3

Republique Arab d'Egypte
Ministere de L'Education et
de L'Enseignement et L'Enseignement
technique Administration central pour
le développement des Curriculums
Administration central des affaires de livres

MATHÉMATIQUES

Troisième préparatoire — Livre de l'élève — Premier semestre

M. Omar Fouad Gaballa

Prof.Dr. Afaf Abo-ElFoutoh Salah
Dr. Essam Wasfy Rouphaiel
M. Serafiem Elias Skander
M. Kamal Yones Kabsha

2025 - 2026

Introduction

Cher élève,

Nous avons le plaisir de te présenter le manuel de mathématiques de troisième préparatoire. Nous avons tenu à faire de l'apprentissage des mathématiques un travail intéressant et utile qui a son application dans la vie partique et dans l'apprentissage des autres matières scolaires afin que tu sentes l'importance de l'étude des mathématiques et sa valeur et que tu apprécies le rôle des mathématiciens. Ce manuel présente les activités comme éléments essentiels, et nous avons essayé de présenter le contenu scientifique d'une maniére simple pour t'aider à construire tes connaissances mathématiques et à acquérir des méthodes de raisonnements covenables qui favorisent la créativité.

Ce manuel comporte plusieurs unités et chaque unité comporte plusieurs leçons. Les images et les couleurs sont utilisées pour illustrer les notions mathématiques, les propriétés des figures, en utilisant un langage facile et adapté qui tient compte des connaissances acquises. Nous avons également tenu à t'entraîner à découvrir les connaissances visées pour développer ta capacité á l'auto apprentissage. La calculatrice et l'ordinateur sont utilisés à chaque fois que l'occasion se présente. Chaque leçon comporte des exercices et chaque unité comporte des exercices généraux, des activités concernant le portfolio et une épreuve. A la fin du manuel, nous proposons des épreuves générales, pour t'aider à réviser la totalité du programme, et des indications pour les réponses de certains exercices.

Nous espérons que ce travail sera bénéfique pour toi et pour notre chère Egypte.

Les auteurs

Sommaire

Trigonométrie

Unité (4) : Trigonométrie

Géométrie analytique

Unité (5) : Géométrie analytique

SYMBOLES MATHÉMATIQUES UTILISÉS

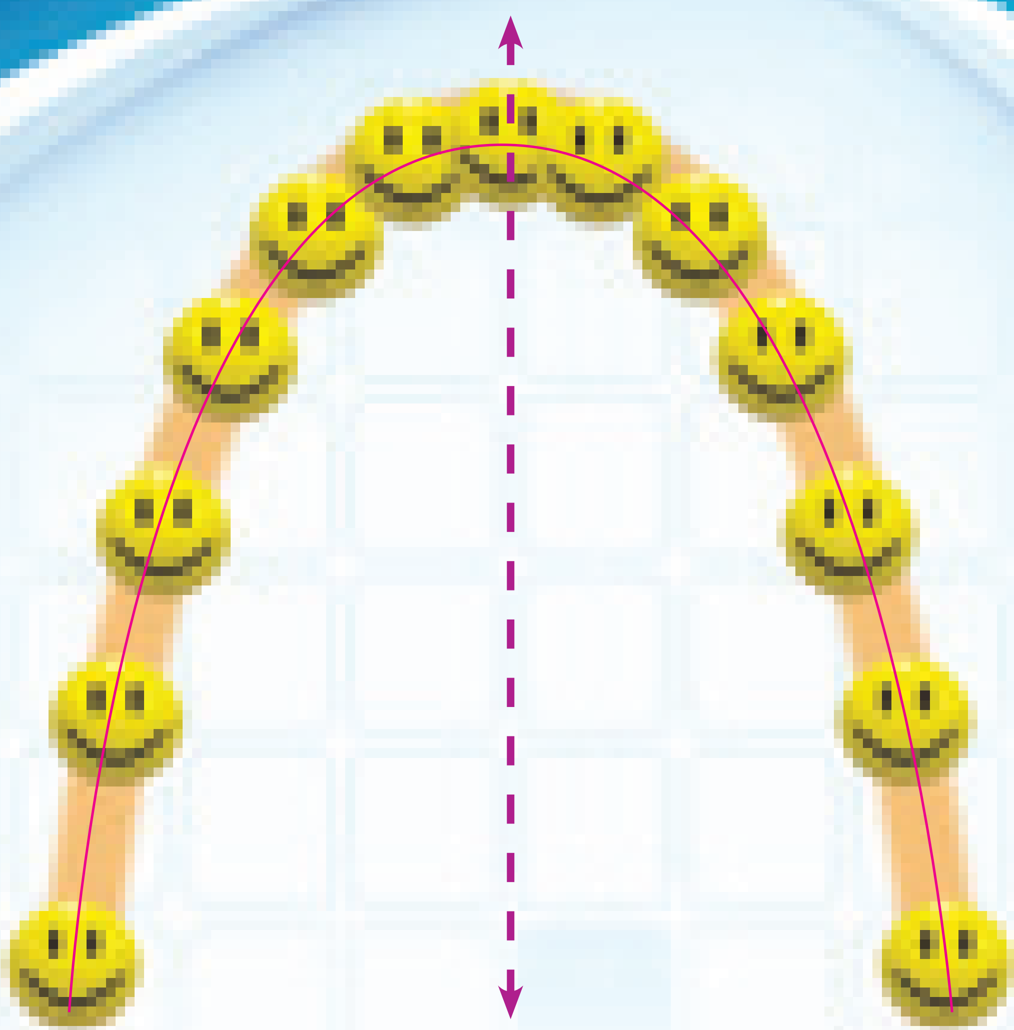
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels	$\perp$	perpendiculaire à
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers	$//$	parallèle à
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels	$\overline{AB}$	le segment AB
$\mathbb{Q}'$	ensemble des nombres irrationnels	$\overrightarrow{AB}$	la demi-droite AB
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels	$\overleftrightarrow{AB}$	la droite AB
$\sqrt{a}$	racine carré de a	$m(\angle A)$	mesure de l'angle A
$\sqrt[3]{a}$	racine cubique de a	$m(\overset{\frown}{AB})$	mesure de l'arc AB
$[a , b]$	intervalle fermé	$\sim$	semblable à
$]a , b[$	intervalle ouvert	$>$	plus grand que
$[a , b[$	intervalle semi-fermé	$\geqslant$	plus grand ou égal à
$]a ,b]$	intervalle semi-ouvert	$<$	plus petit que
$[a , +\infty[$	intervalle illimité	$\leqslant$	plus petit ou égal à
$\equiv$	superposition	$p(A)$	probabilité de l'événement A
card (A)	nombre d'éléments de A	$\overline{x}$	moyenne arithmétique
E	espace des éventualités	σ	écart type
$\sum$	somme		

Algèbre

Relations et fonctions

Equations

Fonctions rationnelles et opérations



Un joueur a lancé un ballon qui a suivi le trajet indiqué par la figure ci-dessus.

Cette courbe représente une fonction, que tu étudieras, appelée une fonction du second degré.

1-1 Produit cartésien

A apprendre

- ☆ Comment trouver le produit cartésien de deux ensembles non vides.

Expressions de base :

- ☆ Couple
- ☆ Produit cartésien
- ☆ Diagramme sagittal
- ☆ Diagramme cartésien
- ☆ Relation

Réfléchis et discute

Nous avons déjà étudié la relation entre deux variables x et y.

1. Trouve l'ensemble des couples vérifiant la relation : $y = 2x - 1$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$
2. Représente ces couples graphiquement dans un repère cartésien.
3. Est-ce que le couple (3 , 5) est égal au couple (5 , 3) ? **(Aide-toi de la figure)**.

De ce qui précède, on remarque que :

1. Dans un couple (a , b), a est appelée la première composante du couple et b est appelée la deuxième composante du couple.
2. Tout couple est représenté par un point et un seul dans un repère cartésien.
3. ***Si*** $a \neq b$, ***alors*** $(a ; b) \neq (b ; a)$, Pourquoi ?
4. $(a ; b) \neq \{a ; b\}$.
5. ***Si*** $(a ; b) = (x ; y)$, ***alors*** $a = x$, $b = y$

Exemple 1

Si : $(x - 2 ; 3) = (5; y + 1)$, ***trouve*** la valeur de x et y

Solution

$x - 2 = 5 \quad \therefore x = 7 \quad$ et $\quad 3 = y + 1 \quad \therefore y = 2$

Pour t'entraîner :

Trouve **la valeur de a et b dans chacun des cas suivants :**

A. $(a ; b) = (-5 ; 9)$
B. $(a - 2 ; b + 1) = (2 ; -3)$
C. $(6 ; b - 3) = (2 - a ; - 1)$
D. $(a - 7 ; 26) = (-2; b^3 - 1)$

Exemple 2

Si X = {a ; b} et Y = {-1 ; 0 ; 3) , trouve : $X \times Y$ et $Y \times X$, **Que remarques-tu ?**

Solution

Pour trouver le produit cartésien des deux ensembles X et Y, noté $X \times Y$, on écrit l'ensemble de tous les couples ayant pour première composante un élément de X, et pour deuxième composante un élément de Y.

De même : $X \times Y = \{a ; b\} \times \{-1 ; 0 ; 3\} = \{(a ; -1) , (a ; 0), (a ; 3) , (b ; -1), (b ; 0), (b ; 3)\}$

$Y \times X = \{-1 ; 0 ; 3\} \times \{a ; b\} = \{(-1 ; a), (-1 ; b), (0 ; a), (0 ; b), (3 ; a), (3 ; b)\}$

On remarque que : $X \times Y \neq Y \times X$

On peut obtenir $X \times Y$ et $Y \times X$ à partir des deux tableaux suivants :

×		Deuxième composante		
		-1	0	3
Première composante	a	(a ; -1)	(a ; 0)	(a ; 3)
	b	(b ; -1)	(b ; 0)	(b ; 3)

×		Deuxième composante	
		a	b
Première composante	-1	(-1 ; a)	(-1 ; b)
	0	(0 ; a)	(0 ; b)
	3	(3 ; a)	(3 ; b)

Réfléchis :

1 Dans quelles conditions a-t-on $X \times Y = Y \times X$?

2 $X \times Y$ et $Y \times X$ ont-ils le même nombre d'éléments ?

Remarques :

1 ***Si*** X et Y sont deux ensembles finis non vides, alors :

$$X \times Y = \{(a ; b) : a \in X , b \in Y\}$$

2 $X \times Y \neq Y \times X$ ***où :*** $X \neq Y$

card $(X \times Y)$ = card $(Y \times X)$ = card $(X) \times$ card (Y)

où «card » désigne le nombre d'éléments d'un ensemble.

3 ***Si*** $(k , m) \in X \times Y$, ***alors*** $k \in X$ et $m \in Y$

4 ***Si*** X est un ensemble non vide, alors :

$$X \times X = \{(a ; b) : a \in X ; b \in X\}$$

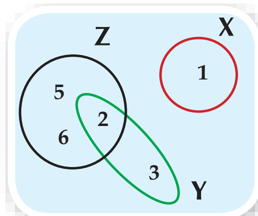
peut s'écrire X^2 et qui se lit « X deux ».

