الرياضيات

للرياضيات تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم.

والصورة لكوبرى السلام الذى يربط بين ضفتى قناة السويس

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ كمال يونس كبشة

مراجعة وتعديل

أ.منال عباس أحمد عزقول

د.محمد محي الدين عبد السلام أبو رية

أ.شريف عاطف البرهامي

أ.جـورج يـوحـنـا ميخـائيـل جـرجس

أ.سمير محمد سعداوي

إشراف تربوى

د. أكرم حسن محمد

مساعد الوزير لشئون تطوير المناهج التعليمية

والمشرف على الإدارة المركزية لتطوير المناهج

٢٠٢٥-٢٠٢٦

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

1 التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركه فى المجتمع.

2 التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

3 تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

4 تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

5 تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

6 الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تحقق من فهمك».

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى
المصفوفات

الوحدة الثانية
البرمجة الخطية

الوحدة الثالثة
المتجهات

الوحدة الرابعة
الخط المستقيم

الوحدة الخامسة
حساب المثلثات

الوحدة ١

الجبر

المصفوفات

Matrices

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة (مصفوفة الصف - مصفوفة العمود - المصفوفة المربعة - المصفوفة الصفرية - المصفوفة القطرية - مصفوفة الوحدة - المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة).
- يضرب عددًا حقيقيًا في مصفوفة .
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتحقق من صحة حلول بعض المشكلات التى تتضمن مصفوفات باستخدام البرمجيات المتاحة.
- ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات في مجالات أخرى.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة المحدد على الصورة المثلثة.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من الرتبة ٢ × ٢
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة.
- يحل المعادلات بطريقة كرامر.
- يوجد مساحة المثلث باستخدام المحددات.

المصطلحات الأساسية

- مصفوفة Matrix
- عنصر Element
- مصفوفة الصف Row matrix
- مصفوفة العمود Column matrix
- مصفوفة مربعة Square matrix
- مصفوفة صفرية Zero matrix
- مصفوفات متساوية Equal matrices
- مصفوفة متماثلة Symmetric matrix
- مصفوفة شبه متماثلة Skew−symmetric matrix
- مصفوفة الوحدة Identity matrix
- معادلة مصفوفية Matrix equation
- مصفوفة المتغيرات Variable matrix
- مصفوفة الثوابت Constant matrix
- جمع المصفوفات Adding matrices
- طرح المصفوفات Subtracting matrices
- ضرب المصفوفات Multiplying matrices
- مدور المصفوفة Transpose of matrix
- محدد Determinant
- محدد الرتبة الثانية Second order determinant
- محدد الرتبة الثالثة Third order determinant
- مصفوفة المعاملات Coefficient matrix
- معكوس ضربى للمصفوفة Inverse matrix

دروس الوحدة

الدرس (١ – ١): تنظيم البيانات في مصفوفات.

الدرس (١ – ٢): جمع وطرح المصفوفات.

الدرس (١ – ٣): ضرب المصفوفات .

الدرس (١ – ٤): المحددات .

الدرس (١ – ٥): المعكوس الضربي للمصفوفة

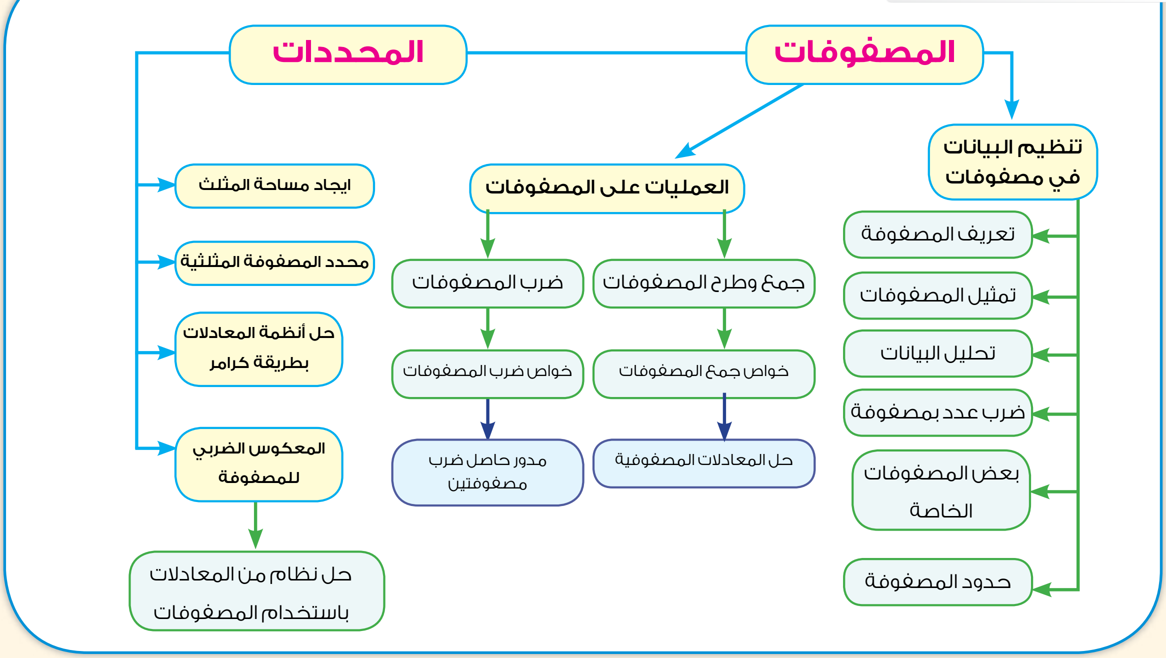
الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – برنامج الاكسيل Excel – جهاز كمبيوتر.

نبذه تاريخية

المصفوفات هي جمع كلمة مصفوفة، وهى من المفاهيم الرياضية التي انتشر استخدامها في عصرنا الحاضر، فشملت العديد من فروع المعرفة، فنجد استخداماتها في علوم الاحصاء والاقتصاد، والاجتماع وعلم النفس وغيرها، وذلك لأنها تعرض البيانات، وتخزنها في صورة جداول مستطيلة الشكل، وتنظيم البيانات بهذه الصورة يسهل تذكرها والمقارنة بينها وإجراء العمليات عليها، كما أن للمصفوفات دورًا هامًا في علم الرياضيات وخاصة في فرع الجبر الخطى، وأول من لاحظ المصفوفات واستخدمها هو العالم كيلي (١٨٢١ – ١٨٩٥م).

مخطط تنظيمي للوحدة



١ – ١ تنظيم البيانات في مصفوفات

Organizing data in Matrices

سوف تتعلم

- ما المصفوفة؟
- بعض المصفوفات الخاصة (المصفوفة المربعة – مصفوفة الصف – مصفوفة العمود – المصفوفة الصفرية – المصفوفة القطرية – مصفوفة الوحدة)
- مدور المصفوفة
- المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- تساوى مصفوفتين.
- ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مصفوفة Matrix
- عنصر Element
- مصفوفة الصف Row matrix
- مصفوفة العمود Column matrix
- مصفوفة مربعة Square matrix
- مصفوفة صفرية Zero matrix
- مصفوفات متساوية Equal matrix
- مصفوفة متماثلة Symmetric matrix
- مصفوفة شبه متماثلة Skew symmetric matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة بيانية
- برنامج الإكسيل
- جهاز كمبيوتر
- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

الربط بالصناعة

مصنع لإنتاج بعض مكونات شاشات التليفزيون به ٣ أقسام، ينتج ٤ أجزاء رئيسية من الشاشة أ، ب، جـ، د على النحو التالي:

القسم الأول ينتج يوميًّا ٧٥ قطعة من أ ، ١٣٥ قطعة من ب ، ١٥٠ قطعة من جـ ، ٢١٥ قطعة من د .

القسم الثاني ينتج يوميًا ١٠٠ قطعة من أ ، ١٦٨ قطعة من ب ، ٢١٠ قطعة من جـ، ٢٨٢ قطعة من د.

القسم الثالث ينتج يوميًّا ٨٠ قطعة من أ ، ١٠٠ قطعة من ب ، ١٤٤ قطعة من جـ ، ٦٤ قطعة من د.

واضح أنه من الصعب تذكر هذه المعلومات أو المقارنة بينها، وهي على هذه الصورة والآن هناك سؤالاً يطرح نفسه:

كيف يمكن ترتيب هذه البيانات حتى يمكن تحليلها والاستفادة منها؟

للإجابة عن هذا السؤال فإنه يمكننا كتابة البيانات في صورة جدول يمكننا من معرفة ما ينتجه كل قسم من الأقسام الثلاثة من الأجزاء المختلفة بسرعة ووضوح، كما يسهل لنا المقارنة بين إنتاج الأقسام الثلاثة من الأجزاء المختلفة.

الأجزاء

الأقسام	أ	ب	جـ	د
القسم الأول	٧٥	١٣٥	١٥٠	٢١٥
القسم الثاني	١٠٠	١٦٨	٢١٠	٢٨٢
القسم الثالث	٨٠	١٠٠	١٤٤	٦٤

فإذا كنا نعلم أن الأعداد بالصف الأول هي إنتاج القسم الأول من الأجزاء أ ، ب، جـ ، د على الترتيب، وبالمثل الأعداد التي بالصف الثاني هي إنتاج القسم الثاني بنفس الترتيب، وكذلك الأعداد التى بالصف الثالث هي إنتاج القسم الثالث بنفس الترتيب، فإننا نستطيع كتابة المعلومات التى بالجدول السابق بصورة أكثر اختصارًا كالآتي:

	العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث	العمود الرابع
الصف الأول	٧٥	١٣٥	١٥٠	٢١٥
الصف الثاني	١٠٠	١٦٨	٢١٠	٢٨٢
الصف الثالث	٨٠	١٠٠	١٤٤	٦٤

وتسمى هذه الصورة "مصفوفة" كما تسمى الأعداد داخل القوسين "عناصر المصفوفة"

وهذه المصفوفة لها ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة، لذا يقال لها مصفوفة على النظم ٣ × ٤
(أو بالاختصار مصفوفة ٣ × ٤) حيث تذكر عدد الصفوف أولا ثم عدد الأعمدة، كما نلاحظ أن:
عدد عناصر المصفوفة = ٣ × ٤ = ١٢ عنصرًا .

والآن:

١- هل هناك طريقة أخرى لترتيب بيانات المسألة ، ووضعها على صورة مصفوفة أخرى؟ فسر إجابتك.

٢- من المصفوفة السابقة ، ما العنصر في الصف الأول والعمود الثاني؟ وما العنصر في الصف الثاني والعمود الأول؟

٣- **سؤال مفتوح:** اكتب مثالاً من عندك يمكن كتابة المعلومات المتضمنة فيه على صورة مصفوفة ٢ × ٣

تعلم تنظيم البيانات في مصفوفات Organizing Data in Matrices

المصفوفة هى ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين، وتنظم العناصر في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى، ويرمز إلى المصفوفة عادة باستخدام الحروف الكبيرة أ، ب ، ج، س، ص، .... ولعناصر المصفوفة بالحروف الصغيرة أ، ب، جـ، س، ص ، ....

إذا أردنا التعبير عن العنصر داخل المصفوفة أ الذي يقع في الصف ص والعمود ع فإنه يمكننا كتابته على الصورة $أ_{ص ع}$

فمثلاً العنصر $أ_{٢١}$ يقع في الصف الأول والعمود الثاني، وكذلك $أ_{٢٣}$ يقع في الصف الثالث والعمود الثاني.

في المصفوفة: أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -١ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ & -٢ & -١ \end{pmatrix}$

العنصر -١ يقع في الصف ٢ والعمود ٢ ويرمز له بالرمز $أ_{٢٢}$

العنصر ٦ يقع في الصف ١ والعمود ٣ ويرمز له بالرمز $أ_{٣١}$

وبصفة عامة:

المصفوفة المكونة من م صفًّا، ن عمودًا تكون على النظم م × ن أو من الرتبة م × ن أو من النوع م × ن (وتقرأ م فى ن، حيث م، ن أعداد صحيحة موجبة.

حاول أن تحل

١ استخدم المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ للإجابة عن مايلى:

أ ما نظم المصفوفة ب؟ ب ما قيمة $ب_{٢١}$، $ب_{١٢}$؟

تعلم تمثيل المصفوفات Representing of Matrcies

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فإنه يمكن كتابة المصفوفة أ على الصورة:

أ = $(أ_{ص ع})$، ص = ١ ، ٢، ٣، .... م،

ع = ١ ، ٢، ٣، .... ن

وسوف تقتصر دراستنا على الحالات التى فيها م ≥ ٣ ، ن ≥ ٣

مثال

١ اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية:

أ أ = $(أ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١، ٢، ٣

ب ب = $(ب_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢، ٣ ، ع = ١

ج ج = $(جـ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١، ٢

الحل

أ أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ب ب = $\begin{pmatrix} ب_{١١} \\ ب_{١٢} \\ ب_{١٣} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ ×١

ج ج = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢

حاول أن تحل

٢ اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية:

أ أ = $(أ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١، ٢، ٣

ب ب = $(ب_{ص ع})$ ، ص = ١، ٢ ، ع = ١

مثال

٢ **الربط بالمستهلك:** يبين الجدول المقابل الأسعار بالجنيه لثلاثة أنواع من الساندويتشات بثلاثة أحجام مختلفة في أحد مطاعم الوجبات الجاهزة.

	صغير	متوسط	كبير
صدور فراخ	٨	١٢	١٦
جمبرى مقلى	٩	١٣	١٧
سمك فيليه	٧	١١	١٥

أ نظم هذه البيانات في مصفوفة، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا.

ب حدد نظم المصفوفة.

جـ ما قيمة العنصر $أ_{٣٢}$؟

الحل

أ

	صغير	متوسط	كبير
سمك فيليه	٧	١١	١٥
صدور فراخ	٨	١٢	١٦
جمبرى مقلى	٩	١٣	١٧

ب هناك ٣ صفوف، ٣ أعمدة لذا فإن المصفوفة على النظم ٣ × ٣

جـ قيمة العنصر $أ_{٣٢}$ هى الموجودة بالصف ٣ والعمود ٢ وهى ١٣

حاول أن تحل

٣ رصد مدرب فريق كرة السلة بالمدرسة، إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات دورى الفصول فكانت على النحو التالي:

سمير: لعب ١٠ مباريات ، ٢٠ تسديدة ، ٥ أهداف.

حازم: لعب ١٦ مباراة ، ٣٥ تسديدة ، ٨ أهداف.

كريم: لعب ١٨ مباراة ، ٤١ تسديدة ، ١٠ أهداف.

أ نظم البيانات فى مصفوفة على أن ترتب أسماء اللاعبين ترتيبًا تصاعديًّا تبعًا لعدد الأهداف.

ب حدد نظم المصفوفة، ما قيمة $أ_{٣٢}$؟

بعض المصفوفات الخاصة **Some special Matrices**

أ **المصفوفة المربعة:** هى المصفوفة التى عدد الصفوف فيها يساوى عدد الأعمدة مثل: $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$

(مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢)

ب **مصفوفة الصف:** هى المصفوفة التى تحتوى على صف واحد وأى عدد من الأعمدة مثل: $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$

(مصفوفة صف على النظم ١ × ٤)

ج **مصفوفة العمود:** هى المصفوفة التى تحتوى على عمود واحد، وأى عدد من الصفوف مثل: $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٥ \\ ١ \end{pmatrix}$

(مصفوفة عمود على النظم ٣ × ١)

د **المصفوفة الصفرية:** هى المصفوفة التى تكون جميع عناصرها أصفار وقد تكون مربعة أو لاتكون

فمثلاً المصفوفات:

(٠) مصفوفة صفرية على النظم ١ × ١، $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ١ × ٢، $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم٢ × ١، $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢، و يرمز للمصفوفة الصفرية بمستطيل صغير $\square$

هـ **المصفوفة القطرية:** هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا عناصر القطر الرئيسى فيكون، أحدها على الأقل مغايرًا للصفر فمثلاً المصفوفة:

$\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣)

و **مصفوفة الوحدة:** هى مصفوفة قطرية، يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسى مساويًا الواحد، و يرمز لها بالرمز I . فمثلا كل من المصفوفات:

(١) ، $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة وحدة.

حاول أن تحل

٤ اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها.

أ $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هـ $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

٥ اكتب المصفوفة الصفرية على النظم ٣ × ٣

تعلم

تساوى مصفوفتين Equality of two Matrices

تتساوى مصفوفتان أ، ب إذا كانتا على نفس النظم، وكان كل عنصر في المصفوفة أ مساويًا لنظيره في المصفوفة ب **أي أن:** $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$ لكل ص ولكل ع.

مثال

٣ أ المصفوفتان $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ١- \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ١- \end{pmatrix}$ غير متساويتين لأنهما ليسا على نفس النظم.

ب $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- & ١ \\ ص & ٦ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & س & ١ \\ ٥ & ٦ & ١- \end{pmatrix}$ إذا و فقط إذا كانت س = −٣ ، ص = ٥

ج المصفوفتان $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & س \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ص & ١- \\ ١- & ٣ \end{pmatrix}$ لايمكن أن يتساويا، وذلك لإختلاف أحد العناصر المناظرة في كل منهما (عناصر الصف الأول والعمود الأول)

د $\begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٧ & ١ \\ ٣ & ٦ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٧ & ١ \\ ٣ & ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ المصفوفتان متساويتان لأن لهما نفس النظم وعناصرهما المتناظرة متساوية.

حاول أن تحل

٦ أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & ٠,٧٥- \\ ٢- & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠,٢ & -\frac{٣}{٤} \\ ٢- & ٠,٥ \end{pmatrix}$ هل أ = ب؟ فسر إجابتك.

ب إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ هل س = ص؟ فسر إجابتك .

مثال

استخدام المصفوفات المتساوية في حل المعادلات

٤ إذا كان: $\begin{pmatrix} ٤ & ٢س-٥ \\ ٣ص + ١٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢٥ \\ ص + ١٨ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتى س، ص.

الحل

$$\begin{pmatrix} \text{٢س}-٥ & ٤ \\ ٣ & \text{٣ص}+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص}+١٨ \end{pmatrix}$$

حيث أن المصفوفتين متساويتان، فيكون العناصر المتناظرة متساوية ونكتب:

٢ س − ٥ = ٢٥ ، ٣ص + ١٢ = ص + ١٨

٢ س = ٢٥ + ٥ ، ٣ص − ص = ١٨ − ١٢

٢ س = ٣٠ ، ص = ٣

س = ١٥

الحل هو س = ١٥، ص = ٣

حاول أن تحل

٧) إذا كان $\begin{pmatrix} \text{س}+٨ & -٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥ \\ ٣ & \text{٤ص}-١٠ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتى س، ص

٨) **تفكير ناقد:** إذا كان $(\text{٣س} \quad \text{س}+\text{ص} \quad \text{س}-\text{ع}) = (-٩ \quad ٤ \quad -١٠)$ فأوجد قيم كل من س، ص، ع

٩) **تفكير ناقد:** إذا علم أن: $\begin{pmatrix} \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}-\text{ب} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}-\text{ب}+\text{٢د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد قيم أ، ب، جـ، د

تعلم

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة Multipling a Real Number by a Matrix

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الحقيقي **أي أن:**

حاصل ضرب عدد حقيقي ك في مصفوفة أ على النظم م × ن هي مصفوفة ج = ك أ على نفس النظم م × ن وكل عنصر فيها $\text{جـ}_{\text{ص ع}}$ يساوى العنصر المناظر له في المصفوفة أ مضروبًا في العدد الحقيقي ك.

أي: $\text{جـ}_{\text{ص ع}} = \text{ك}\ \text{أ}_{\text{ص ع}}$ حيث ص =١، ٢، ......، م ، ع = ١، ٢، ......، ن

لاحظ أن:

$$\text{ك} \begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك س} & \text{ك ص} \\ \text{ك ع} & \text{ك ل} \end{pmatrix}$$

فمثلاً $-٢ \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢\times٤ & -٢\times١ \\ -٢\times٥ & -٢\times-١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & -٢ \\ -١٠ & ٢ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

١٠ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١٠ & -١٢ & ١٥ \\ ٧ & -١٠ & ٢٠ \\ ٣ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$ فأوجد -٥أ

تعلم مدور المصفوفة Transpose of a Matrix

في أي مصفوفة أ على النظم م × ن إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مصفوفة على النظم ن × م، وتسمى مدور المصفوفة أ، و يرمز لها بالرمز $أ^{مد}$ و يتضح من التعريف أن $(أ^{مد})^{مد}$ = أ

مثال

٥ أوجد مدور كل من المصفوفات الآتية:

أ) أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٥ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ب) ب = $\begin{pmatrix} ٦ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ج) ج = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

الحل

أ) $أ^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢

ب) $ب^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة عمود على النظم ٣ × ١

ج) $ج^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة — Symmetric and Semi Symmetric Matrices

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا وفقط إذا كانت أ = $\text{أ}^{\text{مد}}$ وتسمى شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت أ = $-\text{أ}^{\text{مد}}$

مثال

(٦) هل المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ متماثلة أم شبه متماثلة؟

الحل

$\text{ب} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{\text{مد}} = -1 \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -\text{ب}$

∴ $\text{ب}^{\text{مد}} = -\text{ب}$ فيكون ب = $-\text{ب}^{\text{مد}}$ فتكون المصفوفة ب شبه متماثلة

حاول أن تحل

(١١) هل المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ متماثلة أم شبه متماثلة؟

تحقق من فهمك

(١) أوجد قيمة كل من س، ص، ع في كل مما يأتى:

أ) $\begin{pmatrix} 0 & \text{س} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \text{س} \\ \text{ص} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{ع} & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(٢) بين أيًّا من المصفوفات الآتية متماثلة وأيها شبه متماثلة:

أ) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

تمـاريـن (١ - ١)

١ أ ، ب، جـ ، ى أربع مدن ، فإذا كانت المسافة بالكيلو مترات بين أي مدينتين موضحة فى الجدول المقابل.

أ اكتب مصفوفة تمثل هذه المعلومات.

	أ	ب	جـ
أ	٠	٧٥	٨٠
ب	٧٥	٠	٥٦
جـ	٨٠	٥٦	٠

ب بفرض أن سـ هى المصفوفة المطلوبة فى (أ) أوجد مايلي:

١- $\text{س}_{٣٢}$، ماذا يعنى ذلك؟

٢- $\text{س}_{٢٣}$، ماذا يعنى ذلك؟

٣- ما العلاقة بين $\text{س}_{٣٢}$، $\text{س}_{٢٣}$؟

جـ اكتب جميع عناصر الصف الثاني للمصفوفة سـ.

د اكتب جميع عناصر العمود الثاني للمصفوفة سـ. ماذا تستنتج من البندين **جـ**، **د**؟

....

هـ أوجد $\text{س}_{\text{ك ك}}$ عندما ك = ١، ٢، ٣ ماذا تلاحظ؟

و أكمل مايأتى:

١- سـ مصفوفة على النظم ....

٢- $\text{س}_{\text{ي هـ}} = \text{س}_{\text{هـ ي}}$ لجميع قيم ....

٢ ما عدد عناصر كل من المصفوفات الآتية:

أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ....

ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ....

جـ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ....

٣ أوجد قيم ا، ب، جـ، ى إذا كان:

أ $\begin{pmatrix} \text{٢ب + ١} & \text{ا - ٢} \\ \text{١٦} & \text{جـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-٥} & \text{٣} \\ \text{٣ى - ٢} & \text{ا - ٣} \end{pmatrix}$ ....

ب $\begin{pmatrix} \text{١٠} & \text{٣ا} \\ \text{١٠} & \text{٢ب-ى} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٢ب} & \text{١٥} \\ \text{٢ا + جـ} & \text{٠} \end{pmatrix}$ ....

٤ أوجد قيمة كل من ا، ب إذا كان $\begin{pmatrix} \text{-١} & \text{٤} \\ \text{٣ب + ١} & \text{٢ا - ١} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-١} & \text{٤} \\ \text{٧} & \text{٣} \end{pmatrix}$

....

٥ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ى \\ ٤ & ٣هـ \end{pmatrix}$ حيث أ = $ب^{مد}$

فأوجد قيمة كل من ى ، هـ.

....

٦ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٣- & ١ & ٢ \\ ١- & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢- & ٠ & ٣ \\ ٣ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٥- & ٤- \end{pmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ - ب ، أ + ٢ب ، ب - ٣أ

٧ تفكير ناقد: إذا كانت أ = ($أ_{س ص}$) لكل س، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣} اكتب المصفوفة أ إذا علم أن $أ_{س ص}$ = ص - س،

ثم أوجد $أ^{مد}$

....

١ – ٢

جمع وطرح المصفوفات

Adding and subtracting Matrices

سوف تتعلم

سوف تتعلم :
- جمع المصفوفات.
- طرح المصفوفات.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جمع المصفوفات Adding matrices
- طرح المصفوفات Subtracting matrices

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة بيانية

عمل تعاوني

الربط بالاحصاء: اعمل مع زميل لك . استخدم المعلومات في الجدول التالي:

الوسط الحسابي للدرجات				
	علوم		رياضيات	
السنة	ذكور	إناث	ذكور	إناث
٢٠١١	٤٢٨	٤٢٠	٥٠٢	٤٥٧
٢٠١٢	٤٢٥	٤٢١	٥٠١	٤٦٠
٢٠١٣	٤٢٩	٤٢٦	٥٠٣	٤٦٣

١- أ أوجد مجموع درجات الوسطين الحسابيين للذكور في كل سنة في الجدول.
ب أوجد مجموع درجات الوسطين الحسابيين للإناث في كل سنة في الجدول.

٢- أ اكتب مصفوفة تمثل الوسط الحسابي لدرجات مادة العلوم للذكور والإناث. ضع عنوانًا للمصفوفة وصفوفها وأعمدتها.
ب ما نظم المصفوفة؟

٣- أ اكتب مصفوفة تمثل الوسط الحسابى لدرجات الرياضيات للذكور والإناث. ضع عنوانًا للمصفوفة وصفوفها وأعمدتها.
ب ما نظم المصفوفة ؟

٤- بفحص إجابتك عن السؤال رقم (١) والمصفوفات التى كتبتها في السؤالين (٢)، (٣)، اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع درجات الوسطين الحسابيين للذكور والإناث. ضع عنوانًا للمصفوفة وصفوفها وأعمدتها، ما نظم المصفوفة؟

٥- استخدم ملاحظاتك، وأى أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

تعلم

جمع المصفوفات Adding Matrices

نريد أحيانا ان نجمع أو نطرح مصفوفات، لكى نحصل على معلومات جديدة.
لتحصل على مصفوفة الجمع، اجمع العناصر المتناظرة.

أى أن: إذا كانت أ، ب مصفوفتين على النظم م × ن، فإن أ + ب هى مصفوفة أيضًا على النظم م × ن ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في أ، ب.

مثال

١) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ فأوجد: أ + ب.

الحل

أ + ب = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (بالتعويض عن أ، ب)

= $\begin{pmatrix} 2+(-2) & 0+7 \\ 3+(-4) & -1+1 \end{pmatrix}$ (بجمع العناصر المتناظرة)

= $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (بسط)

حاول أن تحل

١) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ أوجد كلاً ممايأتي إن أمكن:

أ) أ + ب ب) أ + جـ

تعلم

خواص جمع المصفوفات Properties of Adding Matrices

نفرض أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظم م × ن وأن □ مصفوفة صفرية على نفس النظم فإن:

١- **خاصية الإنغلاق:** أ + ب تكون مصفوفة على النظم م × ن

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢

فإن أ + ب = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢

٢- **خاصية الإبدال:** أ + ب = ب + أ

والآن: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ فبين أن أ + ب = ب + أ

٣- **خاصية الدمج:** (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

والآن: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ فبين أن (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

٤- **خاصية المحايد الجمعي:** أ + □ = □ + أ = أ

فمثلاً: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ -9 & 8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ -9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ -9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

٥- **خاصية المعكوس (النظير) الجمعي:** أ + (-أ) = (-أ) + أ = □

حيث (-أ) النظير الجمعي للمصفوفة أ

فمثلاً $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ حيث $\begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

تعلم

طرح المصفوفات

إذا كانت كل من المصفوفتين أ، ب على النظم م × ن فإن المصفوفة ج = أ - ب = أ + (-ب) حيث ج مصفوفة علي النظم م × ن ، (-ب) هى معكوس للمصفوفة ب بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

فمثلاً: $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ى} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ى} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\text{س} & -\text{ص} \\ -\text{ع} & -\text{ل} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} - \text{س} & \text{ب} - \text{ص} \\ \text{جـ} - \text{ع} & \text{ى} - \text{ل} \end{pmatrix}$

مثال

٢ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن أ - ب ≠ ب - أ.

الحل

أ - ب = $\begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٥ & -٩ & -٢ \\ -٨ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢ & -١٣ & ٩ \\ -٢ & ١٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (١)

ب - أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٧ & ٤ & -١١ \\ -٦ & -٥ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٢ & ١٣ & -٩ \\ ٢ & -١٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١)، (٢) نلاحظ أن: أ - ب ≠ ب - أ (عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية)

فكر: هل عملية طرح المصفوفات دامجة؟

مثال

٣ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & -٤ & ٦ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٣ \\ ٩ & -٢ & ٥ \end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix} ٦ & -١ & -٢ \\ -٣ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة ٢أ - ٣ب + ٥ج

الحل

٢أ = ٢ $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & -٤ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ & ٢ \times ٥ & ٢ \times -١ \\ ٢ \times ٣ & ٢ \times -٤ & ٢ \times ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٢ \\ ٦ & -٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

٣ب = ٣ $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٣ \\ ٩ & -٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \times -١ & ٣ \times ٤ & ٣ \times ٣ \\ ٣ \times ٩ & ٣ \times -٢ & ٣ \times ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ١٢ & ٩ \\ ٢٧ & -٦ & ١٥ \end{pmatrix}$

-٣ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١٢ & -٩ \\ -٢٧ & ٦ & -١٥ \end{pmatrix}$

٥ج = ٥ $\begin{pmatrix} ٦ & -١ & -٢ \\ -٣ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \times ٦ & ٥ \times -١ & ٥ \times -٢ \\ ٥ \times -٣ & ٥ \times ٥ & ٥ \times ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٠ & -٥ & -١٠ \\ -١٥ & ٢٥ & ٢٠ \end{pmatrix}$

∴ ٢أ - ٣ب + ٥ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٢ \\ ٦ & -٨ & ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & -١٢ & -٩ \\ -٢٧ & ٦ & -١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٠ & -٥ & -١٠ \\ -١٥ & ٢٥ & ٢٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤ + ٣ + ٣٠ & ١٠ - ١٢ - ٥ & -٢ - ٩ - ١٠ \\ ٦ - ٢٧ - ١٥ & -٨ + ٦ + ٢٥ & ١٢ - ١٥ + ٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٧ & -٧ & -٢١ \\ -٣٦ & ٢٣ & ١٧ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ٢أ - ٣ب + ٤ج

تحقق من فهمك

١) أوجد قيمة كل ممايأتى:

أ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

٢) إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

أ) أوجد أ − ب ، ب − أ . ماذا تلاحظ؟

ب) تحقق من أن − (أ + ب) = (−أ) + (−ب)

تمارين (١ − ٢)

١) إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ وكانت $ك_1 = 2$ ، $ك_2 = -1$ فأوجد كلًّا من المصفوفات الآتية: $ك_1\text{أ}$، $ك_2\text{أ}$

٢) إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -5 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ فأوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكن، مع ذكر السبب فى حالة تعذر إجراء العملية

أ) أ + ب

ب) $\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$

ج) $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}$

٣) إذا كان $\text{س} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ٣ س − ص + ع

٤) إذا كان: $\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ 2 & -4 & 8 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 4 & -10 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث : س = ٢أ − ٣ب

٥) **تفكير ناقد:** أوجد قيم أ، ب، جـ، ى التى تحقق المعادلة:

$$2\begin{pmatrix} \text{أ} & 3 \\ 6 & \text{ب} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ى} \\ \text{جـ} & -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} \text{جـ} & 3 \\ 0 & \text{أ} \end{pmatrix}$$

١ – ٣

ضرب المصفوفات

Multiplying matrices

سوف تتعلم

- ضرب المصفوفات.
- خواص ضرب المصفوفات.
- مدور حاصل ضرب مصفوفتين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- ضرب المصفوفات
Multiplying matrices
- مدور مصفوفة
Transpose of matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول المقابل:

	وجبة (١)	وجبة (٢)	وجبة (٣)
ثمن الوجبة بالجنيهات	٣,٥٠	٢,٧٥	٢
عدد الوجبات المباعة	٥٠	١٠٠	٧٥

١- ما ثمن وجبات الغذاء(١)؟ وجبات الغذاء(٢)؟ وجبات الغذاء (٣)؟

٢- أ ما مجموع ثمن جميع الوحدات المباعة من الوجبات الثلاثة؟
ب وضح كيف استخدمت بيانات الجدول لإيجاد الإجابة؟

٣- أ اكتب مصفوفة ١ × ٣ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.
ب اكتب مصفوفة ٣ × ١ لتمثل عدد الوجبات المباعة.
جـ **الكتابة:** استخدم الكلمات صف، عمود ، عنصر لوصف إجراءات استخدام المصفوفات التى حصلت عليها لإيجاد عدد الجنيهات التى تبيع بها الكافتيريا الوجبات الثلاث.

والآن: لكي نقوم بضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية، ثم اجمع حواصل الضرب.

فمثلاً لإيجاد حاصل ضرب: $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$

نضرب $أ_{١١}$ في $ب_{١١}$، ثم نضرب $أ_{٢١}$ في $ب_{١٢}$ ثم نجمع حاصل الضرب

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ؟ & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad (٠) \times ٥ + ٢ \times (-١) = -٢$$

الناتج هو العنصر في الصف الأول والعمود الأول. كرر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ؟ \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad (٠)(٠) + (٢)(١) = ٢$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ؟ & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad (-٢)(٥) + (-٣)(-١) = -٧$$

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ؟ & -٧ \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{٠} & ٥ \\ \boxed{١} & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ \boxed{-٣ \quad -٢} \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$$

$$-٣ = (١)(-٣) + (٠)(-٢)$$

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -٣ & -٧ \\ \boxed{} & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{٠} & ٥ \\ \boxed{١} & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٣ & -٢ \\ \boxed{٤ \quad ١} \end{pmatrix}$$

$$٤=(١)(٤)+(٠)(١)$$

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -٣ & -٧ \\ \boxed{} & ؟ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & \boxed{٥} \\ ١ & \boxed{-١} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٣ & -٢ \\ \boxed{٤ \quad ١} \end{pmatrix}$$

$$١ = (-١)(٤) + (٥)(١)$$

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -٣ & -٧ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$$

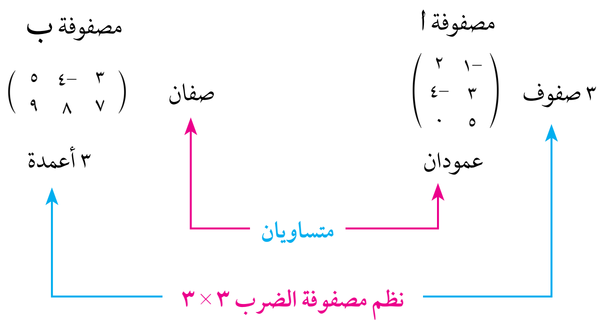
٤- صف نموذجًا للصفوف والأعمدة الملونة.

٥- أ ما نظم المصفوفات الأصلية في المثال السابق، ومانظم مصفوفة الضرب؟

ب تفكير ناقد: كيف نقارن نظم مصفوفة الضرب بنظم المصفوفات الأصلية؟

تعلم ضرب المصفوفات Multiplying matrices

يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية، وعند ضرب المصفوفة أ على النظم م × ن بالمصفوفة ب على النظم ن × ل فإن الناتج هو المصفوفة أ ب على النظم م × ل **فمثلاً:**



مثال

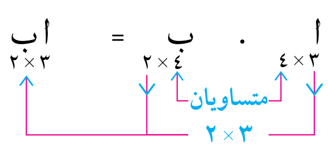
١ حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب أ ب معرفة في كل حالة أم لا.

أ إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٣ × ٤، والمصفوفة ب على النظم ٤ × ٢

ب إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٥ × ٣، والمصفوفة ب على النظم ٥ × ٢

الحل

أ بما أن عدد أعمدة المصفوفة أ يساوي عدد صفوف المصفوفة ب، فإن مصفوفة حاصل الضرب أ ب معرفة وتكون على النظم ٣ × ٢



ب بما أن عدد أعمدة المصفوفة أ لايساوي عدد صفوف المصفوفة ب، فإن مصفوفة حاصل الضرب أ ب غير معرفة.

حاول أن تحل

١ حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب أ ب معرفة في كل حالة أم لا موضحًا السبب.

أ إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٣ × ٢، والمصفوفة ب على النظم ٢ × ٣

ب إذا كانت المصفوفة أ على النظم ١ × ٣ والمصفوفة ب على النظم ١ × ٣

من تعريف ضرب المصفوفات يتضح إنه من الممكن أن تكون أ ب معرفة بينما ب أ غير معرفة، وبصفة عامة إذا كانت كل من أ ب، ب أ معرفتين فإن أ ب ليست بالضرورة تساوى ب أ حتى وإن تساويتا في نفس النظم.

مثال

٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فأوجد كلاً من أ ب ، ب أ. ماذا تلاحظ؟

الحل

∵ أ على النظم ٣ × ٣، ب على النظم ٣ × ٣ فإن أ ب معرفة (لأن عدد أعمدة أ يساوى عدد صفوف ب)
وتكون مصفوفة حاصل الضرب على النظم ٣ × ٣

$$أ\,ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١×٢+(-١)×٣+٢×٥ & ١×١+(-١)×٤+٢×٠ & ١×٠+(-١)×١+٢×(-١) \\ -١×٢+٠×٣+٣×٥ & -١×١+٠×٤+٣×٠ & -١×٠+٠×١+٣×(-١) \\ ٠×٢+١×٣+٤×٥ & ٠×١+١×٤+٤×٠ & ٠×٠+١×١+٤×(-١) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ & -٣ \\ ١٣ & -١ & -٣ \\ ٢٣ & ٤ & -٣ \end{pmatrix}$$

∵ ب على النظم ٣ × ٣ أ على النظم ٣ × ٣ فإن ب أ معرفة (لأن عدد أعمدة ب يساوى عدد صفوف أ) وتكون مصفوفة حاصل الضرب على النظم ٣ × ٣

$$ب\,أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢×١+١×-١+٠×٠ & ٢×-١+١×٠+٠×١ & ٢×٢+١×٣+٠×٤ \\ ٣×١+٤×-١+١×٠ & ٣×-١+٤×٠+١×١ & ٣×٢+٤×٣+١×٤ \\ ٥×١+٠×-١+(-١)×٠ & ٥×-١+٠×٠+-١×١ & ٥×٢+٠×٣+-١×٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٧ \\ -١ & -٢ & ٢٢ \\ ٥ & -٦ & ٦ \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن أ ب ≠ ب أ **يمكن استخدام ضرب المصفوفات في بعض المواقف الحياتية.**

مثال

٣ الربط بالسياحة: لدى شركة سياحية ٣ فنادق بمدينة الغردقة
يبين الجدول المقابل عدد الغرف المختلفة في كل فندق، فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التى تحتوى على سرير واحد ٢٥٠ جنيهًا، وللغرفة التى تحتوى على سريرين ٤٥٠ جنيهًا، وللجناح ٦٠٠ جنيهًا.

الفندق	غرفة بسرير	غرفة بسريرين	جناح
الزهرة	٢٨	٦٤	٨
اللؤلؤة	٣٥	٩٠	٢٠
الماسة	٢٠	٨٠	١٥

أ اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف المختلفة في الثلاثة فنادق، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.
ب اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للشركة، على فرض أن جميع الغرف تم شغلها.
جـ ما الدخل اليومي للشركة على فرض أن جميع الغرف تم شغلها؟

الحل

أ نكتب مصفوفة عدد الغرف أ كالآتي: أ = $\begin{pmatrix} ٢٨ & ٦٤ & ٨ \\ ٣٥ & ٩٠ & ٢٠ \\ ٢٠ & ٨٠ & ١٥ \end{pmatrix}$

وتكتب مصفوفة أسعار الغرف ب كالآتى ب = $\begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٦٠٠ \end{pmatrix}$

ونلاحظ أننا قد كتبنا المصفوفتين بحيث يكون عدد الصفوف في المصفوفة أ مساويًا لعدد الأعمدة في المصفوفة ب، حتى يمكن إجراء عملية الضرب ، إيجاد المطلوب في البندين (ب)، (جـ).

