

القسم الأدبي

الرياضيات

العامّة



Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري

الصف الثاني الثانوي

كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول



٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

مراجعة وتعديل

د/ محمد محي الدين عبد السلام د/ مدحت عطية أ/ شريف عاطف البرهامي

إشراف علمي

أ/ منال عزقول

مستشار الرياضيات

إشراف تربوي

د/ أكرم حسن

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوءها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
- ٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
- ٣ تبني مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
 - أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
 - ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلي:
 - أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محباً للرياضيات ومبادراً بدراساتها - أن يكون المتعلم قادراً على العمل منفرداً أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطاً ومثابراً وموظباً ومبتكراً - أن يكون المتعلم قادراً على التواصل بلغة الرياضيات.
 - ٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
 - ٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
 - ٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفي ضوء ما سبق روعى في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هي: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراكبة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمي لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشاف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.
- ★ تنتهي كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.
- ★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمي يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.
- ★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسي.

وأخيراً .. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

١ - ١	الدوال الحقيقية	٤
٢ - ١	اطراد الدوال	١١
٣ - ١	الدوال الزوجية والدوال الفردية	١٥
٤ - ١	التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية	٢١
٥ - ١	حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة	٣١

الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

١ - ٢	الأسس الكسرية	٣٨
٢ - ٢	الدالة الأسية وتطبيقاتها	٤٤
٣ - ٢	حل المعادلات الأسية	٤٦
٤ - ٢	الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني	٥٠
٥ - ٢	بعض خواص اللوغاريتمات	٥٥

المحتويات

الوحدة الثالثة: النهايات

٦٤	مقدمة فى النهايات	١ - ٣
٧٠	إيجاد نهاية الدالة جبرياً	٢ - ٣
٧٧	نهاية الدالة عند اللانهاية	٣ - ٣

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

٨٤	قانون (قاعدة) الجيب	١ - ٤
٩٢	قانون (قاعدة) جيب التمام	٢ - ٤

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

للدوال أنواع مختلفة وتطبيقات هامة في مختلف مجالات الحياة، في علم الفلك والطب والاقتصاد، وعلم الزلازل والجيولوجيا والديموغرافيا، فنستخدم الدوال في احتساب متغيرات الطقس والتنبؤ بالطقس المتوقع لفترة مقبلة، أو تحديد موضع خلل في عمل القلب باستخدام الرسوم البيانية التي يسجلها رسام القلب الكهربائي، أو تحقيق أفضل ربح بدراسة دالتى الرياح والتكاليف، أو تأثير فئات العمر على تعداد السكان. كما نستخدم أيضاً في الطب الرياضى لتحديد الوزن الأمثل [الوزن = الطول (سم) - ١٠٠] أو قياس نسبة الدهون فى الجسم، ويكثر استخدامها فى الصناعة لدراسة تأثير المتغيرات المختلفة على جودة الانتاج.

ويعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسرى الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر فى الرياضيات والفيزياء، وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو $ص = د(س)$ للدلالة على الدالة معتبراً أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س، كما حول جميع النسب المثلثية التى نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. فى هذه الوحدة ستعرف صوراً مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانياً مستخدماً التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ◆ يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- ◆ يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- ◆ يستنتج إطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- ◆ يحدد نوع الدوال الحقيقية من حيث كونها زوجية أو فردية.
- ◆ يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- ◆ يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة المقياس - الدالة التكعيبية - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- ◆ يستنتج تأثير كل من التحويلات: $د(أس ± ب) ± ج$ ، $أ د(س) ± ب$ على الدوال السابقة.
- ◆ يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- ◆ يحل معادلات على الصورة: $|أس + ب| = |إس + ج|$
- ◆ يحل متباينات على الصورة: $|أس + ب| > |إس + ج|$ ، $|أس + ب| < |إس + ج|$
- ◆ يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- ◆ يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة نشاط.

المصطلحات الأساسية

Rational Function	دالة كسرية	Odd Function	دالة فردية	Real Function	دالة حقيقية
Asymptote	خط تقارب	Monotony of a Function	إطاراد دالة	Domain	مجال
Transformation	تحويل	Increasing Function	دالة تزايدية	Co-domain	مجال مقابل
Translation	إزاحة (انتقال)	Decreasing Function	دالة تناقصية	Range	مدى
Reflection	انعكاس	Constant Function	دالة ثابتة	Vertical Line	خط رأسي
Stretching	تمدد	polynomial Function	دالة كثيرة الحدود		دالة متعددة التعريف
Graphical Solution	حل بياني	دالة مقياس (قيمة مطلقة)		Piecewise-Defind Function	
		Absolute Value Function		Even Function	دالة زوجية

مخطط تنظيمي للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.
 الدرس (١ - ٢): إطاراد الدوال.
 الدرس (١ - ٣): الدوال الزوجية و الدوال الفردية.
 الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.
 الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية - حاسب آلي مزود
 ببرامج رسومية
 (Graph, GeoGebra)

الدوال الحقيقية

١-١

Real Functions

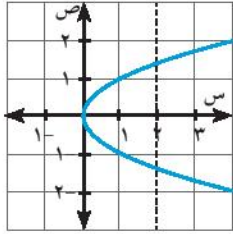
Real Function

الدالة الحقيقية

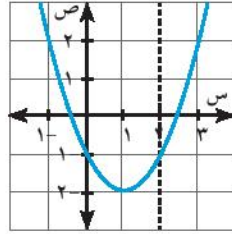
تعريف

تسمى الدالة دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية منها.

تعلم



ليست دالة



دالة

اختبار الخط الرأسى

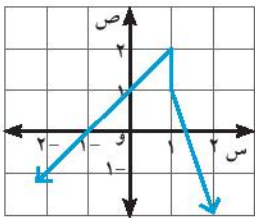
إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقاط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من s إلى v

تحديد العلاقة التى تمثل دالة

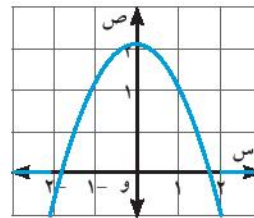
مثال

Identify the relation representing the function

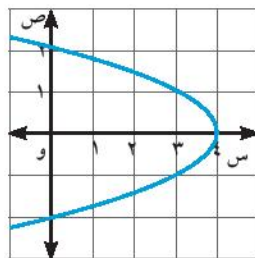
١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت v تمثل دالة فى s أم لا.



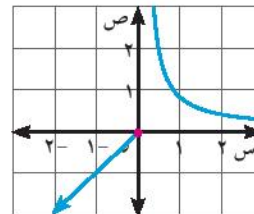
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

- دالة Function
- مجال Domain
- مجال مقابل Co-domain
- مدى Range
- مخطط سهمى Arrow Diagram
- مخطط بياني Cartesian Diagram
- خط رأسى Vertical line
- دالة متعددة التعريف
- قاعدة الدالة Piecewise Function

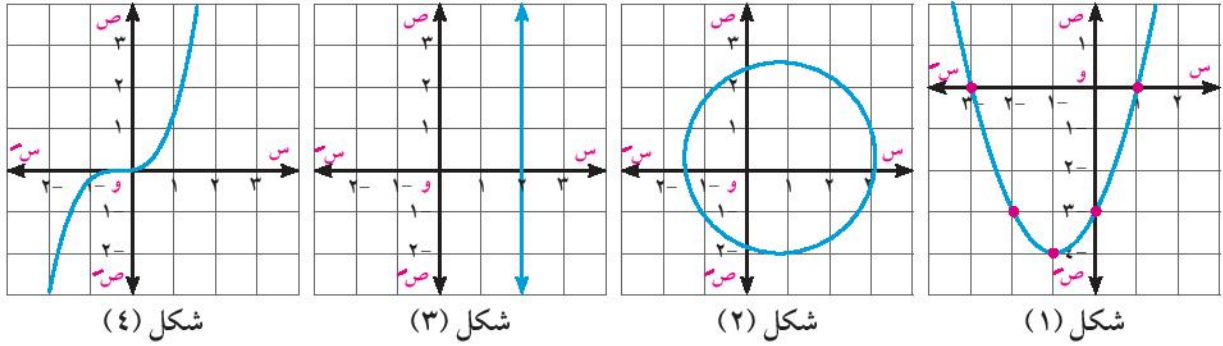
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

الحل

شكل (١) يمثل دالة في S شكل (٢) لا يمثل دالة في S لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البياني في عدد غير منته من النقط.شكل (٣) يمثل دالة في S .شكل (٤) لا يمثل دالة في S لأن يوجد خط رأسى يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

٤ حاول أن تحل

١ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من S ← مع ذكر السبب.

تعيين مدى الدالة بيانياً

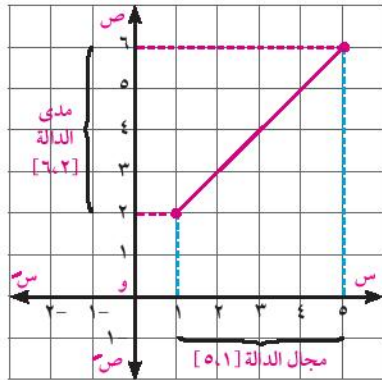
مثال

٢ إذا كانت $d: [٥, ١]$ ← C حيث $d(S) = S + ١$ ارسم الشكل البياني للدالة d ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحل

الدالة d دالة خطية مجالها $[٥, ١]$ تمثل بيانياً بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين (١، ١) $d(١)$ ، (٥، ٥) $d(٥)$ أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).مدى الدالة $d = [٢, ٦]$

وهو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.



٤ حاول أن تحل

١

إذا كانت $d: [١, \infty)$ ← C ، حيث $d(S) = S - ١$ ارسم الشكل البياني للدالة d ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب

إذا كانت $r: [-١, \infty)$ ← C ، حيث $r(S) = S - ١$ ارسم الشكل البياني للدالة r ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

Piecewise-Defined Functions

الدالة متعددة التعريف:

تعلم



الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -3 < s < -2 \\ \text{عندما } 2 < s < 5 \end{array} \right\} \text{ إذا كانت د(س) = } \left\{ \begin{array}{l} -3 - s \\ s \end{array} \right.$$

عين مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

الحل

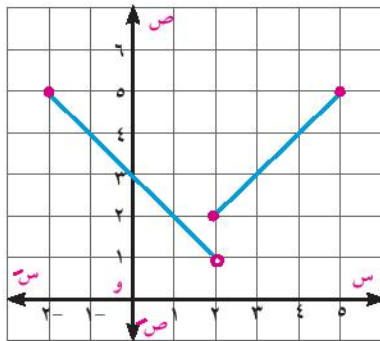
الدالة د معرفة على فترتين وتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د(س) = -3 - s عندما $-3 < s < -2$ أى على الفترة $[-2, 2]$

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفها النقطتين

$(-2, 1)$ ، $(-3, 0)$ مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة $(-2, 1)$

لأن $-2 \notin [-2, 2]$ كما فى الشكل المقابل.



القاعدة الثانية: د(س) = s عندما $2 < s < 5$ أى على الفترة $[5, 0]$

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفها النقطتين $(2, 2)$ ، $(5, 5)$

ويكون مجال الدالة د = $[-2, 2] \cup [2, 5] = [-2, 5]$

ويمكن من الرسم البياني نستنتج أن:

مجال الدالة د = $[-2, 5]$

مدى الدالة د = $[0, 5]$

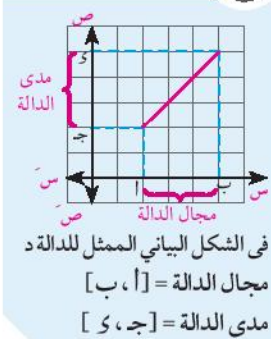
حاول أن تحل

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -1 < s < 0 \\ \text{عندما } 1 \leq s < 2 \end{array} \right\} \text{ إذا كانت د(س) = } \left\{ \begin{array}{l} 1 - s \\ s + 1 \end{array} \right.$$

عين مجال الدالة ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

٤ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

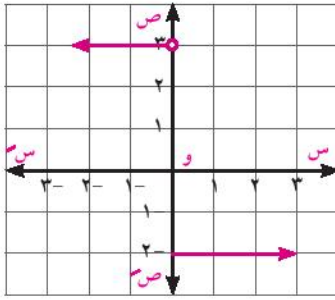
لاحظ أن



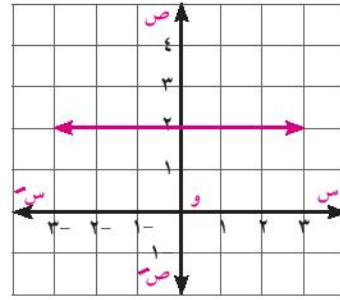
فى الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = $[ب, أ]$

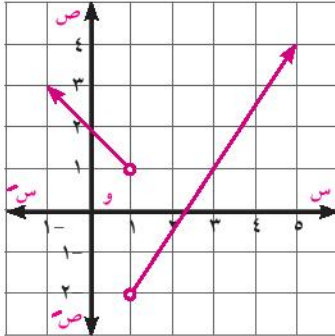
مدى الدالة = $[ج, د]$



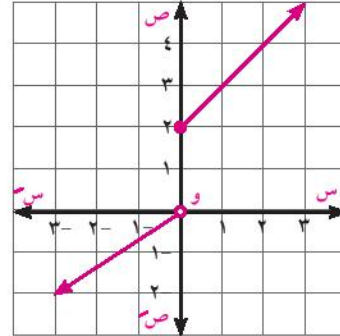
ب



أ



د



ج

تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

Determining Domains

تعيين مجال الدالة

مثال

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

ب $\sqrt{3-s} = f(s)$

أ $\frac{s+3}{s^2-9} = f(s)$

ج $\sqrt{s-5} = f(s)$

الحل

أ الدالة f تكون غير معرفة عندما يكون المقام $= 0$ لذلك نضع $s^2 - 9 = 0$ أي $s = \pm 3$ وعليه يكون مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$



ب مجال الدالة f هو جميع قيم s التي تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعي موجباً أو صفراً، أي قيم s التي تجعل $s - 3 \geq 0$.
 $\therefore s - 3 \geq 0 \Rightarrow s \geq 3$.
 $\therefore$ مجال $f = [3, \infty)$

ج $f(s) = \sqrt{s-5}$ ، دليل الجذر عدد فردي مجال $f = \mathbb{R}$

وعليه فإن مجال f هو $[-5, \infty)$

الخط:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[n]{n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، $n < 1$ ، ر(س) كثيرة حدود

أولاً: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانياً: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط $r(s) \leq 0$.

٩ حاول أن تحل

٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) $\frac{3+s^2}{2+s^3-s^2} = د(س)$ ب) $\sqrt{2-s} = د(س)$ ج) $\sqrt{5-s} = د(س)$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث $د(س) = \frac{2}{s^2-6s+9}$ هو ع - {٣} أوجد قيمة ك.

نشاط

Operations on Functions

العمليات على الدوال

إذا كانت د_١، د_٢ دالتين مجالاها م_١، م_٢ على الترتيب، فإن:

- ١ $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$
- ٢ $(د_١ \cdot د_٢)(س) = د_١(س) \cdot د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \cdot د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$
- ٣ $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq 0$ مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ هو $(م_١ \cap م_٢) - ف(د_٢)$ حيث ف(د_٢) مجموعة أصفار د_٢

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى د_١، د_٢ باستثناء القيم التى تجعل د_٢(س) = ٠ فى عملية القسمة.

إذا كان د_١ : ع ← ع حيث د_١(س) = ٣ - س - ١

د_٢ : [٢، ٣] ← ع حث د_٢(س) = س - ٣

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ) $(د_١ + د_٢)$ ب) $(د_١ - د_٢)$ ج) $(د_١ \cdot د_٢)$ د) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$

ثانياً: احسب القيمة العددية - إن امكن ذلك - لكل من:

أ) $(د_١ + د_٢)(٣)$ ب) $(د_١ - د_٢)(٣)$ ج) $(د_١ \cdot د_٢)(٣)$ د) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(٣)$

هـ) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(٤)$ و) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(١)$

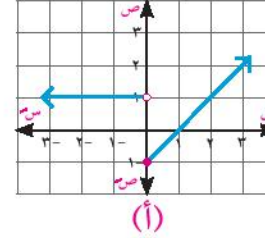
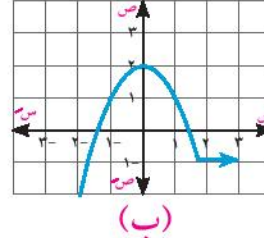
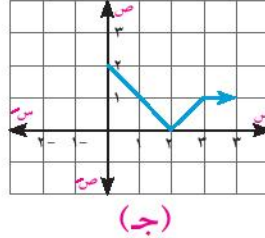
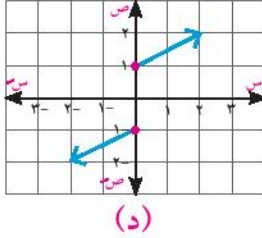


تمارين ١ - ١



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) أي من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة في S :

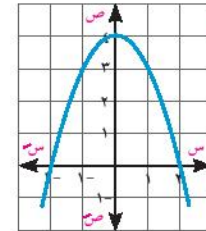
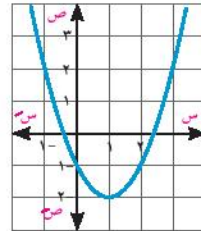
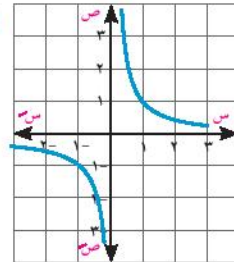
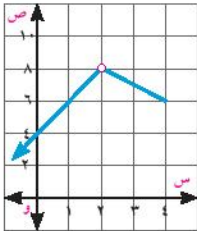


أجب عن ما يأتي:

٢) إذا كانت $D: S \rightarrow \{1, 2, 3\}$ وكان $S = \{1, 2, 3\}$ وكان $D(1) = 3$ ، $D(2) = 2$ ، $D(3) = 1$ ، أوجد مدى الدالة إذا كان $D(3) = 5$ - ٣

٣) إذا كانت $S: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow S$ حيث $S(1) = 2$ ، $S(2) = 3$ ، $S(3) = 4$ ، $S(4) = 5$ ، $S(5) = 1$ ، اكتب مدى الدالة

٤) استنتج من الشكل البياني مجال الدالة ومداها في كل مما يأتي:



٥) حدد مجال الدالة D حيث $D(S) = \begin{cases} S-1 & \text{عندما } S > 2 \\ S-2 & \text{عندما } S \leq 2 \end{cases}$

ثم ارسم الشكل البياني للدالة، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٦) ارسم الشكل البياني للدالة D حيث:

$D(S) = \begin{cases} S+3 & \text{عندما } S \leq 2 \\ S-1 & \text{عندما } S > 2 \end{cases}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٧) إذا كانت $D(S) = \begin{cases} S+3 & \text{عندما } S > 2 \\ S-1 & \text{عندما } S \leq 2 \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة D ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

$$8 \text{ إذا كانت د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} + 1 \text{ عندما } -3 \leq \text{س} < 0 \\ \text{س} + 2 \text{ عندما } 0 \leq \text{س} < 3 \end{array} \right\}$$

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

$$9 \text{ إذا كان: د(س) = } \left. \begin{array}{l} -\text{س}^4 + 3 \text{ عندما } \text{س} > 3 \\ -\text{س}^2 \text{ عندما } 3 \geq \text{س} \geq 8 \\ 3\text{س}^2 + 1 \text{ عندما } \text{س} < 8 \end{array} \right\}$$

أوجد:

أ د(٢) ب د(٣) ج د(١٠)

١٠ الربط بالتجارة: تمثل الدالة د، حيث:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{3}\text{س} \text{ عندما } 0 < \text{س} < 5000 \\ 2\text{س} + 2500 \text{ عندما } 5000 < \text{س} < 15000 \\ \frac{3}{4}\text{س} + 10000 \text{ عندما } 15000 < \text{س} < 60000 \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

المبلغ بالجنيه الذي تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربائية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠) ب د(١٠٠٠٠) ج د(٥٠٠٠٠)

١١ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ د(س) = $\frac{\text{س} + 3}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$ ب د(س) = $\frac{\text{س} + 1}{\text{س} + 3}$

ج د(س) = $\sqrt{2 - \text{س}}$ د د(س) = $\sqrt{4 - \text{س}}$

Monotonicity of Functions

سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية

- اطراد. Monotony
- دالة تزايدية. Increasing Function
- دالة تناقصية. Decreasing Function
- دالة ثابتة. Constant Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

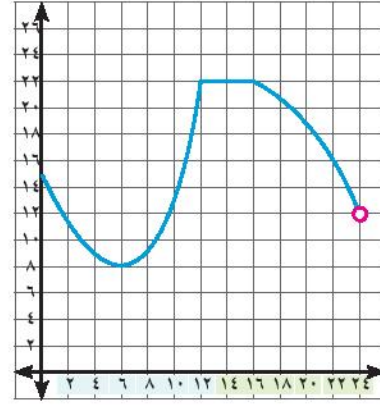
فكر و ناقش



يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة في أحد الأيام ، لاحظ التغير في درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

- فترات تناقص درجات الحرارة.
- فترات تزايد درجات الحرارة.
- فترات ثبات درجات الحرارة.

درجات الحرارة (°C)



الزمن

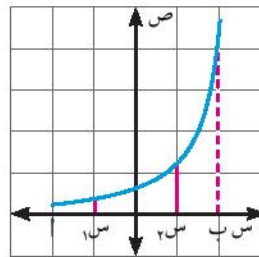
تساعدنا صفات منحنيات الدوال في معرفة سلوك الدالة د و تحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو ما يعرف باطراد الدالة.

تعلم



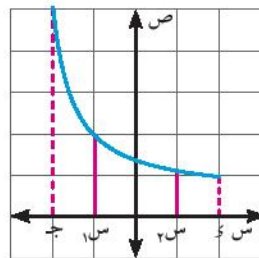
تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها **تزايدية** في الفترة [ا، ب] إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [ا، ب]$ حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $d(s_1) < d(s_2)$



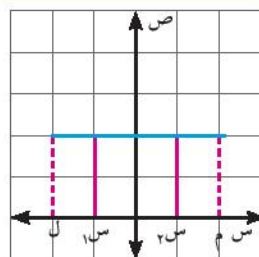
تناقص الدالة:

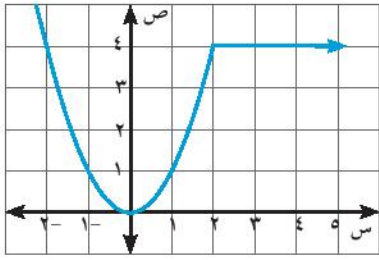
يقال للدالة د أنها **تناقصية** في الفترة [ج، د] إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [ج، د]$ حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $d(s_1) > d(s_2)$



ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها **ثابتة** في الفترة [ل، م] إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [ل، م]$ حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $d(s_1) = d(s_2)$





مثال

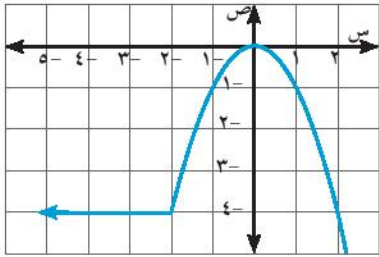
١ ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

الحل

الدالة تناقصية في الفترة $[-\infty, 0]$

الدالة تزايدية في الفترة $[0, 2]$

الدالة ثابتة في الفترة $[2, \infty]$



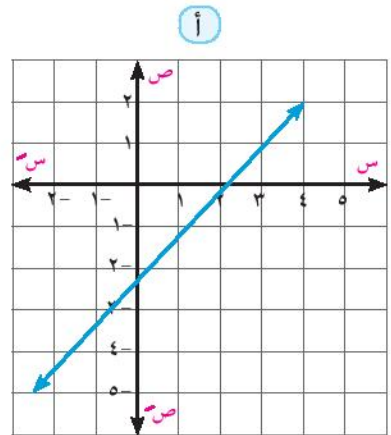
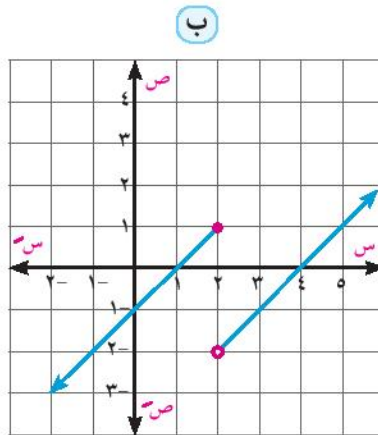
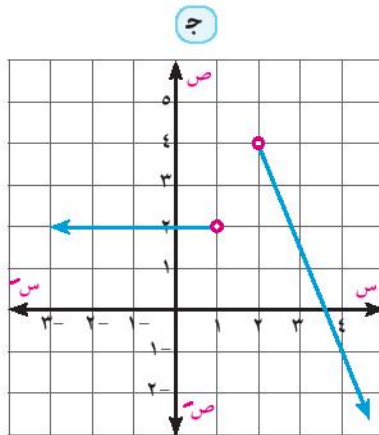
٢ حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل:

ابحث الفترات التي تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التي تكون فيها تناقصية، والفترات التي تكون فيها ثابتة.

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ← ص، استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة، وابحث اطرادها.



الحل

أ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

ب مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

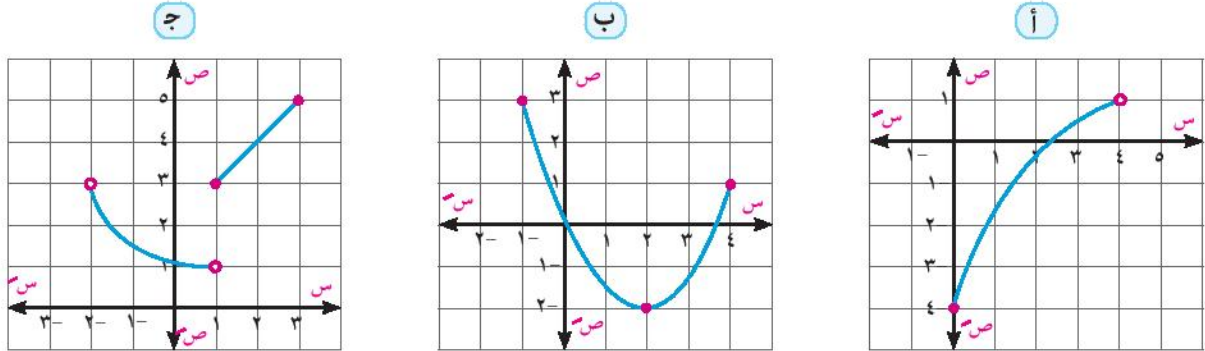
ج مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

ج مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

الدالة ثابتة في $[-\infty, \infty]$ ، وتناقصية في $[-\infty, \infty]$

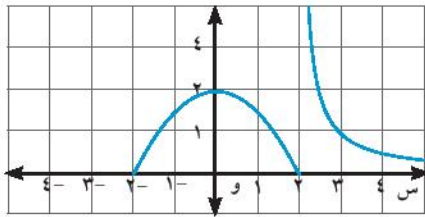
٤ حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

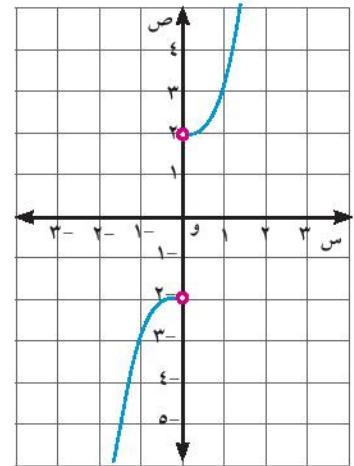


تمارين ١ - ٢

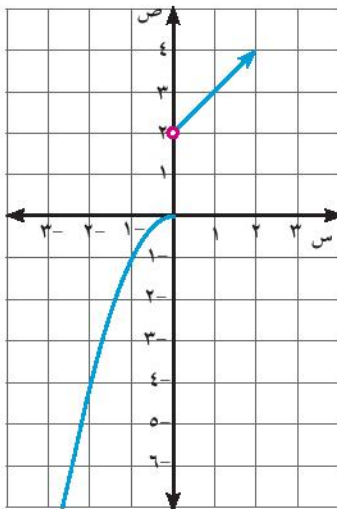
١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الاطراد:



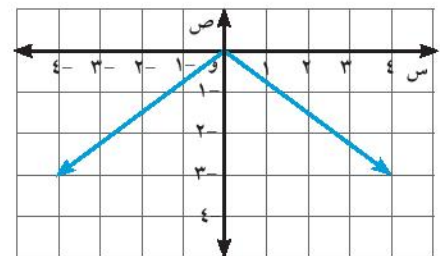
شكل (٢)



شكل (١)

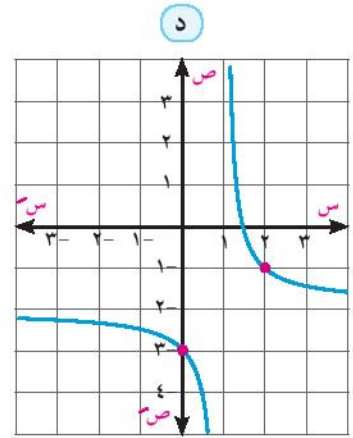
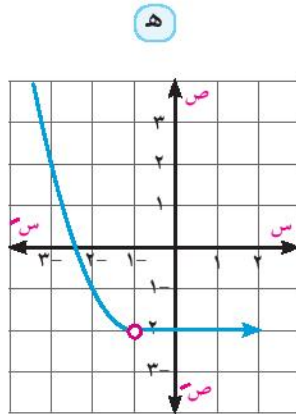
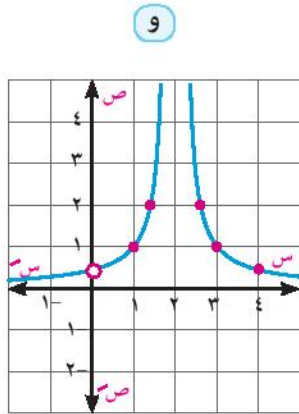
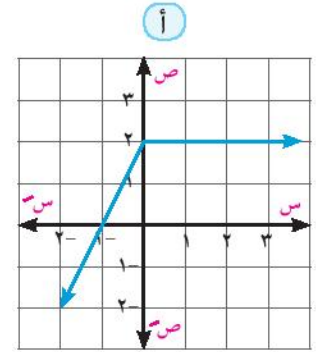
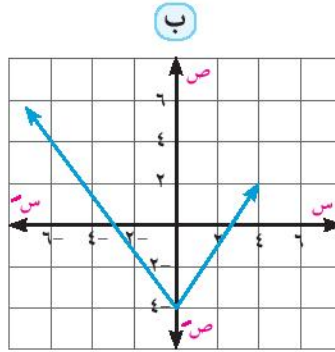
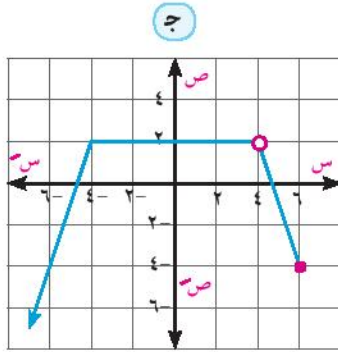


شكل (٤)



شكل (٣)

٢ حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية، ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرافها.



٣ إذا كانت د: $[-2, 6]$ ← ع

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -2 \leq x \leq 4 \\ \text{عندما } 4 \leq x \leq 6 \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرافها.

Even and Odd Functions

سوف تتعلم

- التمائل في منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.

المصطلحات الأساسية

- Symmetry تماثل
- Even Function دالة زوجية
- Odd Function دالة فردية

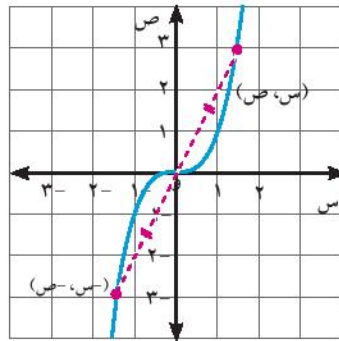
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

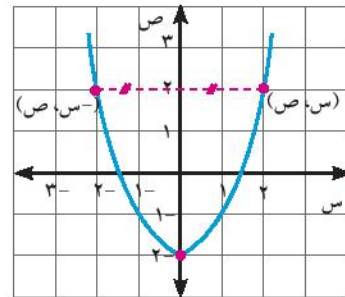
قد يتميز الشكل البياني للدالة $y = f(x)$ بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، ويمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها، وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصف المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل:



التمائل حول محور نقطة الأصل.
شكل (٢)



التمائل حول محور الصادات
شكل (١)

في شكل (١):

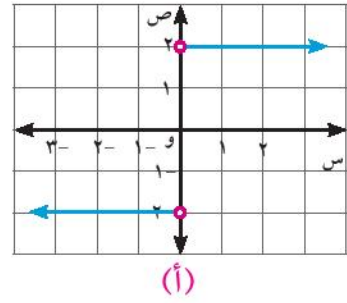
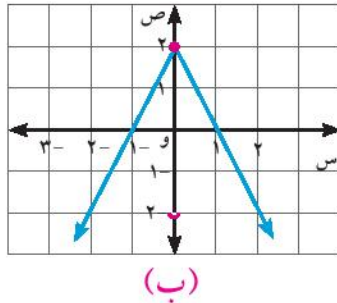
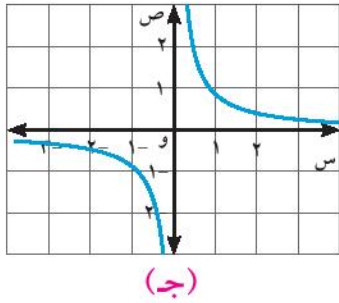
تكون النقطة $(-x, y)$ الواقعة على الشكل البياني لمنحنى الدالة هي صورة النقطة (x, y) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

في شكل (٢):

يوضح الشكل البياني للعلاقة بين x ، y تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة $(-x, -y)$ هي صورة النقطة (x, y) الواقعة على نفس المنحنى.

٤ حاول أن تحل

١ في كل شكل من الأشكال الآتية بين المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



تفكير ناقذ:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

Even and Odd Functions

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

تعلم



الدالة الزوجية: يقال للدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in S$ ، ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلاً حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in S$ ، ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية.

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء العنصرين x ، $-x$ إلى مجال الدالة، وإذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد $f(-x)$.

مثال

١) ابحث نوع الدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ) $f(x) = x^2$ ب) $f(x) = x^3$ ج) $f(x) = \sqrt{x+3}$ د) $f(x) = x^2 + x$

الحل

أ) $f(x) = x^2$ ، مجال $D = \mathbb{R}$

∴ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ، يكون: $f(x) = x^2$ دالة زوجية.

أي أن: $f(-x) = f(x)$

ب) $f(x) = x^3$ ، مجال $D = \mathbb{R}$

∴ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ، يكون: $f(x) = x^3$ دالة فردية.

أي أن: $f(-x) = -f(x)$

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in S$ ، وتكون الدالة زوجية عندما n عدد زوجي، فردية عندما n عدد فردي.

تذكر أن

جا (-س) = -جا س
جتا (-س) = جتا س
ظا (-س) = -ظا س

ج د (س) = $\sqrt{s+3}$ ، مجال د = $[-3, \infty]$

لاحظ أن $[-3, \infty] \ni 4$ بينما $[-3, \infty] \not\ni 4$

الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د (س) = جتا س ، مجال د = ع

لكل س ، -س $\ni$ ع يكون:

د (-س) = جتا (-س) = جتا س

أي أن: د (-س) = د (س) د دالة زوجية

٤ حاول أن تحل

٢ ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

ج د (س) = س^٣ - جا س

ب د (س) = س^٢ + جتا س

أ د (س) = جا س

و د (س) = س^٣ جتا س

هـ د (س) = س^٣ جا س

د د (س) = س^٢ جتا س

ط د (س) = جا س جتا س

ح د (س) = جا س + حتا س

ز د (س) = س^٢ + س^٣

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د_١ ، د_٢ دالة زوجية ، وكان كل من: ر_١ ، ر_٢ دالة فردية ، فإن:

(١) د_١ + د_٢ دالة زوجية

(٢) ر_١ + ر_٢ دالة فردية.

(٣) د_١ × د_٢ دالة زوجية

(٤) ر_١ × ر_٢ دالة زوجية.

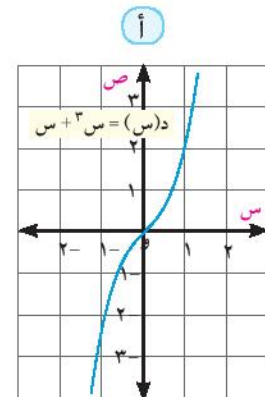
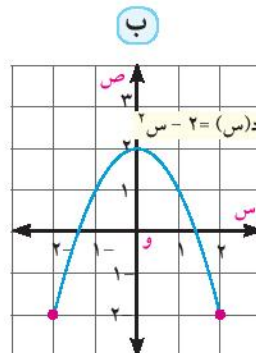
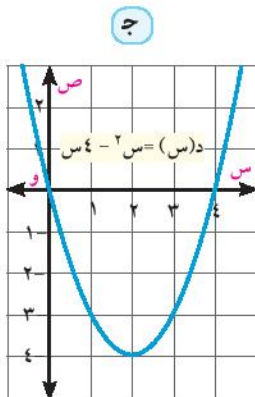
(٥) د_١ × ر_٢ دالة فردية

(٦) د_١ + ر_٢ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك في بند حاول أن تحل (٢)

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبرياً.



الحل

أ) د (س) = س³ + س، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
 مجال د = ع، منحني الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ أي أن الدالة فردية
 ∴ كل س، -س ∈ ع ∴ د (-س) = (س-)³ + (س-) = - (س³ + س) = - د (س)
 بالتبسيط:
 نأخذ (١-) عاملاً مشتركاً
 د (-س) = - (س³ + س) = - د (س)

أي أن الدالة فردية.

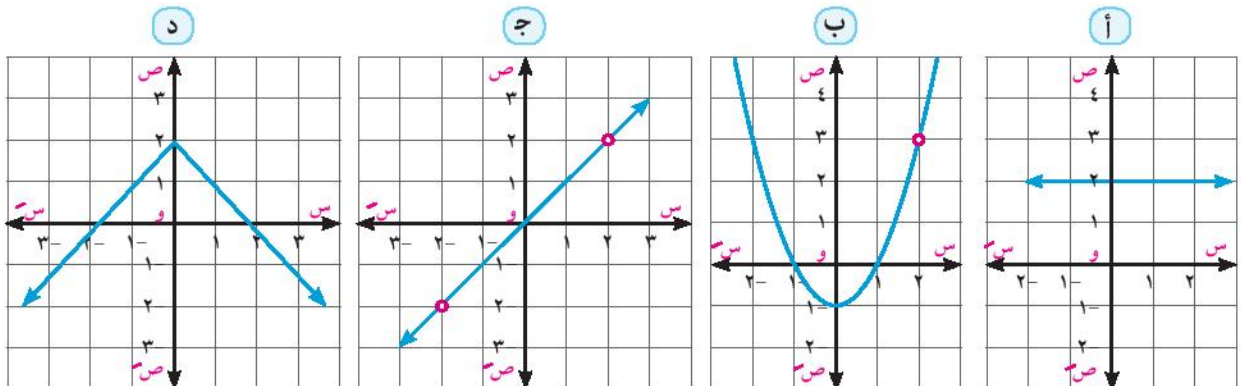
ب) د (س) = س² - ٢، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن
 مجال د = [-٢، ٢]، ومنحني الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية
 ∴ كل س، -س ∈ [-٢، ٢] ∴ د (-س) = (-س)² - ٢ = س² - ٢ = د (س)
 بالتبسيط:
 د (-س) = د (س) أي أن الدالة زوجية

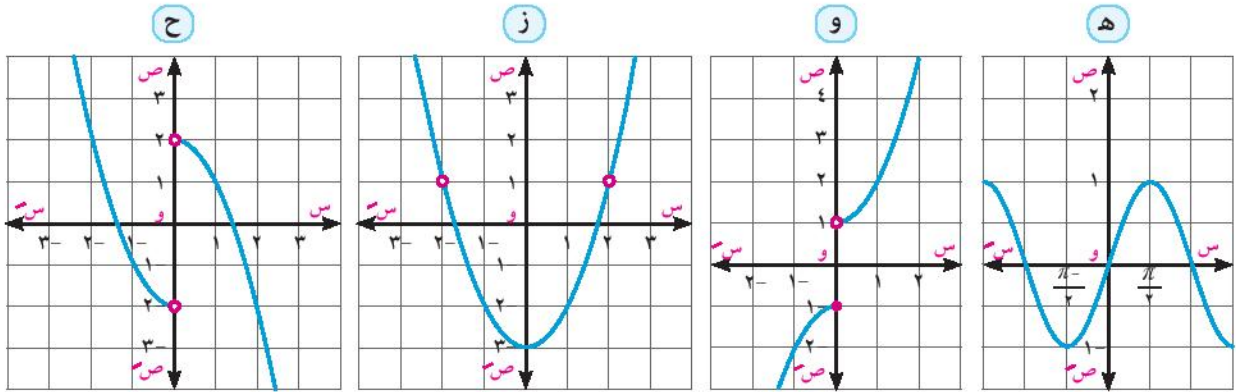
ج) د (س) = س² - ٤، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
 مجال د = ع، ومنحني الدالة ليس متماثلاً حول محور الصادات، وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل؛
 أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∴ كل س، -س ∈ ع ∴ د (-س) = (-س)² - ٤ = س² - ٤ = د (س) ∴ د ليست زوجية
 بالتبسيط:
 ولكن
 لذلك فإن
 أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٤) حاول أن تحل

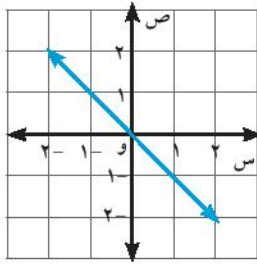
٢) اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



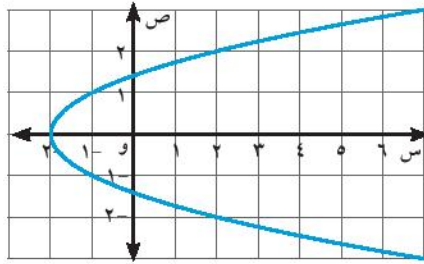


تمارين ١ - ٣

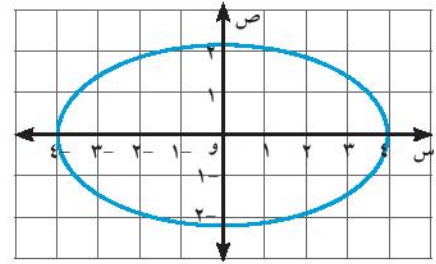
١ اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسر إجابتك.



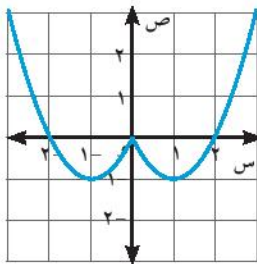
شكل (٣)



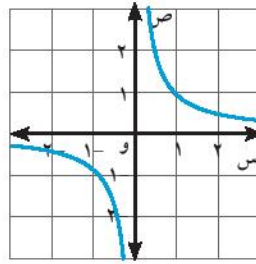
شكل (٢)



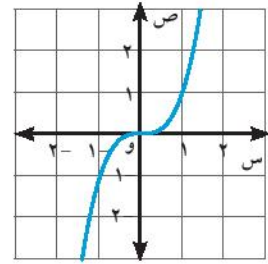
شكل (١)



شكل (٦)

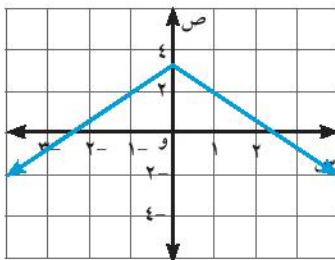


شكل (٥)

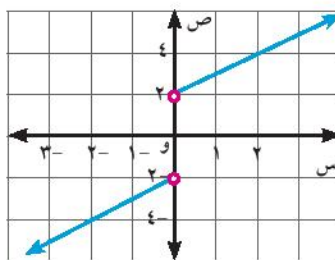


شكل (٤)

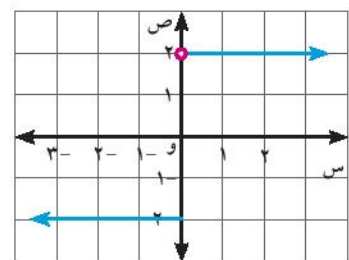
٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



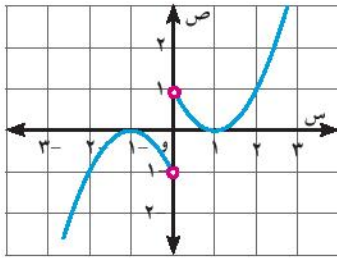
شكل (ج)



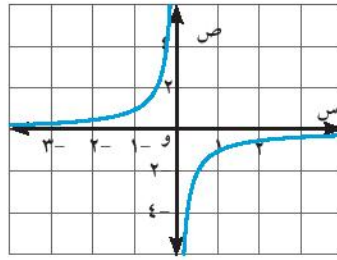
شكل (ب)



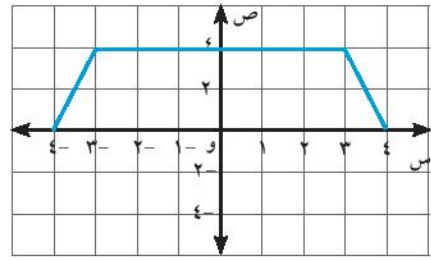
شكل (أ)



شكل (و)



شكل (هـ)



شكل (د)

٢) ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ) د(س) = س^٤ + س^٢ - ١

ب) د(س) = س^٣ - س^٤

ج) د(س) = ٥

د) د(س) = س^٣ - ٢

هـ) د(س) = $\frac{٢ + س^٢}{٣ - س}$

و) د(س) = س حتا س

٤) إذا كانت د_١، د_٢، د_٣ دوال حقيقية حيث د_١(س) = س^٥، د_٢(س) = حاس، د_٣(س) = س^٢،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك.