Exemple 3

Si X = {1} , Y = {2 ; 3}et Z = {2 ; 5 ; 6} , représente les ensembles X , Y et Z par un diagramme de Venn, puis trouve :

1. A $X \times Y$ B $Y \times Z$ C $X \times Z$ D Y^2
2. $(X \times Y) \cup (Y \times Z)$
3. $X \times (Y \cap Z)$
4. $(X \times Y) \cap (X \times Z)$
5. $(Z - Y) \times (X \cup Y)$

Solution



1. A $X \times Y = \{1\} \times \{2 ; 3\} = \{(1 ; 2) ; (1 , 3)\}$

B $Y \times Z = \{2 ; 3\} \times \{2 ; 5 ; 6\}$

$= \{(2 ; 2) ; (2 ; 5) ; (2 ; 6) ; (3 ; 2) ; (3 ; 5) ; (3 ; 6)\}.$

C $X \times Z = \{1\} \times \{2 ; 5 ; 6\} = \{(1 ; 2) ; (1 ; 5) ; (1 ; 6)\}$

D $Y^2 = Y \times Y = \{2 ; 3\} \times \{2 ; 3\}$

$= \{(2 ; 2) ; (2 ; 3) ; (3 ; 2) ; (3 ; 3)\}$

2. $(X \times Y) \cup (Y \times Z) = \{(1 ; 2) ; (1 ; 3) ; (2 ; 2) ; (2 ; 5) ; (2 ; 6) ; (3 ; 2) ; (3 ; 5) ; (3 ; 6)\}$
3. $X \times (Y \cap Z) = \{1\} \times \{2\} = \{(1 ; 2)\}$
4. $(X \times Y) \cap (X \times Z) = \{(1 ; 2) ; (1 ; 3)\} \cap \{(1 ; 2) ; (1 ; 5) ; (1 ; 6)\} = \{(1 ; 2)\}.$
5. $Z - Y = \{5 , 6\}$ $\therefore (Z - Y) \times (X \cup Y) =$ .... Complète

Pour t'entraîner :

Si X = {2 ; - 1} ; Y = {4 ; 0} et Z = {4 ; 5 ; -2}, trouve :

A $X \times Y$ B $Y \times Z$ C X^2

D card $(X \times Z)$ E card (Y^2) F card (Z^2)

Représentation du produit cartésien :

Exemple 4

1. Si X = {1 ; 2} et Y = {3 ; 4 ; 5}, ***trouve :*** $X \times Y$, puis représente-le par :

a) Un diagramme sagittal. **b) Un diagramme cartésien.**

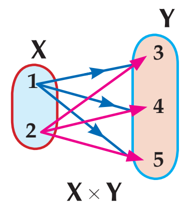
Solution

$X \times Y = \{1 ; 2\} \times \{3 ; 4 ; 5\} = \{(1 ; 3) ; (1 ; 4) ; (1 ; 5) ; (2 ; 3) ; (2 ; 4) ; (2 ; 5)\}$

Le produit cartésien X × Y peut être représenté par un diagramme sagittal ou par un diagramme cartésien comme suit :

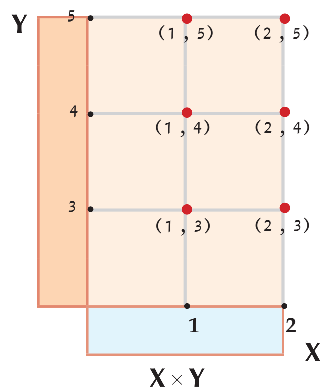
1 Le diagramme sagittal

On trace une flèche de chaque élément de la première composante (les éléments de l'ensemble X) vers chaque élément de la deuxième composante (les éléments de l'ensemble Y)



Donc, le diagramme sagittal du produit cartésien représente chaque couple par une flèche partant de la première composante vers la deuxième composante.

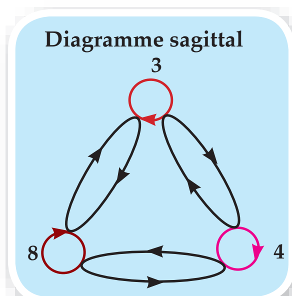
2 Le diagramme cartésien (le quadrillage graphique orthogonal) :



Sur un quadrillage graphique orthogonal, on représente les éléments de l'ensemble X sur l'axe horizontalement et l'ensemble Y sur l'axe verticalement. Les points d'intersection des droites horizontales avec les droites verticales représentent les couples éléments du produit cartésien X x Y.

Exemple 5

Si X = {3 ; 4 ; 8}, trouve X × X, puis représente-le par un diagramme sagittal.



Solution

$X \times X = \{3 ; 4 ; 8\} \times \{3 ; 4 ; 8\}$

$=\{(3 ; 3) ; (3 ; 4) ; (3 ; 8) ; (4 ; 3) ; (4 ; 4) ; (4 ; 8) ; (8 ; 3) ; (8 ; 4) ; (8 ; 8)\}$.

Dans la figure, on remarque que les couples sont représentés par des flèches et que les couples ayant deux composantes égales comme (3 ; 3) ; (4 ; 4) et (8 ; 8) sont représentés par des boucles pour indiquer que chaque flèche part d'un point vers lui-même.

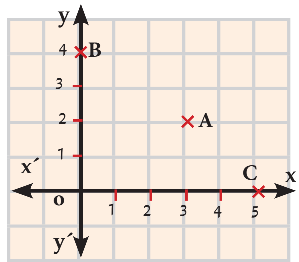
On remarque également que : card (X) = 3, d'où card (X × X) = 3 × 3 = 9

Dans ce cas, le produit cartésien X × X est représenté graphiquement par neuf points et chaque point représente un couple. Si X est un ensemble infini (qui a une infinité d'éléments), alors : le nombre d'éléments de X × X est infini.

Réfléchis : Comment peut-on représenter les produits cartésiens suivants ?

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le produit cartésien de deux ensembles infinis et sa représentation :



1 Pour représenter le produit cartésien N × N = {(x , y) : x ∈ N , y ∈ N}

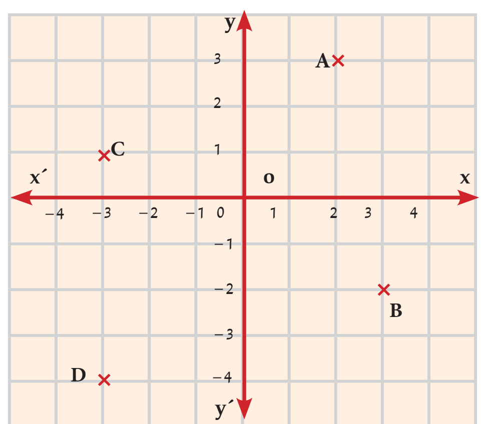
1. On trace deux droites perpendiculaires dont l'une est la droite horizontale $\overleftrightarrow{xx'}$ et l'autre est la droite verticale $\overleftrightarrow{yy'}$ qui se coupent au point o.
2. On représente les nombres naturels N sur chacune des deux droites en partant du point 0 qui représente le nombre zéro.
3. On trace des droites verticales et d'autres horizontales passant par les points qui représentent les nombres naturels. On obtient la figure ci-contre. Les points d'intersection de ces droites les unes avec les autres représentent le quadrillage graphique orthogonal du produit cartésien N × N.

On remarque que : Tout point du quadrillage représente un couple du produit cartésien N × N.

Par exemple : le point A représente le couple (3 , 2) et le point B représente le couple (0 , 4).

Complète : Le point C représente le couple (.... , ...) , et le point o représente le couple (.... , ...).

2 Pour représenter le produit cartésien Z × Z = {(x , y) : x ∈ Z , y ∈ Z}.



On représente l'ensemble des nombres entiers sur la droite horizontale et sur la droite verticale où le point o représente le couple (0 , 0).
Dans ce cas , tout point du quadrillage représente un couple du produit cartésien Z × Z.
Ce quadrillage est appelé « le repère cartésien Z × Z ».

Pour t'entraîner :

Détermine les couples représentant les points A , B , C et D dans le quadrillage graphique précédent.

3 Pour représenter le produit cartésien Q × Q = {(x , y) : x ∈ Q et y ∈ Q}

Trace un quadrillage graphique orthogonal, puis représente l'ensemble des nombres rationnels Q sur la droite horizontale et sur la droite verticale. Sur ce quadrillage , détermine les points :

A $(3 ; \frac{5}{2})$, B $(-\frac{3}{2} ; 4)$, C $(-3 ; -\frac{3}{2})$ et D $(\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2})$

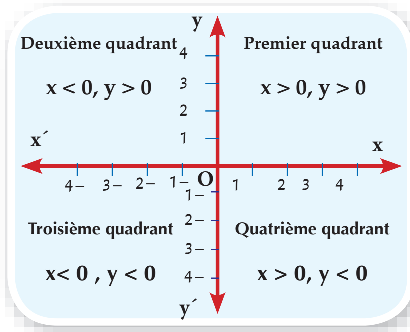
4 Représentation du produit cartésien R X R = {(x , y) : x ∈ R et y ∈ R}

On représente l'ensemble des nombres réels sur la droite horizontale et sur la droite verticale où le point O représente le couple (0 , 0).

La droite $\overleftrightarrow{xx'}$ est appelée l'axe des abscisses ou l'axe des x

La droite $\overleftrightarrow{yy'}$ est appelée l'axe des ordonnées ou l'axe des y.

Le quadrillage est partagé en quatre quadrants comme le montre la figure ci-contre :



Exemple 6

Trace un quadrillage graphique orthogonal représentant le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, puis cite le quadrant ou l'axe auquel appartient chacun des points suivants :

A (3 ; 3), B (3 ; -2), C (-4 ; -2), D (-4 ; 3), E (0 ; - 3) et F(2 ; 0)

Solution

A (3 ; 3) est situé dans le premier quadrant.

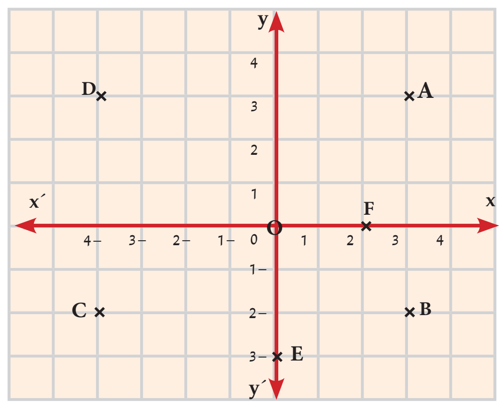
B (3 ; -2) est situé dans le quatrième quadrant.

C (- 4 ; - 2) est situé dans le troisième quadrant.

D (- 4 ; 3) est situé dans le deuxième quadrant.

E (0 ; - 3) est situé sur l'axe des ordonnées.

F (2 ; 0) est situé sur l'axe des abscisses.