ب مصفوفة الدخل اليومي للشركة هي المصفوفة أ ب = $\begin{pmatrix} ٢٨ & ٦٤ & ٨ \\ ٣٥ & ٩٥ & ٢٠ \\ ٢٠ & ٨٠ & ١٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٦٠٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٨ \times ٢٥٠ + ٦٤ \times ٤٥٠ + ٨ \times ٦٠٠ \\ ٣٥ \times ٢٥٠ + ٩٥ \times ٤٥٠ + ٢٠ \times ٦٠٠ \\ ٢٠ \times ٢٥٠ + ٨٠ \times ٤٥٠ + ١٥ \times ٦٠٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٠٦٠٠ \\ ٦٣٥٠٠ \\ ٥٠٠٠٠ \end{pmatrix}$

ج الدخل اليومي للشركة = ٤٠٦٠٠ + ٦٣٥٠٠ + ٥٠٠٠٠ = ١٥٤١٠٠ جنيه

تعلم

خواص عملية ضرب المصفوفات Properties of Matrix Multiplication

من تعريف عمليتى جمع وضرب المصفوفات، مع افتراض تحقق الشروط اللازمة للتعريفين: يمكن استنتاج الخواص التالية:

١- خاصية الدمج: (أ ب) ج = أ (ب ج) والأن إذا كان:

أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد (أ ب) ج، أ (ب ج). ماذا تلاحظ؟ هل عملية ضرب المصفوفات دامجة؟

٢- خاصية المحايد الضربى أ I = I أ = أ حيث I هي مصفوفة الوحدة

والآن إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ فبرهن أن: أ I = I أ = أ حيث I هي مصفوفة الوحدة

٣- خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها.

أ(ب + ج) = أ ب + أ ج
(ب + أ) ج = أ ج + ب ج

والآن إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}$

إثبت أن: أ أ(ب + ج) = أب + أج ب (ب + ج) أ = ب أ + ج أ

مدور حاصل ضرب مصفوفتين Transpose of the product of two matrices

من تعريف مدور المصفوفة وتعريف ضرب المصفوفات يمكن استنتاج الخاصية التالية: $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

والآن إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & ١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أثبت أن: $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب أب معرفة فى كل ممايأتي أم لا، و إذا كانت معرفة فأوجد نظم المصفوفة الناتجة:

أ المصفوفة أ على النظم ٣ × ١، والمصفوفة ب على النظم ٢ × ٣

ب المصفوفة أ على النظم ٣ × ٣، والمصفوفة ب على النظم ٢ × ٢

تمــارين (١ – ٣)

١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٩ \end{pmatrix}$ فأوجد كلًّا ممايأتى:

أ) أ ب

ب) ب أ

ج) (أ + ب)أ

٢ إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} س & ٧ \\ ٣ & ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة كل من س، ص:

٣ **تفكير ناقد:** إذا كان أ، ب مصفوفتين، وكانت $\square$ هى المصفوفة الصفرية ، أ ب = $\square$ ، فهل هذا يعنى دائمًا أن أ = $\square$ أو ب = $\square$ اتخذ أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ثم اعرض لرأيك بعد ذلك.

١ – ٤

المحددات

Determinants

سوف تتعلم

- محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
- محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة.
- محدد المصفوفة المثلثة.
- إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات.
- حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محدد Determinant
- محدد الرتبة الثانية Second order determinant
- محدد من الرتبة الثالثة Third order determinant
- القطر الرئيسى للمحدد Principle or leading diagonal
- القطر الآخر للمحدد Other diagonal
- مصفوفة المعاملات Coefficient matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.
- ورق رسم بياني.

فكر و ناقش

١- ما المصفوفة المربعة؟

٢- اكتب مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢، ومن النظم ٣ × ٣

٣- إذا كانت أ مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢ حيث: أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ١ \end{pmatrix}$ فإن محدد المصفوفة أ هو العدد المعرف كالآتي:

|أ| = ٢ × ٧ − ١ × ٥ = ١٤ − ٥ = ٩ (ويرمز لقيمة المحدد بالرمز $\triangle$)

ما محدد كل من المصفوفات التالية؟

ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$

تعلم

المحددات Determinants

إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث:

أ = $\begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$ فإن محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ| ويسمى بمحدد الرتبة الثانية، وهو العدد المعرف كالآتي:

القطر الأخر

|أ| = $\begin{vmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{vmatrix}$ = أ د − جـ ب

القطر الرئيسى

ونلاحظ أن قيمة محدد الرتبة الثانية يساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحًا منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر.

مثال

١) أوجد قيمة كل محدد ممايلى:

أ $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ جـ $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$ د $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

أ $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٤ × ٧ − ٣ × ٥ = ٢٨ − ١٥ = ١٣

ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ = ٠ × ٣ − ٧ × ٥ = ٠ − ٣٥ = −٣٥

جـ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - ٠ \times ٠$

$= ١ - ٠ = ١$

د $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ١ \times ٧ - ٢ \times ٠$

$= ٧ - ٠ = ٧$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة كل من المحددات التالية :

أ $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ **ب** $\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ **جـ** $\begin{vmatrix} أ & ب \\ ب & جـ \end{vmatrix}$

تعلم

محدد الرتبة الثالثة Third order determinant

يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة، ولإيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$ فإن:

$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix} = أ \begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} د & و \\ ز & ط \end{vmatrix} + جـ \begin{vmatrix} د & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$$

$$= أ(هـ\,ط - ح\,و) - ب\,(د\,ط - ز\,و) + جـ\,(د\,ح - ز\,هـ)$$

مثال

(٢) لإيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ فإن :

$$\begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٧ \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٦ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٧\,(٤ \times ٦ - ٢ \times ١) - ٢\,(٣ \times ٦ - (-١) \times ١) + ٥\,(٣ \times ٢ - (-١) \times ٤)$$

$$= ٧ \times ٢٢ - ٢ \times ١٩ + ٥ \times ١٠$$

$$= ١٥٤ - ٣٨ + ٥٠ = ١٦٦$$

تعلم

المحدد الأصغر المناظر لأى عنصر في مصفوفة

Minor determinant corresponding to any element of a matrix

إذا كانت المصفوفة أ هي مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث

$أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ فإن: المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{١١}$ يرمز له بالرمز $|أ_{١١}|$ وهو $\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

ولاحظ إننا حصلنا على هذا المحدد بحذف الصف والعمود المتقاطعين على العنصر $أ_{١١}$ كالآتي:

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$$

بالمثل:

- المحدد الأصغر المناظر للعنصر $\text{أ}_{٢١}$ يرمز له بالرمز $|\text{أ}_{٢١}|$ وهو $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$
- المحدد الأصغر المناظر للعنصر $\text{أ}_{٣١}$ يرمز له بالرمز $|\text{أ}_{٣١}|$ وهو $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$
- المحدد الأصغر المناظر للعنصر $\text{أ}_{١٢}$ يرمز له بالرمز $|\text{أ}_{١٢}|$ وهو $\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$

وهكذا، وجميع هذه المحددات هى محددات من الرتبة الثانية:

ملاحظات هامة

١- إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ على الصورة:

أ $= \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{pmatrix}$ ، ومحدد أ يرمز له بالرمز |أ| حيث:

$$|\text{أ}| = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}_{١١} |\text{أ}_{١١}| - \text{أ}_{٢١} |\text{أ}_{٢١}| + \text{أ}_{٣١} |\text{أ}_{٣١}|$$

٢- لاحظ أننا ضربنا كل عنصر في المحدد الأصغر المناظر له مسبوقًا بالإشارات +، −، +، ... على الترتيب، وإشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $\text{أ}_{\text{و هـ}}$ تتعين بالقاعدة:

إشارة $|\text{أ}_{\text{و هـ}}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{\text{و}+\text{هـ}}$

فمثلاً إشارة $|\text{أ}_{٢١}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{١+٢}$ وهى سالبة

إشارة $|\text{أ}_{٣١}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{١+٣}$ وهى موجبة

بعبارة أخرى لتحديد إشارة أي محدد أصغر مناظر لعنصر ما نجمع رتبتى الصف، والعمود اللذين يتقاطعان عند هذا العنصر:

- فإذا كان مجموع الرتبتين **زوجيًّا** كانت الإشارة **موجبة**.
- إذا كان مجموع الرتبتين **فرديًّا** كانت الإشارة **سالبة**.

ونلاحظ أن قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر تكون كالآتى: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

٣- يمكن فك المحدد بدلالة عناصر أى صف (أو عمود) ومحدداتها الصغرى ولكن بإشارة مناسبة.

مثال

٣ لإيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثاني.

نلاحظ أن إشارات المحدد الأصغر المناظر لعناصر العمود الثاني هي − ، + ، − على الترتيب فيكون:

$$\text{المحدد} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(-4 - 35) + 0 + 2\,(5 - 12)$$

$$= 78 - 14 = 64$$

فكرة مفيدة للحل

يمكنك فك المحدد باستخدام أى صف أو عمود فيه أكبر عدد ممكن من الأصفار لتسهيل حصولك على قيمته بعد أخذ الإشارة المناسبة.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة كل محدد ممايلي:

أ $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ جـ $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ د $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

٤- لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب.

$$\triangle = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{32} \\ \text{جـ}_{13} & \text{جـ}_{23} & \text{جـ}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{ب}_{12} & \text{جـ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{ب}_{22} & \text{جـ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{ب}_{32} & \text{جـ}_{33} \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك بفك كل من المحددين.

مثال

٤ أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\,(0 - 20) + 3\,(2 + 8) - (5 - 0) = -15$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\,(0 - 20) - (-6 + 5) - 2\,(-12 - 0) = -15$$

لذلك فإن:

$$\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٠ & -٣ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & -٣ & ٢ \\ ٤ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٥ & -٢ \end{vmatrix}$$

حاول أن تحل

٣ أثبت أن

$$\begin{vmatrix} -١ & ٥ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

٥- قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين:.

أولاً - إذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر

قيمة المحدد $$\begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

ويمكن إثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثانى يكون: Δ = صفر

ثانيًا: إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد، فإن قيمة المحدد = صفر

آي أن: $$\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ جـ & ب & أ \\ ع & ص & س \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وذلك لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثانى (أثبت ذلك).

مثال

٥ بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ٨ & -٥ & ١ \\ ٩ & ٧ & ٣ \\ ٨ & -٥ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

فى المحدد نجد أن : $ص_٣ = ص_١$ $\qquad$ ∴ قيمة المحدد = صفر

حاول أن تحل

٤ بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٢ \\ -١ & ٧ & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٦- إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

مثال

(٦) بدون فك المحدد أوجد قيمة: $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٧ \\ ٤ & ٦ & ٢ \\ ١٠ & ١٥ & ٥ \end{vmatrix}$

الحل

بأخذ ٢ عامل مشترك من $ص_٢$ ، ٥ عامل مشترك من $ص_٣$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٧ \\ ٤ & ٦ & ٢ \\ ١٠ & ١٥ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٧ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١٠ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

وذلك لتساوى العناصر المتناظرة فى $ص_٢$ ، $ص_٣$ "حاول إثبات ذلك بطريقة أخرى".

حاول أن تحل

(٥) إذا كان: $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ء} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٠$ أوجد فيه $\begin{vmatrix} ٢\text{ا} & ٢\text{ء} & ٢\text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ -٤\text{جـ} & -٤\text{و} & -٤\text{ع} \end{vmatrix}$

٧- إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = - قيمة المحدد الأصلى

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix}$$

بتبديل الصفين الثانى والثالث وبصوره أخرى تكتب بتبديل $ص_٢$، $ص_٣$

مثال

(٧) بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

بتبديل الصفين الأول والثانى فى المحدد الأول

$$\therefore - \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} = -\Delta + \Delta = \text{صفر}$$

تعلم

محدد المصفوفة المثلثة Determinant of triangular Matrix

المصفوفة المثلثة هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى (أو فوقه) أصفار مثل:

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & -٤ & ٢ \\ ٢ & -١ & ٥ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٠ \\ ٦ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن: قيمة محدد المصفوفة المثلثة يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى.

أى أن:

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & أ_{١١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} = أ_{١١}\,أ_{٢٢}\,أ_{٣٣}$$

ولبرهان ذلك نفك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول:

المحدد = $أ_{١١} \begin{vmatrix} ٠ & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} \left(أ_{٢٢} \times أ_{٣٣} - أ_{٢١} \times ٠ \right) = أ_{١١}\,أ_{٢٢}\,أ_{٣٣}$

مثال

٨ ما قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & -٣ & ٠ \\ ٦ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ؟

الحل

نلاحظ أن المحدد هو محدد مصفوفة مثلثة فيكون:

المحدد = $١ \times -٣ \times ٦ = -١٨$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل محددممايلى:

أ $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ ٤ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

تعلم

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

Finding area of a triangle by using Determinants

يمكنك استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح المثلث، بمعلومية إحداثيات رؤوس المثلث كالآتى:

مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه: س (أ، ب)، ص (جـ، ى)، ع (هـ، و) هى $|\Delta|$ حيث:

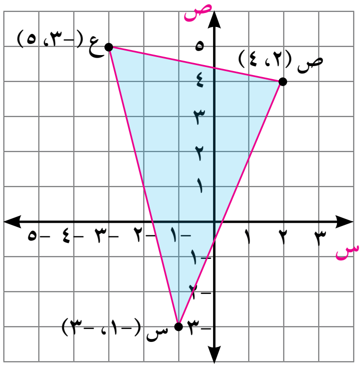
$$\Delta = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ & ب & أ \\ ١ & د & جـ \\ ١ & و & هـ \end{vmatrix}$$

تذكر

$|\Delta|$ تعنى قيمة Δ الموجبة.

مثال

٩ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذي إحداثيات رؤوسه (−١، −٣) ، (٢، ٤)، (−٣، ٥)



الحل

$$م = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

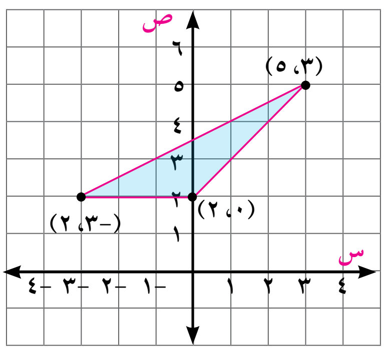
$$= \frac{1}{2}\left[-1(4-5) + 3(2+3) + 1(10+12) \right]$$

$= \frac{1}{2}(1 + 15 + 22) = 19$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

٧ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذي فيه أ(−٢، −٢)، ب (٣، ١)، جـ (−٤، ٣)

مثال



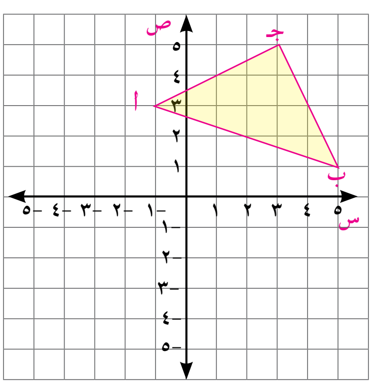
١٠ **الربط بالهندسة:** إذا كانت إحداثيات ثلاث نقط على المستوى الإحداثي هي (٠، ٢) (٣، ٥)، (−٣، ٢) وكانت الإحداثيات بالأمتار، فأوجد مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه تلك النقط.

الحل

$$م = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[0\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$= \frac{1}{2}\left[0 - 0 - 3(2-5) \right] = 4\frac{1}{2}$ متر مربع



حاول أن تحل

٨ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة المثلث المبين بالشكل المقابل.

تعلم

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

Solving a system of linear equations by Cramer's method

١- حل أنظمة المعادلات الخطية في مجهولين

Solving a system of Linear equations in two unknowns

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في مجهولين كالآتي:

$$أ س + ب ص = م$$

$$جـ س + ى ص = ن$$

فإن المصفوفة التى عناصرها معاملا المجهولين بعد ترتيب النظام تسمى بمصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ى \end{pmatrix}$ ويمكنك استخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات الخطية، فإذا كانت قيمة محدد مصفوفة المعاملات $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ى \end{vmatrix}$ ويرمز له بالرمز $\triangle$ (يقرأ دلتا) لايساوى صفرًا، فإن للنظام حلاً وحيدًا، و إذا كانت قيمة المحدد صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل.

ونلاحظ أن معاملى المجهول س تكوِّن العمود الأول للمحدد $\triangle$، ومعاملا المجهول ص تكوِّن العمود الثاني للمحدد $\triangle$.

يسمى $\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ى \end{vmatrix}$ محدد المجهول س ونرمز له بالرمز $\triangle_س$ (يقرأ دلتا س)، ونحصل عليه من المحدد $\triangle$ بعد تغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن.

كما يسمى $\begin{vmatrix} أ & م \\ جـ & ن \end{vmatrix}$ محدد المجهول ص ونرمز له بالرمز $\triangle_ص$ (يقرأ دلتا ص)، ونحصل عليه من المحدد $\triangle$ بعد تغيير عناصر العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت م، ن.

والآن: نفرض أن $\triangle \neq ٠$ ، فإن حل النظام هو:

$$س = \frac{\triangle_س}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ى \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ى \end{vmatrix}} = \frac{م ى - ن ب}{أ ى - جـ ب} \qquad ص = \frac{\triangle_ص}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} أ & م \\ جـ & ن \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ى \end{vmatrix}} = \frac{أ ن - جـ م}{أ ى - جـ ب}$$

مثال

(١١) حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر.

$$س - ٣ ص = -٤ \qquad ٢س + ص = ٢$$

الحل

حيث إن: $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣- \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ١) - (٢ \times ٣-) = ١ + ٦ = ٧ \neq ٠$

فيكون

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} ٤- & ٣- \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}}{٧} = \frac{(٤- \times ١) - (٢ \times ٣-)}{٧} = \frac{٤- + ٦}{٧} = \frac{٢}{٧}$

$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} ١ & ٤- \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}}{٧} = \frac{(١ \times ٢) - (٢ \times ٤-)}{٧} = \frac{٢ + ٨}{٧} = \frac{١٠}{٧}$

مجموعة الحل = $\{(\frac{٢}{٧}، \frac{١٠}{٧})\}$

تحقق:

- $\frac{٢}{٧} - ٣(\frac{١٠}{٧}) \stackrel{?}{=} ٤-$
  $\frac{٢٨-}{٧} \qquad = ٤- \qquad (\checkmark)$
- $٢(\frac{٢}{٧}) + \frac{١٠}{٧} \stackrel{?}{=} ٢$
  $٢ \qquad = ٢ \qquad (\checkmark)$

حاول أن تحل

(٩) حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر:

$\text{س} + ٢\,\text{ص} = ٠ \qquad ٢\,\text{س} - ٣\,\text{ص} = ١$

٢- حل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل

Solving systems of Linear equations in three unknowns

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل كالآتي:

$\text{أ}_١\,\text{س} + \text{ب}_١\,\text{ص} + \text{جـ}_١\,\text{ع} = \text{م} \qquad \text{أ}_٢\,\text{س} + \text{ب}_٢\,\text{ص} + \text{جـ}_٢\,\text{ع} = \text{ن} \qquad \text{أ}_٣\,\text{س} + \text{ب}_٣\,\text{ص} + \text{جـ}_٣\,\text{ع} = \text{ك}$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه في حالة نظام معادلتين خطيتين في مجهولين يكون:

$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{جـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix}$ = محدد المعاملات

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب}_١ & \text{جـ}_١ \\ \text{ن} & \text{ب}_٢ & \text{جـ}_٢ \\ \text{ك} & \text{ب}_٣ & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix}$ = محدد المجهول س

نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م، ن، ك

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{م} & \text{جـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ن} & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ك} & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix}$ = محدد المجهول ص

نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت م، ن، ك

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{م} \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{ن} \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{ك} \end{vmatrix}$ = محدد المجهول ع

نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت م، ن، ك

والآن إذا فرض أن $\Delta \neq$ صفر، فإن: $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$، $\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

مثال

١٢ حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر.

$-\text{س} + ٣\text{ص} + \text{ع} = ٠$ $\qquad$ $٣\text{س} - ٢\text{ص} - \text{ع} = ١$ $\qquad$ $\text{س} + \text{ص} + ٢\text{ع} = ٠$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٣ & -٢ & -١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = -١(-٤ + ١) - ٣(٦ + ١) + ١(٣ + ٢) = ٣ - ٢١ + ٥ = -١٣$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = -١(٦ - ١) = -٥$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} -١ & ٠ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١(-١ \times ٢ - ١ \times ١) = -٣$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٠ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = -١(-١ \times ١ - ١ \times ٣) = ٤$$

$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٥}{-١٣} = \frac{٥}{١٣}$، $\qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٣}{-١٣} = \frac{٣}{١٣}$،

$\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{٤}{-١٣}$

مجموعة الحل = $\{(\frac{٥}{١٣}، \frac{٣}{١٣}، \frac{-٤}{١٣})\}$

تحقق:

- $-(\frac{٥}{١٣}) + ٣(\frac{٣}{١٣}) + (\frac{-٤}{١٣}) \overset{?}{=} ٠$

  $٠ = ٠ \quad (\checkmark)$

- $٣(\frac{-٥}{١٣}) + ٢(\frac{٣}{١٣}) - (\frac{-٤}{١٣}) \overset{?}{=} ١$

  $١ = ١ \quad (\checkmark)$

- $١\frac{٥}{١٣} + \frac{٣}{١٣} + ٢(\frac{-٤}{١٣}) \overset{?}{=} ٠$

  $٠ = ٠ \quad (\checkmark)$

حاول أن تحل

١٠ حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة كرامر:

$\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = ٢$ $\qquad$ $\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع} = ٧$ $\qquad$ $٣\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ١٠$

تمـــارين (١ – ٤)

١) أوجد قيمة كل من المحددات الآتية:

أ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ ....

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$ ....

جـ) $\begin{vmatrix} -٣ & ٦ \\ -٧ & ١٩ \end{vmatrix}$ ....

د) $\begin{vmatrix} أ & أ+س \\ ب & ب+ص \end{vmatrix}$ ....

هـ) $\begin{vmatrix} س^٢+١ & س+١ \\ ص^٢+١ & ص+١ \end{vmatrix}$ ....

و) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٤ & -١ \\ ٨ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$ ....

ز) $\begin{vmatrix} ٣ & ٤٢ & ٠ \\ ٧ & ١٨ & ٢ \\ ٣ & ٢٨ & ٠ \end{vmatrix}$ ....

ح) $\begin{vmatrix} -٣ & -٤ & ٣ \\ -٣١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ ....

ط) $\begin{vmatrix} ٢٣ & ٣ & ١٣ \\ ٥ & ٧ & ٣٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ....

٢) حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر:

أ) ٢ س – ٣ ص = ٥
٣ س + ٤ ص = –١

ب) س + ص = ٥
٢ س + ٥ ص = ١٦

جـ) س + ٣ ص = ٥
٢ س + ٥ ص = ٨

د) ٣ س + ٢ ص = ٥
٢ س + ص = ٣

هـ) ٣ س = ١ – ٤ ص
٥ س + ١٢ = ٧ ص

و) ٢ س = ٣ + ٧ ص
ص = ٥ – س

ز) ٢س +ص – ٢ع = ١٠
٣س + ٢ص + ٢ع =١
٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

٣) الربط بالهندسة: أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه أ(٢، ٤)، ب (–٢، ٤) جـ(٠، –٢).

٤) أوجد مساحة سطح المثلث س ص ع الذى فيه س (٣، ٣)، ص (–٤، ٢)، ع (١، –٤).

٥) باستخدام المحددات أثبت أن النقط (٣، ٥)، (٤، –١)، (٥، ٧) تقع على استقامة واحدة.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ١٢ فإن $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{ى} & \text{و} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ =

أ -١٢   ب -٦   ج ٦   د ١٢

(٧) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ١٥ فإن $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \end{vmatrix}$ =

أ -٣٠   ب -١٥   ج صفر   د ١٥

(٨) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ =

أ صفر   ب أجـ   ج ب جـ   د أ ب جـ

(٩) إذا كان ن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن م =

أ ن   ب ١٠ن   ج ٢٠ن   د ٣٠ن

بدون فك المحدد أوجد قيمة:

(١٠) $\begin{vmatrix} ١٠ & -١ & ٥ \\ ٨ & ٢ & ٤ \\ -١٠ & ٢ & -٥ \end{vmatrix}$

(١١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ & -٤ \end{vmatrix}$

١ – ٥ المعكوس الضربى للمصفوفة

Multiplicative Inverse of a Matrix

سوف تتعلم

- إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة على النظم ٢ × ٢
- حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام معكوس المصفوفة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معكوس ضربى لمصفوفة Multiplicative inverse of a matrix
- مصفوفة الوحدة Identity matrix
- معادلة مصفوفية Matrix equation
- مصفوفة المتغيرات Variable matrix
- مصفوفة الثوابت Constant matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك

١- أوجد كل حاصل ضرب:

أ $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

٢- صف أى أنماط تراها في إجابتك عن البند رقم (١).

٣- أوجد كل حاصل ضرب:

أ $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

٤- صف أي انماط تراها في إجابتك عن البند رقم (٣).

٥- تفكير ناقد: كيف تربط إجاباتك عن البندين (١) ، (٣) ؟

تعلم

المعكوس الضربي للمصفوفة ٢ × ٢:

إذا كان لدينا مصفوفتان مربعتان أ، ب وكل منهما على النظم ٢ × ٢ وكان: أ ب = ب أ = I (مصفوفة الوحدة I) فإن المصفوفة ب تسمى معكوسًا ضربيًّا للمصفوفة أ وكذلك تسمى المصفوفة أ معكوسًا ضربيًّا للمصفوفة ب.

إذا كان للمصفوفة أ معكوسًّا ضربيًّا فإننا نرمز إليها بالرمز $أ^{-١}$ حيث: $أ\,أ^{-١} = أ^{-١}\,أ = I$

بعض المصفوفات ليس لها معكوسًّا ضربيًّا وسوف يساعدك مايلى فى استنتاج ما إذا كانت المصفوفة على النظم ٢×٢ لها معكوسًا ضربيًّا أم لا ، وكيفية إيجاد هذا المعكوس إن وجد.

> **تذكر**
>
> ١- المصفوفة المحايدة في عملية الضرب هي مصفوفة الوحدة I وهى مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى ١ وباقي العناصر أصفار.
>
> ٢- لأى عددين حقيقيين يكون كل منهما معكوسًا ضربيًّا للاخر (نظيرًا ضربيًا) إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد الضربي (١)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة أ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد أ = $\Delta \neq ٠$.

وبفرض أن المصفوفة $أ^{-١}$ هي المعكوس الضربي للمصفوفة أ، وأن محدد أ = $\Delta \neq ٠$ فإن:

$$أ^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{pmatrix}$$

مثال

١ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{pmatrix}$ أثبت ان للمصفوفة أ معكوس ضربي ثم أوجد هذا المعكوس

الحل

محدد أ = $\begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{vmatrix}$ = -١ × -٢ - ٨ × ٠ = ٢

∴ $\Delta \neq ٠$ أي انه للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًا.

$أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

> **تذكر**
>
> إذا كان $\Delta \neq ٠$ فإن للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًا يتعين كالآتي:
>
> أ) تبادل بين وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيسى للمصفوفة أ.
>
> ب) نغير كلا من إشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ
>
> جـ) نضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء (أ)، (ب) بالعدد $\frac{١}{\Delta}$ فنحصل على $أ^{-١}$

حاول أن تحل

١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت ان للمصفوفة أ معكوسًّا ضربيًّا ثم أوجده.

٢ هل للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -٥ & ٥ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ معكوس ضربي؟ فسر إجابتك.

مثال

٢ أوجد قيم أ التي تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٢ \\ ٨ & أ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًّا.

الحل

المصفوفة ليس لها معكوسًا ضربيًا عندما يكون محدد المصفوفة يساوى صفرًا.

أى عندما $\begin{vmatrix} أ & ٢ \\ ٨ & أ \end{vmatrix}$ = صفر

أى $أ^{٢}$ - ٨ × ٢ = صفر

$أ^{٢}$ - ١٦ = صفر

إذن توجد قيمتان لـ أ هما ٤، -٤ (وهما جذرا المعادلة $أ^{٢}$ - ١٦ = ٠)

تجعلان المصفوفة المعطاة ليس لها معكوس ضربي.

∴ عندما أ ∈ ح - {-٤، ٤} يكون للمصفوفة المعطاة معكوسًا ضربيًا.

حاول أن تحل

٣ أوجد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي.

مثال

٣ إذا كانت سـ = $\begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن $سـ^{-١}$ = سـ

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix} = -١ \neq ٠$

∴ $سـ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -١ & -أ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ = سـ

حاول أن تحل

٤ إذا كان ب = $\begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ فأثبت أن $ب^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$ علمًا بأن س ص ≠ ٠

نشاط

التشفير Cryptography

يمكنك استخدام أى مصفوفه ومعكوسها الضربى لتشفير الرسالة . استخدم معكوس المصفوفة لفك شفرة الرسالة: نكتب الرسالة "في فريق" كمصفوفات على النظم ٢ × ١ لتصبح الأرقام الموجودة تباعًا.

أ ١	د ٨	ض ١٥	ك ٢٢
ب ٢	ذ ٩	ط ١٦	ل ٢٣
ت ٣	ر ١٠	ظ ١٧	م ٢٤
ث ٤	ز ١١	ع ١٨	ن ٢٥
ج ٥	س ١٢	غ ١٩	هـ ٢٦
ح ٦	ش ١٣	ف ٢٠	و ٢٧
خ ٧	ص ١٤	ق ٢١	ي ٢٨

في $\begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٢٨ \end{pmatrix}$ فر $\begin{pmatrix} ٢٠ \\ ١٠ \end{pmatrix}$ يق $\begin{pmatrix} ٢٨ \\ ٢١ \end{pmatrix}$ (١)

عندما تستخدم ضرب المصفوفات وتستخدم مصفوفة مثل ر = $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن الرسالة سوف تصبح هذه المصفوفات:

$\begin{pmatrix} ١٧٦ \\ ٦٨ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٢١٠ \\ ٧٧ \end{pmatrix}$ (٢)

لاحظ أن: مصفوفة التشفير $ر^{-١}$ يمكن إيجادها كالآتي:

$$\because ر = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} ، \triangle = \begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٦ - ٤ = ٢ \neq ٠$$

$$فيكون\ ر^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$$

وعند ضرب المصفوفة $ر^{-١}$ في كل من المصفوفات في البند (٢) تحصل على المصفوفات في البند (١) وتستطيع فك الشفرة.

والآن:

١- اكتب رسالة " أرسل طعام " وشفرها باستخدام ضرب المصفوفات والمصفوفة ر = $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

٢- اكتب رسالة من عندك وشفرها باستخدام ضرب المصفوفات (استخدم مصفوفة تشفير من عندك).

تعلم

حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة

Solving two simultaneous equations by using Inverse Matrix

إذا كان لدينا نظام من معادلتين خطيتين كالآتي:

$$أ_١ س + ب_١ ص = ك_١ \qquad أ_٢ س + ب_٢ ص = ك_٢$$

فإنه يمكن كتابتهما على الصورة التالية:

$$\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \end{pmatrix}$$

و إذا فرضنا أن:

$$أ = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix} ، سـ = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} ، ج = \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \end{pmatrix}$$

فإن المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة معادلة مصفوفية واحدة كالآتي:

أ سـ = ج حيث أ هي مصفوفة المعاملات، سـ هي مصفوفة المجاهيل، ج هي مصفوفة الثوابت.

وإذا كان محدد أ $\neq$ ٠ **أي** $\Delta = \text{أ}_١\,\text{ب}_٢ - \text{أ}_٢\,\text{ب}_١ \neq ٠$

فيكون من الممكن إيجاد حل المعادلة أ سـ = ج كالآتي:

$\text{أ}^{-١}(\text{أ سـ}) = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$ **(بضرب طرفي المعادلة من اليمين في $\text{أ}^{-١}$)**

$\therefore (\text{أ}^{-١}\,\text{أ})\,\text{سـ} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$ **(خاصية التجميع)**

$I\,\text{سـ} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$ **(المعكوس الضربي للمصفوفة أ)**

$\therefore \boxed{\text{سـ} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}}$

وبهذا يتضح إنه يمكننا إيجاد المجهولين س ، ص بدلالة الثوابت العددية $\text{أ}_١$ ، $\text{ب}_١$ ، $\text{أ}_٢$ ، $\text{ب}_٢$ ، $\text{ك}_١$ ، $\text{ك}_٢$.

مثال

٤ حل نظام المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات:

$٣\text{س} + ٢\,\text{ص} = ٥$ $\qquad$ $٢\,\text{س} + \text{ص} = ٣$

الحل

تكتب المعادلة المصفوفية أ سـ = ج حيث

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{سـ} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

محدد $\text{أ} = \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٣ - ٤ = -١ \neq ٠$

فيكون للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًا ويكون الحل هو ك $\text{سـ} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$ **وحيث أن:**

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{سـ} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

أى أن س = ١ ، ص = ١

مجموعة الحل {(١ ، ١)}

التحقق:

$٣\,(١) + ٢\,(١) \overset{؟}{=} ٥$

$٥ = ٥$ (✓)

$٢\,(١) + ١ \overset{؟}{=} ٣$

$٣ = ٣$ (✓)

حاول أن تحل

٥ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات.

أ $٣\,\text{س} + ٧\,\text{ص} = ٢$

$٢\,\text{س} + ٥\text{ص} = ١$ (تحقق من صحة إجابتك)

ب $\text{س} + ٣\,\text{ص} - ٥ = ٠$

$٢\,\text{س} = ٨ - ٥\,\text{ص}$ (تحقق من صحة إجابتك)

تحقق من فهمك

١ إذا كان ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ا ب = I فأوجد المصفوفة ا.

٢ إذا كان ا = $\begin{pmatrix} ٢- & ٢ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ ، ا ب = $\begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ب

تمـــارين (١ – ٥)

١ بين المصفوفات التى لها معكوسات ضربية، والمصفوفات التى ليس لها معكوسات ضربية فيما يلى، وأوجد المعكوس إن وجد.

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$

٢ ما قيم ا التى تجعل لكل من المصفوفات التالية معكوسًا ضربيًّا

أ $\begin{pmatrix} ١ & ا \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٩ & ا \\ ا & ٤ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٤ & ا \\ ٢-ا & ٢ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٢- & ١-ا \\ ٢-ا & ١ \end{pmatrix}$

٣ إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن س$^{١-}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{pmatrix}$

٤ أوجد المصفوفة ا إذا كان: ا $\begin{pmatrix} ٠ & ٢- \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

٥ إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ أثبت أن = (س ص)$^{١-}$ = ص$^{١-}$ س$^{١-}$

٦ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات، ثم تحقق من صحة الناتج:

أ ٤ س + ٣ ص = ٢٦ ، ٥ س – ص = ٤

ب ٢ س = ٣ + ٧ ص، ص = ٥ – س

تمارين عامة على الوحدة الأولى

(١) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٢ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن $(\text{ب}\text{أ})^{\text{مد}}$ =

(٢) إذا كان $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & \text{س} \end{pmatrix}$ = I فإن س =

(٣) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن $\text{أ}^{٢}$ =

(٤) إذا كانت أ، ب مصفوفتين حيث اب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن $\text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$ =

أ $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

(٥) إذا كان: $\begin{vmatrix} ٢-\text{س} & ٢ \\ -٣ & \text{س}+٢ \end{vmatrix}$ = ١ فإن س تساوى

أ -٣ ب ٣ ج ± ٣ د ± ٤

(٦) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & -١ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

أ ما نظم المصفوفة أ؟

ب اكتب عناصر الصف الأول للمصفوفة أ.

ج اكتب عناصر العمود الثالث فى المصفوفة أ.

د اكتب العناصر: $\text{أ}_{١١}$، $\text{أ}_{٢٢}$، $\text{أ}_{٣١}$، $\text{أ}_{١٢}$

(٧) ما عدد عناصر كل مصفوفة ممايلى؟

أ مصفوفة من النظم ٣ × ٢

ب مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢.

(٨) حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\begin{pmatrix} \text{س}+٥ \\ \text{س}-\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} \text{أ}-٣\text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب}+\text{أ} & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

٩ حل المعادلة: $أ + \begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٤- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$.

١٠ أوجد أ، ب، جـ، د حيث

أ $\begin{pmatrix} ٣- & ٢- \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٣- \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ١- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} أ \\ ب \\ جـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١- \\ ١ \end{pmatrix}$

١١ إذا كان: $س = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٤ & ٢- \\ ٠ & ١- & ٦- \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢- & ٣- & ١- \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد :

أ ٢ س + ٣ ص − ٢ I

ب س − (ص − ٥ I)

١٢ أوجد س، ص حيث: $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

١٣ بين ما إذا كان لكل من المصفوفات التالية معكوس ضربى ثم أوجده

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} أ & ب- \\ أ & ب \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

١٤ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات

أ س + ص = ٣
س − ص = ٥

ب ٢ س − ٣ ص − ٣ = ٠
٥ س + ٤ ص − ١٩ = ٠

ج ص = ١١ − ٥س
س = ٣ − ٥ ص

الجبر

الوحدة ٢

البرمجة الخطية

Linear Programing

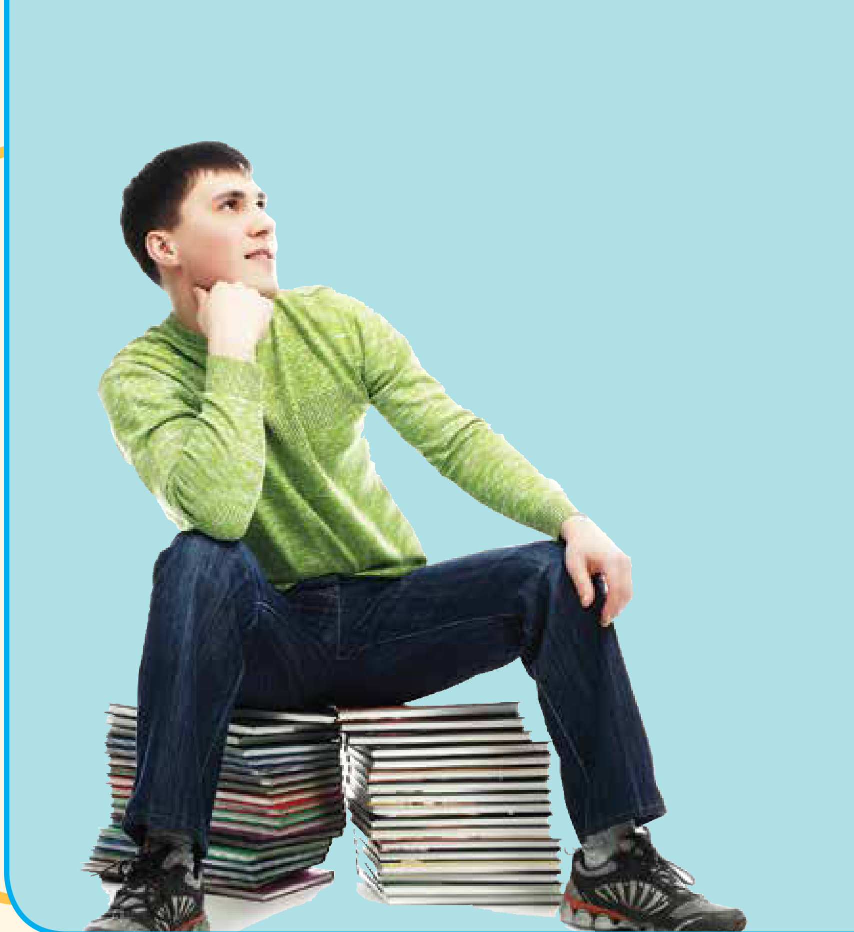
أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًّا.
- يحل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًّا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات، مع تحديد النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل، وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.

المصطلحات الأساسية

- متباينة خطية — Linear Inequality
- مستقيم حدى — Boundary line
- مستقيم حدى منقط — Dashed boundary line
- مستقيم حدى متصل — Solid boundary line
- متباينة خطية فى مجهولين — Linear Inequality in two unknowns
- نظام المتباينات الخطية — System of linear inequalities
- منطقة الحل — Feasible region
- رسم بياني — Graph
- برمجة خطية — Linear programing
- القيود — Constrains
- الحل الأمثل — Optimize



دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): المتباينات الخطية.

الدرس (٢ - ٢): حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًّا.

الدرس (٢ - ٣): البرمجة الخطية والحل الأمثل.

