et g où f est la fonction de valeur absolue et g est fonction affine. Observez le graphique puis répondre :

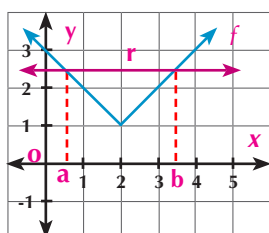
- Quel est le nombre des points probable d'intersection de deux courbes ?
- Les points d'intersection de deux courbes, vérifient-ils les règles de deux fonctions ?

Remarquez que :

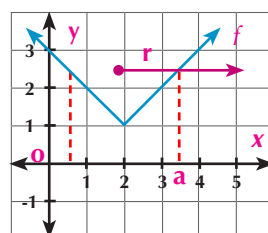
- Aux points d'intersections, s'ils existent, on a : $f(x) = g(x)$, et réciproquement pour tout x appartenant à l'ensemble de définition commune de deux fonction.
- Pour deux fonctions f et g l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses de points d'intersection comme il est indiqué dans les figures suivantes :



Ensemble solution = ϕ



Ensemble solution = $\{a; b\}$



Ensemble solution = $\{a\}$

Résolution de l'équation : $|ax + b| = c$



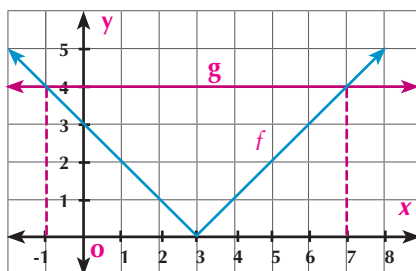
Exemple

- Résoudre l'équation : $|x - 3| = 4$ graphiquement et algébriquement.

Solution

Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = 4$

- On trace la courbe de la fonction $f(x) = |x - 3|$ en déplaçant la courbe de la fonction $f(x) = |x|$ trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$



Allez apprendre

- Résolution des équations de la valeur absolue graphiquement.
- Résolution des équations de la valeur absolue algébriquement.
- Résolution des inéquations de la valeur absolue graphiquement.
- Résolution des inéquations de la valeur absolue algébriquement.
- Modélisation des problèmes et des applications quotidiennes et sa résolution en utilisant les équations et inéquation de la valeur absolue



Vocabulaires de base

- Equation
- Inéquation
- Résolution graphique

Aides pédagogiques

- Feuilles quadrillées
- Logiciels de graphisme

- 2) Dans le même quadrillage, on trace la courbe de la fonction $g(x) = 4$ qui est une fonction constante. Sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisse et passant par le point de coordonnées $(0; 4)$
 $\therefore$ Les coordonnées des points d'intersection des deux courbes sont $(-1; 4)$, $(7; 4)$
 $\therefore$ L'ensemble solution de l'équation est : $\{-1; 7\}$

Solution algébrique :

D'après la définition de la fonction valeur absolue : $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

Pour $x < 3$: $x - 3 = 4$

c'est-à-dire : $x = 7 \in]3; \infty[$

Pour $x \geq 3$: $-x + 3 = -4$

c'est-à-dire : $x = -1 \in]-\infty; 3]$

L'ensemble solution de l'équation est : $\{-1; 7\}$ ce qui confirme la solution graphique.

Essayez de résoudre

- 1) Résoudre chacune des équations suivantes graphiquement et algébriquement.

a) $|x| - 4 = 0$

b) $|x| + 1 = 0$

c) $|x - 7| = 5$

Quelques propriétés de la valeur absolue d'un nombre



A apprendre

- 1) $|ab| = |a| \times |b|$ Par exemple :

$$|2 \times -3| = |-6| = 6 \quad \text{et} \quad |2| \times |-3| = 2 \times 3 = 6$$

- 2) $|a + b| \leq |a| + |b|$

L'égalité est obtenue si les deux nombres **a**, **b** sont de même signe. Par exemple :

$$|4 + 5| = |4| + |5| = 9 \quad \text{et} \quad |-4 - 5| = |-4| + |-5| = 9$$

- 3) $|a - x| = |x - a|$

Remarquez que :

- 1) Si $|x| = a$ alors $x = a$ ou $x = -a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$

- 2) Si $|a| = |b|$ alors $a = b$ ou $a = -b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$

- 3) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

(II) Résolution des inéquations

Vous avez déjà étudié les équations. Une in équation est une proposition mathématique qui contient l'un des symboles : $(< ; > ; \leq ; \geq)$ Résoudre une in équation consiste à trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie.

Résolution des inéquations graphiquement

La figure ci-contre montre les courbes représentatives

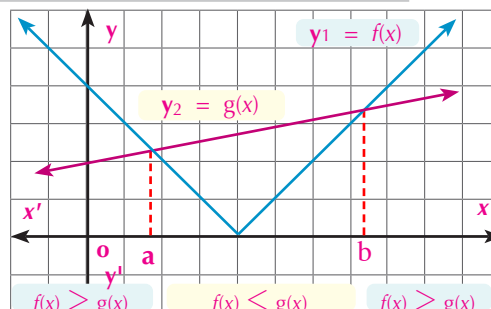
de deux fonctions f et g où : $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est $\{a ; b\}$

C'est-à-dire que : $y_1 = y_2$ si $x = a$ ou $x = b$

On remarque que : $y_1 < y_2$ C.à.d. $f(x) < g(x)$ si $x \in]a ; b[$

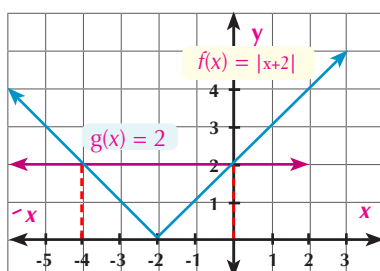
$y_1 > y_2$ C.à.d. $f(x) > g(x)$ si $x \in]-\infty ; a[\cup]b ; +\infty[$



Exemple

2

a

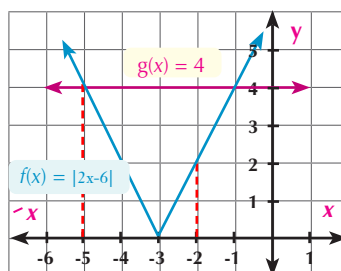


Ensemble solution de l'inéquation

$$|x + 2| < 2$$

est : $] -4 ; 0[$

b



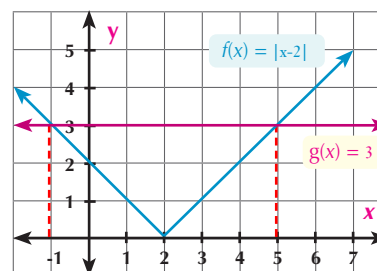
Ensemble solution de l'inéquation

$$|2x + 6| \geq 4$$

est : $] -\infty ; -5] \cup [-1 ; +\infty[$

ou : $\mathbb{R} -] -1 ; 5[$

c



Ensemble solution de l'inéquation

$$|x - 2| \leq 3$$

est : $[-1 ; 5]$



Essayez de résoudre

2 Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes en vous aidant par les figures de l'exemple (7):

a $|x + 2| \leq 2$

b $|2x + 6| \leq 4$

c $|x - 2| > 3$

Résolution des inéquations algébriquement



A apprendre

(I): Si $|x| \leq a$ et $a > 0$ **alors :** $-a \leq x \leq a$

(II): Si $|x| \geq a$ et $a > 0$ **alors :** $x \geq a$ **ou** $x \leq -a$



Exemple

3 Trouver, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

$$|x - 3| < 4$$

 Solution

a $\because |x - 3| < 4$ **c.à.d.** $-4 < x - 3 < 4$

En ajoutant 3 aux membres de la double inégalité

$\therefore -4 + 3 < x - 3 + 3 < 4 + 3$ **c.à.d.** $-1 < x < 7$

$\therefore$ L'ensemble solution = $] -1 ; 7[$

 Essayez de résoudre

- 3 Trouver, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

a $|x - 7| < 11$

b $|3x + 7| \leq 8$

Applications quotidiennes

 Exemple **Météorologique Un jour**

- 4 La station Météorologique a enregistré la température sur le Caire, elle a trouvé 32° ce qui est différent par 7° de la normale dans ce jour. Quel est le degré de température probable sur le Caire dans ce jour ?

 Solution

Supposons que le degré de température probable sur le Caire dans ce jour = x°

$\therefore |x - 32| = 7$ c'est-à-dire que $x - 32 = \pm 7$

Alors $x = 32 + 7 = 39$ ou $x = 32 - 7 = 25$

C'est-à-dire que le degré de température probable sur le Caire dans ce jour est 39° ou 25°

Rappel



pour tout a, b, c

si: $a < b, b < c$ alors
 $a < c$

si: $a < b$ alors

$a + c < b + c$

$a < b$ en $c > 0$

$a < b$ en $c < 0$



Exercices (1 - 5)



Complétez ce que suit :

- ① L'ensemble solution de l'équation $|x| = \frac{1}{2}$ est
- ② L'ensemble solution de l'équation $|x| + 3 = 0$ est
- ③ L'ensemble solution de l'équation $|x - 2| \geq 0$ est

Choisissez de la liste suivante l'ensemble solution convenable de chaque équation ou inéquation de ce qui suit :

- ④ $|x - 2| = 3$
- ⑤ $|x - 2| < 3$
- ⑥ $|x - 2| > -3$
- ⑦ $|x - 2| \leq 3$
- ⑧ $|x - 2| > 3$
- ⑨ $|x - 2| = -3$

- a $] -1 ; 5[$
- b $\mathbb{R}$
- c $\{ -1 ; 5 \}$
- d $\mathbb{R} - [-1 ; 5]$
- e $\emptyset$
- f $[-1 ; 5]$

Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

- ⑩ $|x + 3| = 6$ ⑪ $|2x - 7| = 5$ ⑫ $|3 - 2x| = 7$

Trouver graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

- ⑬ $|x + 4| = 3$ ⑭ $|2x - 5| = 3$

Trouver graphiquement l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

- ⑮ $|x - 1| < 3$ ⑯ $|x - 2| \leq 5$ ⑰ $|x + 3| > 2$

Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

- ⑱ $|2x - 1| > 3$ ⑲ $|2x + 3| \leq 7$ ⑳ $|3x - 7| \geq 2$

Unité 2

Puissance, Logarithmes et Applications



Introduction de l'unité

La notion des logarithmes a été introduite en mathématique à la fin par John Napier au début de 17^{ième} siècle. Il l'a introduite comme un moyen pour simplifier certains calculs pour aider les marins, les savants et les ingénieurs à partir des outils performants (à l'époque) comme la règle du calcul et les tableaux des logarithmes. Léonhard Euler en 18^{ième} siècle a découvert des propriétés très utiles pour les praticiens. Parmi ces propriétés : déterminer le logarithme de produit de deux nombres

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, cela à partir d'une relation entre les exposants et les logarithmes. La notion des logarithmes est également utile dans d'autres domaines par exemple le décibel qui est une unité logarithmique pour mesurer de l'intensité du son ainsi que le volt et la puissance hydrogène pour déterminer le niveau d'acide dans une solution en chimie



Compétences attendues de l'unité

Compétences attendues de l'unité:

- ✚ Reconnaître la fonction exponentielle
- ✚ Reconnaître la représentation graphique de la fonction
- ✚ exponentielle et déduire ses propriétés
- ✚ Reconnaître les formules de puissance fractionnaires
- ✚ Résoudre des équations exponentielles sous la forme : $ax = b$
- ✚ Reconnaître la fonction logarithme.
- ✚ Transformer algébriquement de la forme exponentielle à la forme logarithmique et réciproquement.
- ✚ Reconnaître la représentation graphique de d'une fonction sur des intervalles limités et déduire ses propriétés.
- ✚ Déduire la relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme graphiquement.
- ✚ Reconnaître les formules de logarithme.
- ✚ Résoudre des problèmes en appliquant les formules des logarithmes
- ✚ Reconnaître les logarithmes usuels à base 10.
- ✚ Trouver la valeur d'un logarithme en utilisant la calculatrice.
- ✚ Utiliser la calculatrice pour résoudre des équations exponentielles en utilisant le logarithme.



Vocabulaires de base

- Puissance nième
- Base
- Puissance
- Racines nième
- Exposant fractionnaires
- Fonction exponentielle
- Croissance exponentielle
- Décroissance exponentielle
- Ensemble de définition
- Ensemble image
- Symétrie
- Logarithme Equations logarithmiques
- Fonctions logarithmiques



Leçons de l'unité

- Leçon (2 - 1): Puissances fractionnaires
- Leçon (2 - 2): Fonction exponentielle et applications.
- Leçon (2 - 3): Résolution des équations exponentielles
- Leçon (2 - 4): Fonction logarithme et sa représentation graphique.
- Leçon (2 - 5): Quelques propriétés des logarithmes

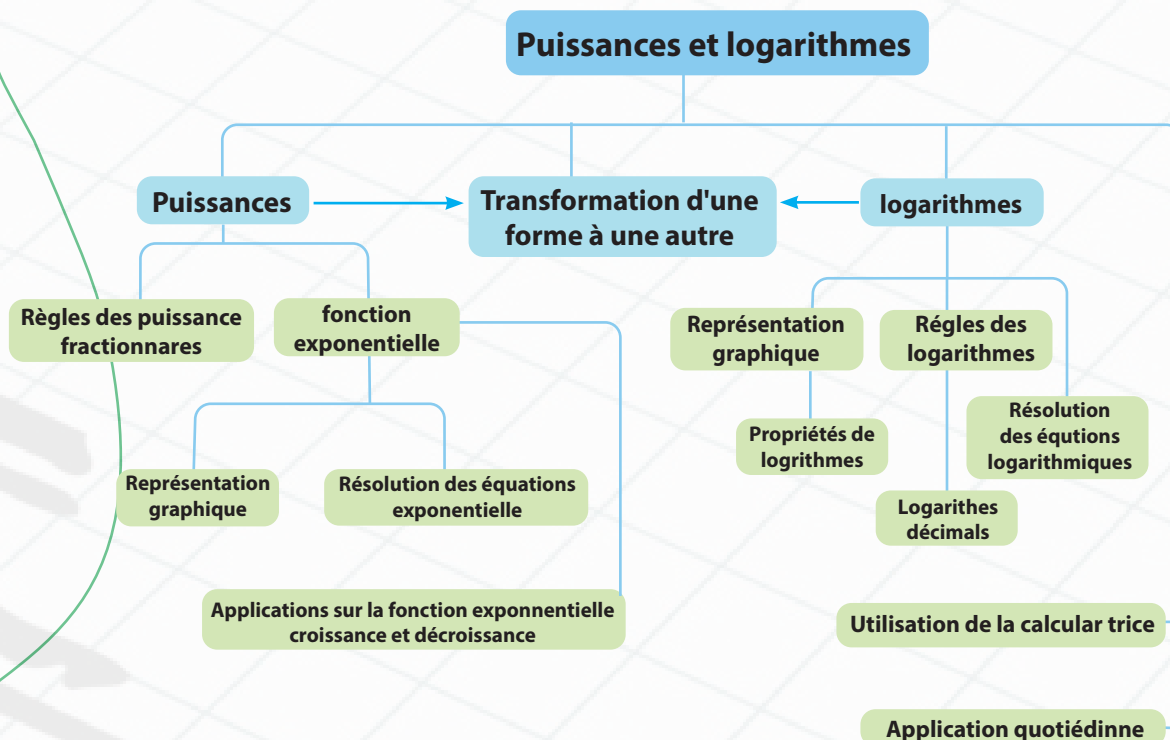


Aides pédagogiques

- Une calculatrice scientifique
- Logiciels Graphique



Organigramme de l'unité



Allez apprendre

- ▶ Généralisation des formules de puissances.
- ▶ Racine nième.
- ▶ Formules de puissances fractionnaires

Vocabulaires de base

- ▶ Puissances $n^{\text{ième}}$
- ▶ Base
- ▶ Puissance
- ▶ Racine nième
- ▶ Exposant fractionnaires

Aidespédagogiques

- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de graphisme

Remarque

indice de la racine $\sqrt[n]{a}$ Symbole de la racine $\sqrt[n]{a}$ radicaire

**Préliminaire**

Vous avez déjà étudié les racines carrées d'un nombre réel non négatif et quelques propriétés des racines carrées et des racines cubiques ainsi que les puissances entières. Dans cette leçon, nous allons étudier les puissances fractionnaires.

**A apprendre****Racine $n^{\text{ième}}$**

Vous avez déjà étudié que la racine carré est l'opération inverse du carré du nombre, de même la racine nième d'un nombre est l'opération inverse de l'opération d'élevé ce nombre à la puissance n .