Pour t'entraîner :

Si X = [- 2 ; 3], détermine la région à laquelle appartient X × X.

Lesquels des points suivants appartiennent à X × X

A (1 ; 2), B (3 ; - 1), C (- 1 ; 4) et D (-2 ; 0) ?

1-2 Relations

A apprendre

☆ La notion d'une relation d'un ensemble X à un ensemble Y.

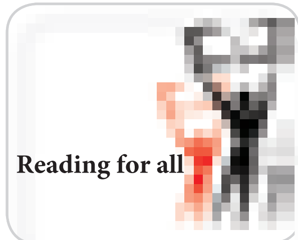
☆ La notion d'une relation d'un ensemble X vers lui-même.

Expressions de base

☆ Relation.

☆ Graphe d'une relation.

Réfléchis et discute

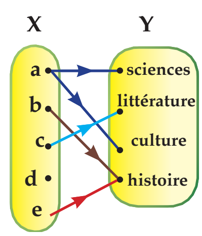


Dans le cadre du festival « La lecture pour tous », cinq élèves représentés par l'ensemble X = {a ; b ; c ; d ; e} sont allés à une bibliothèque pour lire quelques livres représentés par l'ensemble Y = {sciences ; littérature ; culture ; histoire}. L'élève (a) a lu de sciences et un livre de culture. L'élève livre (b) a lu un livre livre d'histoire. L'élève (c) a lu un livre de littérature. L'élève (e) a lu un livre d'histoire. L'élève (d) n'a lu aucun livre.

1. Ecris les phrases précédentes sous forme de couples de X vers Y.
2. Représente l'ensemble des couples précédents par un diagramme sagittal.

Remarque que : L'expression « a lu » relie quelques éléments de l'ensemble X à quelques éléments de l'ensemble Y d'où l'expression « a lu » détermine une relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y.

Une relation est habituellement symbolisée par la lettre R et cette relation peut être représentée par un diagramme sagittal comme l'indique la figure ci-contre où on trace une flèche partant d'un élève en allant vers le domaine du livre lu.



Nous pouvons exprimer la relation de X vers Y par l'ensemble des couples suivants :

{(a ; sciences) ; (a ; littérature) ; (b ; histoire) ; (c ; littérature) , (e ; histoire)}

Cet ensemble de couples est appelé le graphe de la relation R.

Réfléchis : Est-ce que le graphe G de la relation R est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$?

Exemple 1

Soient X = {-1 ; 1 ; 2} et Y = {2 ; 4 ; 6 ; 8}, R est une relation de X vers Y où a R b signifie que « b = 2a + 4 » pour tout $a \in X$, $b \in Y$.

Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

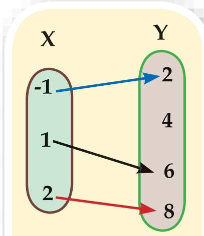
Solution

Pour : a = -1 $\therefore$ b = 2 × (-1) + 4 = 2

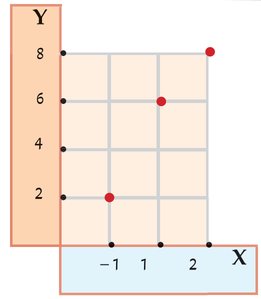
Pour : a = 1 $\therefore$ b = 2 × 1 + 4 = 6

Pour : a = 2 $\therefore$ b = 2 × 2 + 4 = 8

$\therefore$ R = {(-1 ; 2); (1 ; 6); (2 ; 8)}



Digramme sagittal



Digramme cartésien

De ce qui précède, on déduit que :

1. La relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y, où X et Y sont des ensembles non vides, relie quelques éléments ou tous les éléments de X à quelques éléments ou tous les éléments de Y.
2. Le graphe de la relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y est un ensemble de couples ayant pour première composante un élément de X et pour deuxième composante un élément de Y.
3. Si R est une relation de X vers Y, alors R $\subset$ X × Y.

Relation sur un ensemble :

Si R est une relation de X vers X, on dit que R est une relation sur X. Dans ce cas, R $\subset$ X × X.

Exemple 2

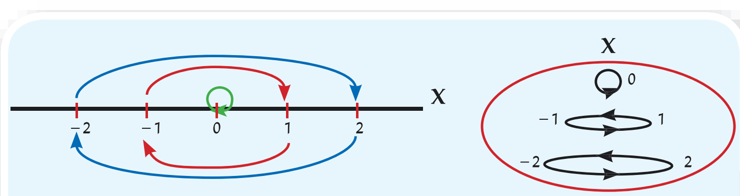
Soit X = {-2; -1; 0; 1; 2}. R est une relation définie sur X où a R b signifie que :

« le nombre a est l'opposé du nombre b » pour tout a $\in$ X , b $\in$ X

Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

Solution

R = {(-2 ; 2); (-1 ; 1); (0 ; 0); (1 ; -1); (2 ; -2)}



Digramme sagittal

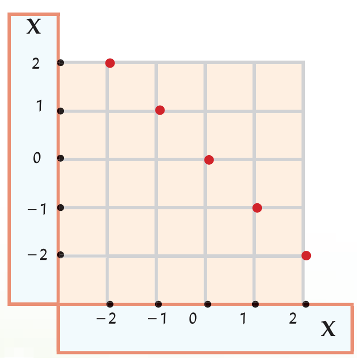


Diagramme cartésien

Pour t'entraîner :

Soient $X = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $Y = \{12 ; 21 ; 47 ; 52\}$. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que : « a est un chiffre du nombre b » pour tout $a \in X$, $b \in Y$.

1. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.
2. Lesquelles des propositions suivantes sont justes ? Justifie ta réponse :

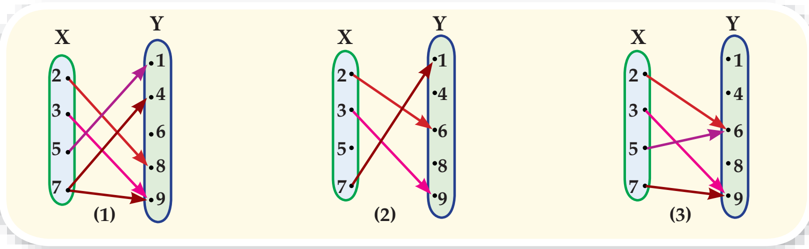
   1 R 52   2 R 21   3 R 47

Fonction (application)

1-3

Réfléchis et discute

Les figures suivantes représentent des relations de X vers Y.



1. Écris le graphe de chaque relation puis représente-le par un diagramme cartésien
2. Lesquelles des relations suivantes vérifient la condition suivante : « chaque élément de X est relié à un élément et un seul élément de Y ».

Définition :

Une relation d'un ensemble X vers un ensemble Y est dite fonction si chaque élément de X apparaît une fois et une seule comme première composante dans un couple du graphe de la relation.

Expression symbolique d'une fonction :

1. Une fonction est symbolisée par l'une des lettres : f ou m ou q ou... La fonction f de l'ensemble X vers l'ensemble Y s'écrit mathématiquement :

   $f : X \to Y$ qui se lit : «f est une fonction de X vers Y».

Remarques :

1. Si f est une fonction de X vers X, on dit que f est une fonction définie sur X.

2. Si le couple (x; y) appartient au graphe de la fonction, on dit que l'élément y est l'image de l'élément x par la fonction f et on l'exprime par l'une des deux formes suivantes :

   $f : x \mapsto y$ qui se lit « y est l'image de x par la fonction f »

   $f(x) = y$ qui se lit « f est une fonction telle que $f(x) = y$

A apprendre

- La notion de fonction.
- Expression symbolique d'une fonction.

Expressions de base

- Fonction.
- Domaine de définition.
- Ensemble d'arrivée.
- Ensemble-image.

Exemple 1

Soit f une fonction définie sur X telle que X = {3 ; 4 ; 5 ; 6}. Si f(3) = 3 , f(4) = 5 , f(5) = 4 et f(6) = 5 , représente f par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien puis écris le graphe de f.

Solution

Le graphe de f = {(3; 3); (4; 5); (5; 4); (6; 5)}

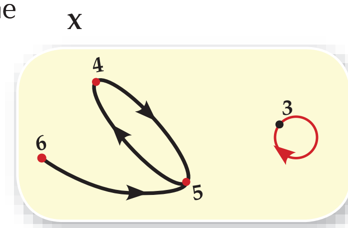


diagramme sagittal

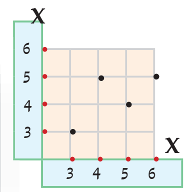
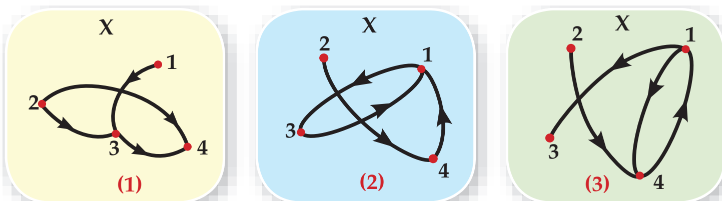


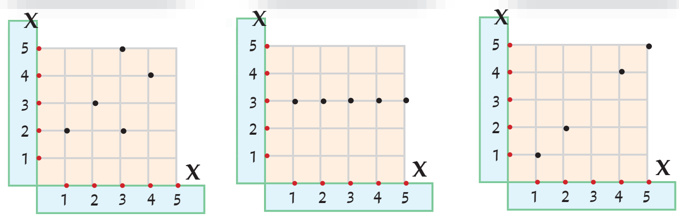
diagramme cartésien

Pour t'entraîner :

1. Si X = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, lesquels des diagrammes sagittaux ci-contre représentent des fonctions définies sur X ?



2. Lesquels des diagrammes cartésiens ci-contre représentent des fonctions de X vers X ?.



(1) (2) (3)

Réfléchis : **Est-ce que toute relation est une fonction ? Justifie ta réponse en donnant des exemples.**

Domaine de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image

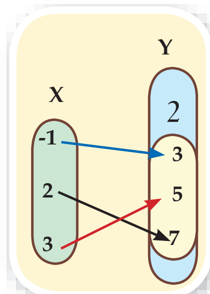
Si f est une fonction de l'ensemble X vers l'ensemble Y.

où f : X → Y , alors

L'ensemble X est appelé le domaine de définition de la fonction f.

L'ensemble Y est appelé l'ensemble d'arrivée de la fonction f.

L'ensemble des images des éléments de X par la fonction f est appelé l'ensemble image de la fonction.

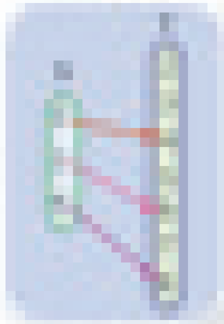


Par exemple : Si f : X → Y.

, X = {- 1; 2; 3}, Y = {2; 3; 5; 7} et le graphe de f = {(-1; 3); (3; 5); (2; 7)}, alors :

1. Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble X = {-1 ; 2 ; 3}
2. L'ensemble d'arrivée de la fonction f est l'ensemble Y = {2 ; 3 ; 5 ; 7}
3. L'ensemble image de la fonction f = {3 ; 5 ; 7}.