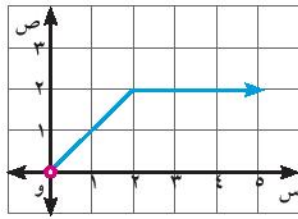
أ) د_١ + د_٢

ب) د_١ + د_٣

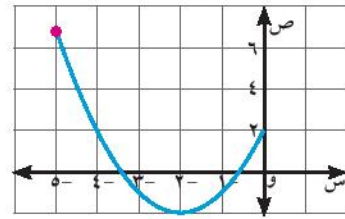
ج) د_١ × د_٢

د) د_٢ × د_٣

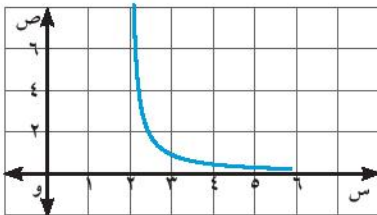
٥) أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



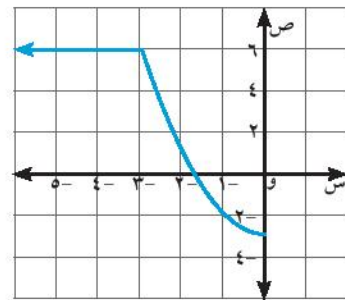
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

أولاً: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانياً: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثاً: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة ثم ابحث اطرادها.

سوف تتعلم

- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية - الدالة التربيعية - الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة في رسم المنحنيات
- ص = د(س) + أ
- ص = د(س) + أ
- ص = د(س) + ب
- ص = - د(س)
- ص = أ د(س)
- ص = أ د(س) + ب + ج
- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- تحويل. Transformation
- انتقال. Translation
- انعكاس. Reflection
- رأسي Vertical
- أفقي Horizontal
- خط تقارب Asymptotes

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

Polynomial Functions

الدالة كثيرة الحدود

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التي قاعدتها على الصورة:

$$د(س) = أ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + + أ_٣ س^٣$$

حيث: أ، أ_١، أ_٢،، أ_٣، أ_٣ ≠ ٠، س ∈ ط

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هي أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

لاحظ:

- ١- إذا كان د(س) = أ، أ ≠ ٠ فإن د تسمى كثيرة الحدود الثابتة.
- ٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالاً خطية، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالاً تربيعية، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالاً تكعيبية.
- ٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت، نحصل على دالة كثيرة الحدود.
- ٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

Graphs of Functions

رسم منحنيات الدوال

Polynomial Functions

أولاً: دوال كثيرة الحدود

تعلم

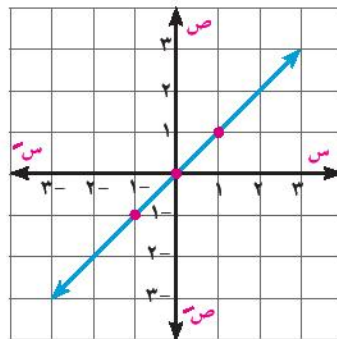


فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود::

١) دالة خطية أبسط صورة لها هي:

$$د(س) = س$$

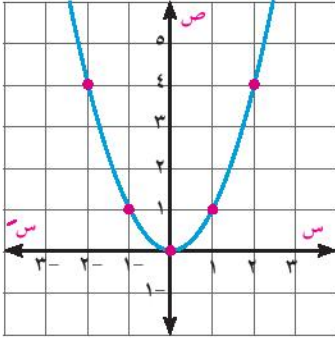
وهي دالة د ترفق العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١ (تحقق من: مدى د = ع، د فردية، د تزايدية في ع)



(٢) دالة تربيعية ، أبسط صورة لها هي :

$$د(س) = س^2$$

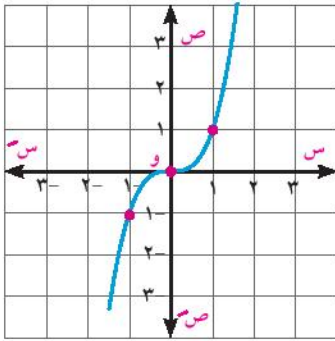
وهي دالة ترفق العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات، ونقطة رأس المنحنى هي (٠، ٠)
(تحقق من: مدى $د = ع$ ، زوجية، تناقصية في $[-\infty, ٠]$ ،
تزايدية في $[٠, \infty]$)



(٣) دالة تكعيبية ، أبسط صورة لها هي :

$$د(س) = س^3$$

وهي دالة ترفق العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هي (٠، ٠)
(تحقق من: مدى $د = ع$ ، فردية، د تزايدية في $ع$)

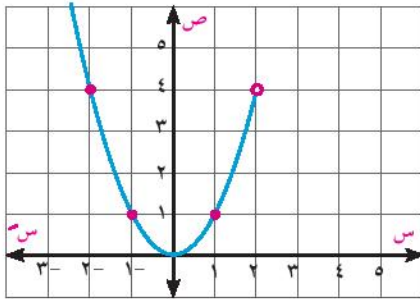


مثال

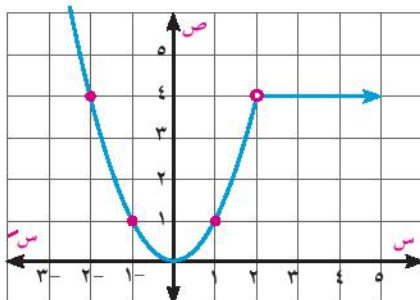
١ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^2 & \text{عندما } س > ٢ \\ س^4 & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$

الحل



شكل (١)



شكل (٢)

(١) عندما $س > ٢$ ، $د(س) = س^2$

نرسم $د(س) = س^2$ لكل $س \in [-٢, \infty]$

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما في شكل (١)

(٢) عندما $س < ٢$ ، $د(س) = س^4$

ترسم الدالة الثابتة $د(س) = ٤$ لكل $س \in [٢, \infty]$

على نفس الشكل البياني كما في شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة $د = ع - \{٢\}$ ، ومدى $د = [٠, \infty]$

٩ حاول أن تحل

١ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^2 & \text{عندما } س > 0 \\ س & \text{عندما } س \leq 0 \end{cases}$$

ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

تعلم

The Absolute Value Function

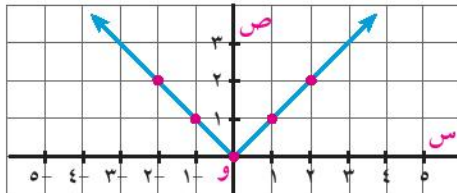
دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة):

أبسط صورة لدالة المقياس هي

$$د(س) = |س| ، س \in \mathbb{R}$$

وتعرف كما يلي:

$$د(س) = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geq 0 \\ -س & \text{عندما } س < 0 \end{cases}$$

لاحظ أن: $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2}$ ، $0 = |0|$ ، $3 = |3| = |-3|$ أي أن: $|س| = \sqrt{س^2}$ ، $|س| = |-س|$ ، $0 \leq |س|$

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأان من النقطة (0,0) ميل أحدهما = 1 ، وميل الآخر = -1

(تحقق من: مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، زوجية ، د تناقصية في $[-\infty, 0]$ ، وتزايدية في $[0, \infty]$)

تعلم

Rational Function الدالة الكسرية

أبسط صورة للدالة الكسرية هي:

$$د(س) = \frac{1}{س} ، س \in \mathbb{R} - \{0\}$$



وهي دالة تفرق العدد بمعكوسه الضربي ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله (0,0) ويتكون من جزئين أحدهما يقع في الربع الأول والآخر يقع في الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولا يقطعهما (س = 0 ، ص = 0 خطا تقارب للمنحنى)

(تحقق من: مدى د = $\mathbb{R} - \{0\}$ ، فردية ، د تناقصية في $[-\infty, 0]$ ،وتناقصية أيضًا في $[0, \infty]$)

Transformations of Graphs

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

Vertical Translation

أولاً: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

عمل تعاوني



اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: (س) = س^٢

باستخدام برنامج Geogebra

٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحب رأساً لأعلى وحدة واحدة، ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبّر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^٢ + ١ كما في شكل (١).

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٢، ٠)، (٣، ٠) وسجل ملاحظتك في كل مرة.

٤) اسحب منحنى د(س) = س^٢ وحدتين رأسياً إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبّر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^٢ - ٢ كما في شكل (٢).

فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^٢ - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^٢

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^٢، ر(س) = س^٢ + ١، ق(س) = س^٢ - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

تفكير ناقذ: باستخدام منحنى د(س) = س^٢ بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^٢ + ٤

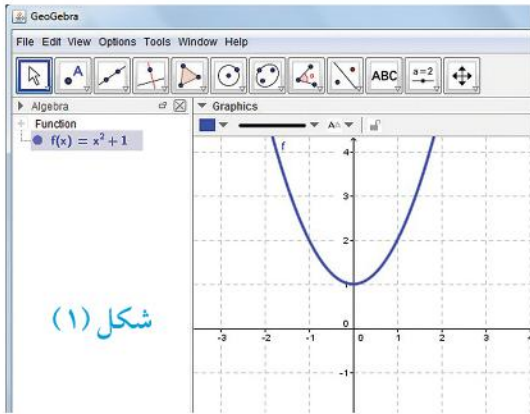
ب) ق(س) = س^٢ - ٥

تعلم

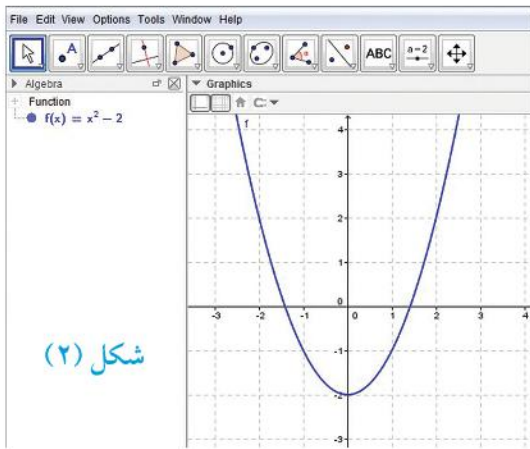


رسم المنحنى ص = د(س) + أ

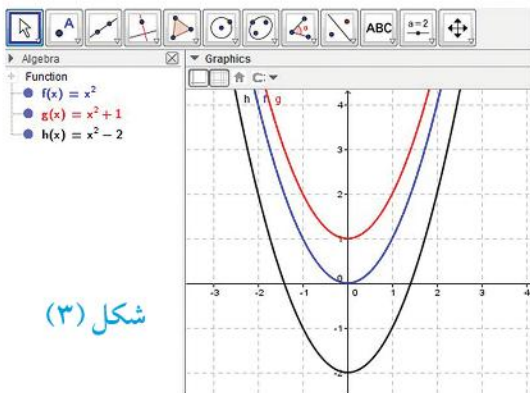
لأي دالة د: يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات في اتجاه و ص ، عندما أ < ٠ ، وفي اتجاه و ص ← عندما أ > ٠ .



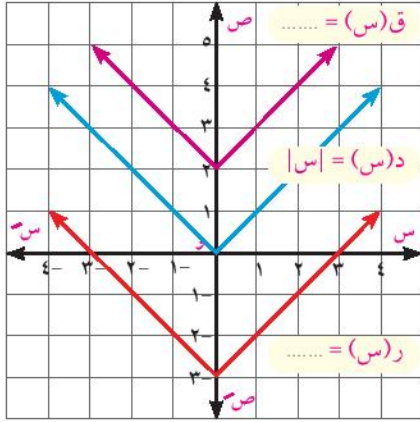
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



مثال

٢) يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق، حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية اكتب قاعدة كل من ر، ق

الحل

∴ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و ←

$$ر(س) = د(س) - ٣$$

$$∴ د(س) = |س| \quad ر(س) = |س| - ٣$$

∴ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ←

$$ق(س) = د(س) + ٢ \quad ∴ د(س) = |س| \quad ق(س) = |س| + ٢$$

Horizontal Translation

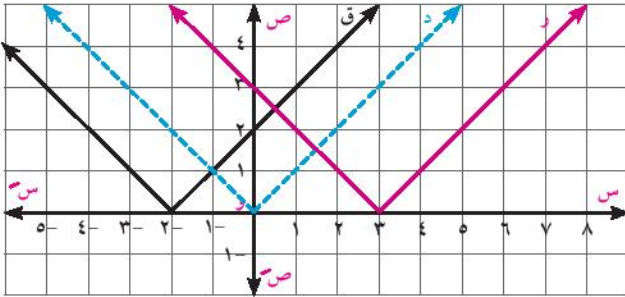
ثانياً: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

تعلم



رسم المنحنى ص = د(س + أ)

لأي دالة د؛ يكون المنحنى، ص = د(س + أ) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات في اتجاه و ← عندما يكون أ > ٠، وفي اتجاه و ← عندما يكون أ < ٠.



للحظ: في الشكل المقابل: د(س) = |س|

١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و ←

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٠، ٣)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى

الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ←

∴ ق(س) = |س + ٢|، نقطة بدء الشعاعين (٠، ٢-)

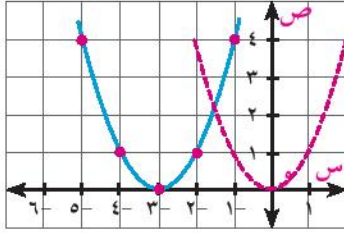
مثال

٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

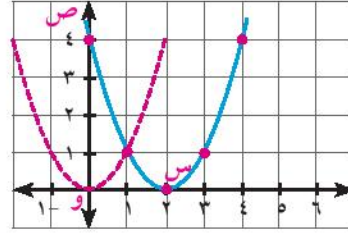
أ) ر(س) = (س - ٢)^٢

ب) ع(س) = (س + ٣)^٢

الحل



ب



أ

منحنى ع (س) = (س + 3)² هو منحنى

د (س) = س² بإزاحة 3 وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (0، -3).

منحنى ر (س) = (س - 2)² هو منحنى

د (س) = س² بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هي (2، 0).

٤ حاول أن تحل

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س² لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

ب ع (س) = (س - 3)²

أ ر (س) = (س + 4)²

تفكير ناقذ: إذا كان د (س) = س²، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر (س) = (س - 3)² + 2

رسم المنحنى ص = د (س + 1) + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د (س + 1) + ب هو نفس منحنى ص = د (س) بإزاحة أفقية قدرها 1 من الوحدات

(في اتجاه وس ← عندما 1 > 0، وفي اتجاه وس → عندما 1 < 0)، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات

(في اتجاه وص ← عندما ب < 0، وفي اتجاه وص → عندما ب > 0)

٤ حاول أن تحل

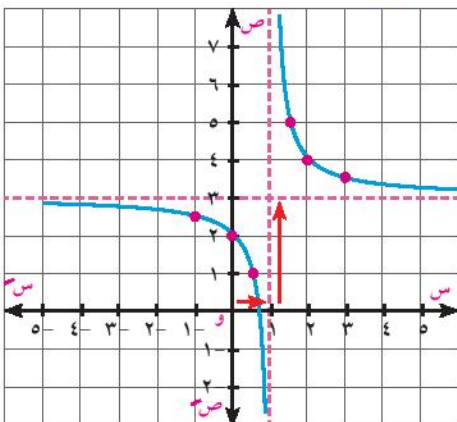
٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س² لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

ب ع (س) = (س - 3)² - 1

أ ر (س) = (س + 2)² - 4

مثال

تطبيق التحويلات الهندسية على رسم منحنيات الدوال



٤ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر (س) = 3 + 1/(1 - س)

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرافها:

الحل

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د (س) = 1/س بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه وس ← (1 = 1 - 0 > 0)،

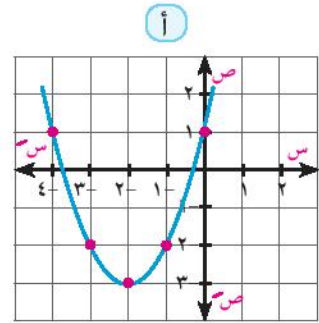
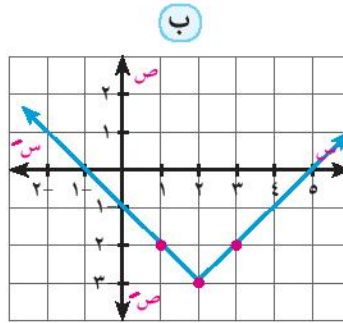
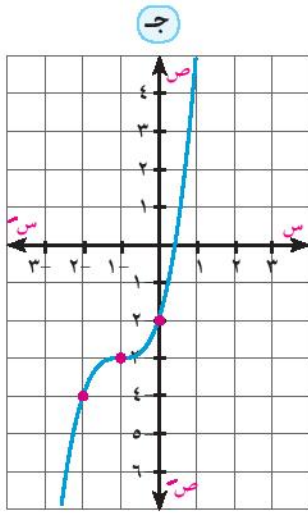
ثم إزاحة قدرها 3 وحدات في اتجاه وص ← وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هي النقطة (1، 3)، مدى ر = ع - {3}

اطراد الدالة ر:

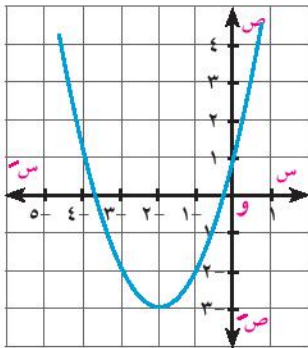
ر تناقصية في $[-\infty, 1]$ ، وتناقصية أيضًا في $[1, \infty]$ **تفكير ناقد:** هل يمكن القول بأن د(س) = $3 + \frac{1}{2-s}$ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.**٤** حاول أن تحل**٤** استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ ، لتمثيل كل من:

$$\text{أ) د(س) = } 1 + \frac{1}{2+s} \quad \text{ب) ق(س) = } \frac{2-s}{2-s}$$

٥ اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :**ملاحظة :** يمكن رسم منحنى د(س) = $س^2 + ٤س + ١$ باستخدام الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية للمنحنى ر(س) = $س^2$ كما يلي.د(س) = $س^2 + ٤س + ١$ باكمال المربع

$$= (س^2 + ٤س + ٤) - ٣$$

$$= (س + ٢)^2 - ٣$$

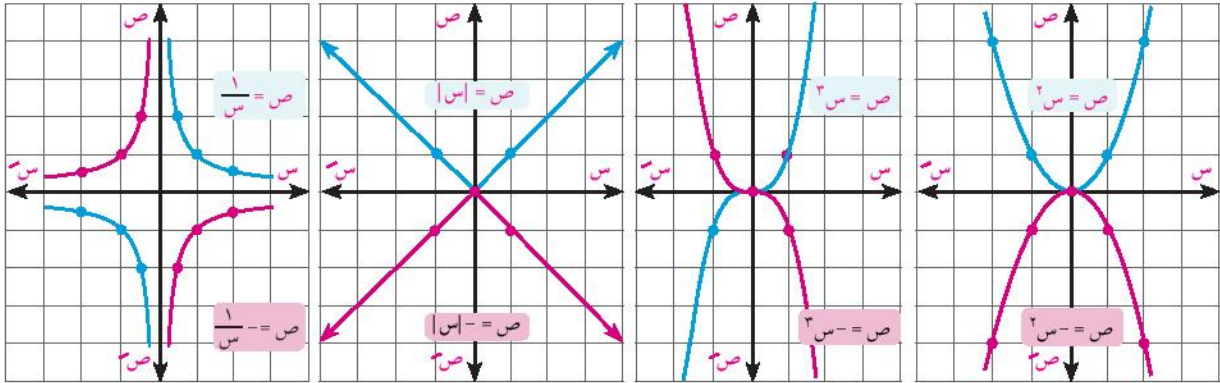


٣	٣	س ^٢
١	١	س
١	١	س

أي أن منحنى الدالة د (المعطاة) هو نفس منحنى الدالة ر حيثحيث ر(س) = $س^2$ بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overrightarrow{OS}$ ، ثم٣ وحدات في اتجاه $\overrightarrow{OS}$ ويمثله الرسم المقابل.**تطبيق:** ارسم منحنى د(س) = $س^2 + ٦س + ٧$ باستخدام الإزاحةالأفقية والإزاحة الرأسية لمنحنى ر(س) = $س^2$ ثم ابحث اطراد الدالة د.

ثالثاً: انعكاس منحنى الدالة في محور السينات

تبين الأشكال التالية انعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية في محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج ؟

تعلم



رسم المنحنى $y = -f(x)$ (د) س

لأي دالة د، يكون المنحنى $y = -f(x)$ هو نفس منحنى $y = f(x)$ بانعكاس في محور السينات

مثال

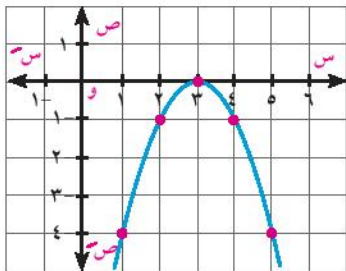
تطبيق التحويلات الهندسية على رسم المنحنيات

٥ باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر، ق، ع حيث:

ب) ق (س) $= |س| - ٤$

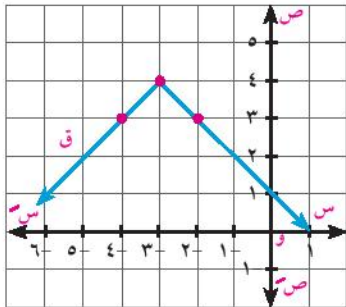
أ) ر (س) $= -(س - ٣)^٢$

ج) ع (س) $= ٢ - \frac{١}{٣-س}$

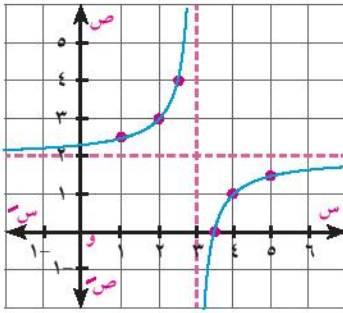


الحل

أ) منحنى ر (س) هو انعكاس لمنحنى د (س) $y = (س - ٣)^٢$ في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\leftarrow$ وس، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.



ب) منحنى ق (س) هو انعكاس لمنحنى د (س) $y = |س|$ في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\leftarrow$ وس، وإزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات في اتجاه $\leftarrow$ ص، وتكون نقطة بدء الشعاعين هي النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



- ج) منحنى ع (س) هو انعكاس لمنحنى د (س) = $\frac{1}{س}$ في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{وص}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هي (٢، ٣)

٩ حاول أن تحل

- ٦) في كل مما يأتي ارسم منحنى الدالة ر حيث:

- أ) ر (س) = $٣ - (١ + س)^٢$ ب) ر (س) = $-(٣ - س)^٢$ ج) ر (س) = $٣ - |س - ٥|$
ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

تمارين ١ - ٤

- ١) ارسم منحنى الدالة د، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرافها

- أ) د (س) = $\begin{cases} |س| & \text{عندما } س > ٠ \\ س^٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ب) د (س) = $\begin{cases} ٤ & \text{عندما } س > ٢ \\ س^٢ & \text{عندما } س \leq ٢ \end{cases}$
ج) د (س) = $\begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س > ١ \\ ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٢) منحنى ر (س) = $س^٢ + ٤$ هو نفس منحنى د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:
أ) $\overleftarrow{وس}$ ب) $\overleftarrow{وس}$ ج) $\overleftarrow{وص}$ د) $\overleftarrow{وص}$

- ٣) منحنى ر (س) = $|س + ٣|$ هو نفس منحنى د (س) = $|س|$ بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:
أ) $\overleftarrow{وس}$ ب) $\overleftarrow{وس}$ ج) $\overleftarrow{وص}$ د) $\overleftarrow{وص}$

- ٤) نقطة رأس منحنى الدالة د (س) = $(٢ - س)^٢ + ٣$ هي:

- أ) (٣، ٢) ب) (٣، -٢) ج) (٢، -٣) د) (٢، -٣)

٥ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٢ - (س + ١)² هي :

- أ (٢، ١) ب (٢، -١) ج (١، ٢) د (٢، -١)

٦ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{3-s} + ٤$ هي :

- أ (٢، -٤) ب (-٣، -٤) ج (٢، ٤) د (-٣، ٤)

أجب عن ما يأتي:

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س² لتمثيل ما يأتي بيانياً.

- أ د(س) = س² - ٤ ب د(س) = (س - ٣)² ج د(س) = (س - ١)² - ٢

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ د(س) = |س| + ١ ب د(س) = |س + ٢| ج د(س) = |س - ٣| - ٢

ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

٩ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س³. لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ د(س) = د(س) - ٣ ب د(س) = د(س) - ٢ ج د(س) = د(س) + ٣ + ٢

ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

١٠ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة د وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

- أ ق(س) = د(س) - ٣ ب ق(س) = د(س) + ٢ ج ق(س) = د(س) - ٢ + ٢

١١ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س² لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ د(س) = ٤ - س² ب د(س) = - (س - ٣)² ج د(س) = ٢ - (س + ٣)²

أولاً: حل المعادلات

فكر و ناقش

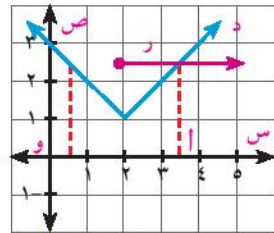


مثل بيانياً في شكل واحد منحنى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة ثابتة. لاحظ الرسم ثم اجب:

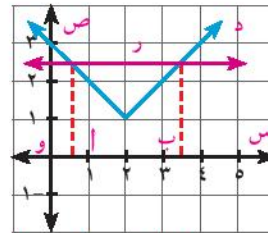
- ما عدد نقاط التقاطع المحتمل لمنحنى الدالتين معاً؟
- إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنين معاً، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين؟

لاحظ أن:

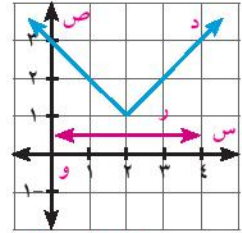
- عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: $D(s) = R(s)$ ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.
- لأي دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة $D(s) = R(s)$ هي مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



مجموعة الحل = {1}



مجموعة الحل = {1, 3}



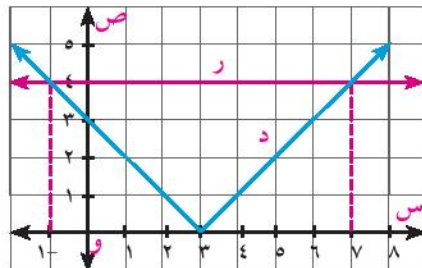
مجموعة الحل = ϕ

حل المعادلة: $|s + 3| = 4$

مثال

١ حل المعادلة: $|s - 3| = 4$ بيانياً وجبرياً.

الحل



بوضع $D(s) = |s - 3|$ ، $R(s) = 4$

١ نرسم منحنى الدالة د: $|s - 3|$

بإزاحة منحنى د: $|s|$ ثلاث

وحدات في اتجاه و س

٢ على نفس الشكل نرسم $R(s) = 4$ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازي

محور السينات ويمر بالنقطة $(4, 0)$

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانياً
- حل معادلات المقياس جبرياً
- حل متباينات المقياس بيانياً
- حل متباينات المقياس جبرياً
- نمذجة مشكلات وتطبيقات
- حياتية وحلها باستخدام
- معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية

- معادلة. Equation
- متباينة. Inequality
- حل بياني. Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

٠. المنحنيين يتقاطعان في النقطتين $(-1, 4)$ ، $(7, 4)$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{-1, 7\}$

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: $d(s) = \begin{cases} s-3 & \text{عندما } s \leq 3 \\ s+3 & \text{عندما } s > 3 \end{cases}$

عندما $s \leq 3$: $s-3=4$ أى أن: $s=7 \in]-\infty, 3]$
عندما $s > 3$: $s+3=4$ أى أن: $s=-1 \in]3, \infty[$
مجموعة حل المعادلة هي: $\{-1, 7\}$ وهذا يطابق الحل البياني.

٦ حاول أن تحل

١ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً وجبرياً.

ج $|s-7|=0$

ب $|s+1|=0$

أ $|s-4|=0$

Properties of the Absolute Value

بعض خواص مقياس العدد

تعلم

١ $|a| \times |b| = |a \times b|$ فمثلاً:

$6 = 3 \times 2 = |3| \times |2|$ ، $6 = |6| = |3 \times 2|$

٢ $|a| + |b| \geq |a+b|$

ويحدث التساوى فقط إذا كان العدداً a ، b لهما نفس الإشارة فمثلاً:

$9 = |5| + |4| = |5+4|$ ، $9 = |5-4| = |5-4|$

٣ $|a-s| = |s-a|$

الخط:

١ إذا كان: $|s|=a$ فإن: $s=a$ أو $s=-a$ لكل $a \geq 0$

٢ إذا كان: $|a|=|b|$ فإن: $a=b$ أو $a=-b$ لكل a, b

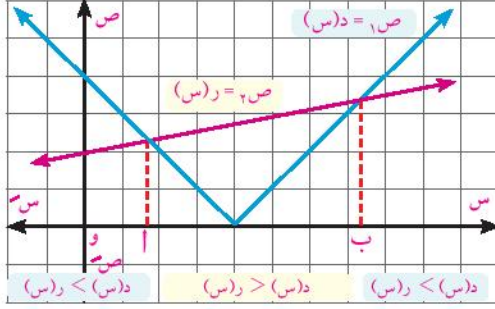
٣ $|s|^2 = |s|^2$

Solving the Inequalities

ثانياً: حل المتباينات

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: ($<$ ، $>$ ، $\leq$ ، $\geq$) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التي تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانياً



يبين الشكل المقابل منحني كل من الدالتين د، ر حيث:

ص = ١ د(س)، ص = ٢ ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة

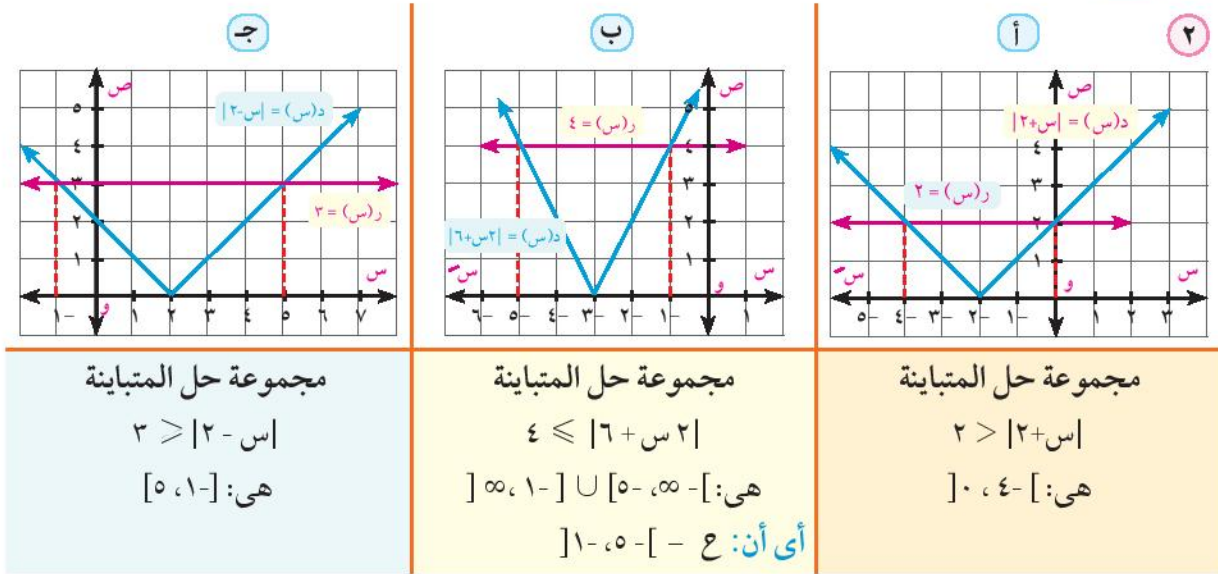
د(س) = ر(س) هي {أ، ب}

أي أن: ص = ١ ص = ٢ عندما س = أ أو س = ب

ويلاحظ: ص > ١ ص > ٢ أي د(س) > ر(س) عندما س ∈ [أ، ب]

ص < ١ ص < ٢ أي د(س) < ر(س) عندما س ∈]ب، ∞[، ∞، ب، ∞

مثال



٤ حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعيناً بالأشكال البيانية في مثال (٧):

ج $|س-٢| < ٣$

ب $|س+٦| > ٤$

أ $|س+٢| > ٢$

حل المتباينات جبرياً

تعلم

أولاً: إذا كان $|س| > أ$ ، $أ < ٠$ فإن: $س > -أ$ و $س < أ$

ثانياً: إذا كان $|س| \leq أ$ ، $أ < ٠$ فإن: $س \leq -أ$ أو $س \geq أ$

مثال

٢ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

$$|س - ٣| > ٤$$

الحل

$$\therefore |س - ٣| > ٤ \quad \text{أى} \quad ٤ - س > ٣ - ٤$$

$$\therefore ٣ + ٤ > ٣ + ٣ - س$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} =]٧, ١[$$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

$$\text{أ} \quad |س - ٧| > ١١ \quad \text{ب} \quad |٣س + ٧| > ٨$$

تطبيقات حياتية

مثال

الأرصاد الجوية

٤ قامت محطة الأرصاد الجوية بتسجيل درجة الحرارة على مدينة القاهرة فى يوم ما فكانت ٣٢° باختلاف ٧° عن معدلها الطبيعي فى ذلك اليوم . كم تكون درجة الحرارة المحتملة لمدينة القاهرة فى ذلك اليوم ؟

الحل

بفرض أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها على مدينة القاهرة فى هذا اليوم = س°

$$|س - ٣٢| = ٧ \quad \text{أى} \quad ٧ = س - ٣٢ \quad \text{أو} \quad ٧ = ٣٢ - س$$

$$\text{ويكون س} = ٣٩ = ٧ + ٣٢ \quad \text{أو} \quad س = ٢٥ = ٣٢ - ٧$$

أى أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها هى ٣٩° أو ٢٥°

تمارين الدرس الخامس

أكمل مايتأتى:

١ مجموعة حل المعادلة $|س| = \frac{1}{٢}$ هى

٢ مجموعة حل المعادلة $|س| + ٣ = ٠$ هى

٣ مجموعة حل المتباينة $|س - ٢| > ٠$ هى

تذكر أن

لكل من أ، ب، ج

إذا كان: أ > ب، ب > ج

فإن أ > ج

إذا كان: أ > ب فإن

أ + ج > ب + ج

أ ج > ب ج عند ج < ٠

أ ج < ب ج عند ج > ٠

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة مما يأتي:

- | | |
|---------------|---------------------|
| ٤ س - ٢ = ٣ | أ] ١ - ، ٥] |
| ٥ س - ٢ > ٣ | ب ع |
| ٦ س - ٢ < ٣ | ج { ١ - ، ٥ } |
| ٧ س - ٢ ≥ ٣ | د ع - [١ - ، ٥] |
| ٨ س - ٢ < ٣ | هـ ϕ |
| ٩ س - ٢ = ٣ | و] ١ - ، ٥] |

أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

- | | | |
|----------------|--------------------|----------------------|
| ١٠ س + ٣ = ٦ | ١١ ٥ = ٢ - س ٧ | ١٢ ٧ = ٣ - ٢ س |
|----------------|--------------------|----------------------|

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

- | | |
|----------------|--------------------|
| ١٣ س + ٤ = ٣ | ١٤ ٣ = ٥ - ٢ س |
|----------------|--------------------|

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

- | | | |
|----------------|------------------|------------------|
| ١٥ س - ١ > ٣ | ١٦ ٥ > ٢ - س | ١٧ ٢ < ٣ + س |
|----------------|------------------|------------------|

أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| ١٨ ٣ < ١ - ٢ س | ١٩ ٧ > ٣ + ٢ س | ٢٠ ٢ ≤ ٧ - ٣ س |
|----------------------|----------------------|----------------------|

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات في أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية $\log(s) = \log(s) + \log(s)$ ، ويرجع الفضل في ذلك للعالم ليونهارت أويلر في القرن الثامن عشر الذي قام بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع في مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمي في مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة القولت، كما يستخدم الأس الهيدروجيني (وهو مقياس لوغاريتمي) في الكيمياء لتحديد حمضية محلول ما.

مخرجات تعلم الوحدة

- في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:
- يتعرف الدالة الأسية.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية.
- يتعرف العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانياً.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف معادلات لوغاريتمية.
- يتعرف مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس 10.
- يوجد قيمة اللوغاريتمات باستخدام الآلة الحاسبة.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل بعض المعادلات الأسية.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة، ويستنتج خواصها.

المصطلحات الأساسية

Reflection	انعكاس	Exponential Function	دالة أسية.	The n^{th} Power	القوة النونية
Logarithm	لوغاريتم	Exponential Growth	نمو إسي.	Base	الأساس
Logarithmic Equation	معادلة لوغاريتمية.	Exponential Decay	تضاؤل أسي.	Exponent	الأس
Logarithmic Function	دالة لوغاريتمية	Domain	مجال	n^{th} Root	جذر نوني
		Range	مدى	Rational – Exponent	أس كسري

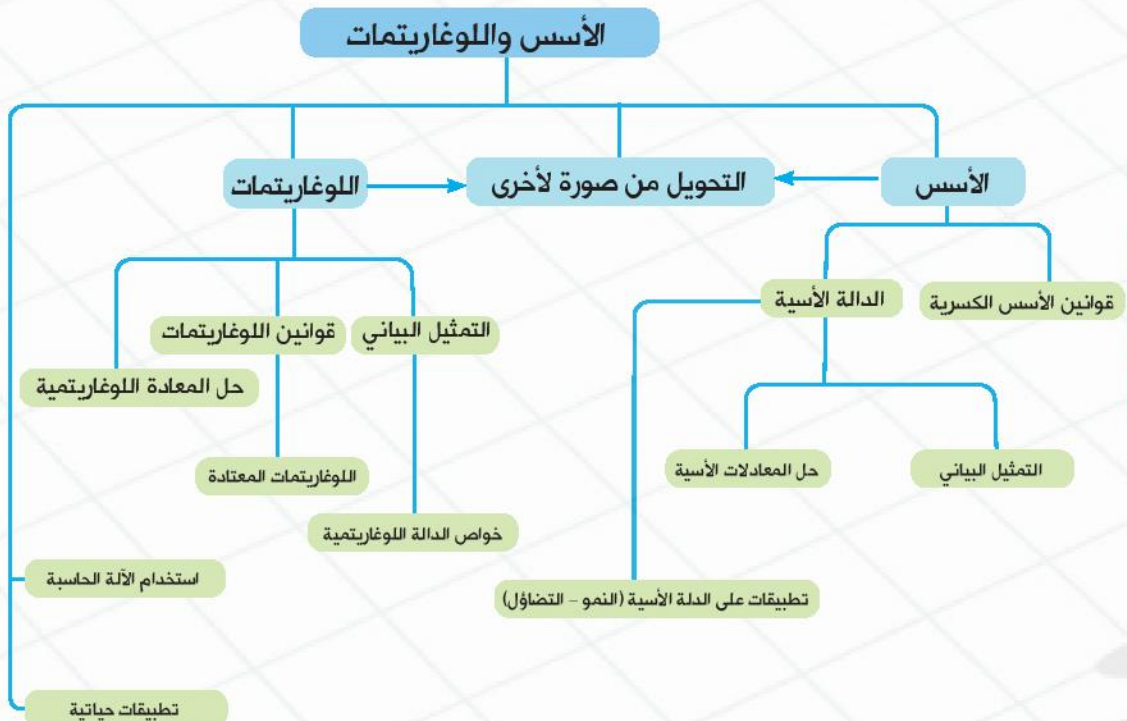
الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية geogebra-graph

دروس الوحدة

- ١ - ٢: الأسس الكسرية
- ٢ - ٢: الدالة الأسية وتمثيلها البياني وتطبيقاتها
- ٢ - ٣: حل المعادلات الأسية
- ٢ - ٤: الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني
- ٢ - ٥: بعض خواص اللوغاريتمات

مخطط تنظيمي للوحدة



الأسس الكسرية

Rational Exponents

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب، وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والتكعيبة، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها، وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

The n^{th} Root

الجذر النوني

علمت أن الجذر التربيعي لعدد ما هو عملية عكسية لتربيع ذلك العدد، وبالمثل فإن الجذر النوني لعدد ما هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن).

مثال:

- ١ إذا كانت $8 = 2^3$ فإن ٢ هو الجذر التكعيبي للعدد ٨
 - ٢ إذا كانت $32 = 2^5$ فإن ٢ هو الجذر الخامس للعدد ٣٢
 - ٣ إذا كانت $1 = 2^0$ فإن س هو الجذر النوني للعدد ١
- أي أن $2 = \sqrt[3]{8}$ أي أن $2 = \sqrt[5]{32}$ أي أن $2 = \sqrt[0]{1}$

المصطلحات الأساسية

The n^{th} Power	القوة النونية
Base	الأساس
Exponent	الأس
n^{th} Root	جذر نوني
Rational Exponent	أس كسري

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ ، $\sqrt[n]{a}$ يكون $\frac{1}{n}$ هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $a > 0$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ عدد صحيح فردي أكبر من ١

مثال:

$$\begin{aligned}
 2 &= \sqrt[3]{8} = \frac{1}{3}(16) \\
 2 &= \sqrt[4]{16} = \frac{1}{4}(16) \\
 3 &= \sqrt[5]{243} = \frac{1}{5}(243) \\
 3 &= \sqrt[6]{729} = \frac{1}{6}(729)
 \end{aligned}$$

لاحظ أن



دليل الجذر
رمز الجذر
العدد داخل الجذر

مثال

١ إذا كانت $s = a$ فأوجد قيم s في E (إن وجدت) في كل من الحالات الآتية:

أ $s = a, 5 = a$ صفر

ب $s = a, 4 = a$ ٨١

ج $s = a, 2 = a$ ٤-

د $s = a, 3 = a$ ٨-

الحل

أ عندما $s = a, 5 = a$ صفر	فإن $s = 0$	وتكون	$s = \sqrt[5]{0} = 0$
ب عندما $s = a, 4 = a$ ٨١	فإن $s = 4$	وتكون	$s = \sqrt[4]{81} = \pm 3$
ج عندما $s = a, 2 = a$ ٤-	فإن $s = 2$	وتكون	$s = \sqrt[2]{-4} \notin E$
د عندما $s = a, 3 = a$ ٨-	فإن $s = 3$	وتكون	$s = \sqrt[3]{-8} = -2$

نستنتج من المثال السابق أن:

إذا كانت $s = a$ فإن قيم s التي تحقق المعادلة تتضح من الجدول التالي:

$\sqrt[n]{a}$	a	n
$\sqrt[n]{a} = 0$ صفر	$a = 0$	$n \in \mathbb{N}^+, n \neq 1$
يوجد جذران حقيقيان هما $\pm \sqrt[n]{a}$	$a > 0$	عدد صحيح زوجي موجب
لا توجد جذور حقيقية.	$a < 0$	عدد صحيح زوجي موجب
يوجد جذر حقيقي واحد فقط هو $\sqrt[n]{a}$	$a \in \mathbb{R}$	عدد صحيح فردي موجب، $n \neq 1$

٥ حاول أن تحل

١ أوجد قيم s في كل مما يأتي (إن وجدت):

أ $s = 2$ ٣٦

ب $s = 0$ ٣٢-

ج $s = 3$ ١٢٥

د $s = 4$ ١٢٩٦

هـ $s = 2$ ٤٩-

و $s = 7$ ١٢٨-

تفكير ناقده: وضح بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد a وبين $\sqrt[6]{a}$

إذا كان $n \in \mathbb{N}^+, n \neq 1$ ، $m \in \mathbb{N}^+$ ، $\sqrt[n]{a} \in E$ فإن: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

مثال:

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{16}} = \sqrt[4]{16}$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

مثال

٢ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

أ $\sqrt[3]{-8}$ ب $\sqrt[3]{-1}$ ج $\sqrt[3]{(3+1)64}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8}$

الحل

أ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ ب $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$

ج $\sqrt[3]{(3+1)64} = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3} = 4\sqrt[3]{4}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

أ $\sqrt[3]{125}$ ب $\sqrt[3]{-27}$ ج $\sqrt[3]{(3+1)128}$ د $\sqrt[3]{(3+1)64}$

Using The Modulus

استخدام المقياس

يستخدم مقياس العدد إذا كان دليل الجذر (n) عدداً زوجياً فيكون $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|}$, أما إذا كان دليل الجذر عدداً فردياً فلا داعي لاستخدام المقياس.

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \sqrt[n]{|a|} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً.} \\ \sqrt[n]{a} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً.} \end{cases}$$

مثال

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ $\sqrt[3]{8}$ ب $\sqrt[3]{-8}$ ج $\sqrt[3]{(3+1)64}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8}$

الحل

أ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ ب $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

ج $\sqrt[3]{(3+1)64} = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3} = 4\sqrt[3]{4}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$

ج $\sqrt[3]{(3+1)64} = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3} = 4\sqrt[3]{4}$ حيث $3 < 4$

د $\sqrt[3]{(3+1)8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$ حيث $1 < 4$

لاحظ أن

مربع أى من العددين (1) أو (-1) هو 1

٩ حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

ب $\sqrt[18]{(س-٢)^{١٨}}$

أ $\sqrt[12]{١٦٦٤}$

د $\sqrt[4]{(٥\sqrt{٦}-٢)^4}$

ج $\sqrt[3]{(٥\sqrt{٦}-٢)^3}$

تعريف

إذا كان $٥ \div ٣ = ١ \frac{٢}{٣}$ فإن: $\frac{١}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣}{٢}$

مثال: $\frac{١}{\frac{٢}{٥}} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٨}{٣}$

تعريف

إذا كان $٥ \div ٣ = ١ \frac{٢}{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ عددين حقيقيين فإن:

$$\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٨} = \sqrt[٣]{٨^٢}$$

$$\frac{\sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{٨}{٨}} \quad \text{حيث } ٨ \neq ٠$$

مثال

٤ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

ب $\frac{\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٥]{٣٢}}{\sqrt[٥]{١٦} \times \sqrt[٣]{٤}}$

أ $\frac{\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[١٠]{٤} \times \sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٢]{٦}}$

الحل

أ المقدار $= \frac{\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[١٠]{٤} \times \sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٢]{٦}}$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[١٠]{(٢^٢)} \times \sqrt[٣]{(٢^٣)}}{\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٢]{(٢ \times ٣)}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٢]{٢ \times ٣}}$$

$$= \frac{٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٣} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٩}$$

تحويل الجذور إلى أسس كسرية.

تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

بالتبسيط

تحويل الجذور إلى أسس كسرية.

تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

$$٤ = ٢^٢ = \frac{٢}{٢} \times \frac{٢}{٢} \times ٢ = \frac{٢^٢ \times ٢^٢}{٢^٢ \times ٢^٢}$$

ب المقدار $= \frac{\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٥]{٣٢}}{\sqrt[٥]{١٦} \times \sqrt[٣]{٤}}$

$$= \frac{\sqrt[٣]{(٢^٣)} \times \sqrt[٥]{(٢^٥)}}{\sqrt[٥]{(٢^٤)} \times \sqrt[٣]{(٢^٢)}}$$

$$= \frac{٢^٣ \times ٢^٢}{٢^٢ \times ٢^٢} = ١$$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

$$\frac{\sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{43}}{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}} \quad \text{ب}$$

حل المعادلات:

مثال

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$9 = \sqrt[3]{s} \quad \text{أ} \quad 8 = \sqrt[3]{(1+s)} \quad \text{ب}$$

الحل

برفع الطرفين للقوة ٣

$$9 = \sqrt[3]{s} \quad \text{أ} \quad \therefore 9^3 = s$$

$$27 = s \quad \therefore s = 27$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$27 = \sqrt[3]{s} \quad \therefore \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{s}$$

$$3 = \sqrt[3]{s} \quad \therefore 3^3 = s \quad \therefore s = 27$$

مجموعة الحل = {27}

برفع الطرفين للقوة ٤

$$8 = \sqrt[3]{(1+s)} \quad \text{ب} \quad \therefore 8^3 = (1+s)$$

$$512 = 1+s \quad \therefore s = 511$$

$$\sqrt[4]{(1+s)} = 8 \quad \therefore (1+s) = 8^4$$

$$s = 4095 \quad \therefore s = 15 \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{15\}$$

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\frac{1}{32} = \sqrt[5]{(1-s)} \quad \text{ب} \quad 32 = \sqrt[5]{s} \quad \text{أ}$$

تمارين ١ - ٢

١ اكتب كلاً مما يأتي على صورة أسية:

$$\sqrt[3]{2} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt[3]{1} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{s} \quad \text{أ}$$

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[3]{s}} \quad \text{و}$$

$$\sqrt[3]{s^0} \quad \text{هـ}$$

$$\sqrt[3]{21} \quad \text{د}$$

٢ اكتب كلاً مما يأتي على صورة جذرية:

$$6\sqrt[3]{} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt[3]{} \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{أ}$$

٥ ١

٥ (٣ س) ٢

٥ ٨ ب ٣

٣ أوجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

٥ ٢٧ ج

٥ (٣٢-) ب

٥ (١٦) ا

٥ ١
٢- (٢ ٨ × ٢ ٤ × ٢- ٢)

٥ ٤
٢ ٤

٥ (١ ٤) + (١ ٨) د

٤ أوجد في أبسط صورة ناتج العمليات الآتية:

٥ (٢٤ + ٢٣) ج

٥ ٣ × س ب

٥ (٢- ١) ا

٥ (س + ٢ ص) (س - ٢ ص) د

٥ (س - ٢ ص) (س + ٢ ص) هـ

٥ (٣٣ + ٣٢ + ٣١) ز

٥ (س + ٢ ص) ٢ و

٥ اختصر كلاً مما يأتي لأبسط صورة:

٥ (٨) ÷ (١٦) ج

٥ (١٦) × (١٦) ب

٥ ١٢٣ + ٢٤٣ ا

٥ ٤ × ٨
٢

٥ ٢,٥ × ٠,٢١٦ × ٠,١ هـ

٥ (٦٤) - (٢٧) د

٥ ١٦ ÷ (١٨ × ١٠ - ٣٨) ج

٥ (١٢٥) × (١٠) - (١٠) ز

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٥ {١} ج {٢٧-، ٢٧} ب {٢٧} ا ٦ إذا كان ٣ س = ٩ فإن س =

٥ ١ - ٦٤ = ٧

٥ |س| - ١ ج |س| - ١ ب س ٨ |س| - ١ ا

٥ ٨ س ص ٩ = ٨ س ص ٨

٥ |س| ص ٢ ج |س| ص ٢ ب ± س ص ٢ ا س ص ٢

٥ ٨ = ٨ فإن س = ١٠

٥ ١ - ٤ = ٤ ا ٤ ب ٤ - ٤ ج ٤ د ٤ - ٤

٥ ١١ = ١٢٦ × ١٢٦

٥ ١٢٦ ا ١ ب ٦ ج ١ د ١٢٦

١٢ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

٥ ٢٧ = ٣ س ب ١٢٨ = ٢ س ا ٥ = ٢ س

٥ ١٦ = ١ - ٣ س ٢ و ٢ = ٢ - ٢ س ٣ هـ ٣٢ = (٥ - ٢) د

الدالة الأسية وتطبيقاتها

Exponential Function and its Application

تمهيد

كثيراً ما نتعامل في حياتنا عن أمور تتطلب حسابات دقيقة مثل الفوائد البنكية والزيادة السكانية وتكاثر الخلايا في بعض الكائنات وفترات عمر النصف للذرات المشعة وغيرها، وتلك هذه الأمور تتطلب مفهوم الدالة الأسية التي سوف نتناولها في هذا الدرس ونعرض بعض خواصها .

لاحظ أن

الدالة الجبرية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقي .
الدالة الأسية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لا يساوى الواحد .

Exponential Function

الدالة الأسية

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً $a \neq 1$ فإن الدالة:
د حيث $x \rightarrow e^x$ ، $e = 2.718$ ، $e = 2.718$
تسمى **دالة أسية** أساسها a

تعبير شفهي: وضح لماذا لا تمثل الدالة $(x) = 2^x$ حيث $x \in \mathbb{R}$ دالة أسية

Graphical Representation of the Exponential

التمثيل البياني للدالة الأسية

Function

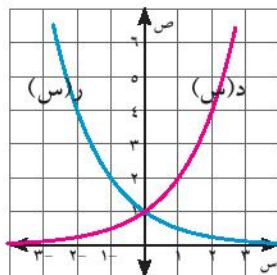
مثال

١ بالاستعانة بقيم $x \in [-3, 3]$ ارسم في شكل واحد جزءاً من منحنى كل من الدالتين:

$$y = 2^x \text{ ، } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

الحل

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨
ر(س)	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



من الرسم يمكن استنتاج الخواص الآتية للدالة الأسية

١ الدالة د: $y = 2^x$ متزايدة على مجالها لأن $(1 < 2)$

الدالة ر: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ متناقصة على مجالها لأن $(0 < \frac{1}{2} < 1)$

٢ مدى كل من الدالتين هو $\mathbb{R}^+$

٣ منحنى الدالة د: $y = 2^x$ هو صورة منحنى الدالة

سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانياً.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

- دالة أسية. Exponential Function
- نمو أسي. Exponential Growth
- تضاؤل أسي. Exponential Decay

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

أضف إلى معلوماتك

تسمى الدالة الأسية د(س) $y = a^x$ في حالة $a > 1$ بدالة النمو (growth function) وترتبط بكثير من التطبيقات الحياتية مثل التزايد السكاني والفائدة المركبة للبنوك.

وتسمى الدالة الأسية د(س) $y = a^{-x}$ في حالة $0 < a < 1$ بدالة التضاؤل (decay) وترتبط بكثير من التطبيقات مثل فترة عمر النصف للذرات المشعة .

ر: $r(s) = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ بالانعكاس في محور الصادات.

٤ حلول أن تحل

- ١ بالاستعانة بقيم $s \in [-2, 2]$ ارسم في شكل واحدٍ منحنى كلٍّ من الدوال $d_1(s) = s^2$ ، $d_2(s) = s^3$ ، $d_3(s) = s^4$

مثال

- ٢ إذا كانت $d(s) = s^3$ فأكمل ما يأتي :

أ $d(2) = \dots$ ب $d(s+2) = s^3 \times \dots$ ج $d(s) \times d(-s) = \dots$

الحل

أ $d(2) = 2^3 = 8$ ب $d(s+2) = s^3 + 2^3 = s^3 + 8$ ج $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$

د $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$ هـ $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$ و $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$

تمارين ٢ - ٢

- ١ ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أي منها تكون متزايدة وأي منها متناقصة؟

أ $d(s) = s^2$ ب $d(s) = s^3$ ج $d(s) = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ د $d(s) = 2 - s + s^2$

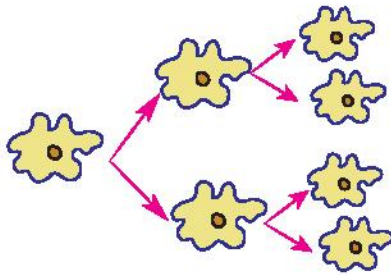
- ٢ أكمل ما يأتي:

- أ الدالة $d(s) = s^2$ تقطع محور الصادات في النقطة
 ب الدالة $d(s) = s^2 - 1$ تقطع محور الصادات في النقطة
 ج إذا مر منحنى الدالة $d(s) = s^3$ بالنقطة $(1, 3)$ فإن $s = \dots$
 د منحنى الدالة $d(s) = s^3$ هو صورة منحنى الدالة $r(s) = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ بالانعكاس في
 هـ الدالة $d(s) = s^3$ تكون تناقصية إذا كان $s \geq \dots$
 و الدالة $d(s) = s^3$ تكون متزايدة عندما $s \geq \dots$

حل المعادلات الأسية

Solving Power Equations

فكر و ناقش



تتكاثر الأميبا بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين بعد فترة زمنية ثابتة، ثم تنقسم كل خلية جديدة إلى خليتين بعد نفس الفترة الزمنية، وفي نفس الشروط وهكذا

- ١ أوجد عدد الخلايا الناتجة من خلية واحدة بعد ٩ فترات زمنية.
- ٢ أوجد عدد الفترات الزمنية اللازمة لإنتاج ٨١٩٢ خلية من هذه الخلية.

تعلم

Power Equation

المعادلة الأسية

إذا تضمنت المعادلة متغيراً في الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل $(8 = 2^{3+1})$
حل المعادلات الأسية:

أولاً: إذا كان $a^x = a^y$ **حيث** $a \in \{0, 1, -1\}$ **فإن** $x = y$.

مثال

١ أوجد في مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $8 = 2^{3+1}$ ب $2^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

الحل

أ $8 = 2^{3+1} \therefore 2^3 = 2^{3+1}$ ب $2^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \therefore 2^{-3} = 2^{-3-1}$

$\therefore 3 = 3 + 1$ ومنها $x = 0$

$\therefore$ مجموعة الحل = {صفر}

ب $2^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \therefore 2^{-3} = 2^{-3-1}$

$\therefore 2^{-3} = 2^{-4}$ ومنها $x = 1$

$\therefore 2 = 2 - 1$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

سوف تتعلم

- ◀ الدالة الأسية.
- ◀ تمثيل الدوال الأسية بيانياً.
- ◀ خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

- ◀ معادلة أسية. Power Equation
- ◀ حل بياني. Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

- ◀ آلة حاسبة علمية
- ◀ برامج رسومية

٦ حاول أن تحل

١ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\text{أ} \quad ٢٥ = ١ + ٣٥ \quad \text{ب} \quad \frac{1}{8} = ٢ - ١٢^٢$$

ثانيًا: إذا كان $أ = ب$ حيث $أ, ب \in \{١, -١, ٠\}$,

إما: $م = صفر$
 أو: $أ = ب$ عندما $م$ عدد فردي.
 ، $أ = \pm ب$ عندما $م$ عدد زوجي.

مثال

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\text{أ} \quad ٢ + ٣٧ = ٢ + ٣٣ \quad \text{ب} \quad ٤ - ٣٢ = ٢ - ٤٣$$

الحل

$$\text{أ} \quad ٢ + ٣٧ = ٢ + ٣٣ \quad \therefore ٠ = ٠$$

$$\therefore \text{س} + ٢ = صفر \quad \text{ومنها س} = ٢ -$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{٢ -\}$$

$$\text{ب} \quad ٤ - ٣٢ = ٢ - ٤٣ \quad \therefore ٠ = ٠$$

$$\therefore ٢ - ٤ = ٢ - ٩$$

$$\therefore \text{س} - ٢ = صفر \quad \text{ومنها س} = ٢$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{٢\}$$

٦ حاول أن تحل

٢ أوجد في ع مجموعة حل المعادلة:

$$\text{أ} \quad ١ - ٣٥ = ١ - ٤ \quad \text{ب} \quad ٣ - ٣٧ = ٦ - ٣٢$$

مثال

٣ إذا كانت د(س) = $١ + ٣٢$ أوجد قيمة س التي تحقق د(س) = ٣٢

الحل

$$\therefore \text{د(س)} = ٣٢ \quad \therefore ٣٢ = ١ + ٣٢$$

$$\therefore ٥ = ١ + ٣٢ \quad \therefore \text{س} + ١ = ٥$$

$$\therefore \text{س} = ٤ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{٤\}$$

٦ حاول أن تحل

٣ إذا كانت د(س) = ٣٧ ، أوجد قيمة س التي تحقق د(س) = ٤٩



تمارين ٢ - ٣



١ أكمل ما يأتي:

أ إذا كان $5^{-2} = 1$ فإن $s = \dots$

ب إذا كان $3^{-2} = 7^{-2}$ فإن $s = \dots$

ج إذا كان $2^{1+s} = 5^{1+s}$ فإن $3^{1+s} = \dots$

د إذا كان $2^{1+s} = 32$ فإن $s = \dots$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

٢ إذا كان $3^{-5} = 9$ فإن $s = \dots$

أ ٢ ب ٧ ج ٣- د ٧-

٣ إذا كان $3^3 = 9$ فإن $3^{1+s} = \dots$

أ ٥ ب ١٥ ج ٢٧ د ٤٥

٤ العدد $5^{1+s} + 5^s$ يقبل القسمة على لجميع قيم s الطبيعية.

أ ٧ ب ٦ ج ١٣ د ١٧

٥ إذا كان $(\frac{2}{3})^{-s} = \frac{8}{27}$ فإن $s = \dots$

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٥

٦ أوجد في E مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $3^{2+s} = 9$ ب $\frac{1}{32} = 5^{-s}$

ج $1 = 5^{2+s}$ د $3 = 1/3$

هـ $2 \times 3^{-2} = 4$ و $7^{-5} = 5^{-3}$

ز $2 \times 3^{-6} = 5^{-2}$ ح $(\frac{3}{2})^{-s} = \frac{8}{27}$

ط $2 \times 5^{-5} = \frac{4}{30}$ ي $64 = 4^s$

ك $4^{-1} = \frac{1}{4}$ ل $\frac{1}{9} = (2)^{-5}$

٧ إذا كانت د(س) = ٣٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٨

ب د(س) + ١ = $\frac{1}{٣٢}$

٨ إذا كانت د(س) = $٣٣ + ١$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٢٧

ب د(س) - ١ = $\frac{1}{٩}$

٩ إذا كانت د(س) = $٣٧ - ٢$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٣٤٣

ب د(٢س) = $\frac{1}{٤٩}$

١٠ **اكتشف الخطأ:** قام كل من محمد وكريم بحل المعادلة $١٦ = ٣٢ \times ٢$

حل محمد

$$١٦ = ٣٢ \times ٢$$

$$١٦ = ٣٤ \therefore$$

$$٢٤ = ٣٤ \therefore$$

$$\therefore \text{س} = ٢$$

حل كريم

$$١٦ = ٣٢ \times ٢$$

$$٨ = \frac{١٦}{٢} = ٣٢ \therefore$$

$$٢٢ = ٣٢ \therefore$$

$$\therefore \text{س} = ٣$$

أي الحلين هو الصواب؟ ولماذا؟

٩ حاول أن تحل

١ عبّر عن كلِّ مما يأتي بصورة لوغاريتمية:

ج) $٣ = ٥^x$ حيث $x \in \mathbb{R}^+$

ب) $٨ = 2^{\frac{1}{3}}$

أ) $١٠٠٠ = ١٠^3$

{1}-

Common Logarithm اللوغاريتم المعتاد

هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ ويكتب بدون كتابة الأساس، أي لو $٧ = ٧$ ، لو $١٢٧ = ١٢٧$ ويمكن استخدام مفتاح $\log$ الموجود بالحاسبة لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لأي عدد.

مثال

٢ حوّل كلّاً مما يأتي إلى الصورة الأسية:

ج) لو $١ = ٣$ صفر

ب) لو $١٠٠٠ = ٣$

أ) لو $٣٢ = ٥$

الحل

ج) $٣ = ١$ صفر

ب) $١٠٠٠ = ٣$

أ) $٣٢ = ٥$

٩ حاول أن تحل

٢ حوّل كلّاً مما يأتي إلى الصورة الأسية:

ج) لو $١ = ٥$

ب) لو $١٠٠ = ٢$

أ) لو $٢٥ = \frac{2}{3}$

مثال

إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية

٣ أوجد قيمة كلّ من:

ب) لو $٠,٠١$

أ) لو ١٢٥

الحل

أ) نفرض لو $١٢٥ = x$ وبالتحويل إلى الصورة الأسية

ومنها $x = ٣$

∴ $٣٥ = ٢٥$

∴ $١٢٥ = ٣٥$

∴ لو $١٢٥ = ٣$

ب) نفرض لو $٠,٠١ = x$ (لوغاريتم معتاد أساسه ١٠) وبالتحويل للصورة الأسية

∴ $١٠ = ٣٠$

∴ $٠,٠١ = ١٠$

∴ لو $٠,٠١ = ٢$

منها $x = ٢$

٢٩ حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة كل من:

أ لو $\frac{81}{3}$

ب لو $\frac{32}{4}$

مثال حل المعادلات

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $3 = (5 + س)$ ب لو $625 = س - 1$ ج لو $2 = (6 + س)$

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم $س + 5 < 0$ أي $س < -5$ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية

$\therefore س + 5 = 32$

ومنها $س = 3$

$\therefore 3 \in$ مجال تعريف المعادلة $\therefore$ مجموعة الحل = {3}

ب المعادلة معرفة لجميع قيم $س$ الحقيقية وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية.

$\therefore 625 = 5^{1-س}$

$\therefore 5 = 1 - س$

ومنها $س = 5$

$\therefore$ مجموعة الحل = {5}

ج المعادلة معرفة لجميع قيم $س$ التي تُحقق كلاً من $\left. \begin{array}{l} س + 6 < 0 \\ س < 0 \\ س \neq 1 \end{array} \right\}$

أي أن مجال تعريف المعادلة هو $[-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية:

$س^2 = س + 6$

$س^2 - (س + 6) = 0$

إما $س = 3$ أو $س = -2$

وحيث إن $س = -2$ $\notin$ مجال تعريف المعادلة

$\therefore$ مجموعة الحل = {3}

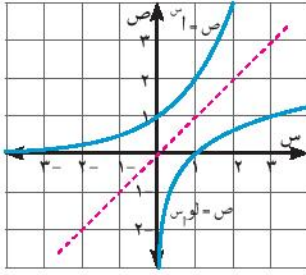
٢٩ حاول أن تحل

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $1 = (1 - س^2)$ ب لو $27 = س + 2$ ج لو $2 = 9^{(1-س)}$

Graphical Representation of the Logarithmic Function

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية



إذا كانت د(س) = a^x حيث $a > 0$ ، فإن الدالة العكسية للدالة د تسمى بالدالة اللوغاريتمية أي $ص = \log_a س$

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

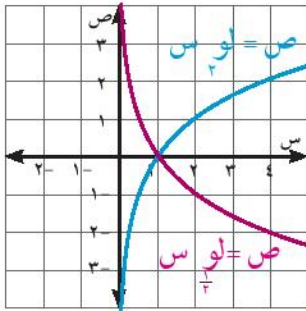
الشكل المقابل يمثل الدالة الأسية $ص = a^x$ والدالة اللوغاريتمية $ص = \log_a س$ ادرس خواص كل من الدالتين من حيث المجال والمدى والاطراد والتماثل حول المستقيم $ص = س$.

مثال

٥ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين $ص = \log_2 س$ ، $ص = \log_{\frac{1}{2}} س$

الحل

نختار قيم س قوى العدد ٢ (الأساس) $\{2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2\}$



س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
$\log_2 س$	-٢	-١	٠	١	٢
$\log_{\frac{1}{2}} س$	٢	١	٠	-١	-٢

من الرسم يمكنك استنتاج الخواص الآتية لمنحنى الدالة اللوغاريتمية

المجال = $س > 0$ ، المدى = $س$

الدالة $ص = \log_a س$ متزايدة لكل $١ < ا$ ومتناقصة لكل $١ > ا > ٠$

تمارين ٢ - ٤

١ أكمل ما يأتي:

أ الصورة الأسية المكافئة للصورة $\log_2 ٢٧ = ٣$ هي

ب الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة $٣ = \log_2 ١$ هي

ج $\log_{10} ٠,٠٠١ =$

د $\log_2 ١ =$

ه إذا كان $\log_2 ٤ = ٢$ فإن $س =$

و إذا كان $\log_2 ١٢٨ = س + ١$ فإن $س =$

- ١ ز) مجال الدالة د : د(س) = لو_٣ س هو
- ٢ ح) الدالة د حيث د(س) = لو_٣ س متناقصة لكل أ $\exists$
- ٣ ط) منحني الدالة د حيث د(س) = لو_٣ س يمر بالنقطة (٨،)
- ٤ ي) إذا كان لو_٣ س = ٣ ، لو_٥ = ص فإن لو_{١٥} = (بدلالة س، ص)
- ٥ ٢) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:-

أ) لو_٣ (س - ١) = ٢

ب) لو_٥ (س + ٢) = ٣

ج) لو_٣ = ٩

د) لو_٤ = ٨

هـ) لو_٣ (س + ٢) = ٢

و) لو_٣ = ٩

- ٦ ٣) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

أ) لو_٥ ١

ب) لو_٧ ٧

ج) لو_٣ ٩

د) لو_٦ ٣ + لو_٦ ٢

- ٧ ٤) استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كل من:-

أ) لو_٥ ١٥

ب) لو_٢ ٢٧

ج) ٤ لو_٥ - ٧ لو_{١٣}

Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية.

Logarithmic Equation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

تعلم



Some Properties of Logarithms

بعض خواص اللوغاريتمات

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، $x > 0$ ، فإن

$$1 = \log_a a$$

فمثلاً $\log_3 3 = 1$ ، $\log_{10} 10 = 1$

$$0 = \log_a 1$$

فمثلاً $\log_3 1 = 0$ ، $\log_{10} 1 = 0$

حاول إثبات كل من ١ ، ٢ من تعريف اللوغاريتم

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

$$\log_a x = \log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \quad \text{حيث } x, y > 0$$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

$$\log_a x = \log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

$$x = a^{\log_a x} , y = a^{\log_a y}$$

$$\text{فتكون } x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y} \quad \text{أي أن } \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

مثال



١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\log_{10} 100 + \log_{10} 10$

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \text{لو} (17 \times 2) = \text{لو} 34 \\ &= \text{لو} 34 \\ &= 1 \end{aligned}$$

استخدام خاصية (3)

استخدام خاصية (1)

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$$\text{لو} \frac{س}{ص} = \text{لو} س - \text{لو} ص \quad (\text{حاول بنفسك إثبات صحة العلاقة})$$

مثال

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٥٠ - لو ٥

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \text{لو} \frac{٥٠}{٥} \\ &= \text{لو} ١٠ = ١ \end{aligned}$$

استخدام خاصية القسمة

استخدام خاصية (1)

٩ حاول أن تحل

١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٧ - لو ٣,٥

٥- خاصية لوغاريتم القوة:

$$\text{لو} س^ص = ص \cdot \text{لو} س \quad \text{حيث } س > ٠ \quad (\text{حاول إثبات صحة العلاقة بنفسك})$$

مثال

٣ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ١٢٥

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \text{لو} ١٢٥ \\ &= \text{لو} ٥^٣ \\ &= ٣ \times \text{لو} ٥ = ٣ \end{aligned}$$

استخدام خاصية القوة

استخدام خاصية (1)

لاحظ أن: $\text{لو} \left(\frac{1}{س}\right) = -\text{لو} س$ حيث $س > ٠$

٦ - خاصية تغيير الأساس

وإثبات صحة هذه الخاصية

$$\frac{\log_s \frac{a}{b}}{\log_s \frac{c}{d}} = \frac{\log_s a}{\log_s c} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s b}$$

بوضع: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بالتحويل إلى الصورة الأسية
يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

$$\frac{\log_s \frac{a}{b}}{\log_s \frac{c}{d}} = \frac{\log_s a}{\log_s c} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s b}$$

$$\frac{\log_s a}{\log_s c} = \frac{\log_s a}{\log_s c} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s b} \quad \text{أي أن:} \quad \frac{\log_s a}{\log_s c} = \frac{\log_s a}{\log_s c} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s b}$$

مثال

$$\textcircled{4} \text{ اختصر لأبسط صورة } \log_2 16 * \log_7 49$$

الحل

استخدام خاصية (٦)

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 16} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 49} = \text{المقدار}$$

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 16} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 49} =$$

استخدام خاصية (٥)

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 16} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 49} =$$

$$8 = 2 \times 4 =$$

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد حل المثال السابق بتغيير الأساس لعدد آخر غير ١٠

٧ - خاصية المعكوس الضربي

لو $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ أي أن $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ ، معكوس ضربي للآخر (حاول إثبات صحة العلاقة)

$$\textcircled{5} \text{ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة } \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$

مثال

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\text{استخدام خاصية (٣)} \quad \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \times (2 \times 5)$$

$$\text{استخدام خاصية (١)} \quad \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \times 1$$

٩ حاول أن تحل

$$\textcircled{3} \text{ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة } \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}$$

تبسيط المقادير اللوغاريتمية Simplifying the Logarithmic Expressions

مثال

٦ اختصر لأبسط صورة لو $0.009 - \log_{11} \frac{27}{11} + 3 \log_{\frac{5}{3}} - \log_{\frac{1}{3}}$

الحل

المقدار $\log_{11} \frac{27}{11} - \log_{\frac{5}{3}} + 3 \log_{\frac{5}{3}} - \log_{\frac{1}{3}}$
 $\log_{11} \left(\frac{27}{11} \times \frac{16}{8} \times \frac{16}{27} \times \frac{9}{1000} \right)$
 $\log_{11} 1 = 0$

٥ حاول أن تحل

٤ اختصر لأبسط صورة لو $\log_{10} 3 - \log_{10} 2 - \log_{10} 5 + \log_{10} 10$

حل المعادلات اللوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

مثال

٧ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ $\log_2 (x+1) + \log_2 x = 1$ ب $\log_2 x + \log_2 x = 3$

الحل

أ الدالة معرفة لكل $x > 0$ ، $x+1 > 0$
 أي أن $x > 0$
 $\log_2 (x+1) + \log_2 x = 1$
 $\log_2 (x+1)x = 1$
 $\log_2 (x^2 + x) = 1$
 $x^2 + x = 2$
 $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x+2)(x-1) = 0$
 $x = -2$ أو $x = 1$
 حيث إن $x = -2$ ∉ مجال تعريف المعادلة
 $\therefore$ مجموعة الحل $\{1\}$

ب الدالة معرفة لكل $x > 0$ (مجال تعريف المعادلة)

ب $\log_2 x + \log_2 x = 3$ خاصية (٦) $\log_2 x + \log_2 x = 3$
 $\log_2 x^2 = 3$
 $x^2 = 2^3$
 $x^2 = 8$
 $x = \sqrt{8}$ أو $x = -\sqrt{8}$
 $x = 2\sqrt{2}$ أو $x = -2\sqrt{2}$
 $\therefore$ مجموعة الحل $\{2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$

٤ (التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية)

حيث إن $x = 4 \in$ مجال تعريف المعادلة $\therefore$ مجموعة الحل $\{4\}$

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

أ) لو (٢ س + ١) - لو (٣ س - ١) = ١

ب) لو_٣ س = لو_٢ س

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات Solving the Power Equations by Using Logarithms

٥ مثال

٨ أوجد في ع مجموعة حل ٢ = ٣٧ مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين:

٥ الحل

$$٢ = ٣٧$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\therefore \text{لو } ٢ = \text{لو } ٣٧ \quad \therefore \text{لو } ٢ = ٢ \text{ لو } ٧ \quad \therefore \text{لو } ٧ = \frac{\text{لو } ٢}{٢}$$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتي:

$$\frac{\log 2}{\log 7} = 2.807354922$$

$$\therefore \text{لو } ٧ = ٢,٨١ \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{٢, ٨١\}$$

$$\text{(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)} \quad 2 \text{ } x^{\frac{1}{2}} \text{ ans} = 7$$

٤ حاول أن تحل

٦ أوجد لأقرب رقمين عشريين مجموعة حل المعادلة : ٢ = ٣٧



تمارين ٢ - ٥



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) $\log_2 8 =$

أ) ٤

ب) ٣

ج) ١٦

د) ١٠

٢) $\log_2 2 + \log_2 5 =$

أ) ١

ب) $\log_2 7$

ج) $\log_2 10$

د) ١٠

٣) $\log_2 \sqrt{5} =$

أ) ٢

ب) ٥

ج) $\frac{1}{2}$

د) ١-

٤) إذا كان $\log_2 3 = س$ ، $\log_2 4 = ص$ فإن $\log_2 12 =$

أ) $س + ص$

ب) $س ص$

ج) $س - ص$

د) $\log_2 10 + ص$

٥) $\log_2 2 + \log_2 2 =$

أ) ٦

ب) ٣٦

ج) ٢

د) ١٢

٦) $\log_2 5 \times \log_2 2 =$

أ) ١

ب) ١٠

ج) $\frac{5}{2}$

د) صفر

٧) $\log_2 2 \times \log_2 5 \times \log_2 2 =$

أ) ٣٠

ب) ١

ج) صفر

د) $\log_2 30$

۸ ﴿عَبَّرَ عَنْ كُلِّ مَمَائِئَاتِي بِدَلَالَةِ لَوْسٍ، لَوْ (س + ۱)﴾

ا) لو س (س + ۱) ب) لو $\frac{س}{س + ۱}$

ج. لو $\sqrt{s}$ (س + ۱)^۲

٩ اختصر لأبسط صورة:

أ) لو ٥٤ - لو ٩ ب) لو ٢ + لو ٣

٥) $٤٨ \text{ لو} + ١٢٥ \text{ لو} - ٦ \text{ لو}$

$$\text{هـ} \quad \frac{1 - 2 \text{ لو}}{120 \text{ لو}} \qquad \text{و} \quad \frac{7 \text{ لو} + 49 \text{ لو}}{7 \text{ لو}}$$

ز) $16\sqrt{16} + 3\sqrt{9} + 1$ ح) $\frac{1}{4}\sqrt{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4} + 2\sqrt{4} - \sqrt{4} - 3\sqrt{4}$

١٠ أوجد في E مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

ا. لو س + لو (س + ۲) = ۳ ب. لو س + لو (س - ۳) = ۱

٦ لو س - لو ٢ = ٢

٥ لو (س + ٣) - لو ٣ = لو س

$$٢ = \frac{٣}{\text{لوس}} - \text{لوس} \quad (٩) \quad \text{لوس} = \frac{١}{\text{لوس}} + \frac{١}{\text{لوس}} \quad (٥)$$

١١ أثبت أن $لوا \times لوب \times لو ج \times لود = ١$ ثم احسب قيمة $لوا^٢ \times لوب^٣ \times لو ج^٥ \times لود^١٦$

١٢) أوجد قيمة s في كل مما يأتي مقرباً الناتج لرقم عشري واحد.

ا. $V = 3^{\text{س}}$ ب. $2 = 1^{\text{س}}$ ج. $1 = 2^{\text{س}}$ $V \times 4$

النهائيات

Limits

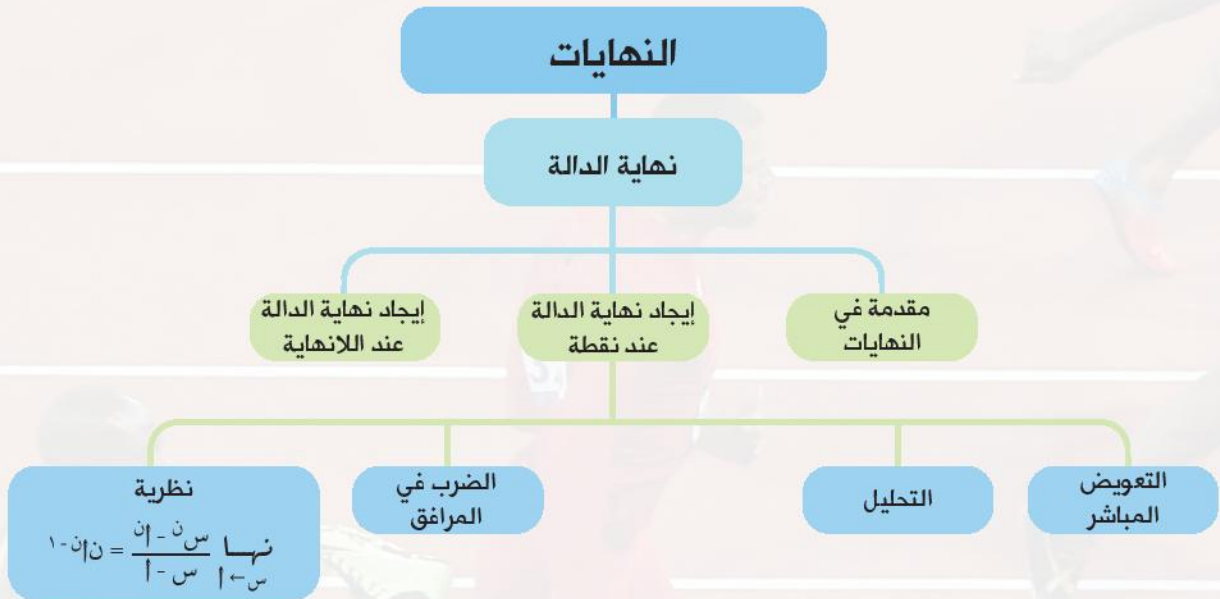
ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات الهندسية والحياتية والتجارية والعلوم المختلفة، فكمثيراً ما نحتاجه لدراسة سلوك الدالة، والتغير فيها وحل بعض المشكلات التي يعجز علم الجبر وبعض العلوم الأخرى عن حلها.

❖ يوجد نهاية دالة عند اللانهاية جبرياً وبيانياً

المصطلحات الأساسية

نهاية الدالة عند اللانهاية	direct Substitution	تعويض مباشر	Unspecified Quantity	كمية غير معينة
Limit of a Function at Infinity	Conjugate	مرافق	Undefined	غير معرف
	Polynomial Function	دالة كثيرة الحدود	Limit of a Function	نهاية دالة

مخطط تنظيمي للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (١-٣): مقدمة في النهايات.
- الدرس (٢-٣): إيجاد نهاية الدالة جبرياً.
- الدرس (٣-٣): نهاية الدالة عند اللانهاية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلي - برامج رسومية

مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل، ويعتمد هذا المفهوم بصفة أساسية على سلوك الدالة عند جميع نقاط تعريفها. ولدراسة هذا السلوك ينبغي التعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

فكر و ناقش

تذكر أن

∞ هي رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| ١) 5×3 | ٢) $4 \div 28$ |
| ٣) $9 - 4$ | ٤) $0 \div 7$ |
| ٥) $0 \div 0$ | ٦) $3 + \infty$ |
| ٧) $\infty \div \infty$ | ٨) $\infty - \infty$ |

Unspecified Quantities

الكميات غير المعينة:

تعلم

فى بند فكر وناقش نجد أن بعض نواتج العمليات محدداً تماماً مثل رقم ١، ٢، ٣، بينما بعض النواتج لا يمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أن: $0 \div 7$ غير معرفة حيث إن القسمة على صفر لا معنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $0 \div 0$ حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفر لذلك فإن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضاً: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times 0$ (لماذا؟)

المصطلحات الأساسية

Unspecified Quantities

Undefined غير معرف

Value of a Function قيمة دالة

Limit of a Function نهاية دالة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، $-\infty$ كالآتى:

لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن:

$$1) \quad \infty = a + \infty \quad 2) \quad -\infty = a - \infty$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} \infty - \\ \infty \end{array} \right\} = a \times \infty \quad \begin{array}{l} \text{إذا كان } a > 0 \\ \text{إذا كان } a < 0 \end{array}$$

$$4) \quad \left. \begin{array}{l} \infty - \\ \infty \end{array} \right\} = a \times -\infty \quad \begin{array}{l} \text{إذا كان } a < 0 \\ \text{إذا كان } a > 0 \end{array}$$

مثال

١ أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $\infty + ٤$	ب $\infty - ٣$	ج $٣ \div ٠$	د $٠ \div ٥$
هـ $\infty + \infty$	و $٠ \div ٠$	ز $\infty \times ٥$	ح $\infty - \times ٦$

الحل

أ ∞	ب ∞	ج ٠	د غير معرفة
هـ ∞	و كمية غير معينة	ز ∞	ح ∞

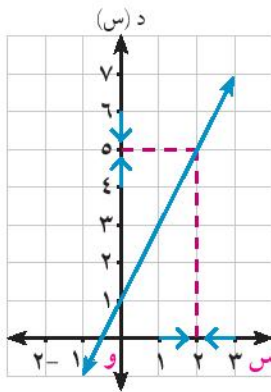
٢ حاول أن تحل

١ أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $(٢ -) \div ٠$	ب $٠ \div ٧$	ج $\infty \div ٩$	د $٠ \times \infty$
هـ $\infty \times (٧ -)$	و $١٢ + (\infty -)$	ز $\infty + \infty$	ح $\infty \div \infty$

نهاية دالة عند نقطة :

في الشكل التالي: الخط البياني للدالة د المعرفة على ع وفق القاعدة د (س) = ٢ س + ١ أكمل الجداول الآتية، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:



س	د (س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
.....	
↓	↓
٢	٥

$$س > ٢$$

س تقترب من ٢ من جهة اليسار

س	د (س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
.....	
↓	↓
٢	٥

$$س < ٢$$

س تقترب من ٢ من جهة اليمين

لاحظ أن:

◀ عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليمين، ما القيمة التي تقترب إليها د (س).

◀ عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليسار، ما القيمة التي تقترب إليها د (س).

عندما تقترب س من العدد (٢) من اليمين و من اليسار فإن د (س) تقترب من العدد (٥) ونُعبّر عن ذلك رياضياً

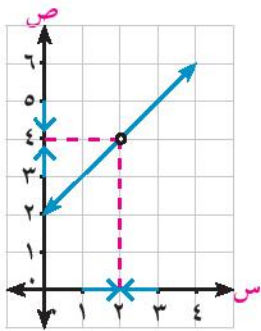
$$\lim_{س \rightarrow ٢} (٢ س + ١) = ٥$$

إذا كانت قيمة الدالة تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما تقترب س من أ من جهتي اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوي ل وتكتب رمزياً: $\lim_{s \rightarrow a} f(s) = l$ نهاية د(س) = ل
وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوي ل

مثال

٢ إذا كانت د(س) = $\frac{s^2 - 4}{s - 2}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٢.

الحل



د(س)	س
٣,٩	١,٩
٣,٩٩	١,٩٩
٣,٩٩٩	١,٩٩٩
.....	
↓	↓
٤	٢

س > ٢

د(س)	س
٤,١	٢,١
٤,٠١	٢,٠١
٤,٠٠١	٢,٠٠١
.....	
↓	↓
٤	٢

س < ٢

من الشكل البياني ومن بيانات الجدول الموضحة نجد أن د(س) → ٤ عندما س → ٢ من جهة اليمين و من

جهة اليسار. ∴ $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 4}{s - 2} = 4$

لاحظ من هذا المثال أن:

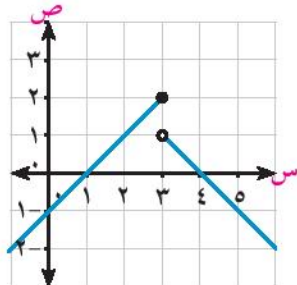
- ١- الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين $\frac{صفر}{صفر}$ عندما س = ٢ (أي أن الدالة غير معرفة عند س = ٢)
- ٢- وجود نهاية للدالة عندما س → ٢ لا تعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢

٦ حاول أن تحل

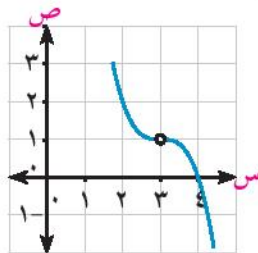
٢ إذا كانت د(س) = $\frac{s^2 - 1}{s + 1}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من (١ -)

مثال

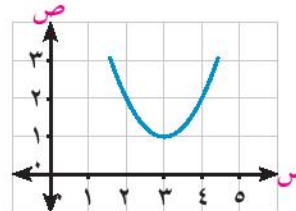
٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد نهاية د(س) $\lim_{s \rightarrow a} f(s)$



شكل (٢)



شكل (٢)



شكل (١)

الحل

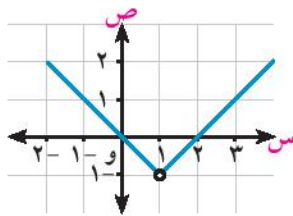
شكل (١) نهاية $\leftarrow 1$ س

شكل (٢) نهاية $\leftarrow 1$ س (لاحظ أن الدالة غير معرفة عند $3 = 3$)

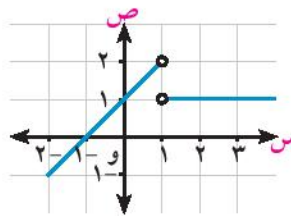
شكل (٣) نهاية $\leftarrow 3$ س ليس لها وجود

حاول أن تحل

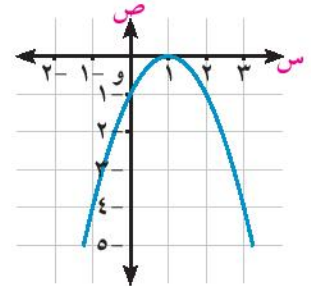
٣ في كل من الأشكال الآتية . أوجد نهاية $\leftarrow 1$ س



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

من الأمثلة السابقة نستنتج أن:

وجود نهاية للدالة عندما $\leftarrow 1$ س لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $1 = 1$ ،

والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند $1 = 1$ فهذا لا يعني وجود نهاية للدالة عند $1 = 1$

تعبير شفهي: عبر بأسلوبك عن الفرق بين قيمة دالة عند نقطة ونهاية الدالة عند نفس النقطة.



تمارين (١-٣)

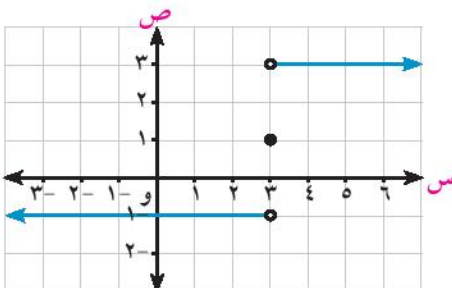
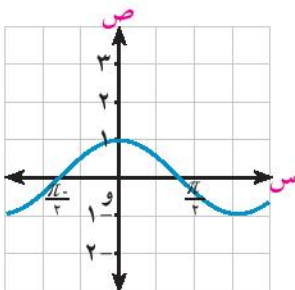


أولاً: تمارين على إيجاد النهاية بيانياً:

١ من الرسم البياني أوجد:

أ) نهاية $\leftarrow 0$ س

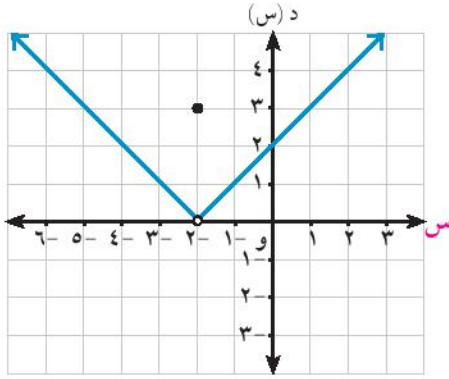
ب) $\leftarrow 0$ س



٢ من الرسم البياني المقابل أوجد إن كان ذلك ممكناً:

أ) نهاية $\leftarrow 3$ س

ب) $\leftarrow 3$ س



٣ من الرسم البياني المقابل أوجد:

أ نها $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

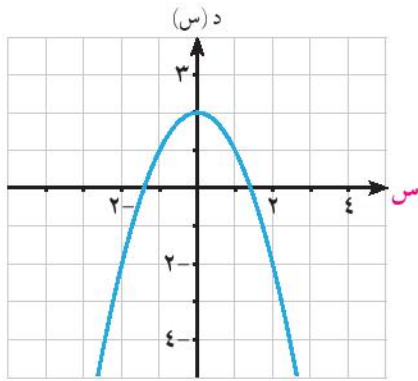
س $\leftarrow -2$

ب د (-2)

ج نها $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

س $\leftarrow 0$

د د (0)



٤ الشكل البياني المقابل للدالة $f(x) = 2 - x^2$

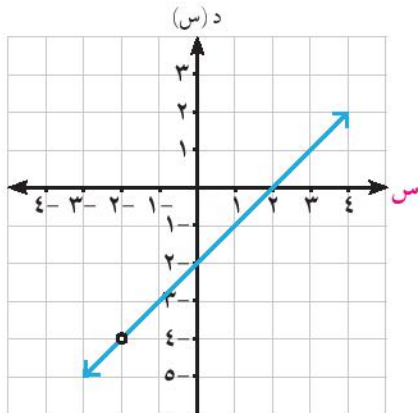
من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

س $\leftarrow 2$

ب د (0)

د(س) $= 2 - x^2$



٥ الشكل البياني المقابل للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 2}$

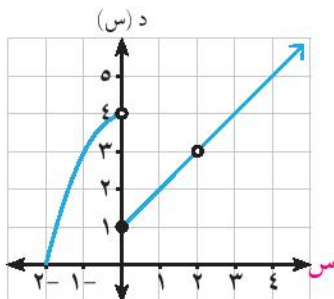
من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

س $\leftarrow 2$

ب د (-2)

د(س) $= \frac{x^2 - 2}{x + 2}$



٦ من الشكل البياني المقابل أوجد:

ب نها $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

س $\leftarrow 0$

أ د (0)

د نها $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

س $\leftarrow 2$

ج د (2)

ثانيًا: إيجاد نهاية الدالة جبريًا:

٧ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x + 4)$ حيث $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				←	؟	→			

٨ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1)$ $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)				←	؟	→			

٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)				←	؟	→			

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				←	؟	→			

إيجاد نهاية الدالة جبرياً

Finding the Limit of a Function Algebraically

في هذا الدرس نتعرف على بعض الطرق والنظريات التي تمكننا من حساب نهاية دالة عند نقطة دون الحاجة إلى عمل جدول وإيجاد النهاية عددياً أو رسم منحني الدالة وإيجاد النهاية بيانياً.