Exemple :

1 Si $x^3 = 8$ alors 2 est la racine cubique de 8 c'est-à-dire $\sqrt[3]{8} = 2$

2 Si $x^5 = 32$ alors 2 est la racine cinquième de 32 c'est-à-dire $\sqrt[5]{32} = 2$

3 Si $x^n = a$ alors x est la racine nième de a c'est-à-dire $\sqrt[n]{a} = x$

définition

Pour un nombre réelle $a \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ on $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
Cette relation est aussi valable si $a < 0$, n et n est un nombre impair supérieur à 1

Exemple :

1

$$(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$-(27)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{27} = -3$$

$$(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

$$(-243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-243} = -3$$

**Exemple**

1 Si $x^n = a$, trouvez les valeurs de x dans $\mathbb{R}$, s'il existe dans chacun des cas suivants :

a $n = 5$, $a = 0$

b $n = 4$, $a = 81$

c $n = 2$, $a = -4$

d $n = 3$, $a = -8$

 Solution

- a** Lorsque $n = 5$ et $a = 0$ alors $x^5 = 0$ **d'où** $x = \sqrt[5]{0} = 0$
- b** Lorsque $n = 4$ et $a = 81$ alors $x^4 = 81$ **d'où** $x = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$
- c** Lorsque $n = 2$ et $a = -4$ alors $x^2 = -4$ **d'où** $x = \pm \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
- d** Lorsque $n = 3$ et $a = -8$ alors $x^3 = -8$ **d'où** $x = \sqrt[3]{-8} = -2$

De l'exemple précédent, on déduit que :

n	a	$\sqrt[n]{a}$
$n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$	$a = 0$	$\sqrt[n]{a} = 0$
est nombre pair et positif	$a > 0$	il y a deux racines réelles $\pm \sqrt[n]{a}$
est nombre pair et positif	$a < 0$	il n'y a pas de racines réelles.
est nombre impair et positif, $n \neq 1$	$a \in \mathbb{R}$	il y a une seule racine réelle $\sqrt[n]{a}$

 Essayez de résoudre

① Trouvez les valeurs de x s'il existe dans chacun des cas suivants :

- a** $x^2 = 36$ **b** $x^5 = -32$ **c** $x^3 = 125$
- d** $x^4 = 1296$ **e** $x^2 = -49$ **f** $x^7 = -128$

② **Réflexion critique** : Donnez un exemple numérique qui montre la différence entre la racine 6ième du nombre **a** et $\sqrt[6]{a}$

définition

Si $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ alors : $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Exemple :

3

$$\begin{aligned} (16)^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{16})^3 &= (4)^3 &= 64 \\ \sqrt[3]{(-125)^2} &= (\sqrt[3]{(-125)})^2 &= (-5)^2 &= 25 \end{aligned}$$

 Exemple

② Trouvez sous la forme la plus simple :

- a** $-\sqrt[3]{8a^6b^9}$ **b** $\pm \sqrt{64(a^2+3)^6}$

 Solution

- a** $-\sqrt[3]{8a^6b^9} = -\sqrt[3]{(2a^2b^3)^3} = -2a^2b^3$
- b** $\pm \sqrt{64(a^2+3)^6} = \pm \sqrt{[8(a^2+3)^3]^2}$

$$= \pm 8 (a^2 + 3)^3$$

Essayez de résoudre

3 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\sqrt[4]{625 a^{12}}$

b $\sqrt[5]{-243 b^5}$

c $\sqrt[7]{128 (a + b)^7}$

Utilisé la valeur absolue

On utilise la valeur absolue si l'indice de la racine si n est un nombre pair, on écrit $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Si l'indice de la racine si n est un nombre impair, il n'est pas nécessaire d'utiliser la valeur absolue.

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{si } n \text{ est pair.} \\ x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exemple

3 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\sqrt{9x^2}$

b $\sqrt[3]{-8x^3}$

c $\sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^4}$

d $\sqrt[6]{(1 - \sqrt{7})^6}$

Solution

a $\sqrt{9x^2} = \sqrt{(3x)^2} = |3x|$

b $\sqrt[3]{-8x^3} = \sqrt[3]{(-2x)^3} = -2x$

c $\sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^4} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ où $2 > \sqrt{3}$

d $\sqrt[6]{(1 - \sqrt{7})^6} = |1 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 1$ où $\sqrt{7} > 1$

Essayez de résoudre

4 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\sqrt[4]{16a^{12}}$

b $\sqrt[6]{(x - 2)^{18}}$

c $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^3}$

d $\sqrt[4]{(2 - \sqrt{5})^4}$

définition

Si $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ alors: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

4

Exemple : $7^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{7^{\frac{3}{5}}}$, $\frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}}$



Remarque

le carré des nombres
(a) et (-a) est a^2

définition

Si $n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ deux nombres réelles alors:

$$\text{O} \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$\text{O} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{où } b \neq 0$$

5

Exemple

4 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\frac{\sqrt{8} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{6^{-2} \times 3^2}$

b $\frac{32^{-\frac{3}{5}} \times 8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[8]{16^5}}$

Solution

a L'expression = $\frac{8^{\frac{1}{2}} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{6^{-2} \times 3^2}$
 $= \frac{(2^3)^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{(3 \times 2)^{-2} \times 3^2}$
 $= \frac{(2)^{\frac{3}{2}} \times 2^{-2} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{3^{-2} \times 2^{-2} \times 3^2}$
 $= 2^{\frac{3}{2} - 2 - \frac{3}{2} + 2} \times 3^{2 - 2} = 1$

Transformation des fractions en puissances fractionnaires.

Décompositions des bases en facteurs premiers.

En simplifiant

b L'expression = $\frac{32^{\frac{3}{5}} \times 8^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{4}} \times 16^{\frac{5}{8}}}$
 $= \frac{(2^5)^{\frac{3}{5}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}}}{(2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2^4)^{\frac{5}{8}}}$
 $= \frac{2^3 \times 2^2}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}} = 2^{3+2-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 2^2 = 4$

Transformation des fractions en puissances fractionnaires.

Décompositions des bases en facteurs premiers.

Essayez de résoudre

5 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\frac{\sqrt[3]{243} \times \sqrt{8^{-1}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{9}}$

b $\frac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt[10]{4}}$

Résolution des équation :

Exemple

5 Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

a $x^{\frac{2}{3}} = 9$

b $(x+1)^{\frac{3}{4}} = 8$

Solution

a $\because x^{\frac{2}{3}} = 9$ **élevant les deux membres à la puissance 3**

$$\therefore (x^{\frac{2}{3}})^3 = 9^3$$

$\therefore x^2 = 9^3$ **prenant la racine carré de deux membres**

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9^3}$$

$$\therefore |x| = 3^3$$

$$\therefore x = \pm 27 \quad \therefore E.S = \{27; -27\}$$

b $(x+1)^{\frac{3}{4}} = 8$ **élevant les deux membres à la puissance 4**

$$\therefore (x+1)^3 = 8^4$$

$$\therefore (x+1) = (\sqrt[3]{8})^4$$

$$\therefore x+1 = 2^4 \quad \therefore x = 15 \quad \therefore E.S = \{15\}$$

Essayez de résoudre

6 Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

a $x^{\frac{5}{2}} = 32$

b $\sqrt[3]{(x-1)^5} = \frac{1}{32}$



Exercice 2 - 1



1 Ecrivez ce qui suit sous la forme exponentielle :

a $\sqrt[3]{x}$

b $\sqrt[4]{a^3}$

c $2 \sqrt[3]{n}$

d $\sqrt[4]{a^2 b^3}$

e $\sqrt[3]{\sqrt{y}}$

f $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

2 Ecrivez ce qui suit sous la forme radicale :

a $a^{\frac{1}{2}}$

b $b^{\frac{2}{3}}$

c $6 y^{\frac{3}{4}}$

d $8 b^{\frac{4}{9}}$

e $(3x)^{-\frac{2}{3}}$

f $5^{\frac{1}{2}}$

3 Ecrivez ce qui suit sous la forme la plus simple :

a $(16)^{\frac{3}{4}}$

b $(-32)^{\frac{3}{5}}$

c $27^{-\frac{4}{3}}$

d $(\frac{1}{8})^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$

e $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{2}}$

f $\frac{1}{(2^{-2} \times 4^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}})^{-2}}$

4 Trouvez les résultats des opérations suivantes sous la forme la plus simple :

a $(a^{-\frac{2}{3}})^{-3}$

b $\sqrt[3]{x} \times x^{\frac{1}{2}}$

c $(3^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}}$

d $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$

e $(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$

f $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2$

g $(1^3 + 2^3 + 3^3)^{\frac{1}{2}}$

5 Trouvez ce qui suit sous la forme la plus simple :

a $\sqrt[3]{243} + \sqrt{512}$

b $(\frac{16}{81})^{\frac{1}{2}} \times (\frac{729}{8})^{\frac{1}{3}}$

c $(16)^{\frac{2}{3}} : (8)^{\frac{2}{3}}$

d $(27)^{\frac{2}{3}} - (64)^{\frac{5}{6}}$

e $\sqrt{0,1} \times \sqrt[3]{0,216} \times \sqrt{2,5}$

f $\frac{8^{\frac{3}{8}} \times 4^{\frac{-3}{16}}}{2^{-\frac{5}{4}}}$

g $(125)^{\frac{2}{3}} \times 81^{\frac{1}{4}} \times (15)^{-1}$

h $\frac{16^{x-\frac{1}{4}} \times 9^{x+\frac{1}{2}}}{8^{x-1} \times 18^{x+2}}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

6 Si $\sqrt[3]{x^2} = 9$ alors $x \in$

a $\{27\}$

b $\{27; -27\}$

c $\{1\}$

d $\emptyset$

7 $64^{-\frac{1}{6}} =$

a 2

b -2

c $\frac{1}{2}$

d $-\frac{1}{2}$

8 $\sqrt[3]{x^{-3}} =$

a x^{-1}

b $-x$

c $|x^{-1}|$

d $-|x|$

9 $\sqrt[4]{x^4 y^8} =$

a $x y^2$

b $\pm x y^2$

c $|x| y$

d $x |y^2|$

10 Si $x^{\frac{3}{2}} = 8$ alors $x =$

a 4

b -4

c $\frac{1}{4}$

d $-\frac{1}{4}$

11 $\frac{6^{-\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{3}{5}}}{\sqrt[5]{36}} =$

a 1

b 6

c $\frac{1}{6}$

d $\sqrt{6}$

12 Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbf{R}$ de chacune des équations suivantes :

a $x^{\frac{1}{2}} = 5$

b $x^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{128}$

c $\sqrt{x^3} = 27$

d $(x-5)^{\frac{5}{2}} = 32$

e $3x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{8}$

f $2^{3x-1} = \frac{16}{\sqrt{2}}$

Fonction exponentielle et application

Allez apprendre

- ▶ Fonction exponentielle.
- ▶ Représentation graphique d'une fonction exponentielle.
- ▶ Propriétés d'une fonction exponentielle

Vocabulaires de base

- ▶ Fonction exponentielle
- ▶ Croissance exponentielle
- ▶ Décroissance exponentielle

Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de graphisme

Enchérissez vos connaissances

La fonction $f(x) = a^x$, lors que $a > 1$ est appelée la fonction de croissance exponentielle. Elle a des applications multiples comme la croissance démographique et l'entérèf composé deux traitement bancaire.

La fonction $f(x) = a^x$ lorsque $0 < a < 1$ est appelée la fonction de décroissance exponentielle. Elle a des applications multiples comme l'intervalle de demi-âge de radiation des atômes.



Découvrir

Dans beaucoup de situations de notre vie quotidienne, on a un fort besoin de exécuter des calculs précieux comme les intérêts bancaires, l'explosion démographique, l'accroissement des cellules dans certains êtres et les intervalles de mi-âge pour les atomes de radiation



A apprendre

Fonction exponentielle

définition
1

Si a est un nombre réel positif $\neq 1$ alors

Fonction: f où $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$

est appelée **fonction exponentielle**

Expression orale : Expliquez pourquoi la fonction définie par $f(x) = (-3)^x$ n'est pas une fonction exponentielle

Représentation graphique d'une fonction exponentielle



Exemple

- 1 Représentez graphiquement, dans le même quadrillage les deux fonctions: $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ sur un intervalle arbitraire $[-3 ; 3]$

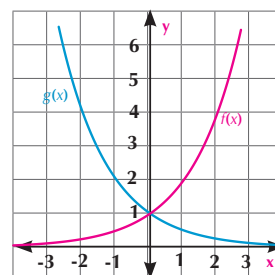


Solution

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Du graphique on peut déduire les propriétés suivantes

- 1 La fonction est $f(x) = 2^x$ est croissante sur son ensemble définition car ($a > 1$)
La fonction est $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ est décroissante sur son ensemble définition car ($0 < a < 1$)
- 2 L'ensemble de définition de chacune de deux fonctions est $\mathbb{R}^+$
- 3 La courbe de $f: f(x) = 2^x$ est la symétrique de la courbe de $g: g(x) = (\frac{1}{2})^x$ par rapport à l'axe des ordonnées.



Remarque

La fonction algébrique :

La variable indépendante est la base x tandis que la puissance est un nombre réel.

La fonction exponentielle :

La variable indépendante x est la puissance tandis que la base est un nombre réel positif différent de 1.

 Essayez de résoudre

- ① Représentez graphiquement, dans le même quadrillage les fonctions : $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ et $f_3(x) = 4^x$ sur un intervalle arbitraire $[-2 ; 2]$

 Exemple

- ② Si $f(x) = 3^x$ complétez ce qui suit :

a $f(2) = \dots\dots\dots$ b $f(x+2) = \dots\dots\dots \times 3^x$ c $f(x) \times f(-x) = \dots\dots\dots$

 Solution

a $f(2) = 3^2 = 9$ b $f(x+2) = 3^{x+2} = 3^x \times 3^2 = 9 \times 3^x$
 c $f(x) \times f(-x) = 3^x \times 3^{-x} = 3^{x-x} = 3^{\text{zero}} = 1$

**Exercices 2 - 2**

- ① Tracez la courbe représentative de chacune des fonctions ci-après puis trouvez l'ensemble de définition et l'ensemble image ensuite indiquez laquelle est une fonction croissante et laquelle ce qui est décroissante :

a $f(x) = 2^x$ b $f(x) = 3^x$ c $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d $f(x) = 2^{-x+1}$

- ② Complétez ce qui suit :

- a La courbe de la fonction f telle que $f(x) = 2^x$ coupe l'axe des ordonnées au point des coordonnées $\dots\dots\dots$
 b La courbe de la fonction f telle que $f(x) = 2^{1-x}$ coupe l'axe des ordonnées au point des coordonnées $\dots\dots\dots$
 c Si la courbe de la fonction f telle que $f(x) = a^x$ passe par le point des coordonnées $(1 ; 3)$, alors $a = \dots\dots\dots$
 d La courbe de la fonction f telle que $f(x) = 3^x$ est l'image de la courbe de la fonction g telle que $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ dans la symétrie par rapport à $\dots\dots\dots$
 e La fonction f telle que $f(x) = a^x$ est décroissante si $a \in \dots\dots\dots$
 f La fonction f telle que $f(x) = (2a)^x$ est croissante si $a \in \dots\dots\dots$

**Allez apprendre**

- ▶ Fonction exponentielle.
- ▶ Représentation graphique.
- ▶ Propriétés des fonctions exponentielles.

**Vocabulaires de base**

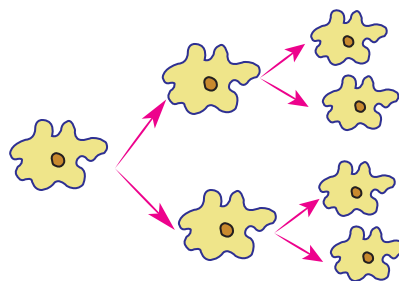
- ▶ Équation exponentielle
- ▶ Résolution graphique

**Aides pédagogiques**

- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de Graphisme

**Réfléchissez et discutez**

L'amœbe se développe par la méthode de division binaire, c'est-à-dire une cellule se divise en deux cellules dans une période du temps déterminée puis chacune des nouvelles cellules se divise de nouveau en deux cellules et ainsi de suite dans des périodes équivalentes et dans les mêmes conditions



- 1 Trouvez le nombre de cellules produites d'une seule cellule après 9 périodes du temps.
- 2 Trouvez le nombre de périodes, nécessaires pour produire 8192 cellules de cette cellule.

**A apprendre****Equation exponentielle**

Si une équation contient la variable en position d'exposant, alors c'est une équation exponentielle comme par exemple, l'équation $(3^{x+1} = 8)$

Résolution des équations exponentielles:

[I] Si $a^m = a^n$ où $a \notin \{0; 1; -1\}$ alors $m = n$.