Remarque que : L'ensemble image d'une fonction est un sous-ensemble de son ensemble d'arrivée.



1-4

Fonctions polynômes

A apprendre

- La notion d'une fonction affine et sa représentation graphique.

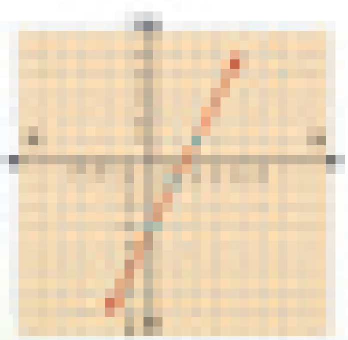
Expressions de base :

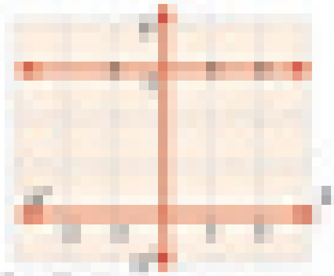
- Une fonction polynôme.
- Une fonction linéaire.
- Une fonction du second degré.
- Représentation graphique d'une fonction.

Fonction affine

Définition

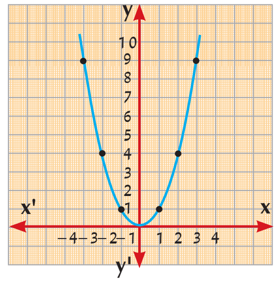
Représentation graphique d'une fonction affine :





On présente les couples obtenus dans un tableau comme suit :

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y = f(x)	9	4	1	0	1	4	9



On détermine dans un repère cartésien les points représentant les couples, puis on trace la courbe passant par ces points.

On remarque que :

1. La courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe de symétrie a pour équation $x = 0$
2. Les coordonnées du sommet de la courbe sont (0 ; 0) et la valeur minimale de la fonction = 0

Exemple 4

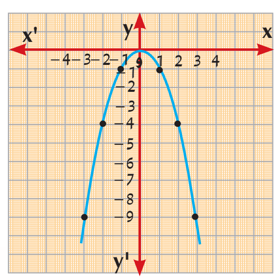
Représente graphiquement la fonction du second degré :

f telle que $f(x) = -x^2$ où $x \in R$ en prenant $x \in [-3; 3]$

Solution

On répète les mêmes étapes suivantes :

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y = f(x)	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



Du graphique on remarque que :

1. La courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe de symétrie a pour équation $x = 0$
2. Les coordonnées du sommet de la courbe sont (0 ; 0) et la valeur maximale de la fonction = 0

Algèbre

Unité (2) : Rapport et proportion
Proportion directe et proportion inverse

Apprends :

Le poids d'un corps sur la lune est égal à $\frac{1}{6}$ de son poids sur la terre. Imagine que tu es en voyage sur la lune. Quel sera ton poids dans ce cas ?

2-1

Rapport

A apprendre :

- La notion du rapport
- Les propriétés d´un rapport

Expressions de base :

- Premier terme du rapport
- Deuxième terme du rapport
- Les deux termes du rapport.

Exemple :

Trouve le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes du rapport 7 : 11 pour obtenir 2 : 3.

Solution

Soit le nombre x.

$\therefore \dfrac{x + 7}{x + 11} = \dfrac{2}{3}$ $\therefore 3\,(x + 7) = 2\,(x + 11)$

$\therefore 3x + 21 = 2x + 22$ $\therefore 3x - 2x = 22 - 21$

$\therefore x = 1$

Pour t'entraîner :

Si on ajoute le carré d'un nombre positif aux deux termes du rapport 5 : 11, on obtient 3 : 5. Trouve ce nombre.

Proportion

2-2

$Si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on dit que a ; b ; c et d sont quatre quantités proportionnelles

et si a; b; c et d sont quatre quantités proportionnelles, **alors** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Définition :

Une proportion est une égalité entre deux ou plusieurs rapports.

Dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a est appelé **la première proportionnelle**, *b* est appelé **la deuxième proportionnelle**, *c* est appelé **la troisième proportionnelle**, et *d* est appelé **la quatrième proportionnelle**. a et d sont appelés les extrêmes de la proportion et b et c sont appelés les moyens de la proportion.

Propriétés d'une proportion

(1) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *, alors :*

1. $a = m\,c$ et $b = m\,d$ où $m \in \mathbb{R}^*$
2. $a\,d = b\,c$ **(le produit des moyens = le produit des extrême)**
3. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Vérifie les propriétés précédentes à l'aide d'exemples numériques de ton choix.

(2) Si $ad = bc$ *, alors*

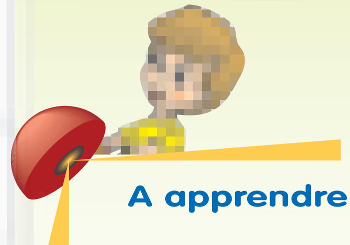
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Vérifie les propriétés à l'aide de l'exemple numérique suivant :

Tu sais que $4 \times 8 = 2 \times 16$

Alors : $\frac{4}{2} = \frac{.....}{.....}$, $\frac{4}{16} = \frac{.....}{.....}$



A apprendre :

- La notion de proportion
- Les propriétés d'une proportion
- La proportion en chaîne

Expressions de base :

- Proportion
- Première proportionnelle
- Deuxième proportionnelle
- Troisième proportionnelle
- Quatrième proportionnelle
- Extrêmes d'une proportion
- Moyens d'une proportion

Exemple 1

Si $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, trouve la valeur de $\frac{3x+2y}{6y-x}$

Solution

Soit x = 2m, y = 3m (où m est une constante ≠ zéro)

$\therefore \frac{3x+2y}{6y-x} = \frac{3\times 2m + 2\times 3m}{6\times 3m - 2m} = \frac{12m}{16m} = \frac{3}{4}$

Autre Solution

Diviser le numérateur et le dénominateur par y, puis remplacer $\frac{x}{y}$ par $\frac{2}{3}$

$\therefore$ L'expression $= \dfrac{3\times\frac{x}{y}+2}{6-\frac{x}{y}} = \dfrac{3\times\frac{2}{3}+2}{6-\frac{2}{3}}$ → ***Complète :*** $= \dfrac{\frac{\cdots}{\cdots}}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

Exemple 2

Trouve la quatrième proportionnelle des nombres 4 ; 12 et 16.

Solution

Soit x la quatrième proportionnelle

$\frac{4}{12} = \frac{16}{x}$

$\therefore 4 \times x = 12 \times 16$ ***[le produit des moyens = le produit des extrêmes]***

$\therefore x = \frac{12\times 16}{4} = 48$ $\therefore$ la quatrième proportionnelle = 48

Exemple 3

Trouve le nombre qu'il faut ajouter à chacun des nombres 3 ; 5 ; 8 et 12 pour que les résultats soient proportionnels.

Solution

Soit x le nombre. En ajoutant x, les nombres 3 + x; 5 + x; 8 + x et 12 + x **sont proportionnels.**

$\therefore \frac{3+x}{5+x} = \frac{8+x}{12+x}$ $\therefore (5+x)(8+x) = (3+x)(12+x)$

$\therefore 40 + 13x + x^2 = 36 + 15x + x^2$ $\therefore 15x - 13x = 40 - 36$

$\therefore 2x = 4$ $\therefore x = 2$

Pour t'entraîner :

1 **A** Trouver la deuxième proportionnelle des nombres 2; .... ; 4; 6

B Trouver la troisième proportionnelle des nombres 8; 6; .... ; 12

2 Si $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, trouve la valeur de (7 a + 9 b) : (4 a + 2 b)

3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots$, $m_1, m_2, m_3, \ldots \in R^*$,

alors : $\frac{a\,m_1 + c\,m_2 + e\,m_3 + \ldots}{b\,m_1 + d\,m_2 + f\,m_3 + \ldots}$ = l'un de ces rapports

Par exemple, soit $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, En multipliant les deux termes du premier rapport par 2, les deux termes du deuxième rapport par -5 et les deux termes du troisième rapport par 3, on a :

$\frac{2a - 5b + 3c}{2 \times 2 - 3 \times 5 + 3 \times 4}$ = l'un de ces rapports

D'où 2a - 5b + 3c = l'un de ces rapports

Exemple 4

Si a, b, c et d sont quatre quantités proportionnelles, ***démontre que :*** $\frac{3a - 2c}{5a + 3c} = \frac{3b - 2d}{5b + 3d}$

Solution

$\because$ a , b , c et d sont quatre quantités proportionnelles $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

En multipliant les deux termes du premier rapport par 5 et les deux termes du deuxième rapport par 3, on a : "La somme des premiers termes des rapports : La somme des deuxièmes termes des rapports" = l'un de ces rapports.

$\therefore \frac{5a + 3c}{5b + 3d}$ = l'un de ces rapports **(1)**

En multipliant les deux termes du premier rapport par 3 et les deux termes du deuxième rapport par -2, on a : " La somme des premiers termes des rapports : La somme des deuxièmes termes des rapports" = l'un de ces rapports .

$\therefore \frac{3a - 2c}{3b - 2d}$ = l'un de ces rapports **(2)**

De (1), (2) $\therefore \frac{5a + 3c}{5b + 3d} = \frac{3a - 2c}{3b - 2d}$ $\therefore \frac{3a - 2c}{5a + 3c} = \frac{3b - 2d}{5b + 3d}$ **(ce qu'il fallait démontrer)**

Autre Solution

Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ = m où m est une constante $\neq 0$,
a = b m , c = d m En substituant dans les deux membres, on obtient le résultat.

Pour t'entraîner :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ***démontre que :***

1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ **2)** $= \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Indication: Suppose que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ = m où m est une constante $\neq 0$, puis complète ou utilise une autre méthode.

Proportion en chaîne :

2, 6 et 18 sont trois nombres. Compare les rapports $\frac{2}{6}, \frac{6}{18}$

1. Y a-il une relation entre $(6)^2$ et 2×18 ?
2. Si on remplace le nombre 6 par le nombre (-6) dans les rapports, y a-il une relation entre $(-6)^2$ et 2×18 ?

Définition :

On dit que les quantités a, b et c sont proportionnelles en chaîne si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ Dans ce cas, a est appelée la première proportionnelle, b est appelée la moyenne proportionnelle et c est appelée la troisième proportionnelle où :

$$b^2 = ac \text{ ou } b = \pm\sqrt{ac}$$

Exemple 5

Trouve la moyenne proportionnelle entre 3 et 27.