دروس الوحدة

شبكة إحداثيات ١٠ × ١٠

ورق مربعات - أقلام ألوان رصاص - بعض المواقع الإلكترونية

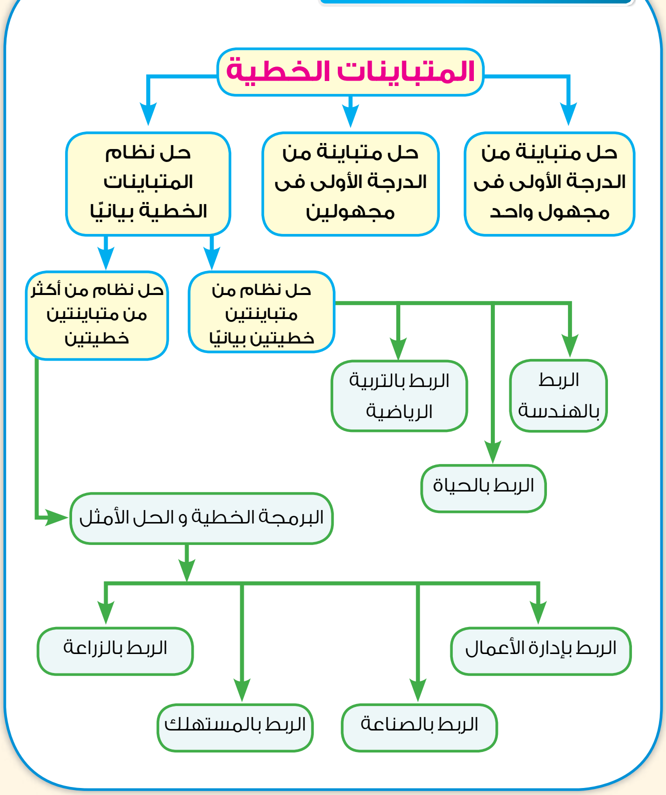
مثل www.phschool.com

مقدمة الوحدة

عندما يؤدى تحليل مسألة أو مشكلة ما إلى إيجاد قيمة عظمى أو صغرى لتعبير خطى، يجب أن تخضع متغيراته لمجموعة من المتباينات الخطية. فإنه ربما يمكننا الحصول على الحل باستخدام تكنيكات البرمجة الخطية.

وتاريخيًّا، فقد ظهرت مشكلات البرمجة الخطية كنتيجة للحاجة لحل مشكلات تتعلق بمرتبات أفراد القوات المسلحة أثناء الحرب العالمية الثانية، ومن أمثال الذين عملوا فى حل مثل هذه المشكلات جورج دانتزيج George Dantzig الذى توصل لصيغة عامة لمشكلات البرمجة الخطية مع عرض طريقة لحلها تسمى السمبلكس Simplex method، وللبرمجة الخطية تطبيقاتها فى كل المجالات مثل الصناعة والتجارة وإدارة الوقت، والزراعة، والصحة، وغيرها، فمثلاً يتطلب النجاح فى إدارة الأعمال استخدام البرمجة الخطية، وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن أو تحقيق أقل تكلفة ممكنة وهكذا، وفى هذه الوحدة سوف نتعلم طرق حل مسائل البرمجة الخطية التى تتضمن مجهولين فقط، وتطبيقاتها فى مواقف حياتية مختلفة.

مخطط تنظيمى للوحدة



٢ - ١ المتباينات الخطية

Linear Inequalities

سوف تتعلم

- حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين، وتحديد منطقة الحل بيانيًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينة خطية Linear inequality
- مستقيم حدى. Boundary line
- مستقيم حدى متقطع. Dashed boundary line
- مستقيم حدى متصل. Solid boundary line
- متباينة خطية فى مجهول واحد Linear inequality in one unknown
- متباينة خطية فى مجهولين Linear inequality in two unknowns

الأدوات والوسائل

- شبكة إحداثيات ١٠ × ١٠
- ورق مربعات.
- أقلام ألوان رصاص.

عمل تعاونى

الأدوات المستخدمة: شبكة احداثيات ١٠ × ١٠

١- بالاشتراك مع زميل لك العب لعبة "ما النقطة؟"

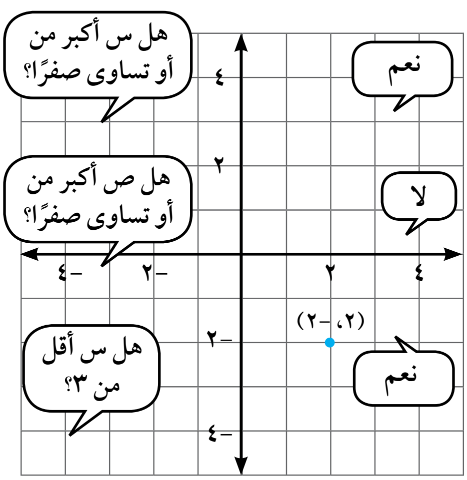
هدف اللعبة:

تحديد موضع نقطة على المستوى الإحداثى بطرح أقل عدد ممكن من الأسئلة.

كيف تلعب؟

★ يختار اللاعب (أ) نقطة على المستوى الإحداثى، ولايعلمها اللاعب الآخر (نقطة سرية)، ويكون كل من إحداثييها عددًا صحيحًا من –٥ إلى ٥

★ يسأل اللاعب (ب) أسئلة تشمل الكلمات "أقل من" أو "أكبر من"، ويجيب اللاعب (أ) عن كل سؤال فقط بـ "نعم" أو "لا".



★ يسجل اللاعب (أ) عدد الأسئلة المطروحة بينما يُسمى اللاعب (ب) النقطة السرية.

★ يتبادل اللاعبان أدوارهما لتكملة جولة واحدة من اللعبة.

كيف تفوز؟

اللاعب الذى يحدد النقطة بطرحه عددًا أقل من الأسئلة هو الذى يفوز بالجولة، واللاعب الذى يفوز بأول ثلاث جولات، هو اللاعب الفائز.

٢- كم سؤالا تحتاج لطرحه لتحديد موضع النقطة السرية؟

٣- إذا كنت محظوظًا بدرجة كبيرة، فما عدد الأسئلة التى تحتاج لطرحها، لتحديد موضع النقطة السرية؟ فسر إجابتك موضحًا بالأمثلة.

٤- كيف تساعدك المتباينات فى تحديد موضع النقطة السرية؟

٥- اقترح إستراتيجية لتفوز فى هذه اللعبة.

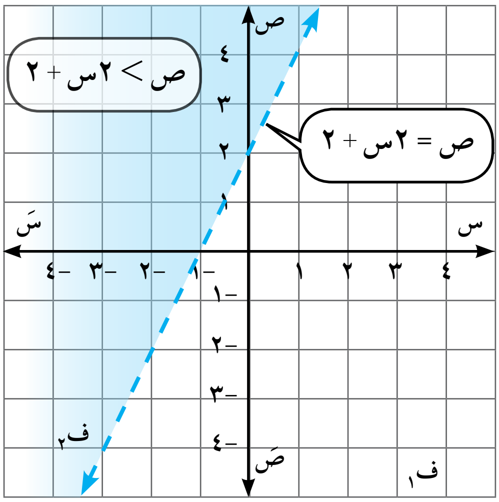
تعلم

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهولين

Solving linear inequalities in two unknowns

المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين تشبه المعادلة الخطية من الدرجة الأولى فى مجهولين، والفرق بينهما هو وضع رمز المتباينة بدلاً من وضع رمز التساوى فمثلا: ص > ٢ س + ٢ هى متباينة خطية، ص = ٢ س + ٢ هى معادلة خطية مرتبطة بها.

التمثيل البيانى للمتباينة ص > ٢ س + ٢ موضح بالمنطقة المظللة فى الشكل المقابل.



ونلاحظ أن كل نقطة فى المنطقة الملونة تحقق المتباينة، والتمثيل البيانى للمستقيم ص = ٢ س + ٢ هو حد المنطقة الممثلة للحل، وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز ≤ أو ≥ فإن النقاط الواقعة على المستقيم الحدى ستحقق المتباينة وعندئذ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

مثال

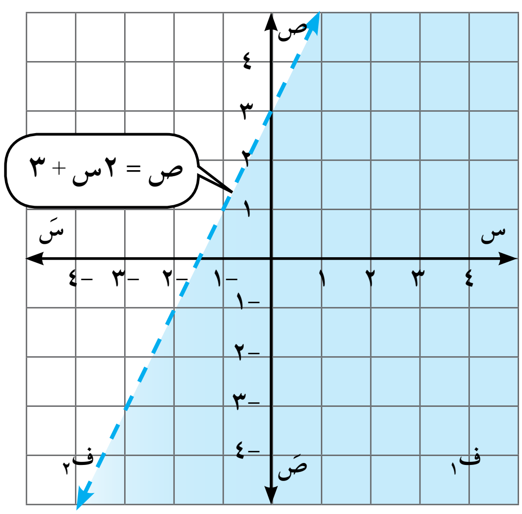
١ مثل بيانيًّا مجموعة حل المتباينة: ص > ٢ س + ٣

الحل

الخطوة (١): ارسم المستقيم الحدى ص = ٢ س + ٣

ولاحظ أن نقط المستقيم الحدى ليست حلًّا للمتباينة لذا يرسم المستقيم الحدى متقطعًا.

س	٠	-١	-٢
ص	٣	١	-١



الخطوة (٢): نختار إحدى النقط فى أحد جانبى الخط المرسوم ونعوض بها فى الطرف الأيمن، فإذا حققت هذه النقطة المتباينة نلون هذا الجانب (مجموعة الحل)، وإذا لم تحقق المتباينة نلون الجانب الآخر ويكون هو مجموعة الحل.

لاحظ

المستقيم الحدى يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط.

١- مجموعة نقط المستقيم الحدى.

٢- مجموعة نقط المستوى التى تقع على أحد جانبى المستقيم الحدى وتسمى نصف مستوى ويرمز لها بالرمز (ف$_1$).

٣- مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم الحدى وتسمى نصف مستوى ويرمز لها بالرمز (ف$_2$).

اختر النقطة (٠، ٠) والتى لاتقع على المستقيم الحدى، بل تقع على أحد جانبيه.

ص > ٢ س + ٣ (المتباينة الأصلية)

٠ $\overset{?}{>}$ ٢ (٠) + ٣ (نعوض بالنقطة (٠، ٠))

٠ > ٣ (صواب)

ظلل المنطقة التى تحتوى على النقطة (٠، ٠)، حيث مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠، ٠).

ص > ٢ س + ٣ (المتباينة الأصلية)

٣ $\overset{?}{>}$ ٢ (٢) + ٣ (نعوض بالنقطة (٢، ٣))

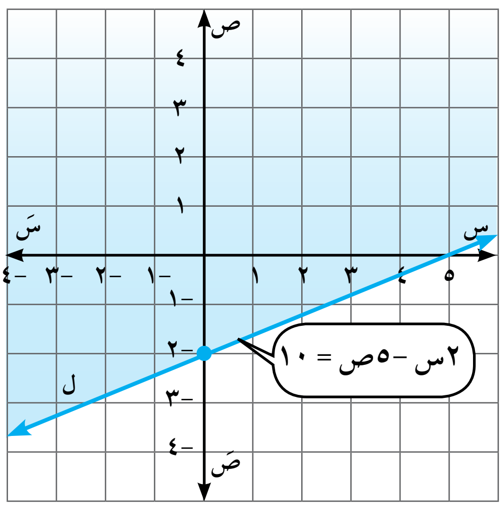
٣ > ٧ (صواب) إذن الحل صحيح.

التحقق:
يبين التمثيل البيانى أن النقطة (٢، ٣) تقع فى منطقة الحل.

مثال

٢ مثل بيانيًّا مجموعة حل المتباينة: ٢س – ٥ ص ≥ ١٠

الحل



الخطوة (١): نمثل بيانيًّا المستقيم الحدى (ل).

٢ س – ٥ ص = ١٠ بخط متصل (لأن علاقة التباين ≥).

س	٠	٥	$\frac{1}{2}$ ٢
ص	٢–	٠	١–

يمكنك رسم المستقيم الحدى بوضع المستقيم:

٢ س – ٥ ص = ١٠ على الصورة: ص = م س + جـ

حيث م الميل، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات.

فيكون: – ٥ ص = – ٢ س + ١٠ ` ص = $\frac{2}{5}$ س – ٢

الخطوة (٢): اختبر النقطة (٠،٠) والتى تقع على أحد جانبى المستقيم الحدى.

٢ س – ٥ ص ≥ ١٠ (المتباينة الأصلية)

٢ (٠) – ٥ (٠) $\overset{?}{\geqslant}$ ١٠ (نعوض بالنقطة (٠، ٠))

٠ ≥ ١٠ (صواب)

لون المنطقة التى تحتوى على النقطة (٠، ٠)، حيث مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (٠، ٠) ∪ مجموعة نقط المستقيم الحدى ل.

حاول أن تحل

١ مثل بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية

أ ٢ س – ص ≤ ٦   ب ص > ٥ س – ٥   جـ ص – ٢ س > ٢

مثال

٣ **تطبيقات حياتية:** **تسوق الطعام:** افترض أنك قررت عدم صرف أكثر من ٤٨ جنيهًا لشراء الحمص والفول السودانى اللازم لرحلتك أنت وعائلتك إلى حديقة الحيوان بالجيزة. كم كيلو جرامًا يمكنك شراؤه من كل نوع؟

الحل

عرف: نفرض أن س = عدد الكيلو جرامات التى يمكنك شراؤها من الحمص.

ص = عدد الكيلو جرامات التى يمكنك شراؤها من الفول السودانى.

اربط: ثمن شراء الحمص + ثمن شراء الفول السودانى ⩽ الحد الأقصى للشراء (انظر إلى الرسم).

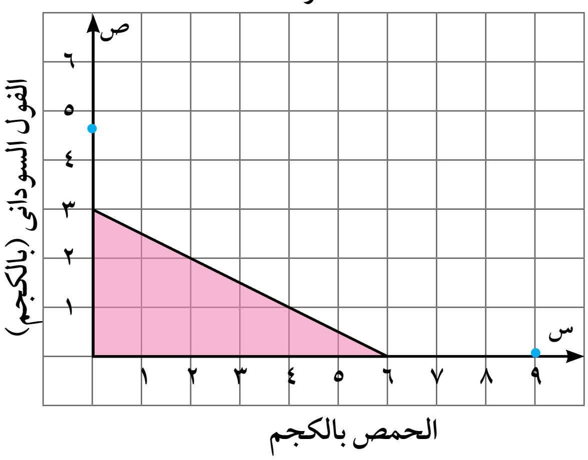
اكتب: ٨ س + ١٦ ص ⩽ ٤٨

ارسم المستقيم الحدى ٨ س + ١٦ ص = ٤٨، و يمثل بخط مستقيم متصل (لأن علاقة التباين ⩽).

استخدم الربع الأول فقط من المستوى الإحداثى، حيث إنه لايمكنك شراء كمية سالبة من المحمصات.

س	٠	٦	٢
ص	٣	٠	٢

محمصات الرحلة



اختبر النقطة (٠، ٠)

٨ (٠) + ١٦ (٠) $\overset{?}{\leqslant}$ ٤٨

٠ ⩽ ٤٨ (صواب)

لون المنطقة التى تحتوى النقطة (٠، ٠).

يوضح التمثيل البيانى كل الحلول الممكنة، على سبيل المثال إذا قمت بشراء ٢ كجم من الحمص، فإنه لايمكنك شراء أكثر من ٢ كجم من الفول السودانى. والآن هل ٢ كجم حمص، ١ كجم من الفول السودانى حل لهذا المثال؟

تحقق من فهمك

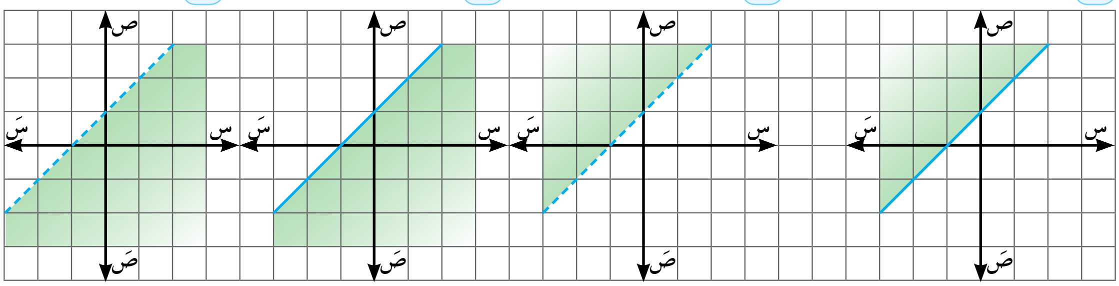
١ **تفكير ناقد:** عندما نمثل المتباينة ص ⩾ $\frac{٢}{٥}$ س − ٢ بيانيًّا، هل ستظلل المنطقة فوق أم تحت الخط المستقيم ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٢؟ كيف علمت ذلك؟

٢ **الربط بالمستهلك:** تبيع مكتبة نوعين من الكشاكيل، النوع الأول سعره ٦,٢٥ جنيه، والنوع الآخر سعره ٧,٥ جنيه، فإذا أراد أحمد شراء بعض من هذه الكشاكيل، بحيث لا يدفع أكثر من ٢٥ جنيهًا، فكم عدد الكشاكيل التى يمكنه شراؤها من كل نوع؟

تمــاريـن (٢ – ١)

(١) صل كل متباينة بالرسم البياني الذي يمثل مجموعة حلها (اختبر النقطة (٠، ٠) فى كل متباينة).

أ	ب	ج	د



١- ص ⩾ س + ١	٢- ص > س + ١	٣- ص < س + ١	٤- ص ⩽ س + ١

(٢) اختبر أيًّا من النقط هو حل للمتباينة:

أ ص ⩽ ٢ س +٣	[(٠، ١) ، (٣، ٩) ، (–١، ٠)]

ب ص > ٢ س + ٣	[(٠، ١) ، (٣، ٩) ، (–١، ٠)]

(٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

أ ص ⩾ س + ٢	ب ص < ٢ س – ٣	ج س + ٣ ص ⩽ ٦

٢ - ٢ حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًّا

Solving Systems of Linear Inequalities Graphically

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك.

١- مثل بيانيًّا مجموعة حل المتباينة س ≥ ٢ فى مستوى إحداثى متعامد، ولون منطقة الحل باللون الأصفر.

٢- مثِّل بيانيًّا مجموعة حل المتباينة ص < -١ فى نفس المستوى الإحداثى المتعامد، ثم لون منطقة الحل باللون الأخضر.

٣- حدد المنطقة التى تداخل فيها اللونين الأصفر والأخضر معًا.

٤- ماذا تمثل المنطقة التى حددتها فى بند (٣)؟

٥- اختر ثلاث نقط مختلفة يمثل كل منها حلًّا للمتباينتين معًا. فسر إجابتك.

سوف تتعلم

- حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا.
- حل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.

تعلم

نظام المتباينات الخطية

تُكون متباينتان خطيتان أو أكثر معًا نظامًا من المتباينات الخطية، ويكون الزوج المرتب (س، ص) حلًّا لهذا النظام إذا حقق جميع متبايناته.

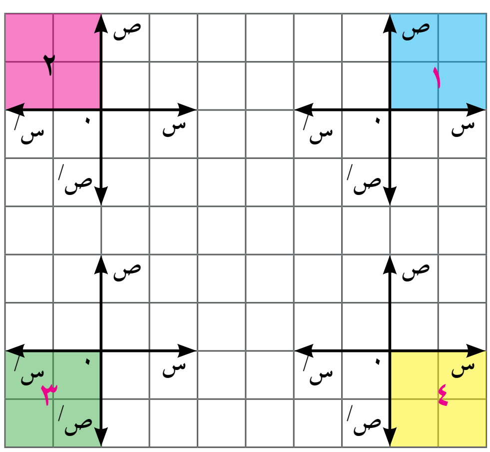
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- نظام متباينات خطية System of linear inequalities
- منطقة الحل Feasible region
- رسم بيانى Graph

حاول أن تحل

① يمكنك وصف كل ربع من أرباع مستوى إحداثى متعامد باستخدام نظامٍ من المتباينات الخطية.

من الشكل المقابل، حدد رقم الربع الذى يمثل مجموعة حل كل نظام مما يأتى



أ س > ٠ ، ص > ٠

ب س > ٠ ، ص < ٠

ج س < ٠ ، ص > ٠

د س < ٠ ، ص < ٠

الأدوات والوسائل

- ورق رسم بيانى.
- ألوان رصاص.

تعلم

حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا

Solving a system of liner inequalitues graphically

حل نظام المتباينات الخطية يعنى إيجاد جميع الأزواج المرتبة التى تحقق متباينات هذا النظام.

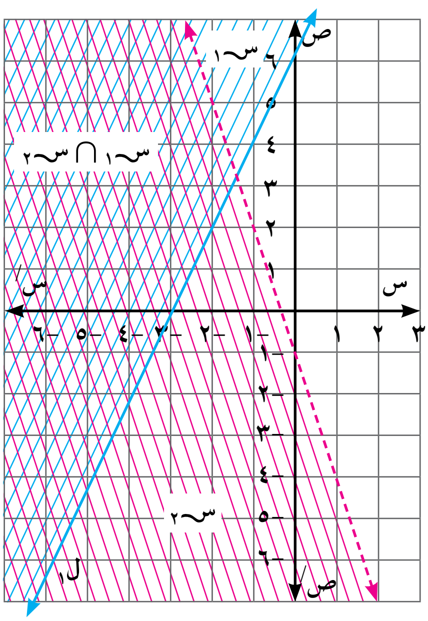
لتحديد جميع النقاط (الأزواج المرتبة) التى تشكل حلاً للنظام يتم تلوين (تظليل) منطقة حل كل واحدة من المتباينات فى مستوى إحداثى واحد، فتكون المنطقة المشتركة بين مناطق حل جميع المتباينات هى منطقة حل هذا النظام

مثال

١ حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيًّا: ص ≥ ٢ س + ٦ ، ص + ٣س < -١

الحل

الخطوة (١): مثِّل مجموعة حل كل متباينة فى النظام بيانيًّا، ولون منطقة الحل.



للمتباينة الأولى: ص ≥ ٢ س + ٦

نرسم المستقيم الحدى ص = ٢ س + ٦ (خط متصل)

س	٠	-٣	-٢
ص	٦	٠	٢

النقطة (٠، ٠) لاتحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل س~١ هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه نقطة الأصل ∪ ل١

للمتباينة الثانية: ص + ٣ س < -١

نرسم المستقيم الحدى ص + ٣ س = -١ (خط متقطع)

س	٠	-١	-٢
ص	-١	٢	٥

النقطة (٠، ٠)لاتحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل س~٢ هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه نقطة الأصل.

الخطوة (٢): حدد المنطقة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام، وهى المنطقة التى تتداخل فيها الألوان، والتى تمثل منطقة حل النظام، فيكون مجموعة الحل للمتباينتين معًا هى س~١ ∩ س~٢

تحقق: لاحظ أن النقطة (-٤، ٢) تنتمى إلى منطقة حل النظام؛ لذا يمكن استخدامها نقطة اختبار، والتحقق من صحة الحل بالتعويض عن (س، ص) بالنقطة (-٤، ٢) فى كلتا المتباينتين:

ص ≥ ٢ س + ٦ ، ص + ٣ س < -١

٢ ≥؟ ٢(-٤) + ٦ ، ٢ + ٣ (-٤) <؟ -١

٢ ≥ -٢ (صواب) ، -١٠ < -١ (صواب)

حاول أن تحل

٢ حل النظام الآتى بيانيًّا: ٣ س + ٥ص ⩽ ١٥ ، ص > س -١

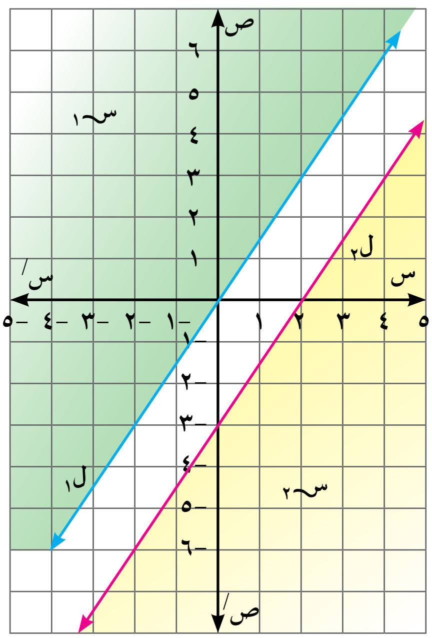
مثال

٢ حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيًّا: ٤ ص ⩽ ٦س

-٣ س + ٢ص ⩾ -٦

الحل

الخطوة (١): مثِّل مجموعة حل كل متباينة فى النظام بيانيًّا، ولون منطقة الحل.



للمتباينة الأولى: ٤ ص ⩽ ٦ س

نرسم المستقيم الحدى ٤ ص = ٦س (خط متصل)

س	٠	٢	-٢
ص	٠	٣	-٣

النقطة (٠، ٠) تقع على المستقيم الحدى؛ لذا يختبر باستخدام نقطة أخرى على إحدى جانبى المستقيم الحدى ولتكن (-٣، ٢)

فيكون: ٤ (٢) ⩽ ٦ (-٣)

أي ٨ ⩽ -١٢ (صواب)

فيكون مجموعة الحل $س_1$، و هى نصف المستوى الذى يقع فيه النقطة (-٣، ٢) ∪ $ل_1$

للمتباينة الثانية: - ٣ س + ٢ ص ⩾ -٦

نرسم المستقيم الحدى -٣س +٢ص = -٦ (خط متصل)

س	٠	٢	-٢
ص	-٣	٠	-٦

النقطة (٠، ٠) لاتحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل $س_2$، و هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه النقطة (٠، ٠) ∪ $ل_2$

الخطوة (٢): نحدد المنطقة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام، والتى تمثل منطقة حل النظام.

ونلاحظ أن المستقمين $ل_1$، $ل_2$ متوازيان، ولاتوجد منطقة مشتركة بين المنطقتين الملونتين كما فى الشكل.

∴ مجموعة حل المتباينتين معًا = ϕ

مثال

٣ **الربط بالحياة** يريد مربى حيوانات عمل حظيرة مستطيلة الشكل، يجب أن لايقل طول الحظيرة عن ٨٠ مترًا، وأن لايزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار. فما الأبعاد الممكنة للحظيرة؟

الحل

عرف: س = عرض الحظيرة. ص = طول الحظيرة.

اربط: الطول لايقل عن ٨٠ مترًا. المحيط لايزيد عن ٣١٠ أمتار

ص ⩾ ٨٠ ٢ س + ٢ ص ⩽ ٣١٠

لحل نظام المتباينات الخطية: ص ⩾ ٨٠

٢ س + ٢ ص ⩽ ٣١٠

يمكنك اتباع التالى:

للمتباينة الأولى:

ص ⩾ ٨٠

استخدم الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لرسم المستقيم الحدى

ص = ٨٠

(المستقيم الحدى متصل)

س	٠	١	٢
ص	٨٠	٨٠	٨٠

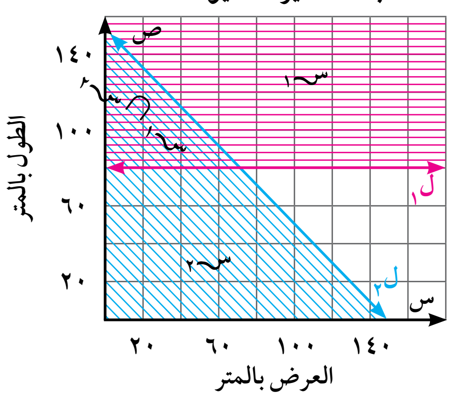
اختبر النقطة (٢٠، ٢٠)

ص ⩾ ٨٠

٢٠ ⩾ ٨٠ (خطأ)

مجموعة الحل $س_١$ هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه النقطة (٢٠، ٢٠) ∪ $ل_١$

أبعاد حظيرة الحيوانات



للمتباينة الثانية:

٢ س + ٢ص ⩽ ٣١٠

استخدم الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات لرسم المستقيم الحدى:

٢ س + ٢ص = ٣١٠

(المستقيم الحدى متصل)

س	٠	١٥٥	١٠
ص	١٥٥	٠	١٤٥

اختبر النقطة (٢٠، ٢٠)

٢ س + ٢ص ⩽ ٣١٠

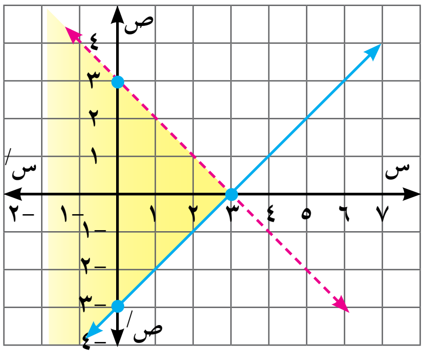
٢(٢٠) + ٢(٢٠) ⩽ ٣١٠

٨٠ ⩽ ٣١٠ (صواب)

مجموعة الحل $س_٢$ هى نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (٢٠، ٢٠) ∪ $ل_٢$

مجموعة الحل س = $س_١ \cap س_٢$ وهى مجموعة النقط فى المنطقة المشتركة والموضحة بالرسم.

تمـاريـن (٢ – ٢)



١ أى نظام مما يأتى له منطقة الحل الموضحة فى الشكل المقابل:

أ س + ص ≤ ٣
ص > س – ٣

ب س + ص > ٣
ص ≥ س – ٣

ج س + ص ≥ ٣
ص < س – ٣

د س + ص < ٣
ص ≤ س – ٣

٢ حل كل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا:

أ س ≤ ٤
ص < س + ٢
س + ٢ ص ≥ –٢

ب ص – س > ٠
٢ س + ٢ ص ≤ ١٢
ص < ٦ + ٢ س

٢ - ٣

البرمجة الخطية والحل الأمثل

Linear programing and Optimization

سوف تتعلم

- إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- استخدام البرمجة الخطية فى حل بعض المسائل.
- ترجمة معلومات خاصة بمشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب مع ترجمة البيانات فى صورة متباينات خطية وتحديد منطقة الحل بيانيًا، مع تحديد دالة الهدف وحلها الأمثل.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- برمجة خطية linear programing
- القيود Constrains
- محدود Bounded
- غير محدود Unbounded
- الحل الأمثل Optimize

الأدوات والوسائل

- ورق رسم بيانى.
- ألوان رصاص.

عمل تعاونى

افترض أنه عرض عليك وظيفة لبعض الوقت، وأنت تفكر ما الوقت الذى يمكنك تخصيصه لهذا العمل. يمكنك استخدام الرياضيات لتساعدك على تنظيم تفكيرك واتخاذ القرار السليم.

اعمل مع زميل لك:

١- أ اكتب قائمة بالطرق التى تقضى بها أوقاتك خلال الأسبوع.

ب نظم قائمتك بحيث لاتزيد عن عشرة طرق.

٢- اعمل تقويمًا شخصيًّا للأسبوع الماضى.

أ حدد وقتًا للطرق التى حددتها فى البند رقم (١).

ب ما الوقت الذى تراه مناسبًا للعمل فى وظيفة بعض الوقت؟

جـ ناقش: ما الذى يمكنك الإقلاع عنه أو عدم الإقلاع عنه فى جدولك؟

تعلم

البرمجة الخطية Linear Programing

يمكنك الإجابة عن أسئلة مثل المطروحة أعلاه باستخدام عملية تسمى البرمجة الخطية Linear programing.

ولحل مسائل البرمجة الخطية فإن أول عمل يجب القيام به هو كتابة البرنامج الخطى للمسألة، ويتكون من:

١- دالة الهدف (وهى ما تهدف إليه المشكلة محل الدراسة لحساب قيمة عظمى أو قيمة صغرى)، وهى دالة خطية تكون على الصورة:

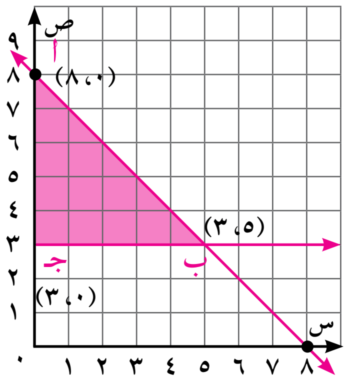
ر = أ س + ب ص حيث أ، ب عددان حقيقيان لايساويان الصفر معًا.

٢- مجموعة القيود التى تفرضها طبيعة المسألة، وهى فى صورة متباينات خطية بمتغيرين تمثل الحدود العليا أو الدنيا للعوامل التى تتحكم بمتغيرات المسألة.

٣- القيود التى يفرضها الواقع العلمى للمسألة على المتغيرات عندما لا يمكن أن تأخذ هذه المتغيرات قيمًا سالبة.

مثال

(١) باستخدام البرمجة الخطية أوجد قيمتي س، ص التي تجعل قيمة الدالة ر = ٣س + ٢ص قيمة عظمى ثم قيمة صغرى تحت القيود: س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٨ ، ص ⩾ ٣



الحل

الخطوة (١): ارسم القيود (مثل المتباينات بيانيًّا)

الخطوة (٢): أوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

من الشكل نلاحظ أن رؤوس منطقة الحل هي:

أ(٠، ٨)، ب (٥، ٣)، جـ (٠، ٣)

الخطوة (٣): أوجد قيمة الدالة ر = ٣ س + ٢ ص عند كل رأس

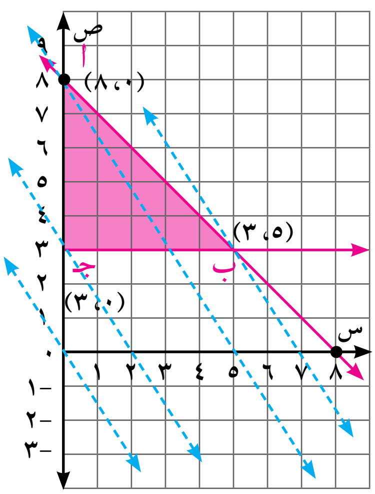
نكون الجدول التالي:

النقطة	س	ص	٣س + ٢ص	قيمة الدالة ر	
أ (٠، ٨)	٠	٨	٣ (٠) + ٢ (٨)	١٦	
ب (٥، ٣)	٥	٣	٣ (٥) + ٢ (٣)	٢١	⟵ قيمة عظمى
جـ (٠، ٣)	٠	٣	٣ (٠) + ٢ (٣)	٦	⟵ قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوى ٢١ وتكون عند النقطة (٥، ٣)، والقيمة الصغرى للدالة تساوى ٦ وتكون عند النقطة (٠، ٣)

فكر: لماذا تتحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف عند أحد رؤوس منطقة الحل؟

لتعرف إجابة هذا التساؤل:



١- نضع ر = ٠ فى دالة الهدف ر = ٣س + ٢ص فنجد أن ٣س + ٢ص = ٠ تمثل مستقيمًا يمر بنقطة الأصل، والنقطة (٢، -٣).

٢- إذا رسمت عدة مستقيمات تقطع منطقة الحل وموازية لهذا المستقيم المار بنقطة الأصل فإن:

أول هذه المستقيمات يمر بالنقطة جـ (٠، ٣)

وتكون معادلته ٣س + ٢ص = ٦ أى ر = ٦

٣- قيمة ر عند جميع النقط التى تنتمى إلى المستقيم الثانى المار بالنقطة أ (٠، ٨) تساوى ١٦، و تستمر ر فى التزايد حتى نصل إلى آخر خط يقطع منطقة حل النظام والمار بالنقطة ب (٥، ٣) ، فنجد أن ر = ٣ × ٥ + ٢ × ٣ = ٢١

لذلك فإن القيمة الصغرى لدالة الهدف = ٦ عند النقطة (٠، ٣) وهى أحد رؤوس منطقة الحل، وكذلك القيمة العظمى لدالة الهدف = ٢١ عند النقطة (٥، ٣) وهى أحد رؤوس منطقة الحل أيضًا.

مما سبق نستنتج أن: القيمة العظمى والقيمة الصغرى إن وجدتا لدالة الهدف، فإنهما تتحققان عند رؤوس المضلع الذى يحيط منطقة الحلول الممكنة للمتباينات التى تشكل مجموعة قيود المسألة أو عند نقط إلتقاء المستقيمات التى تحد منطقة الحلول الممكنة.

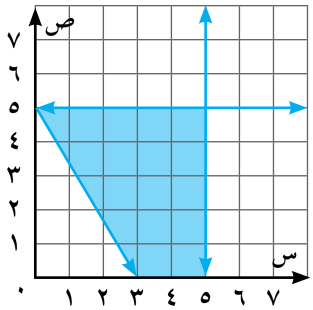
حاول أن تحل

(١) باستخدام البرمجة الخطية أوجد كلًّا من القيمة الصغرى والقيمة الكبرى للدالة ر = س + ص تحت القيود:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص ≥ ٢ س − ٢ ، ص ≤ −س + ٨

(٢) **من الشكل المقابل**: أوجد قيمتى س، ص

التى تجعل قيمة الدالة ر = ٢ س + ٥ ص قيمة صغرى.



تعلم

تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

Real life applications of linear programing

البرمجة الخطية طريقة رياضية تمكنا من الوصول إلى أفضل قرار لحل مشكلة حياتية أو الوصول إلى الحل الأمثل Optimization؛ لتحقيق هدف معين مثل تحقيق أقل تكلفة أو أعلى ربح لمشروع معين، مع الالتزام بشروط وقيود آليات الإنتاج والسوق أو المشكلة محل الدراسة، ويمكن تحقيق ذلك من خلال:

١- تحليل الموقف أو المشكلة لتحديد المتغيرات، والتعرف على القيود ووضعها فى صورة نظام من المتباينات الخطية.

٢- كتابة دالة الهدف المراد تحقيقه فى المشكلة موضع الدراسة (وهى دالة خطية).

٣- تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا.

٤- تحديد رؤوس منطقة الحل.

٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس فى دالة الهدف، ثم نختبر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى تبعًا للمطلوب فى المسألة.

مثال

(٢) **إدارة الأعمال** يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ، ب، ولاتقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة، كما أنه لايستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ)، أو أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب)، فإذا علمت أن ثمن شراء السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات، كم سمكة من كل من النوعين أ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء؟

الحل

١- نفرض أن: عدد الأسماك من النوع (أ) هو س، عدد الأسماك من النوع (ب) هو ص

ويكون س ≥ ٠ (سوف يشترى أسماكًا من النوع أ)

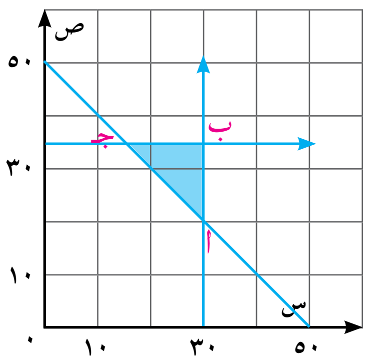
ص ≥ ٠ (سوف يشترى أسماكًا من النوع ب)

س + ص ≥ ٥٠ (هو يحتاج ٥٠ سمكة على الأقل)

س ≤ ٣٠ (لايمكنه استخدام أكثر من ٣٠ سمكة من النوع أ)

ص ≤ ٣٥ (لايمكنه استخدام أكثر من ٣٥ سمكة من النوع ب)

	النوع الأول	النوع الثاني	الحد الأقصى
	س	ص	٥٠
ثمن الشراء	٤	٣	٤س + ٣ص



٢- نكتب **دالة الهدف** وهي: ثمن الشراء أقل ما يمكن: ر = ٤ س + ٣ ص

٣- نمثل نظام المتباينات بيانيًّا كما هو موضح بالشكل المقابل.

٤- نحدد رؤوس منطقة الحل وهي:
أ (٣٠، ٢٠)، ب (٣٠، ٣٥)، جـ (١٥، ٣٥).

٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس فى دالة الهدف لتحديد أقل ثمن ممكن للشراء، كما هو موضح بالجدول التالي:

النقطة	س	ص	٤س + ٣ص	قيمة الدالة ر
أ (٣٠، ٢٠)	٣٠	٢٠	٤ (٣٠) + ٣ (٢٠)	١٨٠
ب (٣٠، ٣٥)	٣٠	٣٥	٤ (٣٠) + ٣ (٣٥)	٢٢٥
جـ (١٥، ٣٥)	١٥	٣٥	٤ (١٥) + ٣ (٣٥)	١٦٥

← أقل قيمة ممكنة لثمن الشراء

يجب على صاحب محل الأسماك شراء ١٥ سمكة من النوع (أ)، ٣٥ سمكة من النوع (ب) ليكون ثمن الشراء أقل ما يمكن.

حاول أن تحل

٣ **الربط بالصناعة:** ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولابًا أسبوعيًّا على الأكثر من نوعين مختلفين أ، ب، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهًا وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه، وكان مايباع من النوع الأول لايقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثاني. أوجد عدد الدواليب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

مثال

٣ **الربط بالصحة** ينتج مصنع لأغذية الأطفال نوعين من الأغذية ذات مواصفات خاصة، فإذا كان النوع الأول يحتوى على وحدتين من فيتامين (أ)، ٣ وحدات من فيتامين (ب) والنوع الثاني يحتوى على ٣ وحدات من فيتامين (أ)، ووحدتين من فيتامين (ب)، و إذا كان الطفل يحتاج فى غذائه على الأقل ١٢٠ وحدة من فيتامين (أ)، ١٠٠ وحدة من فيتامين (ب) وكانت تكلفة النوع (أ) ٥ جنيهات، وتكلفة النوع (ب) ٤ جنيهات، فما الكمية الواجب شراؤها من كل من النوعين لتحقيق ما يحتاجه الطفل فى غذائه بأقل تكلفة ممكنة؟

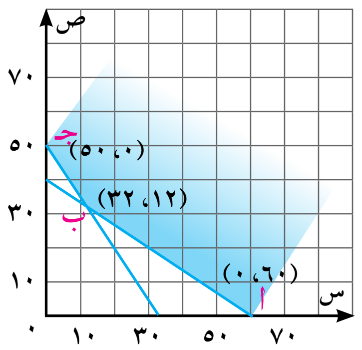
الحل

الصنف	عدد السلع من النوع الأول	عدد السلع من النوع الثاني	الحد الأدنى من الوحدات
فيتامين أ	٢ س	٣ ص	١٢٠
فيتامين ب	٣ س	٢ ص	١٠٠
التكاليف	٥ جنيهات	٤ جنيهات	

١- نفرض أن: عدد السلع من النوع الأول س وعدد السلع من النوع الثانى ص و يكون:
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
٢ س + ٣ ص ≥ ١٢٠
٣ س + ٢ ص ≥ ١٠٠

٢- دالة الهدف هى التكلفة أقل مايمكن: ر = ٥ س + ٤ ص

٣- نمثل نظام المتباينات الخطية كما هو موضح بالشكل المقابل.