**Exemple**

- 1 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a $2^{x+3} = 8$

b $3^{x-2} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

**Solution**

a $\because 2^{x+3} = 8$

$\therefore 2^{x+3} = 2^3$

$\therefore x + 3 = 3$

d'où $x = 0$

$\therefore$ Ensemble de solutions = $\{0\}$

b $\because 3^{x-2} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

$\therefore 3^{x-2} = 3^{-3x}$

$\therefore x - 2 = -3x$

$\therefore x + 3x = 2$

$\therefore 4x = 2$

d'où $x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Ensemble de solutions = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Essayez de résoudre

1 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $5^{x+1} = 25$

b $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

[III] Si $a^m = b^m$ où $a \notin \{0; 1; -1\}$, et $b \notin \{0; 1; -1\}$ alors
 soit $m = 0$
 ou $a = b$ si m est impair.
 ou $a = \pm b$ si m est pair .

Exemple

2 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $3^{x+2} = 7^{x+2}$

b $4^{x-2} = 3^{2x-4}$

Solution

a $\because 3^{x+2} = 7^{x+2}$

$\therefore x + 2 = 0$ d'où $x = -2$

$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{-2\}$

b $\because 4^{x-2} = 3^{2x-4} \quad \therefore 4^{x-2} = 3^{2(x-2)}$

$\therefore 4^{x-2} = 9^{x-2}$

$\therefore x - 2 = 0$ d'où $x = 2$

$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{2\}$

Essayez de résoudre

2 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $5^{x-1} = 4^{x-1}$

b $2^{2x-6} = 7^{x-3}$

Exemple

3 Soit $f(x) = 25^{x+1}$. Trouvez la valeur de x qui vérifie $f(x) = 32$

Solution

$\because f(x) = 32 \quad \therefore 25^{x+1} = 32$

$\therefore 25^{x+1} = 2^5 \quad \therefore x + 1 = 5$

$\therefore x = 4 \quad \therefore$ Ensemble des solutions $= \{4\}$

Essayez de résoudre

3 Si $f(x) = 7^x$, trouvez la valeur de x qui vérifie $f(x+1) = 49$



Exercices 2 - 3



1 Complétez ce qui suit :

a Si $5^{x-2} = 1$ alors $x = \dots\dots\dots$

b Si $3^{x-2} = 7^{x-2}$ alors $x = \dots\dots\dots$

c Si $2^{x+1} = 5^{x+1}$ alors $3^{x+1} = \dots\dots\dots$

d Si $2^{|x|} = 32$ alors $x = \dots\dots\dots$

Choisissez la bonne réponse

2 Si $3^{x-5} = 9$ alors $x = \dots\dots\dots$

a 2

b 7

c -3

d -7

3 Si $2^x = 20$ où $n < x < n + 1$ et n est un nombre entier, alors $n = \dots\dots\dots$

a 1

b 2

c 3

d 4

4 Si $3^x = 9$ alors $3^{x+1} = \dots\dots\dots$

a 5

b 15

c 27

d 45

5 Le nombre $5^{x+1} + 5^x$ est divisible par $\dots\dots\dots$ pour tout x entier naturel .

a 7

b 6

c 13

d 17

6 Si $(\frac{2}{3})^{x-2} = \frac{8}{27}$ alors $x = \dots\dots\dots$

a 2

b 3

c 4

d 5

7 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $3^{x+4} = 9$

b $2^{x-5} = \frac{1}{32}$

c $5^{x+2} = 1$

d $3^{|x|} = 3$

e $2 \times 3^{x-2} = 54$

f $7^{x-5} = 3^{x-5}$

g $2^{3x-6} = 5^{x-2}$

h $(\frac{3}{2})^{x-2} = \frac{8}{27}$

i $2^x \times 5^{-x} = \frac{4}{25}$

j $4^x = 64$

k $4^{1-x} = \frac{1}{4}$

l $(3)^{x-5} = \frac{1}{9}$

8 Soit $f(x) = 2^x$, Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $f(x) = 8$

b $f(x+1) = \frac{1}{32}$

9 Soit $f(x) = 3^{x+1}$, Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a $f(x) = 27$

b $f(x-1) = \frac{1}{9}$

10 Soit $f(x) = 7^{x-2}$, Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a $f(x) = 343$

b $f(2x) = \frac{1}{49}$

11 **Décelez l'erreur :** Mohamed et Karim ont résolu l'équation $2 \times 2^x = 16$

Solution de Mohamed

$$2 \times 2^x = 16$$

$$\therefore 4^x = 16$$

$$\therefore 4^x = 4^2$$

$$\therefore x = 2$$

Solution de Karim

$$2 \times 2^x = 16$$

$$\therefore 2^x = \frac{16}{2} = 8$$

$$\therefore 2^x = 2^3$$

$$\therefore x = 3$$

Laquelle de deux solutions est vraies ?

Allez apprendre

- ▶ Définition d'une fonction logarithme.
- ▶ Représentation graphique d'une fonction logarithme.
- ▶ Transformation de la forme exponentielle en forme logarithmique et inversement.
- ▶ Résolution de quelques équations logarithmiques simples.

Vocabulaires de base

- ▶ Logarithme
- ▶ Fonction réciproque
- ▶ Ensemble de définition
- ▶ Logarithme décimal

Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de graphisme

conseils

$\log_a x = y$ est appelé la forme logarithmique
la forme $a^y = x$ est appelée la forme exponentielle équivalente.

Remarquez que la base (a) est positive

Si $(-3)^4 = 81$
il n'y a pas de forme exponentielle équivalente.

**Réfléchissez et découvrez**

Observez les équations exponentielles suivantes et essayez de répondre:

Si $2^x = 2$, $2^y = 4$, $2^z = 3$ alors :

1- $x =$, $y =$

2- La valeur de z est comprise entre deux nombres entiers consécutifs sont ,

Remarquez que: On ne peut pas calculer la valeur de y directement comme celles de x et z , pour cela on a besoin d'une nouvelle notion pour calculer la valeur de y .

**A apprendre****Fonction logarithme**

Soient x et a deux nombres réelles positifs et $a \neq 1$. La fonction logarithme $y = \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction $y = a^x$

Exemple : Si $\log_2 32 = 5$ alors $2^5 = 32$ et réciproquement.

Expression orale:

Si le point de coordonnées, $(c ; d) \in$ à la courbe de la fonction exponentielle $y = a^x$, alors :

1- Le point de coordonnées $(\dots ; \dots) \in$ à la courbe de la fonction $y = \log_a x$.

2- La forme exponentielle $a^y = x$ où $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ est équivalente à la forme logarithmique.....

**Exemple****Transformation de la forme exponentielle en forme logarithmique**

1 Transformez ce qui suit en forme logarithmique :

a $3^4 = 81$

b $25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$

c $10^{-2} = 0,01$

Solution

a $\log_3 81 = 4$

b $\log_{25} \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$

c $\log_{10} 0,01 = -2$

Expression orale : Peut-on transformer $(-2)^4 = 16$ dans la forme logarithmique ? Pourquoi ?

Essayez de résoudre

1 Exprimez chacun de ce qui suit en forme logarithmique :

a $10^3 = 1000$

b $8^{\frac{1}{3}} = 2$

c $b^x = y$ où $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Logarithme décimal

Si la base du logarithme est 10, le logarithme est appelé dans ce cas logarithme décimal.

On le note sans base.

Par exemple : $\log_{10} 7$; s'écrit $\log 7$ et $\log_{10} 127$; s'écrit $\log 127$, On peut utiliser la touche log dans la calculatrice pour calculer le logarithme normal d'un nombre

**Exemple**

2 Transformez chacune des expressions suivantes en forme exponentielle :

a $\log_2 32 = 5$

b $\log 1000 = 3$

c $\log_2 1 = 0$

**Solution**

a $2^5 = 32$

b $10^3 = 1000$

c $2^0 = 1$

Essayez de résoudre

2 Transformez les expressions suivantes en forme exponentielle :

a $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$

b $\log 100 = 2$

c $\log_5 5 = 1$

**Exemple****Trouvé la valeur d'une expression logarithmique**

3 Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

a $\log_5 125$

b $\log 0,01$

**Solution**

a En posant $\log_5 125 = x$ En mettant sous la forme exponentielle

$$\therefore 5^x = 125$$

$$\therefore 5^x = 5^3$$

$$\text{d'où } x = 3$$

$$\therefore \log_5 125 = 3$$

b En posant $\log 0,01 = y$ (logarithme décimal de base 10) En mettant sous la forme exponentielle

$$\therefore 10^y = 0,01$$

$$\therefore 10^y = 10^{-2}$$

$$\text{Donc } y = -2$$

$$\therefore \log 0,01 = -2$$

 Essayez de résoudre

3 Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

a $\log_3 81$

b $\log_{\frac{1}{2}} 32$



Exemple

Résolution des équations

4 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_2 (x+5) = 3$

b $\log_5 625 = x - 1$

c $\log_x (x+6) = 2$



Solution

a L'équation est définie pour toutes les valeurs de x qui vérifient $x+5 > 0$;

d'où $x > -5$ (Ensemble de validité de l'équation)

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente

$\therefore x+5 = 2^3$

$\therefore x+5 = 8$

d'où $x = 3$

$\therefore 3 \in$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ L'ensemble solution est = **{3}**

b L'équation est définie pour toutes les valeurs réelles de x . En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente .

$\therefore 5^{x-1} = 625$

$\therefore 5^{x-1} = 5^4$

$\therefore x-1 = 4$

d'où $x = 5$

$\therefore$ L'ensemble solution est = **{5}**

c L'équation est définie pour toutes les valeurs de qui vérifient $f(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} x+6 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right.$

c'est-à-dire Ensemble de validité de l'équation est $]0, +\infty[- \{1\}$

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente :

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

soit $x = 3$ ou $x = -2$

$x = -2 \notin$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ L'ensemble solution est = **{3}**



Essayez de résoudre

4 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_5 (3x-1) = 1$

b $\log_3 27 = x + 2$

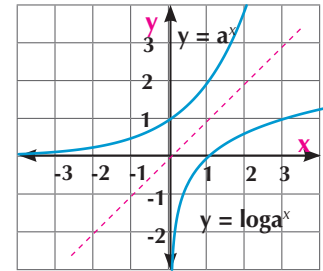
c $\log_{(x-1)} 9 = 2$

Représentation graphique de la fonction logarithme

Si $f(x) = a^x$ où $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ alors la fonction réciproque de la fonction f est appelée la fonction logarithmique c'est-à-dire que $y = \log_a x$

Relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithmique

La figure ci-contre représente les courbes de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ et celle de la fonction logarithme $y = \log_a x$.



Étudiez les propriétés de chacune de deux fonctions : ensemble de définition, ensemble image et la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exemple

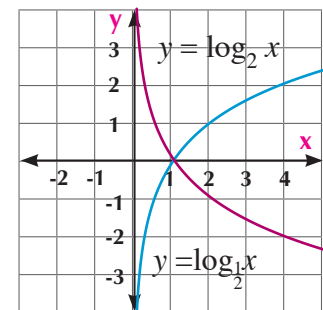
- 5 Représentez, graphiquement les fonctions $y = \log_2 x$ et $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ dans un même quadrillage



Solution

On choisit les valeurs de x les puissances de 2 (la base)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2



Du graphique, on déduit les propriétés de la fonction logarithme

Ensemble de définition : $\mathbb{R}^+$, Ensemble image : $\mathbb{R}$

La fonction $y = \log_a x$ est: croissante lorsque pour tout $a > 1$,

décroissante lorsque pour tout $0 < a < 1$



Exercices 2 - 4



1 Completez ce qui suit :

- a La forme exponentielle à $\log_3 27 = 3$ est.....
- b La forme logarithmique équivalente à $3^0 = 1$ est
- c $\log 0,001 =$
- d $\log_2 1 =$
- e Si $\log_x 4 = 2$ alors $x =$
- f Si $\log_2 128 = x + 1$ alors $x =$
- g L'ensemble de définition $f(x) = \log_2 x$ est.....
- h la fonction f où $f(x) = \log_a x$ est décroissant pour tout $a \in$
- i La courbe de la fonction f où $f(x) = \log_2 x$ passe le point $(8; \dots\dots\dots)$
- j Si $\log 3 = x$, $\log 5 = y$ alors $\log 15 =$ (en fonction de x et y)

2 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :-

- a $\log_3(x - 1) = 2$
- b $\log_5(x + 2) = 3$
- c $\log_x 9 = \frac{2}{3}$
- d $\log_{x+1} 8 = \frac{3}{4}$
- e $\log_x(x + 2) = 2$
- f $\log_x 9 = 2$

3 Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

- a $\log_5 1$
- b $\log_7 7$
- c $\log_3 9$
- d $\log_6 3 + \log_6 2$

4 Utilisez une calculatrice pour trouver la valeur de chacun de ce qui suit :-

- a $\log 15$
- b $\log_2 27$
- c $4\log 7 - 5\log 13$

Quelques propriétés des logarithmes

Vous avez appris dans la leçon précédente la notion du logarithme et la représentation graphique de la fonction logarithmique. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques propriétés des logarithmes qui peuvent aider à simplifier les expressions logarithmiques et la résolution des équations comportant des logarithmes.



A apprendre

Quelques propriétés des logarithmes

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$, alors

1- $\log_a a = 1$

Par exemple $\log_3 3 = 1$, $\log 10 = 1$

2- $\log_a 1 = 0$

Par exemple $\log_5 1 = 0$, $\log 1 = 0$

Essayez de démontrer les propriétés 1 et 2 en utilisant la définition du logarithme

3- Propriété du logarithme d'un produit :

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$$

Pour démontrer cette propriété :

On pose $b = \log_a x$, $c = \log_a y$

D'après la définition du logarithme :

$$\text{On } x = a^b, y = a^c$$

$$\text{d'où } xy = a^b \times a^c \quad \text{c'est-à-dire } xy = a^{b+c}$$

En transformant le résultat sous la forme logarithmique :

$$\log_a xy = b + c$$

En substituant les valeurs de b et c, on obtient $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$



Exemple

- ① Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_{34} 2 + \log_{34} 17$

Allez apprendre



- ▶ Utilisé quelques propriétés des logarithmes.
- ▶ Résolution de l'équation logarithme.
- ▶ Utilisé, la calculatrice pour résoudre des équations exponentielles.
- ▶ Applications quotidiennes sur les logarithmes.

Vocabulaires de base



- ▶ Equation logarithmique

Aides pédagogiques



- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de graphisme

 Solution

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \log_{34}(2 \times 17) && \text{propriété (3)} \\ &= \log_{34} 34 \\ &= 1 && \text{propriété (1)} \end{aligned}$$

4- Propriété du logarithme d'un quotient :

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (\text{Essayer de démontrer cette propriété})$$

 Exemple

- ② Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log 50 - \log 5$

 Solution

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \log \frac{50}{5} && \text{propriété (4)} \\ &= \log 10 = 1 && \text{propriété (1)} \end{aligned}$$

 Essayez de résoudre

- ① Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_2 7 - \log_2 3,5$

5- Propriété du logarithme de la puissance :

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{où } x > 0 \quad (\text{Essayez de démontrer cette propriété})$$

 Exemple

- ③ Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_5 125$

 Solution

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \log_5 35 \\ &= 3 \log_5 5 && \text{propriété (5)} \\ &= 3 \times 1 = 3 && \text{propriété (1)} \end{aligned}$$

Remarquez que : $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ où $x \in \mathbb{R}^+$

6 - Propriété du changement de base du logarithme

$$\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y} \quad \text{Démonstration de cette propriété}$$

Posons: $z = \log_y x$

$$y^z = x$$

En transformant le résultat sous la forme exponentielle

$$z \log_a y = \log_a x \quad \text{En prenant le logarithme de deux membres}$$

Donc $z = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ c'est-à-dire que: $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

Exemple

- 4 Mettez sous la forme la plus simple $\log_7 16 \times \log_2 49$

Solution

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \frac{\log 16}{\log 7} \times \frac{\log 49}{\log 2} && \text{propriété (6)} \\ &= \frac{\log 4^2}{\log 7} \times \frac{\log 7^2}{\log 2} \\ &= \frac{4 \log 2}{\log 7} \times \frac{2 \log 7}{\log 2} && \text{propriété (5)} \\ &= 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

Essayez de résoudre

- 2 Changez la base dans l'exemple précédent et résolvez

7 - Propriété de l'inverse

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ c'est-à-dire que $\log_b a$, $\log_a b$, sont inverse l'un à l'autre (Essayez de démontrer cette propriété)

Exemple

- 5 Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur $\frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15}$

Solution

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \log_{15} 3 + \log_{15} 5 && \text{propriété (7)} \\ &= \log_{15} (3 \times 5) && \text{propriété (3)} \\ &= \log_{15} 15 = 1 && \text{propriété (1)} \end{aligned}$$

Essayez de résoudre

- 3 Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur $\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$

Simplifié les expressions logarithmiques



Exemple

- 6 Mettez sous la forme la plus simple $\log 0,009 - \log \frac{27}{16} + 3 \log \frac{5}{2} - \log \frac{1}{12}$



Solution

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \log \frac{9}{1000} - \log \frac{27}{16} + \log \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \log \frac{1}{12} && \text{propriété (5)} \\ &= \log \left(\frac{9}{1000} \times \frac{27}{16} \times \frac{125}{8} \times \frac{12}{1} \right) && \text{propriété (3), (4)} \\ &= \log 1 = 0 && \text{propriété (2)} \end{aligned}$$