Solution

La moyenne proportionnelle $= \pm\sqrt{3 \times 27} = \pm 9$

Exemple 6

Si b est une moyenne proportionnelle entre a et c, démontre que : $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a}{c}$

Solution

b est une moyenne proportionnelle entre a et c $\therefore$ a , b et c sont proportionnelles en chaîne

Soit $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = m$ $\therefore$ $b = c\,m$ et $a = b\,m = c\,m \times m = c\,m^2$

Membre de gauche $= \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{c^2 m^4 + c^2 m^2}{c^2 m^2 + c^2}$

$= \dfrac{c^2 m^2 (m^2+1)}{c^2 (m^2+1)} = m^2$ **(1)**

Membre de droite $= \dfrac{a}{c} = \dfrac{c\,m^2}{c} = m^2$ **(2)**

De **(1)**, **(2)**, on obtient $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a}{c}$

Autre Solution

Soit : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = m$ $\therefore$ $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{b^2}{c^2} = m^2$

Des deux premiers rapports $m^2 = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ = Membre de gauche

et $m^2 = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{c}$ = Membre de droite

De **(1)** et **(2)** $\therefore$ $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a}{c}$

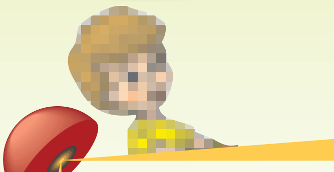
Pour t'entraîner :

Si a , b , c et d sont proportionnelles en chaîne, démontre que : $\dfrac{a-2b}{b-2c} = \dfrac{3b+4c}{3c+4d}$

Indication : Soit $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = m$

$\therefore$ $c = dm$, $b = dm^2$, $a = dm^3$. Complète la solution

2-3 Variation directe et variation inverse



A apprendre :

- ☆ La notion de variation directe
- ☆ La notion de variation inverse
- ☆ Comment distinguer la variation directe de la variation inverse

Expressions de base :

- ☆ variation
- ☆ variation directe
- ☆ variation inverse

(1) Variation directe

Réfléchis et discute (1) :

Une voiture se déplace à une vitesse constante v de 15 m/s. La distance d en mètres qu'elle parcourt en un temps t en secondes est donnée par la formule $d = v\,t$.

t	1	2	3	4
d	15	30	45	60

A Représente cette relation entre d et t graphiquement.

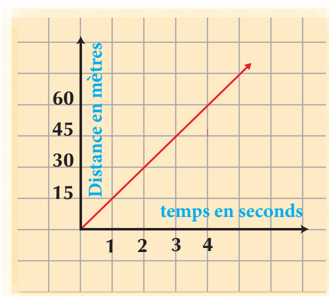
B Est-ce que la représentation graphique passe par le point d'origine (0; 0) ?

C Calcule $\frac{d}{t}$ dans chaque cas. Que remarques-tu ?

De ce qui précède, on remarque que :

$\frac{d}{t}$ est constant et est égal à 15. Donc $d = 15\,t$

Dans ce cas on dit que d est directement proportionnelle à t et on note $d \propto t$.



Définition :

On dit que y est directement proportionnel à x et on le note $y \propto x$ ou $y = k\,x$ (où k est une constante $\neq 0$). Si x prends les deux valeurs x_1 et x_2 et si y prends les deux valeurs correspondantes y_1 et y_2 respectivement, alors $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$

De ce qui précède, on déduit que :

1. La relation précédente est une relation linéaire entre les deux variables x et y. Elle est représentée graphiquement par une droite qui passe par le point d'origine.

2. Si $y \propto x$, alors $y = k\,x$
et si $y = k\,x$, alors $y \propto x$.

Exemple 1

Si $y \propto x$ et $y = 14$ pour $x = 42$, ***trouve :***

a) la relation ente y **et** x.

b) la valeur de y pour $x = 60$.

Solution

a) $\because y \propto x$ $\therefore y = k\,x$ (où k est une constante $\neq 0$)

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans cette relation :

$\therefore 14 = 42 \times m$ $\therefore k = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ $\therefore$ La relation est : $y = \frac{1}{3}\,x$

b) Pour $x = 60$ $\therefore y = \frac{1}{3} \times 60 = 20$

Remarque : On peut utiliser la relation $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$ pour trouver la valeur de y dans la deuxième partie de la question.

(2) Variation inverse

Soient A l'aire d'un rectangle et x et y ses dimensions.

A. ***Ecris*** la relation entre A , x et y.

B. Si l'aire du rectangle est constante et est égale à $33\ \text{cm}^2$, ***complète*** le tableau suivant :

x	3	5	6	10
y	....	....	....	....

C. ***Calcule*** $x\,y$ dans chaque cas. Que remarques-tu ?

De ce qui précède, on remarque que :

$x\,y = 30$ *et donc* $y = \frac{30}{x}$ *d'où* y est inversement proportionnel à x et on note $y \propto \frac{1}{x}$

De même, $x = \frac{30}{y}$ *d'où* x est inversement proportionnel à y et on note $x \propto \frac{1}{y}$

Définition :

On dit que y est inversement proportionnel à x et on le note $y \propto \frac{1}{x}$ si $x\,y = k$ (où k est une constante $\neq 0$). Si x prends les deux valeurs x_1 et x_2 et si y prends les deux valeurs correspondantes y_1 et y_2 respectivement, alors : $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$

De ce qui précède, on déduit que :

1. La relation précédente n'est pas une relation linéaire entre les deux variables x et y. Elle n'est pas représentée graphiquement par une droite

2. Si y est inversement proportionnel à x, ***alors,*** $y = \frac{k}{x}$ (où k est une constante $\neq 0$)

   si $y = \frac{k}{x}$, alors $y \propto \frac{1}{x}$.

Exemple 2

Si $y \propto \frac{1}{x}$ et $y = 3$ pour $x = 2$, trouver :

a) la relation entre x et y. **b)** la valeur de y pour $x = 1{,}5$.

Solution

$\because y \propto \frac{1}{x}$ $\therefore y = \frac{k}{x}$ (où k est une constante $\neq 0$)

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans cette relation :

$\therefore 3 = \frac{k}{2}$ $\therefore k = 2 \times 3 = 6$

$\therefore$ La relation est : $y = \frac{6}{x}$

b) Pour $x = 1{,}5$ $\therefore y = \frac{6}{1{,}5} = 4$

Remarque : On peut utiliser la relation $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$ pour trouver la valeur de y

Pour t'entraîner :

Lesquels **des tableaux suivants représentent une variation directe et lesquels représentent une variation inverse ? Justifie la réponse dans chaque cas :**

x	y
3	20
5	12
4	15
6	10

x	y
2	9
4	18
12	54
16	72

x	y
5	9
10	18
15	27
25	45

x	y
3	6
-2	-9
-18	1
9	-2

Exemple 3

En lien avec la Physique : La relation entre la vitesse v (m/s) et le temps t (s) est donnée par la formule $v = 9{,}8\ t$

1) ***Détermine*** la nature de la variation entre v et t.

2) **A** ***Trouve*** les valeurs de v pour t = 2 seconds et pour t = 4 seconds.

B ***Trouve*** la valeur de t pour v = 24,5 m/s

Solution

1) $\because$ v = constante × t ***Donc*** $v \propto t$ ***d'où*** v est directement proportionnelle à **t**.

2): **A** pour t = 2 $v = 9{,}8 \times 2 = 19{,}6$ m/s

pour t = 4 $v = 9{,}8 \times 4 = 39{,}2$ m/s

B pour V = 24,5 $24{,}5 = 9{,}8 \times t$ $\therefore t = \frac{24{,}5}{9{,}8} = 2{,}5$ seconds.

Exemple 4

En lien avec la géométrie : La hauteur h d'un cylindre circulaire droit (de volume constant) est inversement proportionnelle au carré du rayon de sa base (r). Si h = 27 cm pour r = 10,5 cm, trouve h pour r = 15,75 cm.

Solution :

$\because\ h \propto \frac{1}{r^2}$ $\therefore\ h = k \times \frac{1}{r^2}$ (où k est une constante $\neq 0$)

$h = 27$ pour $r = 10,5$

$\therefore\ 27 = k \times \frac{1}{(10,5)^2}$ $\therefore\ k = 27 \times (10,5)^2$ **(1)**

En substituant : $\therefore\ h = 27 \times (10,5)^2 \times \frac{1}{r^2}$ de **(1)**

Pour $r = 15,75$ cm $\therefore\ h = 27 \times (10,5)^2 \times \frac{1}{(15,75)^2} = 12$ cm

Nous pouvons utiliser une calculatrice pour trouver le dernier résultat comme suit :

27 $\times$ **10,5** x^2 $\div$ **10,75** x^2 $=$

Statistique

Unité 3: Statistique

Un restaurant présente des glaces de différentes sortes. Le propriétaire du restaurant a fait un sondage sur les sortes de glaces préférées par les consommateurs.

Etudier la statistique te permettra de choisir un échantillon qui représente la population des consommateurs.

3-1

Recueils de données

A apprendre

- ☆ Types de sources de recueil des données
- ☆ Méthodes de recueil des données
- ☆ Comment choisir un échantillon
- ☆ Types d'échantillons

Expressions de base

- ☆ ressources primaires
- ☆ ressources secondaires
- ☆ méthode du dénombrement complet
- ☆ méthode d'échantillons
- ☆ sélection biaisée
- ☆ sélection aléatoire
- ☆ échantillon
- ☆ échantillon aléatoire
- ☆ échantillon stratifié

Réfléchis et discute

La méthode choisie pour recueillir des données est l'une des étapes les plus importantes sur laquelle se base une recherche statistique. Le recueil des données suivant des méthodes scientifiques adaptées en faisant les inférences statistiques, permet d'obtenir des résultats fiables et de prendre des décisions convenables.

1. Quelles sont les sources de recueil des données ?
2. Comment déterminer la méthode de recueil des données ?

Sources de recueil des données

1 *Sources de recueil des données (sources du terrain) :*

Ce sont les sources qui permettent d'obtenir les données d'une manière directe où les données par interviews, par sondages d'opinion. Ces types de ressources offre des informations précises mais il demande du temps et de l'effort en plus du coût sur le plan financier.

2 *Ressources secondaires (historiques) :*

Ce sont les ressources qu'on peut obtenir des agences et des organismes officiels comme les décrets de l'Agence centrale pour la mobilisation publique et de la statistique, l'internet et les médias.

Ce type de ressources permet d'économiser le temps, l'effort et l'argent.

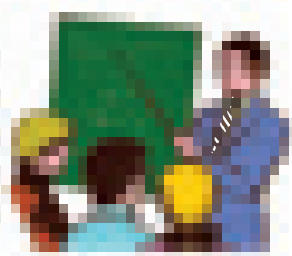
Méthode du recueil des données

La méthode du recueil des données est déterminée selon l'objectif et la population statistique en cause. On appelle population statistique un ensemble d'éléments soumis à une étude statistique, ayant des propriétés caractarestiques communes.

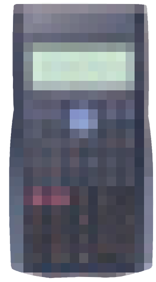
Par exemple : Les élèves d'une école donnée représentent une population statistique dont les éléments sont les élèves.

[1] : *Méthode du dénombrement complet :*

Dans cette méthode, on collecte les données concernant le phénomène en cours d'étude de tous les éléments de la population statistique. Cette méthode est utilisée pour dénombrer tous les éléments d'une population comme pour recensement de la population par exemple.