٤- رؤوس منطقة الحل هي:

أ (٦٠، ٠)، ب (١٢، ٣٢)، جـ (٠، ٥٠).

٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس فى دالة الهدف لتحديد أقل تكلفة ممكنة:

النقطة	س	ص	٥س + ٤ص	قيمة الدالة ر
أ (٦٠، ٠)	٦٠	٠	٥ (٦٠) + ٤ (٠)	٣٠٠
ب (١٢، ٣٢)	١٢	٣٢	٥ (١٢) + ٤ (٣٢)	١٨٨
جـ (٠، ٥٠)	٠	٥٠	٥ (٠) + ٤ (٥٠)	٢٠٠

← أقل تكلفة ممكنة

تكون التكلفة أقل ما يمكن عند ب، عدد الأغذية من النوع الأول هو ١٢ وعدد الأغذية من النوع الثانى هو ٣٢

تمارين (٢ - ٣)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ النقطة التى تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات: س > ٢ ، ص < ١ ، س + ص ⩽ ٣ هى:

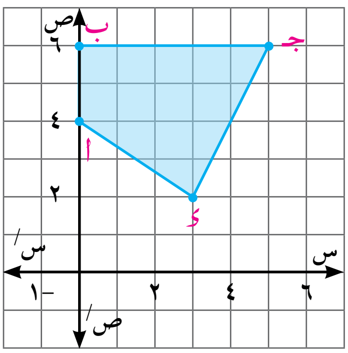
((٣، ١) ، (٢، ١) ، (٣، ٢) ، (١، ٣))

ب النقطة التى تكون عندها للدالة ر = ٤٠س + ٢٠ص قيمة عظمى هى:

((٠، ٠) ، (٠، -٤) ، (١٥، ١٠) ، (٢٥، ٠))

جـ النقطة التى تكون عندها للدالة م = ٣٥س + ١٠ص قيمة صغرى هى:

((٠، ٠) ، (٠، ١٠) ، (٠، ٤٠) ، (٢٠، ١٠))



٢ باستخدام الرسم البياني المقابل، أوجد قيمتي س، ص التى تجعل قيمة دالة الهدف ر = ٣س + ٢ص قيمة صغرى، ثم أوجد هذه القيمة.

٣ مثل كلًّا من الأنظمة التالية بيانيًّا، ثم أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة الهدف تبعًا لما هو معطى.

أ س + ص ⩽ ٥
ص ⩾ ١
س ⩾ ٢
قيمة صغرى لدالة الهدف ر = ٢س + ٣ص

ب ٢س + ص ⩽ ٦
س ⩾ ١
ص ⩾ ٢
قيمة عظمى لدالة الهدف ر = ٢س + ٣ص

٤ الربط بالصناعة: افترض أنك تُصنع وتبيع مرطبًا للجلد، و إذا كان تصنيع عبوة المرطب العادى يستلزم ٢سم^3 من الزيت، ١سم^3 من زبدة الكاكاو، وكان تصنيع عبوة المرطب من النوع الممتاز يستلزم ١سم^3 من الزيت، ٢سم^3 من زبدة الكاكاو، سوف يكون ربحك هو ١٠ جنيهات لكل عبوة من النوع العادى، ٨ جنيهات لكل عبوة من النوع الممتاز. فإذا كان لديك ٢٤ سم^3 من الزيت، ١٨ سم^3 من زبدة الكاكاو، فما عدد العبوات التى يمكنك تصنيعها من كل نوع؛ حتى تحصل على أكبر ربح ممكن، وما هذا الربح؟

٥ الربط بالسياحة: أقامت إحدى شركات السياحة جسرًا جويًّا لنقل السائحين. ذلك لنقل ١٦٠٠ سائح، ٩٠ طنًّا من الأمتعة بأقل تكلفة، وكان المتاح نوعين من الطائرات أ، ب وكان عدد الطائرات المتاحة من النوع أ، ١٢ طائرة، وعدد الطائرات المتاحة من النوع ب ٩ طائرات، وكانت الحمولة كاملة للطائرة من النوع أ ٢٠٠ شخص، ٦ أطنان من الأمتعة، والحمولة الكاملة للطائرة من النوع ب ١٠٠ شخص، ١٥ طنًّا من الأمتعة، وكان إيجار الطائرة من النوع أ هو ٣٢٠٠٠٠ جنيه، ومن النوع ب هو ١٥٠٠٠٠ جنيه، فكم طائرة من كل نوع يمكن للشركة استئجارها؟

تمارين عامة على الوحدة الثانية

(١) مثل بيانيًّا مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

أ ص ≤ ٢س + ١

ب ص ≥ −س − ٤

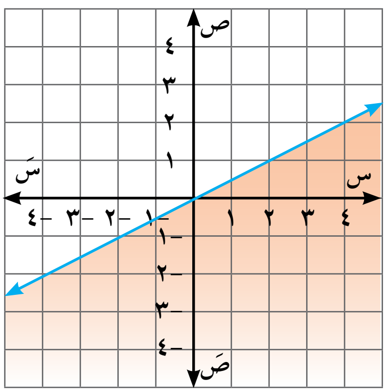
جـ ص > −٢س + ٣

(٢) اختيار من متعدد:

اختر المتباينة التي تمثل المنطقة الملونة حلًّا لها:

أ ص ≥ $\frac{١}{٢}$ س   ب ص > $\frac{١}{٢}$ س

جـ ص ≤ $\frac{١}{٢}$ س   د ص < $\frac{١}{٢}$ س



(٣) حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًّا:

أ ٣ ص > ٤ س ، ٢س −٣ص > −٦

ب س + ص >٦ ، ص > −٥س + ١٢ ، ص > ٥ س + ١٢

(٤) أوجد القيمة العظمى للدالة ر = ٢ س + ص تحت القيود:

س ≥٠ ، ص ≥٠ ، ٢س + ٣ص ≤ ١٨ ، − ٤س + ص ≥ −٨.

(٥) مثل مجموعة حل كل من المتباينات التالية بيانيًّا:

أ س + ص ≥ ٢   ب س + ٣ ص ≤ ٦   جـ $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$ ص ≥ $\frac{٣}{٤}$

د ٤ ص > ٦ س +٢   هـ ٢ س + ٣ ص > ٦   و ٤ س − ٢ ص ≥ ٨

٦ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًّا:

أ ص ⩽ ٢ س − ١
س ⩽ ٢

ب ٣ س + ٢ ص ⩾ ١٢
س − ص ⩾ ٣

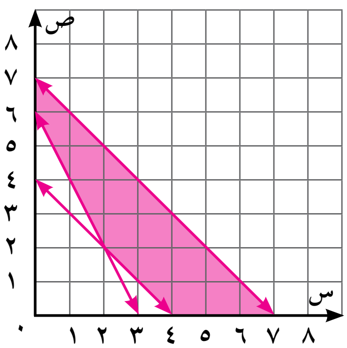
جـ ص > ٤ س − ١
ص ⩾ − س +٤

د س ⩽ ٠
ص⩽ ٠
س + ٢ص > ٤
٤س + ص > ٩

هـ س ⩽ ٠
ص ⩽ ٠
ص − س⩾١
٤س + ٣ص ⩾ ١٢

و س ⩽ ٠
ص⩽ ٠
س + ص < ٨
س + ٢ص < ١١

٧ أوجد من الشكل المقابل قيمتى س، ص التى تجعل قيمة الدالة ر = $\frac{١}{٢}$ س + ص قيمة صغرى.



الوحدة ٣

الهندسة التحليلية

المتجهات

Vectors

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار المتجه، والمتجه الصفرى.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجه فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين.

المصطلحات الأساسية

- كمية قياسية Scalar Quantity
- (كمية متجهة) Vector Quantity
- متجه Vector
- مسافة Distance
- إزاحة Displacement
- متجه موضع Position Vector
- زوج مرتب Orderd Pair
- قيمة مطلقة Absolute value
- معيار متجه Norm
- متجه مكافئ Equivalent Vector
- جمع المتجهات Adding vectors
- قاعدة المثلث The triangle Rule
- قاعدة متوازى الأضلاع Parallelogram Rule
- طرح المتجهات Subtracting Vectors
- قوة محصلة (محصلة القوى) Resultant Force
- سرعة نسبية Relative Velocity

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): الكميات القياسية، والكميات المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة.

الدرس (٣ - ٢): المتجهات .

الدرس (٣ - ٣): العمليات على المتجهات .

الأدوات المستخدمة

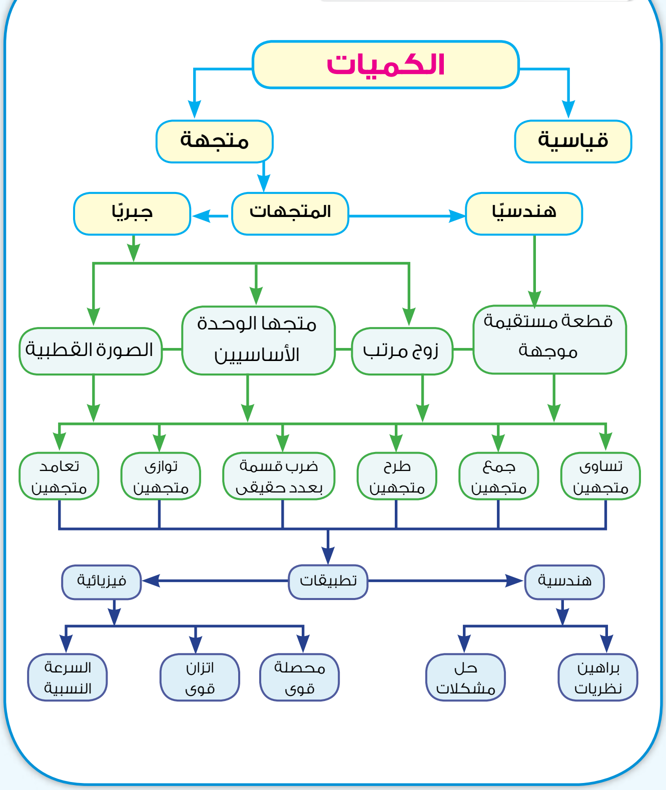
حاسب آلي - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - أدوات هندسية للرسم والقياس - خيوط - أثقال - دبابيس رسم.

نبذه تاريخية

وضع العرب اللبنة الأولى للهندسة التحليلية، فقد استخدموا الجبر فى حل بعض المشكلات الهندسية، كما استخدموا الهندسة فى حل المعادلات الجبرية فقدم ثابت بن قرة (٨٣٥ - ٩٠٠م) حلولًا هندسية لبعض المعادلات كما ربط الكِندى فى مؤلفاته بين الجبر والهندسة.

ومع بداية القرن السابع عشر ساهم كل من فيرمات Fermat (١٦٠١ - ١٦٦٥م)، ورينيه ديكارت Rene Descartes (١٥٩٦ - ١٦٥٠م) فى تبسيط الطرق الجبرية لحل المشكلات الهندسية استنادًا إلى أن الهندسة المستوية لها بعدان، فعبرا عن كل شيء فى أى شكل هندسى بدلالة طولين متغيرين رمزا لهما بالرمزين س، ص بالإضافة إلى بعض الكميات الثابتة التى يتيحها الشكل، مما ألبس الهندسة ثوبًا جديدًا عرف بالهندسة التحليلية (الإحداثية) والتى وظفت لاستنباط النظريات والحقائق وبرهنة صحتها بإسلوب جبرى، كما كانت من العوامل المساعدة على ظهور علمى التفاضل والتكامل بواسطة نيوتن Newton (١٦٤٢ - ١٧٢٧م) وليبنيز Leibinz (١٦٤٦ - ١٧١٦م)، وابتكار جبس Gibbs (١٨٣٩ - ١٩٠٣م) لتحليل المتجهات فى ثلاثة أبعاد.

مخطط تنظيمى للوحدة



٣ - ١

الكميات القياسية والكميات المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة

Scalars, Vectors and Directed Line Segment

سوف تتعلم

- تصنيف وتميز الكميات القياسية والكميات المتجهة.
- مفهوم القطعة المستقيمة الموجهة واتجاهها ومعيارها.
- التعرف على القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة.
- إنشاء قطعة مستقيمة موجهة مكافئة لقطعة مستقيمة موجهة أخرى فى المستوى الإحداثى.
- التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة بدلالة طرفيها فى المستوى الإحداثى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- كمية قياسية Scalar quantity
- متجه (كمية متجهة) Vector quantity
- مسافة Distance
- إزاحة Displacement
- اتجاه Direction

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلى.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

مقدمة

هناك كميات لا يحتاج وصفها إلا إلى معرفة العدد الذى يعبر عن قيمتها مثل الطول والمساحة والحجم والكتلة والكثافة وعدد السكان .... غير أنه توجد كميات أخرى لا يكفى لوصفها مجرد ذكر العدد الذى يدل على قيمتها، فمعرفة سرعة الرياح ليس كافيًا لحركة الطيران بل يجب تحديد اتجاه الرياح أيضًا. فحركة الرياح إذًا تقاس مقدارًا واتجاهًا، والقوة المؤثرة على جسم يختلف تأثيرها عليه ليس بمقدارها فحسب، بل باتجاهها أيضًا. وهكذا نجد أننا أمام نوعين من الكميات.

الكميات القياسية Scalar quantities

هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها فقط مثل الطول والمساحة ...

الكميات المتجهة Vector quantities

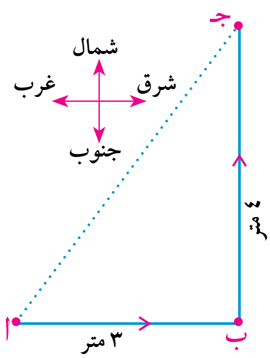
هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها واتجاهها مثل السرعة والقوة ...

فكر و ناقش

إذا تحرك جسم من النقطة أ مسافة ٣ أمتار شرقًا ثم غير اتجاهه وسار ٤ أمتار شمالاً وتوقف عند النقطة جـ.

★ كم المسافة التى قطعها الجسم أثناء حركته؟

★ كم يكون بعد الجسم عن النقطة أ وهى النقطة التى بدأ منها الحركة؟



لاحظ أن

★ **المسافة** Distance هى كمية قياسية وهى ناتج أ ب + ب جـ أو جـ ب + ب أ.

★ **الإزاحة** Displacement وهى المسافة بين نقطتى البداية والنهاية فقط وفى اتجاه واحد من أ إلى جـ، أى أن لوصف الإزاحة يلزم تحديد مقدارها أ جـ واتجاهها من أ إلى جـ

فالإزاحة إذاً كمية متجهة وهى المسافة المقطوعة فى اتجاه معين.

حاول أن تحل

(١) في الشكل المقابل: احسب المسافة والإزاحة الحادثة عندما يتحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة جـ ثم يعود إلى النقطة ب.

الاتجاه Direction

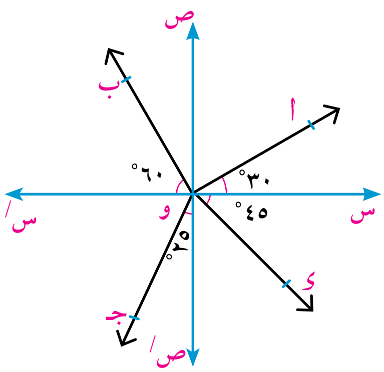
١- كل شعاع فى المستوى يعين اتجاهًا، ففى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{\text{و س}}$ يحدد اتجاه الشرق، و $\overleftarrow{\text{و س}'}$ يحدد اتجاه الغرب،

$\overleftarrow{\text{و ص}}$ يحدد اتجاه الشمال، و $\overleftarrow{\text{و ص}'}$ يحدد اتجاه الجنوب.

ما الاتجاهات التى يحددها كل من:

$\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ى}}$ ؟



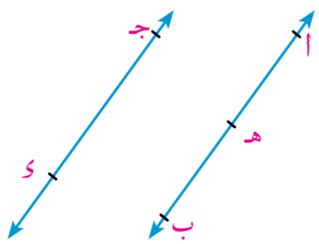
٢- إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ ، هـ $\in \overline{\text{أ ب}}$ فإن:

★ $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ لهما نفس الاتجاه و يحملهما مستقيم واحد.

★ $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ لهما نفس الاتجاه و يحملهما مستقيمان متوازيان.

★ $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ فى اتجاهين متضادين و يحملهما مستقيم واحد.

★ $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ فى اتجاهين متضادين و يحملهما مستقيمان متوازيان.



وبصفة عامة فإن:

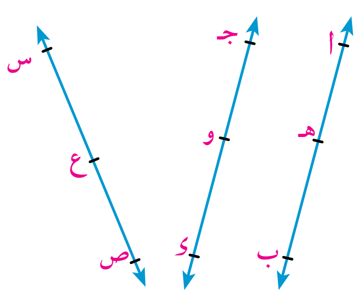
★ الشعاعان المتحدان فى الاتجاه أو المتضادان فى الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان، والعكس صحيح.

★ الشعاعان المختلفان فى الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

حاول أن تحل

(٢) في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ متوازيان وكل منهما لا يوازى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، هـ $\in \overline{\text{أ ب}}$ ، و $\in \overline{\text{جـ ى}}$ ، ع $\in \overline{\text{س ص}}$.

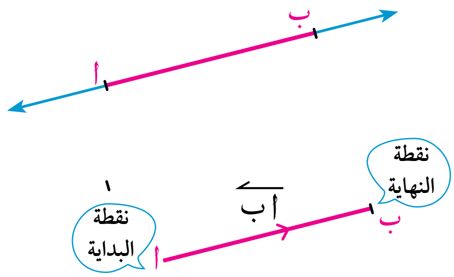
بين ما إذا كان الشعاعان فى كل مما يأتى متحدين فى الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه أو مختلفى الاتجاه.



أ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى و}}$ ب $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ص}}$ جـ $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$

د $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع س}}$ هـ $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع س}}$ و $\overleftarrow{\text{ع س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع ص}}$

القطعة المستقيمة الموجهة The Directed Line Segment



النقطتان أ، ب هما طرفا $\overline{\text{أ ب}}$ أو $\overline{\text{ب أ}}$ إذا حددنا إحدى هاتين النقطتين لتكون نقطة بداية للقطعة، والأخرى لتكون نقطة نهاية لها، فإنه يترتب على ذلك أن يصبح للقطعة المستقيمة اتجاه هو اتجاه الشعاع الذى يحمل هذه القطعة وتكون نقطة بدايته هى نفس نقطة البداية للقطعة.

فإذا حددنا النقطة أ لتكون نقطة بداية $\overline{\text{أ ب}}$ والنقطة ب هى نهايتها، فإننا نصف هذه القطعة بأنها قطعة مستقيمة موجهة من أ إلى ب ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\text{أ ب}}$.

فكر و ناقش

★ هل $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ب أ}}$ ؟ هل $\overrightarrow{\text{أ ب}} \equiv \overrightarrow{\text{ب أ}}$ ؟ فسر إجابتك.

★ هل $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ مختلفان أم متضادان فى الاتجاه ؟ ولماذا؟

> **تعريف ١**
> **القطعة المستقيمة الموجهة: هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية، و نقطة نهاية، و اتجاه.**

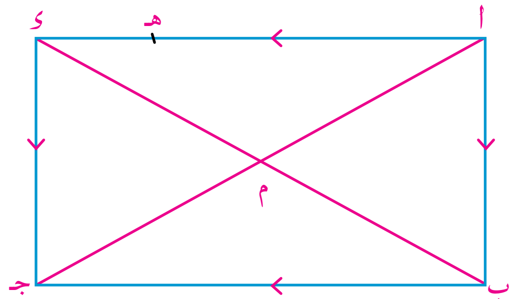
حاول أن تحل

٣ أ، ب، جـ ثلاث نقط فى المستوى. اكتب كل القطع المستقيمة الموجهة التى تعينها هذه النقط.

> **تعريف ٢**
> **معيار القطعة المستقيمة الموجهة: معيار $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ هو طول $\overline{\text{أ ب}}$ ويرمز له بالرمز $\| \overrightarrow{\text{أ ب}} \|$.**

لاحظ أن $\| \overrightarrow{\text{أ ب}} \| = \| \overrightarrow{\text{ب أ}} \| =$ أ ب

> **تعريف ٣**
> **تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين: تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه.**



مثال

(١) **في الشكل المقابل:** أ ب جـ ى مستطيل تقاطع قطراه في م . هـ ∈ $\overline{\text{أى}}$ فيكون:

$\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$ ويساويه ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أى}}$ ويساويه،

م أ = م جـ = م ب = م ى

أ ∵ $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \|\overrightarrow{\text{ى جـ}}\|$ واتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ هو نفس اتجاه $\overrightarrow{\text{ى جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{ى جـ}}$

ب ∵ $\|\overrightarrow{\text{أم}}\| = \|\overrightarrow{\text{م جـ}}\|$ واتجاه $\overrightarrow{\text{أم}}$ هو نفس اتجاه $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أم}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{م جـ}}$

جـ ∵ $\|\overrightarrow{\text{أم}}\| = \|\overrightarrow{\text{م ب}}\|$ واتجاه $\overrightarrow{\text{أم}}$ مختلف عن اتجاه $\overrightarrow{\text{م ب}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أم}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{م ب}}$

د ∵ $\|\overrightarrow{\text{أهـ}}\| \neq \|\overrightarrow{\text{ب جـ}}\|$ واتجاه $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ هو نفس اتجاه $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ ى متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م.

أولًا: اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ:

أ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ب $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ جـ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ د $\overrightarrow{\text{أم}}$ هـ $\overrightarrow{\text{م ى}}$

ثانيًا: بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة:

أ $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ب $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى جـ}}$ جـ $\overrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ى}}$

تفكير منطقي:

١- إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ ماذا تستنتج؟

٢- ما عدد القطع المستقيمة الموجهة التي يمكن رسمها في المستوى وكل منها تكافئ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ؟

٣- من نقطة جـ في المستوى كم قطعة مستقيمة موجهة يمكن رسمها وتكافئ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ؟

لاحظ أنه:

توجد قطعة مستقيمة موجهة وحيدة يمكن رسمها من النقطة جـ ($\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ مثلًا) بحيث تكون $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{أب}}$.

مثال

(٢) **القطع المستقيمة الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد:**

في مستوى إحداثي متعامد عين النقط أ(-٢، ١)، ب(٢، ٣)، جـ(١، -٣)، ى(-١، ٤) ثم ارسم $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى ل}}$ كل منهما تكافئ $\overrightarrow{\text{أب}}$. أوجد إحداثيي كل من هـ، ل.

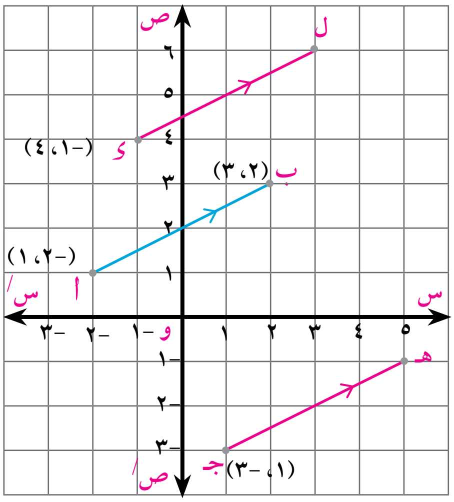
الحل

لرسم $\overleftarrow{جـ هـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$ يجب أن تكون $\overleftarrow{جـ هـ}$، $\overleftarrow{أ ب}$ لهما نفس الاتجاه، ونفس المعيار.

أى أن: $\overleftrightarrow{جـ هـ} // \overleftrightarrow{أ ب}$ ، || $\overleftarrow{جـ هـ}$ || = || $\overleftarrow{أ ب}$ || = طول $\overline{أ ب}$.

★ نرسم $\overleftrightarrow{جـ هـ} // \overleftrightarrow{أ ب}$ (ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ = $\frac{1}{2}$)

★ نحدد طول $\overline{جـ هـ}$ = طول $\overline{أ ب}$ باستخدام الفرجار، أو بحساب عدد المربعات الأفقية والرأسية، فنجد أن هـ (٥، -١). بالمثل نرسم $\overleftarrow{ى ل}$ فنجد أن: ل (٣، ٦)



لاحظ أن: حيث إن الانتقال يحافظ على توازى المستقيمات، وأطوال القطع المستقيمة وباعتبار النقطة جـ صورة النقطة أ بالانتقال (١ - (-٢)، -٣ - ١) = **(٣، -٤)**

∴ لرسم $\overleftarrow{جـ هـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$ نجد أن $\overleftarrow{جـ هـ}$ هى صورة $\overleftarrow{أ ب}$ بالانتقال **(٣، -٤)**

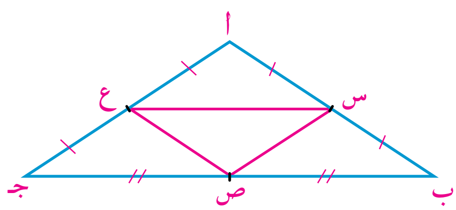
ويكون إحداثى هـ = (٢ + **٣**، ٣ + **(-٤)**) = (٥، -١)

باستخدام الانتقال: عين إحداثيى النقطة ر التى تجعل $\overleftarrow{و ر}$ تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$

تحقق من فهمك

فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ

س، ص، ع منصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{جـ أ}$ على الترتيب



أولاً: أى العبارات التالية صحيحة؟

أ || $\overleftarrow{س ص}$ || = || $\overleftarrow{ع ص}$ ||. ب $\overleftarrow{س ص}$ تكافئ $\overleftarrow{ع ص}$. جـ $\overleftarrow{ب ص}$ تكافئ $\overleftarrow{ع س}$.

ثانيًا: اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ كلًّا من:

أ $\overleftarrow{ب س}$ ب $\overleftarrow{أ ع}$ جـ $\overleftarrow{س ع}$

د $\overleftarrow{جـ ص}$ هـ $\overleftarrow{س ص}$ و $\overleftarrow{ع ص}$

تمـــارين (٣ - ١)

١) أكمل العبارات التالية لتكون صحيحة:

أ) الكمية القياسية يلزم لتعريفها تعريفًا تامًّا معرفة ....

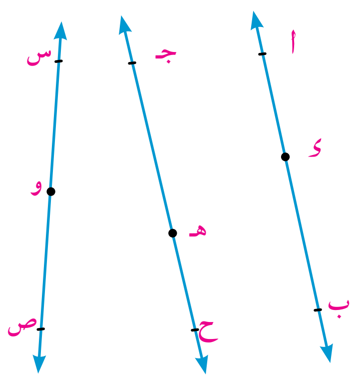
ب) الكمية المتجهة يلزم لتعريفها تعريفًا تامًّا معرفة ....

جـ) القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها .... ، .... ، ....

د) تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما ....

٢) فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازى $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ وكل منهما لايوازى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

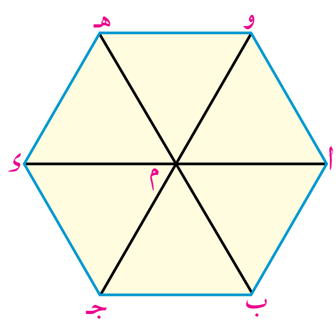
صل كلًّا من العبارات التالية بما يناسبها.



أ) $\overleftarrow{\text{أى}}$ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$	١- متحدا الاتجاه	ب) $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ص}}$
جـ) $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ ح}}$	٢- مختلفا الاتجاه	د) $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$
هـ) $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص و}}$	٣- متضادا الاتجاه	و) $\overleftarrow{\text{جـ ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ص}}$

٣) فى الشكل المقابل أ ب جـ ى هـ و، سداسى منتظم، مركزه النقطة م.

أكمل مايأتى:



أ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ تكافئ .... وتكافئ .... وتكافئ ....

ب) $\overleftarrow{\text{م ى}}$ تكافئ .... وتكافئ .... وتكافئ ....

جـ) $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ تكافئ .... وتكافئ .... وتكافئ ....

٤) أ ب جـ ى مربع تقاطع قطراه فى م. اكتب جميع القطع المستقيمة الموجهة والمتكافئة التى يعينها الشكل.

....

٥) فى مستوى إحداثى متعامد: إذا كانت أ (٤، -٣) ، ب (٤، ٤)، جـ (-٣، -١)، وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{و م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن و}}$ متكافئة، حيث و نقطة الأصل. أوجد إحداثيات كل من ى ، م ، ن.

....

٦ في مستوى إحداثيي متعامد: أ(٢، ٣) ، ب (-٣، ١)، جـ (٥، -١)

أ ارسم $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ ، تكافئ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ وعين إحداثي النقطة ى.

ب عين إحداثي النقطة م منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ثم حدد القطع المستقيمة الموجهة التي تكافئ كلًا من:

أولاً: $\overrightarrow{\text{ب م}}$ **ثانيًا:** $\overrightarrow{\text{أ م}}$ **ثالثًا:** $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ **رابعًا:** $\overrightarrow{\text{ى ب}}$

جـ هل الشكل أ جـ ى ب متوازي أضلاع ؟ فسر إجابتك.

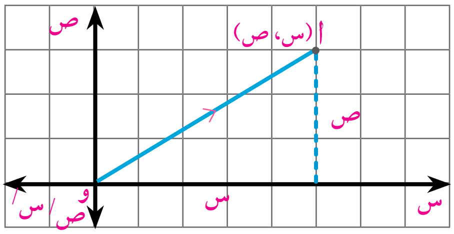
٣ - ٢

المتجهات

Vectors

مقدمة

يمكن تعيين موضع النقطة أ في المستوى الإحداثي المتعامد بمعرفة الزوج المرتب (س، ص) المناظر لها، حيث إن لكل نقطة فى المستوى الإحداثى موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و.



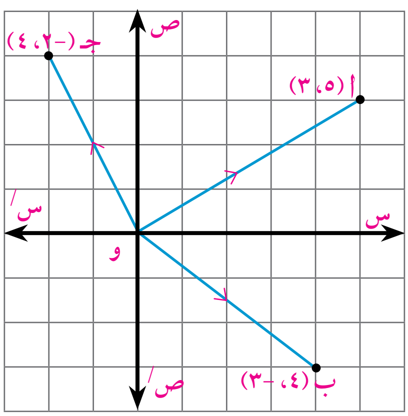
متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل: Position Vector

تعريف ٤

متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة.

مثال

١ فى الشكل المقابل: أ (٥، ٣)، ب(٤، −٣)، جـ (−٢، ٤) فيكون:



* $\overrightarrow{\text{و أ}}$ هو متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و، ويناظر الزوج المرتب (٥، ٣). ويكتب $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٥، ٣).

* $\overrightarrow{\text{و ب}}$ متجه الموضع لنقطة ب بالنسبة لنقطة الأصل، حيث $\overrightarrow{\text{و ب}}$ = (٤، −٣) كما أن $\overrightarrow{\text{و جـ}}$ = (−٢، ٤)

ملاحظة: نظرًا لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية (و) فإنه يمكننا أن نرمز لمتجه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}}$ بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}}$ ولمتجه الموضع $\overrightarrow{\text{و ب}}$ بالرمز $\overleftarrow{\text{ب}}$ وهكذا وبذلك يكون: $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٥، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٤، −٣) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (−٢، ٤).

معيار المتجه: هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه.

فإذا كان: $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (س، ص)

فإن: $\|\overleftarrow{\text{ر}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

سوف تتعلم

- إيجاد متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل فى مستوى إحداثى متعامد.
- وضع متجه فى الصورة القطبية.
- إيجاد معيار متجه والتعرف على المتجه الصفرى.
- مفهوم تكافؤ متجهين.
- جمع متجهين جبريًا.
- ضرب متجه فى عدد حقيقى.
- التعبير عن متجه بدلالة متجهى الوحدة الاساسيين.
- شرط توازى متجهين.
- شرط تعامد متجهين.
- ضرب متجه فى عدد حقيقى والتمثيل الهندسى له.

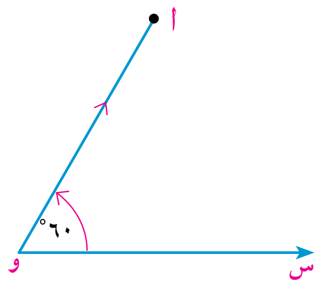
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متجه (كمية متجهة) Vector
- متجه موضع Position Vector
- زوج مرتب Orderd Pair
- قيمة مطلقة Absolute Value
- معيار متجه Norm
- متجهات متكافئة Equivalent Vectors
- جمع المتجهات Addition of vector
- ضرب Multiplication
- صورة قطبية Polar Form
- متجه وحدة Unit Vector
- مقدار Magnitude

حاول أن تحل

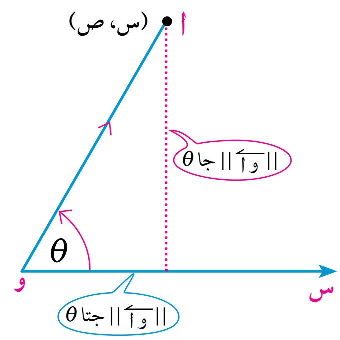
١) فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت أ(٢، -١)، ب(٥، ٠)، جـ(-٢، -٣) فأوجد متجه الموضع لكل منها بالنسبة لنقطة الأصل و، وارسم القطعة المستقيمة الموجهة الممثلة له فى المستوى الإحداثى.

فكر و ناقش



يبين **الشكل المقابل** قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، معيارها ٤سم واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
كيف يمكن إيجاد متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و فى مستوى إحداثى متعامد؟

الصورة القطبية لمتجه الموضع **Polar form of position Vector**



فى الشكل المقابل المتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات كما أن معياره يساوى $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$. فيمكن التعبير عنه كما يلي:

$\overrightarrow{\text{و أ}} = (\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|، \theta)$ وتعرف بالصورة القطبية للمتجه.

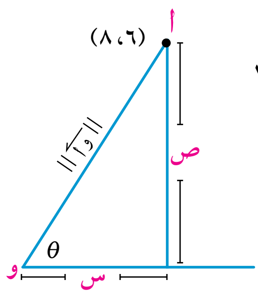
ويكون إحداثيا النقطة أ فى المستوى الإحداثى المتعامد هما:

س = $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ جتا θ ، ص = $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ جا θ ويكون ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

مثال

٢) فى مستوى إحداثى متعامد إذا كانت أ(٦، ٦$\sqrt{٣}$). أوجد الصورة القطبية لمتجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و.

الحل



$\because$ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٦، ٦$\sqrt{٣}$) $\therefore$ $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ = طول $\overline{\text{و أ}}$ = $\sqrt{(٦)^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢}$ = ١٢

، ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٦}$ = $\sqrt{٣}$ $\theta \in$]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

$\therefore$ θ = ظا$^{-١}$ $(\sqrt{٣})$ = ٦٠° $\therefore$ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (١٢، $\frac{\pi}{٣}$)

حاول أن تحل

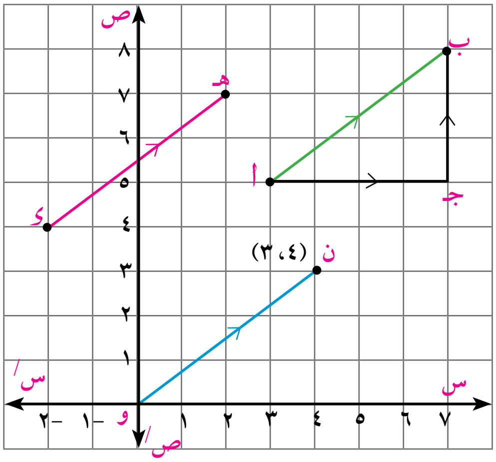
٢) أ) إذا كان $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٨$\sqrt{٣}$، ٨) أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$.

ب) إذا كان $\overrightarrow{\text{و جـ}}$ = (١٢$\sqrt{٢}$، $\frac{٣\pi}{٤}$) متجه موضع لنقطة جـ بالنسبة لنقطة الأصل و، فأوجد احداثيي نقطة جـ

فكر: ما متجه الموضع لنقطة الأصل و(٠، ٠) فى مستوى إحداثى متعامد؟

المتجه الصفرى: يعرف $\overrightarrow{\text{و}}$ = (٠، ٠) بالمتجه الصفرى $\overrightarrow{٠}$

ويكون $\|\overrightarrow{\text{و}}\|$ = $\|\overrightarrow{٠}\|$ = ٠، والمتجه الصفرى غير معين الاتجاه.



المتجهات المتكافئة Equivalent Vectors

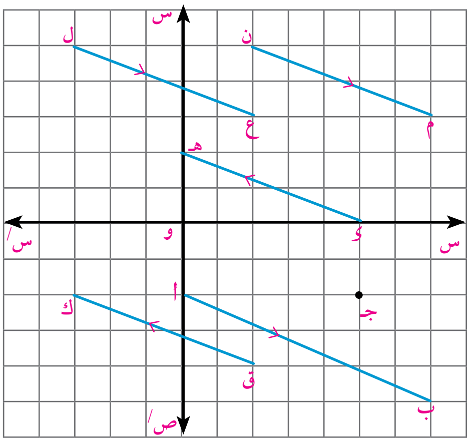
لنفرض أن جسمًا تحرك من ا حتى وصل إلى ب بعد أن قطع ٤ وحدات إلى اليمين، ٣ وحدات إلى أعلى. فإن $\overrightarrow{\text{اب}}$ تمثل متجه إزاحة الجسم من ا إلى ب.

يمكننا تمثيل $\overrightarrow{\text{اب}}$ فى المستوى الإحداثى المتعامد بعدد غير منتهٍ من القطع المستقيمة الموجهة المتوازية والتى يكافئ كل منها $\overrightarrow{\text{اب}}$، ويكون إحداها متجه الموضع $\overrightarrow{\text{ون}}$.

أى إن: $\overrightarrow{\text{اب}} = \overrightarrow{\text{ىهـ}} = \ldots\ldots = \overrightarrow{\text{ون}} = (٤، ٣)$

ويكون: $\|\overrightarrow{\text{اب}}\| = \|\overrightarrow{\text{ىهـ}}\| = \ldots\ldots = \|\overrightarrow{\text{ون}}\| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢}} = ٥$ وحدات طول.

حاول أن تحل



٣ فى الشكل المقابل:

أ) عين متجه الموضع للنقطة جـ بالنسبة إلى نقطة الأصل و، ثم أوجد معياره.

ب) حدد جميع عناصر مجموعة المتجهات التى يكافئ كل منها $\overrightarrow{\text{وجـ}}$.

لعلك لاحظت ارتباط المتجهات بعناصر مجموعة الأزواج المرتبة (س، ص) حيث (س، ص) $\in$ ح^{٢} وعلى ذلك يمكن تعريف المتجهات كما يلى:

تعريف ٥

المتجهات: عناصر المجموعة ح^{٢} مع عمليتى الجمع والضرب المعرّفتين عليها تسمى متجهات.