Essayez de résoudre

- 4 Mettez sous la forme la plus simple $4 \log \sqrt{3} - \log 1 \frac{2}{5} - \log \frac{9}{7} - \log \frac{1}{2}$

Résolution des équations logarithmiques



Exemple

- 7 Trouvez, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes

a $\log_2 x + \log_2 (x + 1) = 1$

b $\log_2 x + \log_4 x = 3$



Solution

a L'équation est valide pour tout $x > 0$, $x + 1 > 0$

C'est-à-dire $x > 0$

(Ensemble de validité de l'équation)

$\therefore \log_2 x (x + 1) = 1$

propriété (3)

$\therefore x(x + 1) = 2^1$ En transformation de la forme logarithmique à la forme exponentielle

$\therefore x^2 + x - 2 = 0 \quad \therefore (x + 2)(x - 1) = 0$

Soit $x = -2$ ou $x = 1$ puisque $x = -2 \notin$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ Ensemble des solutions = $\{1\}$

- b L'équation est valide pour tout $x > 0$

(Ensemble de validité de l'équation)

$\therefore \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3$

propriété (6)

$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 3$

Multipliant par 2

$\therefore 2 \log_2 x + \log_2 x = 6$

$\therefore 3 \log_2 x = 6$

$\therefore \log_2 x = 2$

$\therefore x = 4$ (En transformation de la forme logarithmique à la forme exponentielle)

Puisque $x = 4 \in$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ Ensemble des solutions = $\{4\}$

Essayez de résoudre

8 Trouvez, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a $\log(2x + 1) - \log(3x - 1) = 1$

b $\log_2 x = \log_x 2$

Résolution des équations exponentielles en utilisant les logarithmes**Exemple**

9 Trouvez, dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centièmes près : $2^x = 7$

Solution

a $2^x = 7$

En prenant le logarithme de chaque membre

$\therefore \log 2^x = \log 7$

$\therefore x \log 2 = \log 7$

$\therefore x = \frac{\log 7}{\log 2}$

En utilisant la calculatrice comme suit :

2.807354922

$\therefore x \simeq 2,81$

$\therefore \text{Ensemble des solutions} = \{2,81\}$

(Vérification de la solution en utilisant la calculatrice)

$2^x = 7$

Essayez de résoudre

5 Trouvez à deux décimales près, l'ensemble des solutions d' équation : $7^x = 2$



Exercices 2 - 5



Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

- 1) $\log_2 8 =$
 - a) 4
 - b) 3
 - c) 16
 - d) 10
- 2) $\log 2 + \log 5 =$
 - a) 1
 - b) $\log 7$
 - c) $\log 2,5$
 - d) 10
- 3) $\log_5 \sqrt{5} =$
 - a) 2
 - b) 5
 - c) $\frac{1}{2}$
 - d) -1
- 4) Si $\log 3 = x$, $\log 4 = y$ alors $\log 12 =$
 - a) $x + y$
 - b) $x y$
 - c) $x - y$
 - d) $\log x + \log y$
- 5) $2 \log_6 2 + 2 \log_6 3 =$
 - a) 6
 - b) 36
 - c) 2
 - d) 12
- 6) $\log_2 5 \times \log_5 2 =$
 - a) 1
 - b) 10
 - c) $\frac{5}{2}$
 - d) zero
- 7) $\log_5 2 \times \log_3 5 \times \log_2 3 =$
 - a) 30
 - b) 1
 - c) 0
 - d) $\log 30$
- 8) Exprimez chacun de ce qui suit en fonction de $\log x$ ou , $\log (x + 1)$
 - a) $\log x (x + 1)$
 - b) $\log \frac{x}{x+1}$
 - c) $\log \sqrt{x} (x + 1)^2$
- 9) Mettez dans la forme la plus simple :
 - a) $\log_6 54 - \log_6 9$
 - b) $\log_6 2 + \log_6 3$
 - c) $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$
 - d) $\log 48 + \log 125 - \log 6$
 - e) $\frac{1 - \log 2}{\log 125}$
 - f) $\frac{\log 49 + 3 \log 7}{\log 7}$
 - g) $\log_2 16 + \log_3 \sqrt{3} + \log 0,1$
 - h) $\frac{1}{2} \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b + 2 \log_3 c - \log_3 \sqrt{ab} - \log_3 3c^2$

10 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_2 x + \log_2 (x+2) = 3$

b $\log x + \log (x-3) = 1$

c $\log_5 x - \log_2 2 = 2$

d $\log (x+3) - \log 3 = \log x$

e $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 2$

f $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

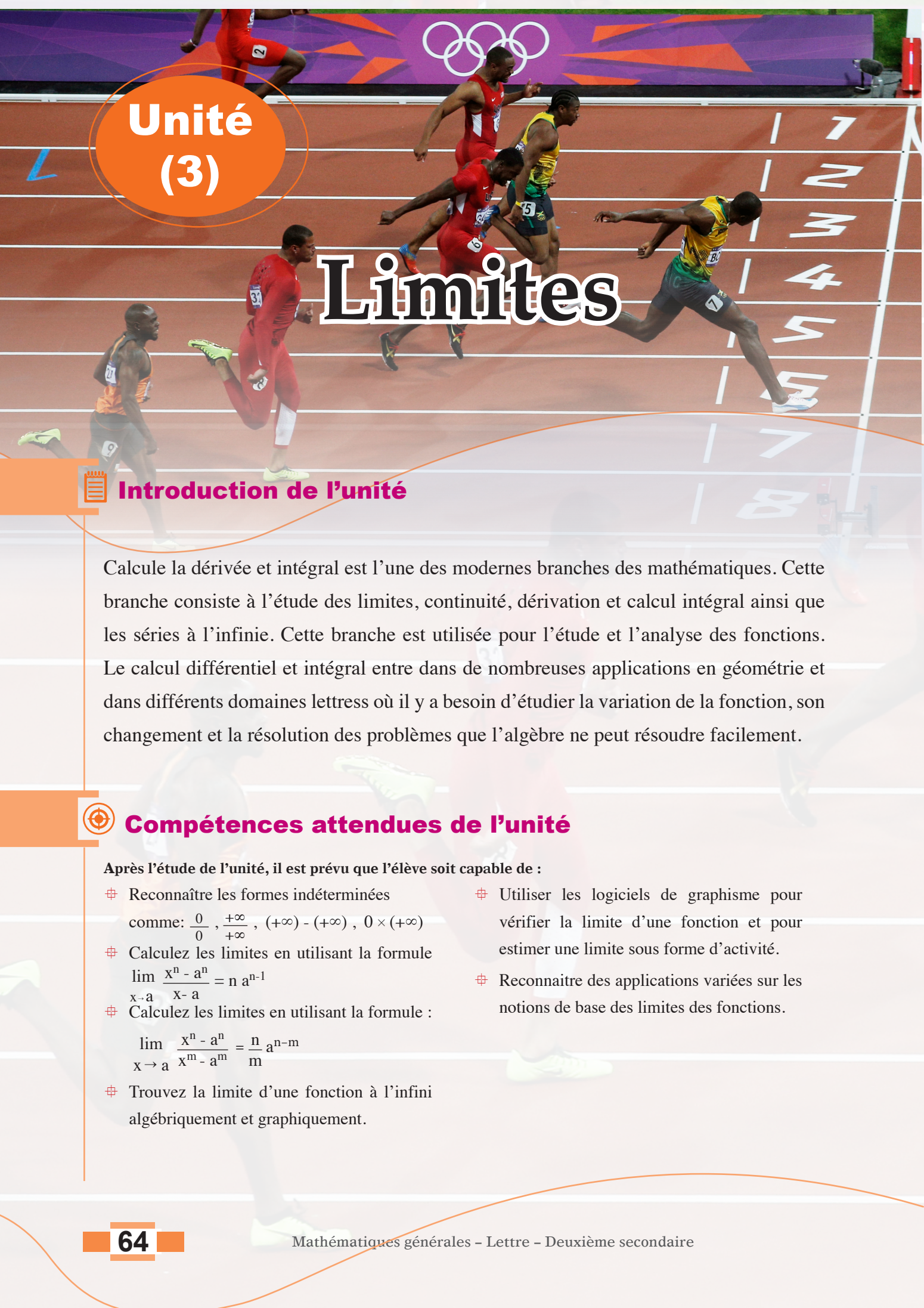
11 Démontrez que $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \log_a d = 1$ puis calculez la valeur de $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 16$

12 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centième près.

a $3^x = 7$

b $5^{x-1} = 2$

c $4 \times 7^{x-2} = 1$



Unité (3)

Limites



Introduction de l'unité

Calculer la dérivée et intégrer est l'une des modernes branches des mathématiques. Cette branche consiste à l'étude des limites, continuité, dérivation et calcul intégral ainsi que les séries à l'infini. Cette branche est utilisée pour l'étude et l'analyse des fonctions. Le calcul différentiel et intégral entre dans de nombreuses applications en géométrie et dans différents domaines lettrés où il y a besoin d'étudier la variation de la fonction, son changement et la résolution des problèmes que l'algèbre ne peut résoudre facilement.



Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

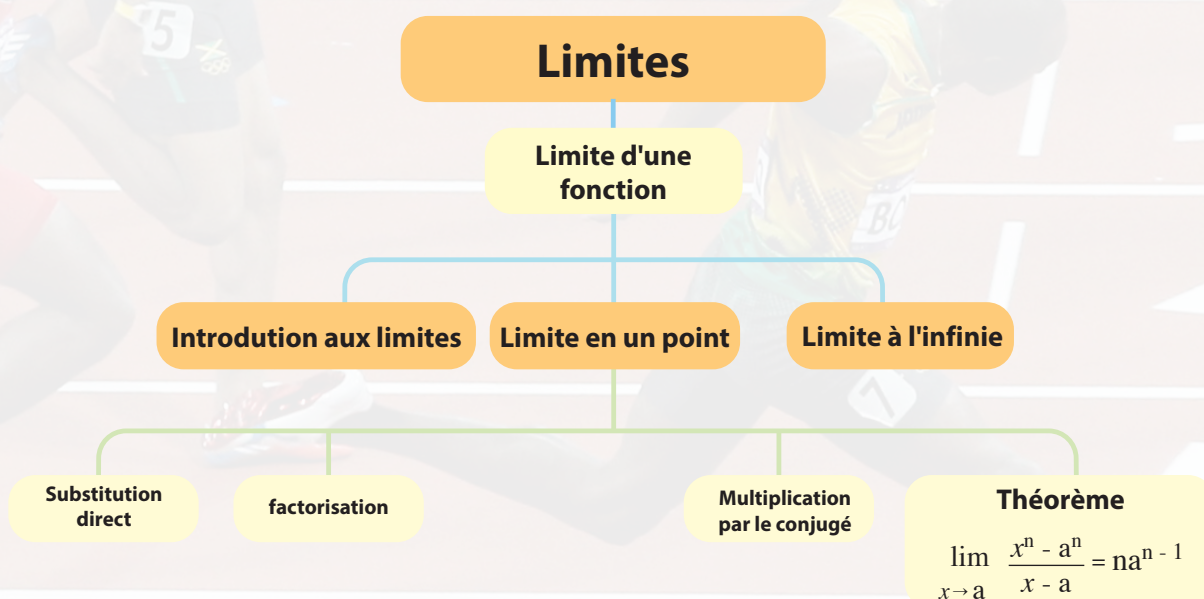
- ✚ Reconnaître les formes indéterminées
comme: $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \times (+\infty)$
- ✚ Calculer les limites en utilisant la formule
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$
- ✚ Calculer les limites en utilisant la formule :
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$$
- ✚ Trouver la limite d'une fonction à l'infini
algébriquement et graphiquement.
- ✚ Utiliser les logiciels de graphisme pour
vérifier la limite d'une fonction et pour
estimer une limite sous forme d'activité.
- ✚ Reconnaître des applications variées sur les
notions de base des limites des fonctions.

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Limite d'une fonction
- Substitution directe
- Conjugate
- Fonction polynôme
- Limite d'une fonction à l'infini



Organigramme de l'unité



Leçons de l'unité

- Leçon (3 - 1): Introduction aux limites.
- Leçon (3 - 2): Limite d'une fonction algébriquement.
- Leçon (3 - 3): Limite d'une fonction à l'infini.



Aides pédagogiques

Calculatrice – Ordinateur – Logiciels de graphisme

**Allez apprendre**

- ▶ Quantités indéterminées.
- ▶ Limite d'une fonction en un point.

**Vocabulaires de base**

- ▶ Quantité indéterminée
- ▶ Indéfini
- ▶ Valeur de la fonction.
- ▶ Limite d'une fonction.

**Aides pédagogiques**

- ▶ Calculatrice lettres
- ▶ Logiciels de graphisme

La notion de la limite d'une fonction en un point est des notions essentielles en science de calcul différentiel. Cette notion est basée essentiellement sur l'étude du comportement de la fonction sur son ensemble de définition. C'est pour cela on doit reconnaître les différentes quantités dans les nombres réelles.

**Réfléchissez et discutez**

Trouvez le résultat de ce qui suit, si cela est possible :

1 3×5

2 $28 : 4$

3 $4 - 9$

4 $7 : 0$

5 $0 : 0$

6 $(+\infty) + 3$

7 $(+\infty) : (+\infty)$

8 $(+\infty) - (+\infty)$

**Rapel**

∞ est un symbole qui exprime le plus grand nombre qui, on peut imaginer.

Quantités indéterminées**A apprendre**

Dans la rubrique « Réfléchissez et discutez » on trouve que les résultats des opérations sont parfaitement déterminés dans les questions 1, 2, 3 tandis qu'ils ne le sont pas dans les autres cas.

On remarque que $7 : 0$ est indéfinie car la division par 0 n'a pas de sens. De même, on ne peut pas déterminer le résultat de l'opération $0 \div 0$ car il existe une infinité de nombres en les multipliant par 0 on obtient 0. C'est pour cela que $\frac{0}{0}$ est une quantité indéterminée.

Les quantités $(+\infty) : (+\infty)$; $(+\infty) - (+\infty)$; $0 \times (+\infty)$ sont également indéterminées **(Pourquoi) ?**

**Pour votre connaissance**

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ est appelé l'ensemble des nombres réels prolongé. On le note $\overline{\mathbb{R}}$, Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

1 $(+\infty) + a = +\infty$

2 $-\infty + a = -\infty$

3 $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

4 $(+\infty) \times a = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a < 0 \\ +\infty, & \text{si } a > 0 \end{cases}$

5 $-\infty \times a = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a > 0 \\ +\infty, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Exemple

1 Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible :

a $4 + (+\infty)$

b $3 - (+\infty)$

c $0 : 3$

d $-5 : 0$

e $\infty + \infty$

f $0 : 0$

g $5 \times (+\infty)$

h $-6 \times (-\infty)$

Solution

a $+\infty$

b $-\infty$

c 0

d Indéfini

e ∞

f Quantité indéterminée

g $+\infty$

h $+\infty$

Essayez de résoudre

1 Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible :

a $0 : (-2)$

b $7 : 0$

c $9 : (+\infty)$

d $(+\infty) \times 0$

e $(-7) \times (+\infty)$

f $(-\infty) + 12$

g $(+\infty) + (+\infty)$

h $(+\infty) : (+\infty)$

Limite d'une fonction en un point :

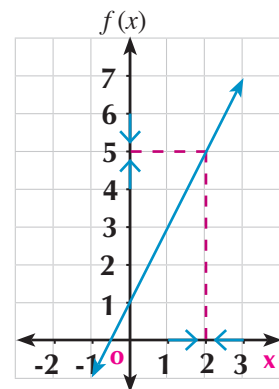


Activité

Etudiez les valeurs de la fonction f telle que $f(x) = 2x + 1$ quand x tend vers 2 à travers les données du tableau suivant :

x	$f(x)$
2,1	5,2
2,01	5,02
2,001	5,002
2,0001	5,0002
.....	
↓	↓
2	5
$x > 2$ x tends vers 2 du côté du droite	

x	$f(x)$
1,9	4,8
1,99	4,98
1,999	4,998
1,9999	4,9998
.....	
↓	↓
2	5
$x < 2$ x tends vers 2 du côté gauche	



On remarque que :

- Quand x tend vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche, quelle la valeur atteinte par $f(x)$?
- Quand x tend vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche, quelle la valeur atteinte par $f(x)$?

Lorsque x tend vers le nombre 2 soit du côté droit et du côté gauche, alors $f(x)$ tend vers le nombre 5. On

le note $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$

Si la valeur d'une fonction f tend vers une valeur unique lorsque x tend vers a du côté droite et du côté gauche, alors la limite de la fonction est égale à ℓ .