نشاط



إذا كانت د(س) = $s^2 + 1$ ، د(س) = $s^2 + 3$ أوجد

١ - د(١)، نها د(س) (ماذا تلاحظ)
س ← ١

٢ - د(٠)، نها د(س) (ماذا تلاحظ)
س ← ٠

تعلم



نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of a Polynomial Function

نظرية

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، $a \in \mathbb{R}$

فإن: نها د(س) = د(ا)
س ← ا

مثال



١ أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ نها (س) = $s^3 + 5$ س ← ٢
ب نها (س) = $s^3 - 4$ س ← ٣

الحل

أ نها (س) = $s^3 + 5$ س ← ٢
٢ = ٥ + ٨ = ١٣

(بالتعويض المباشر)

ب نها (س) = $s^3 - 4$ س ← ٣
٣ = ٢٧ - ٤ = ٢٣ لاحظ أن د(س) = ٢٣ ثابتة لكل قيم س $\in \mathbb{R}$

حاول أن تحل

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ نها (س) = $s^2 - 5$ س ← ١
ب نها (س) = $s^3 + s - 4$ س ← ٢

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة في إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية
- نها (س) = $\frac{s^2 - 1}{s - 1}$ س ← ١
- نها (س) = $\frac{s^2 - 1}{s - 1}$ س ← ١

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نظرية

نها (س) = م
س ← اإذا كان نها د (س) = ل
س ← ا

فإن:

١- نها ك د (س) = ك. ل
س ← ا حيث ك ∈ ع٢- نها (د (س) ± و (س)) = ل ± م
س ← ا٣- نها د (س) . و (س) = ل . م
س ← ا بشرط م ≠ ٠٤- نها (د (س) / و (س)) = ل / م
س ← ا بشرط م ≠ ٠٥- نها (د (س))^ن = ل^ن
س ← ا حيث ل > ٠

مثال

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

$$\text{أ) نها } \frac{٧+٣س}{٥-٢س+٣س^٢} \text{ س} \leftarrow ١$$

الحل

$$\text{أ) نها } \frac{٧+٣س}{٥-٢س+٣س^٢} \text{ س} \leftarrow ١ = \frac{٧+١ \times ٣}{٥ - (١-) ٢ + ٢(١-)} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{ب) نها } \frac{ظا س}{س} \text{ س} \leftarrow \frac{\pi}{٤} = \frac{ظا س}{س} \text{ س} \leftarrow \frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$$

٦ حاول أن تحل

٢ احسب النهايات الآتية:

$$\text{أ) نها } \frac{٣-٢س}{١+٢س} \text{ س} \leftarrow ٢$$

$$\text{ب) نها } س \text{ س} \leftarrow ٢$$

نظرية

إذا كانت د (س) = و (س) لكل س ∈ ع - {ا}

وكانت نها و (س) = ل فإن نها د (س) = ل
س ← ا س ← ا

مثال

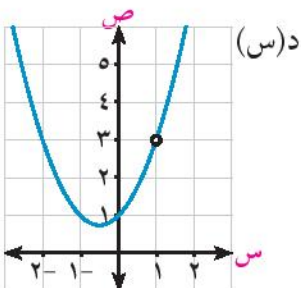
$$\text{٣ أوجد: نها } \frac{١-٣س}{١-س} \text{ س} \leftarrow ١$$

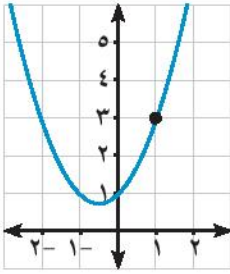
الحل

$$\text{نلاحظ أن د (س) = } \frac{١-٣س}{١-س} \text{ غير مُعَيَّنة عند س = ١}$$

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفريّة

فإنه يمكن كتابة د (س) على الصورة:





و(س)

$$د(س) = \frac{(س) \cdot (س + 1 + س^2)}{(س)} = س + 1 + س^2 = و(س)$$

من ذلك نجد أن د(س) = و(س) لكل س ≠ 1

وحيث أن نها $\frac{1}{س}$ (س) = 2 (كثيرة الحدود)

فإنه طبقاً للنظرية السابقة نستنتج أن نها $\frac{1}{س}$ د(س) = 3

$$\therefore \text{نها } \frac{1}{س} = \frac{س^2 - 1}{س} = 3$$

مثال

استخدام المرافق

٤ أوجد النهايات الآتية:

ب) نها $\frac{س^2 - 5س}{س^3 - 4س + 3}$

أ) نها $\frac{س^3 - 3س - 1}{س^4 - 4س}$

الحل

لاحظ أن: د(س) = $\frac{س^3 - 3س - 1}{س^4 - 4س}$ غير معينة عند س = 4

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - 4) في كل من البسط و المقام.

$$\frac{س^3 - 3س - 1}{(س - 4)(س^2 + 4س + 16)} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س^2 + 4س + 16} = \frac{س^3 - 3س - 1}{س^2 + 4س + 16} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س - 4}$$

$$= \frac{س^3 - 3س - 1}{(س - 4)(س^2 + 4س + 16)} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س - 4}$$

$$= \frac{1}{4} = \frac{1}{س^2 + 4س + 16} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س - 4}$$

ب) نها $\frac{س^2 - 5س}{س^3 - 4س + 3} = \frac{س^2 - 5س}{س^3 - 4س + 3} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س^2 + 4س + 16} = \frac{س^2 - 5س}{س^3 - 4س + 3} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س^2 + 4س + 16}$

$$= \frac{س(س - 5)(س^2 + 4س + 16)}{(س - 3)(س^2 + 4س + 16)} = \frac{س(س - 5)}{س - 3}$$

$$= \frac{س(س - 5)}{س - 3} = \frac{س(3 - 5)}{3 - 3} = 0 = (3 - 5) = 30$$

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد النهايات الآتية:

أ) نها $\frac{س^2 - 1}{س - 5}$

ب) نها $\frac{س + 1}{س^2 - 5س + 1}$

مكتبة

$$\frac{1}{s} = \frac{s - 1}{s(s - 1)} = \frac{s - 1}{s^2 - s}$$

مثال

$$19 = {}^{18}1 \times 19 = \frac{{}^{19}1 - {}^{19}0}{1 - 0} \frac{\text{نہا}}{1 \leftarrow \text{س}} = \frac{1 - {}^{19}0}{1 - 0} \frac{\text{نہا}}{1 \leftarrow \text{س}} \quad (5)$$

ج

نتائج على النظرية:

۱- نہا $\frac{(س + ۱) - ۱ - ۱}{س} = ۱ - ۱$ س ← *

$$-۲ \quad \frac{\text{نہا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{\text{س} \text{ن} - \text{ا} \text{ن}}{\text{س} \text{م} - \text{ا} \text{م}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \text{ا} \text{ن} - \text{م}$$

مثال

٦ أوجد:

ا) $\frac{720 - 4(s + 5)}{s}$ نہا
س ← ۰

ب) $\frac{\text{س}^{-5} ۳۲}{\text{س}^{-۲} ۴}$ نہا
س ← ۲

ج) $\frac{1 - (1+s)^{-n}}{s}$ نہا
 س ← ۰

۵) $\frac{۳۲ + ۰(۴ - \text{س})}{۲ - \text{س}}$ نہا
س ← ۲

الحل

$$0.0 = 30 \times 4 = \frac{40 - 4(0 + s)}{s} \text{ نهـا } = \textcircled{1} \text{ سـ } \leftarrow$$

$$۲۰ = ۲۲ \times \frac{۵}{۲} = \frac{۵۲-۵}{۲۲-۲} \frac{\text{س ۱}}{\text{س ۲}} = \text{ب}$$

ج) نہا $\leftarrow$ س $\frac{11 - 11(1 + س)}{س}$ $11 = 1 - 11 \times 11$

$$\frac{{}^{\circ}(٢-) - {}^{\circ}(٤-س)}{(٢-) - (٤-س)} \frac{\text{نہا}}{٢ \leftarrow س} = \frac{٣٢ + {}^{\circ}(٤-س)}{٢-س} \frac{\text{نہا}}{٢ \leftarrow س} \quad (٥)$$

$$\Lambda \cdot = {}^{\varepsilon}(\gamma_-) \circ =$$

٩ حاول أن تحل

٤ أوجد:

ا) $\frac{\text{س} - 620}{\text{س} + 0}$ نہا $\frac{\text{س} - 0}{\text{س} + 0}$

ج: $\frac{81 - 4(3 + 5)}{5}$ نیا

(ج) نہا
س ← ۰



تمارين (٢-٣)



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $(1 + s^3)$ س $\leftarrow 2$ =
- ٢) نها $\frac{s^2 - s}{s}$ س $\leftarrow 0$ =
- ٣) نها $\frac{s^2 - 4}{s^2 - 2}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٤) نها $\frac{s^3 - 8}{s^2 - 1}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٥) نها $\frac{s^0 - 1}{s - 1}$ س $\leftarrow 1$ =
- ٦) نها $\frac{s^3 - 8}{s^2 - 1}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٧) نها $\frac{s^2 + s - 2}{s - 1}$ س $\leftarrow 1$ =
- ٨) نها $\frac{s^4 - 16}{s^2 - 4}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٩) نها $\frac{s^0 - 32}{s^3 - 8}$ س $\leftarrow 2$ =
- ١٠) نها $\left(\frac{s^2 - 1}{s - 1} \right)$ س $\leftarrow 1$ =
- ١١) نها $\frac{s^2 - s - 2}{s^2 - 4}$ س $\leftarrow 2$ =
- ١٢) نها $\frac{s^7 + 1}{s^0 + 1}$ س $\leftarrow 1$ =

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١٣) نها $\frac{s^2 - 1}{s}$ تساوي:

أ) ٠

ب) ١

ج) ٢

د) ليس للدالة نهاية

١٤) نها $\frac{s^2 + s}{s + 1}$ تساوي:

أ) ١

ب) صفر

ج) ١

د) ٣

١٥) نها $\frac{س^٢ - ٨}{س - ٢}$ تساوى:

أ) ٢

ب) ٤

ج) ٦

د) ٨

١٦) نها $\frac{جاس}{س}$ تساوى

أ) ١

ب) $\frac{\pi}{٢}$

ج) $\frac{٢}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

١٧) نها $\frac{طاس}{س}$ تساوى

أ) $\frac{\pi}{٢}$

ب) ١

ج) $\frac{٤}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

١٩) نها $\frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

٢١) نها $\frac{جتا س}{س}$

٢٣) نها $\frac{س - ٩}{س^٢ - ٨١}$

٢٥) نها $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س}$

٢٧) نها $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$

١٨) نها $\frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س - ٣}$

٢٠) نها $\frac{س(س - ٢ - جاس)}$

٢٢) نها $\frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

٢٤) نها $\frac{س^٢ + ٤}{س - ٤}$

٢٦) نها $\frac{٤س^٢ - ٦٤}{س - ٤}$

$$\textcircled{29} \quad \text{نها} \quad \frac{5س^2 + 5}{3س^3 - 2س} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{31} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 3س - 3}{9س^4 - 2س^3} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{32} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 + 5س - 3}{6س^2 + 3س - 6} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{35} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^2(1+س)}{س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{37} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 + 2س - 2}{1س - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{39} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 + 2س - 2}{1س^2 - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{41} \quad \text{نها} \quad \frac{3س^2 - 3س - 3}{3س - 3} \quad \begin{matrix} 3 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{42} \quad \text{نها} \quad \frac{4س^2 + 9س - 16}{س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{45} \quad \text{نها} \quad \frac{16س^4 - 2}{س} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{47} \quad \text{نها} \quad \frac{243س^5 - 3}{س} \quad \begin{matrix} 3 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{49} \quad \text{نها} \quad \frac{64س^6 - 32س^5}{32س^5 - 32س^4} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{28} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 2س - 2}{1س + 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{30} \quad \text{نها} \quad \frac{8س^2 - 3س - 4}{2س^2 - 2س - 2} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{32} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 2س - 6}{2س^2 - 2س - 2} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{34} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^2(1-2س)}{5س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{36} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{4س^3 + 3}{1س + 1} - \frac{2س^2}{1س + 1} \right) \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{38} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 5س - 2}{س^2 + 2س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{40} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^2 - 1}{1س - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{42} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^2 + 1 - 1}{س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{44} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^7 - 1}{1س - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{46} \quad \text{نها} \quad \frac{64س^2 - 4}{س - 4} \quad \begin{matrix} 4 \leftarrow س \\ 4 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{48} \quad \text{نها} \quad \frac{128س^7 - 4س^2}{4س^2 - 4س - 4} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{50} \quad \text{نها} \quad \frac{128س^2 - 2س^2}{16س^2 - 4س} \quad \begin{matrix} 4 \leftarrow س \\ 4 \leftarrow س \end{matrix}$$

Limit of a Function at Infinity

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية
- باستخدام الحل الجبري.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية
- باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.

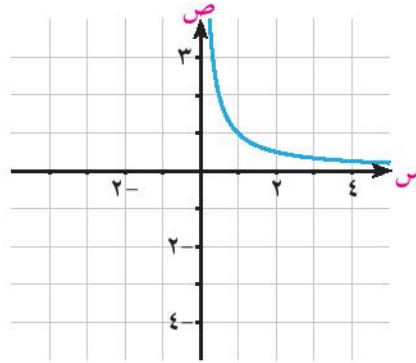
Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نحتاج في كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow \infty$ والنشاط التالي يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب في رسم الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$.
ماذا نلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم x الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟
من الشكل المرسوم نلاحظ أن:

إنه كلما زادت قيم x واقتربت من ما لانهاية اقتربت قيم $f(x)$ من الصفر، لذلك نقول إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من ما لانهاية تساوي صفر.

تعلم

Limit of a Function at Infinity

نهاية دالة عند اللانهاية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{حيث } n \in \mathbb{C}^+, \text{ ثابت}$$



قواعد أساسية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{إذا كان } n \text{ عددًا موجبًا أكبر من الواحد فإن } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند $x \rightarrow \infty$ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما $x \rightarrow \infty$

مثال

١ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right)$ ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right)$

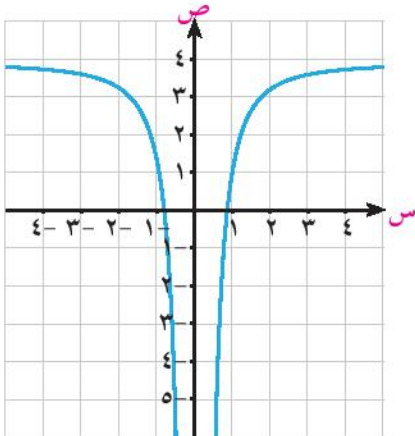
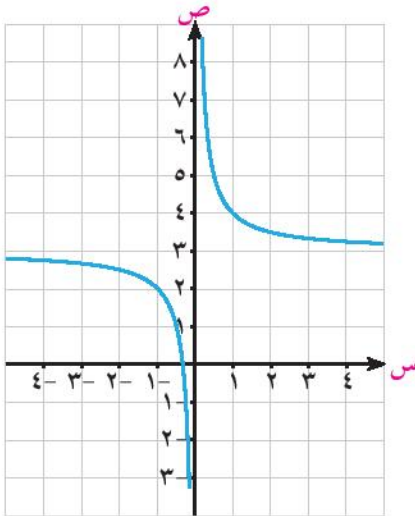
ثم تحقق من ذلك بيانياً باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} + \lim_{s \rightarrow \infty} 3$

$3 = 3 + 0 =$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right) = 3$



ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s} - \lim_{s \rightarrow \infty} 4$

$= \frac{3}{\infty} - 4 = 0 - 4 = -4$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right) = -4$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{0}{s}\right)$ ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{s}\right)$

مثال

٢ أوجد: $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 + 4s - 5)$

الحل

$\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 + 4s - 5) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 + \lim_{s \rightarrow \infty} 4s - \lim_{s \rightarrow \infty} 5$ وذلك بأخذ s^3 عامل مشترك

$= \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \times \left(1 + \frac{4}{s} - \frac{5}{s^3}\right) = \infty \times 1 = \infty$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 + 7s + 2)$ نها

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 - 4s - s^2)$ نها

مثال

٣ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

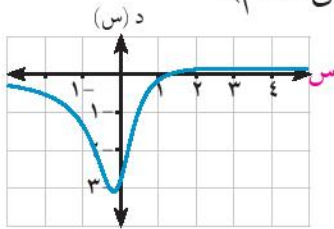
أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3}$ نها

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3}$ نها

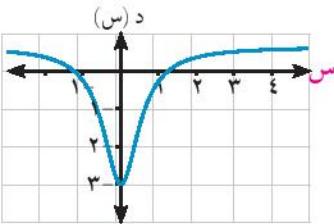
ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3}$ نها

الحل

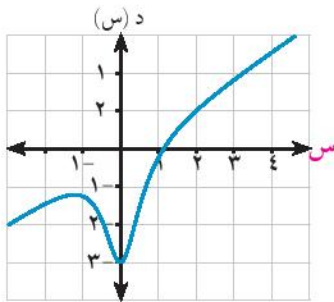
في كل الحالات نقسم كل من البسط والمقام على s^3 (أعلى قوة للمتغير s في المقام).



أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s^3}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1} = 0$



ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s^3}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1} = 0$



ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s^3}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1} = 0$

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد نها $\frac{f(s)}{g(s)}$ حيث كل من $f(s)$ ، $g(s)$ دوال كثيرات الحدود فإن:

◀ النهاية تعطى عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام.

◀ النهاية تُساوى صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

◀ النهاية تعطى $(\infty - \text{أو } \infty)$ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

◀ يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولا تعتبر طريقة للحل.

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^5 - 3s^3 + 1}{s^2}$ نها

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^4 - 3s^5 + 8}{s^2 - 3s^4}$ نها

ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^7 - 1}{s^3 + 2s - 1}$ نها



تمارين (٣-٣)



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $\left(\frac{3}{s} + 1\right)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٢) نها $\left(2 - \frac{3}{s}\right)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٣) نها $(7-)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٤) نها $(s^2 - 3)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٥) نها $\frac{1+s^2}{s}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٦) نها $\frac{s^2 - 5}{1+s^2}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٧) نها $\frac{s^2 + 3}{s^2 - 5}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٨) نها $\frac{s^3}{1-s^2}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٩) نها $\left(\frac{4}{s} + \frac{7}{s} - 3\right)$ $\infty \leftarrow s$ =

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١٠) نها $\frac{s^6}{s^2 + 3}$ تُساوي:

أ) صفر	ب) ٢	ج) ٣	د) ∞
--------	------	------	-------------
- ١١) نها $\sqrt{1 + \frac{4}{s}}$ $\infty \leftarrow s$

أ) صفر	ب) ١	ج) ٢	د) ∞
--------	------	------	-------------
- ١٢) نها $\frac{s+3}{s^2-2}$ $\infty \leftarrow s$

أ) صفر	ب) $\frac{1}{2}$	ج) $\frac{3}{2}$	د) ∞
--------	------------------	------------------	-------------
- ١٣) نها $\frac{1+s^2}{1-s^2}$ $\infty \leftarrow s$

أ) صفر	ب) $\frac{1}{2}$	ج) ١	د) ∞
--------	------------------	------	-------------
- ١٤) نها $\sqrt{\frac{s+1}{1-s^4}}$ $\infty \leftarrow s$

أ) ١-	ب) $\frac{1}{4}$	ج) $\frac{1}{2}$	د) ١
-------	------------------	------------------	------

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

$$\textcircled{15} \quad \text{نها} \quad \frac{3}{2s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{16} \quad \text{نها} \quad (s^3 + 5s^2 + 1) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{17} \quad \text{نها} \quad \frac{7-2s}{3+2s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{18} \quad \text{نها} \quad \frac{s^2}{3+s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{19} \quad \text{نها} \quad \frac{4s^2}{3+s^2} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{20} \quad \text{نها} \quad \frac{5-6s-s^2}{4+s^2+s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{21} \quad \text{نها} \quad \frac{1-s^2}{1+s^4+s^2} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{22} \quad \text{نها} \quad \frac{s^2-2}{1-s^3+s^4+1} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{23} \quad \text{نها} \quad \frac{1-2s^2}{1-s^4-s^5-1} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{24} \quad \text{نها} \quad \frac{6-2s^2}{(1-s)^2} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{25} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{2s^2}{2(3+s)} + 7 \right) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{26} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{5s}{s+2} - \frac{1}{2s^3} \right) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{27} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{3s^3}{3-s} + \frac{s}{1+s^2} \right) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{28} \quad \text{نها} \quad \frac{-s}{2s+4\sqrt{s}} \quad s \leftarrow \infty$$

حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

حساب المثلثات (باللاتيني Trigonometry) هو أحد فروع مادة الرياضيات بوجه عام والهندسة العامة بوجه خاص حيث يوجد العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه في صورة دوال مثلثية (دالة الجيب، دالة جيب التمام، دالة الظل،)، وكان قدماء المصريين أول من عمل بقواعد حساب المثلثات، إذ استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم، ترجع معرفتنا لعلم حساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها وصاغوا نظرياتها، كما قدم البيروني برهاناً لمساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه. كما أن الغرب عرفوا هندسة أقليدس عن طريق العرب. ومن مآثر العرب في حساب المثلثات هو استخدامهم النسب المثلثية الست حيث كشف التبانى العلاقة الخاصة بالمثلث الكروي القائم الزاوية كما اكتشف قانون إيجاد ارتفاع الشمس.

لعلم حساب المثلثات تطبيقات كثيرة في حساب المسافات والزوايا التي تستخدم في إنشاء المباني والملاعب الرياضية والطرق وفي صناعة المحركات والأجهزة الكهربائية والميكانيكية، كما يستخدم حساب المثلثات في حساب المسافات الجغرافية والفلكية وفي أنظمة الاستكشافات بالأقمار الصناعية.

مخرجات تعلم الوحدة :

- في نهاية هذه الوحدة وتنفيذاً للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:
- يُعرف قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث، والذي ينص على أنه في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب وجيب التمام لأي مثلث في حل هذا المثلث.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانون (قاعدة الجيب، وجيب التمام) لأي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث، والذي ينص على أنه في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث.
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث.
- يُعرف قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.

المصطلحات الأساسية

Largest Angle	أكبر زاوية	Shortest Side	أقصر ضلع	Trigonometry	حساب مثلثات
The Area of the Triangle	مساحة المثلث	Longest Side	أطول ضلع	Sine Rule	قاعدة الجيب
	أطوال أضلاع المثلث	Missing Length	طول ضلع مجهول	Cosine Rule	قاعدة جيب التمام
The Sides Lengths of a Triangle		UnKnown Angle	زاوية مجهولة	Acute Angle	زاوية حادة
The Opposite Angle of an Side	زاوية مقابلة	Smallest Angle	أصغر زاوية	Obtuse Angle	زاوية منفرجة
				Right Angle	زاوية قائمة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١-٤): قانون (قاعدة) الجيب

الدرس (٢-٤): قانون (قاعدة) جيب التمام

مخطط تنظيمي للوحدة



قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

تمهيد

سبق أن تعلّمت كيفية حل المثلث القائم الزاوية، والآن سوف نتعامل مع مثلثات غير قائمة الزوايا لتتعلم كيفية إيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا هذه المثلثات. تعلم أنّ كل مثلث يتكون من ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا، وإذا أعطيت أي ثلاثة عناصر منها (على أن يكون من بينها طول أحد الأضلاع على الأقل) فإنه يمكنك إيجاد العناصر الثلاثة الأخرى، وذلك باستخدام قانوني الجيب وجيب التمام، وعندئذ نقول: إنه أمكننا حل المثلث.

تعلم

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة الجيب.
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها

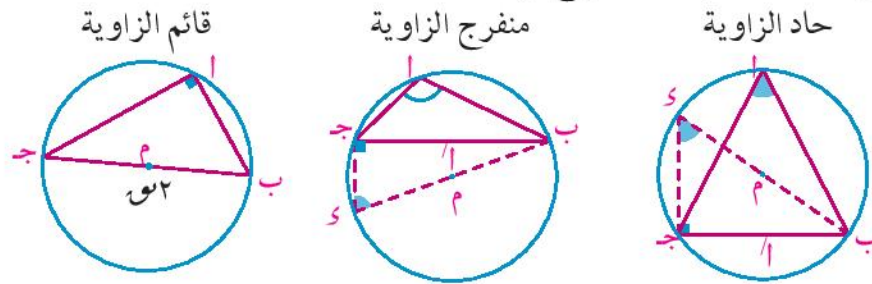
المصطلحات الأساسية

- Sine Rule قاعدة الجيب
- Acute Angle زاوية حادة
- Obtuse Angle زاوية منفرجة
- Right Angle زاوية قائمة

The Sine Rule

قانون (قاعدة) الجيب

تمثل الأشكال الآتية ثلاثة أنواع من المثلثات.



شكل (٣)

شكل (٢)

شكل (١)

$$\angle A = 90^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - \angle C$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

في الشكل (١) حيث ΔABC حاد الزوايا

وبالمثل يمكن استنتاج أن

في الشكل (٢) حيث ΔABC منفرج الزاوية في A

$$\angle A = 180^\circ - \angle C \Rightarrow \sin A = \sin C$$

$$[\text{لاحظ أن: } \sin(180^\circ - \angle C) = \sin C]$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

وبالمثل يمكن استنتاج أن

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

«استعن بمعلمك لإثبات صحة ذلك»

لاحظ أن

أ، ب، ج، د رموز لأطوال الأضلاع ب، ج، د، أ في ΔABC على الترتيب.

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تذكر أن

الزوايا المحيطة التي تحصر نفس القوس في الدائرة متساوية في القياس. الزاوية المحيطة المرسومة في نصف دائرة قائمة.

والآن: حاول إثبات نفس العلاقة السابقة في $\triangle$ أ ب ج القائم الزاوية في أ وبصفة عامة قانون (قاعدة) الجيب في المثلث أ ب ج هي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{حيث } c \text{ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث.}$$

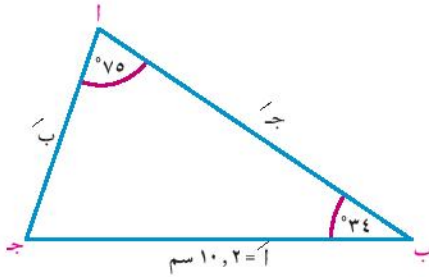
أي أن: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.

استخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطول أضلاع أي مثلث:

مثال

١ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle A = 70^\circ$ و $\angle B = 34^\circ$ ، أوجد كلاً من ب، ج لأقرب عدد صحيح.

الحل



$$\begin{aligned} \angle C &= 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (70^\circ + 34^\circ) = 76^\circ \\ \therefore \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \end{aligned}$$

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد ب، ج:

$$\frac{a}{\sin 76^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ} = \frac{c}{\sin 34^\circ}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

$$b \approx \frac{a \times \sin 70^\circ}{\sin 76^\circ} \approx \frac{10.2 \times \sin 70^\circ}{\sin 76^\circ} \approx 9.8$$

أبدأ → 1 0 . 2 × sin 3 4 ° ÷ sin 7 6 ° =

باستخدام الآلة الحاسبة

$$c \approx \frac{a \times \sin 34^\circ}{\sin 76^\circ} \approx \frac{10.2 \times \sin 34^\circ}{\sin 76^\circ} \approx 5.8$$

أبدأ → 1 0 . 2 × sin 3 4 ° ÷ sin 7 6 ° =

٢ حاول أن تحل

١ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle A = 61^\circ$ و $\angle B = 71^\circ$ ، أوجد كل من أ، ج.

إيجاد طول أكبر ضلع في المثلث

مثال

٢ أوجد طول أكبر ضلع في المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle A = 49^\circ$ و $\angle B = 76^\circ$ ، ج = 11.22، أوجد أطول ضلع في المثلث.

تذكر أن



أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية والعكس أصغر زاوية في المثلث هي المقابلة لأصغر ضلع.

الحل

$$\therefore \angle ج = 180^\circ - [\angle ا + \angle ب] =$$

$$180^\circ - (76^\circ 17' + 49^\circ 11') = 54^\circ 32'$$

$\therefore$ أكبر ضلع هو المقابل لزاوية ب، أي أن المطلوب هو إيجاد ب

$$\therefore \frac{\sin ج}{ج} = \frac{\sin ب}{ب} \quad \therefore \frac{\sin 54^\circ 32'}{11.22} = \frac{\sin 76^\circ 17'}{ب}$$

$$\therefore ب = \frac{11.22 \times \sin 76^\circ 17'}{\sin 54^\circ 32'} \approx 13.28 \text{ سم}$$

٤ حل أن تحل

٢ أوجد طول أصغر ضلع في المثلث أ ب ج، الذي فيه $\angle ا = 43^\circ$ ، $\angle ب = 65^\circ$ ، $ج = 8.4$ سم تقريباً الناتج لرقم عشري واحد.

Solving the Triangle Using the Sine Rule

حل المثلث باستخدام قانون الجيب

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات العناصر المجهولة فيه إذا عُلِمَ منه ثلاثة عناصر من العناصر الستة بشرط أن يكون من بين العناصر المعلومة طول أحد الأضلاع على الأقل، لأنه لا يمكن حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسات ثلاث زوايا، ويسمح لنا قانون الجيب بحل المثلث، إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه.

حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول أحد أضلاعه:

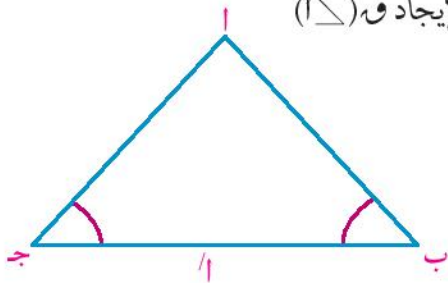
لاحظ أنه لحل المثلث أ ب ج إذا عُلِمَ فيه قياسا الزاويتين ب، ج والطول أ نتبع التالي:

١- نستخدم العلاقة $\angle ا = 180^\circ - (\angle ب + \angle ج)$ لإيجاد $\angle ا$

٢- نستخدم قانون الجيب: $\frac{\sin ا}{ا} = \frac{\sin ب}{ب}$ لإيجاد ب

٣- نستخدم قانون الجيب: $\frac{\sin ا}{ا} = \frac{\sin ج}{ج}$ لإيجاد ج

وفيما يلي أمثلة توضّح ذلك:



مثال

٢ حل المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle ا = 36^\circ$ ، $\angle ب = 48^\circ$ ، $ا = 8$ سم تقريباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل

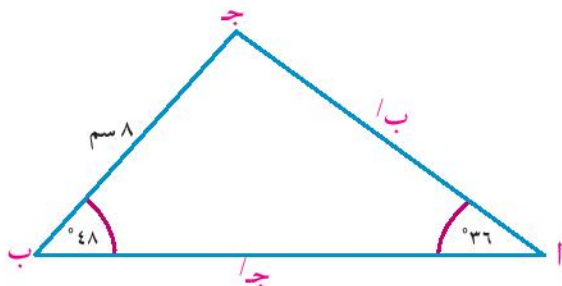
نوجد $\angle ج$ من العلاقة:

$$\angle ج = 180^\circ - (\angle ا + \angle ب) = 96^\circ$$

نوجد ب من قانون الجيب كالآتي:

$$\therefore \frac{\sin ا}{ا} = \frac{\sin ب}{ب} \quad \therefore \frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{ب}$$

$$\therefore ب = \frac{8 \times \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 10.115 \text{ سم}$$



ابدأ → $8 \times \sin 48 \div \sin 36 = 6$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

$$\frac{\text{ج}^1}{\text{جا} 36} = \frac{\text{ج}^2}{\text{جا} 48} \therefore \frac{\text{ج}^2}{\text{جا} 48} = \frac{8}{\text{جا} 36}$$

$$\therefore \text{ج}^2 = \frac{8 \times \text{جا} 48}{\text{جا} 36} \approx 13,035 \text{ سم}$$

ابدأ → $8 \times \sin 96 \div \sin 36 = 6$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

٩ حاول أن تحل

٣ حل المثلث س ص ع فيه ص = ٢, ١٠٧ سم، و (س) = ٣٣°١٦، و (ع) = ٤٤°١٩

Geometrical Applications

تطبيقات هندسية

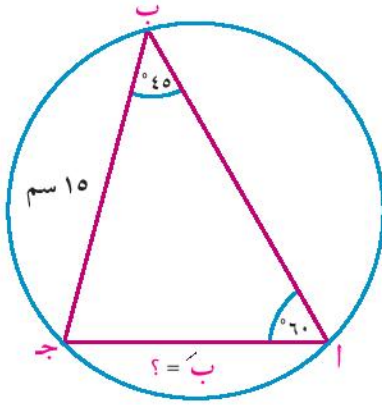
العلاقة بين قاعدة الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث

سبق أن علمنا أن: $\frac{\text{ج}^1}{\text{جا} 1} = \frac{\text{ج}^2}{\text{جا} 2} = \frac{\text{ج}^3}{\text{جا} 3}$ حيث 2 هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث

مثال

٤ ا ب ج مثلث فيه أ = ١٥ سم، و (ا) = ٦٠°، و (ب) = ٤٥°، أوجد ج وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ج مقرباً الناتج لأقرب عدد صحيح.

الحل



نوجد و (ج) كالآتي:

$$\text{و (ج)} = 180^\circ - [60^\circ + 45^\circ]$$

$$= 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

نستخدم قانون الجيب لإيجاد ج:

$$\frac{\text{ج}^1}{\text{جا} 1} = \frac{\text{ج}^2}{\text{جا} 2} \therefore \frac{15}{\text{جا} 60} = \frac{\text{ج}^2}{\text{جا} 75}$$

$$\text{ج}^2 = \frac{15 \times \text{جا} 75}{\text{جا} 60} \approx 17 \text{ سم}$$

لإيجاد نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ج نستخدم العلاقة:

$$\frac{1}{\text{جا} 1} = \frac{2}{\text{جا} 2} \therefore \frac{1}{\text{جا} 60} = \frac{2}{\text{جا} 75}$$

$$\therefore 2 = \frac{1}{\text{جا} 60} \times \text{جا} 75 \approx 9 \text{ سم}$$

ابدأ → $15 \div (\sin 60 \times 2) = 9$

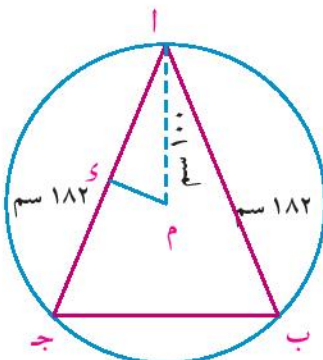
٩ حاول أن تحل

٤ ا ب ج مثلث فيه و (ا) = ٦٤°٢٣، و (ب) = ٧٢°٢٣، ج = ١٨ سم، أوجد كل من أ، ب وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ج.

مثال

تذكر أن

مساحة سطح المثلث =
 $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أي ضلعين
 $\times$ جيب الزاوية بينهما



- ٥) أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م، وطول نصف قطرها ١٠٠ سم فإذا
- كان أ ب = أ ج = ١٨٢ سم أوجد
- أ) طول ب ج لأقرب رقم عشري واحد.
- ب) مساحة سطح المثلث أ ب ج لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

نوجد و (ب) كالآتي:

في $\triangle$ أ ب ج يكون:

$$\frac{أ ج}{\sin ٦٠} = \frac{ب ج}{\sin ٦٠} \quad (\text{قاعدة الجيب})$$

$$\text{ب ج} = \frac{١٨٢}{\sin ٦٠} \times \sin ٦٠ = ١٨٢$$

$$\therefore \text{و (ب) = } ١٨٢ \times ٢ = ٣٦٤$$

(و (ب) = و (ب) لأن المثلث أ ب ج متساوي الساقين وكلاهما زاوية حادة)

نوجد و (أ) كالآتي:

$$\text{و (أ) = } ١٨٠ - ٦٠ - ٦٠ = ٦٠$$

نوجد طول ب ج باستخدام قانون الجيب كالآتي:

$$\therefore \frac{١٨٢}{\sin ٦٠} = \frac{\text{ب ج}}{\sin ٦٠} \Rightarrow \text{ب ج} = \frac{١٨٢ \times \sin ٦٠}{\sin ٦٠} = ١٨٢$$

ابداً → 1 8 2 × sin 4 8 , , , 5 9 , , , 2 2 , , ,) =

sin 6 5 , , , 3 0 , , , 1 9 , , ,) =

مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{1}{2} \times \text{أ ب} \times \text{أ ج} \times \sin ٦٠$

$$= \frac{1}{2} \times ١٨٢ \times ١٨٢ \times \sin ٦٠ = ١٢٤٩٧ \text{ سم}^2$$

٦) حلول أن تحل

- ٥) أ ب ج مثلث فيه أ ب = أ ج = ١٠,٣ سم، مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨,٤ سم أوجد:

أ) طول القاعدة ب ج

ب) مساحة سطح المثلث أ ب ج

Life Applications on the Sine Rule

تطبيقات حياتية على قاعدة الجيب

يُمكن استخدام قاعدة الجيب في حل الكثير من التطبيقات وذلك برسم مثلث ثم حل هذا المثلث لإيجاد المطلوب.

مثال

٦

الربط بالرياضة: يُمثّل الشكل المقابل ثلاثة لاعبين من فريق كرة القدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث لأقرب قدم.

الحل

$$\angle ب = 180^\circ - (70^\circ + 47^\circ) = 63^\circ$$

والمسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث هي أ

$$\text{فيكون: } \frac{92}{\sin 63^\circ} = \frac{أ}{\sin 47^\circ} \therefore أ = \frac{92 \times \sin 47^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 76 \text{ قدمًا}$$

باستخدام الآلة الحاسبة $\rightarrow$ ابدأ $9 \ 2 \ \times \ \sin \ 4 \ 7 \) \div \ \sin \ 6 \ 3 \) \ =$

المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث هو تقريبًا ٧٦ قدمًا

٤ حل أن تحل

٦

أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني لأقرب قدم.

مثال

٧

الربط بالجغرافيا: في الشكل التالي ثلاثة مواقع جغرافية تُشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع أ، والموقع ب، ٢٣٦ مترًا، وكان قياس الزاوية عند الموقع ب يساوي 72° ، وقياس الزاوية عند الموقع أ تساوي 51° أوجد:

أ

المسافة بين الموقع ج والموقع ب مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

ب

مساحة الأرض التي تمثل المواقع أ، ب، ج رؤوسًا لها مقربًا الناتج لأقرب متر مربع.

الحل

أ

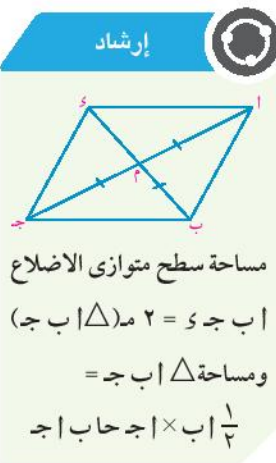
$$\text{نوجد } \angle ج = 180^\circ - (72^\circ + 51^\circ) = 57^\circ$$

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد طول ب ج:

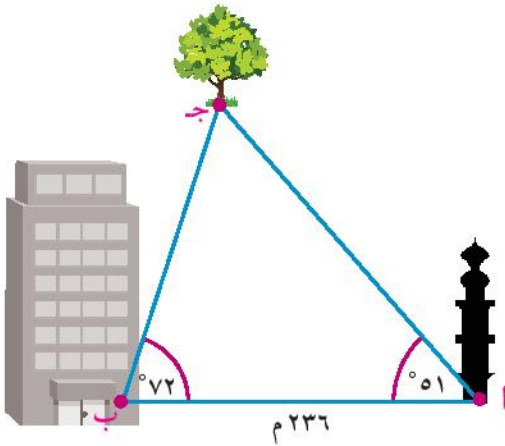
$$\therefore \frac{ب ج}{\sin 51^\circ} = \frac{236}{\sin 72^\circ} \therefore ب ج = \frac{236 \times \sin 51^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 219 \text{ مترًا}$$

ب

نوجد مساحة سطح المثلث أ ب ج بمعلومية أ، ج، و $\angle ب$



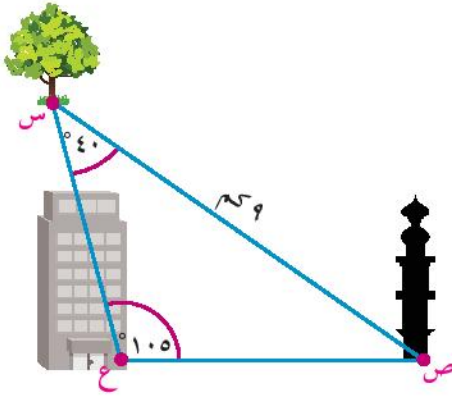
إرشاد
مساحة سطح متوازي الاضلاع
أ ب ج د = ٢ م (أ ب ج)
ومساحة أ ب ج =
 $\frac{1}{2} \times أ ب \times ج ح أ ب$



∴ مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{1}{2} \times \text{أ} \times \text{ج} \times \sin 40^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times 218,6871 \times 236 \times \sin 40^\circ \approx 24042 \text{ م}^2$$

٩ حلل أن تحل



٧ في الشكل المقابل ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع س والموقع ص تساوي ٩ كم، وقياس الزاوية عند الموقع س تساوي 40° ، وقياس الزاوية عند الموقع ع تساوي 105° ، فأوجد:

أ المسافة بين الموقع س والموقع ع.

ب

مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه المواقع الثلاثة س، ص، ع.

تمارين (٤-١)

أكمل:

- ١ في أيّ مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع
- ٢ أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $3\sqrt{10}$ سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث تساوي
- ٣ مثلث أ ب ج فيه $\angle \text{أ} = 60^\circ$ ، و $\angle \text{ج} = 40^\circ$ ، ج = ٨ سم فإن أ = سم
- ٤ في المثلث أ ب ج يكون $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ نو
- ٥ دائرة طول قطرها ٢٠ سم، تمر برؤوس المثلث أ ب ج الحاد الزوايا الذي فيه ب ج = ١٠ سم فإن $\angle \text{أ} = \dots^\circ$
- ٦ مساحة المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ٦ سم يساوي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

- ٧ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle \text{أ} = 30^\circ$ ، أ = ١٠ سم هو

أ ١٠ سم	ب ٢٠ سم	ج ٥ سم	د ٤٠ سم
---------	---------	--------	---------
- ٨ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ج يساوي ٤ سم، و $\angle \text{أ} = 30^\circ$ فإن طول أ هو

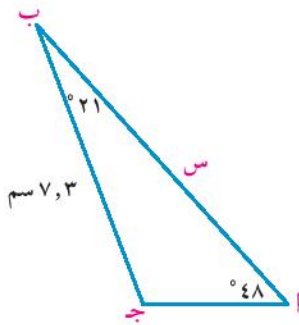
أ ٤ سم	ب ٢ سم	ج $3\sqrt{4}$	د $\frac{1}{16}$
--------	--------	---------------	------------------
- ٩ في المثلث أ ب ج يكون المقدار ٢ نو ج أ مساويًا

أ أ	ب ب	ج ج	د د (أ ب ج)
-----	-----	-----	-------------

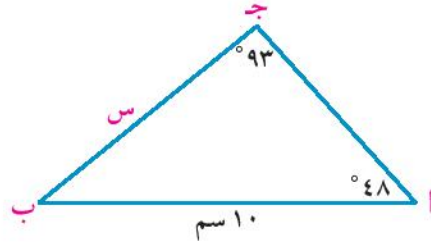
١٠ إذا كانت $ن$ هي طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث $س ص ع$ فإن $\frac{ص}{جاص}$ يساوي
 أ $ن$ ب $٢ ن$ ج $\frac{١}{٢} ن$ د $٤ ن$

١١ المثلث $ل م ن$ فيه، $و(ل) = ٣٠^\circ$ ، $م ن = ٧$ سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوي:
 أ ٧ سم ب $٣,٥$ سم ج ١٤ سم د $\frac{١٤}{٣}$

١٢ في المثلث $س ص ع$ إذا كانت $٢ جاص = ٤ جاص = ٢ جاص$ فإن $س : ص : ع$ تساوي
 أ $٤ : ٣ : ٢$ ب $٦ : ٤ : ٣$ ج $٦ : ٤ : ٢$ د $٦ : ٣ : ٤$



١٣ باستخدام قانون الجيب أوجد $س$ لأقرب جزء من عشرة.
 أ ١ ب ٢



حل كل مثلث أ ب ج باستخدام قانون الجيب إذا علمت أن:

١٤ و $(ا) = ٧٥^\circ$ ، و $(ب) = ٣٤^\circ$ ، $ا = ١٠,٢$ سم

١٥ و $(ا) = ١٩^\circ$ ، و $(ج) = ١٠٥^\circ$ ، $ج = ١١,١$ سم

١٦ و $(ا) = ١١٦^\circ$ ، و $(ج) = ١٨^\circ$ ، $ا = ١٧$ سم

١٧ و $(ا) = ٣٦^\circ$ ، و $(ب) = ٧٧^\circ$ ، $ب = ٢,٥$ سم

١٨ و $(ا) = ٤٩^\circ$ ، و $(ب) = ٦٧^\circ$ ، $ج = ١١,٢٢$ سم

١٩ و $(ب) = ١١٥^\circ$ ، و $(ج) = ١١^\circ$ ، $ج = ١٦,٢$ سم

أوجد طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ج في كل حالة مما يلي:

٢٠ و $(ا) = ٧٥^\circ$ ، $ا = ٢١$ سم

٢١ و $(ب) = ٥٠^\circ$ ، $ب = ٩٠$ سم

٢٢ و $(ا) = ٧٠^\circ$ ، $ا = ٨,٥$ سم

٢٣ و $(ج) = ١٠٢^\circ$ ، $ج = ١١$ سم

٢٤ في المثلث أ ب ج، و $(ا) = ٦٧^\circ$ ، و $(ج) = ٤٤^\circ$ ، $ب = ١٠٠$ سم، أوجد محيط المثلث أ ب ج ومساحة سطحه.

٢٥ في المثلث $س ص ع$ إذا كان $ص = ٦٨,٤$ سم، و $(ص) = ١٠٠^\circ$ ، و $(ع) = ٤٠^\circ$ ، أوجد $س$ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث $س ص ع$ ، ثم أوجد مساحة سطح المثلث.

٢٦ أ ب ج مثلث فيه و $(ا) = ٢٢^\circ$ ، و $(ب) = ٦٧^\circ$ ومحيطه ٣٠ سم أوجد كل من أ، ب لأقرب سنتيمتر

قانون (قاعدة) جيب التمام

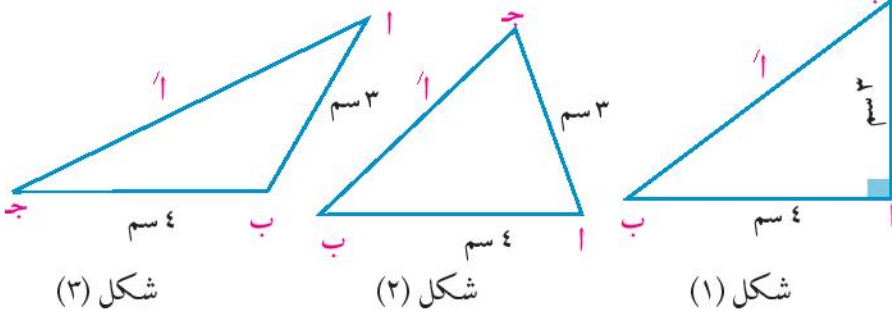
٢-٤

The Cosine Rule

فكر و ناقش



كل من المثلثات التالية لها ضلعان طولهما ٣ سم، ٤ سم.



سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

- Cosine Rule قاعدة جيب التمام
- Acute Angle زاوية حادة
- Obtuse Angle زاوية منفرجة
- Right Angle زاوية قائمة

أ من شكل (١) $\triangle$ قائمه، أوجد أ.

ب ما القيم الممكنة لأ في حالة ما تكون $\triangle$ زاوية حادة (شكل ٢)؟

ج ما القيم الممكنة لأ في حالة ما تكون $\triangle$ زاوية منفرجة (شكل ٣)؟

د هل يمكن حل المثلثين في شكلي (٢)، (٣) إذا علمت $\angle A$ باستخدام قانون الجيب؟ فسر إجابتك.

يُساعدنا قانون (قاعدة) جيب التمام في حل مثل هذه المثلثات.

تعلم



قانون (قاعدة) جيب التمام The Cosine Rule

في الشكل المقابل: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

في $\triangle ABC$: $CD = x$, $AD = y$, $DB = z$

(من فيثاغورث)

$$(b-x)^2 = y^2 + z^2 \quad \text{وبفك الأقواس}$$

$$(b-x)^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow b^2 - 2bx + x^2 = y^2 + z^2$$

$$b^2 - 2bx + x^2 = y^2 + z^2$$

$$b^2 = y^2 + z^2 + 2bx$$

لاحظ أن

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad \text{•}$$

$$z^2 = c^2 - x^2 \quad \text{•}$$

فكر: أوجد قيمة كل من b^2 , c^2 بدلالة a , b , c وقياسات زوايا $\triangle ABC$.

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه : فى أى مثلث أ ب ج يكون :

$$أ^2 = ب^2 + ج^2 - ٢ ب ج \cos \angle \alpha , \quad ب^2 = أ^2 + ج^2 - ٢ أ ج \cos \angle \beta , \quad ج^2 = أ^2 + ب^2 - ٢ أ ب \cos \angle \gamma$$

إيجاد طول ضلع مجهول فى مثلث .

مثال

١ س ص ع مثلث فيه س = ٢٤ سم ، ص = ٨ سم ، $\angle \epsilon = ٤٢^\circ$ أوجد ع مقرباً لرقم عشري واحد.

الحل

$$\begin{aligned} ع^2 &= س^2 + ص^2 - ٢ س ص \cos \angle \epsilon \\ &= (٢٤,٣)^2 + (٨,٢)^2 - ٢(٢٤,٣)(٨,٢) \cos ٤٢^\circ \\ &\approx ٢٨٦,٨٧ \\ ع &\approx ١٦,٩ \text{ سم} \end{aligned}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

ابداً → $24.3^2 + 8.2^2 - 2 \times 24.3 \times 8.2 \times \cos 42 = \sqrt{\quad} \text{ANS} =$

٤ حاول أن تحل

١ ا ب ج مثلث فيه أ = ٧٢ سم ، ب = ٥٨ سم ، $\angle \delta = ٦٤,٨^\circ$ أوجد ج مقرباً لرقم عشري واحد.

إيجاد قياس زاوية فى المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

سبق أن علمت أن :

$$أ^2 = ب^2 + ج^2 - ٢ ب ج \cos \angle \alpha \quad (\text{قاعدة جيب التمام})$$

$$\text{أي أن : } ٢ ب ج \cos \angle \alpha = ب^2 + ج^2 - أ^2$$

$$\text{فتكون : } \cos \angle \alpha = \frac{ب^2 + ج^2 - أ^2}{٢ ب ج} \quad (\text{بالقسمة على } ٢ ب ج)$$

كما يمكن استنتاج أن :

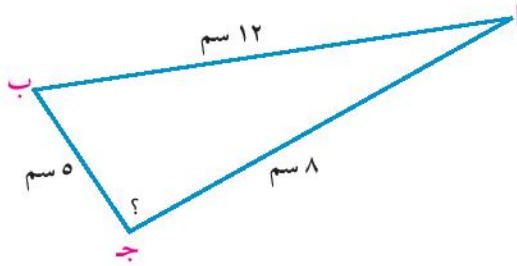
$$\cos \angle \alpha = \frac{ب^2 + ج^2 - أ^2}{٢ ب ج} , \quad \cos \angle \beta = \frac{أ^2 + ج^2 - ب^2}{٢ أ ج} , \quad \cos \angle \gamma = \frac{أ^2 + ب^2 - ج^2}{٢ أ ب}$$

استخدام قاعدة جيب التمام لأي مثلث في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث.

مثال

٢ من الشكل المقابل، أوجد و (جـ)

الحل



$$\text{جنا ج} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{قاعدة جيب التمام})$$

$$\text{(بالتعويض)} \quad \frac{12^2 + 8^2 - 5^2}{2 \times 12 \times 8} = \frac{100}{96} = \frac{25}{24}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي

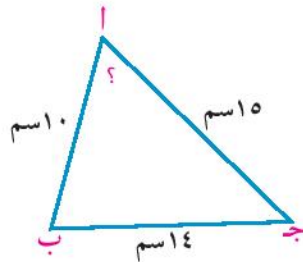
أبدأ → $5 \times^2 + 8 \times^2 - 12 \times^2 + (2 \times 5 \times 8) =$

$\text{SHIFT} \cos = \dots$ ونلاحظ أن جيب تمام الزاوية سالب وبالتالي جـ منفرجة فيكون

و (جـ) $\approx 133.25^\circ$

٩ حاول أن تحل

٢ من الشكل المقابل أوجد و (أ)



مثال

٣ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ل م ن ، إذا عُلِمَ أنَّ ل = ٧,٥ سم ، م = ١٢,٥ سم ، ن = ١٧,٥ سم ، ومن ذلك أثبت أنه في هذا المثلث يكون:

جنا - ٣٦٣ = جان + ٥ = ٠

الحل

أكبر زاوية هي المقابلة لأكبر ضلع؛ لذلك تكون ن هي أكبر زاوية في المثلث

$$\text{ويكون: جتا ن} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{17.5^2 + 12.5^2 - 7.5^2}{2 \times 17.5 \times 12.5} = \frac{1}{4}$$

∴ جتا ن = $\frac{1}{4}$ ∴ و (ن) $= 120^\circ$

أبدأ → $7 \cdot 5 \times^2 + 12 \cdot 5 \times^2 - 17 \cdot 5 \times^2 + (2 \times 7 \cdot 5 \times 12 \cdot 5) =$

$\div (2 \times 7 \cdot 5 \times 12 \cdot 5) =$

$\text{SHIFT} \cos \text{ANS}) = \dots$

الطرف الأيسر = جتا ن - ٣٦٣ = جان + ٥ = جتا ١٢٠ - ٣٦٣ = جان + ٥

= جان - ٣٦٣ = جان + ٥ = ٠ = الطرف الأيمن.

٩ حاول أن تحل

٢ المثلث أ ب ج إذا كان أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ج = ١٨ سم ، أثبت أن و (جـ) = ٢ و (أ) = ١

استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث

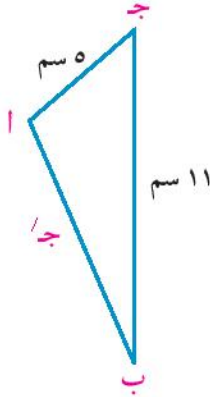
يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما وفي هذه الحالة يوجد مثلث وحيد.

حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

Solving the Triangle in Terms of Lengths of Two Sides and the Measure of the Included Angle

تذكر أن

حل المثلث يعني إيجاد عناصره المجهولة، وفي هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من $\angle$ ، و $\angle$ ، و $\angle$.



مثال

٤ حل المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle A = 11^\circ$ ، $\angle B = 5^\circ$ سم،

$$\angle C = 20^\circ$$

الحل

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 11^\circ - 5^\circ = 164^\circ$$

$$\therefore \angle C = 164^\circ$$

$$\therefore \angle C = 164^\circ$$

$$\approx 6.529 \text{ سم}$$

$$\rightarrow \text{ابدأ} \quad \sqrt{\quad} \quad 1 \quad 1 \quad x^2 \quad + \quad 5 \quad x^2 \quad - \quad 2 \quad \times \quad 1 \quad 1 \quad \times \quad 5 \quad \cos \quad 20 \quad =$$

معلومة مفيدة

عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة، يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلاً من استخدام قانون الجيب، وذلك لأن: في حالة استخدام قانون الجيب فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائماً موجب، لأن الجيب موجب في الربعين الأول والثاني.

أما في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه إذا كانت الزاوية منفرجة فإن جيب تمامها يكون سالباً. وإذا كانت الزاوية حادة فإن جيب تمامها يكون موجباً.

$$\text{حتا} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc}$$

$$\approx -0.817 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc}$$

$$\therefore \angle A \approx 144.786^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 144.786^\circ - 20^\circ = 15.214^\circ$$

$$= 15.214^\circ$$

$$= 15.214^\circ$$

$$\therefore \angle C = 164^\circ$$

$$\angle B \approx 15.214^\circ$$

٤ حلول أن تحل

٤ حل المثلث أ ب ج الذي فيه $\angle A = 14^\circ$ سم، $\angle B = 2^\circ$ سم، و $\angle C = 164^\circ$

حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة Solving the Triangle knowing its Three Side Lengths

مثال

٥ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ج = ١٢ سم

الحل

المطلوب إيجاد قياسات زوايا المثلث الثلاثة فيكون:

$$\text{جتا } \angle \text{ب} = \frac{2(6)^2 + 2(8)^2 - 2(12)^2}{12 \times 8 \times 2} = \frac{2(36) + 2(64) - 2(144)}{12 \times 8 \times 2} = \frac{2(36 + 64 - 144)}{12 \times 8 \times 2} = \frac{2(-44)}{12 \times 8 \times 2} = \frac{-44}{48} = -\frac{11}{12}$$

$$\therefore \angle \text{ب} \approx 108.43^\circ$$

تذكر أن



حل المثلث يعني إيجاد عناصره المجهولة، وفي هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من $\angle \text{أ}$ و $\angle \text{ب}$

ابداً → $8 \times^2 + 12 \times^2 - 6 \times^2 = \div (2 \times 8 \times 12) = \text{SHIFT COS ANS } =$

$$\text{جتا } \angle \text{أ} = \frac{2(8)^2 + 2(6)^2 - 2(12)^2}{12 \times 6 \times 2} = \frac{2(64) + 2(36) - 2(144)}{12 \times 6 \times 2} = \frac{2(64 + 36 - 144)}{12 \times 6 \times 2} = \frac{2(-44)}{12 \times 6 \times 2} = \frac{-44}{72} = -\frac{11}{18}$$

$$\therefore \angle \text{أ} \approx 108.43^\circ$$

$$\therefore \angle \text{ج} = 180^\circ - (108.43^\circ + 108.43^\circ) = 63.14^\circ$$

$$= 63.14^\circ$$

٦ حلول أن تحل

٥ حل المثلث أ ب ج الذي فيه أ = ٢ سم ، ب = ٤ سم ، ج = ١٨ سم

مثال

٦ الربط بالهندسة : أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = ٩ سم ، ب ج = ٥ سم ، ج د = ٨ سم ، د أ = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

الحل

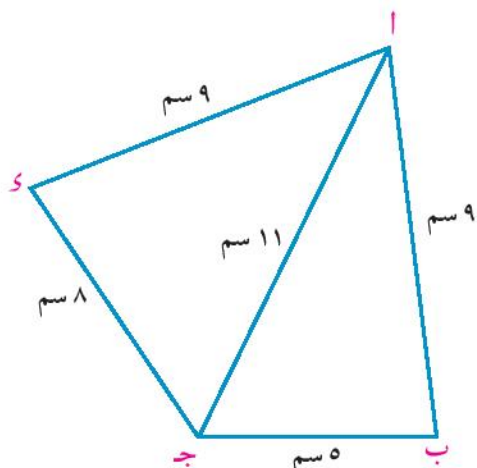
في المثلث أ ب ج

$$\text{جتا } \angle \text{ب} = \frac{2(9)^2 + 2(5)^2 - 2(11)^2}{11 \times 9 \times 5} = \frac{2(81) + 2(25) - 2(121)}{11 \times 9 \times 5} = \frac{2(81 + 25 - 121)}{11 \times 9 \times 5} = \frac{2(-15)}{11 \times 9 \times 5} = \frac{-30}{99} = -\frac{10}{33}$$

في المثلث أ د ج

$$\text{جتا } \angle \text{د} = \frac{2(11)^2 + 2(8)^2 - 2(9)^2}{9 \times 11 \times 8} = \frac{2(121) + 2(64) - 2(81)}{9 \times 11 \times 8} = \frac{2(121 + 64 - 81)}{9 \times 11 \times 8} = \frac{2(104)}{9 \times 11 \times 8} = \frac{208}{792} = \frac{13}{49.5}$$

أي أن جتا $\angle \text{ب}$ = - جتا $\angle \text{د}$



تذكر أن



الشكل الرباعي الدائري هو شكل تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة. ويكون الشكل رباعي دائري إذا كان:
 ♦ زاويتان متقابلتان متكاملتان.
 ♦ قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوسه تساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها.
 ♦ فيه زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ومتساويتان في القياس.
 ♦ إذا كانت رؤوسه على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

ويكون $\angle \text{و} + \angle \text{ز} = 180^\circ$

وحيث أن $\angle \text{ز}$ ، $\angle \text{ب}$ زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الشكل أ ب ج د

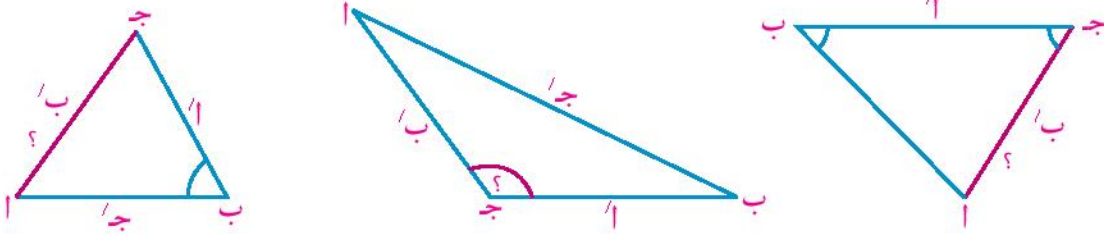
(وهو المطلوب)

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

٩ حاول أن تحل

- ٦ أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = ٢ سم، أ ج = ٧ سم، ب ج = ٦ سم، ج د = ٥ سم، ب د = ٧ سم. أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

مناقشة: لكل من المثلثات التالية، اكتب الصيغة الصحيحة لقانون الجيب أو قانون جيب التمام لإيجاد ما هو مطلوب (يشار إليه باللون الأحمر)، استخدم فقط المعلومات المعطاة والمشار إليها باللون الأزرق.



تمارين (٢-٤)

أكمل ما يأتي:

- ١ في أي مثلث س ص ع يكون: $\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2$ ، جتا س = $\frac{\text{ص}^2 + \text{ع}^2}{\text{س}^2}$
- ٢ مثلث أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات، فإن قياس أكبر زواياه هو°
- ٣ مثلث أطوال أضلاعه ٧، ٥ سم، ٧ سم، ٥ سم، ٤ سم، ٢ سم، فإن قياس أصغر زواياه هو°
- ٤ مثلث أ ب ج فيه أ = ١٠ سم، ب = ٦ سم، $\angle \text{ج} = 60^\circ$ ، فإن ج =
- ٥ في المثلث ل م ن يكون م = ٢ + ن - ل =

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٦ قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هي: أ ١٥٠° ب ١٢٠° ج ٦٠° د ٣٠°

٧ في أي مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{ل^2 + م^2 - ن^2}{2 \cdot ل \cdot م}$ مساوياً:

- أ جال () ب جتام () ج جتان () د جان ()

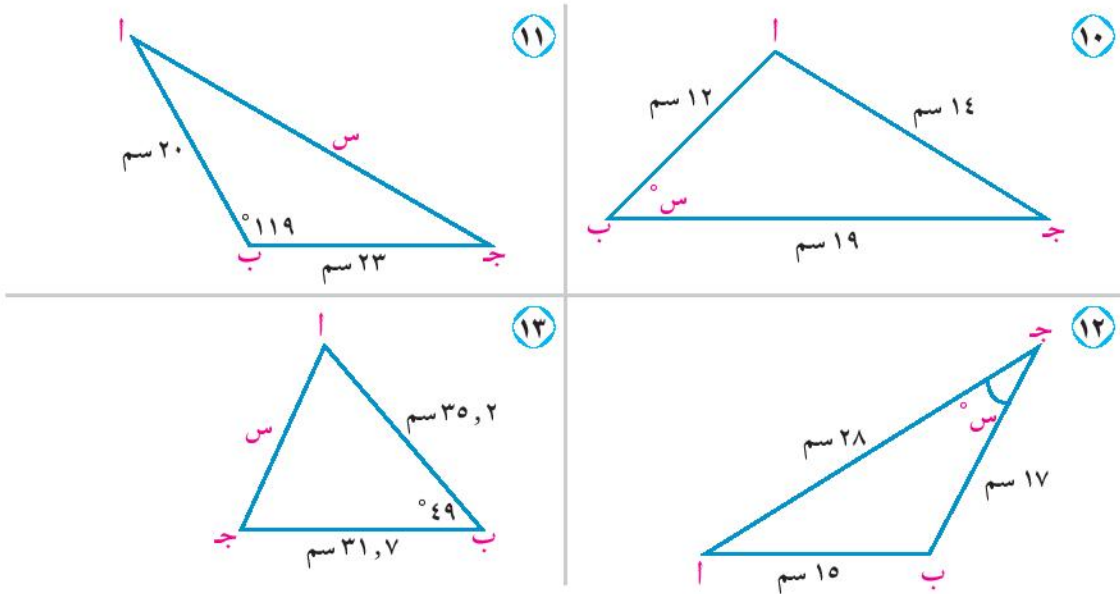
٨ في المثلث س ص ع يكون $ص^2 + ع^2 - س^2 = 2 \cdot ص \cdot ع \cdot \cos \angle س$...

- أ جتاس () ب جاع () ج جتاع () د جاس ()

٩ في المثلث أ ب ج ، إذا كان أ : ب : ج = ٣ : ٢ : ٢ فإن $\angle أ$ تساوى :

- أ $\frac{1}{4}$ () ب $\frac{1}{8}$ () ج $\frac{1}{4}$ () د $\frac{2}{4}$ ()

استخدم قانون جيب التمام لإيجاد قيمة س لأقرب جزء من عشرة



في المثلث أ ب ج إذا كان:

- ١٤ أ = ٥ ، ب = ٧ ، ج = ٨ ، فأثبت أن $\angle ب < 60^\circ$ ()
 ١٥ أ = ٣ ، ب = ٥ ، ج = ٧ ، فأثبت أن $\angle ب < 120^\circ$ ()
 ١٦ أ = ١٣ ، ب = ٧ ، ج = ١٣ ، فأوجد $\angle ب$ ()
 ١٧ أ = ١٣ ، ب = ٨ ، ج = ٧ ، فأوجد $\angle أ$ ()
 ١٨ أ = ١٠ ، ب = ١٧ ، ج = ٢١ ، فأوجد قياس أصغر زاوية في المثلث .
 ١٩ أ = ٥ ، ب = ٦ ، ج = ٧ ، فأوجد قياس أكبر زاوية في المثلث .
 ٢٠ أ = ١٧ سم ، ب = ١١ سم ، $\angle ب = 42^\circ$ ، فأوجد ج مقرباً لأقرب رقمين عشريين .
 ٢١ ب = ١٦ سم ، ج = ١٤ سم ، $\angle أ = 72^\circ$ ، فأوجد أ مقرباً لأقرب رقمين عشريين .
 ٢٢ مثلث أ ب ج فيه أ = ٣ سم ، ب = ٥ سم ، ج = ٦ سم أوجد :
 أ $\angle ب$ () ب مساحة المثلث أ ب ج ()

- ٢٣) ا ب ج مثلث فيه $\angle \text{أ} = 9^\circ$ سم ، $\angle \text{ب} = 15^\circ$ سم ، $\angle \text{ج} = 21^\circ$ سم ، أوجد قياس أكبر زاوية في هذا المثلث ، وأثبت أنها تُحقق العلاقة جتا ج - $3\sqrt{5}$ ج ا ج + $8 = 0$.
- ٢٤) ا ب ج د شكل رباعي فيه ا ب = 3 سم ، ا ج = 8 سم ، ب ج = 7 سم ، ج د = 5 سم ، ب د = 8 سم ، أثبت أن الشكل رباعي دائري.
- ٢٥) ا ب ج د شكل رباعي فيه ا ب = 15 سم ، ب ج = 20 سم ، ج د = 16 سم ، ا ج = 25 سم ، و $(\angle \text{ا ج د}) = 36^\circ 52'$ ، أوجد طول $\overline{\text{ا د}}$ لأقرب سنتيمتر ، ثم أوجد مساحة سطح الشكل الرباعي ا ب ج د .
- ٢٦) ا ب ج د متوازي أضلاع فيه ا ب = 12 سم ، ب ج = 10 سم ، طول القطر $\overline{\text{ب د}}$ يساوي 14 سم ، أوجد طول القطر $\overline{\text{ا ج}}$ لأقرب سنتيمتر.
- ٢٧) ا ب ج د شكل رباعي فيه ب ج = 78 سم ، ج د = 96 سم ، و $(\angle \text{ب ج د}) = 97^\circ$ ، و $(\angle \text{ا ب د}) = 72^\circ$ ، و $(\angle \text{ا د ب}) = 43^\circ$ أوجد طول $\overline{\text{ا ب}}$.

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

مراجعة وتعديل

د/ محمد محي الدين عبد السلام د/ مدحت عطية أ/ شريف عاطف البرهامي

إشراف علمي

أ/ منال عزقول

مستشار الرياضيات

إشراف تربوي

د/ أكرم حسن

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوءها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
- ٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
- ٣ تبني مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
 - أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
 - ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلي:
 - أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محباً للرياضيات ومبادراً بدراساتها - أن يكون المتعلم قادراً على العمل منفرداً أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطاً ومثابراً ومواظباً ومبتكراً - أن يكون المتعلم قادراً على التواصل بلغة الرياضيات.
 - ٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
 - ٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
 - ٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفي ضوء ما سبق روعى في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هي: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراكبة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمي لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشاف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.
- ★ تنتهي كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.
- ★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمي يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.
- ★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسي.

وأخيراً .. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

١ - ١	الدوال الحقيقية	٤
٢ - ١	اطراد الدوال	١١
٣ - ١	الدوال الزوجية والدوال الفردية	١٥
٤ - ١	التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية	٢١
٥ - ١	حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة	٣١

الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

١ - ٢	الأسس الكسرية	٣٨
٢ - ٢	الدالة الأسية وتطبيقاتها	٤٤
٣ - ٢	حل المعادلات الأسية	٤٦
٤ - ٢	الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني	٥٠
٥ - ٢	بعض خواص اللوغاريتمات	٥٥

المحتويات

الوحدة الثالثة: النهايات

٦٤	مقدمة فى النهايات	١ - ٣
٧٠	إيجاد نهاية الدالة جبرياً	٢ - ٣
٧٧	نهاية الدالة عند اللانهاية	٣ - ٣

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

٨٤	قانون (قاعدة) الجيب	١ - ٤
٩٢	قانون (قاعدة) جيب التمام	٢ - ٤

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

للدوال أنواع مختلفة وتطبيقات هامة في مختلف مجالات الحياة، في علم الفلك والطب والاقتصاد، وعلم الزلازل والجيولوجيا والديموغرافيا، فنستخدم الدوال في احتساب متغيرات الطقس والتنبؤ بالطقس المتوقع لفترة مقبلة، أو تحديد موضع خلل في عمل القلب باستخدام الرسوم البيانية التي يسجلها رسام القلب الكهربائي، أو تحقيق أفضل ربح بدراسة دالتى الرياح والتكاليف، أو تأثير فئات العمر على تعداد السكان. كما نستخدم أيضاً في الطب الرياضى لتحديد الوزن الأمثل [الوزن = الطول (سم) - ١٠٠] أو قياس نسبة الدهون فى الجسم، ويكثر استخدامها فى الصناعة لدراسة تأثير المتغيرات المختلفة على جودة الانتاج.

ويعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسرى الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر فى الرياضيات والفيزياء، وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو $ص = د(س)$ للدلالة على الدالة معتبراً أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س، كما حول جميع النسب المثلثية التى نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. فى هذه الوحدة ستعرف صوراً مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانياً مستخدماً التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ◆ يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- ◆ يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- ◆ يستنتج إطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- ◆ يحدد نوع الدوال الحقيقية من حيث كونها زوجية أو فردية.
- ◆ يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- ◆ يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة المقياس - الدالة التكعيبية - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- ◆ يستنتج تأثير كل من التحويلات: $د(أس ± ب) ± ج$ ، $أ د(س) ± ب$ على الدوال السابقة.
- ◆ يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- ◆ يحل معادلات على الصورة: $|أس + ب| = |إس + ج|$
- ◆ يحل متباينات على الصورة: $|أس + ب| > |إس + ج|$ ، $|أس + ب| < |إس + ج|$
- ◆ يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- ◆ يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة نشاط.

المصطلحات الأساسية

Rational Function	دالة كسرية	Odd Function	دالة فردية	Real Function	دالة حقيقية
Asymptote	خط تقارب	Monotony of a Function	إطراد دالة	Domain	مجال
Transformation	تحويل	Increasing Function	دالة تزايدية	Co-domain	مجال مقابل
Translation	إزاحة (انتقال)	Decreasing Function	دالة تناقصية	Range	مدى
Reflection	انعكاس	Constant Function	دالة ثابتة	Vertical Line	خط رأسي
Stretching	تمدد	polynomial Function	دالة كثيرة الحدود		دالة متعددة التعريف
Graphical Solution	حل بياني		دالة مقياس (قيمة مطلقة)	Piecewise-Defind Function	
		Absolute Value Function		Even Function	دالة زوجية

مخطط تنظيمي للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.
- الدرس (١ - ٢): اطراد الدوال.
- الدرس (١ - ٣): الدوال الزوجية و الدوال الفردية.
- الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.
- الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية - حاسب آلي مزود ببرامج رسومية (Graph, GeoGebra)

الدوال الحقيقية

١-١

Real Functions

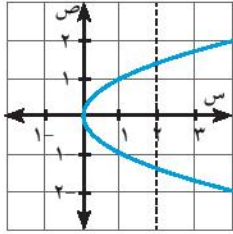
Real Function

الدالة الحقيقية

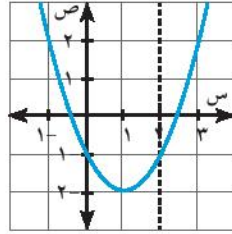
تعريف

تسمى الدالة دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية منها.

تعلم



ليست دالة



دالة

اختبار الخط الرأسى

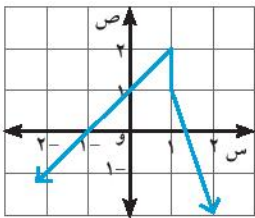
إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقاط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من s إلى v

تحديد العلاقة التى تمثل دالة

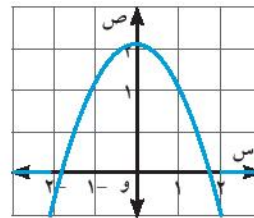
مثال

Identify the relation representing the function

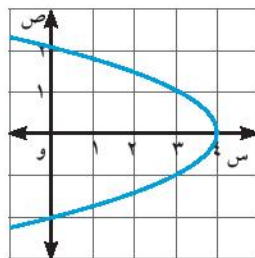
١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت v تمثل دالة فى s أم لا.



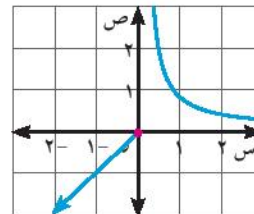
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

- دالة Function
- مجال Domain
- مجال مقابل Co-domain
- مدى Range
- مخطط سهمى Arrow Diagram
- مخطط بياني Cartesian Diagram
- خط رأسى Vertical line
- دالة متعددة التعريف
- قاعدة الدالة Piecewise Function

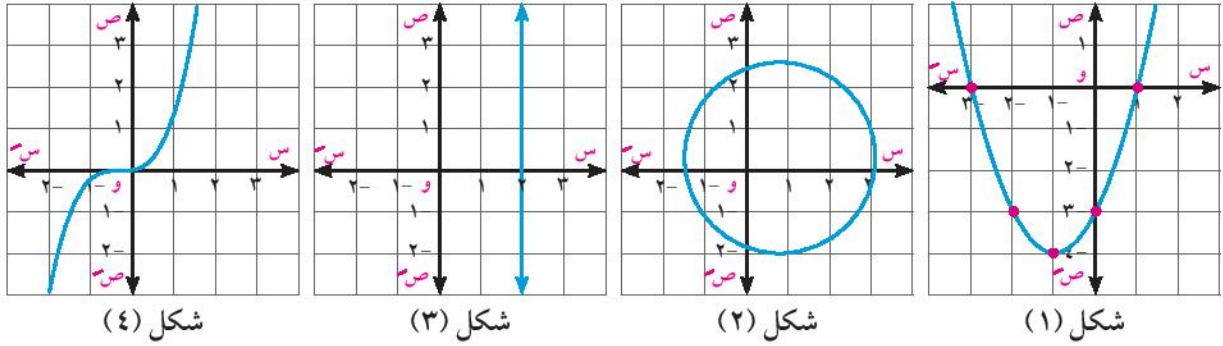
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

الحل

شكل (١) يمثل دالة في S شكل (٢) لا يمثل دالة في S لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البياني في عدد غير منته من النقط.شكل (٣) يمثل دالة في S .شكل (٤) لا يمثل دالة في S لأن يوجد خط رأسى يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

٤ حاول أن تحل

١ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من S ← مع ذكر السبب.

تعيين مدى الدالة بيانياً

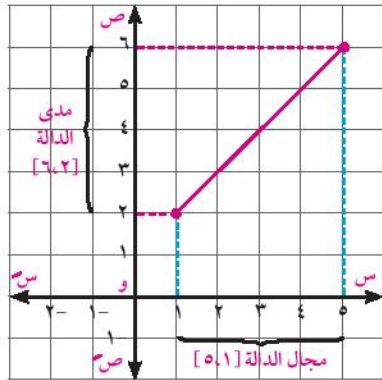
مثال

٢ إذا كانت $d: [٥, ١]$ ← C حيث $d(S) = S + ١$ ارسم الشكل البياني للدالة d ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحل

الدالة d دالة خطية مجالها $[٥, ١]$ تمثل بيانياً بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتين (١، ١)، (٥، ٥)، أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).مدى الدالة $d = [٢, ٦]$

وهو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.



٤ حاول أن تحل

١

إذا كانت $d: [١, \infty)$ ← C ، حيث $d(S) = S - ١$ ارسم الشكل البياني للدالة d ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب

إذا كانت $r: [-١, \infty)$ ← C ، حيث $r(S) = S - ١$ ارسم الشكل البياني للدالة r ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

Piecewise-Defined Functions

الدالة متعددة التعريف:

تعلم



الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -3 < s < -2 \\ \text{عندما } 2 < s < 5 \end{array} \right\} \text{ إذا كانت د(س) = } \left\{ \begin{array}{l} -3 - s \\ s \end{array} \right.$$

عين مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

الحل

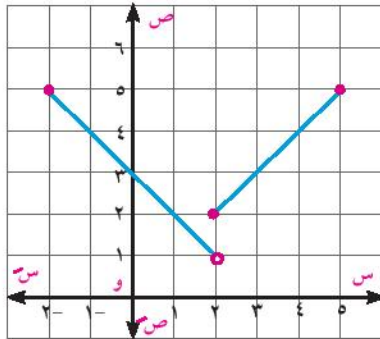
الدالة د معرفة على فترتين وتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د(س) = -3 - s عندما $-3 < s < -2$ أى على الفترة $[-2, -3]$

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفها النقطتين

$(-2, 1)$ ، $(-3, 0)$ مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة $(-2, 1)$

لأن $-2 \notin [-2, -3]$ كما فى الشكل المقابل.



القاعدة الثانية: د(س) = s عندما $2 < s < 5$ أى على الفترة $[5, 2]$

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفها النقطتين $(2, 2)$ ، $(5, 5)$

ويكون مجال الدالة د = $[-2, -3] \cup [2, 5]$

ويمكن من الرسم البياني نستنتج أن:

مجال الدالة د = $[-2, -3] \cup [2, 5]$

مدى الدالة د = $[0, 5]$

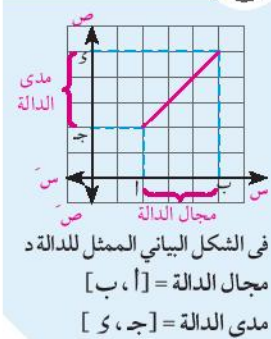
حاول أن تحل

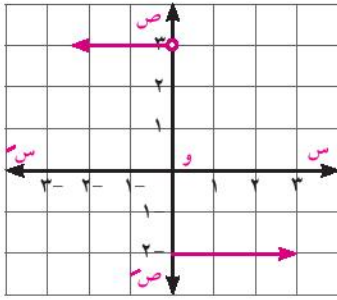
$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -1 < s < 0 \\ \text{عندما } 1 < s < 2 \end{array} \right\} \text{ إذا كانت د(س) = } \left\{ \begin{array}{l} -1 - s \\ s + 1 \end{array} \right.$$

عين مجال الدالة ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى.

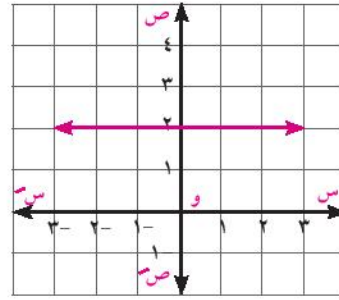
٤ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

لاحظ أن

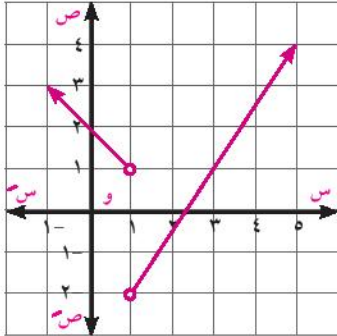




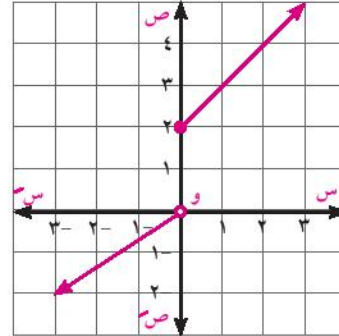
ب



أ



د



ج

تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

Determining Domains

تعيين مجال الدالة

مثال

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

ب $\sqrt{3-s} = f(s)$

أ $\frac{s+3}{s^2-9} = f_1(s)$

ج $\sqrt{s-5} = f_3(s)$

الحل

أ الدالة f_1 تكون غير معرفة عندما يكون المقام $= 0$ لذلك نضع $s^2 - 9 = 0$ أي $s = \pm 3$ وعليه يكون مجال الدالة f_1 هو $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$



ب مجال الدالة f_2 هو جميع قيم s التي تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعي موجباً أو صفراً، أي قيم s التي تجعل $s - 3 \geq 0$.
 $\therefore s - 3 \geq 0 \Rightarrow s \geq 3$.
 $\therefore$ مجال $f_2 = [3, \infty)$

ج $\sqrt{s-5} = f_3(s)$ دليل الجذر عدد فردي مجال $f_3 = \mathbb{R}$

وعليه فإن مجال f_3 هو $[-5, \infty)$

الخط:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[n]{n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، $n < 1$ ، ر(س) كثيرة حدود

أولاً: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانياً: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط ر(س) ≤ 0 .

٩ حاول أن تحل

٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) د(س) = $\frac{3+s^2}{2+s^3-s^2}$ ب) د(س) = $\sqrt{2-s}$ ج) د(س) = $\sqrt[3]{5-s}$

تفكير ناقذ:

إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{2}{s^2-6s+9}$ هو ع - {٣} أوجد قيمة ك.

نشاط

العمليات على الدوال

Operations on Functions

إذا كانت د_١، د_٢ دالتين مجالاها م_١، م_٢ على الترتيب، فإن:

- ١ (د_١ ± د_٢) (س) = (د_١ ± د_٢) (س)، مجال (د_١ ± د_٢) هو م_١ ∩ م_٢
- ٢ (د_١ · د_٢) (س) = (د_١ · د_٢) (س)، مجال (د_١ · د_٢) هو م_١ ∩ م_٢
- ٣ $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث د_٢ (س) ≠ ٠، مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ هو (م_١ ∩ م_٢) - ف(د_٢) حيث ف(د_٢) مجموعة أصفار د_٢

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى د_١، د_٢ باستثناء القيم التى تجعل د(س) = ٠ فى عملية القسمة.

إذا كان د_١ : ع ← ع حيث د_١ (س) = ٣ - س

د_٢ : [٢، ٣] ← ع حث د_٢ (س) = س - ٣

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ) (د_١ + د_٢) ب) (د_١ - د_٢) ج) (د_١ · د_٢) د) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$

ثانياً: احسب القيمة العددية - إن امكن ذلك - لكل من:

أ) (د_١ + د_٢) (٣) ب) (د_١ - د_٢) (٣-) ج) (د_١ · د_٢) (٣-) د) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (٣-)

هـ) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (٤) و) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (١-)

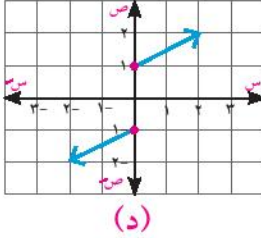


تمارين ١ - ١

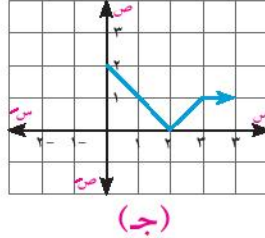


اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

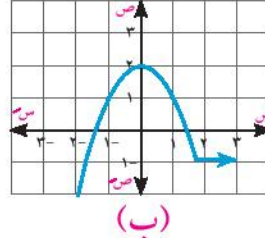
١) أي من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة في S :



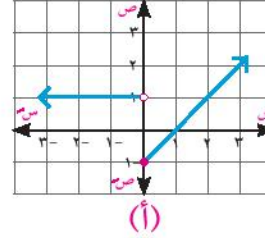
(د)



(ج)



(ب)



(إ)

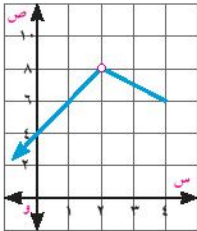
أجب عن ما يأتي:

٢) إذا كانت $D: S \rightarrow \{1, 2, 3\}$ وكان $S = \{1, 2, 3\}$ وكان $D(1) = 3$ ، $D(2) = 2$ ، $D(3) = 1$ ، أوجد مدى الدالة إذا كان $D(س) = ٣$ - ٥

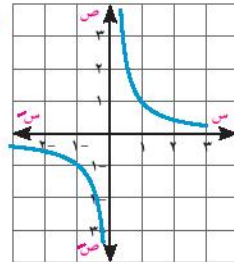
٣) إذا كانت $S: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow S$ حيث $S(س) = ٤ - س$ - ٣

أ) اكتب مدى الدالة ب) إذا كانت $S(ك) = ١٧$ فأوجد قيمة ك

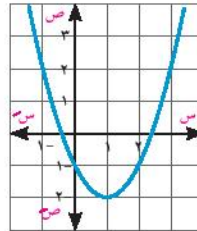
٤) استنتج من الشكل البياني مجال الدالة ومداهما في كل مما يأتي:



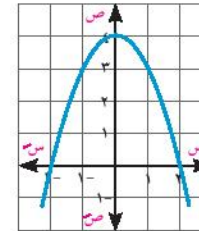
د



ج



ب



إ

٥) حدد مجال الدالة D حيث $D(س) = \begin{cases} ١ - س & \text{عندما } ٢ > س > ١ \\ ٢ - س & \text{عندما } ٤ > س > ٢ \end{cases}$

ثم ارسم الشكل البياني للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٦) ارسم الشكل البياني للدالة D حيث:

$D(س) = \begin{cases} ٣ + س & \text{عندما } ٢ \leq س \\ ٢ - س & \text{عندما } ٢ > س \end{cases}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٧) إذا كانت $D(س) = \begin{cases} ٣ + ٢س & \text{عندما } ٠ > س > ٢- \\ ١ - س & \text{عندما } ٤ > س > ٠ \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة D ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

$$8) \text{ إذا كانت د(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} + 1 \text{ عندما } -3 \leq \text{س} < 0 \\ \text{س} + 2 \text{ عندما } 0 \leq \text{س} < 3 \end{array} \right\}$$

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

$$9) \text{ إذا كان: د(س) = } \left. \begin{array}{l} -\text{س} + 3 \text{ عندما } \text{س} > 3 \\ \text{س}^2 \text{ عندما } 3 \geq \text{س} \geq 8 \\ 3\text{س}^2 + 1 \text{ عندما } \text{س} < 8 \end{array} \right\}$$

أوجد:

أ) د(2) ب) د(3) ج) د(10)

10) الربط بالتجارة: تمثل الدالة د، حيث:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{س}}{3} \text{ عندما } 0 < \text{س} < 5000 \\ 2\text{س} + 2500 \text{ عندما } 5000 < \text{س} < 15000 \\ \frac{2}{3}\text{س} + 10000 \text{ عندما } 15000 < \text{س} < 60000 \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

المبلغ بالجنيه الذي تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربائية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ) د(5000) ب) د(10000) ج) د(50000)

11) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) د(س) = $\frac{\text{س} + 3}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$ ب) د(س) = $\frac{\text{س} + 1}{\text{س} + 3}$

ج) د(س) = $\sqrt{2 - \text{س}}$ د) د(س) = $\sqrt{4 - \text{س}}$

Monotonicity of Functions

سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية

- اطراد. Monotony
- دالة تزايدية. Increasing Function
- دالة تناقصية. Decreasing Function
- دالة ثابتة. Constant Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

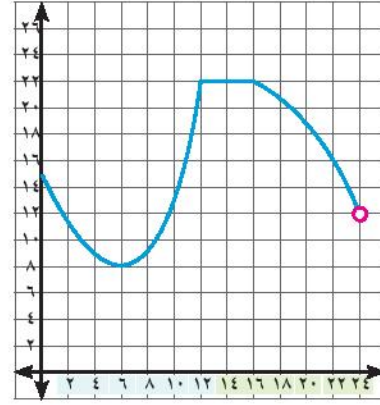
فكر و ناقش



يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة في أحد الأيام ، لاحظ التغير في درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

- فترات تناقص درجات الحرارة.
- فترات تزايد درجات الحرارة.
- فترات ثبات درجات الحرارة.

درجات الحرارة (°C)



الزمن

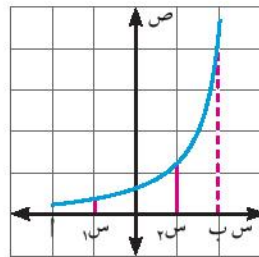
تساعدنا صفات منحنيات الدوال في معرفة سلوك الدالة د و تحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو ما يعرف باطراد الدالة.

تعلم



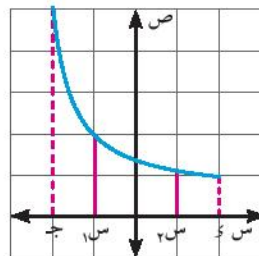
تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها **تزايدية** في الفترة $[a, b]$ ، إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $D(s_1) < D(s_2)$



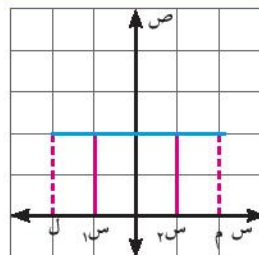
تناقص الدالة:

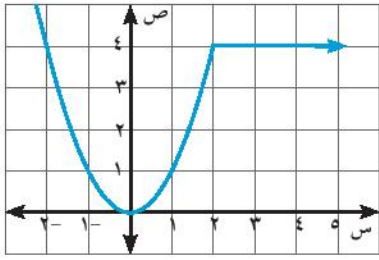
يقال للدالة د أنها **تناقصية** في الفترة $[a, b]$ ، إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $D(s_1) > D(s_2)$



ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها **ثابتة** في الفترة $[a, b]$ ، إذا كان لكل $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، حيث: $s_1 < s_2$ فإن: $D(s_1) = D(s_2)$





مثال

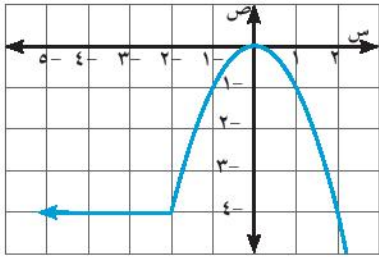
١ ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

الحل

الدالة تناقصية في الفترة $[-\infty, 0]$

الدالة تزايدية في الفترة $[0, 2]$

الدالة ثابتة في الفترة $[2, \infty]$



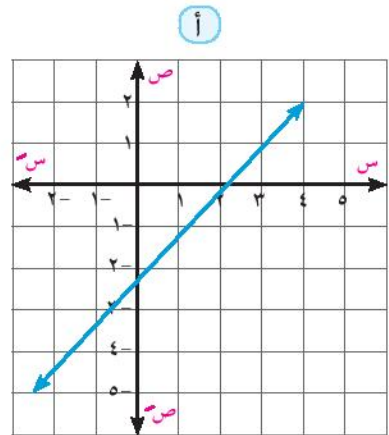
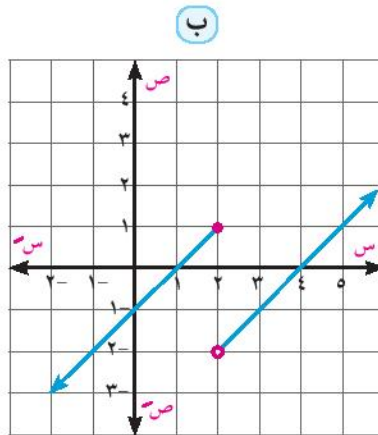
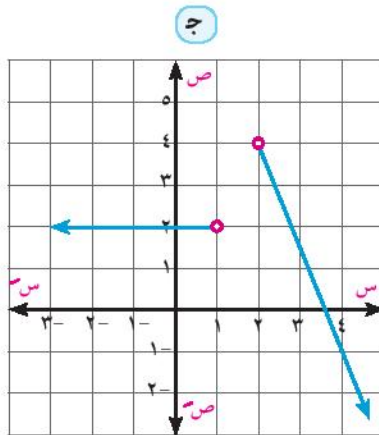
٢ حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل:

ابحث الفترات التي تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التي تكون فيها تناقصية، والفترات التي تكون فيها ثابتة.