يرمز للمتجهات بأحد الرموز $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ .... مثل:

$\overrightarrow{\text{م}} = (٢، ٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}} = (-٧، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{و}} = (٠، ٥)$ .... وهكذا

أضف إلى معلوماتك

نرمز لحاصل الضرب الديكارتى ح × ح بالرمز ح^{٢} وتقرأ: ح اثنان

جمع متجهين جبريًا Adding two Vectors Algebraically

لكل $\overrightarrow{\text{ا}} = (\text{س}_{١}، \text{ص}_{١}) \in$ ح^{٢} ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_{٢}، \text{ص}_{٢}) \in$ ح^{٢}

يكون: $\boxed{\overrightarrow{\text{ا}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}، \text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}) \in \text{ح}^{٢}}$

فمثلًا: $(٣، -٢) + (٥، ٧) = (٣ + ٥، -٢ + ٧) = (٨، ٥)$

ولعملية الجمع الخواص التالية:

خاصية الانغلاق	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2 يكون $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \in$ ح^2
خاصية الإبدال	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2 يكون $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$
خاصية التجميع أو الدمج	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ $\in$ ح^2 يكون $\overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$
خاصية وجود العنصر المحايد	لكل $\overrightarrow{أ}$ $\in$ ح^2 يوجد $\overrightarrow{و} = (٠، ٠) \in$ ح^2 حيث: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ}$
خاصية توافر المعكوسات	لكل $\overrightarrow{أ}$ (س، ص) $\in$ ح^2 يوجد $-\overrightarrow{أ}$ = (−س، −ص) $\in$ ح^2 حيث: $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{و} = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ}$
خاصية الحذف	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ $\in$ ح^2 إذا كان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{جـ}$ فإن $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{جـ}$

ضرب متجه فى عدد حقيقى Multiplying a vectore by a real number

لكل $\overrightarrow{أ}$ = (س، ص) $\in$ ح^2 ، ولكل ك $\in$ ح : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (س، ص) = (ك س، ك ص) $\in$ ح^2

فمثلًا: ٣(٢، −٥) = (٦، −١٥) ، $\frac{١}{٢}$(٤، ٩) = (٢، $\frac{٩}{٢}$) ، ٤(٠، ٠) = (٠، ٠) ، −٢(٣، −٤) = (−٦، ٨)

ولعملية الضرب الخواص التالية:

خاصية التوزيع	أولًا: لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2، لكل ك $\in$ ح يكون: ك$(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$ ثانيًا: لكل $\overrightarrow{أ}$ $\in$ ح^2 ، لكل ك$_1$، ك$_2$ $\in$ ح يكون: (ك$_1$ + ك$_2$) $\overrightarrow{أ}$ = ك$_1$ $\overrightarrow{أ}$ + ك$_2$ $\overrightarrow{أ}$
خاصية التجميع أو الدمج	لكل $\overrightarrow{أ}$ $\in$ ح^2 ، لكل ك$_1$، ك$_2$ $\in$ ح يكون: (ك$_1$ ك$_2$) $\overrightarrow{أ}$ = ك$_1$(ك$_2$ $\overrightarrow{أ}$)
خاصية الحذف	لكل $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2 ، لكل ك $\in$ ح* إذا كان ك $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ فإن: $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ والعكس صحيح

لاحظ أن: إذا كان $\overrightarrow{م}$ = (س$_1$ ، ص$_1$) يكافئ $\overrightarrow{ن}$ = (س$_2$، ص$_2$)
فإن: س$_1$ = س$_2$، ص$_1$ = ص$_2$ (خاصية تساوى الأزواج المرتبة).
ونقول عندئذ أن المتجهين $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ متساويان.

مثال

٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٦، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤، ٣)

أ أوجد ٢$\overrightarrow{أ}$ − ٣$\overrightarrow{ب}$

ب عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ = (١١، ٥) بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

أ ٢$\overrightarrow{أ}$ − ٣$\overrightarrow{ب}$ = ٢ (٦، −٢) − ٣(٤، ٣)

= (١٢، −٤) + (−١٢، −٩) = (٠، −١٣)

ب بفرض أن $\overrightarrow{جـ}$ = ك$_1$ $\overrightarrow{أ}$ + ك$_2$ $\overrightarrow{ب}$ حيث ك$_1$، ك$_2$ $\in$ ح

= ك$_1$ (٦، −٢) + ك$_2$(٤، ٣)

= (٦ك$_1$، −٢ ك$_1$) + (٤ ك$_2$، +٣ ك$_2$) = (٦ك$_1$ + ٤ ك$_2$، −٢ك$_1$ + ٣ك$_2$)

ومن خاصية تساوى زوجين مرتبين ينتج أن:

$٦ك_١ + ٤ك_٢ = ١١$ **(١)** ، $-٢ك_١ + ٣ك_٢ = ٥$ **(٢)**

بحل المعادلتين (١)، (٢) نجد أن: $ك_١ = \frac{١}{٢}$ ، $ك_٢ = ٢$ $\therefore \overleftarrow{\text{جـ}} = \frac{١}{٢}\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{ب}}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (٢، -٦)$، $\overleftarrow{\text{ب}} = (-٢، ٥)$، $\overleftarrow{\text{جـ}} = (-٦، ١٤)$

أ أوجد: $٢\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $-\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\frac{١}{٢}\overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{جـ}}$

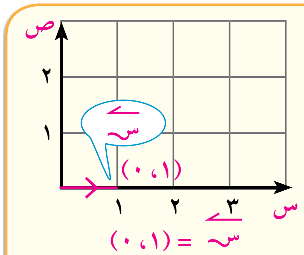
ب عبر عن $\overleftarrow{\text{جـ}}$ بدلالة $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$.

متجة الوحدة: هو متجه معياره الوحدة. **Unit Vector**

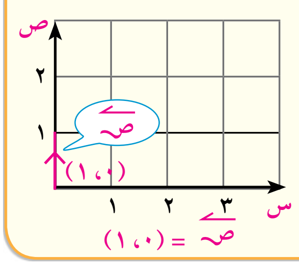
التعبير عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

تعريف ٦

★ متجه الوحدة الأساسى $\overleftarrow{\text{س}}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.



★ متجه الوحدة الأساسى $\overleftarrow{\text{ص}}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.



إذا كان $\overleftarrow{\text{م}} = (\text{س}، \text{ص})$

$\therefore \overleftarrow{\text{م}} = (\text{س}، ٠) + (٠، \text{ص})$ من تعريف الجمع.

$= \text{س}\,(١، ٠) + \text{ص}\,(٠، ١)$ من تعريف الضرب.

$= \text{س}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}\,\overleftarrow{\text{ص}}$

ويكون: $\|\overleftarrow{\text{م}}\| = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$

مثال

٤ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين:

أ $\overleftarrow{\text{م}} = (٢، ٧)$ ب $\overleftarrow{\text{ن}} = (٤، -٣)$ جـ $\overleftarrow{\text{ل}} = (-٥، ٠)$ د $\overleftarrow{\text{ع}} = (٠، -\frac{٣}{٢})$

الحل

أ $\overleftarrow{\text{م}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} + ٧\overleftarrow{\text{ص}}$ ب $\overleftarrow{\text{ن}} = ٤\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}}$

جـ $\overleftarrow{\text{ل}} = -٥\overleftarrow{\text{س}}$ د $\overleftarrow{\text{ع}} = \frac{-٣}{٢}\overleftarrow{\text{ص}}$

حاول أن تحل

٥ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره:

أ $\overleftarrow{\text{م}}$ = (−٣، ٤) ب $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (٥، −١٢) جـ $\overleftarrow{\text{ل}}$ = (−٣، −٦) د $\overleftarrow{\text{ع}}$ = (−٧، ٠)

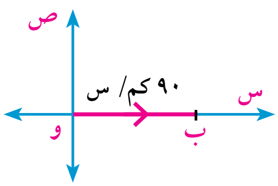
مثال

٥ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من:

أ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ٩٠ كم كل ساعة فى اتجاه الشرق.

ب قوة مقدارها ٥٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق.

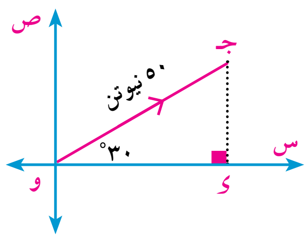
الحل



أ بفرض أن متجه الموضع لسرعة السيارة $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = (س، ص).

∴ س = ٩٠ ، ص = ٠

$\overleftarrow{\text{ب}}$ = ٩٠ $\overleftarrow{\text{س}}$



ب بفرض أن متجه الموضع للقوة المعطاة $\overleftarrow{\text{و جـ}}$ = (س، ص)

∴ س = ٥٠ جتا ٣٠° = ٢٥ $\sqrt{3}$،

، ص = ٥٠ جا ٣٠° = ٢٥

$\overleftarrow{\text{جـ}}$ = ٢٥ $\sqrt{3}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$

حاول أن تحل

٦ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من:

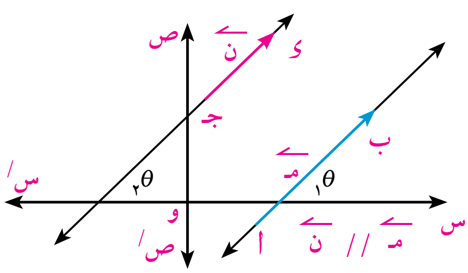
أ ازاحة جسم مسافة ٦٠سم فى اتجاه الجنوب.

ب قوة مقدارها ٣٠ث كجم تؤثر على جسيم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب.

توازى متجهين وتعامدهما Perpendicular and Parallel Vectors

لكل $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ متجهين غير صفريين

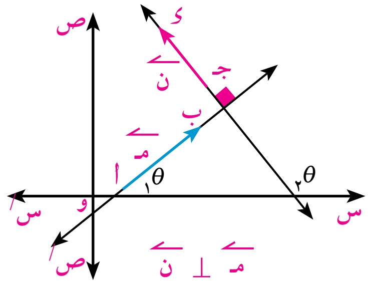
حيث $\overleftarrow{\text{م}}$ = (س$_1$، ص$_1$) ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (س$_2$، ص$_2$)



١- إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ // $\overleftarrow{\text{ن}}$

فإن: ظا θ_1 = ظا θ_2 ، $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2}$

ويكون س$_1$ ص$_2$ − س$_2$ ص$_1$ = صفر والعكس صحيح



٢- إذا كان $\overleftarrow{\text{م}} \perp \overleftarrow{\text{ن}}$

فإن: ظا θ_1 × ظا θ_2 = −١

$$\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} \times \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2} = -1$$

ويكون $\text{س}_1\,\text{س}_2 + \text{ص}_1\,\text{ص}_2 = 0$ والعكس صحيح

لاحظ أن: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٤)، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٦، ٣)، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (٤، ٨)

فإن: $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ لأن: ٢ × −٦ + ٤ × ٣ = −١٢ + ١٢ = صفرًا.

$\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{جـ}}$ لأن: ٢ × ٨ − ٤ × ٤ = ١٦ − ١٦ = صفرًا.

$\overleftarrow{\text{ب}} \perp \overleftarrow{\text{جـ}}$ لأن: −٦ × ٤ + ٣ × ٨ = −٢٤ + ٢٤ = صفرًا.

مثال

٦ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٥)، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ك، −٤) فأوجد قيمة ك عندما:

أ $\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$.   ب $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$.

الحل

أ عندما $\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن شرط التوازى هو: ٢ × −٤ − ٥ × ك = صفرًا

∴ −٨ − ٥ك = صفر   ويكون: ك = $-\frac{8}{5}$

ب $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن شرط التعامد هو: ٢ × ك + ٥ × −٤ = صفرًا

∴ ٢ك − ٢٠ = صفرًا   ويكون: ك = ١٠

حاول أن تحل

٧ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٤، ٦)، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٦، −٩)، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (٣، ٢) أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} \perp \overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}} \perp \overleftarrow{\text{أ}}$

لاحظ أن: إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ = (س، ص)، ك ∈ ح

فإن: ك $\overleftarrow{\text{م}}$ = ك (س، ص) = (ك س، ك ص)

وإذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ متجه غير صفرى، ك ≠ ٠ **فإن:** $\overleftarrow{\text{م}} \,//\,$ ك $\overleftarrow{\text{م}}$

ويكون: ||ك $\overleftarrow{\text{م}}$|| = |ك| · ||$\overleftarrow{\text{م}}$||

حيث اتجاه ك $\overleftarrow{\text{م}}$ هو نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$ لكل ك > ٠

اتجاه ك $\overleftarrow{\text{م}}$ هو عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$ لكل ك < ٠

فمثلًا:

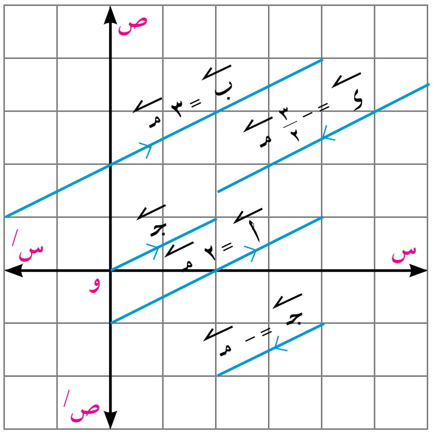
إذا كان $\overleftarrow{\text{م}} = (٢ ، ١)$ **فإن:** $\overleftarrow{\text{أ}} = ٢ \, \overleftarrow{\text{م}} = ٢(٢ ، ١) = (٤ ، ٢)$

$\overleftarrow{\text{ب}} = ٣ \, \overleftarrow{\text{م}} = ٣(٢ ، ١) = (٦ ، ٣)$

$\overleftarrow{\text{جـ}} = - \, \overleftarrow{\text{م}} = -(٢ ، ١) = (-٢ ، -١)$

$\overleftarrow{\text{ى}} = -\frac{٣}{٢} \, \overleftarrow{\text{م}} = -\frac{٣}{٢} (٢ ، ١) = (-٣ ، -\frac{٣}{٢})$

والشكل المقابل يوضح ذلك.

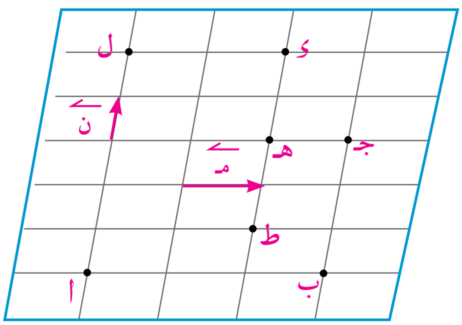


حاول أن تحل

٨ الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة.

أولاً: عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$

أ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$	**ب** $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$	**ج** $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$
د $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$	**هـ** $\overleftarrow{\text{ب أ}}$	**و** $\overleftarrow{\text{ط هـ}}$
ز $\overleftarrow{\text{ى ل}}$	**ح** $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$	**ط** $\overleftarrow{\text{ل أ}}$

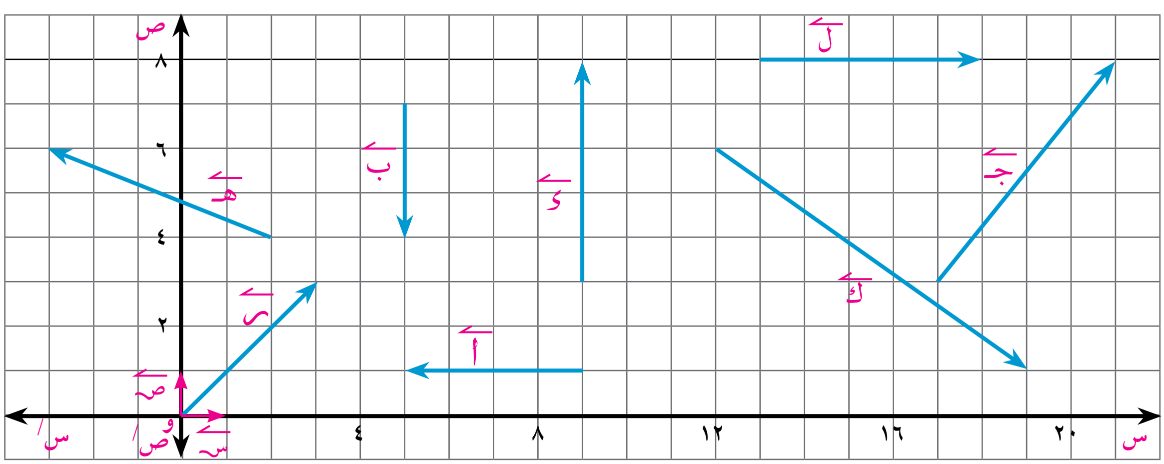


ثانيًا: استنتج أن $\overleftarrow{\text{أ ب}} = - \overleftarrow{\text{ب أ}}$ وفسر ذلك هندسيًّا.

تحقق من فهمك

يبين الشكل التالى تمثيلًا لبعض المتجهات فى المستوى الإحداثى المتعامد.

اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.



تمـــارين (٣ – ٢)

(١) فى مستوى إحداثى متعامد : أ (٣، -٤) ، ب (-١٢، ٥) ، جـ (-٣، -٦)، أوجد متجه الموضع لكل من النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠)، ثم أوجد معيار كل منها.

....

(٢) عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين، ثم أوجد معيار كل منها:

أ $\overleftarrow{م}$ = (-٤، -٣) .... ب $\overleftarrow{ن}$ = (٨، -٦) ....

جـ $\overleftarrow{و}$ = (-٥، -١٢) .... د $\overleftarrow{أ}$ = (٠، ٢$\sqrt{٢}$) ....

هـ $\overleftarrow{ب}$ = (-٣$\sqrt{٣}$، ٠) .... و $\overleftarrow{جـ}$ = ($\sqrt{٢}$، -٣$\sqrt{٢}$) ....

(٣) أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات التالية:

أ $\overleftarrow{م}$ = ٨$\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$

ب $\overleftarrow{ن}$ = -٣$\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{س}$ + ٣$\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{ص}$

(٤) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٣، -٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (-٢، ٥) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (٠، ١١):

أ اكتب كلًّا من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

٢ $\overleftarrow{ب}$ ، ٣ $\overleftarrow{جـ}$ ، $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ − $\overleftarrow{جـ}$ ، $\frac{١}{٢}$ ($\overleftarrow{ب}$ + $\overleftarrow{جـ}$)

....

....

ب عبر عن $\overleftarrow{جـ}$ بدلالة $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

....

(٥) أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن:

أ سرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب.

ب قوة مقدارها ٢٠ ث كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

جـ إزاحة جسم مسافة ٤٠سم فى اتجاه الشمال الغربى.

٦ إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ = (٥، ١)، $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (٤، −٢٠)، $\overleftarrow{\text{ل}}$ = (−١٠، −٢) أثبت أن:

أ $\overleftarrow{\text{م}} \perp \overleftarrow{\text{ن}}$ ب $\overleftarrow{\text{م}} \,//\, \overleftarrow{\text{ل}}$ جـ $\overleftarrow{\text{ن}} \perp \overleftarrow{\text{ل}}$

٧ إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ = −٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٨ $\overleftarrow{\text{ص}}$

$\overleftarrow{\text{ل}}$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٨ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$

أ أثبت أن $\overleftarrow{\text{م}} \,//\, \overleftarrow{\text{ن}}$

....

ب أوجد أ ∈ ح إذا كان $\overleftarrow{\text{م}} \,//\, \overleftarrow{\text{ل}}$

....

جـ أوجد ب ∈ ح إذا كان $\overleftarrow{\text{و}} \perp \overleftarrow{\text{ن}}$

....

د هل $\overleftarrow{\text{و}} \perp \overleftarrow{\text{م}}$؟ فسر إجابتك

....

٨ الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة. عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$

أ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ .... ب $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ ....

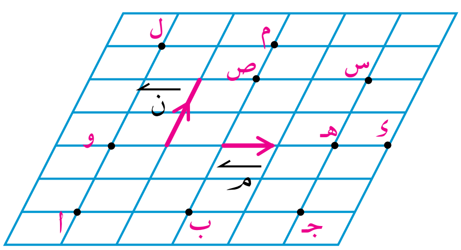
جـ $\overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ .... د $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$ ....

هـ $\overleftarrow{\text{س هـ}}$ .... و $\overleftarrow{\text{س ص}}$ ....

ز $\overleftarrow{\text{ص م}}$ .... ح $\overleftarrow{\text{ل م}}$ ....

ط $\overleftarrow{\text{ب م}}$ .... ى $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ ....

ك $\overleftarrow{\text{و ل}}$ .... ل $\overleftarrow{\text{و ى}}$ ....



٣ - ٣

العمليات على المتجهات

Operations on Vectors

سوف تتعلم

- جمع المتجهات والتمثيل الهندسى لها.
- قاعدة المثلث لجمع متجهين .
- القاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين.
- طرح المتجهات والتمثيل البيانى لها.
- التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة بدلالة متجهى الموضع لطرفيها.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

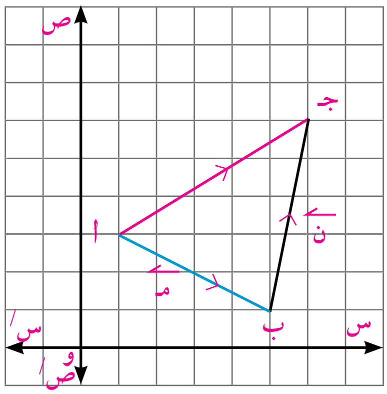
- جمع المتجهات Addition of vectors
- طرح المتجهات Subtraction of vectors
- قاعدة المثلث Triangle Rule
- قاعدة متوازى الأضلاع Parallelogram Rule

الأدوات والوسائل

- أدوات رسم هندسى.
- ورق مربعات للرسم.

أولاً: جمع المتجهات هندسيًا Adding vectors geomitricaly

فكر و ناقش



إذا كانت $\overleftarrow{أ ب}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{ن}$ حيث:

$\overleftarrow{م} = (٤، -٢)$ ، $\overleftarrow{ن} = (١، ٥)$

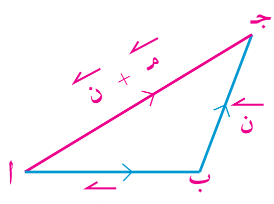
اكتب ما يساويه $\overleftarrow{م} + \overleftarrow{ن}$.

اكتب المتجه الذى تمثله $\overleftarrow{أ جـ}$.

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

قاعدة المثلث لجمع متجهين Triangle Rule of Adding two vectors

إذا كان $\overleftarrow{أ ب}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{ن}$ حيث النقطة ب نقطة النهاية للمتجه $\overleftarrow{م}$ و هى نفسها نقطة البداية للمتجه $\overleftarrow{ن}$.



فإن: المتجه $\overleftarrow{م} + \overleftarrow{ن}$ تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{أ جـ}$

أى إن: $\overleftarrow{م} + \overleftarrow{ن} = \overleftarrow{أ جـ}$ أى $\boxed{\overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{أ جـ}}$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة شال

مثال

(١) تقطع سفينة ٣٠٠ متر شرقًا، ثم ٤٠٠ متر شمالاً للخروج من الميناء.
احسب إزاحة السفينة حتى خروجها من الميناء.

الحل

١- نأخذ مقياس رسم مناسب: باعتبار كل ١ سم تمثل ١٠٠ متر.
∴ ٣سم تمثل ٣٠٠ متر، ٤ سم تمثل ٤٠٠ متر.

٢- ارسم مسار الرحلة بمقياس الرسم مستخدمًا أدواتك الهندسية، فيكون متجه الإزاحة $\overleftarrow{أ جـ} = \overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب جـ}$.

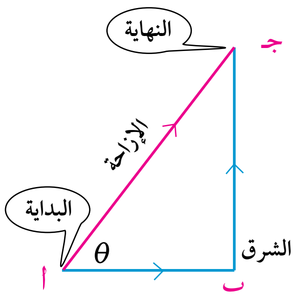
٣- قس طول $\overline{\text{أ جـ}}$ بالمسطرة (أ جـ = ٥سم)

٤- معيار الإزاحة = الطول فى الرسم × مقياس الرسم

= ٥ × ١٠٠ = ٥٠٠ متر.

٥- اتجاه الإزاحة : θ = ظا$^{-1}$ $(\frac{٤}{٣})$ $\simeq$ ٥٣° لأقرب درجة.

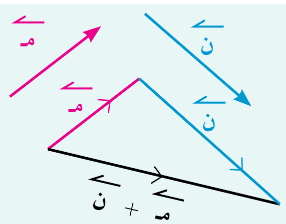
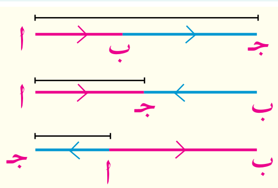
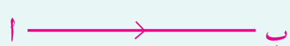
∴ السفينة تبعد عن نقطة إبحارها مسافة ٥٠٠ متر فى اتجاه ٥٣° شمال الشرق.



حاول أن تحل

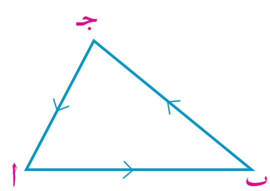
(١) تحركت شاحنة من الموقع أ مسافة ٨٠ كم فى اتجاه الغرب ثم مسافة ١٢٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. إلى أن وصلت إلى الموقع ب. أوجد مقدار واتجاه الإزاحة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$.

ملاحظات هامة:

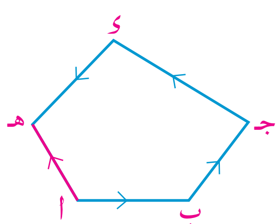
١-	أى متجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ يمكن جمعهما (إيجاد محصلتهما) بإنشاء متجهين متتالين ومكافئين للمتجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ كما فى الشكل المقابل.	
٢-	قاعدة شال لجمع متجهين صحيحة إذا كانت النقط أ، ب، جـ تنتمى إلى مستقيم واحد. ففى الأشكال الثلاثة المقابلة يكون $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$	
٣-	$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ أ}} = \overrightarrow{\text{٠}}$ (العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات) ∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ هو المعكوس الجمعى للمتجه $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ أى إن $\overrightarrow{\text{ب أ}} = - \overrightarrow{\text{أ ب}}$	

فكر: استنتج صحة العبارات التالية:

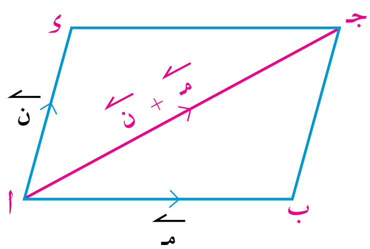
١- فى $\triangle$ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ أ}} = \overrightarrow{\text{٠}}$



٢- فى الشكل أ ب جـ ء هـ : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} + \overrightarrow{\text{ء هـ}} = \overrightarrow{\text{أ هـ}}$



قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين　Parallelorgram Rule of Adding two vectors

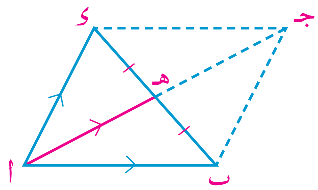


إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$، $\overleftarrow{\text{أد}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$، أي إن للمتجهات $\overleftarrow{\text{م}}$، $\overleftarrow{\text{ن}}$ نفس نقطة البداية، فلإيجاد $\overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}}$ نكمل متوازى الأضلاع أ ب جـ د ونرسم قطره $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ فتكون $\overleftarrow{\text{أد}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$. (لماذا؟)

$\therefore \overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أد}}$

$= \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$ أي أن: $\boxed{\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أد}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}}$

وتعرف هذه القاعدة بقاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين.



١- $\overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}} = \overleftarrow{\text{ن}} + \overleftarrow{\text{م}}$

٢- في $\triangle$ أ ب د إذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{ب د}}$

فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أد}} = ٢\ \overleftarrow{\text{أهـ}}$

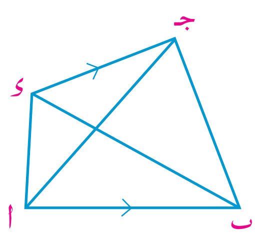
حاول أن تحل في المثلث أ ب جـ، د $\in \overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب د : د جـ = ٣ : ٢

اثبت أن: $٢\ \overleftarrow{\text{أب}} + ٣\ \overleftarrow{\text{أجـ}} = ٥\ \overleftarrow{\text{أد}}$

مثال

٢ في أي شكل رباعي أ ب جـ د أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{د جـ}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{د ب}}$

الحل



في $\triangle$ أ ب جـ: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}}$　(١)

في $\triangle$ د جـ ب: $\overleftarrow{\text{د جـ}} = \overleftarrow{\text{د ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$　(٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{د جـ}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}} + \overleftarrow{\text{د ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$

$= \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{د ب}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$　(خاصية الإبدال).

$= (\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{د ب}}) + (\overleftarrow{\text{جـ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}})$　(خاصية الدمج).

$= \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{د ب}} + \overleftarrow{0}$　(المعكوس الجمعي).

$= \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{د ب}}$　(خاصية المحايد الجمعي).

حاول أن تحل

٢ أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = ٣\ \overleftarrow{\text{أد}}$ أثبت أن:

أ أ ب جـ د شبه منحرف.　**ب** $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = ٤\ \overleftarrow{\text{أد}}$.

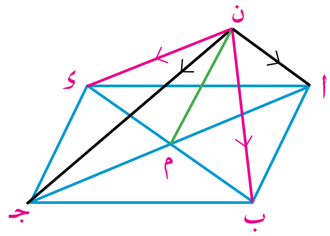
مثال

٣ أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م. ن نقطة فى نفس المستوى. أثبت أن:

أ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + ٢\,\overleftarrow{\text{جـم}} = \overleftarrow{٠}$

ب $\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن جـ}} = \overleftarrow{\text{ن ب}} + \overleftarrow{\text{ن ى}}$

الحل



أ ∵ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$ (١) قاعدة متوازى الأضلاع.

$٢\,\overleftarrow{\text{جـم}} = \overleftarrow{\text{جـأ}}$ (٢) (جـم = م أ).

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + ٢\,\overleftarrow{\text{جـم}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـأ}}$

∵ $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـأ}} = \overleftarrow{٠}$ ∴ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + ٢\,\overleftarrow{\text{جـم}} = \overleftarrow{٠}$

ب ارسم $\overline{\text{ن م}}$

فى △ ن أ جـ: ∵ م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن جـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{ن م}}$ (٣).

فى △ ن ب ى: ∵ م منتصف $\overline{\text{ب ى}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ن ب}} + \overleftarrow{\text{ن ى}} = ٢\,\overleftarrow{\text{ن م}}$ (٤).

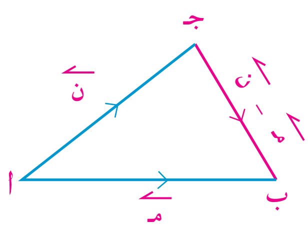
من (٣) ، (٤) ينتج أن: $\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن جـ}} = \overleftarrow{\text{ن ب}} + \overleftarrow{\text{ن ى}}$.

حاول أن تحل

٣ أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى جـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أهـ}}$

ثانيًا: طرح المتجهات هندسيًا — Subtracting Vectors geometricaly

فى △ أ ب جـ بالشكل المقابل:



$\overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + (-\overleftarrow{\text{أجـ}})$ (تعريف الطرح).

$= \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{جـأ}}$ (المعكوس الجمعى).

$= \overleftarrow{\text{جـأ}} + \overleftarrow{\text{أب}}$ (الإبدال).

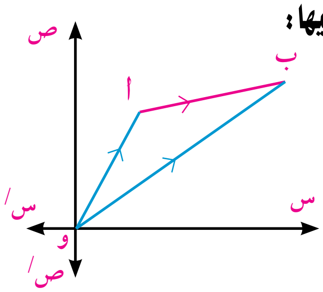
$= \overleftarrow{\text{جـب}}$ (قاعدة المثلث).

أى إن $\boxed{\overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{جـب}}}$

فإذا كانت $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{مـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$

فإن: $\overleftarrow{\text{جـب}}$ تمثل $\overleftarrow{\text{مـ}} - \overleftarrow{\text{ن}}$ كما أن $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ تمثل $\overleftarrow{\text{ن}} - \overleftarrow{\text{مـ}}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها:



إذا كانت أ $(س_١، ص_١)$ ، ب $(س_٢، ص_٢)$.

فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{وب}} - \overleftarrow{\text{وأ}}$ (من قاعدة الطرح).

حيث $\overleftarrow{\text{وب}}$ ، $\overleftarrow{\text{وأ}}$ متجهى موضع للنقطتين ب ، أ على الترتيب.

∴ $\boxed{\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}}$

فمثلاً: إذا كانت أ (٧، −١) ، ب (٢، ٥) فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٥) − (٧، −١) = (−٥، ٦)

مثال

٤ أ ب جـ ى متوازى أضلاع حيث أ (٢، -١) ، ب (٧، ١) ، جـ (٤، ٤) أوجد إحداثيي نقطة ى.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ // $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، أ ى = ب جـ   ∴ $\overrightarrow{\text{أ ى}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

ويكون $\overleftarrow{\text{ى}} - \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$ ∴ $\text{ى} = \overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{جـ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$

أى إن $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (٢، -١) + (٤، ٤) - (٧، ١) = (-١، ٢)   ∴ إحداثيا نقطة ى هما (-١، ٢)

حاول أن تحل

٤ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ(-١، -٢)، ب (٩، ٠)، جـ(٨، ٤)، ى (٠، ٢).

أثبت أن: (أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ى جـ}}$.   (ب) $\overrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overrightarrow{\text{ب جـ}}$.

مثال

٥ إذا كان: ٣ $\overleftarrow{\text{ن}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ أثبت أن $\overleftarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{جـ أ}}$.

الحل

٣ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ (إضافة ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ للطرفين).

٣ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (المعكوس الجمعى للمتجهات).

٣ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (عملية الطرح).

٣ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٣ ($\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$) = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{جـ أ}}$.

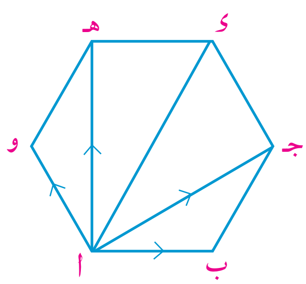
حاول أن تحل

٥ إذا كان: ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ - $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ أثبت أن $\overleftarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{جـ أ}}$.

تحقق من فهمك

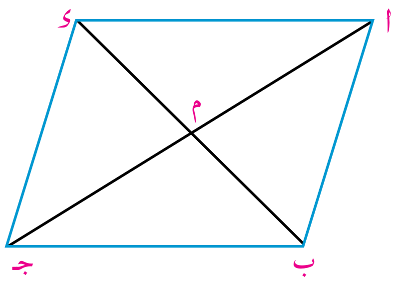
فى الشكل المقابل: أ ب جـ ى سداسى منتظم، أثبت أن:

$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{أ و}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أ ى}}$.



تمـــاريـن (٣ – ٣)

١ في الشكل المقابل: أ ب جـ ى متوازي أضلاع ، م نقطة تقاطع قطراه. أكمل:



أ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ... ب) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ...

جـ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ... د) $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـى}}$ = ...

هـ) $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ + $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ = ... و) $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أى}}$ = ...

ز) $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{أى}}$ = ... ح) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ = ...

ط) $\overleftarrow{\text{أى}}$ + $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ = ... ى) $\overleftarrow{\text{أم}}$ + $\overleftarrow{\text{م جـ}}$ = ...

ك) $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{أى}}$ = ٢ .... ل) $\overleftarrow{\text{أى}}$ + $\overleftarrow{\text{جـى}}$ = ٢ ....

م) $\overleftarrow{\text{م أ}}$ + $\overleftarrow{\text{م ب}}$ = ... ن) $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ = ...

٢ في أي مثلث س ص ع، أثبت أن: $\overleftarrow{\text{س ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ص ع}}$ + $\overleftarrow{\text{ع س}}$ = $\overleftarrow{\text{٠}}$

....

....

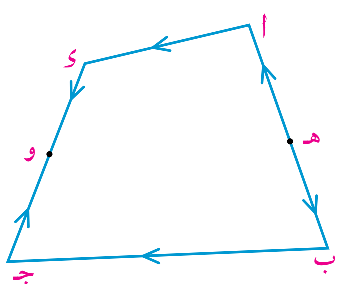
٣ في أي شكل رباعي أ ب جـ ى أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـى}}$ = $\overleftarrow{\text{أى}}$.

....

....

٤ في الشكل المقابل: أ ب جـ ى شكل رباعي هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{جـى}}$.

أثبت أن: $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـو}}$ = $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أى}}$ + $\overleftarrow{\text{ى و}}$



....

....

٥ أ ب جـ ى شكل رباعي إذا كان $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ى ب}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أب}}$

أثبت أن: أ ب جـ ى متوازي أضلاع.

....

....

٦ أ ب جـ مثلث فيه ى منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ أثبت أن : $\overleftarrow{أهـ} + \overleftarrow{جـى} = \overleftarrow{هـب} + \overleftarrow{ىأ}$.

....

....

٧ فى المثلث أ ب جـ : ى ، هـ ، و منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـأ}$ على الترتيب.
أثبت أن: $\overleftarrow{أهـ} + \overleftarrow{بو} = \overleftarrow{ىجـ}$

....

....

٨ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{أى}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\frac{أى}{بجـ} = \frac{٢}{٣}$ أثبت أن: $\overleftarrow{أجـ} + \overleftarrow{بى} = \frac{٥}{٢} \overleftarrow{أى}$

٩ إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٣ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = -\overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص}$
أوجد:

أ $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ ....

ب $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$ ....

جـ $\| \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} \|$ ....

د $٢ \overleftarrow{أ} + ٣ \overleftarrow{ب}$ ....

هـ $\overleftarrow{أ} - ٣ \overleftarrow{ب}$ ....

و $-٣ \overleftarrow{أ}$ ....

١٠ أ ب جـ ى متوازى أضلاع، حيث أ(٣، ٠) ، ب (٠، ٤) ، ى(-٢، -١) أوجد إحداثى النقطة جـ.

....

....

١١ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه أ(-٢، -٣) ، ب (٤، -١) ، جـ (٢، ٥)، ى(-١ ، ك).

أ إذا كان $\overleftarrow{أب}$ // $\overleftarrow{ىجـ}$ أوجد قيمة ك.

....

ب أثبت أن $\overleftarrow{جـب} \perp \overleftarrow{أب}$

....

جـ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ى.

....

تمارين عامة على الوحدة الثالثة

١ في نظام إحداثى متعامد نقطة الأصل فيه و (٠، ٠) عين النقط أ(−٤، ٠) ، ب (٠، −٣)، جـ (٣، ١) ، ء (٢، ٨) ثم أوجد:

أ متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل (و) لكل من النقط أ، ب، جـ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

ب متجه الموضع للنقطة ء بالنسبة لنقطة الأصل (و) بالصورة القطبية.

جـ معيار القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أب}}$.

د قيمة ك التى تجعل $\overleftarrow{\text{أء}}$ = ك $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.

....

....

....

٢ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن:

أ قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم، وتعمل فى اتجاه الشمال.

ب إزاحة جسم مسافة ٥٠سم فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب .

جـ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠ كم/س فى اتجاه الغرب

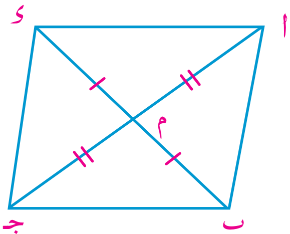
٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٤، −٦) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٦، ٩) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (−٣، −٢)

أ أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} \perp \overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}} \perp \overleftarrow{\text{أ}}$

ب أوجد: ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\frac{1}{2}$ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ب − ٣ $\overleftarrow{\text{جـ}}$

....

٤ فى الشكل المقابل جميع العبارات التالية تعبر عن $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ عدا العبارة:



أ ٢ $\overleftarrow{\text{أم}}$ ب $\overleftarrow{\text{أء}}$ + $\overleftarrow{\text{ءجـ}}$

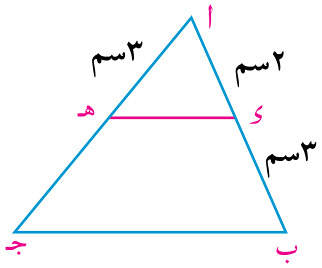
جـ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{بء}}$ د $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

٥ المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ = (١٢$\sqrt{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$) يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة

أ ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ب ١٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ −١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

جـ −٦ س − ١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ د ١٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ +١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

أسئلة ذات إجابات قصيرة:



⑥ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أوجد قيم ك ، ل، م ، ن العددية إذا كان:

أ) $\overrightarrow{\text{ب ى}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ ى}}$

ب) $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = ل $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$

جـ) $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = م $\overrightarrow{\text{هـ ى}}$

د) $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ + $\overrightarrow{\text{ى هـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

⑦ إذا كان أ ب جـ ى متوازى أضلاع حيث أ (٢، −٢) ، ب (٤، −٢) ، جـ (٢، ٣) أوجد إحداثيًّا نقطة ى .

....

⑧ فى مستوى إحداثى متعامد ، $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (−٢، ٣) ، $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ = (−٦، −٤)، ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ = (٦، ١١). أوجد:

أولاً: إحداثيى كل من النقط أ ، ب ، جـ

ثانيًا: مساحة سطح المثلث أ ب جـ (باستخدام المتجهات)

....

....

الوحدة ٤

الهندسة التحليلية

الخط المستقيم

Straight Line

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد إحداثيي نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تنقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم إحداثيات نقطة التقسيم.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة والمعادلات البارامترية، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.

المصطلحات الأساسية

- نقطة تقسيم — point of division
- متجه اتجاه مستقيم — direction vector of Straight line direction
- معادلة متجهة — Vector equation
- معادلة بارامترية — parametric Equation
- معادلة كارتيزية — Cartesian Equation
- معادلة عامة — General Equation
- زاوية بين مستقيمين — Angle between two straight lines
- طول عمود — Length of perpendicular

دروس الوحدة

الدرس (٤ – ١): تقسيم قطعة مستقيمة.

الدرس (٤ – ٢): معادلة الخط المستقيم.

الدرس (٤ – ٣): قياس الزاوية بين مستقيمين.

الدرس (٤ – ٤): طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.