Elle symbolisée par $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et se lit limite de $f(x)$ si x tend vers a est égale à ℓ

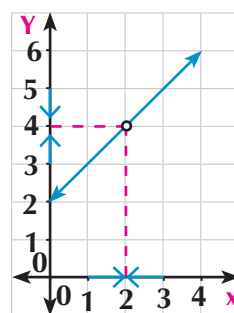
Exemple

- ② Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Étudiez les valeurs de $f(x)$ lorsque x tend vers 2.

Solution

x	$f(x)$
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
.....	
↓	↓
2	2
$x > 2$	

x	$f(x)$
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
.....	
↓	↓
2	2
$x < 2$	



D'après l'étude graphique et du tableau : on trouve que : $f(x) \longrightarrow 4$ lorsque $x \longrightarrow 2$ soit du côté droite ou du côté gauche $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Dans cet exemple, on remarque que :

- 1- Le rond vide dans la représentation graphique veut dire on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 2$ (c'est-à-dire que la fonction n'est pas définie en $x = 2$)
- 2- L'existence d'une limite de la fonction si $x \longrightarrow 2$ ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = 2$.

Essayez de résoudre

- ② Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. Étudiez les valeurs de $f(x)$ lorsque x tend vers (-1) .

Exemple

- ③ Dans chacun des figures suivantes : Trouvez $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

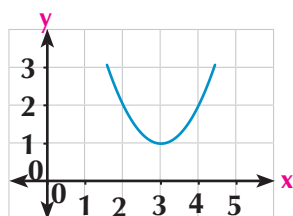


Figure (1)

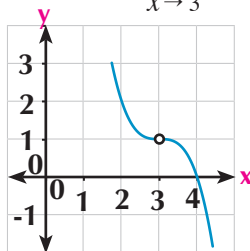


Figure (3)

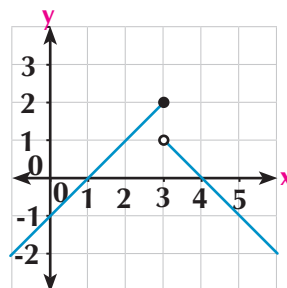


Figure (2)

Solution

Figure (1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

Figure (2) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ (Remarquez que la fonction n'est pas définie en $x = 3$)

Figure (3) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ n'existe pas

Essayez de résoudre

③ Dans chacun des figures suivantes : Trouvez $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

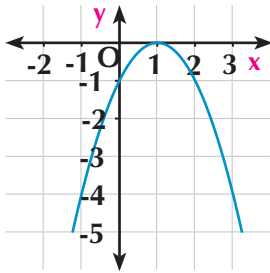


Fig (1)

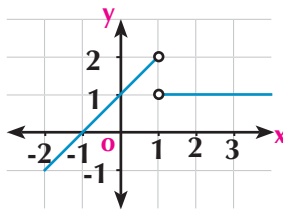


Fig (2)

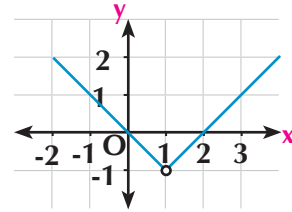


Fig (3)

D'après les exemples précédents, on remarque que :

L'existence d'une limite de la fonction si $x \rightarrow a$ cela ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = a$ et réciproquement si la fonction est définie en cela ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = a$

Expression orale :

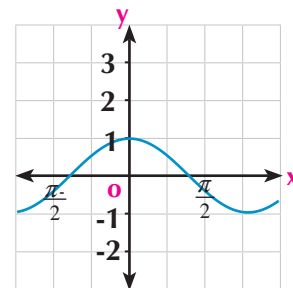
Ecrivez une phrase sur la différence entre la valeur d'une fonction en un point la limite d'une fonction en même point.

**Exercices (3 - 1)****[I] Déterminé la limite graphiquement**

① Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

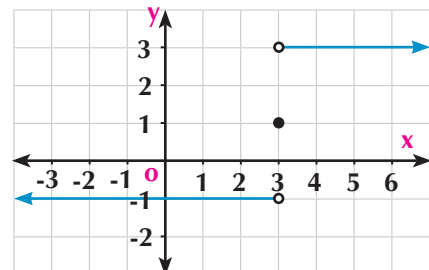
b $f(0)$



② Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

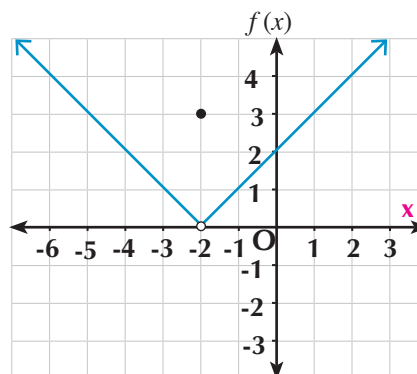
a $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

b $f(3)$



3) Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- b) $f(-2)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- d) $f(0)$

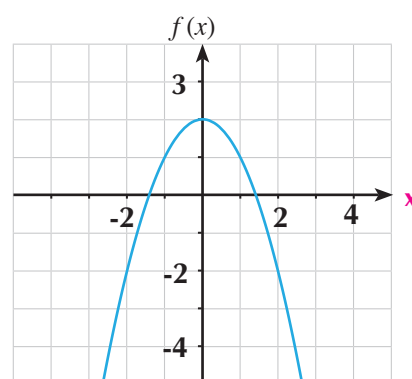


4) La figure ci-contre est représentation graphique

de la fonction $f(x) = 2 - x^2$

De la représentation graphique, trouvez :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2)$
- b) $f(0)$



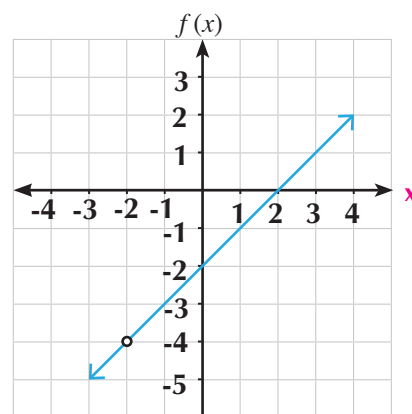
$$f(x) = 2 - x^2$$

5) La figure ci-contre est représentation graphique

de la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

De la représentation graphique, trouvez :

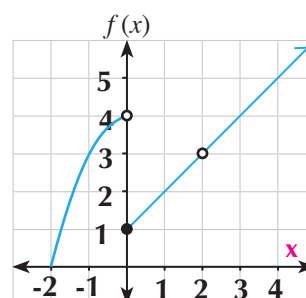
- a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- b) $f(-2)$



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

6) Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

- a) $f(0)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- c) $f(2)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



[II] Déterminé la limite d'après une interférence numérique (tableaux du calcul)

- ⑦ Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ telle que $f(x) = 5x + 4$

x	1,9	1,99	1,999	$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$			

- ⑧ Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 1)$

x	- 0,9	- 0,99	- 0,999	$\longrightarrow$	- 1	$\longleftarrow$	- 1,001	- 1,01	- 1,1
$f(x)$				$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$			

- ⑨ Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

x	- 0,9	- 0,99	- 0,999	$\longrightarrow$	- 1	$\longleftarrow$	- 1,001	- 1,01	- 1,1
$f(x)$				$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$			

- ⑩ Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1,9	1,99	1,999	$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$			

■

Déterminé de la limite d'une fonction algébriquement



Allez apprendre

- ▶ Limite d'une fonction polynôme.
- ▶ Quelques théorèmes des limites.
- ▶ Utilisation de la division euclidienne pour Trouver la limite d'une fonction.
- ▶ Utiliser le théorème :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$$



Vocabulaires de base

- ▶ Limite d'une fonction
- ▶ Substitution directe
- ▶ Factorisation
- ▶ Division composée
- ▶ Conjugué



Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice lettres
- ▶ Logiciels de graphisme

Dans ce qui suit nous allons présenter quelques théorèmes et résultats pour déterminer la limite d'une fonction sans parcourir aux tableaux du calcul.



Activité

Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter graphiquement chacune des deux fonctions $f_1(x) = x^2 + 2$, $f_2(x) = 2x + 3$

$$1 - f_1(1) . \lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) \text{ (Que remarquez-vous ?)}$$

$$2 - f_2(0) . \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) \text{ (Que remarquez-vous ?)}$$



A apprendre

Limite d'une fonction polynôme

Théorème

➤ Si $f(x)$ est une fonction polynôme et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



Exemple

1 Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)$

b $\lim_{x \rightarrow 3} (-4)$



Solution

a $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)$
 $\lim_{x \rightarrow 2} = 4 - 6 + 5 = 3$

(Par substitution directe)

b $\lim_{x \rightarrow 3} (-4) = -4$

On remarque que $f(x) = -4$ (constante)
 pour tout $x \in \mathbb{R}$



Essayez de résoudre

1 Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 5)$

b $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + x - 4)$

Théorème

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$
alors:

1- $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \cdot \ell$ où $k \in \mathbb{R}$

2- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$

3- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$

4- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ où $m \neq 0$

5- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \ell^n$ où $\ell^n \in \mathbb{R}$

Exemple

2 Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+7}{x^2+2x-5}$

b $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x}$

Solution

a $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+7}{x^2+2x-5} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x+7)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+2x-5)} = \frac{3 \times -1 + 7}{(-1)^2 + 2(-1) - 5} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$

b $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} x} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

Essayez de résoudre

2 Calculez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3}{2x+1}$

b $\lim_{x \rightarrow \pi} x \cos x$

Théorème

➤ Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$

et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Exemple

3 Trouvez : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

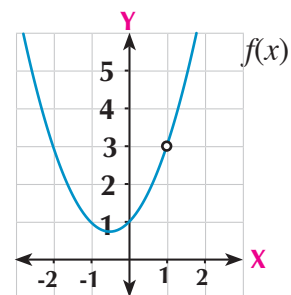
Solution

On remarque que $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ est indéterminée en $x = 1$

En factorisant puis on divisant par les facteurs communs non nuls, nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2+x+1$$

$$= g(x)$$

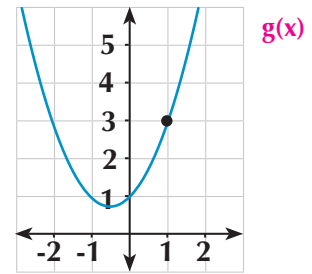


De ce qui précède, on trouve que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 1$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ (une fonction polynôme)

Et d'après **le théorème précédent, on déduit que** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$



Exemple

Utilisation du conjugué

4 Calculez les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}$

b $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3}$

Solution

On remarque que : $f(x) = \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}$ est une quantité indéterminée $x = 4$ On cherche une méthode pour se débarrasser du facteur $(x-4)$ existant au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4} \times \frac{\sqrt{x-3} + 1}{\sqrt{x-3} + 1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-3-1}{(x-4)(\sqrt{x-3} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x-3} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3} \times \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x+4} + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x+4} + 3)}{x+4-9} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x+4} + 3)}{(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} x(\sqrt{x+4} + 3) = 5(3+3) = 30 \end{aligned}$$

Essayez de résoudre

3 Calculez les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$

b $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - 2}$

Théorème

4

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$

Exemple

5 Déterminez : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{19} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{19} - 1^{19}}{x - 1} = 19 \times 1^{18} = 19$

Corollaires

Corollaires issus du théorème :

1- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + a)^n - a^n}{x} = n a^{n-1}$

2- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$

Exemple

6 Calculez :

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 5)^4 - 625}{x}$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1)^{11} - 1}{x}$

d $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)^5 + 32}{x - 2}$

Solution

a $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 5)^4 - 5^4}{x} = 4 \times 5^3 = 500$

b $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^2 - 2^2} = \frac{5}{2} \times 2^3 = 20$

c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1)^{11} - 1}{x} = 11 \times 1^{11-1} = 11$

d $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)^5 + 32}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)^5 - (-2)^5}{(x - 4) - (-2)}$

$= 5 (-2)^4 = 80$

Essayez de résoudre

4 Calculez :

a $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^4 - 625}{x + 5}$

b $\lim_{e \rightarrow 0} \frac{(e + 3)^4 - 81}{e}$

c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$



Exercices (3 - 2)



Complétez ce qui suit :

- | | |
|---|---|
| ① $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = \dots\dots\dots$ | ② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x + 1} = \dots\dots\dots$ |
| ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \dots\dots\dots$ | ④ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \dots\dots\dots$ |
| ⑤ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5}{x - a} = \dots\dots\dots$ | ⑥ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \dots\dots\dots$ |
| ⑦ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \dots\dots\dots$ | ⑧ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \dots\dots\dots$ |
| ⑨ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8} = \dots\dots\dots$ | ⑩ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)^5 = \dots\dots\dots$ |
| ⑪ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4} = \dots\dots\dots$ | ⑫ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^7 + 1}{x^5 + 1} = \dots\dots\dots$ |

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

- | | |
|--|----------------------|
| ⑬ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x}$ est égale à: | |
| a) 0 | b) 1 |
| c) 2 | d) n'a pas de limite |
| ⑭ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x + 1}$ est égale à: | |
| a) -1 | b) 0 |
| c) 1 | d) 3 |
| ⑮ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ est égale à: | |
| a) 2 | b) 4 |
| c) 6 | d) 8 |
| ⑯ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$ est égale à: | |
| a) 1 | b) $\frac{\pi}{2}$ |
| c) $\frac{2}{\pi}$ | d) n'a pas de limite |

17 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ est égale à:

a $\frac{\pi}{2}$

b 1

c $\frac{4}{\pi}$

d n'a pas de limite

Trouvez les limites suivantes (si elles existent)

18 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 2)$

19 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

20 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \sin x)$

21 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 2x}{x}$

22 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1}$

23 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{x^2 - 81}$

24 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4}{x - 4}$

25 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

26 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 64}{x - 4}$

27 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25x}{x - 5}$

28 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

29 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 5}{3x^2 - 3}$

30 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$

31 $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 9}$

32 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$

33 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + x - 6}$

34 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-1)^2 - 1}{5x}$

35 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}$

36 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{3x+4}{x+1} \right)$

37 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$

38 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2 - x}{x^4 + 2x}$

39 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1}$

40 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

41 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x - 3}$

42 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

43 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9x+16} - 4}{x}$

$$44 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x - 1}$$

$$46 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$$

$$48 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^7 - 128}{2x - 4}$$

$$50 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 128}{x^2 - 16}$$

$$45 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$47 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x - 3}$$

$$49 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x^5 - 32}$$

Limite d'une fonction à l'infini

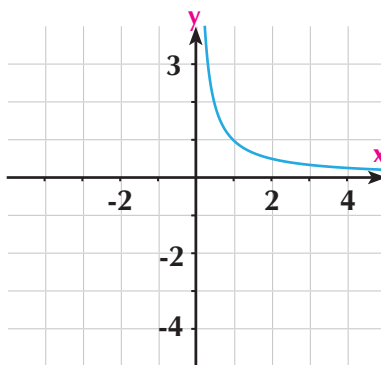
Dans beaucoup d'applications pratiques et de la vie quotidienne, nous avons besoin de connaître le comportement d'une fonction f quand $x \longrightarrow +\infty$. L'activité suivante illustre cette situation.



Activité

Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ telle que se passe-t-il dans la courbe de la fonction quand les valeurs de x augmentent et tendent vers l'infini ?

- On remarque que quand x s'approche de l'infini, la valeur de $f(x)$ s'approche de zéro.



A apprendre

Limite d'une fonction à l'infini

Théorème

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Corollaires

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \quad \text{où } \{n \in \mathbb{R}^+, a \text{ est constant}\}$$

Formules de base :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$, où c est constante
- Si n est un nombre entier positif, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

Remarque que : le théorème (2) déjà étudié dans la leçon précédente, concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions quand $x \longrightarrow a$ est vrai aussi quand $x \longrightarrow +\infty$

Allez apprendre



- ▶ Limite d'une fonction à l'infini.
- ▶ Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution algébrique.
- ▶ Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution graphique.

Vocabulaires de base



- ▶ Limite d'une fonction à l'infini

Aides pédagogiques



- ▶ Calculatrice scientifique
- ▶ Logiciels de graphisme

Exemple

1 Calculez :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right)$

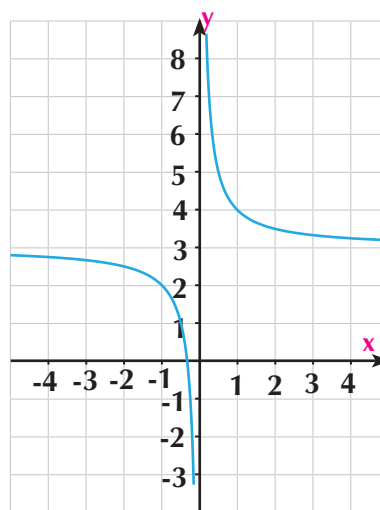
b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right)$

➤ En utilisant un logiciel de graphisme, vérifiez le résultat graphiquement.