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ← ص، استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة، وابحث اطرادها.



الحل

أ مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

ب مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

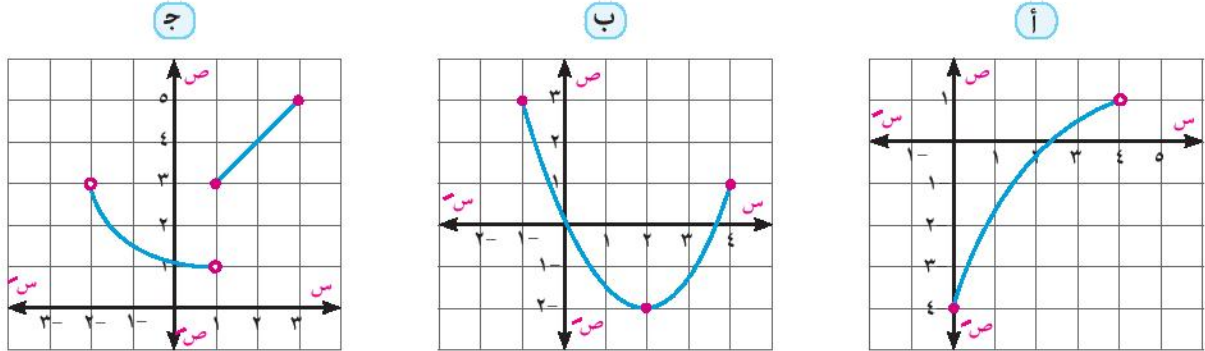
ج مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

ج مجال د = $[-\infty, \infty]$ ، مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، الدالة تزايدية في $[-\infty, \infty]$

الدالة ثابتة في $[-\infty, \infty]$ ، وتناقصية في $[-\infty, \infty]$

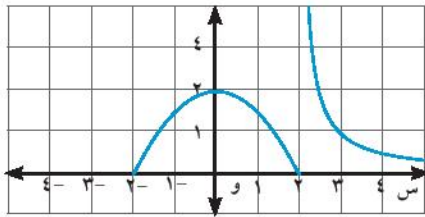
٤ حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

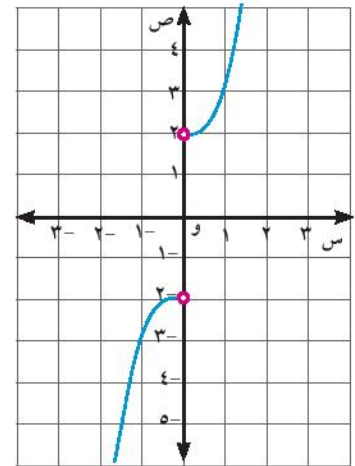


تمارين ١ - ٢

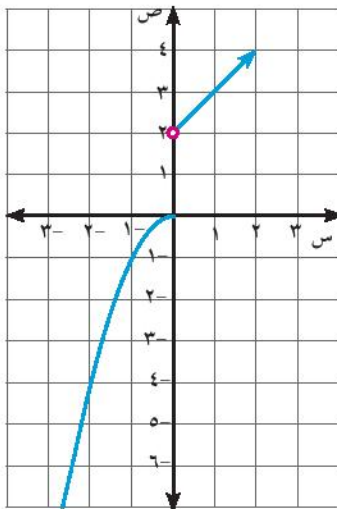
١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الاطراد:



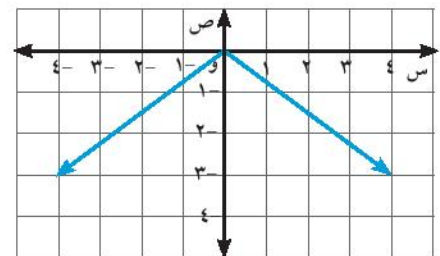
شكل (٢)



شكل (١)

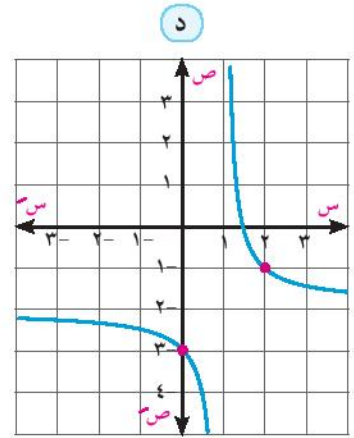
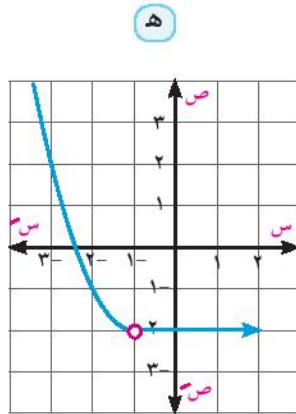
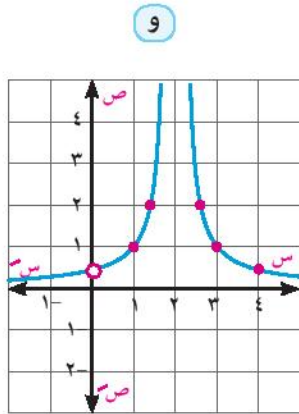
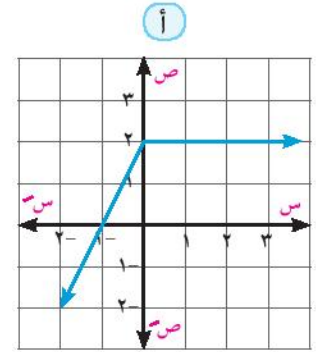
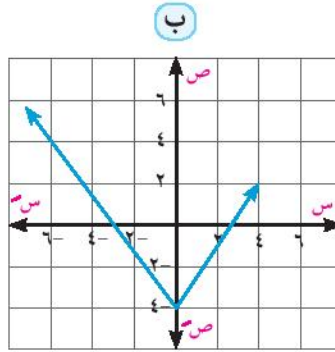
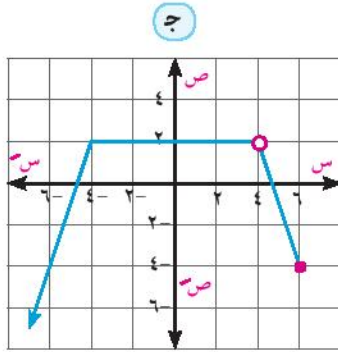


شكل (٤)



شكل (٣)

٢ حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية، ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرافها.



٣ إذا كانت د: $[-2, 6]$ ← ع

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } -2 \leq x \leq 6 \\ \text{عندما } 1 \leq x \leq 6 \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرافها.

Even and Odd Functions

سوف تتعلم

- التمائل في منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.

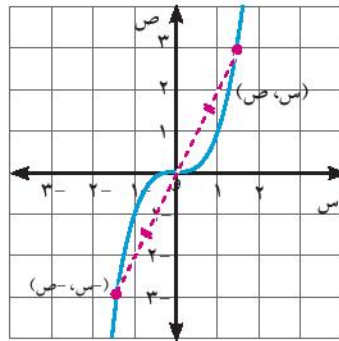
المصطلحات الأساسية

- Symmetry تماثل
- Even Function دالة زوجية
- Odd Function دالة فردية

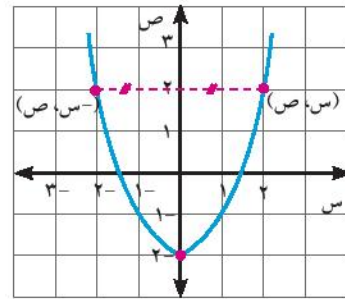
قد يتميز الشكل البياني للدالة d حيث $v = d(s)$ بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، ويمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها، وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصف المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل:



التمائل حول محور نقطة الأصل.
شكل (٢)



التمائل حول محور الصادات
شكل (١)

في شكل (١):

تكون النقطة $(-s, v)$ الواقعة على الشكل البياني لمنحنى الدالة هي صورة النقطة (s, v) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

في شكل (٢):

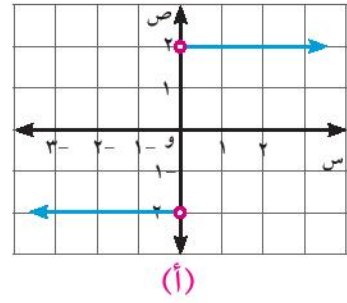
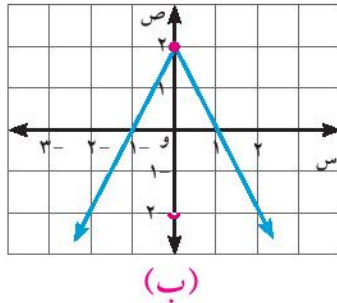
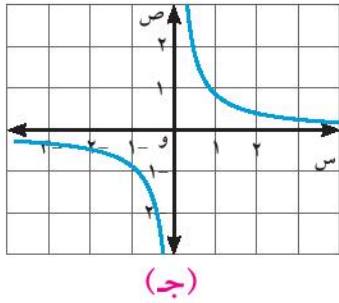
يوضح الشكل البياني للعلاقة بين s, v تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة $(-s, -v)$ هي صورة النقطة (s, v) الواقعة على نفس المنحنى.

٤ حاول أن تحل

١ في كل شكل من الأشكال الآتية بين المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب



تفكير ناقذ:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

Even and Odd Functions

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

تعلم



الدالة الزوجية: يقال للدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in S$ ، ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلاً حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ إنها دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in S$ ، ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية.

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء العنصرين x ، $-x$ إلى مجال الدالة، وإذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد $f(-x)$.

مثال

١) ابحث نوع الدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ) $f(x) = x^2$ ب) $f(x) = x^3$ ج) $f(x) = \sqrt{x+3}$ د) $f(x) = x^2 + x$

الحل

أ) $f(x) = x^2$ ، مجال $D = \mathbb{R}$

∴ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ، يكون: $f(x) = x^2$ دالة زوجية.

أي أن: $f(-x) = f(x)$

ب) $f(x) = x^3$ ، مجال $D = \mathbb{R}$

∴ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ، يكون: $f(x) = x^3$ دالة فردية.

أي أن: $f(-x) = -f(x)$

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in S$ ، وتكون الدالة زوجية عندما n عدد زوجي، فردية عندما n عدد فردي.

تذكر أن

جا (-س) = -جا س
جتا (-س) = جتا س
ظا (-س) = -ظا س

ج د (س) = $\sqrt{s+3}$ ، مجال د = $[-3, \infty)$

لاحظ أن $[-3, \infty)$ بينما $[-4, \infty)$

الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د (س) = جتا س ، مجال د = ع

لكل س ، -س $\exists$ ع يكون:

د (-س) = جتا (-س) = جتا س

أي أن: د (-س) = د (س) د دالة زوجية

٤ حاول أن تحل

٢ ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

ج د (س) = س^٣ - جا س

ب د (س) = س^٢ + جتا س

أ د (س) = جا س

و د (س) = س^٣ جتا س

هـ د (س) = س^٣ جا س

د د (س) = س^٢ جتا س

ط د (س) = جا س جتا س

ح د (س) = جا س + حتا س

ز د (س) = س^٢ + س^٣

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د_١ ، د_٢ دالة زوجية ، وكان كل من: ر_١ ، ر_٢ دالة فردية ، فإن:

(١) د_١ + د_٢ دالة زوجية

(٢) ر_١ + ر_٢ دالة فردية.

(٣) د_١ × د_٢ دالة زوجية

(٤) ر_١ × ر_٢ دالة زوجية.

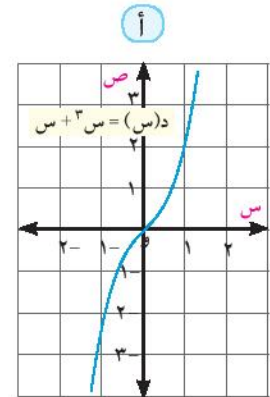
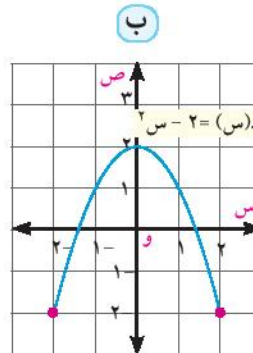
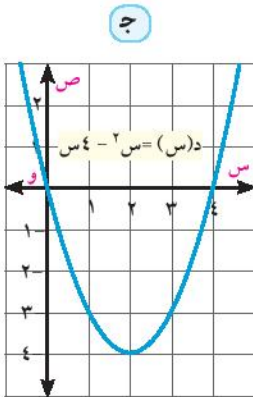
(٥) د_١ × ر_٢ دالة فردية

(٦) د_١ + ر_٢ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك في بند حاول أن تحل (٢)

مثال

٢ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبرياً.



الحل

أ) د (س) = س³ + س، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
 مجال د = ع، منحني الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ أي أن الدالة فردية
 ∴ كل س، -س ∈ ع ∴ د (-س) = (س-)³ + (س-) = - (س³ + س) = - د (س)
 بالتبسيط:
 نأخذ (١-) عاملاً مشتركاً
 د (-س) = - (س³ + س) = - د (س)

أي أن الدالة فردية.

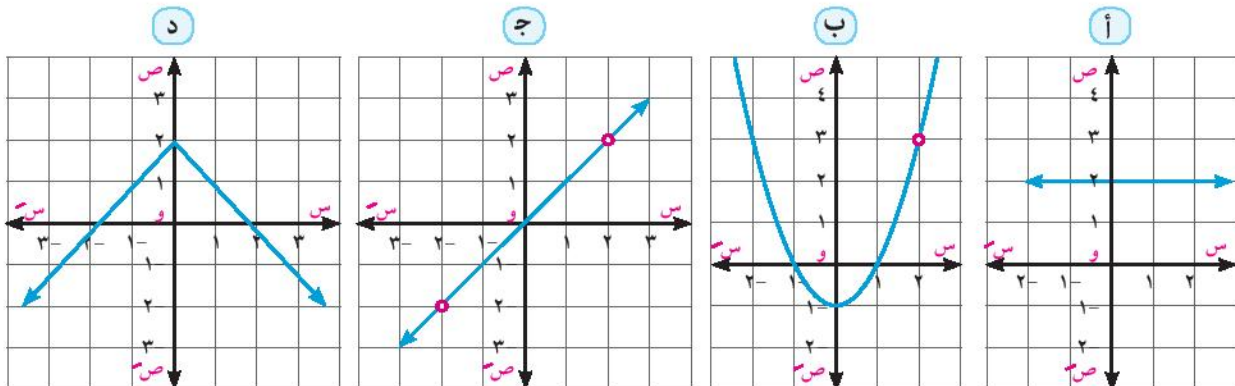
ب) د (س) = س² - ٢، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن
 مجال د = [-٢، ٢]، ومنحني الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية
 ∴ كل س، -س ∈ [-٢، ٢] ∴ د (-س) = (-س)² - ٢ = س² - ٢ = د (س)
 بالتبسيط
 د (-س) = د (س) أي أن الدالة زوجية

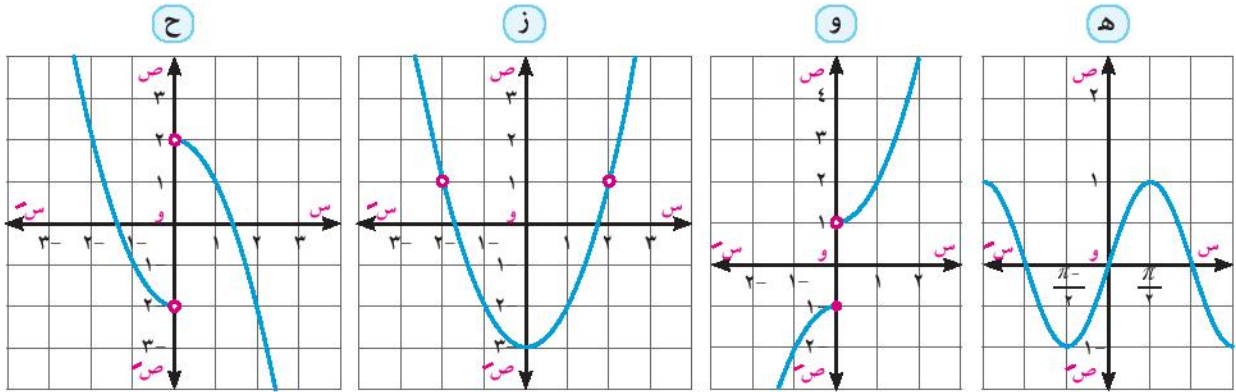
ج) د (س) = س² - ٤، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:
 مجال د = ع، ومنحني الدالة ليس متماثلاً حول محور الصادات، وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل؛
 أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∴ كل س، -س ∈ ع ∴ د (-س) = (-س)² - ٤ = س² - ٤ = د (س) ∴ د ليست زوجية
 بالتبسيط
 ولكن
 لذلك فإن
 أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٤) حاول أن تحل

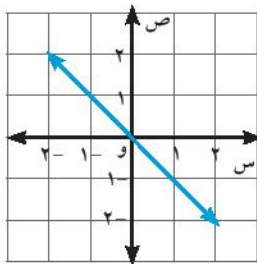
٢) اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



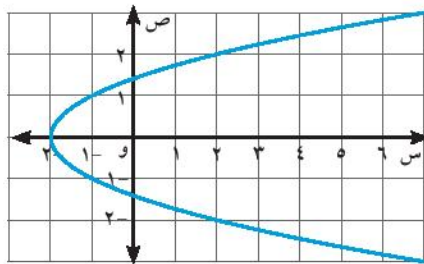


تمارين ١ - ٣

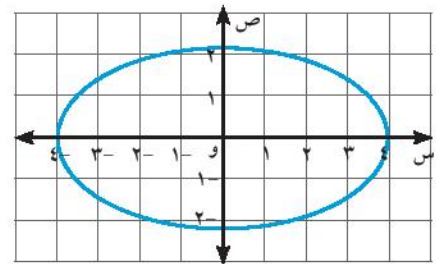
١ اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسر إجابتك.



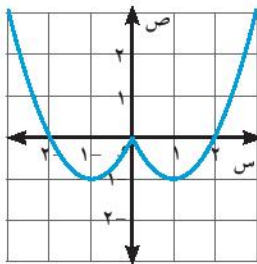
شكل (٣)



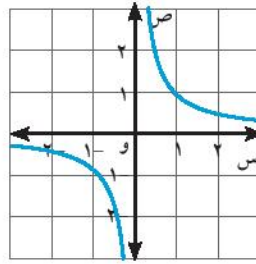
شكل (٢)



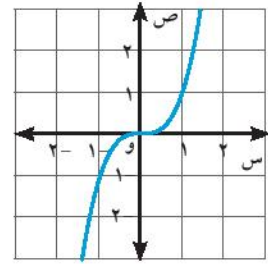
شكل (١)



شكل (٦)

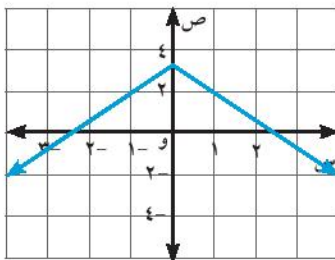


شكل (٥)

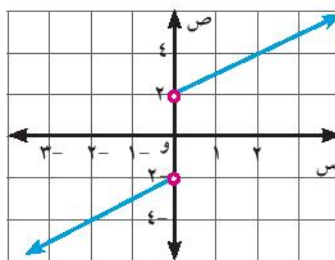


شكل (٤)

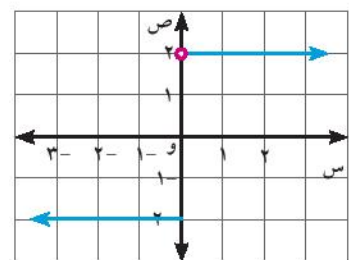
٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



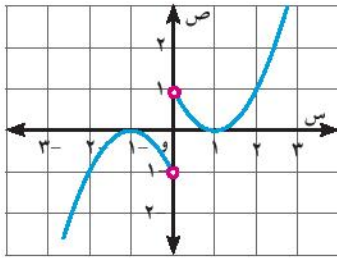
شكل (ج)



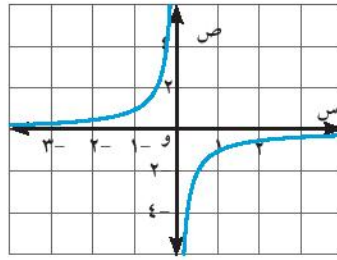
شكل (ب)



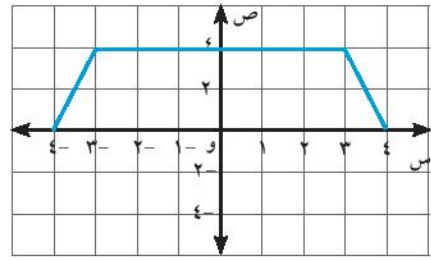
شكل (أ)



شكل (و)



شكل (هـ)



شكل (د)

٢) ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ) د(س) = س^٤ + س^٢ - ١

ب) د(س) = س^٣ - س^٤

ج) د(س) = ٥

د) د(س) = س^٣ - س^٢

هـ) د(س) = $\frac{٢+٣س}{٣-س}$

و) د(س) = س حتا س

٤) إذا كانت د_١، د_٢ دوال حقيقية حيث د_١(س) = س^٥، د_٢(س) = حاس، د_٣(س) = س^٢،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك.

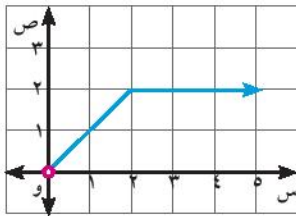
أ) د_١ + د_٢

ب) د_١ + د_٣

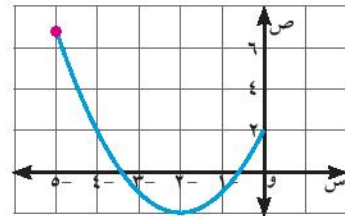
ج) د_١ × د_٢

د) د_١ × د_٣

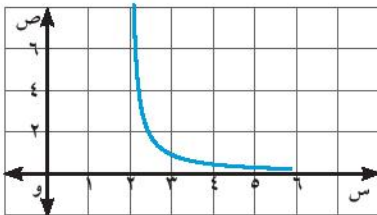
٥) أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



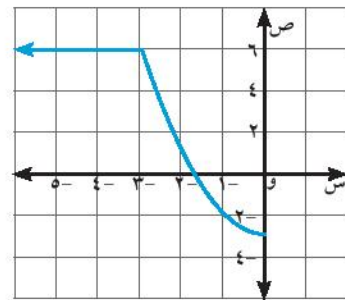
شكل (٢)



شكل (١)



شكل (٤)



شكل (٣)

أولاً: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانياً: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) فى كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثاً: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة ثم ابحث اطرادها.

سوف تتعلم

- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية - الدالة التربيعية - الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة في رسم المنحنيات
- ص = د(س) + أ
- ص = د(س) + أ
- ص = د(س) + ب
- ص = - د(س)
- ص = أ د(س)
- ص = أ د(س) + ب + ج
- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- تحويل. Transformation
- انتقال. Translation
- انعكاس. Reflection
- رأسي Vertical
- أفقي Horizontal
- خط تقارب Asymptotes

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

Polynomial Functions

الدالة كثيرة الحدود

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التي قاعدتها على الصورة:

$$د(س) = أ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + + أ_٣ س^٣$$

حيث: أ، أ_١، أ_٢،، أ_٣، أ ≠ ٠، س ∈ ط

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هي أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

لاحظ:

- ١- إذا كان د(س) = أ، أ ≠ ٠ فإن د تسمى كثيرة الحدود الثابتة.
- ٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالاً خطية، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالاً تربيعية، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالاً تكعيبية.
- ٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت، نحصل على دالة كثيرة الحدود.
- ٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

Graphs of Functions

رسم منحنيات الدوال

Polynomial Functions

أولاً: دوال كثيرة الحدود

تعلم

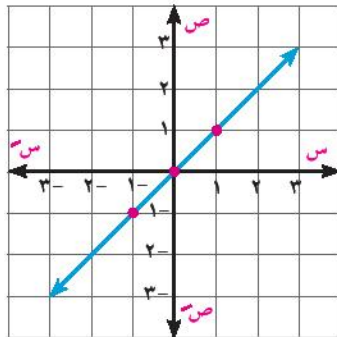


فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود::

١) دالة خطية أبسط صورة لها هي:

$$د(س) = س$$

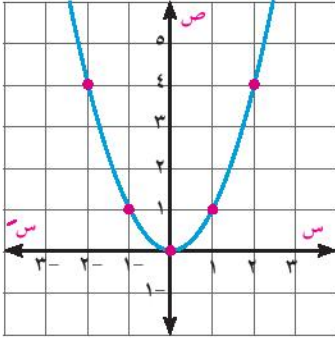
وهي دالة د ترفق العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١ (تحقق من: مدى د = ع، د فردية، د تزايدية في ع)



(٢) دالة تربيعية ، أبسط صورة لها هي :

$$د(س) = س^2$$

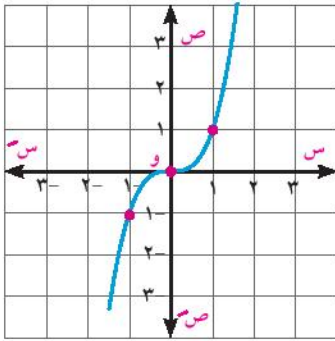
وهي دالة ترفق العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات، ونقطة رأس المنحنى هي (٠، ٠)
(تحقق من: مدى $د = ع$ ، زوجية، تناقصية في $[-\infty, ٠]$ ،
تزايدية في $[٠, \infty]$)



(٣) دالة تكعيبية ، أبسط صورة لها هي :

$$د(س) = س^3$$

وهي دالة ترفق العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هي (٠، ٠)
(تحقق من: مدى $د = ع$ ، فردية، تزايدية في $ع$)

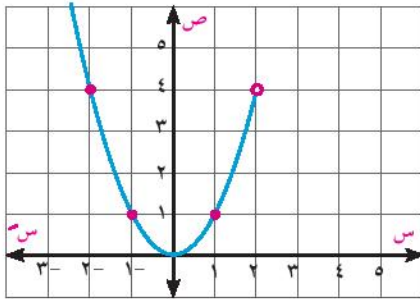


مثال

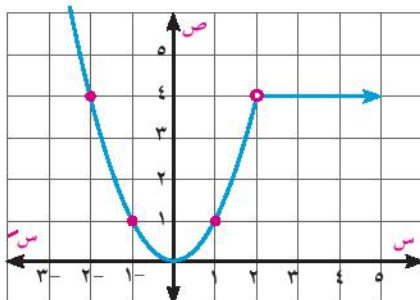
١ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^2 & \text{عندما } س > ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$

الحل



شكل (١)



شكل (٢)

(١) عندما $س > ٢$ ، $د(س) = س^2$

نرسم $د(س) = س^2$ لكل $س \in [-٢, \infty]$

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما في شكل (١)

(٢) عندما $س < ٢$ ، $د(س) = ٤$

ترسم الدالة الثابتة $د(س) = ٤$ لكل $س \in [-٢, ٢]$

على نفس الشكل البياني كما في شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة $د = ع - \{٢\}$ ، ومدى $د = [٠, \infty]$

٩ حاول أن تحل

١ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^2 & \text{عندما } س > 0 \\ س & \text{عندما } س \leq 0 \end{cases}$$

ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

تعلم

The Absolute Value Function

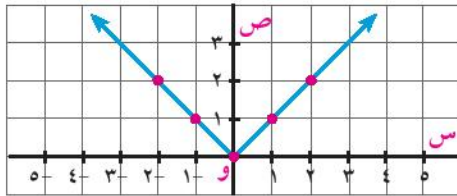
دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة):

أبسط صورة لدالة المقياس هي

$$د(س) = |س| ، س \in \mathbb{R}$$

وتعرف كما يلي:

$$د(س) = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geq 0 \\ -س & \text{عندما } س < 0 \end{cases}$$

لاحظ أن: $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2}$ ، $0 = |0|$ ، $3 = |3| = |-3|$ أي أن: $|س| = \sqrt{س^2}$ ، $|س| = |-س|$ ، $0 \leq |س|$

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأان من النقطة (0,0) ميل أحدهما = 1 ، وميل الآخر = -1

(تحقق من: مدى د = $[-\infty, \infty]$ ، زوجية ، د تناقصية في $[-\infty, 0]$ ، وتزايدية في $[0, \infty]$)

تعلم

Rational Function الدالة الكسرية

أبسط صورة للدالة الكسرية هي:

$$د(س) = \frac{1}{س} ، س \in \mathbb{R} - \{0\}$$



وهي دالة تفرق العدد بمعكوسه الضربي ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله (0,0) ويتكون من جزئين أحدهما يقع في الربع الأول والآخر يقع في الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولا يقطعهما (س = 0 ، ص = 0 خطا تقارب للمنحنى)

(تحقق من: مدى د = $\mathbb{R} - \{0\}$ ، د فردية ، د تناقصية في $[-\infty, 0]$ ،وتناقصية أيضًا في $[0, \infty]$)

Transformations of Graphs

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

Vertical Translation

أولاً: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

عمل تعاوني



اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: (س) = س^٢

باستخدام برنامج Geogebra

٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحب رأساً لأعلى وحدة واحدة، ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبّر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^٢ + ١ كما في شكل (١).

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٢، ٠)، (٣، ٠) وسجل ملاحظتك في كل مرة.

٤) اسحب منحنى د(س) = س^٢ وحدتين رأسياً إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبّر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^٢ - ٢ كما في شكل (٢).

فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^٢ - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^٢

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^٢، ر(س) = س^٢ + ١، ق(س) = س^٢ - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

تفكير ناقذ: باستخدام منحنى د(س) = س^٢ بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^٢ + ٤

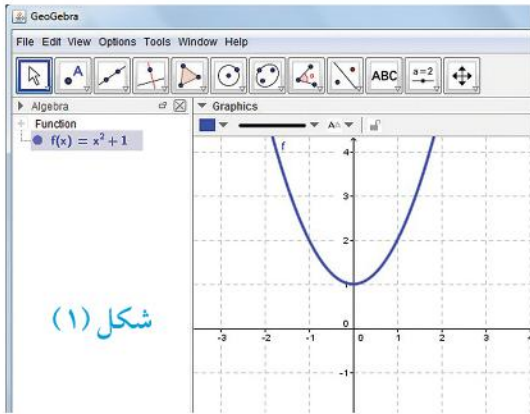
ب) ق(س) = س^٢ - ٥

تعلم

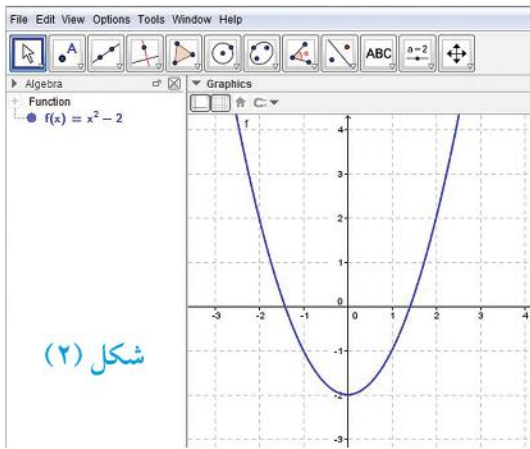


رسم المنحنى ص = د(س) + أ

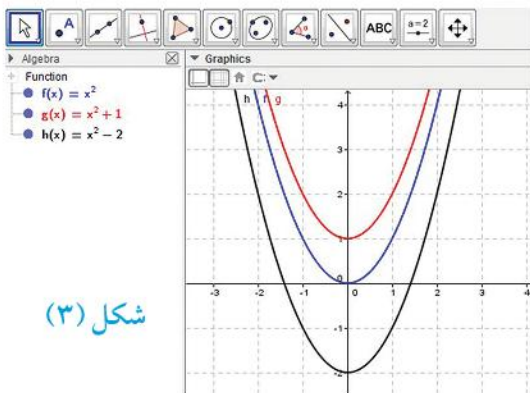
لأي دالة د: يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات في اتجاه وص ، عندما أ < ٠ ، وفي اتجاه وص ← عندما أ > ٠ .



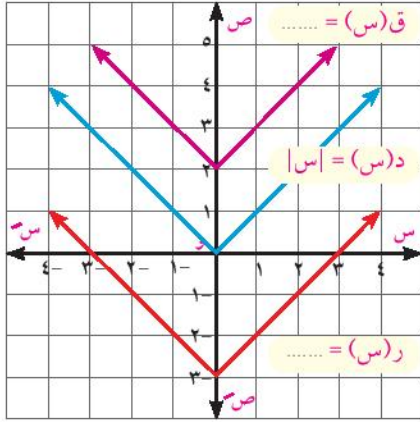
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



مثال

٢) يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق، حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية اكتب قاعدة كل من ر، ق

الحل

∴ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و ←

$$ر(س) = د(س) - ٣$$

$$∴ د(س) = |س| \quad ر(س) = |س| - ٣$$

∴ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ←

$$ق(س) = د(س) + ٢ \quad ∴ د(س) = |س| \quad ق(س) = |س| + ٢$$

Horizontal Translation

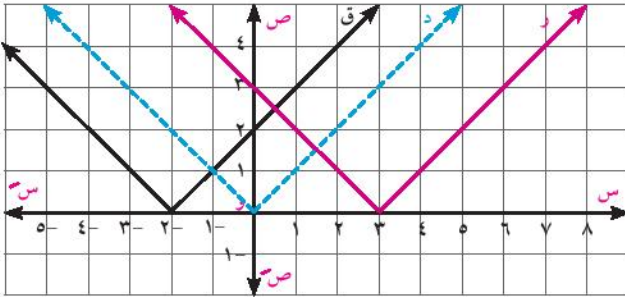
ثانياً: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

تعلم



رسم المنحنى ص = د(س + أ)

لأي دالة د؛ يكون المنحنى، ص = د(س + أ) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات في اتجاه و ← عندما يكون أ > ٠، وفي اتجاه و ← عندما يكون أ < ٠.



للحظ: في الشكل المقابل: د(س) = |س|

١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و ←

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٠، ٣)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى

الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ←

∴ ق(س) = |س + ٢|، نقطة بدء الشعاعين (٠، ٢-)

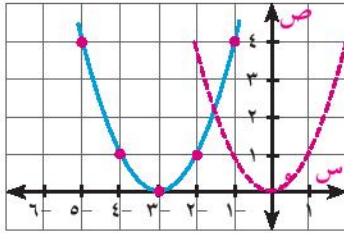
مثال

٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

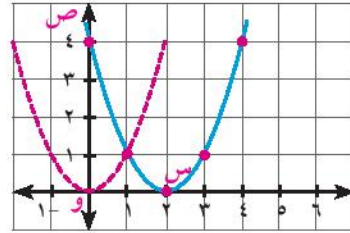
أ) ر(س) = (س - ٢)^٢

ب) ع(س) = (س + ٣)^٢

الحل



ب



أ

منحنى ع (س) = (س + 3)² هو منحنى

د (س) = س² بإزاحة 3 وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (0، 3).

منحنى ر (س) = (س - 2)² هو منحنى

د (س) = س² بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هي (2، 0).

٤ حاول أن تحل

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س² لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

ب ع (س) = (س - 3)²

أ ر (س) = (س + 4)²

تفكير ناقذ: إذا كان د (س) = س²، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر (س) = (س - 3)² + 2

رسم المنحنى ص = د (س) + أ + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د (س) + أ + ب هو نفس منحنى ص = د (س) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات

(في اتجاه وس ← عندما أ > 0، وفي اتجاه وس → عندما أ < 0)، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات

(في اتجاه وص ← عندما ب < 0، وفي اتجاه وص → عندما ب > 0)

٤ حاول أن تحل

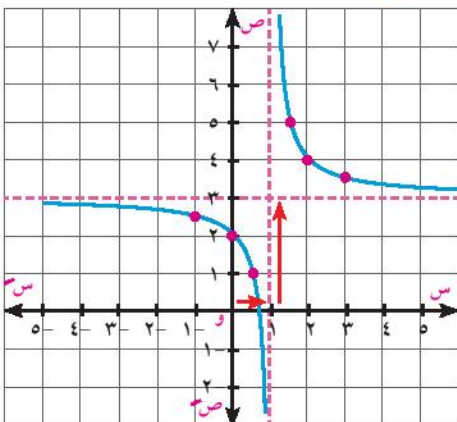
٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س² لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

ب ع (س) = (س - 3)² - 1

أ ر (س) = (س + 2)² - 4

مثال

تطبيق التحويلات الهندسية على رسم منحنيات الدوال



٤ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر (س) = 3 + 1/(1 - س)

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرافها:

الحل

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د (س) = 1/س بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه وس ← (أ = 1 - 0 > 0)،

ثم إزاحة قدرها 3 وحدات في اتجاه وص ← وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هي النقطة (1، 3)، مدى ر = ع - {3}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية في $[-\infty, 1]$ ، وتناقصية أيضًا في $[1, \infty]$

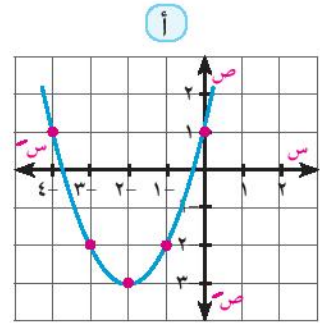
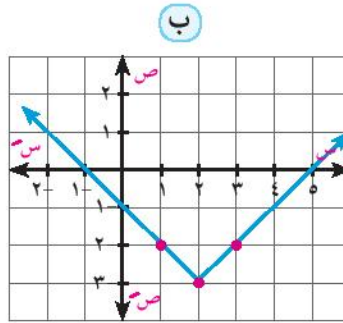
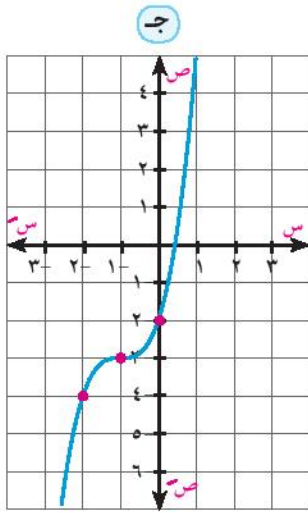
تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن د(س) = $3 + \frac{1}{2-s}$ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

٤ حاول أن تحل

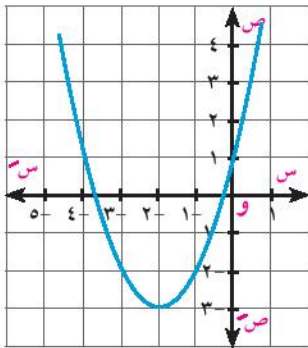
٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ ، لتمثيل كل من:

أ ر(س) = $1 + \frac{1}{2+s}$ **ب** ق(س) = $\frac{2-s}{2-s}$

٥ اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :



ملاحظة : يمكن رسم منحنى د(س) = $س^2 + ٤س + ١$ باستخدام الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية للمنحنى ر(س) = $س^2$ كما يلي.



٣	٣	س ^٢
١	١	س
١	١	س

د(س) = $س^2 + ٤س + ١$ باكمال المربع

$$= (س^2 + ٤س + ٤) - ٣$$

$$= (س + ٢)^2 - ٣$$

أي أن منحنى الدالة د (المعطاة) هو نفس منحنى الدالة ر حيث

حيث ر(س) = $س^2$ بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ ، ثم

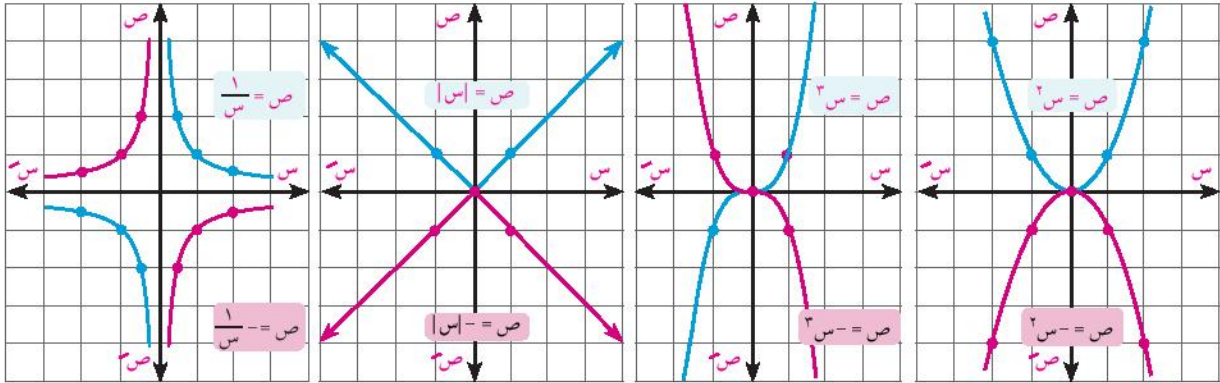
٣ وحدات في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ويمثله الرسم المقابل.

تطبيق: ارسم منحنى د(س) = $س^2 + ٦س + ٧$ باستخدام الإزاحة

الأفقية والإزاحة الرأسية لمنحنى ر(س) = $س^2$ ثم ابحث اطراد الدالة د.

ثالثاً: انعكاس منحنى الدالة في محور السينات

تبين الأشكال التالية انعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية في محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج ؟

تعلم



رسم المنحنى $y = -x$ (د)

لأي دالة د، يكون المنحنى $y = -d(x)$ هو نفس منحنى $y = d(x)$ بانعكاس في محور السينات

مثال

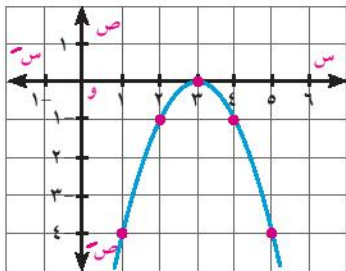
تطبيق التحويلات الهندسية على رسم المنحنيات

٥ باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر، ق، ع حيث:

ب) ق (س) $= |س| - ٤$

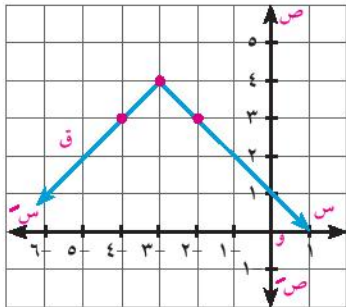
أ) ر (س) $= -(س - ٣)^٢$

ج) ع (س) $= ٢ - \frac{١}{٣-س}$

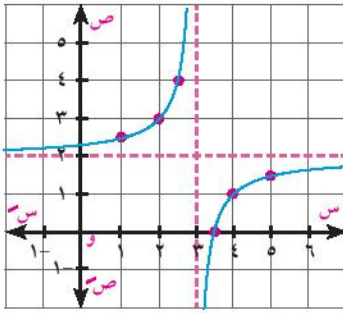


الحل

أ) منحنى ر (س) هو انعكاس لمنحنى د (س) $= س^٢$ في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\leftarrow$ وس، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.



ب) منحنى ق (س) هو انعكاس لمنحنى د (س) $= |س|$ في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\leftarrow$ وس، وإزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات في اتجاه $\leftarrow$ وس، وتكون نقطة بدء الشعاعين هي النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



- ج) منحنى ع (س) هو انعكاس لمنحنى د (س) = $\frac{1}{س}$ في محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{وص}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هي (٢، ٣)

٩ حاول أن تحل

- ٦) في كل مما يأتي ارسم منحنى الدالة ر حيث:

- أ) ر (س) = $٣ - (١ + س)^٢$ ب) ر (س) = $-(٣ - س)^٢$ ج) ر (س) = $٣ - |س - ٥|$
ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

تمارين ١ - ٤

- ١) ارسم منحنى الدالة د، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرافها

- أ) د (س) = $\begin{cases} |س| & \text{عندما } س > ٠ \\ س^٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ب) د (س) = $\begin{cases} ٤ & \text{عندما } س > ٢ \\ س^٢ & \text{عندما } س \leq ٢ \end{cases}$
ج) د (س) = $\begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س > ١ \\ ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٢) منحنى ر (س) = $س^٢ + ٤$ هو نفس منحنى د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:
أ) $\overleftarrow{وس}$ ب) $\overleftarrow{وس}$ ج) $\overleftarrow{وص}$ د) $\overleftarrow{وص}$

- ٣) منحنى ر (س) = $|س + ٣|$ هو نفس منحنى د (س) = $|س|$ بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:
أ) $\overleftarrow{وس}$ ب) $\overleftarrow{وس}$ ج) $\overleftarrow{وص}$ د) $\overleftarrow{وص}$

- ٤) نقطة رأس منحنى الدالة د (س) = $(٢ - س)^٢ + ٣$ هي:

- أ) (٣، ٢) ب) (٣، -٢) ج) (٢، -٣) د) (٢، -٣)

٥ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٢ - (س + ١)² هي :

- أ (٢، ١) ب (٢، -١) ج (١، ٢) د (٢، -١)

٦ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{3-s} + ٤$ هي :

- أ (٢، -٤) ب (-٣، -٤) ج (٢، ٤) د (-٣، ٤)

أجب عن ما يأتي:

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س² لتمثيل ما يأتي بيانياً.

- أ د(س) = س² - ٤ ب د(س) = (س - ٣)² ج د(س) = (س - ١)² - ٢

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ د(س) = |س| + ١ ب د(س) = |س + ٢| ج د(س) = |س - ٣| - ٢

ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

٩ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س³. لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ د(س) = د(س) - ٣ ب د(س) = د(س) - ٢ ج د(س) = د(س) + ٣ + ٢

ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

١٠ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة د وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

- أ ق(س) = د(س) - ٣ ب ق(س) = د(س) + ٢ ج ق(س) = د(س) - ٢ + ٢

١١ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س² لتمثيل ما يأتي بيانياً:

- أ د(س) = ٤ - س² ب د(س) = - (س - ٣)² ج د(س) = ٢ - (س + ٣)²

أولاً: حل المعادلات

فكر و ناقش



مثل بيانياً في شكل واحد منحنى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة ثابتة. لاحظ الرسم ثم اجب:

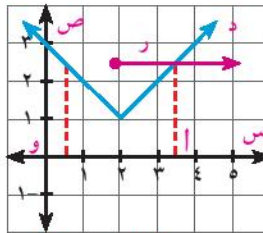
أ) ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنى الدالتين معاً؟

ب) إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنين معاً، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين؟

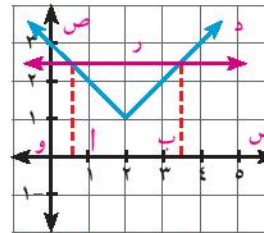
لاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: $D(s) = R(s)$ ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.