الأدوات المستخدمة

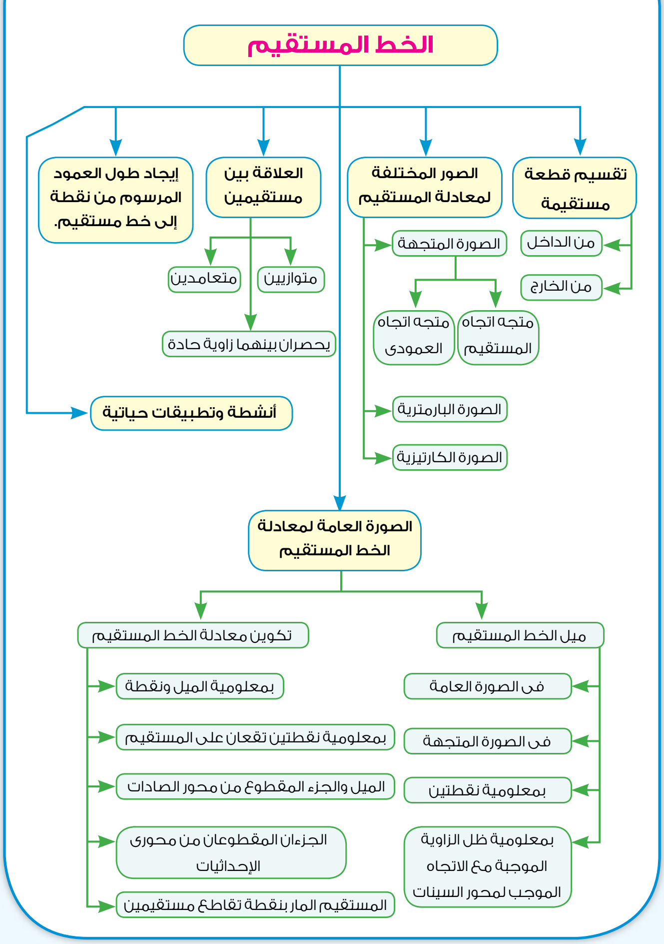
آلة حاسبة علمية – حاسب آلى – برامج رسم بيانى.

نبذه تاريخية

تعد الهندسة التحليلية أحد الفروع الأساسية للرياضيات لما لها من أهمية بالغة عند دراسة معظم العلوم الرياضية والتطبيقات الفيزيائية والعلوم التقنية، ولقد ساعدت على دراسة الفضاء وخواصه الهندسية في العصر الحديث، وترتبط بكل ما هو جديد، حيث إنها تُعتبر الأساس فى تفسير الصور فى علم الكمبيوتر.

وتعتبر الهندسة التحليلية مدخلاً لدراسة الهندسة التفاضلية (هندسة الحركة) والهندسة الجبرية، حيث إن الهندسة التفاضلية تختص بدراسة الأشكال الهندسية وخاصة المنحنيات والسطوح من حيث خواصها الهندسية، وذلك بتطبيق حساب التفاضل والتكامل، وقد ابتكر العلماء النظام الإحداثى المكون من محورين متعامدين ومتقاطعين (محور السينات ومحور الصادات) والذى بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة فى المستوى بعددين حقيقيين (س، ص) وباستخدام النظام الإحداثى امكن اثبات صحة خواص الهندسة الإقليدية معبرًا عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقط عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين (س، ص)، ولقد يسرت الهندسة التحليلية الكثير من المعالجات فى فروع الرياضيات المختلفة، كما كانت من عوامل تطورها والتعامل بينها.

مخطط تنظيمي للوحدة



تقسيم قطعة مستقيمة

Division of a line segment

٤ - ١

سوف تتعلم

- مفهوم التقسيم من الداخل
- مفهوم التقسيم من الخارج
- إيجاد نسبة التقسيم

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- تقسيم من الداخل Internal Division
- تقسيم من الخارج External Division
- نسبة التقسيم Ratio of Division

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

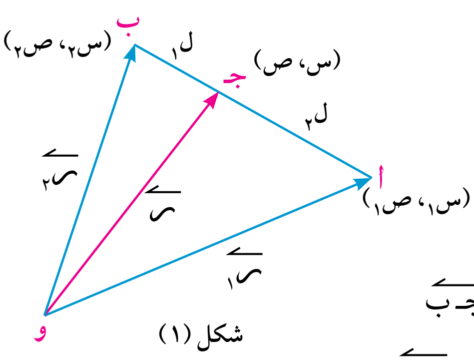
فكر و ناقش

سبق أن درست إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة، فهل يمكنك إيجاد إحداثيي نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم؟

أولاً: إيجاد إحداثيي النقطة التي تقسم قطعة مستقيمة معلومة بنسبة معينة:

Coordinates of the point of division of a line segment

١ - التقسيم من الداخل



شكل (١)

إذا كانت جـ $\in \overline{أب}$ فإن النقطة جـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $ل_٢ : ل_١$

حيث $\frac{ل_٢}{ل_١} > ٠$ فيكون $\frac{أجـ}{جـب} = \frac{ل_٢}{ل_١}$

ويكون للقطعتين الموجهتين $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{جـب}$ نفس الأتجاه، أى أن: $ل_١ \times \overrightarrow{أجـ} = ل_٢ \times \overrightarrow{جـب}$

وإذا فرضنا أن أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)، جـ(س، ص)

فإن $\overrightarrow{ر_١}$ ، $\overrightarrow{ر_٢}$ ، $\overrightarrow{ر}$ هى المتجهات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وجـ}$ على الترتيب، حيث و نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

وباستخدام طرح المتجهات: $ل_١ (\overrightarrow{وجـ} - \overrightarrow{وأ}) = ل_٢ (\overrightarrow{وب} - \overrightarrow{وجـ})$

$$ل_١ (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_١}) = ل_٢ (\overrightarrow{ر_٢} - \overrightarrow{ر})$$

بالتوزيع $ل_١ \overrightarrow{ر} - ل_١ \overrightarrow{ر_١} = ل_٢ \overrightarrow{ر_٢} - ل_٢ \overrightarrow{ر}$

$$ل_١ \overrightarrow{ر} + ل_٢ \overrightarrow{ر} = ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}$$

فيكون $\overrightarrow{ر} (ل_١ + ل_٢) = ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}$

أى أن: $\boxed{\overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}}$ **وتسمى بالصيغة المتجهة**

مثال

① إذا كانت أ (٢، − ١)، ب (− ٣، ٤) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ بالصيغة المتجهة

الحل

بفرض جـ (س، ص)

∵ أ (٢، −١) ∴ $\overleftarrow{\text{ر}_1}$ = (٢، −١) ، ∵ ب (−٣، ٤) ∴ $\overleftarrow{\text{ر}_2}$ = (−٣، ٤)

$\text{ل}_2 : \text{ل}_1 = ٣ : ٢$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ر}} = \frac{\text{ل}_1 \overleftarrow{\text{ر}_1} + \text{ل}_2 \overleftarrow{\text{ر}_2}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ر}} = \frac{٢(٢، −١) + ٣(−٣، ٤)}{٢ + ٣} = \frac{(٤، −٢) + (−٩، ١٢)}{٥} = \frac{(−٥، ١٠)}{٥} = (−١، ٢)$$

∴ إحداثيا النقطة جـ هما (−١، ٢)

الصيغة الإحداثية:

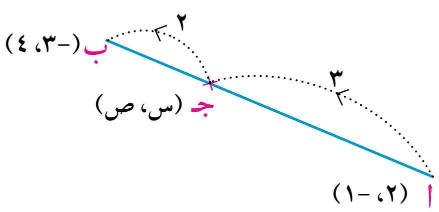
$$(\text{س}، \text{ص}) = \frac{\text{ل}_1(\text{س}_1، \text{ص}_1) + \text{ل}_2(\text{س}_2، \text{ص}_2)}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} = \frac{(\text{ل}_1 \text{س}_1 + \text{ل}_2 \text{س}_2، \text{ل}_1 \text{ص}_1 + \text{ل}_2 \text{ص}_2)}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

ومنها ينتج أن:

$$\boxed{(\text{س}، \text{ص}) = \left(\frac{\text{ل}_1 \text{س}_1 + \text{ل}_2 \text{س}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} ، \frac{\text{ل}_1 \text{ص}_1 + \text{ل}_2 \text{ص}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}\right)}$$

مثال

② حل المثال السابق باستخدام الصيغة الإحداثية.



الحل

$$(\text{س}، \text{ص}) = \left(\frac{٢ \times ٢ + ٣ \times −٣}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times −١ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣}\right) = (−١، ٢)$$

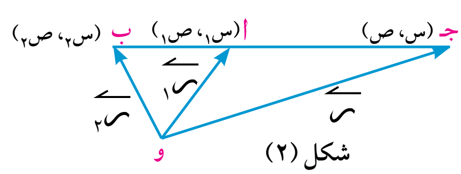
حاول أن تحل

① إذا كانت أ (٤، ٢)، ب (٨، −٦) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

٢- التقسيم من الخارج

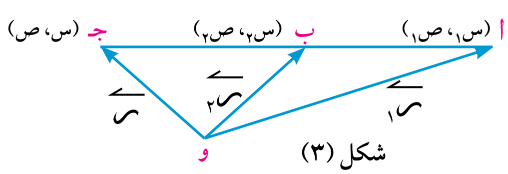
إذا كانت جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ فإن جـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ل٢ : ل١ حيث $\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} < ٠$ وبالتالى تكون إحدى القيمتين ل١ أو ل٢ موجبة والأخرى سالبة، ويكون هناك احتمالان، والأشكال التالية توضح ذلك:

جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$، جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$



شكل (٢)

جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$، جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$

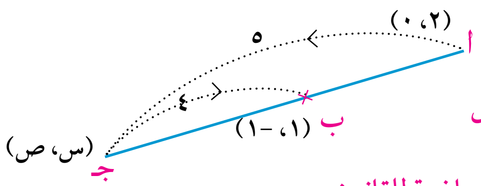


شكل (٣)

مثال

٣ إذا كانت أ (٢، ٠)، ب (١، −١) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التي تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٥ : ٤.

الحل



∵ $\overleftarrow{ر}_١$ = (٢، ٠)، $\overleftarrow{ر}_٢$ = (١، −١)

، ل$_١$: ل$_٢$ = ٥ : −٤ أى سالبة $\frac{\text{ل}_١}{\text{ل}_٢} < ٠$ بالتعويض

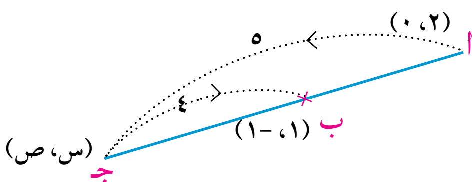
، $\overleftarrow{ر} = \frac{\text{ل}_١ \overleftarrow{ر}_٢ + \text{ل}_٢ \overleftarrow{ر}_١}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$ الصيغة الرياضية للقانون

∴ $\overleftarrow{ر} = \frac{-٤(٢، ٠) + ٥(١، −١)}{-٤ + ٥}$ بالتوزيع

$\overleftarrow{ر}$ = (−٨ + ٥، ٠ − ٥) = (−٣، −٥) بالجمع والتبسيط

∴ إحداثيا نقطة جـ هما (−٣، −٥)

الصيغة الإحداثية:

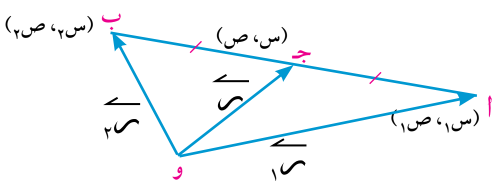


(س، ص) = $\left(\frac{-٤ \times ٢ + ٥ \times ١}{-٤ + ٥}، \frac{-٤ \times ٠ + ٥ \times -١}{-٤ + ٥}\right)$

= (−٣، −٥)

لاحظ أن: إذا كانت جـ منتصف $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ (س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$)

فإن: ل$_١$ = ل$_٢$ = (ل مثلًا) ويكون



$\overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر}_١ + \overleftarrow{ر}_٢}{٢}$ **الصيغة المتجهة**

(س، ص) = $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢}، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$ **الصيغة الإحداثية**

حاول أن تحل

٢ إذا كان جـ (٢، ٤) منتصف $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ (س، ٤)، ب (١، ص) أوجد كلًّا من س، ص

ثانيًا: إيجاد نسبة التقسيم — Finding the ratio of Division

إذا كانت النقطة جـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بنسبة ل$_٢$: ل$_١$ وكان:

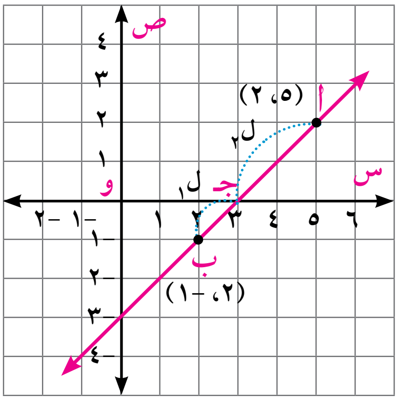
١- نسبة التقسيم $\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} > ٠$ كان التقسيم من الداخل.

٢- نسبة التقسيم $\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} < ٠$ كان التقسيم من الخارج.

مثال

٤ إذا كانت أ (٥، ٢)، ب (٢، −١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بكل من نقط تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مع محورى الإحداثيات، مبينًا نوع التقسيم فى كل حالة، ثم أوجد إحداثيي نقطة التقسيم.

الحل



أولًا: نفرض أن محور السينات يقطع $\overrightarrow{\text{أب}}$ في النقطة جـ (س، ٠)

حيث $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١}$ فيكون: ص $= \frac{\text{ل}_١\text{ص}_١ + \text{ل}_٢\text{ص}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

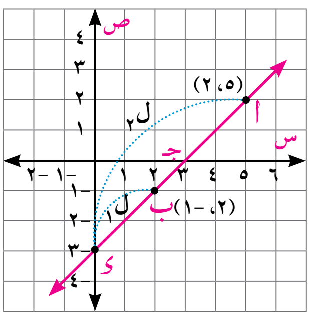
$\therefore ٠ = \frac{\text{ل}_١(٢) + \text{ل}_٢(-١)}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} = \frac{٢\text{ل}_١ - \text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

$\therefore ٢\text{ل}_١ = \text{ل}_٢$ $\qquad \therefore \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٢}{١}$ (نسبة التقسيم)

$\because \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} > ٠$ $\qquad \therefore$ التقسيم من الداخل بنسبة ٢ : ١

$\therefore$ إحداثيا جـ هما $\left(\frac{\text{ل}_١\text{س}_١ + \text{ل}_٢\text{س}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}، ٠\right)$ أي $\left(\frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢}، ٠\right)$

ويكون إحداثيا نقطة جـ هما (٣، ٠)



ثانيًا: المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ء

نفرض أن إحداثيي النقطة ء هما (٠، ص)

حيث $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١}$ فيكون س $= \frac{\text{ل}_١\text{س}_١ + \text{ل}_٢\text{س}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

$\therefore ٠ = \frac{\text{ل}_١ \times ٥ + \text{ل}_٢ \times ٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

$\therefore ٢\text{ل}_٢ = -٥\text{ل}_١$ $\qquad \therefore \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = -\frac{٥}{٢}$ (نسبة التقسيم)

$\because \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} < ٠$ $\qquad \therefore$ التقسيم من الخارج نسبة ٥ : ٢

إحداثيا نقطة ء هما (٠، ص) أي $\left(٠ ، \frac{-٢ \times ٢ + ٥ \times -١}{-٢ + ٥}\right)$

$\therefore$ إحداثيا ء هما (٠، −٣)

فكر: فى المثال السابق استخدم الصورة المتجهة لإيجاد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{أب}}$ بمحورى الإحداثيات، ثم أوجد إحداثيي نقطة التقسيم.

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت أ (−٤، ٣)، ب (٨، ٦)، جـ $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث جـ (س، ٠)، فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{أب}}$ بالنقطة جـ مبينًا نوع التقسيم، ثم أوجد قيمة س.

تحقق من فهمك

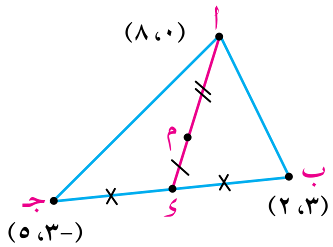
(١) إذا كانت أ (٠، −٣)، ب (٣، ٦) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{بأ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(٢) **الربط بالمسافة:** تتحرك سيارة نقل ركاب فى طريقها من المدينة أ إلى المدينة ب حيث أ(٥، −٦)، ب(−١، ٠) وتوقفت مرتين أثناء سيرها. أوجد إحداثيات النقطتين التى توقفت عندهما السيارة إذا كانت:

أ) توقفت فى منتصف الطريق. ب) توقفت فى ثلثى الطريق من جهة النقطة أ.

تمــارين (٤ – ١)

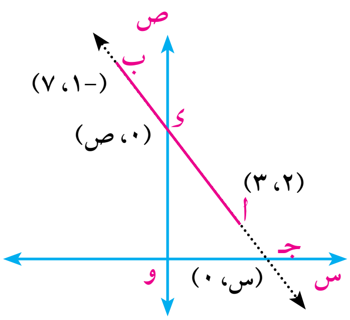
أولاً: أكمل ما يأتى



١) فى الشكل المقابل: $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى △ أ ب جـ ، م نقطة تلاقى المتوسطات، حيث أ (٠، ٨)، ب (٣، ٢)، جـ (-٣، ٥)

أ) إحداثيى نقطة ء هى (............، ....)

ب) إحداثيى نقطة م هى (............، ....)



٢) فى الشكل المقابل: إذا كانت أ (٢، ٣)، ب (-١، ٧)، جـ ، ء نقطتين تقعان على محورى الإحداثيات

أ) جـ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من .... ونسبة التقسيم هى .... : ....

ب) ء تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من .... ونسبة التقسيم هى .... : ....

جـ) إحداثى نقطة جـ هى (............، ....)

د) إحداثى نقطة د هى (............، ....)

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

٣) إذا كانت أ (٨، -٤)، ب (-١، ٢) فأوجد إحداثى النقطتين اللتين تقسمان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية فى الطول ....، ....

٤) إذا كانت أ (٣، ١) ، ب (-٢، ٥) أوجد إحداثيات النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

٥) إذا كانت أ (١، ٣)، ب (-٤، -٢) أوجد إحداثي النقطة جـ إذ كانت جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بحيث ٣ أجـ = ٢جـ ب

٦) إذا كانت أ (٢، ٥) ، ب (٧، -١)، أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

٧) إذا كانت جـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$، جـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ وكانت أ (٣، ١)، ب (٤، ٢) وكان أجـ = ٢ أب. أوجد إحداثى نقطة جـ.

٨) إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة حيث أ (٢، ٥)، ب (٥، ٢)، جـ (٤، ص). أوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ القطعة المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مبينًا نوع التقسيم، ثم أوجد قيمة ص.

٤ - ٢

معادلة الخط المستقيم

Equation of the straight line

سوف تتعلم

- إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة معلومة ومتجة اتجاه له.
- إيجاد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الأجزاء المقطوعة من المحورين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متجه اتجاه مستقيم vector direction of Straight line
- معادلة متجهة Vector equation
- معادلة بارامترية Parametric equation
- معادلة كارتيزية Cartisian equation
- معادلة عامة General equation

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فكر و ناقش

سبق أن درست المعادلة العامة للخط المستقيم وهى:

أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب (كلاهما معًا) $\neq$ ٠ ومثلتها بيانيًّا بخط مستقيم.

بين أى من العلاقات التالية تمثل خطًّا مستقيمًا:

أ) ٣س − ٢ص = ٥ ب) ص = $\sqrt{\text{س}}$ + ١ جـ) ص = ٣

د) س − $\sqrt{٢}$ = ٠ هـ) ص + $\frac{١}{\text{س}}$ = ٢ و) $\frac{\text{س}}{٣} - \frac{\text{ص}}{٢}$ = ١

لاحظ أن المعادلة أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب لايساويان الصفر معا تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

١- إذا كان ب = ٠ ، أ $\neq$ ٠ فإن: أ س + جـ = ٠

أى أن: س = $\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}$ وهى معادلة مستقيم موازى لمحور الصادات

ويمر بالنقطة ($\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}$، ٠)

٢- إذا كان أ = ٠ ، ب $\neq$ ٠ فإن: ب ص + جـ = ٠

أى أن: ص = $\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}$ وهى معادلة مستقيم موازى لمحور السينات

ويمر بالنقطة (٠، $\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}$)

٣- إذا كان جـ = ٠ فإن: أ س + ب ص = ٠

وهى معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل.

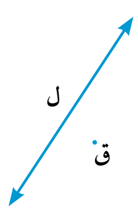
حاول أن تحل

١) أى من المستقيمات الآتية يكون موازيا لمحور الصادات، وأيها يكون موازيًا لمحور السينات، وأيها يمر بنقطة الأصل، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محورى الإحداثيات (إن وجدت).

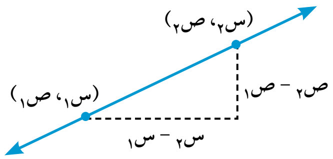
أ) ٢س + ٣ = ٠ ب) س + ٣ص = ٠

جـ) ٢س + ٣ص = ١٢ د) ص − ٥ = ٠

تفكير ناقد: إذا كان ل خطًّا مستقيمًا، ق نقطة فى المستوى، ق $\notin$ ل فكم عدد المستقيمات التى تمر بالنقطة ق وتوازى الخط المستقيم ل؟



ميل الخط المستقيم — Slope of a straight line



سبق أن عرفت أنه يلزم لتعيين الخط المستقيم تعينًا تامًّا شرطان مثل نقطة معلومة ، ميل الخط المستقيم، كما علمت أن ميل الخط المستقيم (م) المار بالنقطتين $(س_{١}، ص_{١})$ ، $(س_{٢}، ص_{٢})$ يساوى $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

ملاحظة (١) إذا كان $ل_{١} // ل_{٢}$ فإن $م_{١} = م_{٢}$

أى أنه إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

(٢) إذا كان $ل_{١} \perp ل_{٢}$ فإن $م_{١} \times م_{٢} = -١$

أى أنه حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = −١ وعكس ذلك صحيح.

حاول أن تحل

٢ أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية، وبين أيًّا من هذه المستقيمات متوازيًا وأيها متعامد:

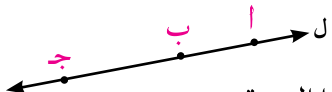
أ (٣، ١) ، (−٢، ٥) ب (٤، ٠) ، (٢، −١)

جـ (٧، −١) ، (٣، −٣) د (−٥، −٢) ، (−١، ٣)

تعلم: متجه اتجاه المستقيم — Direction vector of a straight line

تعريف كل متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم يسمى متجه اتجاه للخط المستقيم ل

فإذا كانت النقاط أ، ب، جـ ∈ ل فإن $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ متجهات اتجاه للخط المستقيم.



فمثلًا: إذا كان $\overrightarrow{ى}$ = (٢، ١) متجه اتجاه للمستقيم

فإن كلًّا من المتجهات (٤، ٢)، (−٢، −١)، (١، $\frac{١}{٢}$)،.... متجه اتجاه لهذا المستقيم.

وبوجه عام إذا كان $\overrightarrow{ى}$ = (أ، ب) متجه اتجاه للمستقيم

فإن ك $\overrightarrow{ى}$ حيث ك ∈ ح − {٠} متجه اتجاه لنفس المستقيم. لماذا؟

حاول أن تحل

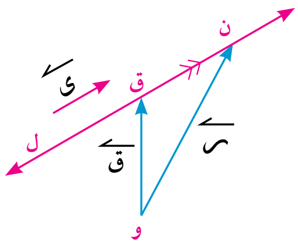
٣ إذا كان $\overrightarrow{ى}$ = (٢، −٣) متجه اتجاه لمستقيم فأى مما يأتى يكون متجه اتجاه لنفس المستقيم؟

أ (−٢، ٣). ب (−٢، −٣).

جـ (٢، ٣). د (٦، −٩).

معادلة المستقيم بمعلومية نقطة عليه ومتجه الاتجاه له

أولاً: الصيغة المتجهة Vector form



لتعيين معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ق، والمتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه له،

نفرض نقطة ن تقع على الخط المستقيم ل.

وأن $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ هما المتجهان الممثلان بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين

$\overleftarrow{\text{و ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ق}}$ على الترتيب، حيث و أي نقطة في المستوى.

إذن، يوجد عدد ك ∈ ح - {٠} بحيث أن $\overleftarrow{\text{ق ن}} = \overleftarrow{\text{ر}} - \overleftarrow{\text{ق}} = $ ك $\overleftarrow{\text{ى}}$

وبالتالي فإن: $\boxed{\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ق}} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ى}}}$

تسمى هذه الصورة بالمعادلة المتجهة للخط المستقيم ل المار بالنقطة ق، والمتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه له.

مثال

١ اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٢، -٣) ومتجه الاتجاه له (١، ٢).

الحل

بفرض أن المستقيم يمر بالنقطة ق (٢، -٣) ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (١، ٢)

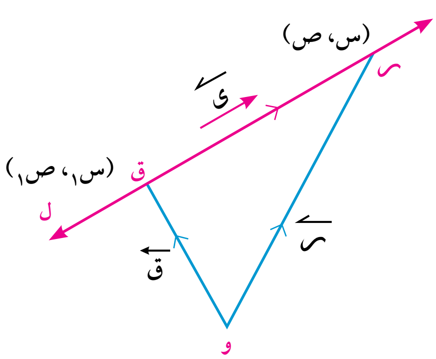
∵ $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ق}} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ى}}$ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم.

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم هي $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢، -٣) + ك(١، ٢).

حاول أن تحل

٤ اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بالنقطة (-٤، ٣) ومتجه الاتجاه له (٢، ٥).

ثانيًا: المعادلات الوسيطية (البارامترية) The parametric equations



المعادلة المتجهة هي $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ق}} + \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

إذا كانت ق (س١، ص١) ، ر (س، ص) بالنسبة لنظام إحداثي متعامد،

و نقطة الأصل، وكان $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ، ب)

فإن معادلة المستقيم هي (س ، ص) = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)

ومنها ينتج أن: $\boxed{\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك أ} \quad ، \quad \text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك ب}}$

وهما المعادلتان الوسيطيتان للخط المستقيم المار بالنقطة (س١، ص١)

والمتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ، ب) متجه اتجاه له. حيث ك ∈ ح - {٠}.

مثال

٢ اكتب المعادلتين الوسيطيتين (البارامتريتين) للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٤، -٣) ومتجه اتجاه له (٢، ٣).

الحل

بفرض أن ق (٤، -٣) ∈ للمستقيم ل ، $\overleftarrow{ى}$ = (٢، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم ل هى (س، ص) = (٤، -٣) + ك(٢، ٣) الصورة المتجهة

وتكون المعادلتان س = ٤ + ٢ ك ، ص = -٣ + ٣ ك المعادلتان البارامتريتان

حاول أن تحل

٥ اكتب المعادلتين البارامتريتين للمسقيم الذى يمر بالنقطة (٠، ٥) ومتجه الاتجاه له هو (-١، ٤).

ثالثًا: المعادلة الكارتيزية Cartesian Equation

بحذف ك من المعادلتين البارامتريتين: س = $س_١$ + ك أ ، ص = $ص_١$ + ك ب

نحصل على المعادلة: $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب}$ أى أن: $\frac{ب}{أ} = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

وبوضع $\frac{ب}{أ}$ = م (حيث م هو ميل المستقيم) فإن المعادلة تصبح على الصورة: م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

مثال

٣ أوجد المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣،-٤) ومتجه الاتجاه له (٢، -١)

الحل

م = $\frac{-١}{٢}$ ميل المستقيم م = $\frac{ب}{أ}$

م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تنتمى إليه.

$\frac{-١}{٢} = \frac{ص - (-٤)}{س - ٣}$ بالتعويض عن م = $\frac{-١}{٢}$، $س_١$ = ٣، $ص_١$ = - ٤

٢ص + ٨ = - س + ٣ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

س + ٢ ص + ٥ = ٠ الصورة العامة.

حاول أن تحل

٦ أوجد المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، -٤) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

تفكير ناقد: أوجد المعادلات المتجهة والمعادلات الكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة ($س_١$، $ص_١$) ومتجه الاتجاه له $\overleftarrow{ى}$ = (أ، ب) فى الحالات الآتية:

أولًا: إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات.

ثانيًا: إذا كان المستقيم يوازى محور السينات.

ثالثًا: إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل.

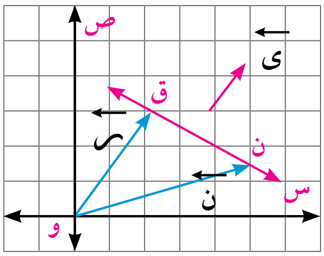
أضف إلى معلوماتك

متجه اتجاه المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة ($س_١$، $ص_١$) هو

$\overleftarrow{ى}$ = ($س_١$، $ص_١$)

وميله هو $\frac{ص_١}{س_١}$

تعلم متجه اتجاه العمودى للمستقيم
The perependicular direction vector of a straight line



إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (أ، ب) متجه اتجاه مستقيم فإن أيًّا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب، -أ) حيث ك ∈ ح - {٠} يكون متجه اتجاه العمودى على المتجه $\overleftarrow{ى}$.

وبالعكس إذا كان $\overleftarrow{ن}$ = (أ، ب) عموديًّا على خط مستقيم فإن أيًّا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب، -أ) حيث ك ∈ ح - {٠} يكون متجه اتجاه المستقيم.

فمثلًا: إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (٣، ٢) متجه اتجاه للمستقيم فإن متجه اتجاه العمودى له هو (-٢، ٣)، (٢، -٣)، (-٤، ٦)، ...

حاول أن تحل

٧ إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = ($\frac{١}{٢}$، ١) متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودية على المستقيم عدا المتجه:

أ (١، -$\frac{١}{٢}$) ب (٢، -١) ج (-١، -$\frac{١}{٢}$) د (٤، -٢)

مثال

٤ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطة ق (- ٣، ٥) والمتجه (- ١، ٢) عمودى عليه فأوجد:

أ المعادلة المتجهة للمستقيم. ب المعادلة الكارتيزية للمستقيم.

الحل

أ ∵ المستقيم المار بالنقطة ق (-٣، ٥) عمودى على المتجه (-١، ٢).

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\overleftarrow{ى}$ = (٢، ١)

∵ المعادلة المتجهة للمستقيم هى: $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ر}$ = (-٣، ٥) + ك(٢، ١)

ب ∵ معادلة المستقيم الذى ميله م ويمر بالنقطة (س١، ص١) هى: م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

∴ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{ص - ٥}{س + ٣}$ بالتعويض عن م = $\frac{١}{٢}$ وإحداثى النقطة (-٣، ٥).

∴ س + ٣ = ٢ ص - ١٠

وتكون س - ٢ ص + ١٣ = ٠ هى المعادلة الكارتيزية للمستقيم.

فكر: أوجد المعادلة الكارتيزية لنفس المستقيم، وذلك بحذف ك من المعادلتين البارامتريتين.

حاول أن تحل

٨ إذا كان المستقيم المار بالنقطة و (٢، - ٣) عموديًا على المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (- ١، ٢) فأوجد:

أ المعادلة المتجهة للمستقيم. ب المعادلتين البارامتريتين للمستقيم.

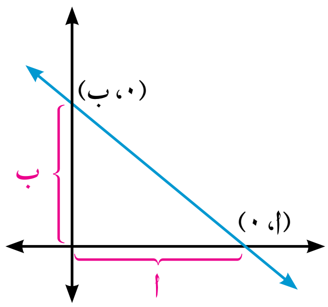
ج المعادلة الكارتيزية للمستقيم.

تعلم معادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

The Equation of the straight line in terms of the two intercept parts from the two axes

نعلم أن معادلة المستقيم الذى ميله (م) ويقطع جزءا من محور الصادات طوله ب هى: ص = م س + ب

من الشكل المقابل



نجد أن ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ،٠)، (٠،ب) هو: م = $\frac{-ب}{أ}$ (لماذا؟)

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م — معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة

$\frac{ص - ٠}{س - أ}$ = − $\frac{ب}{أ}$ — بالتعويض عن إحداثى نقاط التقاطع

أ ص = − ب س + أ ب — حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

ب س + أ ص = أ ب — بقسمة الطرفين على أ ب

$$\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١}$$

مثال

٥ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم: ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

الحل

بوضع المعادلة على الصورة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٣} = ١$ (لماذا؟)

∴ طولا الجزأين المقطوعين من المحورين السينى والصادى هما ٤، ٣ على الترتيب

حاول أن تحل

٩ أوجد طولى الجزأين المقطوعين من المحورين بالمستقيم: ٥ س − ٣ ص = ١٥

تحقق من فهمك

أوجد المعادلة العامة للمستقيم فى الحالات الآتية:

أ يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين (٣، ٠)، (٠، −٤).

ب يمر بالنقطة (٣، ١) ويوازى المستقيم ٢ س − ٣ ص + ٧ = ٠

ج يمر بالنقطة (٠، −١) ومتجه الاتجاه له (٢، −٣)

تمــارين (٤ - ٢)

أولًا: أكمل ما يأتى:

(١) إذا توازى المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٠) ، (٠، ٢) والمستقيم ص = أ س - ٣ فإن أ تساوى

(٢) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازى محور السينات هى

(٣) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (-٢، ٧) ويوازى محور الصادات هى

(٤) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (١، ٢) هى

(٥) معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٥ وحدات هى

(٦) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى

(٧) مساحة سطح المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم٢س + ٣ ص = ٦ تساوى

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(٨) إذا كانت أ (٣، -٢)، ب (٥، ٦)، جـ (١، -٢) فأوجد ميل كل من المستقيمات الآتية:

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ .... ، .... ،

(٩) إذا كانت معادلتا المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ هما على الترتيب ٢ س - ٣ ص + أ = ٠ ، ٣ س + ب ص - ٦ = ٠ فأوجد:

أ) ميل المستقيم ل$_1$

ب) قيمة ب التى تجعل ل$_1$، ل$_2$ متوازيين

جـ) قيمة ب التى تجعل ل$_1$، ل$_2$ متعامدين

د) إذا كانت النقطة (١، ٣) تمر بالمستقيم ل$_1$ فأوجد قيمة أ.

(١٠) إذا كان المستقيم أس - ٤ ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥ فأوجد قيمة أ.

(١١) أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (٢، -١).

(١٢) أوجد المعادلتين البارامتريتين للمستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويمر بالنقطة (٣، -٥).

(١٣) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢، -٣)، (٥، ١)

(١٤) أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥، ٠)، (٠، -٧)

(١٥) إذا كانت أ (٠، ٢)، ب (٢، ١)، جـ (-٢، ٣) ثلاث نقط فى المستوى، فأوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ثم أثبت أن النقط أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة.

(١٦) إذا كانت أ (٥، -٦)، ب (٣، ٧)، جـ (١، -٣)، فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة أ و ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

(١٧) أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) و يوازى المستقيم س + ٢ ص - ٧ = ٠

(١٨) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥، ٧) وعمودى على المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

(١٩) الربط بالهندسة: $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة مركزها م فإذا كان ب (- ٧ ، ١١) ، م (- ٢ ، ٣) فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ.

(٢٠) الربط بالهندسة: إذا قطع المستقيم ٣ س + ٤ ص - ١٢ = ٠ محورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ، ب على الترتيب فأوجد:

(أ) مساحة سطح △ و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(ب) معادلة المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ ويمر بنقطة منتصفها.

٤ - ٣

قياس الزاوية بين مستقيمين

Measure of the angle between two straight lines

سوف تتعلم

- ايجاد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- زاوية بين مستقيمين
Anagle between two straight lines

الأدوات والوسائل

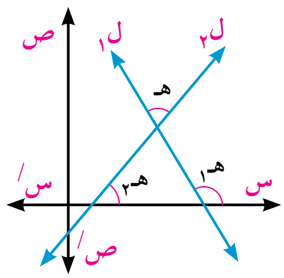
- آلة حاسبة علمية
Scientific calculator

تعلم

قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

Measure of the acute angle between two straight lines

إذا كانت هـ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ اللذين ميلاهما $م_١$، $م_٢$ فإن:



$$\text{ظا هـ} = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| \quad \text{حيث } م_١ م_٢ \neq -١$$

مثال

١) أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية

٣ س − ٤ ص − ١١ = ٠ ، س + ٧ ص + ٥ = ٠

الحل

أ) نوجد ميل كل من المستقيمين:

$(م_١) = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$ ميل المستقيم الأول

$(م_٢) = \frac{-١}{٧}$ ميل المستقيم الثاني

$\text{ظاهـ} = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$ صيغة القانون

$\text{ظاهـ} = \left|\frac{\frac{٣}{٤} - (-\frac{١}{٧})}{١ + \frac{٣}{٤}(-\frac{١}{٧})}\right|$ بالتعويض عن قيمتى $م_١$، $م_٢$

$= \left|\frac{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧}}{١ - \frac{٣}{٢٨}}\right| = \left|\frac{\frac{٢١ + ٤}{٢٨}}{\frac{٢٨ - ٣}{٢٨}}\right| = ١$

هـ = ٤٥°

> **تذكر**
> ميل الخط المستقيم
> أس + ب ص + جـ = ٠
> يساوى $\frac{-أ}{ب}$

تعبير شفهى: اذكر العلاقة بين المستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ فى الحالات الآتية:

أ) إذا كان ظل الزاوية بينهما يساوى صفرًا.

ب) إذا كان ظل الزاوية بينهما غير معرف.

جـ) إذا كان ميل الأول $م_١$ وميل الثانى $م_٢$ فاذكر العلاقة بين $م_١$، $م_٢$ فى أ، ب.

حاول أن تحل

(١) أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية:

أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠، -٢) + ك(٣، -١) ، $\overleftarrow{ر}$ = (٠، ٥) + ك(١، ٢).

ب) س + ٢ص + ٣ = ٠ ، س - ٣ص + ١ = ٠ ج) ٢ص = ٣ ، ٢س + ص = ٤

مثال

(٢) الربط بالهندسة: أ ب جـ مثلث فيه أ (٠، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (٦، ٣) أثبت أن المثلث متساوى الساقين، ثم أوجد قياس زاوية أ.

الحل

البعد بين نقطتين = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ صيغة القانون

أ ب = $\sqrt{(٠ - ٢)^٢ + (٥ - (-١))^٢}$ = $٢\sqrt{١٠}$

أ جـ = $\sqrt{(٠ - ٦)^٢ + (٥ - ٣)^٢}$ = $٢\sqrt{١٠}$

ب جـ = $\sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (-١ - ٣)^٢}$ = $٤\sqrt{٢}$

المثلث متساوى الساقين؛ لأن أ ب = أ جـ

نلاحظ أن $(ب جـ)^٢ < (أ ب)^٢ + (أ جـ)^٢$

أى أن $\angle$ أ حادة

$م_١ = \frac{٥ - (-١)}{٠ - ٢} = -٣$ ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$

$م_٢ = \frac{٥ - ٣}{٠ - ٦} = -\frac{١}{٣}$ ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$

ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$ صيغة القانون

ظا أ = $\left|\frac{-٣ - (-\frac{١}{٣})}{١ + (-٣)(-\frac{١}{٣})}\right| = \frac{٤}{٣}$ بالتعويض عن قيمتى $م_١$، $م_٢$

ق($\angle$ أ) = ٤٩ ً ٧ َ ٥٣° باستخدام الحاسبة

لاحظ

عند استخدام قانون الزاوية بين مستقيمين فى إيجاد قياس زاوية داخلة لمثلث يجب أولا تحديد نوع الزاوية (حادة - قائمة - منفرجة)

تحقق من فهمك

(١) أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $\overleftarrow{ى}$ = (٢، ٠) + ك(-٢، ١)، $\overleftarrow{ر}$ = (-٣، ١) + ك(٦، ٣).

(٢) أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم س - ٢ص + ٣ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٤، -١)، (٢، ١).

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أ (٠، ٢)، ب(٣، ١)، جـ(-٢، -١). أوجد قياس زاوية أ

تمــاريـن (٤ – ٣)

أولًا: أكمل ما يأتى

(١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين الذين ميلاهما ٢ ، $-\frac{١}{٢}$ تساوى

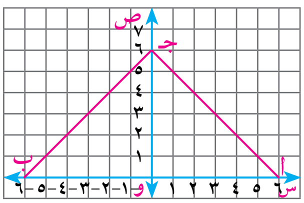
(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين س = ٣ ، ص = ٤ تساوى

(٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢، ٢) + ك(١،١) والمستقيم س = ٠هى

(٤) إذا توازى المستقيمان أ س + ٣ ص – ٧ = ٠ ، ٢ س – ٣ ص + ٥ = ٠ فإن أ تساوى

(٥) إذا تعامد المستقيمان أ س + ٧ ص – ٩ = ٠ ، ٧ س – ٢ ص + ١٢ = ٠ فإن أ تساوى

ثانيًا: نشاط



يبين الشكل المقابل: قطعة أرض مثلثة الشكل إحداثيات رؤوسها هى أ (٦، ٠) ، ب (–٦، ٠) ، جـ (٠، ٦) أكمل مايأتى:

(٦) قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{أجـ}$ ومحور السينات تساوى ....

(٧) قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ تساوى ....

(٨) المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ هى ....