Solution

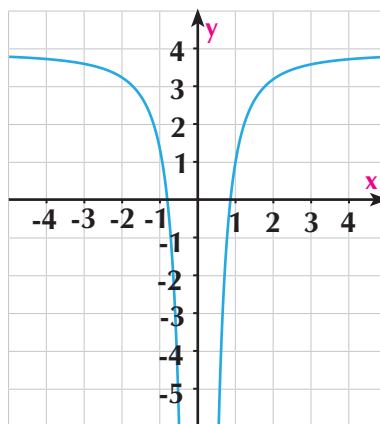
$$\begin{aligned} \text{a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \\ &= 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) = 3$$



$$\begin{aligned} \text{b } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} \\ &= 4 - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 4 - 3 \times 0 = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right) = 4$$



Essayez de résoudre

1 Calculez :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} + 2\right)$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} + 5\right)$

Exemple

2 Calculez : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x - 5)$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x - 5) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) \text{ en prenant } x^3 \text{ facteur commun} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) = +\infty \times 1 = +\infty\end{aligned}$$

Essayez de résoudre

2 Calculez les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 7x^2 + 2)$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 3x - x^3)$

Exemple

3 Calculez les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{3x^2 + 1}$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1}$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3}{3x^2 + 1}$

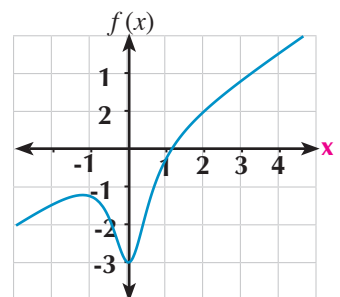
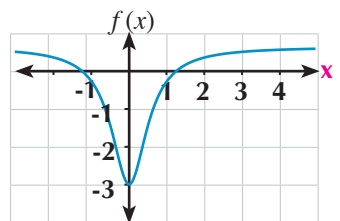
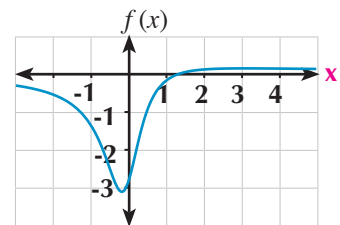
Solution

Dans tous les cas, on divise le numérateur et le dénominateur par x^2 (la plus grande puissance existante au dénominateur).

a
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{3x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0 - 0}{3 + 0} = 0$$

b
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3}{3x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{+\infty - 0}{3 + 0} = +\infty\end{aligned}$$



De l'exemple précédent, on déduit que le calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions polynômes:

- La limite est un nombre réel différent de zéro si le degré du numérateur = le degré du dénominateur.
- La limite est égale à zéro si le degré du numérateur < degré du dénominateur.
- La limite est égale à $\pm\infty$ si le degré du numérateur > degré du dénominateur.

 Essayez de résoudre

3 Calculez :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x}$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x}{8x^4 + 3x^2 - 2}$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^2 + 1}{3x^2 + x - 2}$



Exercices (3 - 3)



Complétez ce qui suit :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{3}{x}) = \dots\dots\dots$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{3}{x^2} - 2) = \dots\dots\dots$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-7) = \dots\dots\dots$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = \dots\dots\dots$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} \dots\dots\dots$

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1} = \dots\dots\dots$

7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 3}{x^3 - 5} = \dots\dots\dots$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dots\dots\dots$

9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2}) = \dots\dots\dots$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x+3}$ est égale à:

a 0

b 2

c 3

d $+\infty$

11 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4}{x}} + 1$

a 0

b 1

c 2

d $+\infty$

12 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{2-x^2}$

a 0

b $\frac{1}{2}$

c $\frac{3}{2}$

d $+\infty$

13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$

a 0

b $\frac{1}{2}$

c 1

d $+\infty$

14 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1+x}{4x-1}}$

a -1

b $\frac{1}{4}$

c $\frac{1}{2}$

d 1

Trouvé la limite d'une fonction à l'infini

$$15 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2}$$

$$16 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 5x^2 + 1)$$

$$17 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 7x}{2 + 3x}$$

$$18 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x + 3}$$

$$19 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2 + 3}$$

$$20 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 6x - 3x^2}{2x^2 + x + 4}$$

$$21 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 1}$$

$$22 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{3x^2 + 4x - 1}$$

$$23 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5x - 1}$$

$$24 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6}{(x - 1)^2}$$

$$25 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 + \frac{2x^2}{(x + 3)^2} \right)$$

$$26 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{5x}{2 + x} \right)$$

$$27 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x + 1} + \frac{3x^2}{(x - 3)^2} \right)$$

$$28 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

Unité 4

Trigonométrie



Introduction de l'unité

La trigonométrie est l'un des branches des mathématiques dont les pharaons sont des premiers qui le sont utilisé. Ils ont utilisés les règles trigonométriques pour bâtir les pyramides et les temples. Les grecs ont élaboré les règles trigonométriques pour trouver des relations liant les longueurs des cotés d'un triangle par les mesures de ses angles. Ils ont également créé une méthode pour élaborer les tableaux des sinus dans le triangle. Nous signalons ici que le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) qui a présenté une nouvelle expression des fonctions trigonométriques. Il a également présenté beaucoup des symboles qui sont utilisés dans les problèmes de mathématiques présentés actuellement à nos étudiants dans les écoles et les universités. Dans cet unité, nous allons étudier les règles qui relient les longueurs des cotés d'un triangle par la mesure de ses angles



Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- ✚ Dédire la loi de sinus dans un triangle dont l'énoncé est : « Dans tout triangle les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés. ».
- ✚ Utiliser la loi de sinus pour trouver les longueurs des côtés d'un triangle.
- ✚ Utiliser la loi de sinus pour trouver les mesures des angles d'un triangle (Il y a deux solutions pour un angle inconnu).
- ✚ Dédire la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle et utiliser cette relation pour résoudre des exercices variés.
- ✚ Identifier et déduire la loi de cosinus dans un triangle.
- ✚ Utiliser la loi de cosinus pour trouver la longueur d'un côté inconnu dans un triangle.
- ✚ Utiliser la loi de cosinus pour trouver la mesure d'un angle inconnu dans un triangle.
- ✚ Utiliser les lois de sinus et cosinus pour résoudre un triangle.
- ✚ Utiliser la calculatrice pour résoudre des exercices et des activités variées en utilisant les lois de sinus et cosinus dans un triangle.

Vocabulaires de base

- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Loi de cosinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Le plus petit côté
- Le plus long côté
- Aire du triangle
- Longueurs des cotés d'un triangle
- Angles inconnus
- Le plus petit angle
- Le plus grand angle
- Angle opposé

Leçons de l'unité

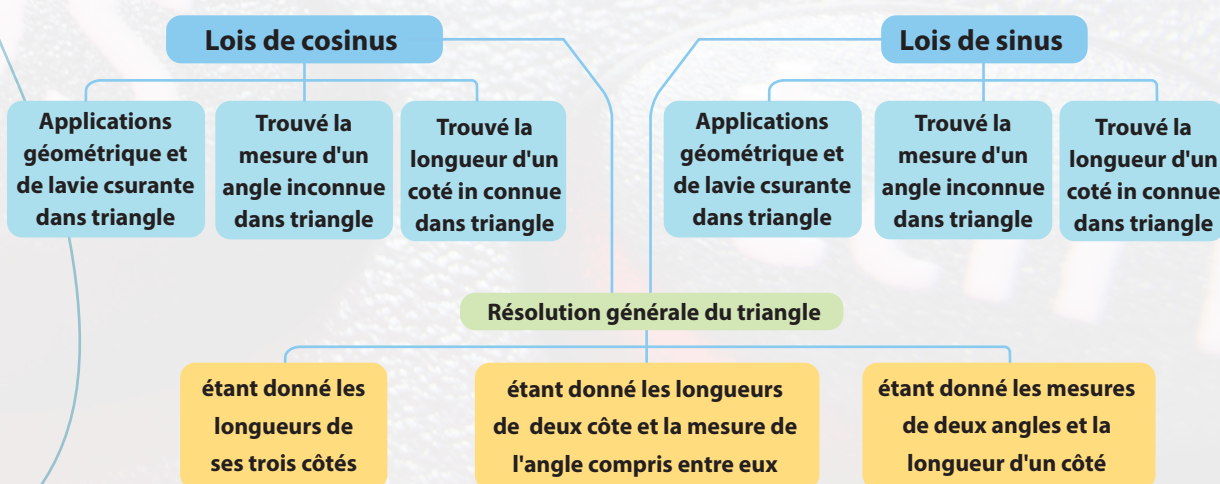
Leçon (4-1): Loi de sinus

Leçon (4-2): Loi de cosinus

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



Unité 4

4 - 1

Loi de sinus

Allez apprendre

- ▶ Lois de sinus dans un triangle.
- ▶ Utilisation de la loi de sinus pour résoudre un triangle.
- ▶ Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de sinus.
- ▶ Utilisation de la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle pour résoudre des problèmes.

Vocabulaires de base

- ▶ Trigonométrie
- ▶ Loi de sinus
- ▶ Angle aigu
- ▶ Angle obtus
- ▶ Angle droit
- ▶ Cas ambigu

Aides pédagogiques

- ▶ Calculatrice lettre
- ▶ Logiciels de graphique

Rappel

Les angles inscrits interceptant le même arc ont la même mesure. L'angle inscrit en demi cercle est droit



Préliminaire

On a étudié comment on peut résoudre un triangle rectangle. On va étudier comment on peut résoudre des triangles non rectangles. On sait qu'un triangle a six éléments : trois côtés et trois angles. Si on a trois de ces éléments (parmi eux la longueur d'un côté), on peut trouver les trois autres éléments en utilisant les lois des sinus et la loi des cosinus. Dans ce moment, on dit qu'on a résolu ce triangle.



A apprendre

Loi (règle) de sinus

Les figures suivantes représentent trois sortes des triangles.

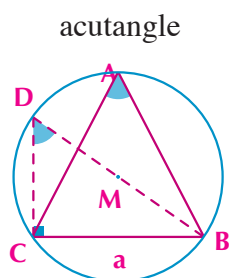


Figure (1)

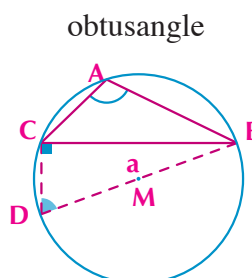


Figure (2)

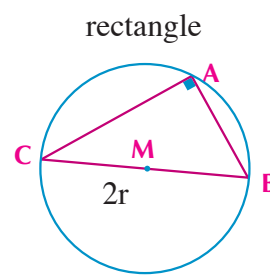


Figure (3)

$$m(\angle A) = m(\angle D) \quad m(\angle A) = 180^\circ - m(\hat{D}) \quad m(\angle A) = 90^\circ$$

Dans la figure (1) puisque $\triangle ABC$ est un triangle acutangle, alors

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2r}$$

De même on peut déduire que $\sin B = \frac{b}{2r}$, $\sin C = \frac{c}{2r}$

Dans la figure (2) puisque $\triangle ABC$ est un triangle obtusangle en A

$$\sin A = \sin (180^\circ - D) = \sin D$$

$$\sin (180^\circ - D) = \sin D]$$

$$\sin D = \frac{a}{2r} \quad \text{et} \quad \sin A = \frac{a}{2r}$$

De même on peut déduire que :

$$\sin B = \frac{b}{2r} \quad , \quad \sin C = \frac{c}{2r}$$

Remarque

Dans $\triangle ABC$: a , b et c sont les symboles des côtés $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ respectivement.

«A l'aide de votre professeur démontrez cette relation»

Maintenant: essayez de démontrer cette relation si le triangle est rectangle en A

En général dans un triangle ABC on a:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.
C'est-à-dire que : Dans un triangle, les longueurs des cotés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles qui lui sont opposés. **La loi de sinus**

Utilisé la loi (règle) de sinus pour trouver les longueurs des cotés dans un triangle:



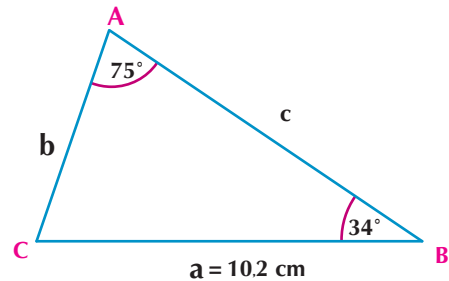
Exemple

- ① ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 75^\circ$, $m(\angle B) = 34^\circ$ et $a = 10,2$ cm, Calculer b et c à un centimètre près



Solution

$$\begin{aligned} \therefore m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) &= 180^\circ \\ \therefore m(\angle C) &= 180^\circ - (75^\circ + 34^\circ) \\ &= 71^\circ \end{aligned}$$



On utilise la règle de sinus pour déterminer b et c

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ b &= \frac{10,2 \times \sin 34^\circ}{\sin 75^\circ} \simeq 6\text{cm} \end{aligned}$$

En utilisant la calculatrice

1 0 . 2 × sin 3 4 ° ÷ sin 7 5 ° =

$$c = \frac{10,2 \times \sin 71^\circ}{\sin 75^\circ} \simeq 10\text{cm}$$

En utilisant la calculatrice

1 0 . 2 × sin 7 1 ° ÷ sin 7 5 ° =



Essayez de résoudre

- ① ABC est un triangle tel que $m(\angle C) = 61^\circ$, $m(\angle B) = 71^\circ$ et $b = 91\text{cm}$, Calculez a et c à un centimètre près

Déterminé la longueur du plus long côté d'un triangle



Exemple

- ② Déterminez la longueur du plus long côté dans le triangle ABC dans lequel $m(\angle A) = 49^\circ 11'$, $m(\angle B) = 76^\circ 17'$, $c = 11,22\text{cm}$ (Donnez une valeur approchée à deux décimal près au résultat).



Solution

$$\therefore m(\angle C) = 180^\circ - [m(\angle A) + m(\angle B)] = 180^\circ - (49^\circ 11' + 76^\circ 17') = 54^\circ 32'$$

Rappel



Au plus long côté d'un triangle est opposé l'angle dont la mesure la plus grande et réciproquement

Le plus long côté qui est opposé l'angle B, c'est-à-dire qu'on veut calculer b

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \therefore \frac{b}{\sin 76^\circ 17'} = \frac{11,22}{\sin 54^\circ 32'}$$

$$\therefore b = \frac{11,22 \times \sin 76^\circ 17'}{\sin 54^\circ 32'} \simeq 13,38 \text{ cm}$$

Essayez de résoudre

- 2) Déterminez la longueur du côté du plus court dans le triangle ABC tel que $m(\angle A) = 43^\circ$, $m(\angle B) = 65^\circ$, $c = 8,4$ cm en arrondissant le résultat à un décimal près.

Résolution d'un triangle en utilisant la loi de sinus

Résoudre un triangle consiste à trouver les mesures de ses éléments inconnus en connaissant trois de six éléments dont au moins de ses éléments est la longueur d'un côté. Car on ne peut pas résoudre le triangle en connaissant seulement les mesures de ses trois angles. La loi des sinus permet de résoudre un triangle en connaissant les mesures de deux angles et la longueur d'un côté du triangle.

(I) Résolution d'un triangle en connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux angles:

Pour résoudre un triangle ABC en connaissant les mesures de deux angles B, C et la longueur du côté a, on suit les étapes suivantes:

1- On utilise la relation $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$ pour calculer $m(\angle A)$

2- On utilise la loi des sinus: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ pour calculer b

3- On utilise la loi des sinus: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ pour calculer c

Dans ce qui suit, il y a des exemples illustratifs:

Exemple

- 3) Résoudre le triangle ABC tel que $m(\angle A) = 36^\circ$, $m(\angle B) = 48^\circ$, $a = 8$ cm en approchant le résultat à trois décimales près.

Solution

On trouve $m(\angle C)$:

$$m(\angle C) = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ) = 96^\circ$$

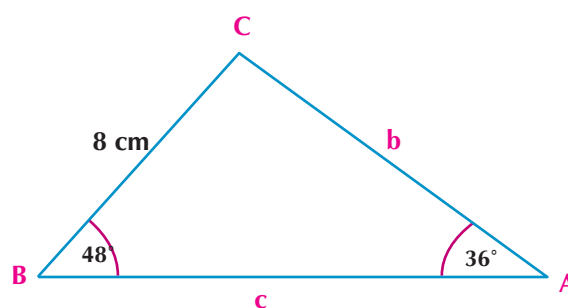
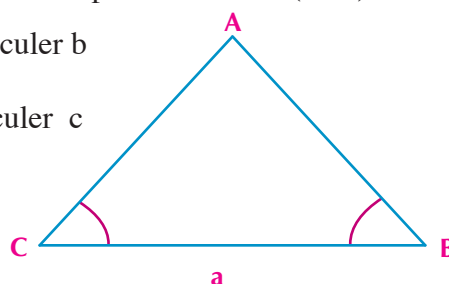
On détermine b en utilisant la règle de sinus:

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \therefore \frac{8}{\sin 36^\circ} = \frac{b}{\sin 48^\circ}$$

$$\therefore b = \frac{8 \times \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \quad \therefore b \simeq 10,115 \text{ cm}$$

En utilisant une calculatrice : 

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \therefore \frac{8}{\sin 36^\circ} = \frac{c}{\sin 96^\circ}$$



$$\therefore c = \frac{8 \times \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \simeq 13,535 \text{ cm}$$

En utilisant une calculatrice :

$$8 \times \sin 96 \div \sin 36 =$$

Essayez de résoudre

- ③ Résoudre le triangle XYZ tel que $y = 107,2 \text{ cm}$, $m(\angle x) = 33^\circ 16'$, $m(\angle z) = 44^\circ 19'$

Applications géométriques

Relation entre la règle de sinus et le rayon du cercle circonscrit au triangle

On a déjà étudié: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle

Exemple

- ④ ABC est un triangle tel que $a = 15 \text{ cm}$, $m(\angle A) = 60^\circ$ et $m(\angle B) = 45^\circ$. Calculez c et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC en arrondissant le résultat à une unité près.