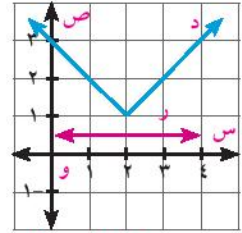
٢) لأي دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة $D(s) = R(s)$ هي مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



مجموعة الحل = {1}



مجموعة الحل = {1, 3}



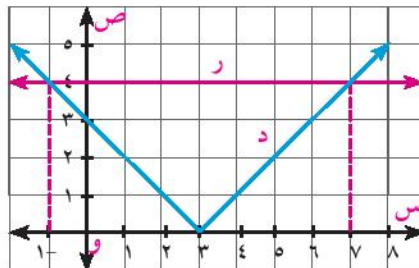
مجموعة الحل = ϕ

حل المعادلة: $|s + 3| = 4$

مثال

١) حل المعادلة: $|s - 3| = 4$ بيانياً وجبرياً.

الحل



بوضع $D(s) = |s - 3|$ ، $R(s) = 4$

١) نرسم منحنى الدالة د: $|s - 3|$

بإزاحة منحنى د $|s| = 3$ ثلاث وحدات في اتجاه و س

٢) على نفس الشكل نرسم $R(s) = 4$ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازي

محور السينات ويمر بالنقطة $(4, 0)$

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانياً
- حل معادلات المقياس جبرياً
- حل متباينات المقياس بيانياً
- حل متباينات المقياس جبرياً
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية

- Equation معادلة
- Inequality متباينة
- Graphical Solution حل بياني

الأدوات المستخدمة

- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب

٠. المنحنيين يتقاطعان في النقطتين $(-1, 4)$ ، $(7, 4)$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{-1, 7\}$

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: $d(s) = \begin{cases} s-3 & \text{عندما } s \leq 3 \\ s+3 & \text{عندما } s > 3 \end{cases}$

عندما $s \leq 3$: $s-3=4$ أى أن: $s=7 \in]-\infty, 3]$
عندما $s > 3$: $s+3=4$ أى أن: $s=-1 \in]-1, \infty[$
مجموعة حل المعادلة هي: $\{-1, 7\}$ وهذا يطابق الحل البياني.

٦ حاول أن تحل

١ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً وجبرياً.

ج $|s-7|=0$

ب $|s+1|=0$

أ $|s-4|=0$

Properties of the Absolute Value

بعض خواص مقياس العدد

تعلم

١ $|a| \times |b| = |a \times b|$ فمثلاً:

$6 = 3 \times 2 = |3| \times |2|$ ، $6 = |6| = |3 \times 2|$

٢ $|a| + |b| \geq |a+b|$

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددا a ، b لهما نفس الإشارة فمثلاً:

$9 = |5| + |4| = |5+4|$ ، $9 = |5-4| = |5-4|$

٣ $|a-s| = |s-a|$

الخط:

١ إذا كان: $|s|=a$ فإن: $s=a$ أو $s=-a$ لكل $a \geq 0$

٢ إذا كان: $|a|=|b|$ فإن: $a=b$ أو $a=-b$ لكل a, b

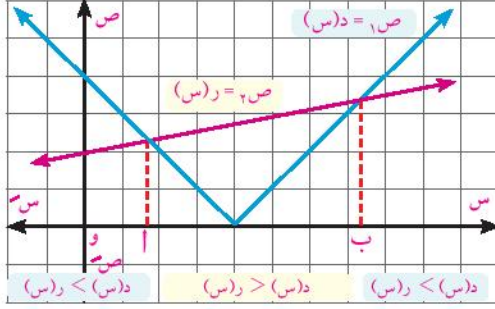
٣ $|s|^2 = |s|^2$

Solving the Inequalities

ثانياً: حل المتباينات

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: ($<$ ، $>$ ، $\leq$ ، $\geq$) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التي تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانياً



يبين الشكل المقابل منحني كل من الدالتين د، ر حيث:

ص = د(س)، ص = ٢ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة

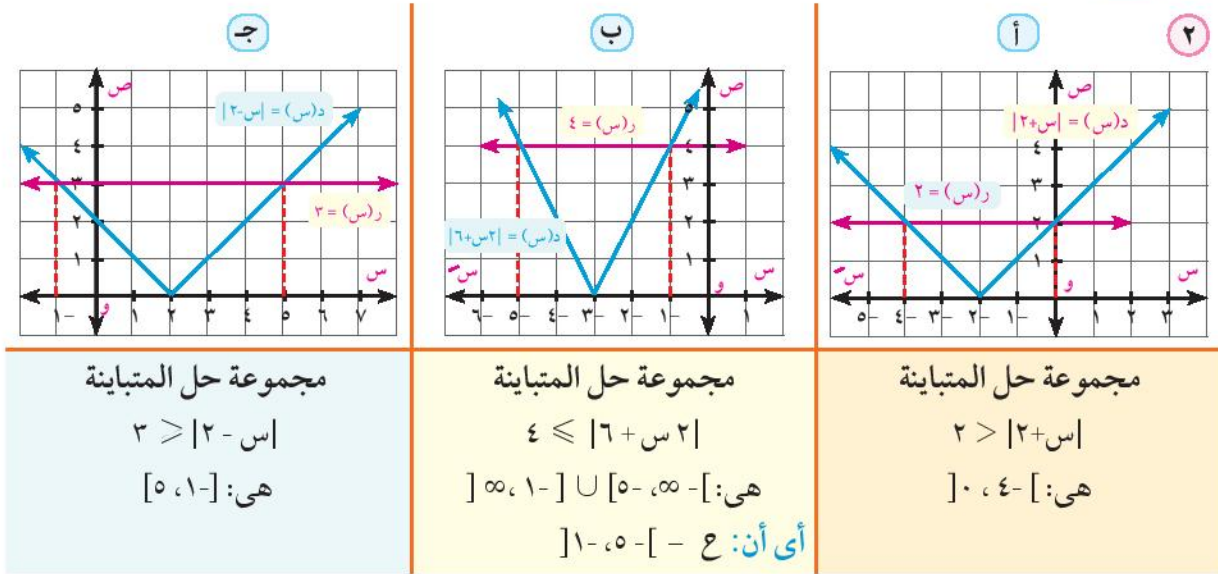
د(س) = ر(س) هي {أ، ب}

أي أن: ص = ١ = ص = ٢ عندما س = ١ أو س = ٢

ويلاحظ: ص = ١ > ص = ٢ أي د(س) > ر(س) عندما س ∈ [أ، ب]

ص = ١ < ص = ٢ أي د(س) < ر(س) عندما س ∈]ب، ∞[∪]-∞، أ]

مثال



٤ حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعيناً بالأشكال البيانية في مثال (٧):

ج $٣ < |س - ٢|$

ب $٤ > |٦ + س|$

أ $٢ > |س + ٢|$

حل المتباينات جبرياً

تعلم

أولاً: إذا كان $|س| > أ$ ، $٠ < أ$ فإن: $س > أ$ أو $س < -أ$

ثانياً: إذا كان $|س| \leq أ$ ، $٠ < أ$ فإن: $س \leq أ$ أو $س \geq -أ$

مثال

٢ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

$$|س - ٣| > ٤$$

الحل

$$\therefore |س - ٣| > ٤ \quad \text{أى} \quad ٤ > س - ٣$$

$$\therefore ٣ + ٤ > س - ٣ + ٣$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} =]٧, ١[$$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

$$\text{أ} \quad |س - ٧| > ١١ \quad \text{ب} \quad |٣س + ٧| > ٨$$

تطبيقات حياتية

مثال

الأرصاد الجوية

٤ قامت محطة الأرصاد الجوية بتسجيل درجة الحرارة على مدينة القاهرة فى يوم ما فكانت ٣٢° باختلاف ٧° عن معدلها الطبيعي فى ذلك اليوم . كم تكون درجة الحرارة المحتملة لمدينة القاهرة فى ذلك اليوم ؟

الحل

بفرض أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها على مدينة القاهرة فى هذا اليوم = س°

$$|س - ٣٢| = ٧ \quad \text{أى} \quad س - ٣٢ = \pm ٧$$

$$\text{ويكون س} = ٣٢ + ٧ = ٣٩ \quad \text{أو} \quad س = ٣٢ - ٧ = ٢٥$$

أى أن درجة الحرارة المحتمل تسجيلها هى ٣٩° أو ٢٥°

تمارين الدرس الخامس

أكمل مايتأتى:

١ مجموعة حل المعادلة $|س| = \frac{1}{٢}$ هى

٢ مجموعة حل المعادلة $|س + ٣| = ٠$ هى

٣ مجموعة حل المتباينة $|س - ٢| > ٠$ هى

تذكر أن

لكل من أ، ب، ج

إذا كان: أ > ب، ب > ج

فإن أ > ج

إذا كان: أ > ب فإن

أ + ج > ب + ج

أ ج > ب ج عند ج < ٠

أ ج < ب ج عند ج > ٠

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة مما يأتي:

- | | |
|---------------|---------------------|
| ٤ س - ٢ = ٣ | أ] ١ - ، ٥] |
| ٥ س - ٢ > ٣ | ب ع |
| ٦ س - ٢ < ٣ | ج { ١ - ، ٥ } |
| ٧ س - ٢ ≥ ٣ | د ع - [١ - ، ٥] |
| ٨ س - ٢ < ٣ | هـ ϕ |
| ٩ س - ٢ = ٣ | و] ١ - ، ٥] |

أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

- | | | |
|----------------|--------------------|----------------------|
| ١٠ س + ٣ = ٦ | ١١ ٥ = ٢ - س ٧ | ١٢ ٧ = ٣ - ٢ س |
|----------------|--------------------|----------------------|

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

- | | |
|----------------|--------------------|
| ١٣ س + ٤ = ٣ | ١٤ ٣ = ٥ - ٢ س |
|----------------|--------------------|

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

- | | | |
|----------------|------------------|------------------|
| ١٥ س - ١ > ٣ | ١٦ ٥ > ٢ - س | ١٧ ٢ < ٣ + س |
|----------------|------------------|------------------|

أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| ١٨ ٣ < ١ - ٢ س | ١٩ ٧ > ٣ + ٢ س | ٢٠ ٢ ≤ ٧ - ٣ س |
|----------------------|----------------------|----------------------|

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات في أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية $\log(s) = \log(s) + \log(s)$ ، ويرجع الفضل في ذلك للعالم ليونهارت أويلر في القرن الثامن عشر الذي قام بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع في مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة القولت، كما يستخدم الأس الهيدروجيني (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلول ما.

مخرجات تعلم الوحدة

- في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:
- يتعرف الدالة الأسية.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية.
- يتعرف العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانياً.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف معادلات لوغاريتمية.
- يتعرف مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس 10.
- يوجد قيمة اللوغاريتمات باستخدام الآلة الحاسبة.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل بعض المعادلات الأسية.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية فى فترات محدودة، ويستنتج خواصها.

المصطلحات الأساسية

Reflection	انعكاس	Exponential Function	دالة أسية.	The n^{th} Power	القوة النونية
Logarithm	لوغاريتم	Exponential Growth	نمو إسي.	Base	الأساس
Logarithmic Equation	معادلة لوغاريتمية.	Exponential Decay	تضاؤل أسي.	Exponent	الأس
Logarithmic Function	دالة لوغاريتمية	Domain	مجال	n^{th} Root	جذر نوني
		Range	مدى	Rational – Exponent	أس كسري

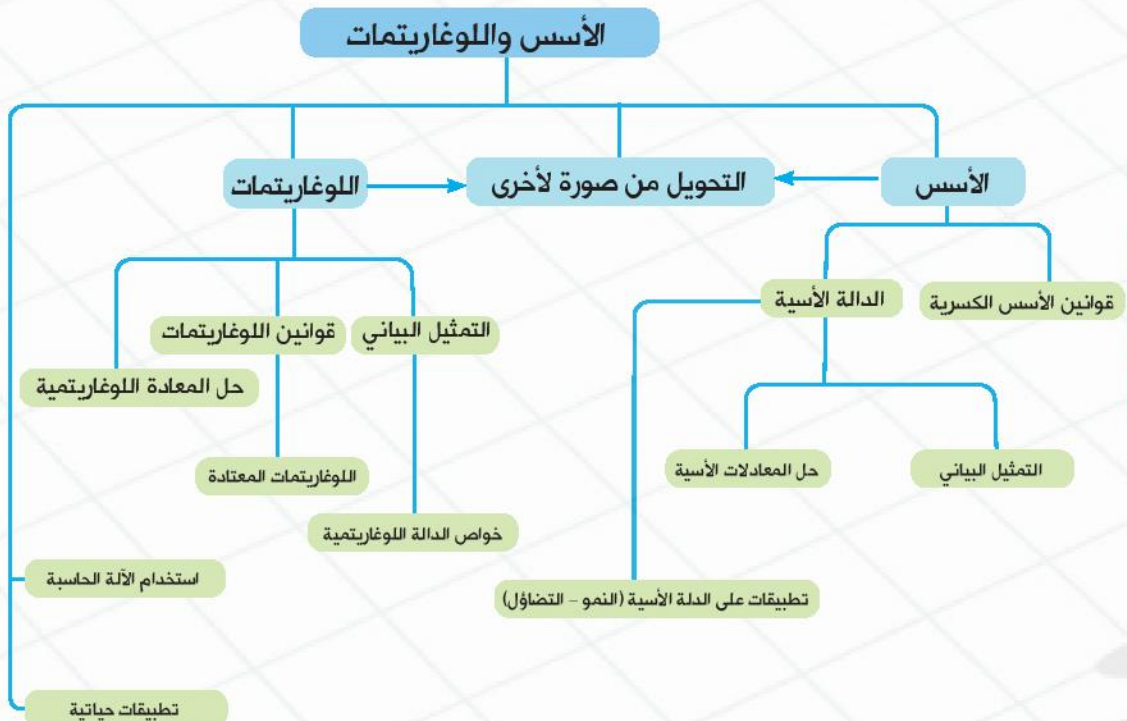
الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية geogebra-graph

دروس الوحدة

- ١ - ٢: الأسس الكسرية
- ٢ - ٢: الدالة الأسية وتمثيلها البياني وتطبيقاتها
- ٢ - ٣: حل المعادلات الأسية
- ٢ - ٤: الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني
- ٢ - ٥: بعض خواص اللوغاريتمات

مخطط تنظيمي للوحدة



الأسس الكسرية

Rational Exponents

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب، وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والتكعيبة، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها، وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

The n^{th} Root

الجذر النوني

علمت أن الجذر التربيعي لعدد ما هو عملية عكسية لتربيع ذلك العدد، وبالمثل فإن الجذر النوني لعدد ما هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن).

مثال:

- ١ إذا كانت $8 = 2^3$ فإن ٢ هو الجذر التكعيبي للعدد ٨
 - ٢ إذا كانت $32 = 2^5$ فإن ٢ هو الجذر الخامس للعدد ٣٢
 - ٣ إذا كانت $1 = 2^0$ فإن س هو الجذر النوني للعدد ١
- أي أن $2 = \sqrt[3]{8}$ أي أن $2 = \sqrt[5]{32}$ أي أن $2 = \sqrt[0]{1}$

المصطلحات الأساسية

The n^{th} Power	القوة النونية
Base	الأساس
Exponent	الأس
n^{th} Root	جذر نوني
Rational Exponent	أس كسري

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ ، $\sqrt[n]{a}$ يكون $\frac{1}{n}$ هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $a > 0$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ عدد صحيح فردي أكبر من ١

مثال:

$$\begin{aligned}
 2 &= \sqrt[4]{16} = \frac{1}{4}(16) \\
 3 &= \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3}(27) \\
 4 &= \sqrt[4]{64} = \frac{1}{4}(64) \\
 5 &= \sqrt[5]{3125} = \frac{1}{5}(3125)
 \end{aligned}$$

لاحظ أن



دليل الجذر
رمز الجذر
العدد داخل الجذر

مثال

١ إذا كانت $s = a$ فأوجد قيم s في E (إن وجدت) في كل من الحالات الآتية:

أ $s = a, 5 = a$ صفر

ب $s = a, 4 = a$ ٨١

ج $s = a, 2 = a$ ٤-

د $s = a, 3 = a$ ٨-

الحل

أ عندما $s = a, 5 = a$ صفر	فإن $s = 0$	وتكون	$s = \sqrt[5]{0} = 0$
ب عندما $s = a, 4 = a$ ٨١	فإن $s = 4$	وتكون	$s = \sqrt[4]{81} = \pm 3$
ج عندما $s = a, 2 = a$ ٤-	فإن $s = 2$	وتكون	$s = \sqrt[2]{-4} \notin E$
د عندما $s = a, 3 = a$ ٨-	فإن $s = 3$	وتكون	$s = \sqrt[3]{-8} = -2$

نستنتج من المثال السابق أن:

إذا كانت $s = a$ فإن قيم s التي تحقق المعادلة تتضح من الجدول التالي:

$\sqrt[n]{a}$	a	n
$\sqrt[n]{a} = 0$ صفر	$a = 0$	$n \in \mathbb{N}^+, n \neq 1$
يوجد جذران حقيقيان هما $\pm \sqrt[n]{a}$	$a > 0$	عدد صحيح زوجي موجب
لا توجد جذور حقيقية.	$a < 0$	عدد صحيح زوجي موجب
يوجد جذر حقيقي واحد فقط هو $\sqrt[n]{a}$	$a \in \mathbb{R}$	عدد صحيح فردي موجب، $n \neq 1$

٥ حاول أن تحل

١ أوجد قيم s في كل مما يأتي (إن وجدت):

أ $s = 2$ ٣٦

ب $s = 0$ ٣٢-

ج $s = 3$ ١٢٥

د $s = 4$ ١٢٩٦

هـ $s = 2$ ٤٩-

و $s = 7$ ١٢٨-

تفكير ناقده: وضح بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد a وبين $\sqrt[6]{a}$

إذا كان $n \in \mathbb{N}^+, n \neq 1$ ، $m \in \mathbb{N}^+$ ، $\sqrt[n]{a} \in E$ فإن: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

مثال:

$$\sqrt[4]{(16)} = \sqrt[2]{(\sqrt[2]{16})} = \sqrt[2]{(4)} = 2$$

$$\sqrt[3]{(125)} = \sqrt[2]{(\sqrt[5]{125})} = \sqrt[2]{(5)} = 2.5$$

مثال

٢ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

أ $\sqrt[3]{-8}$ ب $\sqrt[3]{-1}$ ج $\sqrt[3]{(3+1)64}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8}$

الحل

أ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ ب $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$

ج $\sqrt[3]{(3+1)64} = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3} = 4\sqrt[3]{4}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

أ $\sqrt[3]{125}$ ب $\sqrt[3]{-27}$ ج $\sqrt[3]{(3+1)128}$ د $\sqrt[3]{(3+1)64}$

Using The Modulus

استخدام المقياس

يستخدم مقياس العدد إذا كان دليل الجذر (n) عدداً زوجياً فيكون $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|}$, أما إذا كان دليل الجذر عدداً فردياً فلا داعي لاستخدام المقياس.

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \sqrt[n]{|a|} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً.} \\ \sqrt[n]{a} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً.} \end{cases}$$

مثال

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ $\sqrt[3]{8}$ ب $\sqrt[3]{-8}$ ج $\sqrt[3]{(3+1)64}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8}$

الحل

أ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ ب $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

ج $\sqrt[3]{(3+1)64} = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3} = 4\sqrt[3]{4}$ د $\sqrt[3]{(3+1)8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$

ج $\sqrt[3]{(3+1)64} = \sqrt[3]{4 \cdot 64} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3} = 4\sqrt[3]{4}$ حيث $3 < 4$

د $\sqrt[3]{(3+1)8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$ حيث $1 < 4$

لاحظ أن

مربع أى من العددين (1) أو (-1) هو 1

٩ حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

ب $\sqrt[18]{(س-٢)^{١٨}}$

أ $\sqrt[12]{١٦٦٤}$

د $\sqrt[4]{(٥\sqrt{٦}-٢)^4}$

ج $\sqrt[3]{(٥\sqrt{٦}-٢)^3}$

تعريف

إذا كان $٧ \equiv -١ \pmod{١٠}$ ، $٤ \equiv -٢ \pmod{١٠}$ ، $١ \equiv ١ \pmod{١٠}$ فإن: $\frac{١}{١} \equiv \frac{١}{١} \pmod{١٠}$

مثال: $\frac{١}{٥} \equiv ٧ \pmod{١٠}$ ، $\frac{١}{٢} \equiv ٥ \pmod{١٠}$

تعريف

إذا كان $٧ \equiv -١ \pmod{١٠}$ ، $٤ \equiv -٢ \pmod{١٠}$ ، $١ \equiv ١ \pmod{١٠}$ عددين حقيقيين فإن:

$$\sqrt[١٠]{١} \times \sqrt[١٠]{١} = \sqrt[١٠]{١}$$

$$\frac{\sqrt[١٠]{١}}{\sqrt[١٠]{١}} = \sqrt[١٠]{\frac{١}{١}} \quad \text{حيث } ١ \neq ٠$$

مثال

٤ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

ب $\frac{\sqrt[٢]{٨} \times \sqrt[٥]{٣٢}}{\sqrt[٥]{١٦} \times \sqrt[٢]{٤}}$

أ $\frac{\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[١٠]{٤} \times \sqrt[٢]{٨}}{\sqrt[٢]{٣} \times \sqrt[٢]{٦}}$

الحل

أ المقدار $= \frac{\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[١٠]{٤} \times \sqrt[٢]{٨}}{\sqrt[٢]{٣} \times \sqrt[٢]{٦}}$

$$= \frac{\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[١٠]{(٢^٢)} \times \sqrt[٢]{(٢^٣)}}{\sqrt[٢]{٣} \times \sqrt[٢]{(٢ \times ٣)}}$$

$$= \frac{\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٢]{٢}}{\sqrt[٢]{٣} \times \sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٢]{٣}}$$

$$= \frac{٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٣ \times ٣}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = ١$$

تحويل الجذور إلى أسس كسرية.

تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

بالتبسيط

تحويل الجذور إلى أسس كسرية.

تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

$$٤ = ٢^٢ = ٢^{\frac{٢}{١}} = ٢^{\frac{٢}{١} \times \frac{١}{١}} = ٢^{\frac{٢}{١}}$$

ب المقدار $= \frac{\sqrt[٢]{٨} \times \sqrt[٥]{٣٢}}{\sqrt[٢]{١٦} \times \sqrt[٢]{٤}}$

$$= \frac{\sqrt[٢]{(٢^٣)} \times \sqrt[٥]{(٢^٥)}}{\sqrt[٢]{(٢^٤)} \times \sqrt[٢]{(٢^٢)}}$$

$$= \frac{٢^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{\frac{١}{١}}}{٢^{\frac{٤}{٢}} \times ٢^{\frac{٢}{٢}}} = ٢^{\frac{٣}{٢} - \frac{٤}{٢} - \frac{٢}{٢}} = ٢^{-\frac{٣}{٢}}$$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد في أبسط صورة كلاً من:

$$\frac{\sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{43}}{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}} \quad \text{ب}$$

حل المعادلات:

مثال

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$9 = \sqrt[3]{s} \quad \text{أ} \quad 8 = \sqrt[3]{(1+s)} \quad \text{ب}$$

الحل

برفع الطرفين للقوة ٣

$$9 = \sqrt[3]{s} \quad \text{أ} \quad \therefore 9^3 = s$$

$$27 = s \quad \therefore (9)^3 = s$$

$$27 = s \quad \therefore s = 27$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{s}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{27, 27\}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$27 \pm = s \quad \therefore \quad \therefore |s| = 27$$

برفع الطرفين للقوة ٤

$$8 = \sqrt[3]{(1+s)} \quad \text{ب} \quad \therefore 8^3 = (1+s)$$

$$512 = (1+s) \quad \therefore$$

$$\therefore (1+s) = \sqrt[4]{512}$$

$$\therefore s + 1 = 2 \quad \therefore s = 1 \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{1\}$$

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\frac{1}{32} = \sqrt[5]{(1-s)} \quad \text{ب} \quad 32 = \sqrt[5]{s} \quad \text{أ}$$

تمارين ١ - ٢

١ اكتب كلاً مما يأتي على صورة أسية:

$$\sqrt[5]{2} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt[3]{1} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{s} \quad \text{أ}$$

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[3]{s}} \quad \text{و}$$

$$\sqrt[5]{s^2} \quad \text{هـ}$$

$$\sqrt[3]{21} \quad \text{د}$$

٢ اكتب كلاً مما يأتي على صورة جذرية:

$$6\sqrt[3]{} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt[3]{} \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{أ}$$

الدالة الأسية وتطبيقاتها

Exponential Function and its Application

تمهيد

كثيراً ما نتعامل في حياتنا عن أمور تتطلب حسابات دقيقة مثل الفوائد البنكية والزيادة السكانية وتكاثر الخلايا في بعض الكائنات وفترات عمر النصف للذرات المشعة وغيرها، وتلك هذه الأمور تتطلب مفهوم الدالة الأسية التي سوف نتناولها في هذا الدرس ونعرض بعض خواصها .

لاحظ أن

الدالة الجبرية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقي.

الدالة الأسية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لا يساوى الواحد.

تعلم

Exponential Function

الدالة الأسية

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً $a \neq 1$ فإن الدالة:

د حيث $x \rightarrow e^x$ ، $x = (س)$ a^x

تسمى **دالة أسية** أساسها a

المصطلحات الأساسية

- دالة أسية . Exponential Function
- نمو أسى . Exponential Growth
- تضاؤل أسى . Exponential Decay

تعبير شفهي: وضح لماذا لا تمثل الدالة $(س) = (٣-)^س$ حيث $س \in ع$ دالة أسية

Graphical Representation of the Exponential

التمثيل البياني للدالة الأسية

Function

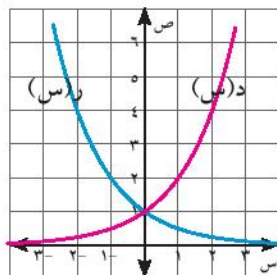
مثال

١ بالاستعانة بقيم $س \in [-٣, ٣]$ ارسم في شكل واحد جزءاً من منحنى كل من الدالتين:

$$د(س) = ٢^س , ر(س) = \left(\frac{1}{٢}\right)^س$$

الحل

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨
ر(س)	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



من الرسم يمكن استنتاج الخواص الآتية للدالة الأسية

١ الدالة د: $د(س) = ٢^س$ متزايدة على مجالها لأن $(١ < ٢)$

الدالة ر: $ر(س) = \left(\frac{1}{2}\right)^س$ متناقصة على مجالها لأن $(١ > \frac{1}{2})$

٢ مدى كل من الدالتين هو $ع^+$

٣ منحنى الدالة د: $د(س) = ٢^س$ هو صورة منحنى الدالة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

أضف إلى معلوماتك

تسمى الدالة الأسية $د(س) = ا^س$ في حالة $١ < ا$ بدالة النمو (growth function) وترتبط بكثير من التطبيقات الحياتية مثل التزايد السكاني والفائدة المركبة للبنوك.

وتسمى الدالة الأسية $د(س) = ا^س$ في حالة $٠ < ا < ١$ بدالة التضاؤل (decay) وترتبط بكثير من التطبيقات مثل فترة عمر النصف للذرات المشعة .

ر: $r(s) = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ بالانعكاس في محور الصادات.

٤ حلول أن تحل

- ١ بالاستعانة بقيم $s \in [-2, 2]$ ارسم في شكل واحدٍ منحنى كلٍّ من الدوال $d_1(s) = s^2$ ، $d_2(s) = s^3$ ، $d_3(s) = s^4$

مثال

- ٢ إذا كانت $d(s) = s^3$ فأكمل ما يأتي :

أ $d(2) = \dots$ ب $d(s+2) = s^3 \times \dots$ ج $d(s) \times d(-s) = \dots$

الحل

أ $d(2) = 2^3 = 8$ ب $d(s+2) = s^3 + 2^3 = s^3 + 8$ ج $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$

د $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$ هـ $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$ و $d(s) \times d(-s) = s^3 \times (-s)^3 = -s^6$

تمارين ٢ - ٢

- ١ ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أي منها تكون متزايدة وأي منها متناقصة؟

أ $d(s) = s^2$ ب $d(s) = s^3$ ج $d(s) = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ د $d(s) = 2 - s + s^2$

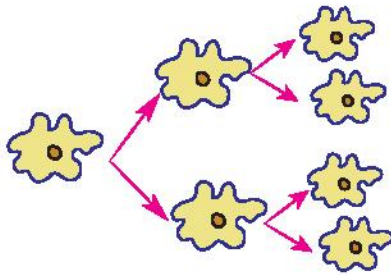
- ٢ أكمل ما يأتي:

- أ الدالة $d(s) = s^2$ تقطع محور الصادات في النقطة $\dots$
 ب الدالة $d(s) = s^2 - 1$ تقطع محور الصادات في النقطة $\dots$
 ج إذا مر منحنى الدالة $d(s) = s^3$ بالنقطة $(1, 3)$ فإن $\dots = 1$
 د منحنى الدالة $d(s) = s^3$ هو صورة منحنى الدالة $r(s) = \left(\frac{1}{3}\right)^s$ بالانعكاس في $\dots$
 هـ الدالة $d(s) = s^3$ تكون تناقصية إذا كان $\dots \geq$
 و الدالة $d(s) = s^3$ تكون متزايدة عندما $\dots \geq$

حل المعادلات الأسية

Solving Power Equations

فكر و ناقش



تتكاثر الأميبا بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين بعد فترة زمنية ثابتة، ثم تنقسم كل خلية جديدة إلى خليتين بعد نفس الفترة الزمنية، وفي نفس الشروط وهكذا

- ١ أوجد عدد الخلايا الناتجة من خلية واحدة بعد ٩ فترات زمنية.
- ٢ أوجد عدد الفترات الزمنية اللازمة لإنتاج ٨١٩٢ خلية من هذه الخلية.

تعلم

Power Equation

المعادلة الأسية

إذا تضمنت المعادلة متغيراً في الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل $(8 = 2^{3+1})$
حل المعادلات الأسية:

أولاً: إذا كان $a^x = a^y$ حيث $a \in \{0, 1, -1\}$ **فإن** $x = y$.

مثال

١ أوجد في مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $8 = 2^{3+1}$ ب $2^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

الحل

أ $8 = 2^{3+1} \therefore 2^3 = 2^{3+1}$ ب $2^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \therefore 2^{-3} = 2^{-3-1}$

$\therefore 3 = 3 + 1$ ومنها $x = 0$

$\therefore$ مجموعة الحل = {صفر}

ب $2^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \therefore 2^{-3} = 2^{-3-1}$

$\therefore 2^{-3} = 2^{-4}$ ومنها $x = 1$

$\therefore 2 = 2 - 1$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

سوف تتعلم

- ◀ الدالة الأسية.
- ◀ تمثيل الدوال الأسية بيانياً.
- ◀ خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

- ◀ معادلة أسية. Power Equation
- ◀ حل بياني. Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

- ◀ آلة حاسبة علمية
- ◀ برامج رسومية

٦ حاول أن تحل

١ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢٥ = ١ + ٣٥$

ب $\frac{1}{8} = ٢ - ١٣$

ثانيًا: إذا كان $أ = ب$ حيث $أ, ب \in \{١, -١, ٠\}$,إما: $م = صفر$ أو: $أ = ب$ عندما $م$ عدد فردي.، $أ = \pm ب$ عندما $م$ عدد زوجي.

مثال

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢ + ٣٧ = ٢ + ٣٣$

ب $٤ - ٣٣ = ٢ - ٤٣$

الحل

أ $٢ + ٣٧ = ٢ + ٣٣ \quad \therefore ٠$

$٢ + ٣٧ = ٢ + ٣٣ \quad \therefore ٠$ ومنها $٢ = ٣٧$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{٢\}$

ب $٤ - ٣٣ = ٢ - ٤٣ \quad \therefore ٠$

$٤ - ٣٣ = ٢ - ٤٣ \quad \therefore ٠$

$٤ - ٣٣ = ٢ - ٤٣ \quad \therefore ٠$ ومنها $٢ = ٣٣$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{٢\}$

٦ حاول أن تحل

٢ أوجد في ع مجموعة حل المعادلة:

أ $١ - ٣٥ = ١ - ٤٣$

ب $٣ - ٣٧ = ٦ - ٣٣$

مثال

٣ إذا كانت $د(س) = ١ + ٣٢$ أوجد قيمة $س$ التي تحقق $د(س) = ٣٢$

الحل

$٣٢ = د(س) \quad \therefore ٣٢ = ١ + ٣٢$

$٥ = ١ + ٣٢ \quad \therefore ٥ = ١ + ٣٢$

$\therefore$ $٤ = س$ مجموعة الحل $\{٤\}$

٦ حاول أن تحل

٣ إذا كانت $د(س) = ٣٧$ ، أوجد قيمة $س$ التي تحقق $د(س) = ٤٩$



تمارين ٢ - ٣



١) أكمل ما يأتي:

أ) إذا كان $5^{-2} = 1$ فإن $s = \dots$

ب) إذا كان $3^{-2} = 7^{-2}$ فإن $s = \dots$

ج) إذا كان $2^{1+s} = 5^{1+s}$ فإن $3^{1+s} = \dots$

د) إذا كان $2^{32} = 32$ فإن $s = \dots$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

٢) إذا كان $3^{-5} = 9$ فإن $s = \dots$

أ) ٢ ب) ٧ ج) ٣- د) ٧-

٣) إذا كان $3^3 = 9$ فإن $3^2 + 1 = \dots$

أ) ٥ ب) ١٥ ج) ٢٧ د) ٤٥

٤) العدد $5 + 1 + 5^3$ يقبل القسمة على لجميع قيم s الطبيعية.

أ) ٧ ب) ٦ ج) ١٣ د) ١٧

٥) إذا كان $(\frac{2}{3})^{-s} = \frac{8}{27}$ فإن $s = \dots$

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥

٦) أوجد في E مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $3^{2+s} = 9$ ب) $\frac{1}{32} = 5^{-s}$

ج) $1 = 5^{2+s}$ د) $3 = 3^{1+s}$

هـ) $4 = 2 \times 3^{-2} = 3^{-3}$ و) $5^{-3} = 5^{-7}$

ز) $2^{-5} = 6^{-3}$ ح) $\frac{8}{27} = (\frac{3}{2})^{-s}$

ط) $\frac{4}{35} = 5^{-s} \times 2$ ي) $64 = 4^s$

ك) $\frac{1}{4} = 4^{-s}$ ل) $\frac{1}{9} = (3)^{-5}$

٧ إذا كانت د(س) = ٣٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٨

ب د(س) + ١ = $\frac{1}{٣٢}$

٨ إذا كانت د(س) = $٣٣ + ١$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٢٧

ب د(س) - ١ = $\frac{1}{٩}$

٩ إذا كانت د(س) = $٣٧ - ٢$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٣٤٣

ب د(٢س) = $\frac{1}{٤٩}$

١٠ **اكتشف الخطأ:** قام كل من محمد وكريم بحل المعادلة $١٦ = ٣٢ \times ٢$

حل محمد

$$١٦ = ٣٢ \times ٢$$

$$١٦ = ٣٤ \therefore$$

$$٢٤ = ٣٤ \therefore$$

$$\therefore \text{س} = ٢$$

حل كريم

$$١٦ = ٣٢ \times ٢$$

$$٨ = \frac{١٦}{٢} = ٣٢ \therefore$$

$$٢٢ = ٣٢ \therefore$$

$$\therefore \text{س} = ٣$$

أي الحلين هو الصواب؟ ولماذا؟

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

Logarithmic Function and its Graphical Representation

فكر و ناقش



تأمل المعادلات الأسية الآتية وحاول الإجابة عليها:
إذا كان $2^3 = 8$ ، $2^2 = 4$ ، $2^1 = 2$ فإن:

١- $2^x = 8$ ، $2^x = 4$ ، $2^x = 2$

٢- قيمة x محصورة بين عددين صحيحين متتاليين هما ،

لاحظ أن قيمة x لا يمكن حسابها مباشرة مثل x ، ع لذلك نحتاج إلى مفهوم دالة جديدة لحساب قيمة x .

تعلم



الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

إذا كان s ، a عددين موجبين حيث $a \neq 1$ فإن الدالة اللوغاريتمية $s = \log_a a^s$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية $a^s = a^{\log_a s}$

مثال: إذا كان $\log_2 32 = 5$ فإن $2^5 = 32$ والعكس صحيح.

تعبير شفهي:

إذا كانت النقطة (s, a) $\exists$ للدالة الأسية $s = a^x$ فإن:

١- النقطة (a, s) $\exists$ للدالة $s = \log_a a^s$.

٢- الصورة الأسية $a^x = s$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ تكافئ الصورة اللوغاريتمية $x = \log_a s$.

مثال



التحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

١ حوّل كلّاً مما يأتي إلى الصورة اللوغاريتمية:

ج $10^{-2} = 0.01$

ب $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$

أ $81 = 3^4$

الحل

ج $\log_{10} 0.01 = -2$

ب $\log_5 \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$

أ $\log_3 81 = 4$

تعبير شفهي: هل يمكن تحويل $(-2) = 16$ إلى الصورة اللوغاريتمية؟ فسر ذلك.

سوف تتعلم

تعريف الدالة اللوغاريتمية.

التمثيل البياني للدالة

اللوغاريتمية.

التحويل من الصورة الأسية إلى

الصورة اللوغاريتمية والعكس.

حل بعض المعادلات

اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية



Logarithm لوغاريتم

Inverse Function دالة عكسية

Domain مجال

اللوغاريتم المعتاد

Common Logarithm

الأدوات المستخدمة



آلة حاسبة.

حاسب آلي.

إرشادات للدراسة



تسمى $\log_a s = x$ بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى $a^x = s$ بالصورة الأسية المكافئة لها.

لاحظ أن (أ) أساس موجب

فإذا كانت $(-3) = 81$

فإنه لا توجد صورة لوغاريتمية مكافئة لها.

٩ حاول أن تحل

١ عبّر عن كلِّ مما يأتي بصورة لوغاريتمية:

ج) $٣ = ٥^٢$ حيث $٣ \in \mathbb{R}^+$

ب) $٢ = \frac{1}{8}$

أ) $١٠٠٠ = ٢^{١٠}$

{1}-

Common Logarithm اللوغاريتم المعتاد

هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ ويكتب بدون كتابة الأساس، أي لو $٧ = ٧$ ، لو $١٢٧ = ١٢٧$ ويمكن استخدام مفتاح $\log$ الموجود بالحاسبة لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لأي عدد.

مثال

٢ حوّل كلّ مما يأتي إلى الصورة الأسية:

ج) لو $١ = ٣$ صفر

ب) لو $٣ = ١٠٠٠$

أ) لو $٥ = ٣٢$

الحل

ج) $٢ = \text{صفر}$ ١

ب) $١٠٠٠ = ٣^{١٠}$

أ) $٣٢ = ٥^٢$

٩ حاول أن تحل

٢ حوّل كلّ مما يأتي إلى الصورة الأسية:

ج) لو $١ = ٥$

ب) لو $٢ = ١٠٠$

أ) لو $\frac{2}{3} = ٢٥$

مثال

إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية

٣ أوجد قيمة كلّ من:

ب) لو $٠,٠١$

أ) لو ١٢٥

الحل

أ) نفرض لو $١٢٥ = س$ وبالتحويل إلى الصورة الأسية

ومنها $س = ٣$

∴ $٣٥ = ٢٥$

∴ $١٢٥ = ٣٥$

∴ لو $١٢٥ = ٣$

ب) نفرض لو $٠,٠١ = ص$ (لوغاريتم معتاد أساسه ١٠) وبالتحويل للصورة الأسية

∴ $٢-١٠ = ١٠$

∴ $٠,٠١ = ١٠$

∴ لو $٠,٠١ = ٢-$

منها $ص = ٢-$

٢٩ حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة كل من:

أ لو $\frac{81}{3}$

ب لو $\frac{32}{4}$

مثال حل المعادلات

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $3 = (5 + س)$ ب لو $625 = س - 1$ ج لو $2 = (6 + س)$

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم $س + 5 < 0$ أي $س < -5$ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية

$\therefore س + 5 = 32$

ومنها $س = 3$

$\therefore 3 \in \text{مجال تعريف المعادلة}$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{3\}$

ب المعادلة معرفة لجميع قيم $س$ الحقيقية وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية.

$\therefore 625 = 1 - س$

$\therefore س - 1 = 4$

ومنها $س = 5$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{5\}$

ج المعادلة معرفة لجميع قيم $س$ التي تُحقق كلاً من $\left. \begin{array}{l} س + 6 < 0 \\ س < 0 \\ س \neq 1 \end{array} \right\}$

أي أن مجال تعريف المعادلة هو $[-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية:

$س^2 = س + 6$

$س^2 - (س + 6) = 0$

إما $س = 3$ أو $س = -2$

وحيث إن $س = -2 \notin \text{مجال تعريف المعادلة}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{3\}$

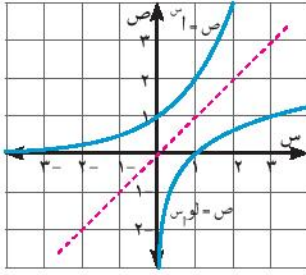
٢٩ حاول أن تحل

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو $1 = (1 - س^2)$ ب لو $27 = س + 2$ ج لو $2 = 9^{(س-1)}$

Graphical Representation of the Logarithmic Function

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية



إذا كانت د(س) = a^x حيث $a > 0$ ، فإن الدالة العكسية للدالة د تسمى بالدالة اللوغاريتمية أي $y = \log_a x$

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

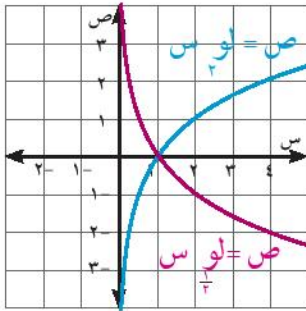
الشكل المقابل يمثل الدالة الأسية $y = a^x$ والدالة اللوغاريتمية $y = \log_a x$. ادرس خواص كل من الدالتين من حيث المجال والمدى والاطراد والتماثل حول المستقيم $y = x$.

مثال

٥ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين $y = \log_2 x$ ، $y = 2^x$

الحل

نختار قيم س قوى العدد ٢ (الأساس) $\{2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2\}$



س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
لو _٢ س	2^{-2}	2^{-1}	صفر	١	٢
لو _٢ س	٢	١	صفر	2^{-1}	2^{-2}

من الرسم يمكنك استنتاج الخواص الآتية لمنحنى الدالة اللوغاريتمية

المجال = $x > 0$ ، المدى = $y \in \mathbb{R}$

الدالة $y = \log_a x$ متزايدة لكل $a > 1$ ومتناقصة لكل $0 < a < 1$

تمارين ٢ - ٤

١ أكمل ما يأتي:

أ الصورة الأسية المكافئة للصورة لو_٢ ٢٧ = ٣ هي

ب الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة ٣ صفر = ١ هي

ج لو_{١٠} ٠,٠٠١ =

د لو_٢ ١ =

ه إذا كان لو_٢ ٤ = ٢ فإن س =

و إذا كان لو_٢ ١٢٨ = س + ١ فإن س =

- ١ ز) مجال الدالة د : د(س) = لو_٣ س هو.....
- ح) الدالة د حيث د(س) = لو_٣ س متناقصة لكل أ $\exists$
- ط) منحني الدالة د حيث د(س) = لو_٣ س يمر بالنقطة (٨،)
- ٢ ى) إذا كان لو_٣ س = ٣ ، لو_٥ = ص فإن لو_{١٥} = (بدلالة س، ص)
- ٣ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:-

أ) لو_٣ (س - ١) = ٢

ب) لو_٥ (س + ٢) = ٣

ج) لو_٣ = ٩

د) لو_٤ = ٨

هـ) لو_٣ (س + ٢) = ٢

و) لو_٣ = ٩

- ٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

أ) لو_١

ب) لو_٧

ج) لو_٩

د) لو_٦ + ٢

- ٥ استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كل من:-

أ) لو_{١٥}

ب) لو_{٢٧}

ج) ٤ لو_٧ - ٥ لو_{١٣}

Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية.

Logarithmic Equation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية

تعلّمت في الدرس السابق مفهوم اللوغاريتم وكيفية تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانياً وفيما يلي بعض خواص اللوغاريتمات التي تساعد في تبسيط المقادير اللوغاريتمية أو حل المعادلات التي تحتوي على لوغاريتم.