(٩) المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ هى

(١٠) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة جـ ، ويوازى $\overleftrightarrow{أب}$ هى

(١١) مساحة سطح المثلث أ ب جـ تساوى

ثالثًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١٢) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين (٠، ١) ، (–١، ٠) والاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى:

أ صفر° ب ٤٥° جـ ٦٠° د ٩٠°

(١٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٠، ٣) + ك(١، ١) والمستقيم س = ٠ تساوى:

أ ٣٠° ب ٤٥° جـ ٦٠° د ٩٠°

(١٤) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $\sqrt{٣}$ س – ص = ٤ ، ص = ٣ تساوى

أ ٣٠° ب ٤٥° ج ٦٠° د ٩٠°

(١٥) المستقيم العمودى على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٠، ٥) + ك($\sqrt{٣}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٥٠°

رابعًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(١٦) أوجد قياس الزاوية الحادة بين أزواج كل من المستقيمات الآتية:

أ $\overleftarrow{ر}$ = (٥، ٠) ، س – ص + ٤ = ٠

ب $\overleftarrow{ر}$ = (٠، ١) + ك(١، ١) ، ٢ س – ص – ٣ = ٠

ج ص – $\sqrt{٣}$ س – ٥ = ٠ ، س – $\sqrt{٣}$ ص – ٦ = ٠

(١٧) إذا كانت هـ هى قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س – ٦ ص + ٦ = ٠ ، أ س – ٢ ص + ٤ = ٠ وكانت ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة أ.

(١٨) إذا كان ل$_١$: أ س – ٣ ص + ٧ = ٠ ، ل$_٢$: ٤ س + ٦ ص – ٥ = ٠ ، ل$_٣$: $\frac{س}{٣}$ – $\frac{ص}{٢}$ = ٣ فأوجد قيمة أ التى تجعل:

أ ل$_١$ // ل$_٣$

ب ل$_١$ ⊥ ل$_٢$

(١٩) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س + ك ص – ٨ = ٠ ، ٢ س – ص – ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ فأوجد قيمة ك.

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

٤ - ٤

The length of the perpendicular from a point to a straight line

سوف تتعلم

- إيجاد طول العمود المرسوم من نقطة معلومة إلى خط مستقيم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- عمود Perpendicular
- خط مستقيم Straight Line

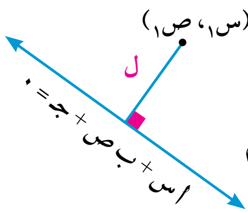
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

تعلم

إيجاد طول العمود المرسوم من نقطة معلومة إلى خط مستقيم

The length of the perpendicular from a point to a straight line



إذا كانت النقطة (س١، ص١) لا تنتمى للمستقيم الذى معادلته أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن طول العمود (ل) المرسوم من هذه النقطة إلى المستقيم

يتحدد من العلاقة: ل = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

مثال

١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، -٥) إلى الخط المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٠، ٢) + ك(٤، ٣).

الحل

نفرض أن (س، ص) = (٠، ٢) + ك (٤، ٣)

∴ س = ٤ ك ، ص = ٢ + ٣ك (المعادلتان الوسطيتان للمعادلة المتجهة)

$\frac{س}{٤} = \frac{ص - ٢}{٣}$ بحذف ك

٣س = ٤ص - ٨ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٣س - ٤ص + ٨ = ٠ المعادلة الكارتيزية

ل = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ صيغة قانون طول العمود

بالتعويض: أ = ٣ ، ب = -٤ ، جـ = ٨ ، س١ = ٤ ، ص١ = -٥

ل = $\frac{|٣ \times ٤ - ٤ \times -٥ + ٨|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

= $\frac{|١٢ + ٢٠ + ٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{|٤٠|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٤٠}{٥}$ = ٨ وحدات طول

حاول أن تحل

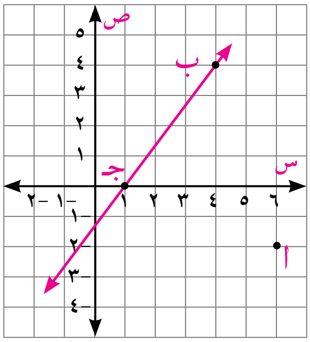
١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، -٥) إلى المستقيم: $\overleftarrow{ر}$ = (-١، ٠) + ك(١٢، ٥).

(٢) **تعبير شفهى:** اكتب طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم م فى الحالات الآتية:

أ) أ (٠ ، ٠) ، م : أس + ب ص + جـ = ٠

ب) أ (س١، ص١) ، م : ص = ٠ جـ) أ (س١، ص١) ، م : س = ٠

مثال



(٢) **في الشكل المقابل:** أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٦، -٢) إلى المستقيم المار بالنقطتين ب (٤، ٤)، جـ (١، ٠)، ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ.

الحل

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ صيغة الميل

∵ جـ (١، ٠) ، ب (٤، ٤)

∴ $م = \frac{٤ - ٠}{٤ - ١} = \frac{٤}{٣}$ بالتعويض بالنقطتين (٤، ٤)، (١، ٠)

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه

$\frac{٤}{٣} = \frac{ص - ٠}{س - ١}$ بالتعويض عن $م = \frac{٤}{٣}$

فيكون: ٤س - ٣ص - ٤ = ٠ المعادلة الكارتيزية

$ل = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ صيغة قانون طول العمود

فيكون طول العمود المرسوم من النقطة أ (٦، -٢) إلى المستقيم : ٤س - ٣ص - ٤ = ٠

هو : $ل = \frac{|٤ \times ٦ - ٣ \times -٢ - ٤|}{\sqrt{٤^٢ + ٣^٢}} = \frac{|٢٤ + ٦ - ٤|}{\sqrt{٢٥}} = ٥\frac{١}{٥}$ وحدة طول

باعتبار $\overline{ب جـ}$ قاعدة للمثلث أ ب جـ

∵ $ب جـ = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ صيغة قانون البعد بين نقطتين

$= \sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٤ - ٠)^٢} = ٥$ وحدات بالتعويض بالنقطتين (٤، ٤)، (١، ٠)

مساحة سطح المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع صيغة قانون مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \times ٥ \times \frac{٢٦}{٥} = ١٣$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

(٣) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠، -٣)، (٤، ٠)

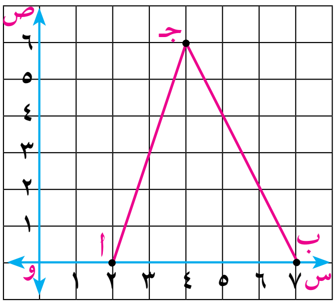
تحقق من فهمك

(١) **طرق** طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة ٣ س - ٤ ص - ٧ = ٠ ومسار الطريق الثانى تمثله المعادلة ٣ س - ٤ ص + ١١ = ٠

أثبت أن الطريقين متوازيان، ثم أوجد أقصر بعد بينهما.

تمــارين (٤ – ٤)

أولاً: أكمل ما يأتي:



(١) الشكل المقابل يبين منزل كريم أ (٢، ٠) والمدرسة ب (٧، ٠) والمسجد جـ (٤، ٦): أكمل ماياتي:

(أ) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هي

(ب) طول $\overline{\text{أب}}$ يساوي

(جـ) أقصر بعد من المسجد جـ إلى الطريق الواصل بين المنزل والمدرسة يساوي

(د) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$، ص = ٠ تساوي

(هـ) م (△ أب جـ) تساوي

ثانيًا: الاختيار من متعدد

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (–٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوي

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨

(٣) البعد بين المستقيمين ص – ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوي

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة (١، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠ يساوي

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٢$\sqrt{٢}$

(٥) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى المستقيم ٣ س – ٤ ص + جـ = ٠ يساوي ٢ وحدة طول فإن جـ تساوي

(أ) صفرًا (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم ل في التمارين من (أ) إلى (د)

(أ) أ (٠ ، ٠) ، ل : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٣ ، ٤)

(ب) أ (٢ ، –٤) ، ل : ١٢ س + ٥ ص – ٤٣ = ٠

(جـ) أ (٥ ، ٢) ، ل : ٨ س + ١٥ ص – ١٩ = ٠

(د) أ (–٢ ، –١) ، ل : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، –٧) + ك (١ ، ٢)

٧ أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (− ٢ ، ٥)، وتمس المستقيم ٣ س + ٤ ص + ١ = ٠

٨ أوجد بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، − ٣) ، (١ ، ٠)

٩ أثبت أن المستقيمين ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ ، ٦ س − ٨ ص + ٢١ = ٠ متوازيان، ثم أوجد البعد بينهما.

١٠ إذا كانت أ (٤ ، ٣) ، ب (− ٢ ، ٥) ، جـ (− ١ ، − ٢) هى رؤوس المثلث أب جـ ، رسم $\overline{\text{ب د}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$.

أ أثبت أن △ أ ب جـ متساوى الساقين

ب أوجد معادلة $\overline{\text{ب ى}}$

جـ أوجد طول $\overline{\text{ب ى}}$

١١ أ ب جـ ى متوازى أضلاع، فإذا كانت أ (− ٣ ، ٢)، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٥، ٧) أوجد إحداثيى الرأس د ، ثم أوجد مساحة سطح متوازى الأضلاع.

١٢ الربط بالهندسة: دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما ٤ س − ٣ ص + ١٠ = ٠، ٥ س − ١٢ ص + ٢٦ = ٠ أثبت أن الوترين متساويان فى الطول.

تمارين عامة على الوحدة الرابعة

أولًا أكمل ما يأتى:

(١) ميل المستقيم الذى معادلته ٢س − ٣ص + ٥ = ٠ يساوى

(٢) متجه اتجاه العمودى على المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢، −١) + ك(٣، −٥) هو

(٣) معادلة المستقيم الذى يصنع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° ويمر بالنقطة (٤، ٠) هو ....

(٤) المستقيم ٣س + ٤ص − ١٢ = ٠ يقطع محورى الإحداثيات فى النقاط

(٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم المار بالنقطتين (٠، ٢)، (−٢، ٠) والمستقيم ص = ٠ تساوى

ثانيًا: الاختيار من متعدد:

(٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين: س − ٣ص + ٥ = ٠، س + ٢ص − ٧ = ٠

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٧) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢، −٣) ويوازى محور السينات هو:

(أ) س + ٣ = ٠ (ب) ص + ٣ = ٠ (جـ) س − ٢ = ٠ (د) ص − ٣ = ٠

(٨) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ٣س − ٤ص − ١٥ = ٠ يساوى

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٥

(٩) جميع المعادلات الآتية تمثل معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٠)، (٠، ٢) ما عدا المعادلة:

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٣، ٠) + ك (٣، −٢) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٢) + ك (٣، −٢)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٣، ٠) + ك (٢، ٣) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٢) + ك (−٦، ٤)

(١٠) طول العمود المرسوم من النقطة (٠، −٥) إلى الخط المستقيم س + ٧ = ٠ يساوى

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

ثالثًا:

(١١) إذا كانت أ (٥، ٢)، ب (−٣، ١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftrightarrow{أب}$ مع محور السينات مبينًا نوع التقسيم.

(١٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٢، ٥) إلى المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (١، −٢) + ك (٣، ٤).

(١٣) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث أ (٥، ٢)، ب (٢، −٢)، جـ (−٢، ١)
ثم احسب مساحته.

الوحدة ٥

حساب المثلثات

Trigonometry

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية .
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية .
- يحل معادلات مثلثية بسيطة فى الصورة العامة فى الفترة [٠ ، ٢π]
- يتعرف الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يتعرف القطاع الدائرى وكيفية إيجاد مساحته.
- يتعرف القطعة الدائرية وكيفية إيجاد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم.
- يحل مسائل متنوعة على حساب المثلثات.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية والتى تمثل بدوال مثلثية.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى

المصطلحات الأساسية

- متطابقة مثلثية Trigonometric identitie
- معادلة مثلثية Trigonometric equation
- زاوية ارتفاع Angle of elevation
- زاوية انخفاض Angle of depression
- قطاع دائرى Circular sector
- قطعة دائرية Circular Segment

دروس الوحدة

الدرس (٥ – ١): المتطابقات المثلثية.

الدرس (٥ – ٢): حل المعادلات المثلثية.

الدرس (٥ – ٣): حل المثلث القائم الزاوية.

الدرس (٥ – ٤): تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

الدرس (٥ – ٥): القطاع الدائرى.

الدرس (٥ – ٦): القطعة الدائرية.

الدرس (٥ – ٧): مساحة المثلث، مساحة الشكل الرباعى، مساحة المضلع المنتظم.

الأدوات المستخدمة

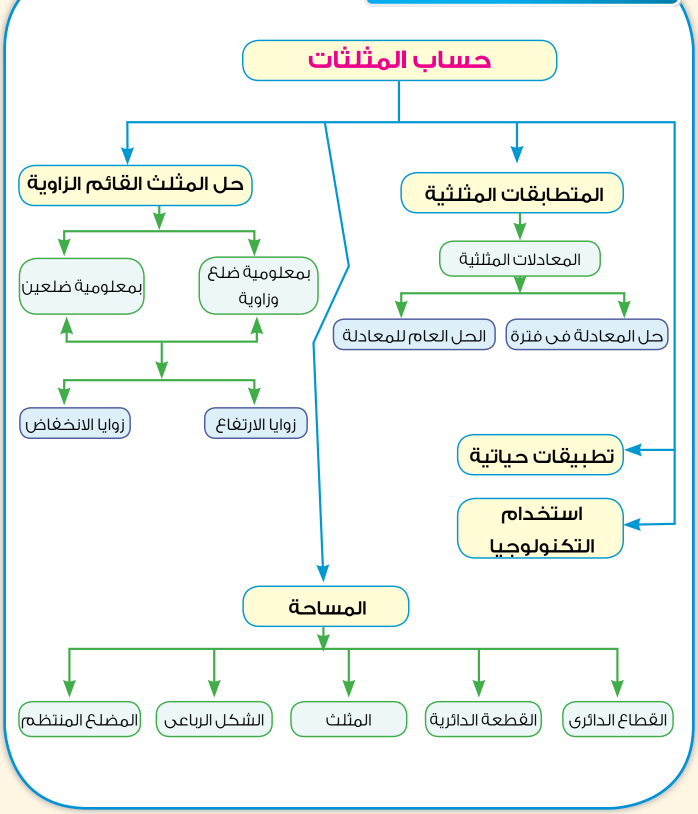
آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلي متصل بالانترنت - برامج رسومية

نبذه تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، وهذا فرع كما هو واضح من اسمه يتعلق بالحسابات الخاصة بالمثلث من حيث زواياه وأضلاعه. ويذكر بعض المؤرخين أن الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تعرض لحساب المثلثات،عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول ظل عصا رأسية وطول ظله فى نفس الوقت.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجانى فى القرن العاشر الميلادى. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

مخطط تنظيمي للوحدة



كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكُرَىّ أو الكروى (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات الهامة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا فى العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المناحى العلمية والعملية. وساهم ذلك فى دفع عجلة التقدم والحضارة.

المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities

٥ – ١

سوف تتعلم

- مفهوم المتطابقة المثلثية .
- تبسيط المقادير المثلثية.
- إثبات صحة متطابقة مثلثية .

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلة Equation
- متطابقة Identity

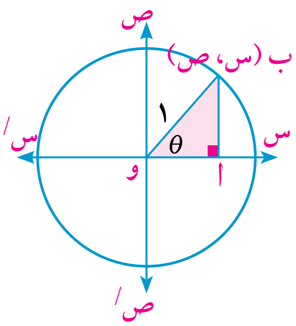
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

Basic Relations Among Trigonometric Functions

فكر و ناقش



سبق أن درست فى الفصل الدراسى الأول بعض خواص الدوال المثلثية ورسومها البيانية، وفى هذه الوحدة سوف تستخدم المتطابقات المثلثية؛ وذلك لتبسيط المقادير وحل المعادلات المثلثية.

وسبق أن درست دائرة الوحدة وعلمت أن $\measuredangle$ أ و ب الموجهة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ يقطع دائرة الوحدة فى نقطة ب(س، ص) حيث ق($\measuredangle$ أ و ب) = θ، ب(جتا θ، جا θ) فهل يمكنك استنتاج بعض العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية؟

تعلم المتطابقات والمعادلات المثلثية

Trigonometric Identities and Equations

المتطابقة: هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذى يُعرف به كل طرف من طرفى المتساوية.

فمثلا: جا $(\frac{\pi}{٢}\ \theta)$ = جتا θ متطابقة صحيحة لجميع قيم θ الحقيقية.

المعادلة: هى متساوية صحيحة لبعض الأعداد الحقيقية التى تحقق هذه المتساوية وغير صحيحة للبعض الآخر الذى لا يحققها.

فمثلًا: جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$

نجد أن: قيم θ التى تحقق هذه المعادلة والتى تنتمى إلى الفترة $[٠ ، ٢\pi[$ هى $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٥\pi}{٦}$ فقط.

حاول أن تحل

(١) أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة وأيها تمثل متطابقة.

أ جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب ظا $(\frac{٣\pi}{٢}\ \theta)$ = ظتا θ

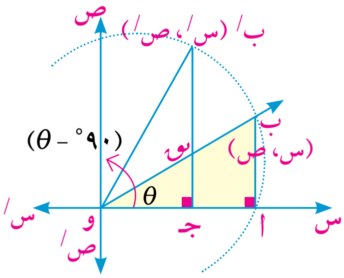
ج ظتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ د جا $(\pi\ \theta)$ = جا θ

المتطابقات المثلثية الأساسية   Basic Trigonometric Identities

١- سبق أن درست الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها وعلمت أن:

$$\text{جا}\,\theta = \frac{١}{\text{قتا}\,\theta} \quad ، \quad \text{جتا}\,\theta = \frac{١}{\text{قا}\,\theta} \quad ، \quad \text{ظا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظتا}\,\theta}$$

$$\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta} \quad ، \quad \text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} \quad ، \quad \text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$$



من تطابق المثلثين: و أ ب، ب/ جـ و
نجد أن: ص/ = س، س/ = ص

٢- الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين:

$$\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{جتا}\theta \quad ، \quad \text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{جا}\theta$$

$$\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{ظتا}\theta \quad ، \quad \text{قتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{قا}\theta$$

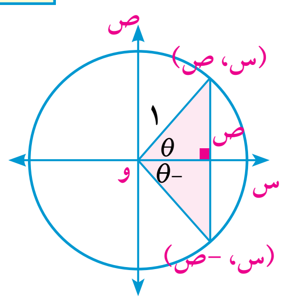
$$\text{قا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{قتا}\theta \quad ، \quad \text{ظتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{ظا}\theta$$

٣- متطابقة الزاويتين θ ، θ:

نلاحظ من الشكل المقابل أن:

★ س = جتا θ ، س = جتا(θ)

★ ص = جا θ ، ص = جا(θ)



أضف إلى معلوماتك

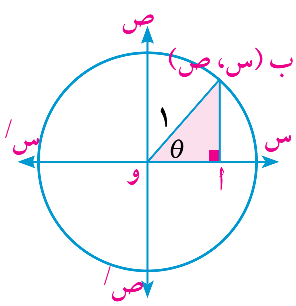
تسمى متطابقات الزاويتين θ، $-\theta$ بمتطابقات الدوال الزوجية والفردية، وستدرس فى صف دراسى لاحق.

لذلك فإن:

$$\text{جا}(-\theta) = -\,\text{جا}\,\theta \quad ، \quad \text{جتا}(-\theta) = \text{جتا}\,\theta$$

$$\text{قتا}(-\theta) = -\,\text{قتا}\,\theta \quad ، \quad \text{قا}(-\theta) = \text{قا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(-\theta) = -\,\text{ظا}\,\theta \quad ، \quad \text{ظتا}(-\theta) = -\,\text{ظتا}\,\theta$$



٤- متطابقات فيثاغورث:

نعلم من دائرة الوحدة أن:

س^٢ ص^٢ = ١ (١) وبالتعويض عن س = جتاθ ، ص = جاθ

فإن: $\boxed{\text{جتا}^٢\theta + \text{جا}^٢\theta = ١}$

وبقسمة طرفى العلاقة (١) على س^٢ فإن:

$$\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢}\ \frac{\text{ص}^٢}{\text{س}^٢} = \frac{١}{\text{س}^٢}$$

أى أن: $\boxed{١ + \text{ظا}^٢\theta = \text{قا}^٢\theta}$

وبقسمة طرفى العلاقة (١) على ص^٢ فإن:

$$\frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢}\ \frac{\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢} = \frac{١}{\text{ص}^٢}$$

أى أن: $\boxed{١ + \text{ظتا}^٢\theta = \text{قتا}^٢\theta}$

٥- التعبير عن $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، بدلالة جا θ، جتا θ:

$\therefore \text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\therefore \text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

تبسيط المقادير المثلثية:

المقصود بتبسيط المقادير المثلثية هو وضعها فى ابسط صورة، وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية.

مثال

لاحظ أن

$\text{جا}\,\theta \times \text{جا}\,\theta = (\text{جا}\,\theta)^{٢} = \text{جا}^{٢}\,\theta$

① اكتب فى أبسط صورة: $(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} - ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

الحل

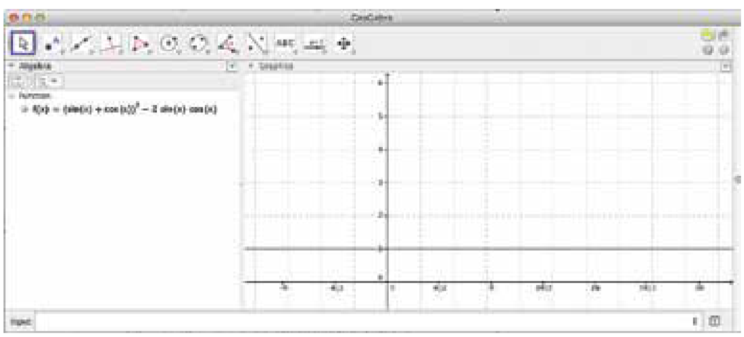
أ) $(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} - ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

المقدار $= \text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta - ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ بفك الأقواس

$= \text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta$ بالتبسيط

$= ١$ بتطبيق متطابقة فيثاغورث:

ويمكن التحقق من الناتج باستخدام أحد البرامج الرسومية الموضحة بالشكل التالى:



② اكتب في أبسط صورة: $\frac{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\,\theta}$

الحل

المقدار: $\frac{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\,\theta}$

بتطبيق متطابقة فيثاغورث: المقدار $= \frac{\text{قا}^{٢}\,\theta}{\text{قتا}^{٢}\,\theta}$

$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\theta} \div \frac{١}{\text{جا}^{٢}\,\theta}$

$= \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جتا}^{٢}\,\theta} = \text{ظا}^{٢}\,\theta$

حاول أن تحل

② ضع كلا من المقادير الآتية فى أبسط صورة ثم تحقق من صحة الناتج:

أ) $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\theta} - \frac{١}{\text{ظتا}^{٢}\,\theta}$

ب) $\text{جتا}\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)\ \text{قا}\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

ج) $\frac{\text{جا}\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{جتا}\,(٢\pi - \theta)}$

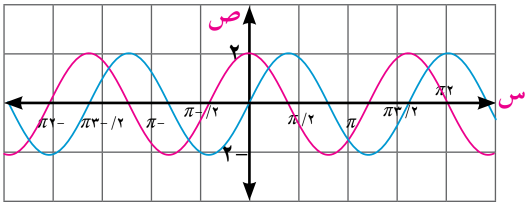
المتطابقات المثلثية trigonometric identities

عند إثبات صحة متطابقة مثلثية نثبت أن الدالتين المحددتين لطرفيها متساويتان

وللتحقق من عدم صحة الجملة: جتا٢ θ = ٢جا θ جتا θ

نرسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

د(س) = جتا٢ θ ، ر(س) = ٢ جا θ جتا θ



وبتأمل الشكل البيانى المجاور

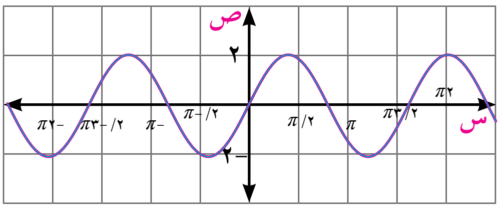
نجد عدم تطابق الدالتين؛ أى أن د(س) $\neq$ ر(س)، لذلك فإن هذه العلاقة ليست متطابقة.

ويمكن التحقق من ذلك جبريا وذلك بوضع θ = صفر فتكون:

د(٠) = ١ ، ر(٠) = ٠ لذلك فإن الدالتين غير متساويتين.

بينما فى المتساوية: جا٢ θ = ٢ جا θ جتا θ

بوضع د(س) = جا٢ θ ، ر(س) = ٢ جا θ جتا θ



نجد من التمثيل البيانى للشكل تطابق منحنى الدالتين؛ أى أن د(س) = ر(س)

وبذلك تكون هذه المتساوية متطابقة .

تذكر

جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ١

جا$^2\theta$ = ١ − جتا$^2\theta$

جتا$^2\theta$ = ١ − جا$^2\theta$

مثال

٣ أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\text{جتا}^2\theta}{1 - \text{جا}\,\theta}$ = ١ + جا θ

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا}^2\theta}{1 - \text{جا}\,\theta} = \frac{1 - \text{جا}^2\theta}{1 - \text{جا}\,\theta}$

$= \frac{(1 + \text{جا}\,\theta)(1 - \text{جا}\,\theta)}{1 - \text{جا}\,\theta}$ = ١ + جا θ = الطرف الأيسر

مثال

٤ أثبت صحة المتطابقة: ظا θ + ظتا θ = قا θ قتا θ

الحل

الطرف الأيمن = ظا θ + ظتا θ

$= \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta\ \text{جا}\,\theta}$

$= \frac{1}{\text{جتا}\,\theta\ \text{جا}\,\theta}$

= قا θ قتا θ = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

(٣) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(١ - جا^٢ \theta)(١ - جتا^٢ \theta)}{ظا^٢ \theta} = جتا^٤ \theta$

مثال

(٥) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{١ - ظا^٢ \theta}{١ + ظا^٢ \theta} = ٢ جا^٢ \theta - ١$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{١ - ظتا^٢ \theta}{١ + ظتا^٢ \theta}$

$= \frac{١ - ظتا^٢ \theta}{قتا^٢ \theta} = \frac{١ - \frac{جتا^٢ \theta}{جا^٢ \theta}}{\frac{١}{جا^٢ \theta}}$ بالتحويل إلى جا θ، جتا θ

$= \frac{١ - \frac{جتا^٢ \theta}{جا^٢ \theta}}{\frac{١}{جا^٢ \theta}} \times \frac{جا^٢ \theta}{جا^٢ \theta} = جا^٢ \theta - جتا^٢ \theta$

$= جا^٢ \theta - (١ - جا^٢ \theta)$

$= ٢ جا^٢ \theta - ١ =$ الطرف الأيسر

فكر: هل توجد حلول أخرى للمثال

حاول أن تحل

(٤) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ) $\frac{١ + ظتا^٢ \theta}{١ + ظا^٢ \theta} = ظتا^٢ \theta$

ب) $\frac{ظا \theta + ظتا \theta}{قا \theta \ قتا \theta} = ١$

جـ) $(قا \theta - ظا \theta)^٢ = \frac{١ - جا \theta}{١ + جا \theta}$

تحقق من فهمك

(١) اكتشف الإجابة الخطأ:

جا$^٢ \theta$ + جتا$^٢ \theta$ تساوى:

أ) ١ ب) ٢ جتا$^٢ \theta$ − ١ جـ) ١ − ٢ جا$^٢ \theta$ د) ١ + ٢ جا θ جتا θ

(٢) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $\frac{جا \theta \ جتا \theta}{ظا \theta} + \frac{ظا \theta}{قا \theta \ قتا \theta} = ١$

ب) $\frac{جا^٣ \theta + جتا^٣ \theta}{جا \theta + جتا \theta} + \frac{جا^٣ \theta - جتا^٣ \theta}{جا \theta - جتا \theta} = ٢$

تمـــارين (٥ – ١)

أولًا: الاختيار من متعدد

١) المقدار $\frac{\text{ظا}\theta\,\text{ظتا}\theta}{\text{قا}\theta}$: في أبسط صورة يساوي:

أ) جا θ ب) جتا θ ج) قا θ د) قتا θ

٢) المقدار: جا θ جتا θ ظا θ في أبسط صورة يساوي:

أ) جا$^{٢}\theta$ ب) جتا$^{٢}\theta$ ج) ظا$^{٢}\theta$ د) ١ − جا$^{٢}\theta$

٣) المقدار: جا$(٩٠° - \theta)$قتا$(٩٠° - \theta)$ في أبسط صورة يساوي:

أ) ١ ب) جا$^{٢}\theta$ ج) جتا$^{٢}\theta$ د) جا θ جتا θ

٤) المقدار: $\frac{\text{١ - جتا}^{٢}\beta}{\text{جا}^{٢}\beta\text{ - ١}}$ في أبسط صورة يساوي:

أ) −ظا$^{٢}\beta$ ب) − ظتا$^{٢}\beta$ ج) ظا$^{٢}\beta$ د) ظتا$^{٢}\beta$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

٥) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) ظاμ + ظتا μ = قا μ قتا μ

ب) قتاα − جاα = جتا α ظتا α

ج) ظتا$^{٢}\mu$ − جتا$^{٢}\mu$ = ظتا$^{٢}\mu$ جتا$^{٢}\mu$

د) ظا$^{٢}\alpha$ − جا$^{٢}\alpha$ = ظا$^{٢}\alpha$ جا$^{٢}\alpha$

هـ) جا$^{٢}\alpha$ + ظا$^{٢}\alpha$ جا$^{٢}\alpha$ = ظا$^{٢}\alpha$

و) جا $(٩٠° - \mu)$ جتاμ = ١ − جا$^{٢}\mu$

٦) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $\frac{\text{قتا }\theta}{\text{جتا }\theta}$ (١ − جا$^{٢}\theta$) = ظتاθ

ب) $\frac{١}{\text{جا}^{٢}(٩٠° - \theta)}$ − ظا$^{٢}\theta$ = ١

ج) $\frac{١}{\text{١ + ظا}^{٢}\alpha}$ − $\frac{١}{\text{١ + ظا}^{٢}\beta}$ = جتا$^{٢}\alpha$ − جتا$^{٢}\beta$

د) $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\theta}{\text{قا}^{٤}\theta}$ = ١ − جا$^{٢}\theta$

هـ) (قا ϕ − ظا ϕ)^{٢} = $\frac{\text{١ - جا}\phi}{\text{١ + جا}\phi}$

و) $\frac{١}{\text{١ + ظتا }\theta}$ = $\frac{\text{ظا}\theta}{\text{١ + ظا}\theta}$

ز) $\frac{\text{جتا}^{٢}\theta\text{ - جا}^{٢}\theta}{\text{جا}\theta\text{ جتا}^{٢}\theta\text{ + جتا}\theta\text{ جا}^{٢}\theta}$ = قتا θ − قا θ

٥ ـ ٢ حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations

سوف تتعلم

- إيجاد الحل العام للمعادلات المثلثية
- حل المعادلات فى الفترة $]٠، ٢\pi[$

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلة مثلثية Trigonometric equation
- حل عام General solution

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- آلة حاسبة رسومية

حل معادلة مثلثية بحلول حقيقية

فكر و ناقش

سبق أن درسنا حل المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى والدرجة الثانية (جبريا وبيانيًّا)، وفى هذا الدرس سوف نحل المعادلات المثلثية وذلك بالاستعانة بالمتطابقات الأساسية، فهل يوجد تشابه بين حل المعادلات الجبرية وحل المعادلات المثلثية؟

عمل تعاونى

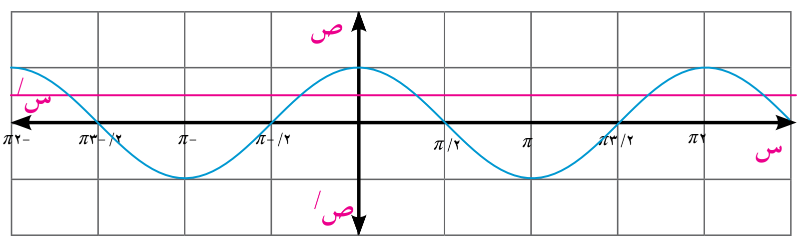
اشترك مع أحد زملائك فى رسم الدالة المثلثية ص = جتا θ والدالة ص = $\frac{١}{٢}$ ولاحظ نقط تقاطعهما المشتركة

١- ارسم منحنى الدالة $ص_١$ = جتاθ، $ص_٢$ = $\frac{١}{٢}$ ولاحظ نقاط تقاطعهما المشتركة.

٢- كم حلًّا للمعادلة جتاθ = $\frac{١}{٢}$ في $]٠، ٢\pi[$؟

٣- هل توجد حلولًا أخرى للمعادلة جتاθ = $\frac{١}{٢}$ في الشكل البيانى؟

الشكل البيانى التالى يمثل حل المعادلة جتاθ = $\frac{١}{٢}$ حيث نجد أن المعادلة لها حلان هما $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٥\pi}{٣}$ عندما $\theta \in]٠، ٢\pi[$، وبإضافة ٢π أو -٢π نحصل على حلول أخرى للمعادلة.



الحل العام للمعادلات المثلثية

General solution of the trigonometric equations

مثال

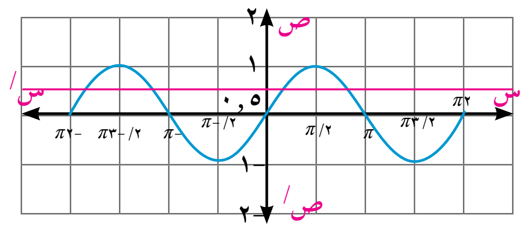
١ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

أ جا θ = $\frac{١}{٢}$ ب جتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ج ظا θ = $\sqrt{٣}$

الحل

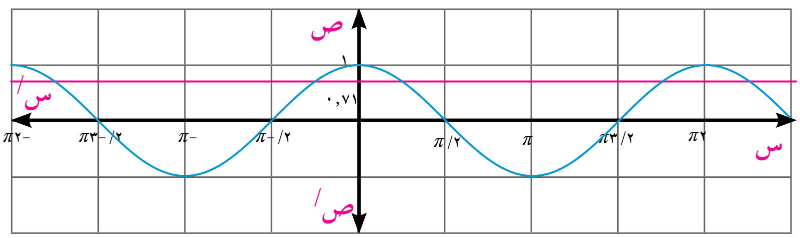
أ ∵ جا $\theta = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{٦}$ أو $\theta = \pi - \frac{\pi}{٦}$

أى أن الحل العام للمعادلة هو $\frac{\pi}{٦} + ٢ن\pi$ أو $(\pi - \frac{\pi}{٦}) + ٢ن\pi$ ، ن ∈ ص



ب ∵ جتا $\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ∴ $\theta = \pm\frac{\pi}{٤}$

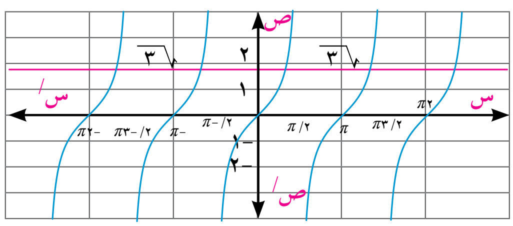
أى أن الحل العام للمعادلة هو $٢ن\pi \pm \frac{\pi}{٤}$ ، ن ∈ ص



ج ∵ ظا $\theta = \sqrt{٣}$

∴ $\theta = \frac{\pi}{٣}$ أو $\theta = \frac{\pi}{٣} + \pi$

أى أن الحل العام للمعادلة هو $\frac{\pi}{٣} + ن\pi$ ، ن ∈ ص



حاول أن تحل

(١) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب ٢جتا $\theta = ١$ ج ظا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال

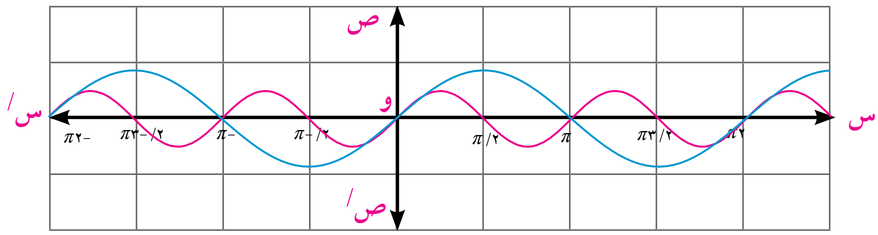
(٢) أوجد الحل العام للمعادلة: جا θ جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا θ

الحل

جا θ جتا $\theta - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا $\theta = ٠$ جا θ (جتا $\theta - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$) $= ٠$

إما	جا $\theta = ٠$	أو	جتا$\theta - \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٠$
			جتا$\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
	$\theta = ٠$ ،		$\theta = \frac{\pi}{٦}$
الحل العام للمعادلة	$\theta = ن\pi$ حيث ن ∈ ص		$\theta = \pm\frac{\pi}{٦} + ٢ن\pi$ حيث ن ∈ ص

والشكل البيانى التالى يمثل جزءًا من حل المعادلة.



تفكير ناقد: هل بالضرورة أن جميع المعادلات المثلثية لها حلول حقيقية؟ وضح ذلك بأمثلة.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ) جتا$^{٢}\theta$ - جتا θ = ٠ ب) ٢ جا$^{٢}\theta$ = جا θ ج) $\sqrt{٢}$ جا θ جتا θ - جا θ = ٠

حل المعادلات المثلثية فى الفترة [٠، ٢π]

مثال

(٣) حل المعادلة: جا θ جتا θ - $\frac{١}{٢}$ جتا θ = ٠ إذا كانت ٠° < θ < ١٨٠°

الحل

جتا θ(جا θ - $\frac{١}{٢}$) = ٠ بالتحليل

جتا θ = ٠ أو جا θ = $\frac{١}{٢}$

θ = ٩٠° أو θ = ٣٠° أو ١٥٠°

حل المعادلة هى: ٣٠° أو ٩٠° أو ١٥٠°

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت ٠° < θ ⩽ ٣٦٠° فأوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ ب) ٤ جا$^{٢}\theta$ − ٣ جا θ جتا θ = ٠

تحقق من فهمك

(٤) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية بالراديان.

أ) ظا θ = ١ ب) جتا θ = جا ٢θ ج) ٢ جا θ -$\sqrt{٣}$ = ٠

تمـــارين (٥ – ٢)

أولًا: أكمل ما يأتى

١) الحل العام للمعادلة جتا θ = ١ لجميع قيم θ هو ....

٢) الحل العام للمعادلة جا θ = ١ حيث $\theta \in [\pi، ٢\pi]$ هو ....

٣) الحل العام للمعادلة جا θ = جتا θ لجميع قيم θ هو ....

٤) مجموعة حل المعادلة ظتا θ = $\sqrt{٣}$ حيث $\theta \in [\pi، ٢\pi]$ هى ....

ثانيًا: الاختيار من متعدد

٥) إذا كانت ٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠° وكانت جا θ + ١ = ٠ فإن θ تساوى

أ ٠° ب ٩٠° جـ ١٨٠° د ٢٧٠°

٦) إذا كانت ٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠° وكانت جتاθ + ١ = ٠ فإن θ تساوى

أ ٩٠° ب ١٨٠° جـ ٢٧٠° د ٣٦٠°

٧) إذا كانت ٠° $\leqslant \theta <$ ١٨٠° وكانت$\sqrt{٣}$ ظا θ - ١ = ٠ فإن θ تساوى

أ ٣٠° ب ٦٠° جـ ١٢٠° د ١٥٠°

٨) إذا كانت ١٨٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠° وكانت ٢ جتاθ+ ١ = ٠ فإن θ تساوى

أ ٢١٠° ب ٢٤٠° جـ ٣٠٠° د ٣٣٠°

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية

٩) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية .

أ جاθ = $\frac{١}{٢}$ ب ٢جتاθ - $\sqrt{٣}$ =٠ جـ $\sqrt{٣}$ ظا θ – ١= ٠

١٠) أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة [٠، $\frac{٣\pi}{٢}$]:

أ ظا^{٢} θ - ظاθ = ٠

ب ٢جا θ جتا θ - جتا θ = ٠

جـ ٢جا^{٢} θ - ٣جاθ - ٢ = ٠

٥ – ٣

حل المثلث القائم الزاوية
Solving the Right Angled Triangle

سوف تتعلم
- حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولى ضلعين.
- حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زواياه الحادة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- حل المثلث Solution of a tringle

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

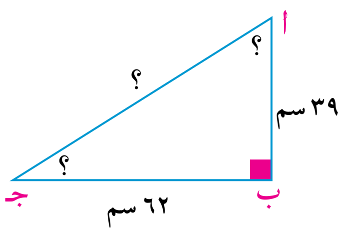
نعلم أن للمثلث ستة عناصر هى أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث ، وحل المثلث يعنى إيجاد قياسات عناصره الستة، وإذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يلزم معرفة إما طولى ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين.

حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين:

مثال

(١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذي فيه أ ب = ٣٩ سم، ب جـ = ٦٢ سم.