Solution

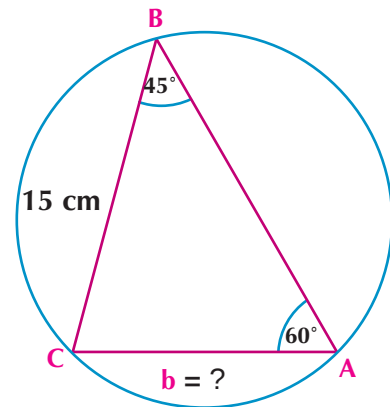
On trouve $m(\angle C)$:

$$\begin{aligned} m(\angle C) &= 180^\circ - [60^\circ + 45^\circ] \\ &= 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ \end{aligned}$$

On utilise la règle de sinus pour trouver c :

$$\therefore \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \therefore \frac{c}{\sin 75^\circ} = \frac{15}{\sin 60^\circ}$$

$$c = \frac{15 \times \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \simeq 17 \text{ cm}$$



Pour trouver la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, on utilise la relation:

$$\frac{a}{\sin A} = 2r \quad \therefore \frac{15}{\sin 60^\circ} = 2r \quad \therefore 2r \times \sin 60^\circ = 15$$

$$\therefore r = \frac{15}{2 \sin 60^\circ} \simeq 9 \text{ cm}$$

$$15 \div (2 \sin 60) =$$

Essayez de résoudre

- ④ ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 64^\circ 23'$, $m(\angle B) = 72^\circ 23'$ et $c = 18 \text{ cm}$, Calculez a , b et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exemple

- 5 ABC est un triangle inscrit dans un cercle tel que $AB = AC = 182$ cm et la longueur du rayon du cercle est 100 cm. Calculez
- la longueur de la base $\overline{BC}$ à un décimal près.
 - l'aire du triangle ABC à un cm carré près.

Rappel

Aire d'un triangle =
 $\frac{1}{2}$ produit de deux
 côtés $\times$ sin angle
 compris

Solution

On trouve $m(\angle B)$:

Dans $\triangle ABC$ on a :

$$\frac{AC}{\sin B} = 2r \quad (\text{Lois de sinus})$$

$$\frac{182}{\sin B} = 200 \quad \sin B = \frac{182}{200} = 0,91$$

$$\therefore m(\angle B) = 65^\circ 30' 19''$$

($m(\angle B) = m(\angle C)$ car ABC est un triangle isocèle et les deux angles sont aigus)

On trouve $m(\angle A)$

$$m(\angle A) = 180^\circ - 2 \times (65^\circ 30' 19'') \simeq 48^\circ 59' 22''$$

On utilise la règle de sinus pour trouver la longueur de $\overline{BC}$:

$$\therefore \frac{BC}{\sin 48^\circ 59' 22''} = \frac{182}{\sin 65^\circ 30' 19''} \quad \therefore BC = \frac{182 \times \sin 48^\circ 59' 22''}{\sin 65^\circ 30' 19''} \simeq 150,9 \text{ cm}$$

$$1 \quad 8 \quad 2 \quad \times \quad \sin \quad 4 \quad 8 \quad , \quad 5 \quad 9 \quad , \quad 2 \quad 2 \quad (\quad \div$$

$$\sin \quad 6 \quad 5 \quad , \quad 3 \quad 0 \quad , \quad 1 \quad 9 \quad , \quad (\quad =$$

$$\text{Aire du triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin A$$

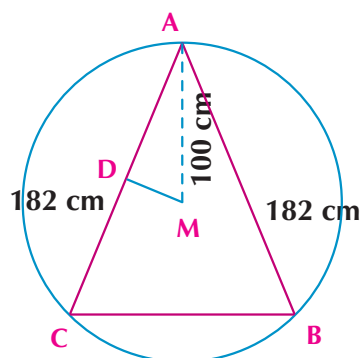
$$= \frac{1}{2} \times 182 \times 182 \sin 48^\circ 59' 22'' \simeq 12497 \text{ cm}^2$$

Essayez de résoudre

- 5 ABC est un triangle inscrit dans un cercle tel que $AB = AC = 10,3$ cm et la longueur du rayon du cercle est 8.4 cm. Calculez:
- la longueur de la base $\overline{BC}$
 - l'aire du triangle ABC sur la loi des sinus

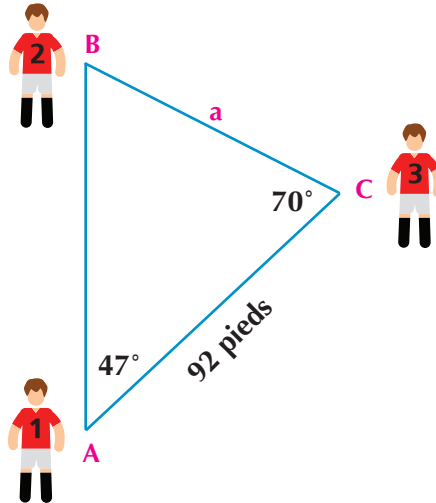
Application de la vie quotidienne sur la règle de sinus

On peut utiliser la règle de sinus pour résoudre beaucoup de problèmes en traçant un triangle, puis on le résout.



Exemple

- 6 **En lien avec le sport:** La figure ci-contre représente les positions des trois joueurs d'une équipe de football dans un match. Déterminez la distance entre le deuxième joueur et le troisième joueur à pieds un près.



Solution

$$m(\angle B) = 180^\circ - (70^\circ + 47^\circ) = 63^\circ$$

La distance entre le deuxième joueur et le troisième joueur est a

$$\frac{a}{\sin 47^\circ} = \frac{92}{\sin 63^\circ} \quad \therefore a = \frac{92 \times \sin 47^\circ}{\sin 63^\circ} \simeq 76 \text{ pieds}$$

En utilisant la calculatrice:

$$9 \quad 2 \quad \times \quad \sin \quad 4 \quad 7 \quad (\quad \div \quad \sin \quad 6 \quad 3 \quad (\quad =$$

La distance entre le deuxième joueur et le troisième joueur est environ 76 pieds près

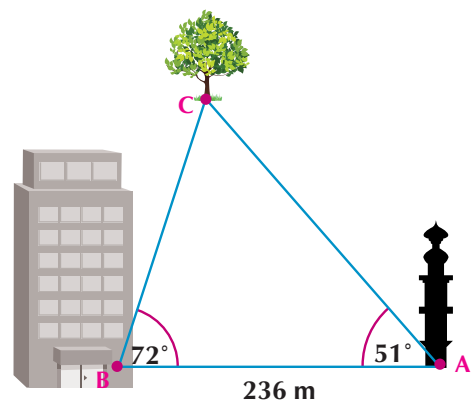
Essayez de résoudre

- 6 Déterminez la distance entre le premier et le deuxième joueur à un pied près.

Exemple

- 7 **En lien avec la géographie:** Dans la figure suivante, il y a trois positions géographiques qui représentent un triangle. La distance entre la position A et la position B est 236 km. La distance entre la position A et la position C est 262 km et la mesure de l'angle à la position B est égale à 72° . Déterminez:

- La distance entre la position C et la position B en arrondissant le résultat à une unité près.
- L'aire du terrain triangulaire dont les positions A, B et C sont les sommets en arrondissant le résultat à un mètre carré près.



Solution

- a On trouve $m(\angle C)$ dans $\triangle ABC$: $m(\angle C) = 180^\circ - (51^\circ + 72^\circ) = 57^\circ$

On utilise la règle de sinus pour trouver la longueur de $\overline{BC}$:

$$\therefore \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \text{ (Règle de sinus)} \quad \therefore \frac{BC}{\sin 51^\circ} = \frac{236}{\sin 57^\circ}$$

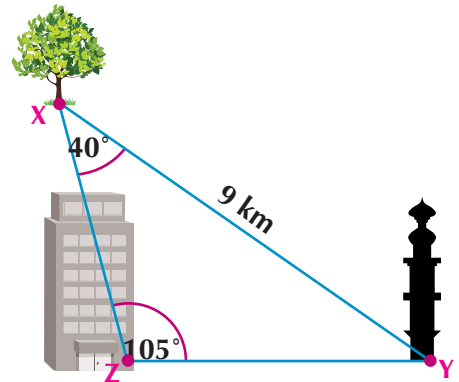
$$\text{D'où } BC = \frac{236 \times \sin 51^\circ}{\sin 57^\circ} = 218,6871 \simeq 219 \text{ metrez}$$

- b) L'aire du terrain dont les positions A, B et C sont les sommets du triangle $m(\angle B)$
 $\therefore \text{Aire du triangle ABC} = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} \times 218,6871 \times 236 \times \sin 72^\circ \simeq 24542 \text{ m}^2$.

Essayez de résoudre

- 7) Dans la figure suivante, il y a trois positions géographiques qui représentent les sommets d'un triangle. Si la distance entre la position X et la position Y est 9 km et la distance entre la position Y et la position Z est 6 km et la mesure de l'angle en position Z est égale à 105° , Déterminez :

- a) La distance entre la position X et la position Z.
 b) L'aire du triangle dont les sommets sont les positions X, Y et Z.





Exercices (4 - 1)



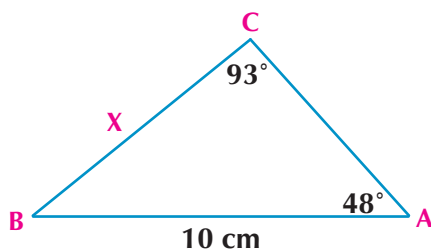
Complétez :

- ① Dans un triangle, les longueurs des côtés sont proportionnels aux
- ② ABC La longueur du côté d'un triangle équilatéral est de $10\sqrt{3}$ cm, alors la longueur du rayon du cercle passant par les sommets de ce triangle est égale à
- ③ ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 60^\circ$, $m(\angle C) = 40^\circ$, $c = 8,4$ cm alors $a =$ cm
- ④ Dans le triangle ABC, on a $\frac{2b}{\sin B} =$ r
- ⑤ La longueur du diamètre d'un cercle passant par les sommets d'un triangle acutangle ABC est 20 cm BC = 10 cm, alors $m(\angle A) =$ °
- ⑥ L'aire du triangle équilatéral dont la longueur du coté est 6 cm est égale à

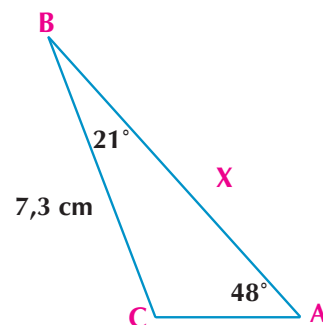
Choisissez la bonne réponse .

- ⑦ La longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC tel que $m(\angle A) = 30^\circ$ et $a = 10$ cm est
 - a 10cm
 - b 20cm
 - c 5cm
 - d 40cm
- ⑧ Si la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est 4 cm et $m(\angle A) = 30^\circ$ alors a
 - a 4cm
 - b 2cm
 - c $4\sqrt{3}$
 - d $\frac{1}{16}$
- ⑨ Dans le triangle ABC; l'expression $2r \sin A =$
 - a a
 - b b
 - c c
 - d $A(\triangle ABC)$
- ⑩ Si r est la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle XYZ, alors $\frac{y}{\sin Y}$ est égale à
 - a r
 - b $2r$
 - c $\frac{1}{2}r$
 - d $4r$
- ⑪ LMN est un triangle tel que $m(L) = 30^\circ$, $MN = 7$ cm, alors la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle est égale à:
 - a 7cm
 - b 3,5cm
 - c 14cm
 - d $\frac{14}{\sqrt{3}}$
- ⑫ Dans le triangle XYZ si $3 \sin X = 4 \sin Y = 2 \sin Z$ alors $x : y : z$ est égale à
 - a 2 : 3 : 4
 - b 6 : 4 : 3
 - c 3 : 4 : 6
 - d 4 : 3 : 6
- ⑬ En utilisant la loi des sinus, déterminez la longueur de x à un décimale près.

a



b



Résolvez le triangle ABC dans chacun des cas suivants:

- 14 $m(\angle A) = 75^\circ$, $m(\angle B) = 34^\circ$, $a = 10,2\text{cm}$ 15 $m(\angle A) = 19^\circ$, $m(\angle C) = 105^\circ$, $c = 11,1\text{cm}$
 16 $m(\angle A) = 116^\circ$, $m(\angle C) = 18^\circ$, $a = 17\text{cm}$ 17 $m(\angle A) = 36^\circ$, $m(\angle B) = 77^\circ$, $b = 2,5\text{cm}$
 18 $X(\angle A) = 49^\circ 11'$, $m(\angle B) = 67^\circ 17'$, $c = 11,22\text{cm}$
 19 $X(\angle B) = 115^\circ 4'$, $m(\angle C) = 11^\circ 17'$, $c = 516,2\text{cm}$

Déterminez la longueur du diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC dans chacun des cas suivants :

- 20 $m(\angle A) = 75^\circ$, $a = 21\text{cm}$ 21 $m(\angle B) = 50^\circ$, $b = 90\text{cm}$
 22 $m(\angle C) = 102^\circ$, $c = 11\text{cm}$ 23 $m(\angle A) = 70^\circ$, $a = 8,5\text{cm}$
 24 ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 67^\circ 22'$, $m(\angle C) = 44^\circ 33'$ et $b = 100\text{ cm}$, Trouvez le périmètre et l'aire du triangle ABC.
 25 Dans le triangle XYZ $y = 68,4\text{cm}$, $m(\angle Y) = 100^\circ$, $m(\angle Z) = 40^\circ$, trouvez x et longueur du rayon circonscrit au triangle XYZ puis déterminez l'aire du triangle.
 26 Si le périmètre du triangle ABC est 30cm $X(\angle A) = 22^\circ 37'$, $m(\angle B) = 67^\circ 23'$, calculez a et b à un cm près.

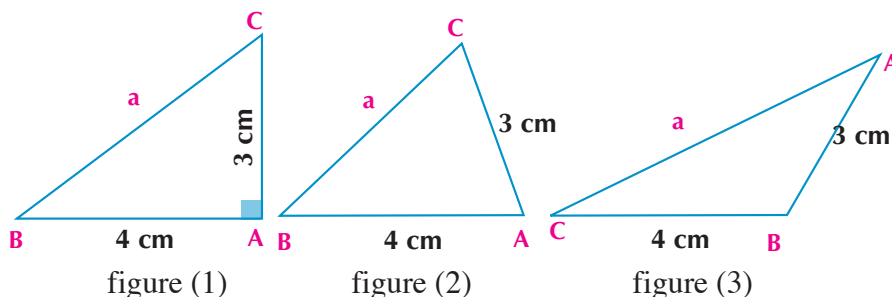
Loi de cosinus

Unité 4 4 - 2



Réfléchissez et discutez

Chacun des triangles suivants dont les longueurs de deux côtés sont 3 cm et 4 cm.



- Dans la figure (1), $m(\angle A)$ droit, trouvez a .
- Quelles sont les valeurs possible de " a " dans le cas où $\angle A$ est aigu?
(figure 2)
- Quelles sont les valeurs de " a " dans le cas où $\angle A$ est obtus?
(figure 3)
- dans les deux figures (2) et (3) Est-ce qu'on peut résoudre le triangle étant donné ($\angle A$) en utilisant la loi des sinus? Expliquer votre réponse. La loi (la règle) des cosinus nous aide à résoudre ces triangles.



A apprendre

Loi (règle) de cosinus

Dans la figure ci-contre: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

Dans le triangle BDC:

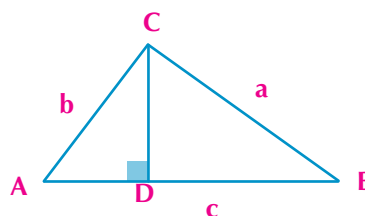
$$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2 \quad (\text{Théorème de Pythagore})$$

$$(BC)^2 = (CD)^2 + (AB - AD)^2 \text{ En développant}$$

$$= (CD)^2 + (AD)^2 + (AB)^2 - 2AB \cdot AD$$

$$= (AC)^2 + (AB)^2 - 2AB \cdot AD$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Remarque

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$$

$$AD = AC \cos A$$

Réfléchissez: Trouvez b^2 et c^2 en fonction de a , b , c et les mesure des angles du $\triangle ABC$.