تعلم



Some Properties of Logarithms

بعض خواص اللوغاريتمات

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، $x > 0$ ، فإن

$$1 = \log_a a$$

فمثلاً $\log_3 3 = 1$ ، $\log_{10} 10 = 1$

$$0 = \log_a 1$$

فمثلاً $\log_3 1 = 0$ ، $\log_{10} 1 = 0$

حاول إثبات كل من ١ ، ٢ من تعريف اللوغاريتم

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

$$\log_a x = \log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \quad \text{حيث } x, y > 0$$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

$$\log_a x = \log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

$$x = a^{\log_a x} , y = a^{\log_a y}$$

$$\text{فتكون } x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y} \quad \text{أي أن } \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

مثال



١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\log_{10} 2 + \log_{10} 17$

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \text{لو} (17 \times 2) = \text{لو} 34 \\ &= \text{لو} 34 \\ &= 1 \end{aligned}$$

استخدام خاصية (٣)

استخدام خاصية (١)

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$$\text{لو} \frac{س}{ص} = \text{لو} س - \text{لو} ص \quad (\text{حاول بنفسك إثبات صحة العلاقة})$$

مثال

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٥٠ - لو ٥

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \text{لو} 50 \\ &= \text{لو} 10 = 1 \end{aligned}$$

استخدام خاصية القسمة

استخدام خاصية (١)

٩ حاول أن تحل

١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٧ - لو ٣,٥

٥- خاصية لوغاريتم القوة:

$$\text{لو} س^ص = ص \cdot \text{لو} س \quad \text{حيث } س > 0 \quad (\text{حاول إثبات صحة العلاقة بنفسك})$$

مثال

٣ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ١٢٥

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \text{لو} 125 \\ &= \text{لو} 5^3 \\ &= 3 \times \text{لو} 5 = 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

استخدام خاصية القوة

استخدام خاصية (١)

لاحظ أن: $\text{لو} \left(\frac{1}{س}\right) = -\text{لو} س$ حيث $س > 0$

٦ - خاصية تغيير الأساس

وإثبات صحة هذه الخاصية

$$\frac{\log_s \frac{a}{b}}{\log_s \frac{c}{d}} = \frac{\log_s a}{\log_s b} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s c}$$

بوضع: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية
يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

$$\frac{\log_s \frac{a}{b}}{\log_s \frac{c}{d}} = \frac{\log_s a}{\log_s b} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s c}$$

$$\frac{\log_s a}{\log_s b} = \frac{\log_s a}{\log_s b} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s c} \quad \text{أي أن:} \quad \frac{\log_s a}{\log_s b} = \frac{\log_s a}{\log_s b} \cdot \frac{\log_s d}{\log_s c}$$

مثال

$$\textcircled{4} \text{ اختصر لأبسط صورة } \log_2 16 * \log_7 49$$

الحل

استخدام خاصية (٦)

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 2} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 7} =$$

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 2} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 7} =$$

استخدام خاصية (٥)

$$\frac{\log_2 49}{\log_2 2} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 7} =$$

$$8 = 2 \times 4 =$$

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد حل المثال السابق بتغيير الأساس لعدد آخر غير ١٠

٧ - خاصية المعكوس الضربي

$\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ أي أن: كلاً من $\log_a b$ ، $\log_b a$ ، معكوس ضربى للآخر (حاول إثبات صحة العلاقة)

مثال

$$\textcircled{5} \text{ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة } \frac{1}{\log_3 10} + \frac{1}{\log_3 10}$$

الحل

$$\text{المقدار} = \log_3 10 + \log_3 10 = 5$$

$$\text{استخدام خاصية (٣)} \quad \log_3 10 = (5 \times 2) = 10$$

$$\text{استخدام خاصية (١)} \quad \log_3 10 = 10 = 1$$

٩ حاول أن تحل

$$\textcircled{3} \text{ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة } \frac{1}{\log_3 10} + \frac{1}{\log_3 10} + \frac{1}{\log_3 10}$$

تبسيط المقادير اللوغاريتمية Simplifying the Logarithmic Expressions

مثال

٦ اختصر لأبسط صورة لو $0.009 - \log_{11} \frac{27}{11} + 3 \log_{\frac{5}{3}} - \log_{\frac{1}{12}}$

الحل

المقدار $= \log_{10000} \frac{9}{11} - \log_{11} \frac{27}{11} + \log_{\frac{5}{3}} - \log_{\frac{1}{12}}$
 $= \log_{10000} \left(\frac{9}{11} \times \frac{16}{8} \times \frac{16}{27} \times \frac{9}{10000} \right)$
 $= \log_{10000} 1 = \text{صفر}$

خاصية (٥)
 خاصية (٣)، (٤)
 خاصية (٢)

٥ حاول أن تحل

٤ اختصر لأبسط صورة لو $\frac{1}{3} - \log_{\frac{9}{7}} - \log_{\frac{2}{5}} - \log_{\frac{3}{4}}$

حل المعادلات اللوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

مثال

٧ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ $\log_2 s + \log_3 (s+1) = 1$ ب $\log_2 s + \log_3 s = 3$

الحل

أ الدالة معرفة لكل $s > \text{صفر}$ ، $s+1 > \text{صفر}$
 أي أن $s > \text{صفر}$ (مجال تعريف المعادلة)
 $\therefore \log_2 s (s+1) = 1$ استخدام خاصية (٣)
 $\therefore s(s+1) = 12$ تحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية
 $\therefore s^2 + s - 12 = \text{صفر}$ $\therefore (s+4)(s-3) = \text{صفر}$
 إما $s = -4$ أو $s = 3$ وحيث إن $s = -4 \notin \text{مجال تعريف المعادلة}$
 $\therefore$ مجموعة الحل $\{3\}$

ب الدالة معرفة لكل $s > \text{صفر}$ (مجال تعريف المعادلة)

$\therefore \log_2 s + \log_3 \frac{s^2}{4} = 3$ خاصية (٦)
 $\therefore \log_2 s + \log_3 s^2 = 12$ بالضرب في ٢
 $\therefore 2 \log_2 s + 2 \log_3 s = 6$ $\therefore \log_2 s^2 = 6$ $\therefore \log_3 s^2 = 6$
 $\therefore s^2 = 64$ $\therefore s^2 = 729$
 $\therefore s = 8$ (التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية)
 وحيث إن $s = 8 \in \text{مجال تعريف المعادلة}$ $\therefore$ مجموعة الحل $\{8\}$

٤ حاول أن تحل

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

أ) لو (٢ س + ١) - لو (٣ س - ١) = ١

ب) لو_٣ س = لو_٢ س

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات Solving the Power Equations by Using Logarithms

مثال

٨ أوجد في ع مجموعة حل ٢ = ٣٧ مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين:

الحل

$$2 = 3^7$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\therefore \log 2 = \log 3^7 \quad \therefore \log 2 = 7 \log 3 \quad \therefore \frac{\log 2}{7} = \log 3$$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتي:

$$\frac{\log 2}{7} = 0.2876820725 \approx 0.2877$$

$$\therefore \log 3 \approx 0.2877 \quad \therefore \log 3 \approx 0.2877$$

$$2 \approx 3^7 \quad \therefore \log 2 \approx 7 \log 3$$

(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)

٤ حاول أن تحل

٦ أوجد لأقرب رقمين عشريين مجموعة حل المعادلة: ٢ = ٣٧



تمارين ٢ - ٥



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) $\log_2 8 =$

أ) ٤

ب) ٣

ج) ١٦

د) ١٠

٢) $\log_2 2 + \log_2 5 =$

أ) ١

ب) $\log_2 7$

ج) $\log_2 10$

د) ١٠

٣) $\log_2 \sqrt{5} =$

أ) ٢

ب) ٥

ج) $\frac{1}{2}$

د) ١-

٤) إذا كان $\log_2 3 = س$ ، $\log_2 4 = ص$ فإن $\log_2 12 =$

أ) $س + ص$

ب) $س ص$

ج) $س - ص$

د) $\log_2 10 + ص$

٥) $\log_2 2 + \log_2 2 =$

أ) ٦

ب) ٣٦

ج) ٢

د) ١٢

٦) $\log_2 5 \times \log_2 2 =$

أ) ١

ب) ١٠

ج) $\frac{5}{2}$

د) صفر

٧) $\log_2 2 \times \log_2 5 \times \log_2 2 =$

أ) ٣٠

ب) ١

ج) صفر

د) $\log_2 30$

۸ ﴿عَبَّرَ عَنْ كُلِّ مَمَائَاتِي بِدَلَالَةِ لَوْسٍ، لَوْ (س + ۱)﴾

ا) لو س (س + ۱) ب) لو $\frac{س}{س + ۱}$

ج. لو $\sqrt{s}$ (س + ۱)^۲

٩ اختصر لأبسط صورة:

أ) لو ٥٤ - لو ٩ ب) لو ٢ + لو ٣

٥) $٤٨ \text{ لو} + ١٢٥ \text{ لو} - ٦ \text{ لو}$

$$\text{هـ} \quad \frac{1 - 2 \text{ لو}}{120 \text{ لو}} \qquad \text{و} \quad \frac{7 \text{ لو} + 49 \text{ لو}}{7 \text{ لو}}$$

ز) $16\sqrt{16} + 3\sqrt{9} + 1$ ح) $\frac{1}{4}\sqrt{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4} + 2\sqrt{4} - \sqrt{4} - 3\sqrt{4}$

١٠ أوجد في E مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ) لو₂س + لو₂(س + ٢) = ٣ ب) لو₂س + لو₂(س - ٣) = ١

٦. لو س - لو ٢ = ٢

٥. لو (س + ٣) - لو ٣ = لو س

$$٢ = \frac{٣}{\text{لوس}} - \text{لوس} \quad \textcircled{9} \qquad ٢ = \frac{١}{\text{لوس}} + \frac{١}{\text{لوس}} \quad \textcircled{٥}$$

١١ أثبت أن $لوا \times لوب \times لو ج \times لود = ١$ ثم احسب قيمة $لوا^٢ \times لوب^٣ \times لو ج^٥ \times لود^١٦$

١٢) أوجد قيمة s في كل مما يأتي مقرباً الناتج لرقم عشري واحد.

ا. $V = 3$ ب. $2 = 5$ ج. $1 = 4$

النهائيات

Limits

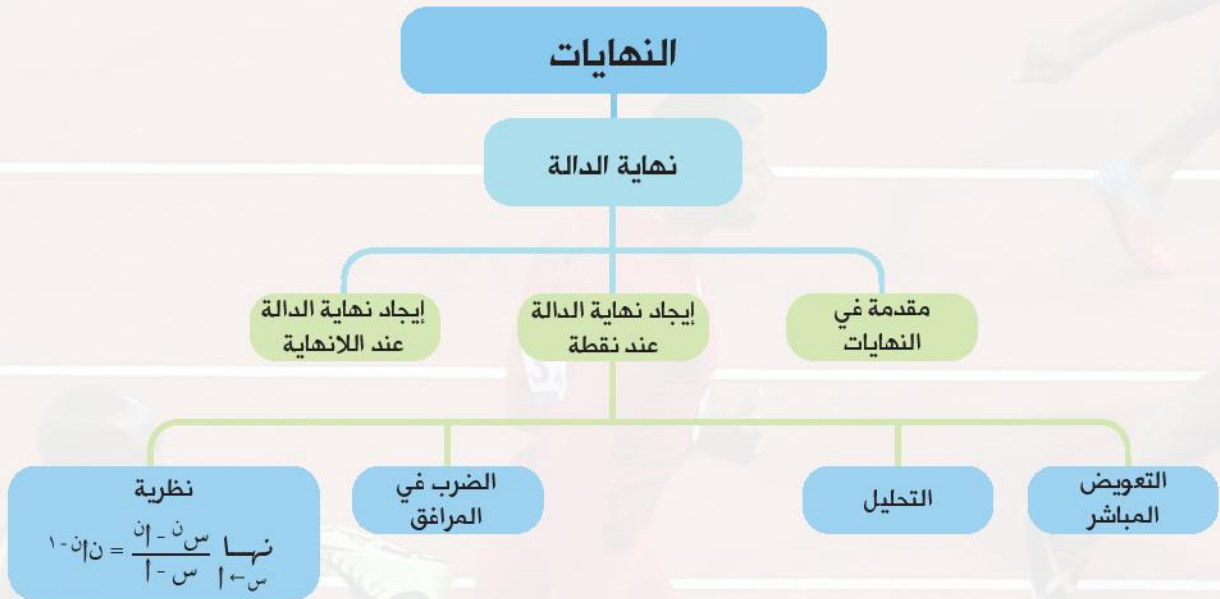
ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات الهندسية والحياتية والتجارية والعلوم المختلفة، فكمثيرًا ما نحتاجه لدراسة سلوك الدالة، والتغير فيها وحل بعض المشكلات التي يعجز علم الجبر وبعض العلوم الأخرى عن حلها.

❖ يوجد نهاية دالة عند اللانهاية جبرياً وبيانياً

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	Unspecified Quantity	تعويض مباشر	direct Substitution	نهاية الدالة عند اللانهاية	Limit of a Function at Infinity
غير معرف	Undefined	مرافق	Conjugate		
نهاية دالة	Limit of a Function	دالة كثيرة الحدود	Polynomial Function		

مخطط تنظيمي للوحدة



دروس الوحدة

- الدرس (١-٣): مقدمة في النهايات.
- الدرس (٢-٣): إيجاد نهاية الدالة جبرياً.
- الدرس (٣-٣): نهاية الدالة عند اللانهاية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلي - برامج رسومية

مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل، ويعتمد هذا المفهوم بصفة أساسية على سلوك الدالة عند جميع نقاط تعريفها. ولدراسة هذا السلوك ينبغي التعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

فكر و ناقش

تذكر أن

∞ هي رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| ١) 5×3 | ٢) $4 \div 28$ |
| ٣) $9 - 4$ | ٤) $0 \div 7$ |
| ٥) $0 \div 0$ | ٦) $3 + \infty$ |
| ٧) $\infty \div \infty$ | ٨) $\infty - \infty$ |

Unspecified Quantities

الكميات غير المعينة:

تعلم

فى بند فكر وناقش نجد أن بعض نواتج العمليات محدداً تماماً مثل رقم ١، ٢، ٣، بينما بعض النواتج لا يمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أن: $0 \div 7$ غير معرفة حيث إن القسمة على صفر لا معنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $0 \div 0$ حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفر لذلك فإن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضاً: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times 0$ (لماذا؟)

المصطلحات الأساسية

Unspecified Quantities

Undefined غير معرف

Value of a Function قيمة دالة

Limit of a Function نهاية دالة

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، $-\infty$ كالآتى:

لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن:

$$1) \quad \infty = a + \infty \quad 2) \quad -\infty = a - \infty$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} \infty - \\ \infty \end{array} \right\} = a \times \infty \quad \begin{array}{l} \text{إذا كان } a > 0 \\ \text{إذا كان } a < 0 \end{array}$$

$$4) \quad \left. \begin{array}{l} \infty - \\ \infty \end{array} \right\} = a \times -\infty \quad \begin{array}{l} \text{إذا كان } a < 0 \\ \text{إذا كان } a > 0 \end{array}$$

مثال

١ أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $\infty + ٤$	ب $\infty - ٣$	ج $٣ \div ٠$	د $٠ \div ٥$
هـ $\infty + \infty$	و $٠ \div ٠$	ز $\infty \times ٥$	ح $\infty - \times ٦$

الحل

أ ∞	ب ∞	ج ٠	د غير معرفة
هـ ∞	و كمية غير معينة	ز ∞	ح ∞

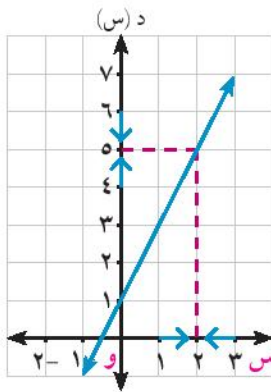
٢ حاول أن تحل

١ أوجد ناتج العمليات الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $(٢ -) \div ٠$	ب $٠ \div ٧$	ج $\infty \div ٩$	د $٠ \times \infty$
هـ $\infty \times (٧ -)$	و $١٢ + (\infty -)$	ز $\infty + \infty$	ح $\infty \div \infty$

نهاية دالة عند نقطة :

في الشكل التالي: الخط البياني للدالة د المعرفة على ع وفق القاعدة د (س) = ٢ س + ١ أكمل الجداول الآتية، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:



س	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
.....	
↓	↓
٢	٥

$$س > ٢$$

س تقترب من ٢ من جهة اليسار

س	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
.....	
↓	↓
٢	٥

$$س < ٢$$

س تقترب من ٢ من جهة اليمين

لاحظ أن:

◀ عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليمين، ما القيمة التي تقترب إليها د(س).

◀ عندما تقترب س إلى العدد ٢ من جهة اليسار، ما القيمة التي تقترب إليها د(س).

عندما تقترب س من العدد (٢) من اليمين و من اليسار فإن د(س) تقترب من العدد (٥) ونُعبّر عن ذلك رياضياً

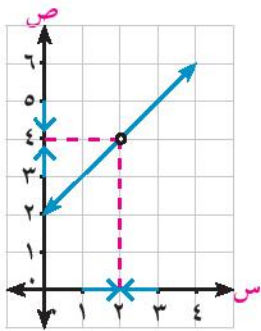
$$\lim_{س \rightarrow ٢} (٢ س + ١) = ٥$$

إذا كانت قيمة الدالة تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما تقترب س من أ من جهتي اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوي ل وتكتب رمزياً: $\lim_{s \rightarrow A} f(s) = L$ نهاية د(س) = ل
وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوي ل

مثال

٢ إذا كانت د(س) = $\frac{s^2 - 4}{s - 2}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٢.

الحل



د(س)	س
٣,٩	١,٩
٣,٩٩	١,٩٩
٣,٩٩٩	١,٩٩٩
.....	
↓	↓
٤	٢

س > ٢

د(س)	س
٤,١	٢,١
٤,٠١	٢,٠١
٤,٠٠١	٢,٠٠١
.....	
↓	↓
٤	٢

س < ٢

من الشكل البياني ومن بيانات الجدول الموضحة نجد أن د(س) → ٤ عندما س → ٢ من جهة اليمين و من

جهة اليسار. ∴ $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 4}{s - 2} = 4$

لاحظ من هذا المثال أن:

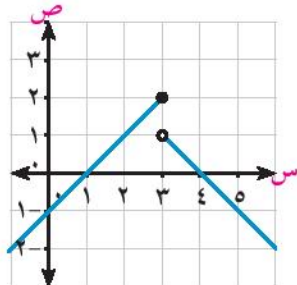
- ١- الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين $\frac{صفر}{صفر}$ عندما س = ٢ (أي أن الدالة غير معرفة عند س = ٢)
- ٢- وجود نهاية للدالة عندما س → ٢ لا تعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢

٦ حاول أن تحل

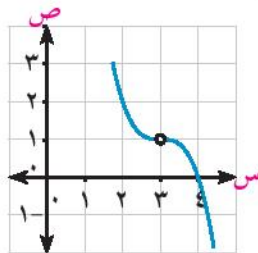
٢ إذا كانت د(س) = $\frac{s^2 - 1}{s + 1}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من (١ -)

مثال

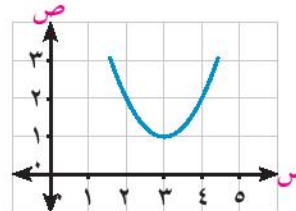
٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد نهاية د(س) $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s)$



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

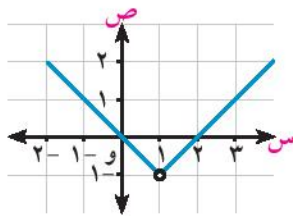
شكل (١) نهاية $\leftarrow 1 =$ س

شكل (٢) نهاية $\leftarrow 1 =$ س (لاحظ أن الدالة غير معرفة عند $3 =$ س)

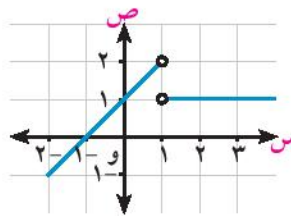
شكل (٣) نهاية $\leftarrow$ ليس لها وجود

حاول أن تحل

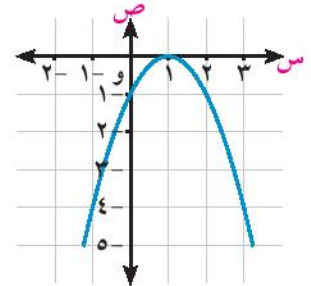
٣ في كل من الأشكال الآتية . أوجد نهاية $\leftarrow$ س



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

من الأمثلة السابقة نستنتج أن:

وجود نهاية للدالة عندما $\leftarrow$ أ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند $س = أ$ ،

والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند $س = أ$ فهذا لا يعني وجود نهاية للدالة عند $س = أ$

تعبير شفهي: عبر بأسلوبك عن الفرق بين قيمة دالة عند نقطة ونهاية الدالة عند نفس النقطة.

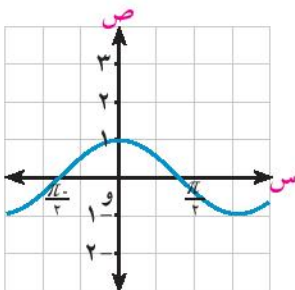
تمارين (١-٣)

أولاً: تمارين على إيجاد النهاية بيانياً:

١ من الرسم البياني أوجد:

أ نهاية $\leftarrow$ س

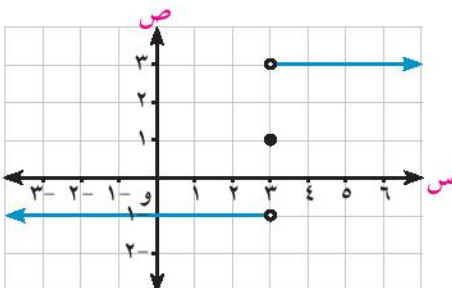
ب $\leftarrow 0$

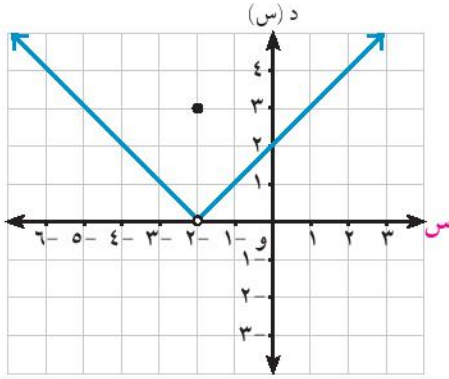


٢ من الرسم البياني المقابل أوجد إن كان ذلك ممكناً:

أ نهاية $\leftarrow$ س

ب $\leftarrow 3$





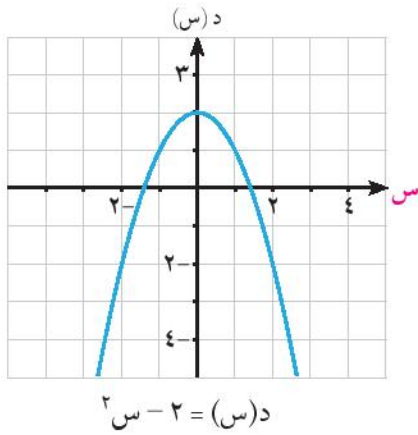
٣ من الرسم البياني المقابل أوجد:

أ نها $\lim_{s \rightarrow -2} f(s)$

ب $f(-2)$

ج نها $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)$

د $f(0)$

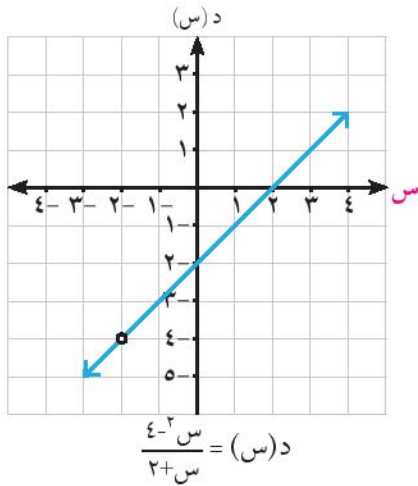


٤ الشكل البياني المقابل للدالة $f(s) = 3 - s^2$

من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)$

ب $f(0)$

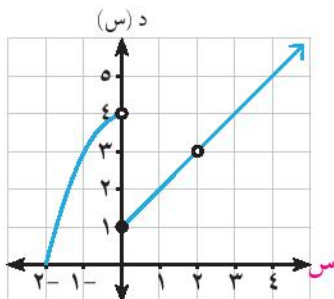


٥ الشكل البياني المقابل للدالة $f(s) = \frac{s^2 - 4}{s + 2}$

من الشكل البياني المقابل أوجد:

أ نها $\lim_{s \rightarrow -2} f(s)$

ب $f(-2)$



٦ من الشكل البياني المقابل أوجد:

ب نها $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)$

أ $f(0)$

د نها $\lim_{s \rightarrow 2} f(s)$

ج $f(2)$

ثانيًا: إيجاد نهاية الدالة جبريًا:

٧ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x + 4)$ حيث $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				←	؟	→			

٨ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1)$ $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)				←	؟	→			

٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

س	٠,٩ -	٠,٩٩ -	٠,٩٩٩ -	←	١ -	→	١,٠٠١ -	١,٠١ -	١,١ -
د(س)				←	؟	→			

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج نها $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				←	؟	→			

إيجاد نهاية الدالة جبرياً

Finding the Limit of a Function Algebraically

في هذا الدرس نتعرف على بعض الطرق والنظريات التي تمكننا من حساب نهاية دالة عند نقطة دون الحاجة إلى عمل جدول وإيجاد النهاية عددياً أو رسم منحني الدالة وإيجاد النهاية بيانياً.

نشاط



إذا كانت د(س) = س^٢ + ١ ، د(س) = س^٢ + ٣ أوجد

١ - د(١) ، نها د(س) (ماذا تلاحظ)
س ← ١

٢ - د(٠) ، نها د(س) (ماذا تلاحظ)
س ← ٠

تعلم



نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of a Polynomial Function

نظرية

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، $a \neq c$

فإن: نها د(س) = د(ا)
س ← ا

مثال



١ أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ نها (س^٢ - ٣س + ٥) س ← ٢ ب نها (٤ - س) س ← ٣

الحل

أ نها (س^٢ - ٣س + ٥) س ← ٢
٢ = ٥ + ٦ - ٤ =

(بالتعويض المباشر)

ب نها (٤ - س) س ← ٣
٤ - = (٤ - س) د(س) = ٤ - ثابتة لكل قيم س $\Rightarrow$ ع

حاول أن تحل

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

أ نها (٥ - س) س ← ١ ب نها (٣س^٢ + س - ٤) س ← ٢

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة في إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية
- نها س ← ١ = $\frac{١ - ١}{١ - ١}$
- نها س ← ١ = $\frac{١ - ١}{١ - ١}$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نظرية

نها (س) = م
س ← اإذا كان نها د (س) = ل
س ← ا

فإن:

٢- نها (د (س) ± و (س)) = ل ± م
س ← ا حيث ك ⊃ ع١- نها ك د (س) = ك. ل
س ← ا٤- نها (د (س) / و (س)) = ل / م بشرط م ≠ ٠
س ← ا٣- نها د (س) . و (س) = ل . م
س ← ا٥- نها (د (س))^ن = ل^ن
س ← ا حيث ل^ن ⊃ ع

مثال

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

ب) نها ظا س
س ← π/٤أ) نها (٧ + س³) / (س² - ٥)
س ← ١

الحل

$$\text{أ) } \lim_{s \rightarrow 1} \frac{7 + s^3}{s^2 - 5} = \frac{7 + 1^3}{1^2 - 5} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$\text{ب) } \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan s}{s} = \frac{\tan \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

٦ حاول أن تحل

٢ احسب النهايات الآتية:

ب) نها س جتا س
س ← πأ) نها (س³ - ٣) / (س² + ١)
س ← ٢

نظرية

إذا كانت د (س) = و (س) لكل س ∈ ع - {١}

وكانت نها و (س) = ل فإن نها د (س) = ل
س ← ا س ← ا

مثال

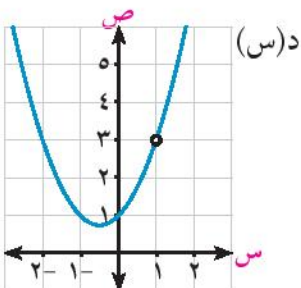
٣ أوجد: نها (١ - س³) / (١ - س)
س ← ١

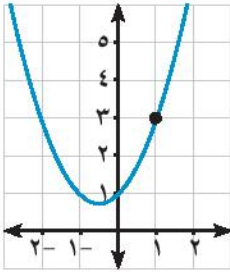
الحل

نلاحظ أن د (س) = (١ - س³) / (١ - س) غير مُعينة عند س = ١

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفريّة

فإنه يمكن كتابة د (س) على الصورة:





و(س)

$$د(س) = \frac{(س) \cdot (س + 1 + س^2)}{(س)} = س + س^2 + 1 = و(س)$$

من ذلك نجد أن د(س) = و(س) لكل س ≠ 1

وحيث أن نها $و(س) = 3$ (كثيرة الحدود) $س \leftarrow 1$

فإنه طبقاً للنظرية السابقة نستنتج أن نها $د(س) = 3$ $س \leftarrow 1$

$$\therefore \text{نها } \frac{س^3 - 1}{س - 1} = 3$$

مثال

استخدام المرافق

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ) نها $\frac{س^3 - 3س - 1}{س - 4}$ $س \leftarrow 4$

ب) نها $\frac{س^5 - 5س^3}{س^3 - 4س + 3}$ $س \leftarrow 0$

الحل

لاحظ أن: د(س) = $\frac{س^3 - 3س - 1}{س - 4}$ غير معينة عند س = 4

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - 4) في كل من البسط والمقام.

$$\frac{س^3 - 3س - 1}{(س - 4)(س^2 + 4س + 16)} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س^2 + 4س + 16} = \frac{س^3 - 3س - 1}{س^2 + 4س + 16} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س - 4}$$

$$= \frac{س^3 - 3س - 1}{(س^2 + 4س + 16)(س - 4)}$$

$$= \frac{1}{4} = \frac{1}{س^2 + 4س + 16} \cdot \frac{س^2 + 4س + 16}{س - 4}$$

ب) نها $\frac{س^5 - 5س^3}{س^3 - 4س + 3}$ $س \leftarrow 0$ = نها $\frac{س^5 - 5س^3}{س^3 - 4س + 3}$ $س \leftarrow 0$

$$= \frac{س(س^4 - 5س^2)}{س(س^2 - 4 + \frac{3}{س})} = \frac{س^4 - 5س^2}{س^2 - 4 + \frac{3}{س}}$$

$$= \frac{س^4 - 5س^2}{س^2 - 4 + \frac{3}{س}} \cdot \frac{س}{س} = \frac{س^5 - 5س^3}{س^3 - 4س + 3} = 30 = (3 + 3) \cdot 0 = (3 + \frac{3}{س}) \cdot 0$$

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد النهايات الآتية:

أ) نها $\frac{س^2 - 1}{س - 0}$ $س \leftarrow 0$

ب) نها $\frac{س + 1}{س^2 - 5س + 2}$ $س \leftarrow 1$

نظرية ٤

$$\text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ن} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ن}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \text{ن} \leftarrow \text{ا}$$

مثال

$$٥ \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{١٩ - ١٩}{١ - ١} = \frac{١٩ - ١٩}{١ - ١} = ١٩ = ١٨ \times ١٩$$

نتائج

نتائج على النظرية:

$$١- \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \text{ن} \leftarrow \text{ا}$$

$$٢- \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \text{ن} \leftarrow \text{ا}$$

مثال

٦ أوجد:

$$\text{أ} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٦٢٥ - ٤(٥ + \text{س})}{\text{س}}$$

$$\text{ب} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٣٢ - ٥}{٤ - ٢}$$

$$\text{ج} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{١ - ١١(١ + \text{س})}{\text{س}}$$

$$\text{د} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٣٢ + ٥(٤ - \text{س})}{٢ - \text{س}}$$

الحل

$$\text{أ} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٥٠٠ = ٣٥ \times ٤ = \frac{٤ - ٥(٥ + \text{س})}{\text{س}}}{\text{س}}$$

$$\text{ب} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٥٢ - ٥}{٢٢ - ٢} = ٢٠ = ٢٢ \times \frac{٥}{٢}$$

$$\text{ج} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{١ - ١١(١ + \text{س})}{\text{س}} = ١١ = ١ - ١١ \times ١$$

$$\text{د} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٣٢ + ٥(٤ - \text{س})}{٢ - \text{س}} = \frac{٥(٢ - \text{س}) - ٥(٤ - \text{س})}{(٢ - \text{س}) - (٤ - \text{س})}$$

$$٨٠ = ٥(٢ - \text{س})$$

٤ حاول أن تحل

٤ أوجد:

$$\text{أ} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٦٢٥ - ٤}{٥ + \text{س}}$$

$$\text{ب} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{٨١ - ٤(٣ + \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ج} \quad \text{نها} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ا} \\ \text{س} \leftarrow \text{ا} \end{matrix} = \frac{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{س} \leftarrow \text{ا}} = \frac{١ - \sqrt{١ + \text{س}}}{\text{س}}$$



تمارين (٢-٣)



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $(1 + s^3)$ س $\leftarrow 2$ =
- ٢) نها $\frac{s^2 - s}{s}$ س $\leftarrow 0$ =
- ٣) نها $\frac{s^2 - 4}{s^2 - 2}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٤) نها $\frac{s^3 - 8}{s^2 - 1}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٥) نها $\frac{s^3 - 1}{s^2 - 1}$ س $\leftarrow 1$ =
- ٦) نها $\frac{s^3 - 8}{s^2 - 1}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٧) نها $\frac{s^2 + s - 2}{s - 1}$ س $\leftarrow 1$ =
- ٨) نها $\frac{s^2 - 4}{s^2 - 2}$ س $\leftarrow 2$ =
- ٩) نها $\frac{s^3 - 8}{s^2 - 1}$ س $\leftarrow 2$ =
- ١٠) نها $\left(\frac{s^2 - 1}{s - 1} \right)$ س $\leftarrow 1$ =
- ١١) نها $\frac{s^2 - s - 2}{s^2 - 4}$ س $\leftarrow 2$ =
- ١٢) نها $\frac{s^7 + 1}{s^0 + 1}$ س $\leftarrow 1$ =

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١٣) نها $\frac{s^2 - 1}{s}$ تساوي:

أ) ٠

ب) ١

ج) ٢

د) ليس للدالة نهاية

١٤) نها $\frac{s^2 + s}{s + 1}$ تساوي:

أ) ١

ب) صفر

ج) ١

د) ٣

١٥) نها $\frac{س^٢ - ٨}{س - ٢}$ تساوى:

أ) ٢

ب) ٤

ج) ٦

د) ٨

١٦) نها $\frac{جاس}{س}$ تساوى

أ) ١

ب) $\frac{\pi}{٢}$

ج) $\frac{٢}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

١٧) نها $\frac{طاس}{س}$ تساوى

أ) $\frac{\pi}{٢}$

ب) ١

ج) $\frac{٤}{\pi}$

د) ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

١٩) نها $\frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

٢١) نها $\frac{جتا س}{س}$

٢٣) نها $\frac{س - ٩}{س^٢ - ٨١}$

٢٥) نها $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س}$

٢٧) نها $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$

١٨) نها $\frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س - ٣}$

٢٠) نها $\frac{س(س - ٢ - جاس)}$

٢٢) نها $\frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

٢٤) نها $\frac{س^٢ + ٤}{س - ٤}$

٢٦) نها $\frac{٤س^٢ - ٦٤}{س - ٤}$

$$\textcircled{29} \quad \text{نها} \quad \frac{5س^2 + 5}{3س^3 - 2س} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{31} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 3س - 3}{9س^4 - 2س} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{32} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 + 5س - 3}{6س^2 + 3س - 6} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{35} \quad \text{نها} \quad \frac{1س(1س^2 - 1)}{س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{37} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 + 2س - 2}{1س - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{39} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 + 2س - 2}{1س^2 - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{41} \quad \text{نها} \quad \frac{3س^2 - 3س - 3}{3س - 3} \quad \begin{matrix} 3 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{42} \quad \text{نها} \quad \frac{4س^2 + 9س - 16}{س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{45} \quad \text{نها} \quad \frac{16س^4 - 2}{س} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{47} \quad \text{نها} \quad \frac{243س^5 - 3}{س} \quad \begin{matrix} 3 \leftarrow س \\ 3 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{49} \quad \text{نها} \quad \frac{64س^6 - 32س^5}{32س^5 - 32س^4} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{28} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 2س - 2}{1س + 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{30} \quad \text{نها} \quad \frac{8س^2 - 3س - 4}{2س^2 - 2س - 2} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{32} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 2س - 6}{2س^2 - 2س - 2} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{34} \quad \text{نها} \quad \frac{1س(1س^2 - 1)}{5س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{36} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{4س^3 + 3}{1س + 1} - \frac{2س^2}{1س + 1} \right) \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{38} \quad \text{نها} \quad \frac{2س^2 - 5س - 2}{س^2 + 2س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{40} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^2 - 1}{1س - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{42} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^2 + 1 - 1}{س} \quad \begin{matrix} 0 \leftarrow س \\ 0 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{44} \quad \text{نها} \quad \frac{1س^7 - 1}{1س - 1} \quad \begin{matrix} 1 \leftarrow س \\ 1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{46} \quad \text{نها} \quad \frac{64س^2 - 4}{س - 4} \quad \begin{matrix} 4 \leftarrow س \\ 4 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{48} \quad \text{نها} \quad \frac{128س^7 - 4س^2}{4س^2 - 4س} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\textcircled{50} \quad \text{نها} \quad \frac{128س^2 - 2س^2}{16س^2 - 4س} \quad \begin{matrix} 4 \leftarrow س \\ 4 \leftarrow س \end{matrix}$$

نهاية دالة عند اللانهاية

Limit of a Function at Infinity

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية
- باستخدام الحل الجبري.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية
- باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.

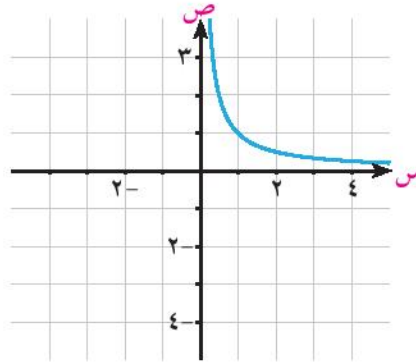
Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نحتاج في كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow \infty$ والنشاط التالي يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب في رسم الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$.
ماذا نلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم x الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟
من الشكل المرسوم نلاحظ أن:

إنه كلما زادت قيم x واقتربت من ما لانهاية اقتربت قيم $f(x)$ من الصفر، لذلك نقول إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من ما لانهاية تساوي صفر.

تعلم

Limit of a Function at Infinity

نهاية دالة عند اللانهاية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{حيث } n \in \mathbb{C}^+, \text{ ثابت}$$



قواعد أساسية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{إذا كان } n \text{ عددًا موجبًا أكبر من الواحد فإن } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند $x \rightarrow \infty$ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما $x \rightarrow \infty$

مثال

١ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right)$ ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right)$

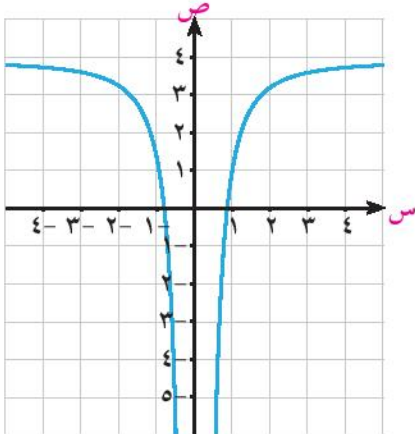
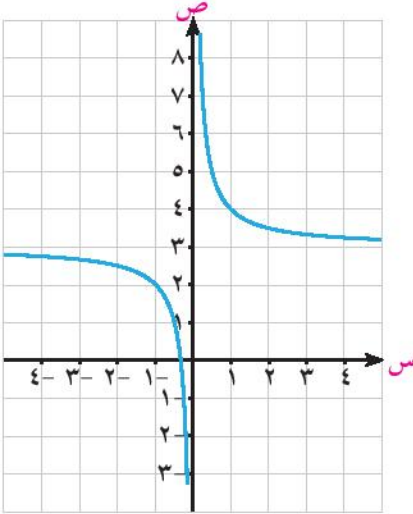
ثم تحقق من ذلك بيانياً باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} + \lim_{s \rightarrow \infty} 3$

$3 = 3 + 0 =$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{s}\right) = 3$



ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s} - \lim_{s \rightarrow \infty} 4$

$= \frac{3}{\infty} - 4 = 0 - 4 = -4$

$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} - 4\right) = -4$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{0}{s}\right)$ ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{s}\right)$

مثال

٢ أوجد: $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 + 4s - 5)$

الحل

$\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 + 4s - 5) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 + \lim_{s \rightarrow \infty} 4s - \lim_{s \rightarrow \infty} 5$ وذلك بأخذ s^3 عامل مشترك

$= \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \times \left(1 + \frac{4}{s} - \frac{5}{s^3}\right) = \infty \times 1 = \infty$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 + 7s + 2)$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 - 4s - s^2)$$

مثال

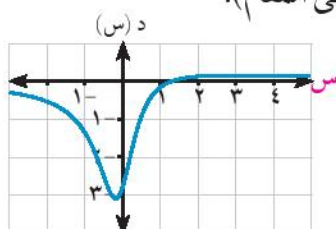
٣ أوجد كلاً من النهايات الآتية:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3}$$

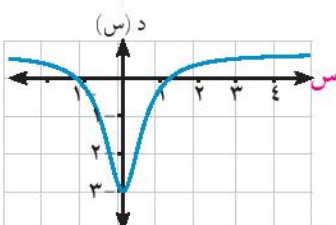
$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3}$$

$$\text{ج} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3}$$

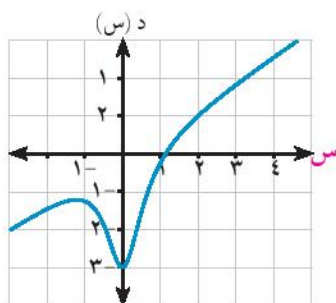
الحل

في كل الحالات نقسم كل من البسط والمقام على s^3 (أعلى قوة للمتغير s في المقام).

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s^3}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1} = 0$$



$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s^3}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1} = 0$$



$$\text{ج} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 3}{1 + s^3} = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{s^3}}{\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1} = 0$$

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد نهاية $\frac{f(s)}{g(s)}$ حيث كل من $f(s)$ ، $g(s)$ دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام.
- النهاية تساوى صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- النهاية تعطى $(\infty - \text{أو } \infty)$ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.
- يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولا تعتبر طريقة للحل.

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^5 - 3s^3 + 1}{s^2}$$

$$\text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^4 - 3s^5 + 8}{s^2 - 3s^4}$$

$$\text{ج} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^7 - 1}{s^3 + 2s - 1}$$



تمارين (٣-٣)



أكمل ما يأتي:

- ١) نها $\left(\frac{3}{s} + 1\right)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٢) نها $\left(2 - \frac{3}{s}\right)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٣) نها $(7-)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٤) نها $(s^2 - 3)$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٥) نها $\frac{1+s^2}{s}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٦) نها $\frac{s^2 - 5}{1+s^2}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٧) نها $\frac{s^2 + 3}{s^2 - 5}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٨) نها $\frac{s^3}{1-s^2}$ $\infty \leftarrow s$ =
- ٩) نها $\left(\frac{4}{s} + \frac{7}{s} - 3\right)$ $\infty \leftarrow s$ =

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١٠) نها $\frac{s^6}{s^2 + 3}$ تُساوي:

أ) صفر	ب) ٢	ج) ٣	د) ∞
--------	------	------	-------------
- ١١) نها $\sqrt{1 + \frac{4}{s}}$ $\infty \leftarrow s$

أ) صفر	ب) ١	ج) ٢	د) ∞
--------	------	------	-------------
- ١٢) نها $\frac{s+3}{s^2-2}$ $\infty \leftarrow s$

أ) صفر	ب) $\frac{1}{2}$	ج) $\frac{3}{2}$	د) ∞
--------	------------------	------------------	-------------
- ١٣) نها $\frac{1+s^2}{1-s^2}$ $\infty \leftarrow s$

أ) صفر	ب) $\frac{1}{2}$	ج) ١	د) ∞
--------	------------------	------	-------------
- ١٤) نها $\sqrt{\frac{s+1}{1-s^4}}$ $\infty \leftarrow s$

أ) ١-	ب) $\frac{1}{4}$	ج) $\frac{1}{2}$	د) ١
-------	------------------	------------------	------

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

$$\textcircled{15} \quad \text{نها} \quad \frac{3}{2s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{16} \quad \text{نها} \quad (s^3 + 5s^2 + 1) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{17} \quad \text{نها} \quad \frac{7-2s}{3+2s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{18} \quad \text{نها} \quad \frac{s^2}{3+s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{19} \quad \text{نها} \quad \frac{4s^2}{3+s^2} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{20} \quad \text{نها} \quad \frac{5-6s-s^2}{4+s^2+s} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{21} \quad \text{نها} \quad \frac{1-s^2}{1+s^4+s^2} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{22} \quad \text{نها} \quad \frac{s^2-2}{1-s^3+s^4} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{23} \quad \text{نها} \quad \frac{1-s^2}{1-s^4-s^5} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{24} \quad \text{نها} \quad \frac{6-2s^2}{(1-s)^2} \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{25} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{2s^2}{2(3+s)} + 7 \right) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{26} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{5s}{s+2} - \frac{1}{2s^3} \right) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{27} \quad \text{نها} \quad \left(\frac{3s^3}{3-s} + \frac{s}{1+s^2} \right) \quad s \leftarrow \infty$$

$$\textcircled{28} \quad \text{نها} \quad \frac{-s}{2s+4} \quad s \leftarrow \infty$$

حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

حساب المثلثات (باللاتيني Trigonometry) هو أحد فروع مادة الرياضيات بوجه عام والهندسة العامة بوجه خاص حيث يوجد العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه في صورة دوال مثلثية (دالة الجيب، دالة جيب التمام، دالة الظل، ...). وكان قدماء المصريين أول من عمل بقواعد حساب المثلثات، إذ استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم، ترجع معرفتنا لعلم حساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها وصاغوا نظرياتها، كما قدم البيروني برهاناً لمساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه. كما أن الغرب عرفوا هندسة أقليدس عن طريق العرب. ومن مآثر العرب في حساب المثلثات هو استخدامهم النسب المثلثية الست حيث كشف التبانى العلاقة الخاصة بالمثلث الكروي القائم الزاوية كما اكتشف قانون إيجاد ارتفاع الشمس.

لعلم حساب المثلثات تطبيقات كثيرة في حساب المسافات والزوايا التي تستخدم في إنشاء المباني والملاعب الرياضية والطرق وفي صناعة المحركات والأجهزة الكهربائية والميكانيكية، كما يستخدم حساب المثلثات في حساب المسافات الجغرافية والفلكية وفي أنظمة الاستكشافات بالأقمار الصناعية.

مخرجات تعلم الوحدة :

- في نهاية هذه الوحدة وتنفيذاً للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:
- يُعرف قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث، والذي ينص على أنه في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد قياس زاوية مجهولة في هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب وجيب التمام لأي مثلث في حل هذا المثلث.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانون (قاعدة الجيب، وجيب التمام) لأي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث، والذي ينص على أنه في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد أطوال أضلاع أي مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث في إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث.
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث.
- يُعرف قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.

المصطلحات الأساسية

Largest Angle	أكبر زاوية	Shortest Side	أقصر ضلع	Trigonometry	حساب مثلثات
The Area of the Triangle	مساحة المثلث	Longest Side	أطول ضلع	Sine Rule	قاعدة الجيب
	أطوال أضلاع المثلث	Missing Length	طول ضلع مجهول	Cosine Rule	قاعدة جيب التمام
The Sides Lengths of a Triangle		UnKnown Angle	زاوية مجهولة	Acute Angle	زاوية حادة
The Opposite Angle of an Side	زاوية مقابلة	Smallest Angle	أصغر زاوية	Obtuse Angle	زاوية منفرجة
				Right Angle	زاوية قائمة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١-٤): قانون (قاعدة) الجيب

الدرس (٢-٤): قانون (قاعدة) جيب التمام

مخطط تنظيمي للوحدة