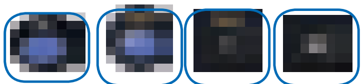


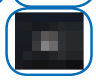
B Dans une grande population :



Pour choisir cinq élèves d'une école de 800 élèves, le choix à travers les cartes est une méthode difficile. Dans ce cas, on numérote les noms des élèves de 1 à 800 puis on utilise une calculatrice pour (ou un programme Excel) pour produire des numéros au hasard entre 0,000 et 0, 999. En négligeant la virgule, on obtient des nombres entre 0 et 999. Dans ce cas, on élimine les nombres apparaissant qui dépassent 800 comme suit :

Départ



En répétant l'appui sur la touche  les nombres apparaissent successivement. Dans ce cas., on se contente de cinq numéros différents et convenables.

2 l'échantillon aléatoire stratifié :

Si la population en cours d'étude n'est pas homogène et donc elle est composée de groupes qualitatifs de caractéristiques différentes, on classe cette population en groupes homogène selon leurs caractéristiques. Chaque groupe est appelé une classe. Le chercheur choisit un échantillon représentant chaque classe selon sa grandeur dans la population. Cet échantillon est appelé « échantillon stratifié ». .

Exemple : Pour étudier le niveau d'enseignement d'une population composée de 400 personnes dans laquelle le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles est 3 : 2 et pour choisir un échantillon de 50 personnes, on doit choisir 30 personnes de la classe des garçons et 20 personnes de la classe des filles.

3-2

Dispersion

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié les mesures de la tendance centrale (moyenne arithmétique – médiane – mode). Tu as pu également calculer pour un ensemble de données une valeur qui décrit la tendance de ces données à se centraliser autour de cette valeur.

Si les salaires hebdomadaires, en Livres égyptiennes, de deux groupes d'ouvriers A et B d'une usine sont comme suit :

Groupe A: 170; 180; 180; 230; 240

Groupe B: 50; 180; 180; 190; 400

1. ***Calcule*** la moyenne arithmétique des salaires pour chacun des deux groupes A et B.
2. ***Compare*** les salaires des deux groupes A et B. **Que peux-tu conclure ?**

On sait que :

$$\text{La moyenne arithmétique} = \frac{\text{la somme de toutes les valeurs d'une série}}{\text{le nombre de valeurs de la série}}$$

Donc :

la moyenne arithmétique des salaires pour le groupe A =

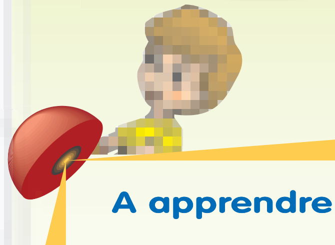
$$\frac{170 + 180 + 180 + 230 + 240}{5} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ Livres}$$

la moyenne arithmétique des salaires pour le groupe B =

$$\frac{50 + 180 + 180 + 190 + 400}{5} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ Livres}$$

Pour comparer les salaires des deux groupes A et B, on trouve que :

1. La moyenne arithmétique des salaires dans le groupe A = La moyenne arithmétique des salaires dans le groupe B = 200 Livres
2. Le salaire médian = le salaire modal = 180 Livres pour chacun des deux groupes A et B.



A apprendre

- ☆ Mesures de la dispersion (étendu – écart-type)

Expressions de base

- ☆ tendance centrale
- ☆ moyenne arithmétique
- ☆ dispersion
- ☆ étendu
- ☆ écart-type

2 L'écart-type :

C'est la mesure de la dispersion la plus connue et la plus précise (dans des conditions particulières). «C'est la racine carrée positive de la moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne arithmétique»

D'où :

$$\text{L'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

où σ (sigma) est l'écart-type pour ensemble de données.

$\bar{x}$ (x bar) est la moyenne arithmétique de l'ensemble de données.

n est le nombre d'éléments

$\sum$ symbolise la somme

(1) Calcul de l'écart-type pour un ensemble de valeurs :

Exemple

Calcule l'écart-type pour les valeurs 12, 13, 16, 18, 21

Solution

Pour calculer l'écart-type, on dresse le tableau ci-contre où la moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \frac{\text{la somme de toutes les valeurs d'une série}}{\text{le nombre de valeurs de la série}}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{12 + 13 + 16 + 18 + 21}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\because \text{l'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

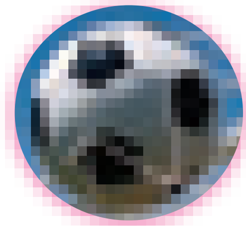
$$\therefore \text{l'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{54}{5}} = \sqrt{10{,}8} = \simeq 3{,}286$$

	x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
	12	12 - 16 = -4	16
	13	13 - 16 = -3	9
	16	16 - 16 = 0	zéro
	18	18 - 16 = 2	4
	21	21 - 16 = 5	25
Total	80		54

Pour t'entraîner :

Le tableau des effectifs suivant, montre le nombre de buts marqués lors d'un nombre de matchs de football :

Nombre de buts	zéro	1	2	3	4	5	6
Nombre de Matchs	1	4	6	9	5	3	2



Calcule l'écart-type pour le nombre de buts.

Exemple

Le tableau des effectifs suivant, montre les notes de 40 élèves dans l'examen d'une matière :

Intervalles	zéro →	4 →	8 →	12 →	16 → 20	Total
Effectifs	2	5	8	15	10	40

Calcule l'écart-type pour cette distribution.

Solution

1 On calcule le centre des intervalles x

Donc le centre du premier intervalle = $\frac{0+4}{2} = 2$

Le centre du deuxième intervalle = $\frac{4+8}{2} = 6$

De la même manière, on calcule le centre des autres intervalles et on inscrit les résultats dans la troisième colonne

2 On multiplie les centres des intervalles par les effectifs correspondants $\mathbf{x} \times \mathbf{k}$ et on inscrit les résultats dans la quatrième colonne.

On calcule la moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{\sum x\,k}{\sum k}$

3 On calcule l'écart du centre de chaque intervalle (x) à la moyenne arithmétique. Detérmine $(x - \overline{x})$

4 On calcule le carré de l'écart des centres des intervalles à leurs moyennes arithmétiques $(x - \overline{x})^2$

5 On calcule le produit du carré de l'écart du centre de chaque intervalle à la moyenne arithmétique par l'effectif de l'intervalle $(x - \overline{x})^2 \times k$

6 On calcule l'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2\,k}{\sum k}}$

Intervalle	Effectif (k)	Centres des intervalles (x)	x × k	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$(x - \overline{x})^2 k$
0 →	2	2	4	- 10,6	112,36	224,72
4 →	5	6	30	- 6,6	43,56	217,80
8 →	8	10	80	- 2,6	6,76	54,08
12 →	15	14	210	1,4	1,96	29,40
16 → 20	10	18	180	5,4	29,16	291,60
Total	40		504			817,6

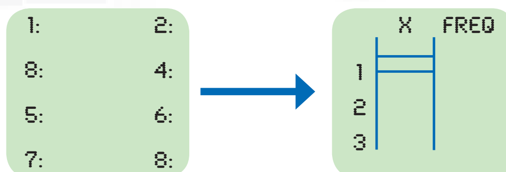
La moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{504}{40} = 12,6$

L'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{817,6}{40}} = \sqrt{20,44} \simeq 4,52$ points

On peut utiliser une calculatrice [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] pour vérifier les calculs de l'écart-type.

a) Préparer la calculatrice pour le mode statistique et pour introduire les données

On Mode 2 (Stat) 1 (1–VAR)

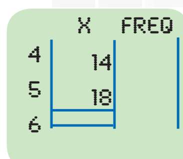


b) Calcul de l'écart-type pour une distribution (Exemple 2)

1 On introduit les centres des intervalles 2 ; 6 ; 10 ; 14 et 18

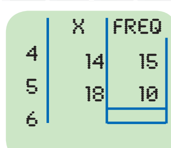
On Mode 2 (Stat) 1 (1–VAR)

2 = 6 = 1 0 = 1 4 = 1 8 =



2 On passe au début de la deuxième (FREQ), puis on introduit les effectifs correspondants aux intervalles 2 ; 5 ; 8 ; 15 ; 10.

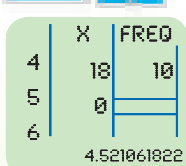
▶ ▲ 2 = 5 = 8 = 1 5 = 1 0 =



3 On fait exécuter le résultat. C'est $\sigma \simeq 4,521$

Shift 1 5 (VAR) 3 ($X\sigma n$) = ▲

4 On retourne au mode initial, puis on éteint la calculatrice.



Remarque que :

(1) L'écart-type est influencé par les écarts de toutes les valeurs et par conséquent, sa valeur est influencée par les valeurs extrêmes.

(2) L'écart-type a la même unité de mesure que les données initiales. Pour cette raison, on l'utilise pour la comparaison entre les dispersions des intervalles ayant les mêmes unités de mesure lorsqu'ils ont la même moyenne arithmétique. Dans ce cas, l'intervalle ayant le plus grand écart-type est le plus dispersé.

Pour t'entraîner :

Les deux tableaux des effectifs suivants, représentent les distributions des notes des élèves des deux classes de troisième préparatoire A et B dans un examen :

Classe A

Intervalles des notes	0→	10→	20→	30→	40→50	Total
Nombre d'élèves	2	5	11	15	7	40

Classe B

Intervalles des notes	0→	10→	20→	30→	40→50	Total
Intervalles des notes	2	3	18	7	10	40

1. ***Représente*** dans un même graphique, chacune des deux distributions par un polygone des effectifs.
2. ***Calcule*** la moyenne arithmétique et l'écart-type pour chaque distribution.
3. Laquelle des deux classes est la plus harmonisée au niveau de l'acquisition ?

Unité 4: Trigonométrie

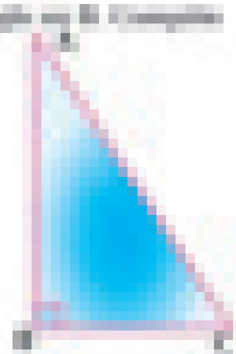
La trigonométrie est l’une des sciences des mathématiques qui étudie la relation entre les longueurs des côtés d’un triangle et les mesures de ses angles. Les anciens égyptiens sont les premiers à utiliser les formules de la trigonométrie pour construire les pyramides et les temples, pour étudier l’astronomie et pour calculer les distances géographiques.

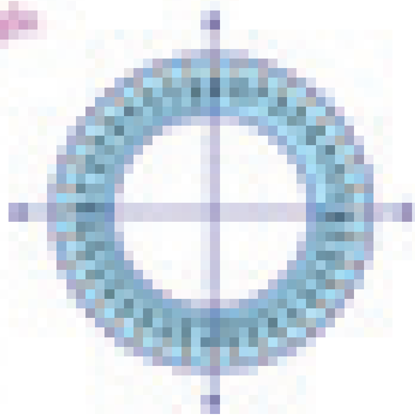
Les babyloniens ont mesuré les angles en degrés, en minutes et en secondes. Le mathématicien Al-Biruni a élaboré les tables des sinus des angles puis le mathématicien Al-Tusi a montré que les sinus des angles sont proportionnels aux côtés qui lui sont opposés. L’Occident a pris connaissance des sciences arabes et musulmanes à travers les traductions des livres de l’astronomie arabe par le savant allemand Yohan Mueller.