Allez apprendre

- Lois de cosinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de cosinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de cosinus.

Vocabulaires de base

- Loi de cosinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit

Aides pédagogiques

- Calculatrice lettre

Formule de la règle de cosinus : Dans un triangle ABC, on a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Déterminé la longueur d'un coté de longueur inconnue d'un triangle



Exemple

- ① XYZ est un triangle tel que $x = 24,3\text{ cm}$ et $y = 22,8\text{ cm}$, $m(\angle Z) = 42^\circ$. Calculez z en arrondissant le résultat à un décimal près.



Solution

En appliquant loi des cosinus

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos Z \\ = (24,3)^2 + (22,8)^2 - 2 \times 24,3 \times 22,8 \cos 42^\circ \simeq 286,87 \\ z \simeq 16,9\text{ cm}$$

Cela en utilisant la calculatrice comme suit:



Essayez de résoudre

- ① ABC est un triangle tel que $a = 72,8\text{ cm}$, $b = 58,4\text{ cm}$ et $m(\angle C) = 64,8^\circ$. Calculez c

Trouvé la mesure d'un angle d'un triangle en connaissant ses trois côtés

Vous avez déjà appris que :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{Règle de cosinus})$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\text{C'est-à-dire que : } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{Divisant par } 2bc)$$

On peut également déduire:

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Utilisé la loi de cosinus dans un triangle pour trouver la mesure d'un angle.



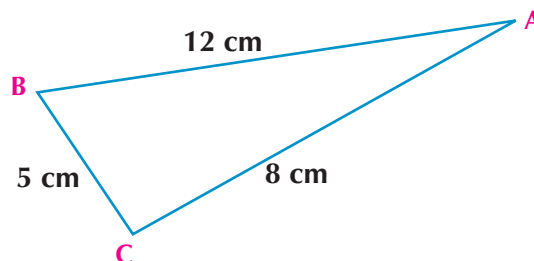
Exemple

- ② Dans la figure ci-contre : déterminez $m(\angle C)$



Solution

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{Règle de cosinus})$$



$$= \frac{(5)^2 + (8)^2 - (12)^2}{2 \times 5 \times 8} \quad (\text{En substituant})$$

$$= \frac{-55}{80}$$

Cela en utilisant une calculatrice

5 χ^2 + 8 χ^2 - 12 χ^2 ÷) 2 × 5 × 8 (=

SHIFT cos = ...

On remarque que cosinus l'angle est négative, alors $\angle C$ est obtus, on a donc
 $m(\angle C) \simeq 133^\circ 25' 57''$

Essayez de résoudre

- 2 Dans la figure ci-contre : déterminez $m(\angle A)$



Exemple

- 3 Calculez la mesure du plus grand angle du triangle LMN tel que $\ell' = 7,5$ cm ; $m = 12,5$ cm et $n = 17,5$ cm. puis démontrez qu'il vérifie la relation:

$$\cos N - 3\sqrt{3} \sin N + 5 = 0$$

Solution

Le plus grand angle est opposé au plus long côté, alors $\angle N$ est celui le grand angle du triangle

D'où : $\cos N = \frac{\ell'^2 + m^2 - n^2}{2 \ell' m} = \frac{(7,5)^2 + (12,5)^2 - (17,5)^2}{2 \times 7,5 \times 12,5} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \cos N = -\frac{1}{2} \quad \therefore m(\angle N) = 120^\circ$$

7 . 5 χ^2 + 1 2 . 5 χ^2 - 1 7 5 χ^2 =

÷) 2 × 7 5 × 1 2 5 (=

SHIFT cos ANS (= ...

Membre de gauche = $\cos N - 3\sqrt{3} \sin N + 5 = \cos 120^\circ - 3\sqrt{3} \sin 120^\circ + 5$

$$= -\frac{1}{2} - 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 = 0 = \text{Membre de droite.}$$

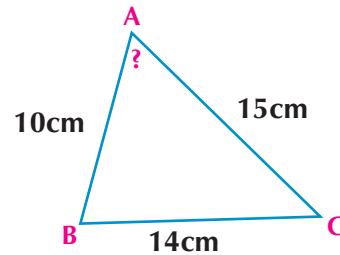
Essayez de résoudre

- 3 ABC est un triangle tel que $a = 12$ cm , $b = 15$ cm , $c = 18$ cm Démontrer que $m(\angle C) = 2 m(\angle A)$

Utilisé la loi de cosinus pour résoudre un triangle

La loi de cosinus nous permet de résoudre un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.

Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux :



Rappel



$$\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ)$$

$$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple

- 4 Résoudre le triangle ABC tel que $a = 11\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $m(\angle C) = 20^\circ$

Solution

Il faut calculer c , $m(\angle A)$; $m(\angle B)$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (\text{loi de cosinus})$$

$$\therefore c^2 = (11)^2 + (5)^2 - 2 \times 11 \times 5 \cos 20^\circ$$

$$\therefore c = \sqrt{(11)^2 + (5)^2 - 2 \times 11 \times 5 \cos 20^\circ}$$

$$\simeq 6,529\text{cm}$$

$$\sqrt{} \quad 1 \quad 1 \quad x^2 \quad + \quad 5 \quad x^2 \quad - \quad 2 \quad \times \quad 1 \quad 1 \quad \times \quad 5 \quad \cos$$

$$2 \quad 0 \quad =$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(5)^2 + (6,529)^2 - (11)^2}{2 \times 5 \times 6,529} \simeq -0,817$$

$$\therefore m(\angle A) \simeq 144,786^\circ$$

$$m(\angle B) = 180^\circ - [m(\angle A) + m(\angle C)]$$

$$= 180^\circ - [144,786^\circ + 20^\circ]$$

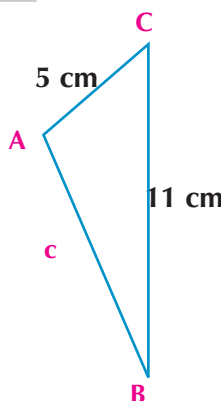
$$= 15,214^\circ$$

$$\therefore c = 6,529\text{cm}, m(\angle A) = 144^\circ 47' 96''$$

$$m(\angle B) \simeq 15^\circ 12' 50''$$

Essayez de résoudre

- 4 Résoudre le triangle ABC tel que $a = 24,6\text{cm}$, $c = 14,2\text{cm}$, $m(\angle B) = 42^\circ 18'$



Rappel

Resoudre un triangle veut dire déterminer les éléments inconnus. Dans ce cas, on veut déterminer c , $m(\angle A)$, $m(\angle B)$.

Information importante

pour trouver la mesure d'un angle dans un triangle étant donné les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre les deux côtés, il est préférable d'utiliser la loi de cosinus au lieu de la loi de sinus.

La sinus d'un angle aigu ou obtus est toujours positive tandis que la cosinus d'angle obtus est toujours négative.

Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de ses trois côtés

Exemple

- 5 Résoudre le triangle ABC dans lequel $a = 6\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$, $c = 12\text{ cm}$

Solution

La conclusion : Déterminez les mesures des trois angles du triangle

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(8)^2 + (12)^2 - (6)^2}{2 \times 8 \times 12} = \frac{43}{48}$$

$$\therefore m(\angle A) \simeq 26^\circ 23' 4''$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 8 & \chi^2 & + & 1 & 2 & \chi^2 & - & 6 & \chi^2 & = & \div &) & 2 & \times \\ 8 & \times & 1 & 2 & (& = & \text{SHIFT} & \cos & \text{ANS} & (& = \end{array}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(12)^2 + (6)^2 - (8)^2}{2 \times 12 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\therefore m(\angle B) \simeq 36^\circ 20' 10''$$

$$\begin{aligned} \therefore m(\angle C) &= 180^\circ - [26^\circ 23' 4'' + 36^\circ 20' 10''] \\ &= 117^\circ 16' 46'' \end{aligned}$$

Essayez de résoudre

- 5 Résoudre le triangle ABC tel que $a = 12,2\text{ cm}$; $b = 18,4\text{ cm}$; $C' = 21,1\text{ cm}$

Exemple

- 6 **En bien avec la géométrie:** ABCD est un quadrilatère tel que $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $CD = 8\text{ cm}$, $DA = 9\text{ cm}$, $AC = 11\text{ cm}$. Démontrez que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Solution

Dans le triangle ABC

$$\cos B = \frac{(9)^2 + (5)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 5} = -\frac{1}{6}$$

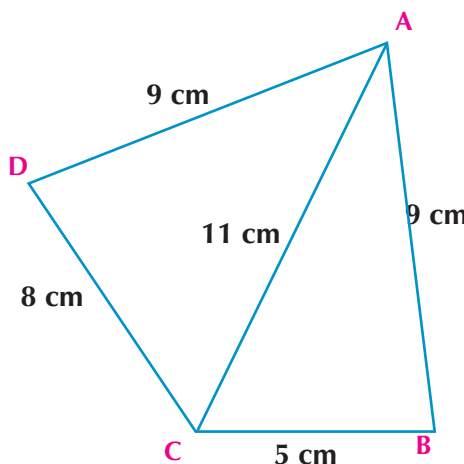
Dans le triangle ADC

$$\cos E = \frac{(9)^2 + (8)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$$

C'est-à-dire que $\cos D = -\cos B$

$$D'où m(\angle D) + m(\angle B) = 180^\circ$$

Puisque $\angle D$ et $\angle B$ sont deux



Rappel



Le quadrilatère inscriptible est un polygone dont les sommets appartiennent au même cercle (cocycliques) un quadrilatère est inscriptible si il a :

- Deux angles opposés sont supplémentaires.
- La mesure de l'angle extérieur en un sommet est égale à la mesure de l'angle apposé à son adjacent.
- deux angles situés sur une même base et de même côté de cette base ont la même mesure
- Les sommets sont équidistants d'un point fixe

angles opposés et supplémentaires dans le quadrilatère ABCD

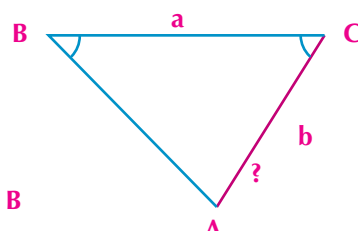
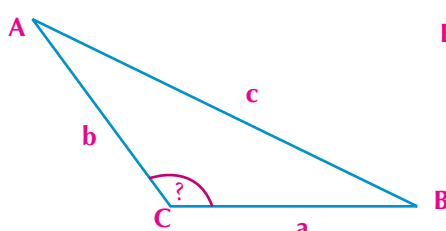
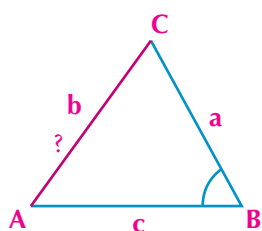
$\therefore$ ABCD est un quadrilatère inscriptible.

(ce qu'il faut démontrer)

Essayez de résoudre

- ⑥ ABCD est un quadrilatère tel que $AB = 2,7\text{cm}$, $AC = 7,2\text{ cm}$, $BC = 6,3\text{cm}$, $CD = 4,5\text{cm}$, $BD = 7,2\text{cm}$. Démontrez que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Discussion : En utilisant les données en bleues seulement sur chaque triangle, écrivez la formule de la loi des sinus ou la loi des cosinus pour calculer les lettres inconnue en rouges.





Exercices (4 - 2)



Complétez ce qui suit:

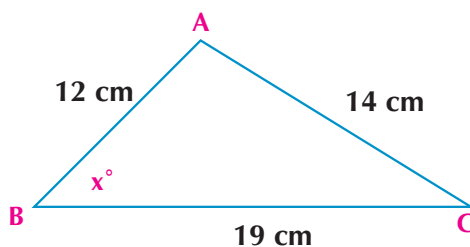
- ① Dans un triangle XYZ, on a: $x^2 = y^2 + z^2$, $\cos X = \frac{y^2 + z^2}{\dots}$
- ② Si les longueurs des côtés d'un triangle sont 13, 17 et 15 cm, alors la mesure de plus grand angle estcm
- ③ Si les longueurs des côtés d'un triangle sont 5,7 cm, 7,5 cm et 4,2 cm, alors la mesure de plus petit angle est
- ④ ABC est un triangle tel que $a = 10$ cm, $b = 6$ cm et $m(\angle C) = 60^\circ$ alors $C =$
- ⑤ Dans un triangle LMN, on a $m^2 + n^2 - \ell^2 =$

Choisissez la bonne réponse des réponses proposées:

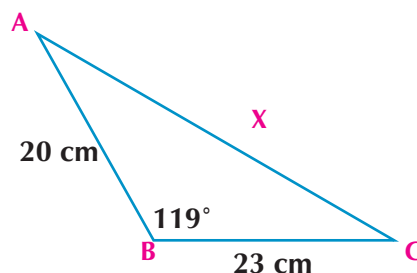
- ⑥ La mesure du plus grand angle d'un triangle dont les longueurs des côtés sont 3, 5 et 7 est
 (a) 150° (b) 120° (c) 60° (d) 30°
- ⑦ Dans un triangle LMN, l'expression $\frac{\ell^2 + m^2 - n^2}{2 \ell m}$ est égale à:
 (a) $\sin L$ (b) $\cos M$ (c) $\cos N$ (d) $\sin N$
- ⑧ Dans un triangle XYZ on a $y^2 + z^2 - x^2 = 2yz$
 (a) $\cos X$ (b) $\sin Z$ (c) $\cos Z$ (d) $\sin X$
- ⑨ Dans un triangle ABC si $a : b : c = 3 : 2 : 2$ alors $\cos A =$
 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$

Utilisez loi des cosinus pour calculez la valeur de x à un dixième près.

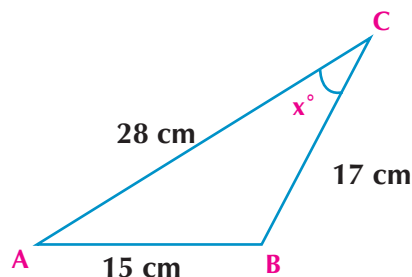
⑩



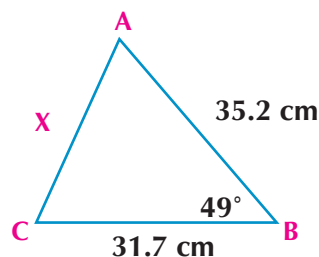
⑪



⑫



⑬



Dans un triangle ABC, si:

- 14 a = 5, b = 7 et c = 8, démontrez que $m(\angle B) = 60^\circ$
- 15 a = 3, b = 5 et c = 7, démontrez que $m(\angle C) = 120^\circ$
- 16 a = 13, b = 7 et c = 13, calculez $m(\angle C)$
- 17 a = 13, b = 8 et c = 7, calculez $m(\angle A)$
- 18 a = 10, b = 17 et c = 21, calculez la mesure du plus petit angle du triangle.
- 19 a = 5, b = 6 et c = 7, calculez la mesure du plus petit angle du triangle.
- 20 a = 17, b = 11 et $m(\angle C) = 42^\circ$, calculez c à deux décimales près.
- 21 b = 16 cm, c = 14 cm, $m(\angle A) = 72^\circ$, calculez a à deux décimales près.
- 22 ABC est un triangle tel que a = 3 cm, b = 5 cm, c = $\sqrt{19}$ cm trouvez :
 a $m(\angle C)$ b aire du triangle ABC
- 23 ABC est un triangle tel que a = 9 cm ; b = 15 cm et c = 21 cm. Calculez la mesure du plus grand angle du triangle, puis démontrer qu'il vérifie cette relation $\cos c - 5\sqrt{3} \sin c + 8 = 0$
- 24 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 3 cm, AC = 8 cm, BC = 7 cm, CD = 5 cm et BD = 8 cm. Prouvez que ABCD est un quadrilatère inscriptible.
- 25 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 15 cm, BC = 20 cm, CD = 16 cm, AC = 25 cm et $m(\angle ACD) = 36^\circ 52'$. Calculez longueur du $\overline{AD}$ à un cm près. Puis déterminez l'aire du quadrilatère ABCD.
- 26 ABCD est un parallélogramme dans lequel AB = 12 cm, BC = 10 cm et la longueur du diagonale $\overline{BD}$ est égale à 14 cm. Calculez la longueur du diagonale $\overline{AC}$ à un cm près.
- 27 ABCD est un quadrilatère ayant BC = 78 cm, CD = 96 cm, $m(\angle BCD) = 97^\circ$, $m(\angle ABD) = 72^\circ$, $m(\angle ADB) = 43^\circ$. Calculez la longueur de $\overline{AB}$.