الحل



أولًا: نوجد ق (∠ جـ):

∵ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ ظا جـ = $\frac{39}{62}$ ≃ ٠,٦٢٩٠٣٢٢٥٨١

باستخدام الآلة الحاسبة يكون:

ق (∠ جـ) = ٣٢° ١٠′ ١٧″

→ 3 9 ÷ 6 2 = Shift Tan⁻¹ Ans = °'''

نوجد ق (∠ أ):

ق (∠ أ) = ٩٠° – ٣٢° ١٠′ ١٧″ = ٥٧° ٤٩′ ٤٣″

أو من الممكن استخدام الحاسبة كالآتى:

→ 9 0 – 3 2 °''' 1 0 °''' 1 7 °''' = °'''

ثانيًا: نوجد طول: $\overline{\text{أ جـ}}$

∵ جا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ∴ جا ٣٢° ١٠′ ١٧″ = $\frac{39}{\text{أ جـ}}$

→ 3 9 0 ÷ sin 3 2 °''' 1 0 °''' 1 7 °''') =

فيكون أ جـ = $\frac{\text{٣٩}}{\text{جا ١٧ ١٠ ٣٢°}}$ ≃ ٧٣,٢٤٥٨١١٢٤ سم

فكر

★ هل توجد دوال مثلثية أخرى تستطيع بواسطتها إيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟ اذكر هذه الدوال إن وجدت.

★ هل يمكنك الاستعانة بنظرية فيثاغورث لإيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟ أكتب خطوات الحل إن أمكنك ذلك.

★ أيهما تفضل استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ أم استخدام إحدى الدوال المثلثية؟ لماذا؟

حاول أن تحل

(١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

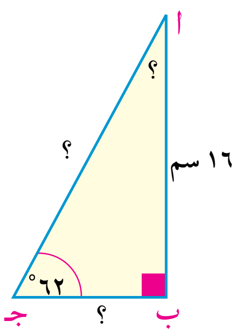
أ) أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم ب) ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ١٣ سم

حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية

مثال

(٢) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب، حيث ق (∠ جـ) = ٦٢°، أ ب = ١٦ سم، مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل



نوجد ق (∠ أ):

ق (∠ أ) = ٩٠° – ٦٢° = ٢٨°

نوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$:

∵ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ أى أن: ظا ٦٢° = $\frac{\text{١٦}}{\text{ب جـ}}$ فيكون

ب جـ × ظا ٦٢° = ١٦

ب جـ = $\frac{\text{١٦}}{\text{ظا ٦٢°}}$ = ٨,٥٠٧٣٥٠٩٠٧ ≃ ٨,٥١ سم

نوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$:

∵ جا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ أى أن: جا ٦٢° = $\frac{\text{١٦}}{\text{أ جـ}}$

أ جـ × جا ٦٢° = ١٦

أ جـ = $\frac{\text{١٦}}{\text{جا ٦٢°}}$ = ١٨,١٢١١٢٠٨١ ≃ ١٨,١٢ سم

حاول أن تحل

(٢) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين:

أ) أ ب = ٨ سم ، ق (∠ جـ) = ٣٤° ب) أ جـ = ٢٦ سم ، ق (∠ أ) = ١٢ َ ٥٣°

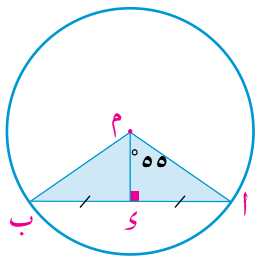
تفكير ناقد:

هل يمكن حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية زاويتيه الحادتين؟ فسر إجابتك .

مثال

٣ **الربط بالهندسة:** دائرة طول نصف قطرها ٧ سم، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠°، احسب طول هذا الوتر لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



فى الشكل المقابل: نرسم $\overline{\text{م ى}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

من خواص الدائرة: نقطة د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

ق ($\angle$ أ م ى) = ١١٠° ÷ ٢ = ٥٥°

نوجد طول $\overline{\text{أ ى}}$ فى المثلث أ ى م القائم الزاوية:

جا (أ م ى) = $\frac{\text{أ ى}}{\text{أ م}}$ من تعريف دالة الجيب

أى أن: جا ٥٥° = $\frac{\text{أ ى}}{٧}$

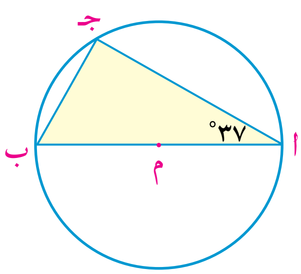
حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين :

أ ى = ٧ × جا ٥٥° ≃ ٥,٧٣٤٠٦٤٣١ سم

إيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$: أ ب = ٢ × أ ى

أى أن: أ ب = ٢×٥,٧٣٤٠٦٤٣١ = ١١,٤٦٨١٢٨٦٢ ≃ ١١,٤٦٨ سم

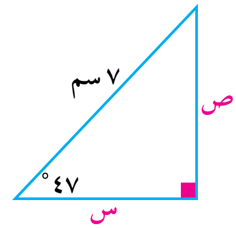
حاول أن تحل

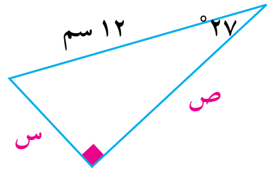


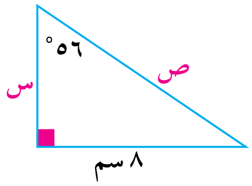
٣ **الربط بالهندسة:** يبين الشكل المقابل دائرة مركزها م ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها، فإذا كان أجـ = ١٢ سم، ق ($\angle$ أ) = ٣٧° فأوجد طول نصف قطر الدائرة. لأقرب رقمين عشريين.

تمــاريـن (٥ – ٣)

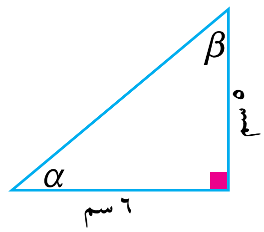
١ أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل شكل من الأشكال الآتية

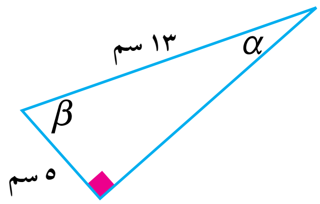
أ


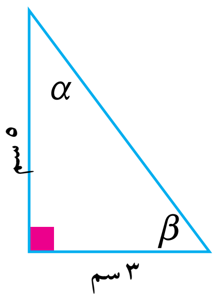
ب


جـ


٢ أوجد قيمة كل من الزاويتين α، β بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية:

أ


ب


جـ


٣ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربًا الزاويا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث:

أ أ ب = ٤ سم، ب جـ = ٦ سم

ب أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ١٧,٦ سم

٤ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربًا الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتميترات حيث:

أ و (∠أ) = ٠,٩٢٥ ءً، ب جـ = ٨ سم

ب و (∠أ) = ١,١٦٩ ءً، أ ب = ١٨ سم

٥ أ ب جـ مثلث رسم أ ء ⊥ ب جـ فإذا كان أ ء = ٦ سم، و(∠ب) = ٥٢° و (∠جـ) = ٢٨° فأوجد طول ب جـ لأقرب سنتيمتر.

٦ الربط بالهندسة: قطعة أرض على شكل معين أ ب جـ ء طول ضلعه ١٢ مترًا، و (∠أ ب جـ) = ١٠٠° أوجد طول كل من قطريه أ جـ ، ب ء لأقرب متر.

٧ الربط بالهندسة: أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه أ ء // ب جـ، أ ب = جـ ء = ٥سم، أ ء = ٤سم، ب جـ = ١٠سم. أوجد قياس كل من زواياه الأربعة.

٥ – ٤

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

Angles of Elevation and Angles of Depression

سوف تتعلم

- مفهوم زوايا الارتفاع والانخفاض.
- استخدام المثلث القائم الزاوية لحل مسائل تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- زاوية ارتفاع Angle of Elevation
- زاوية انخفاض Angle of Depression

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

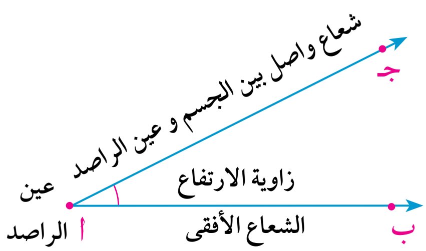
هل يمكنك أن توجد ارتفاع مأذنه عن سطح الأرض وأنت تبتعد عنها مسافة معلومة دون أن تقوم بالقياس الفعلى لطول هذه المأذنه؟

تعلم

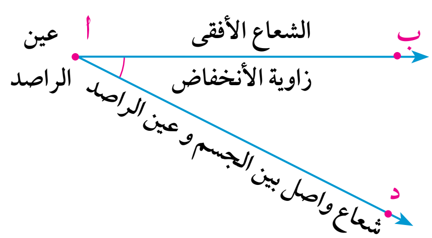
زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Angles of Depression

١- إذا رصد شخص أ نقطة جـ أعلى من مستوى نظره الأفقى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ فإن الزاوية بين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ تسمى زاوية ارتفاع جـ عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.



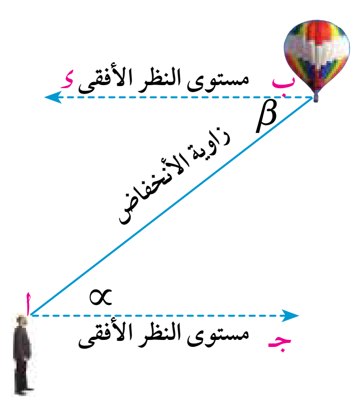
٢- و إذا رصد شخص أ نقطة د أسفل من مستوى نظره الأفقى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ فإن الزاوية بين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ تسمى زاوية أنخفاض د عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.

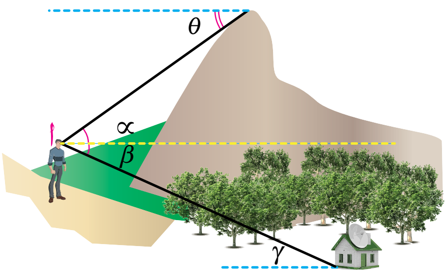


٣- فى الشكل المقابل:

* $\measuredangle$ جـ أ ب هى زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للشخص عند أ.

* $\measuredangle$ ى ب أ هى زاوية انخفاض الشخص عند أ بالنسبة للبالون وفى هذه الحالة يكون: $\beta = \propto$





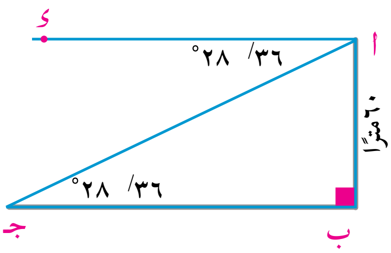
حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل

أولًا: حدد نوع كل زاوية (γ)، (β)، (θ)، (α) من حيث كونها زاوية ارتفاع أم انخفاض بالنسبة للراصد عند أ.

ثانيا: اكتب أزواج الزوايا المتساوية.

مثال



١٠ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج تساوى ٣٦َ ٢٨°. أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل

نفرض أن أ هى قمة البرج $\overline{\text{أ ب}}$

فتكون ∠ ء أ جـ هى زاوية انخفاض الجسم

لذلك فإن: ق (∠ جـ) = ق (∠ ء أ جـ)

تعريف دالة الظل: ظاجـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

بالتعويض عن أ ب = ٦٠: ظا ٣٦َ ٢٨° $= \frac{٦٠}{\text{ب جـ}}$

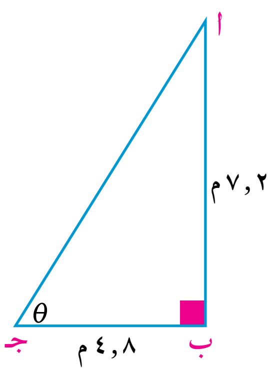
ب جـ × ظا ٣٦َ ٢٨° = ٦٠

ب جـ $= \frac{٦٠}{\text{ظا ٣٦َ ٢٨°}}$ = ١٢٥,٢٢٩٦٦ ≃ ١٢٥ مترا

حاول أن تحل

٢ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض، فوجد أن زاوية انخفاضها هو ٦٣°. أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد.

مثال



١١ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلًّا على الأرض طوله ٤,٨ متر، أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل

نفرض أن نقطة أ هى قمة عمود الإنارة أ ب، وأن ب جـ هو طول ظل العمود، θ زاوية ارتفاع الشمس

∵ ظاجـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ ظا $\theta = \frac{٧,٢}{٤,٨}$ = ١,٥

ق (∠ θ) = ٣٦َ ١٨ً ٥٦°

∴ زاوية ارتفاع الشمس بالراديان = ٣٦َ ١٨ً ٥٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ٠,٩٨٢٧٩٣٧٢٣٢ ء

ملاحظة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد θ بالراديان مباشرة دون إيجادها بالدرجات كالآتى:

١- تهيئة الآلة الحاسبة على نظام (Radian): (Rad :4) Shift Mode 4

٢- أدخال البيانات (Data): (tan⁻¹) 1 . 5 Shift tan

٣- أستدعاء النواتج (call outputs): =

R MATH
0.982793732

حاول أن تحل

٣ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان؟

تمـــارين (٥ – ٤)

١ طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ مترًا، فإذا كانت الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية تساوى ٦٣°. أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض.

٢ وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع قمة مئذنة على سطح الأرض تبعد ٤٢ مترًا عن قاعدتها يساوى ٥٢° فما ارتفاع المئذنة لأقرب متر؟

٣ جبل ارتفاعه ١٨٢٠ مترًا وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الأرض ٦٨° فما هى المسافة بين النقطة والراصد لأقرب متر.

٤ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى، ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤°. أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًّا من :

أ بعد الطرف السفلى عن الحائط ب طول السلم

٥ من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع أعلى عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها، فوجد أن قياسها ٢٨°، أوجد ارتفاع العمارة لأقرب متر.

القطاع الدائرى
Circular Sector

سوف تتعلم

- مفهوم القطاع الدائرى
- إيجاد مساحة القطاع الدائرى

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قطاع دائرى Circular Sector

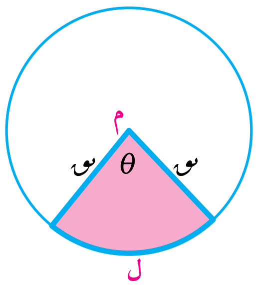
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

فكر و ناقش

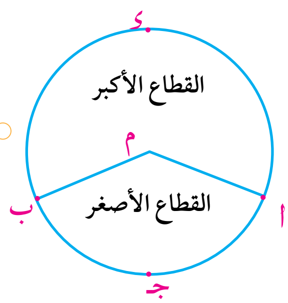
القطاع الدائرى:

سبق أن درست العلاقة بين طول قوس (ل) من دائرة طول نصف قطرها (نق) وقياس الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس (θ) وعلمت أن: ل = $\theta^{ء}$ × نق.
فهل يمكنك إيجاد مساحة هذا الجزء من سطح الدائرة المظلل فى الشكل المقابل؟



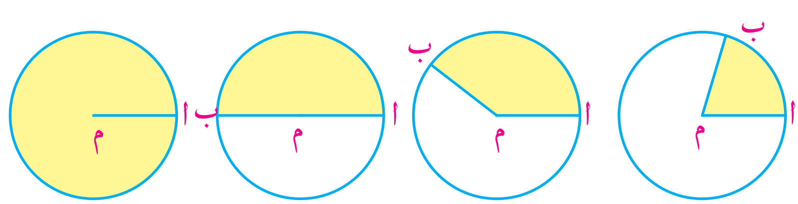
القطاع الدائرى: هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفى قطرين وقوس.

ففى الشكل المجاور $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين، القطاع الأصغر م أ جـ ب والقطاع الأكبر م أ ء ب. وتسمى $\angle$ أ م ب بزاوية القطاع الأصغر، $\angle$ أ م ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.



مساحة القطاع الدائرى Area of the Circular sector

نشاط:

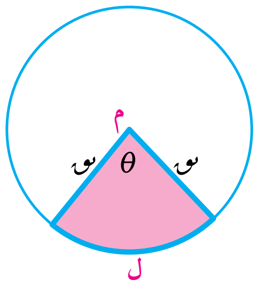


الأشكال الموضحة بالشكل العلوى تمثل عددًا من الدوائر المتطابقة:

١- هل زيادة مساحات القطاعات الدائرية ناتج عن زيادة طول نصف قطر الدائرة؟
٢- هل زيادة مساحات القطاعات الدائرية ناتج عن زيادةقياس زاوية القطاع الدائرى؟
٣- إذا استمرت الزيادة فى قياس زاوية القطاع إلى أن ينطبق الضلع النهائى $\overrightarrow{م ب}$ على الضلع الابتدائى $\overrightarrow{م أ}$ فماذا تتوقع أن تكون مساحة القطاع؟

تعلم

أولاً: مساحة القطاع الدائرى بمعلومية قياس زاويته المركزية وطول نصف القطر



مساحة القطاع يمثل جزء من مساحة دائرة قياس زاويتها المركزية يساوى ٢π .

من النشاط السابق نستنتج أن:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\theta^{ء}}{٢\pi}$$

أى أن مساحة القطاع $= \frac{\theta^{ء}}{٢\pi} \times$ مساحة الدائرة

$$= \frac{\theta^{ء}}{٢\pi} \times \pi\,\text{نق}^٢ = \frac{١}{٢}\,\text{نق}^٢\,\theta^{ء}$$

مساحة القطاع الدائرى $= \frac{١}{٢}\,\text{نق}^٢\,\theta^{ء}$ (حيث θ زاوية القطاع، نق طول نصف قطر دائرته)

تفكير ناقد: هل تعتبر الدائرة قطاعًا دائريًّا؟ وضح ذلك

مثال

١ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ١,٢ء

الحل

صيغة القانون: مساحة القطاع الدائرى $= \frac{١}{٢}\,\text{نق}^٢\,\theta^{ء}$

بالتعويض عن نق = ١٠، $\theta^{ء} = ١,٢^{ء}$: $= \frac{١}{٢}(١٠)^٢ \times ١,٢ = ٦٠$ سم^٢

حاول أن تحل

١ قطاع دائرى مساحته ٢٧٠ سم^٢ وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم ، أوجد بالراديان قياس زاويته .

ثانيًا: إيجاد مساحة القطاع الدائرى بمعلومية زاويته بالدرجات:

$$\because \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة دائرة}} = \frac{\frac{١}{٢}\,\text{نق}^٢ \times \theta^{ء}}{\pi\,\text{نق}^٢}$$

ولكن $\frac{\theta^{ء}}{٢\pi} = \frac{س^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}}$

$\therefore$ مساحة القطاع $= \frac{س^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times$ مساحة الدائرة

تذكر

العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى هى:

$$\frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$$

مثال

٢ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٦ سم وقياس زاويته ١٢٠°، أوجد مساحته لأقرب سنتيمتر مربع .

الحل

صيغة القانون: مساحة القطاع $= \frac{س^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times \pi\,\text{نق}^٢$

بالتعويض عن نق = ١٦، س° = ١٢٠°: $= \frac{١٢٠^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times \pi(١٦)^٢ \simeq ٢٦٨$ سم^٢

حاول أن تحل

٢) قطاع دائرى قياس زاويته ٦٠° وطول نصف قطر دائرته ١٢ سم أوجد مساحته لأقرب رقم عشرى واحد.

ثالثًا: إيجاد مساحة القطاع الدائرى بمعلومية طول قوسه

تعلم أن: مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ نق^2 $\theta^{ء}$

= $\frac{1}{2}$ نق^2 × $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{1}{2}$ ل نق

(وذلك بالتعويض عن: $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$)

تذكر

طول القوس الذى يقابل زاوية مركزية قياسها θ فى دائرة طول نصف قطرها نق يتحدد من العلاقة:

ل = $\theta^{ء}$ × نق

مثال

٣) أوجد مساحة قطاع دائرى محيطه يساوى ٢٨ سم، وطول نصف قطر دائرته ٨ سم.

الحل

محيط القطاع = ٢ نق + ل: أى ٢ نق + ل = ٢٨

بالتعويض عن نق = ٨ سم: ٢ × ٨ + ل = ٢٨

بالتبسيط: ل = ٢٨ − ١٦ = ١٢ سم

صيغة القانون: مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

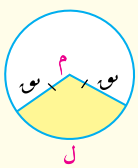
بالتعويض عن: ل = ١٢ سم، نق = ٨ سم:

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٨ = ٤٨ سم^2

أضف إلى معلوماتك

محيط القطاع الذى طول قوسه ل وطول نصف قطر دائرته نق يتحدد من العلاقة :

محيط القطاع = ٢نق + ل



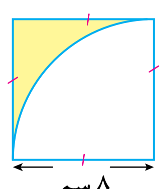
حاول أن تحل

٣) **الربط بالجغرافيا:** إذا علمت أن خط الاستواء هو دائرة طول نصف قطرها ٦٣٨٠ كم، فأوجد المسافة بين مدينتين على خط الأستواء إذا كان القوس الواصل بينهما يقابل زاوية قياسها ٣٠° عند مركز الأرض.

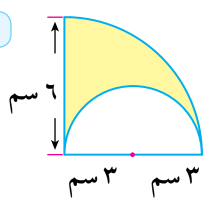
تحقق من فهمك

١) أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية:

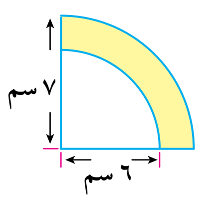
أ



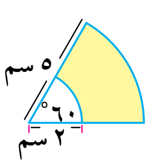
ب



جـ



د



تمـــارين (٥ - ٥)

أولًا: أكمل ما يأتى

١) مساحة القطاع الدائرى الذى فيه ل = ٦ سم، ى = ٤ سم يساوى

٢) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم، ومحيطه ٢٠ سم تساوى .... سم^{٢}.

٣) محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم^{٢}، طول قوسه ٨ سم يساوى ....

ثانيًا: اختيار من متعدد

١) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢ءِ وطول نصف قطر دائرته ٤ سم يساوى ....

أ ٤,٨ سم^{٢} ب ٩,٦ سم^{٢} ج ١٢,٨ سم^{٢} د ١٩,٦ سم^{٢}

٢) محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى ....

أ ١٤ سم ب ٢٠ سم ج ٣٠ سم د سم

٣) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى ....

أ ٣ π سم^{٢} ب ٦ π سم^{٢} ج ٩ π سم^{٢} د ١٢ π سم^{٢}

٤) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى ....

أ ٦ سم^{٢} ب ٩ سم^{٢} ج ١٢ سم^{٢} د ١٨ سم^{٢}

٥) إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠سم^{٢} وقياس زاويته ٢,٢ءِ فإن طول نصف قطر دائرته يساوى: ....

أ ٢ سم ب ٥ سم ج ١٠ سم د ٢٠ سم

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية

١) أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠°.

٢) قطاع دائرى طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم. أوجد مساحته

٣) قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، محيطه ٢٥ سم. أوجد مساحته.

٤) الربط بالزراعة: حوض زهور على شكل قطاع دائرى مساحته ٤٨ م^{٢} وطول قوسه ٦ م . أوجد محيطه وطول نصف قطر دائرته .

٥) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم. أوجد مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع.

القطعة الدائرية

Circular Segment

٥ – ٦

سوف تتعلم

- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قطعة دائرية Circular Segment

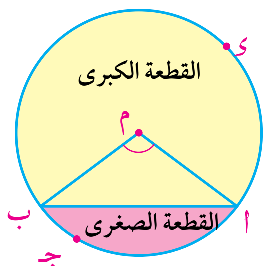
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

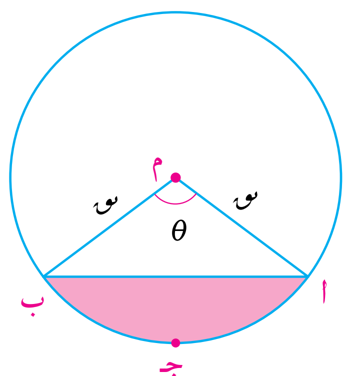
تعلم القطعة الدائرية

القطعة الدائرية هى جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس.

الوتر $\overline{أب}$ يقسم الدائرة إلى قطعتين دائرتين تسمى **القطعة الصغرى** أ جـ ب والقطعة الكبرى أ ى ب، وتسمى ∠ أ م ب **بزاوية القطعة الصغرى** بينما ∠ أ م ب المنعكسة **بزاوية القطعة الكبرى**.



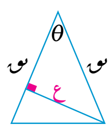
إيجاد مساحة القطعة الدائرية:



تذكر

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ نق × ع

حيث:



جا θ = $\frac{ع}{نق}$

ع = نق جا θ

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × نق × نق جا θ

مساحة القطعة الصغرى أ جـ ب

= مساحة القطاع الأصغر م أ ب - مساحة سطح المثلث م أ ب

= $\frac{1}{2}$ نق^2 θ^{ء} - $\frac{1}{2}$ × نق × نق جا θ

$\boxed{\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2}\,\text{نق}^2(\theta^{ء} - \text{جا}\,\theta)}$

حيث نق طول نصف قطر دائرتها، θ هو قياس زاوية القطعة.

فكر: هل يمكنك إيجاد مساحة القطعة الكبرى بمعلومية مساحة القطعة الصغرى؟ وضح ذلك.

مثال

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم، قياس زاويتها ١٥٠°.

الحل

$\theta^{ء} = ١٥٠° \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq \frac{٥\pi}{٦}$

جاθ = جا١٥٠°

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ - جاθ)

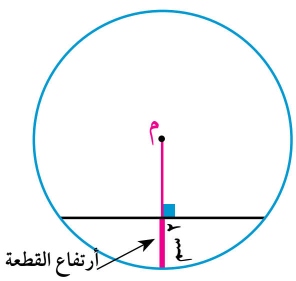
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ ($\frac{٥\pi}{٦}$ − جا١٥٠°) ≃ ٦٧,٧٧٥٨ سم^٢

حاول أن تحل

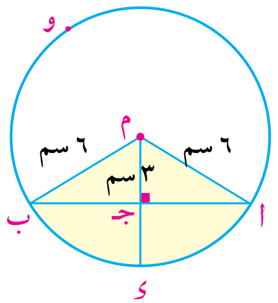
١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم، قياس زاويتها ٢,٢^{ء} مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

حاول أن تحل

٢ أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها ١٢ سنتيمترًا وارتفاعها ٢ سنتيمتر مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع.



تمــاريـن (٥ – ٦)



١ في الشكل المرسوم:

م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، م جـ = ٣ سم.

أ ارتفاع القطعة الدائرية الصغرى أ ى ب = ... سم

ب ارتفاع القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ... سم

جـ قياس زاوية القطعة الدائرية الصغرى أ ى ب = ... °

د قياس زاوية القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ... °

هـ مساحة سطح المثلث م أ ب = ... سم^2.

و مساحة القطاع الدائري م أ د ب بدلالة π = ... سم^2.

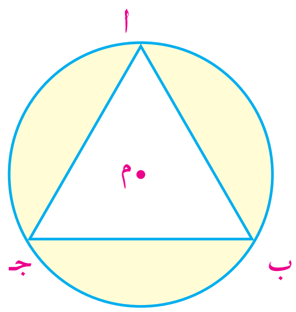
ز مساحة القطعة الصغرى بدلالة π = ... سم^2.

٢ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي

أ طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم وقياس زاويتها يساوى ٤, ١ء.

ب أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٨ سم، وقياس زاويتها تساوى ١٣٥°.

جـ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٤ سم وطول قوسها ٢٢ سم.



٣ في الشكل المرسوم:

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم، داخل الدائرة م التي طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة.

٤ أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التي طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها يساوى ١٢ سم.

المساحات

Areas

٥ – ٧

○ سوف تتعلم

- مساحة المثلث
- مساحة الشكل الرباعى
- مساحة المضلع المنتظم

○ المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مضلع منتظم regular polygon

○ الأدوات والوسائل

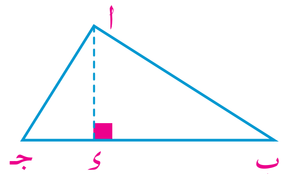
- آلة حاسبة علمية
Scientific calculator

فكر و ناقش

مساحة المثلث: The Area of a Triangle

سبق أن درست مساحة المثلث وعلمت أن مساحته تتحدد كالآتى:

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع



ففى الشكل المجاور:

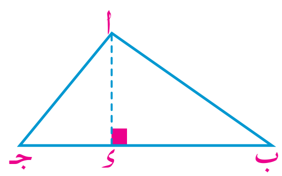
مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ ء

فكر: هل تنطبق هذه العلاقة على المثلث القائم الزاوية والمثلث المنفرج الزاوية؟

مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

The Area of a tringle in terms of the lengths of two sides and the included angle

تعلم



من الشكل المقابل:

جا ب = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$ أى أن: أ ء = أ ب جا ب

ومن قانون مساحة المثلث:

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ ء

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ ب جا ب

تعبير شفهى: أوجد مساحة المثلث بمعلومية كل من:

أ) جـ أ، جـ ب، ∠ جـ   ب) أ ب، أ جـ، ∠ أ

وبوجه عام نستنتج أن:

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

مثال

١ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى أ ب = ٩ سم ، أ جـ = ١٢ سم، ق(∠أ) = ٤٨° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

الحل

مساحة المثلث أ ب جـ = ½ × أ ب × أ جـ جا أ

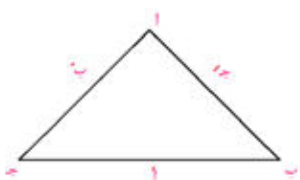
بالتعويض عن أ ب = ٩ سم ، أ جـ = ١٢ سم، ق(∠أ) = ٤٨°

مساحة المثلث أ ب جـ = ½ × ٩ × ١٢ × جا ٤٨° ≃ ٤٠,١٣ سم²

→ 1 ÷ 2 × 9 × 1 2 × Sin 4 8 =

حاول أن تحل

١ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم ، ق(∠ب) = ٦٣ ° مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.



إيجاد مساحة سطح المثلث بمعلوميةأطوال أضلاعه(صيغة هيرون)

مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه هى أَ، بَ، جـَ هى:

△ = √ع (ع - أَ) (ع - بَ) (ع - جـَ) حيث ع نصف محيط المثلث

مثال

١ أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦، ٨، ١٠ من السنتيمترات

الحل

∵ ٢ ع = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ سم ع = ١٢ سم

ع - أَ = ١٢ - ٦ = ٦سم ، ع - بَ = ١٢ - ٨ = ٤ سم ، ع - جـَ = ١٢ - ١٠ = ٢ سم

∴ مساحة △ = √ع (ع - أَ)(ع - بَ)(ع - جـَ)

= √١٢ × ٦ × ٤ × ٢ = ٢٤ سم²

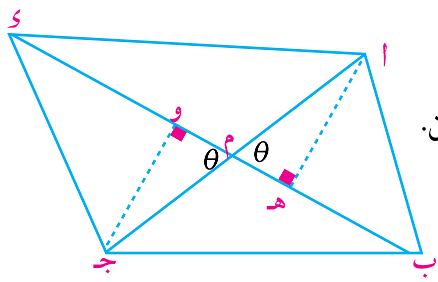
حاول أن تحل

٢ أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه:

أَ = ٥سم ، بَ = ١٢ سم ،جـَ = ١٣سم

إيجاد مساحة الشكل الرباعي المحدب — The Area of a Convex Quadrilateral

في الشكل المقابل:



أ ب جـ ى شكل رباعي فيه أجـ ∩ ب ى = {م}

أهـ ⊥ ب ى، جـ و ⊥ ب ى، θ هي الزاوية المحصورة بين القطرين.

مساحة الشكل الرباعي = مساحة △ أ ب ى + △ جـ ب ى

= $\frac{1}{2}$ ب ى × أ هـ + $\frac{1}{2}$ ب ى × جـ و

= $\frac{1}{2}$ ب ى (أ هـ + جـ و) = $\frac{1}{2}$ ب ى (أ م جاθ + جـ م جاθ)

= $\frac{1}{2}$ ب ى × جا θ (أ م + جـ م) = $\frac{1}{2}$ ب ى × أ جـ × جا θ

وبوجه **عام** يكون مساحة الشكل الرباعي بمعلومية طولى قطريه والزاوية المحصورة بينهما هى:

> مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

فكر: هل تتغير مساحة الشكل الرباعي إذا استبدلنا الزاوية θ بالزاوية المكملة لها؟ فسر إجابتك.

مثال

٢ أوجد مساحة الشكل الرباعي الذى طولا قطريه ١٢ سم، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨°
مقربا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

صيغة المساحة هى:

مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٦ × جا ٦٨° ≃ ٨٩ سم^2

حاول أن تحل

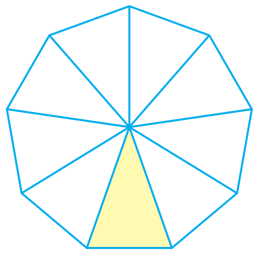
٣ أوجد مساحة الشكل الرباعي الذى طولا قطريه ٣٢ سم، ٤٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢°
مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

٤ **تفكير ناقد:** احسب باستخدام القانون السابق مساحة كلاً من:

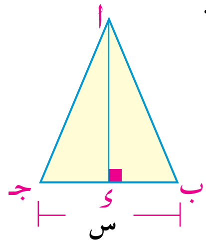
أ مربع طول قطره ١٠ سم

ب معين طولا قطريه ٨ سم ، ١٢ سم - ماذا تلاحظ؟

إيجاد مساحة المضلع المنتظم — The area of a regular polygon



شكل (١)



شكل (٢)

شكل (١): يمثل مضلع منتظم، عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س.

شكل (٢): يمثل أحد المثلثات المأخوذة من شكل (١)

∵ ق ($\angle$ ب أ جـ) = $\frac{\text{٢}\pi}{\text{ن}}$ (لماذا؟)

∴ ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}}$ أى أن أ ء = ب ء × ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

أ ء = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$ (حيث س طول ضلع المضلع)

مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ب جـ × أ ء = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س × $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

= $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ س$^{\text{٢}}$ × ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

> مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ن س$^{\text{٢}}$ × ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

مثال

٣) أوجد مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه ٦ سم مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

الحل

صيغة القانون: مساحة الشكل المنتظم = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ن س$^{\text{٢}}$ × ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

بالتعويض عن ن = ٨، س = ٦ سم:

المساحة = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ × ٨ × (٦)$^{\text{٢}}$ × ظتا $\frac{\text{١٨٠}^\circ}{\text{٨}}$

= ٧٢ × $\frac{\text{١}}{\text{ظا ٢٢,٥}^\circ}$ $\simeq$ ١٧٣,٨ سم$^{\text{٢}}$

تعبير شفهى:

باستخدام صيغة القانون السابق أوجد مساحة كل من:

١- المثلث المتساوى الأضلاع ٢- المربع ٣- المسدس المنتظم

حاول أن تحل

٥) أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

تمـارين (٥ – ٧)

١) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ في كل من الحالات الآتية:

أ) أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم، ق(∠ب) = ٩٠°

ب) أ جـ = ١٢سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{\text{أ جـ}}$ يساوى ٧ سم.

جـ) أ ب = ١٦سم، ب جـ = ٢٠ سم، ق(∠ب) = ٤٦°

د) أ ب = ٨سم، ب جـ = ٧سم، أ جـ = ١١سم.

٢) أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ء في كل من الحالات الآتية:

أ) متوازى أضلاع فيه أ ب = ٨سم، ب جـ = ١١سم، ق(∠ب) = ٦٠°

ب) شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يساوي ٧سم، ١١سم على الترتيب وطول العمود المرسوم من ء على $\overline{\text{ب جـ}}$ يساوي ٦سم.

جـ) معين فيه أ ب = ٨سم، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه تساوي ٥٨°.

٣) أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية (مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة)

أ) خماسى منتظم طول ضلعه يساوى ١٦سم.

ب) سداسى منتظم طول ضلعه يساوى ١٢سم.

أوجد مساحة المثلث أ ب جـ في كل من الحالات الآتية :

٤) أَ = ١٥سم ، بَ = ١٢سم ، جـَ = ٩ سم

٥) أَ = ١٦سم ، بَ = ١٨سم ، جـَ = ٢٤ سم

٦) أَ = ٣٢سم ، بَ = ٣٦ سم، جـَ = ٣٠ سم

تمارين عامة على الوحدة الخامسة

(١) بسط كلًّا مما يأتى:

أ) جا$(-\theta)$ قتا (θ) ....

ب) $($جا$\theta +$ جتا$\theta)^{٢} - \frac{٢}{\text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta}$ ....

جـ) جاθ قتا$\theta -$ جتا$^{٢}\theta$ ....

د) جتا$^{٢}\theta$ قا $\theta\cdot$ قتاθ ....

هـ) جا$(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ قا$(-\theta)$ ....

(٢) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ) جتا$(١٨٠° + \theta)$ قتا$(٩٠° + \theta) = -١$

ب) قا$\theta -$ جاθ ظا$\theta =$ جتا θ

جـ) ظا$^{٢}\theta +$ ظتا$^{٢}\theta - ($قا$^{٢}\theta +$ قتا$^{٢}\theta) = -٢$

د) $($جا$\theta +$ جتا$\theta)^{٢} + ($جا$\theta -$ جتا$\theta)^{٢} = ٢$

(٣) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى $[٠، ٢\pi]$

أ) ٢ جا$\theta - ١ = ٠$ ....

ب) $\sqrt{٣}$ ظتا$\theta = ١$ ....

جـ) ٢جتا$^{٢}\theta +$ جتا$\theta = ٠$ ....

(٤) أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات الآتية :

أ) ظا$\theta - \sqrt{٣} = ٠$ ....

ب) جتا ٥$\theta =$ جا٤θ ....

جـ) قا٤$\theta =$ قتا٢θ ....

(٥) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب الذى فيه:

أ) ق $(\angle$أ$) = ٤٣°$ ، ب جـ = ١٢ سم

ب) أ ب = ١٢,٨ سم ، ب جـ = ١٩,٢ سم

(٦) أبسط صورة للمقدار $\frac{١ - \text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جتا}^{٢}\theta}$ هى:

أ) -١ ب) ١ جـ) ظا$^{٢}\theta$ د) ظتا$^{٢}\theta$

(٧) مجموعة حل المعادلة $\sqrt{٣}$ ظا $\theta = ١$ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ هى:

أ) ٣٠° ب) ١٥٠° جـ) ٢١٠° د) ٢٤٠°

(٨) إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ٤٨سم^{٢} وطول قوسه يساوى ١٢سم، فإن طول نصف قطر دائرته تساوى:

أ) ٤سم ب) ٨سم جـ) ١٢سم د) ١٦سم

(٩) مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه : أَ = ٦ سم ، بَ = ٨ سم ، جـَ = ١٢ سم تساوي ......سم^{٢} (لأقرب جزء من عشرة)

أ) ١٥,٧ ب) ٢١,٣ جـ) ٢٧,٣ د) ٣٥,٣

(١٠) أوجد على صورة عدد نسبى قيمة كل من:

أ) جا θ إذا كانت جتا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$

ب ظا θ إذا كانت قتا $\theta = \frac{١٣}{٥}$ ، $٩٠° > \theta > ١٨٠°$

(١١) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ مترًا ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة ، وقاس زاويتى انخفاضيهما، فوجدهما ١٢َ ٣٥° ، ٦َ ٥٣° أوجد البعد بين السفينتين .

(١٢) دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥ سم، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ على الترتيب بحيث أ ب = ١٢سم . أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سنتيمتر مربع .

(١٣) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وطول قوسها ٢٦,١٩ سم.

(١٤) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة تمر برؤوسه، أوجد طول نصف قطر الدائرة، ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{\text{ب جـ}}$.

(١٥) أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه أجـ = ١٤ سم ، ب ء = ١٨ سم وقياس الزاوية بين قطريه ٧٨° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

(١٦) أوجد مساحة ثمانى منتظم طول ضلعه ١٠ سم مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

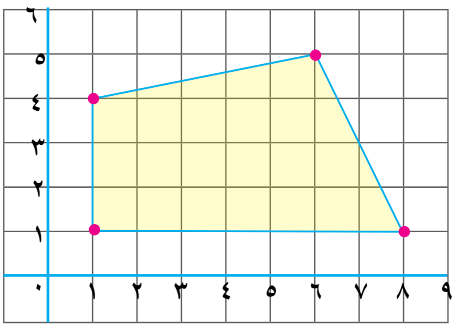
(١٧) من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة ٢٢ ، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين.

(١٨) قطاع دائرى مساحته تساوى ٢٧٠سم^٢ وطول نصف قطر دائرته يساوى ١٥سم أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان.

(١٩) أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول نصف قطر دائرتها يساوى ٥سم، وطول وترها يساوي ٨سم.

(٢٠) **هندسة إحداثية:**

أولًا: أوجد مساحة الشكل المقابل.



ثانيًا: أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة كل من الأشكال الآتية:

أ مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٢سم والزاوية المحصورة بينهما ٦٤°.

ب شكل منتظم ذو ١٢ ضلعًا وطول ضلعه ١٠سم.