Abu Rayhane Al-Biruni est né à Khorezm en 973 et mort en 1048.

4-1

Rapports trigonométriques d'un angle aigu

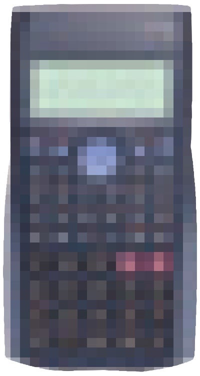




[1] On convertit **24´** en degrés $= \frac{24}{60} = 0{,}4$, On convertit ensuite **42´´** secondes en minutes puis en degrés : **42´´** $= \frac{42}{60} = 0{,}7´$

$0{,}7´ = \frac{0{,}7}{60} = 0{,}0116667$

Donc **35° 24´ 42´´** $= 35 + 0{,}4 + 0{,}0116667 = 35{,}4116667°$



[2] On utilise une calculatrice comme suit :

35 [redacted] 24 [redacted] 42 [redacted] **Le résultat est :** 35,4116667°

De même, on peut convertir les fractions d'un degré en minutes et secondes.

Par exemple : 54,36° peut être converti en minutes et secondes en utilisant les touches suivantes :

54,36 [redacted] **On obtient le résultat** : **54° 21´ 36´´**

Pour t'entraîner :

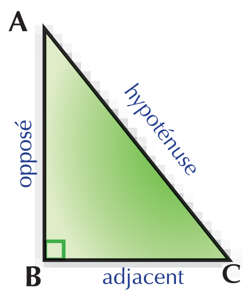
1 **Ecris chacun des angles suivants en degrés :**

A 76° 16´ B 45° 3´ 56´´ C 85° 38´ 8´´ D 65° 26´ 43´´

2 **Ecris chacun des angles suivants en degrés, minutes et secondes.**

A 34,6° B 78,08° C 56,18° D 83,246°

Rapports trigonométriques de base d'un angle aigu :



La figure ci-contre représente un triangle ABC rectangle en B où les deux angles A et C sont complémentaires. Le côté opposé à l'angle C est appelé « opposé », le côté adjacent à l'angle C est appelé « adjacent » et le ôté opposé à l'angle droit est appelé « hypoténuse ».

Nous allons étudier les rapports trigonométriques de base d'un angle aigu qui sont :

1 **Le sinus d'un angle** : On le note en arabe جا , en français sin et sur la calculatrice [redacted].

2 **Le cosinus d'un angle** : On le note en arabe جتا , en français cos et sur la calculatrice [redacted].

3 **La tangente d'un angle**: On la note en arabe ظا , en français tg et sur la calculatrice [redacted].

$\sin C$	=	$\dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$	=	$\dfrac{AB}{AC}$
$\cos C$	=	$\dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	=	$\dfrac{BC}{AC}$
$\text{tg } C$	=	$\dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$	=	$\dfrac{AB}{BC}$

Exemples

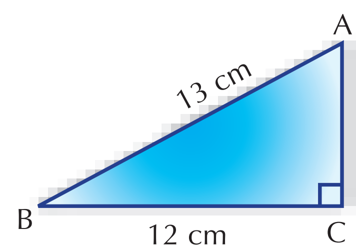
1 ABC est un triangle rectangle en C tel que AB = 13 cm et BC = 12 cm.

A ***Trouve*** la longueur de $\overline{AC}$.

B ***Calcule :*** sin A , cos A , tg A , sin B , cos B et tg B.

C ***Démontre que :*** sin A cos B + cos A sin B = 1.

D ***Calcule :*** $1 + \text{tg}^2 A$.



Solution

A ∵ le triangle ABC est rectangle en C ∴ $AC^2 = AB^2 - BC^2$

∴ $AC^2 = (13)^2 - (12)^2 = (13 + 12)(13 - 12) = 25$

∴ $AC = 5$ cm

B $\sin A = \frac{12}{13}$, $\cos A = \frac{5}{13}$, $\text{tg } A = \frac{12}{5}$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{12}{13}$, $\text{tg } B = \frac{5}{12}$

C **Membre de gauche** = sin A cos B + cos A sin B

$$\frac{12}{13} \times \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{144 + 25}{169} = 1$$

D $1 + \text{tg}^2 A = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

Pour t'entraîner :

ABC est un triangle tel que AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm. On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$

[1] Trouve la valeur de sin (∠CAD) , cos (∠CAD) et tg (∠CAD)

[2] Démontre que : **A** $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ **B** $\sin B + \cos C > 1$

4-2 Rapports trigonométriques de quelques angles

A apprendre

- ☆ Comment trouver les rapports trigonométriques des angles
- ☆ (30° ; 45° ; 60°)

Expressions de base

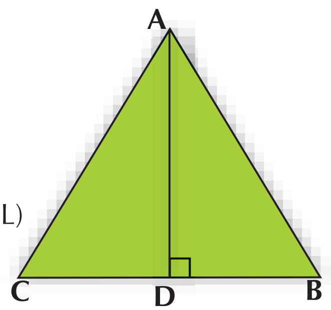
- ☆ rapport trigonométrique
- ☆ Angles particuliers

Réfléchis et discute

1 Dans la figure ci-contre :

ABC est un triangle équilatéral de longueur de côté 2L, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

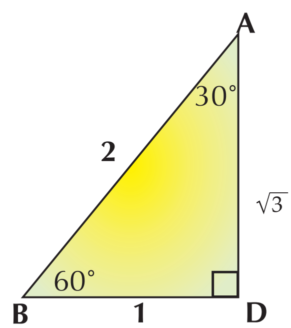
Complète :



1. m ($\angle$B) = ...°
2. m ($\angle$B A D) = ...°
3. B D = ... et A D = ... (en fonction de L)
4. B D : A B : A D = ... : ...... : ......

De ce qui précède, on remarque que :

(1) le triangle ABD est un triangle à 30° et 60° et que le rapport entre les longueurs de ses côtés est BD : AB : AD = 1 : 2 : $\sqrt{3}$ par conséquent, nous pouvons calculer les rapports trigonométriques de base des angles 30° et 60° **comme suit :**



$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \ , \ \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \ , \ \text{tg } 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$$

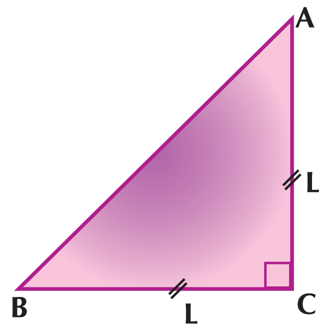
Pour t'entraîner :

Complète : sin 30° = cos ......° tg 30° = $\frac{1}{...}$ cos 30° = sin ....°

Réfléchis et discute

1 Dans la figure ci-contre :

ABC est un triangle isocèle rectangle en C dont la longueur de chacun des deux côtés ayant la même longueur est L.



Complète :

1. m ($\angle$A) = ... , m ($\angle$B) = ...
2. $\because$ $AB^2 = AC^2$ + ... $\therefore$ $AB^2 = L^2$ + ...
3. AC : BC : AB = ... : .... : ....
   $\therefore$ $(AB)^2 = 2L^2$ $\therefore$ $AB = \sqrt{2}\ L$

De ce qui précède, on remarque que :

Dans le triangle ABC, m ($\angle$A) = m ($\angle$B) = 45° et que le rapport entre les longueurs de ses côtés est AC : BC : AB = 1 : 1 : $\sqrt{2}$. Par conséquent, nous pouvons calculer les rapports trigonométriques de l'angle 45° **comme suit :**

$$\sin 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{tg } 45^\circ = \frac{AC}{BC} = 1$$

Nous pouvons mettre les rapports trigonométriques des angles précédents dans le tableau suivant :

Mesure de l'angle / Rapport	30°	60°	45°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

Remarques:

1. **De ce qui précède, on trouve que :** le **(sinus)** d'un angle est égal au **(cosinus)** du complément de l'angle et réciproquement.

   Par exemple : sin 30° = cos 60°, cos 30° = sin 60°, sin 45° = cos 45°.

2. Pour tout angle A, $\text{tg } A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Exemples

1 Trouve la valeur de :

A $\cos 60° \sin 30° - \sin 60° \,\mathrm{tg}\, 60° + \cos^2 30°$

B $\dfrac{\cos^2 60° + \cos^2 30° + \mathrm{tg}^2\, 45°}{\sin 60° \,\mathrm{tg}\, 60° - \sin 30°}$

Solution

A L'expression $= \cos 60° \sin 30° - \sin 60° \,\mathrm{tg}\, 60° + \cos^2 30°$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

B L'expression $= \dfrac{\cos^2 60° + \cos^2 30° + \mathrm{tg}^2\, 45°}{\sin 60° \,\mathrm{tg}\, 60° - \sin 30°} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

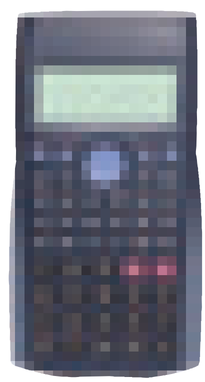
Pour t'entraîner :

Démontre que :

A $\sin^2 30° = 5 \cos^2 60° - \mathrm{tg}^2\, 45°$

B $\mathrm{tg}^2\, 60° - \mathrm{tg}^2\, 30° = (1 + \mathrm{tg}\, 60° \,\mathrm{tg}\, 30°) \div \cos^2 30°$

Exemples



2 Trouve les rapports trigonométriques suivants :

$\sin 43°$, $\cos 53° 28'$, $\mathrm{tg}\, 64° 37' 49''$

En approchant le résultat à quatre décimales prés.

Solution

Départ 43 = $\sin 43° \simeq 0{,}6820$

Départ 53 28 = $\cos 53° 28' \simeq 0{,}5953$

Départ 64 37 49 = $\mathrm{Tan}\, 64° 37' 49'' \simeq 2{,}1089$

Détermination d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques :

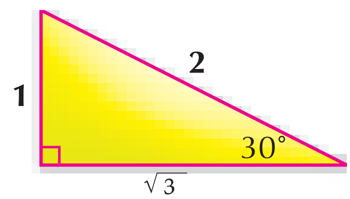
Nous avons déjà étudié comment calculer les rapports trigonométriques d'un angle donné.

Par exemple : pour un angle de mesure 30°, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et

pour un angle de mesure 33°,

$\sin 33° = 0{,}544639035$

[redacted] 33° = 0,544639035



Maintenant nous voulons calculer la mesure d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques.

Par exemple : Si sin C = 0,544639035, trouver la valeur de C .

Pour calculer x, on utilise une calculatrice comme suit :

Départ → [redacted] 0,544639035 **=** [redacted] 33°

Exemples

3 **Trouve la mesure de l'angle E dans chacun des cas suivants :**

sin E = 0,6 , cos E = 0,6217 , tg E= 1,0823

Solution

$\because$ sin E = 0,6 $\therefore$ m (∠E) = 36° 52´ 12´´ [redacted] 0,6 = [redacted]

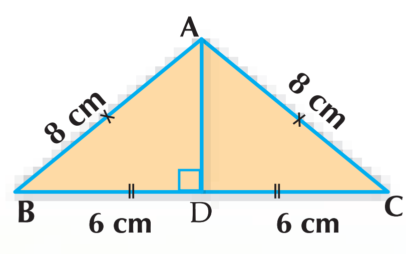
$\because$ cos E = 0,6217 $\therefore$ m (∠E) = 51° 33´ 35´´ [redacted] 0,6217 = [redacted]

$\because$ tg E = 1,0823 $\therefore$ m (∠E) = 47° 15´ 48´´ [redacted] 1,0823 = [redacted]

4 **En lien avec la géométrie :** ABC est un triangle isocèle tel que AB = AC = 8 cm et BC = 12 cm.

Trouve : **[1]** m (∠B)

[2] l'aire du triangle à deux décimales près



Solution

[1] On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$

$\because$ le triangle ABC est isocèle.

∴ D est le milieu de $\overline{BC}$ et donc BD = CD = 6 cm

∵ $\cos B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

En utilisant une calculatrice :

[redacted] [redacted] **0.75** [redacted] [redacted]

∴ m (∠B) = 41° 24´ 35´´ *(ce qu'il fallait démontrer en 1)*

Pour calculer l'aire du triangle, on trouve AD **(du théorème de Pythagore)**

∵ $(AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$

∴ $(AD)^2 = 64 - 36 = 28$ ∴ $AD = 2\sqrt{7}$

∵ l'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{7}$

$= 12\sqrt{7}\ cm^2 \simeq 31{,}75cm^2$ *(ce qu'il fallait démontrer en 2)*

Autre solution pour la deuxième partie de la question:

∵ $\sin B = \frac{AD}{AB}$ ∴ $\sin B = \frac{AD}{8}$

∴ AD = 8 sin (41° 24´ 35´´) 1

L'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ **De** 1

∴ L'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \sin (41° 24´ 35´´) \simeq 31{,}75cm^2$.

On peut utiliser une calculatrice comme suit :

Départ → 1 [redacted] 2 [redacted] 12 [redacted] 8 [redacted] [redacted] 41 [redacted] 24 [redacted] 35 [redacted] [redacted]

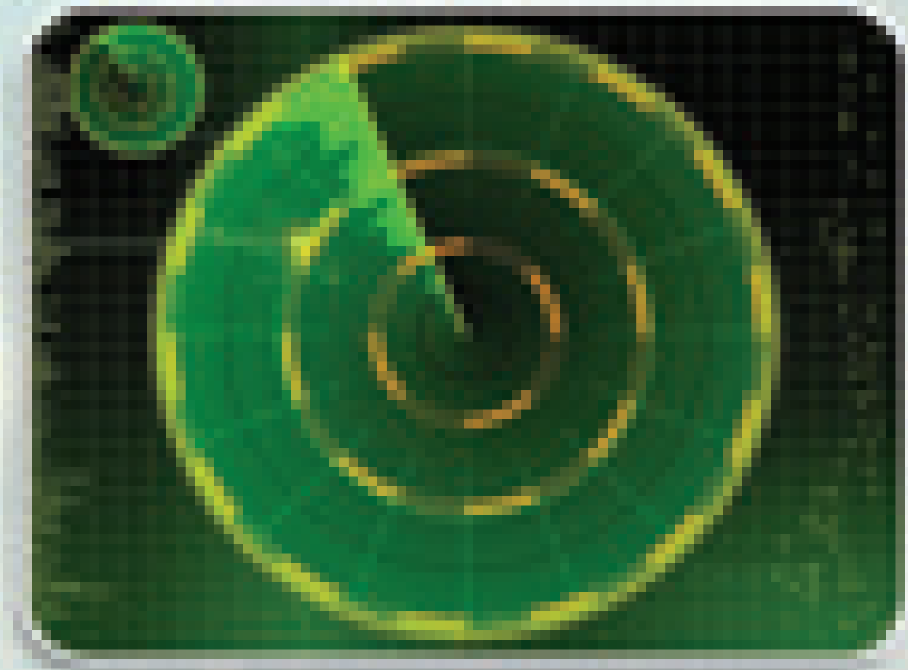
Pour t'entraîner :

Complète ce qui suit :

1. Si $\sin X = \frac{1}{2}$ où x est un angle aigu, alors m (∠X) = ...
2. Si $\sin \frac{X}{2} = \frac{1}{2}$ où x est un angle aigu, alors m (∠X) = ...
3. sin 60° + cos 30° - tg 60° = ...
4. Si tg (X + 10) = $\sqrt{3}$ où X est un angle aigu, alors m (∠X) = ...
5. Si tg 3 X = $\sqrt{3}$ où X est un angle aigu, alors m (∠X) = ...

Géométrie analytique

Unité (5): Géométrie analytique



On utilise le radar pour déterminer les distances, les hauteurs, les directions et les vitesses des corps mobiles comme les avions et les navires.

L'antenne du radar reçoit les ondes reflétées et sur son écran on peut déterminer les coordonnées de l'objet cible (avion – navire - ……).

5-1 Distance entre deux points

A apprendre

- ☆ Comment trouver la distance entre deux points en utilisant la formule

Expressions de base

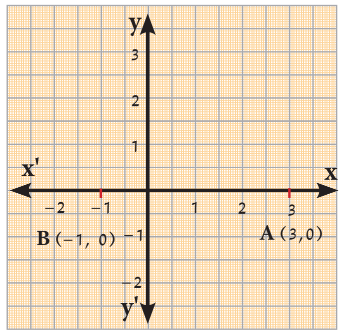
- ☆ repère cartésien
- ☆ couple
- ☆ Distance entre deux points.

Réfléchis et discute

Nous avons déjà appris à représenter un couple dans un repère cartésien.

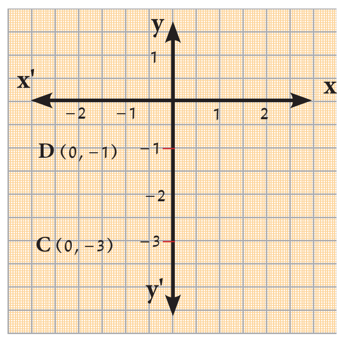
Maintenant, peut-on trouver la distance entre les paires de points suivants :

1. A (3; 0) , B (-1; 0)
2. C (0; -3), D (0; -1)
3. M (3; 2), N (7; 5)



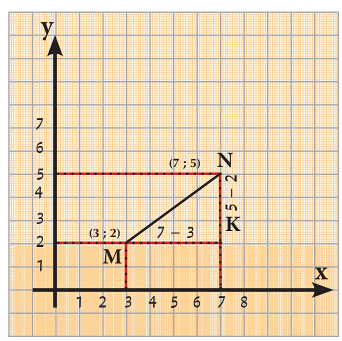
De ce qui précède, on remarque que :

1. Les deux points A(3 ; 0) et B(-1 ; 0) sont situés sur l'axe des abscisses et par conséquent : A B = |-1 -3 | = | -4|
D'où A B = 4 unités de longueur .

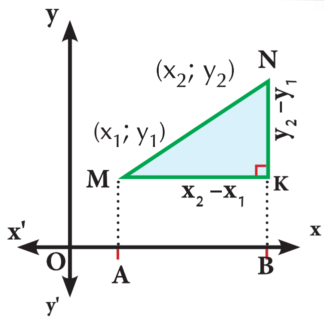


2. Les deux points C(0 ; -3) et D(0 ; -1) sont situés sur l'axe des ordonnées et par conséquent :
C D = |-3 - (-1)| = |-3 +1| = | -2|
D'où C D = 2 unités de longueur .

3. On peut représenter les deux points M(3 ; 2) et N(7 ; 5) graphiquement comme le montre la figure ci-contre.
Pour trouver la longueur de $\overline{MN}$ on calcule :
M K = |7 -3 |= 4 unités de longueur
N K = |5 -2| = 3 unités de longueur
Le △ M K N est rectangle en K
∴ $(N M)^2 = (M K)^2 + (K N)^2$
(théorème de Pythagore)
$(N M)^2 = (3)^2 + (4)^2$
$(N M)^2 = 9 + 16$
$(N M)^2 = 25$ ∴ (N M) = 5 unités de longueur



D'une manière générale :



Si M $(x_1; y_1)$, N $(x_2; y_2)$ sont deux points dans un repère cartésien,

alors : K M = |O B - O A|

$= |x_2 - x_1|$

K N = |N B - K B| $= |y_2 - y_1|$

$\because$ Le $\triangle$ N K M est rectangle en K **(théorème de Pythagore)**

$\therefore (MN)^2 = (KM)^2 + (KN)^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

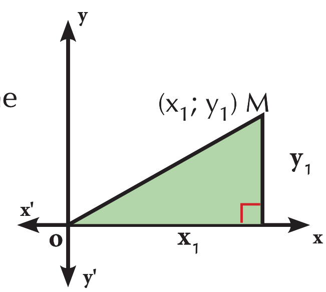
$\therefore MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La distance entre deux points $(x_1;y_1)$; $(x_2;y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La distance entre les deux points = $\sqrt{\text{carré de la différence des abscisses + carré de la différence des ordonnées}}$

Remarque:

Dans la figure ci-contre, la distance du point $(x_1; y_1)$ au point d'origine O (0; 0) , O M $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$



Pour t'entraîner :

Soient A , B , C et D quatre points d'un repère orthonormé. Détermine les conditions pour lesquelles ces points sont les sommets de chacune des figures suivantes :

1. un parallélogramme
2. un rectangle
3. un trapèze
4. un carré

Exemples

1. ABCD est un quadrilatère tel que A(2 ; 4) , B(-3 ; 0) , C(-7 ; 5) et D(-2 ; 9). Démontre que la figure ABCD est un carré.

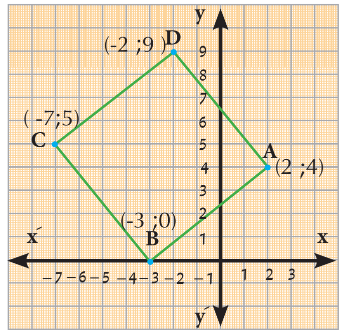
Solution

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[-3-2]^2 + [0-4]^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

$BC = \sqrt{[-7-(-3)]^2 + [5-0]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41}$

$C\,D = \sqrt{[-2-(-7)]^2 + [9-5]^2} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$

$D\,A = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [4-9]^2} = \sqrt{(4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$



$\because$ A B = BC = DC =D A= $\sqrt{41}$

$\therefore$ La figure A B C D est un losange.

Pour démontrer que la figure ABCD est un carré, on peut calculer les longueurs de ses diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$.

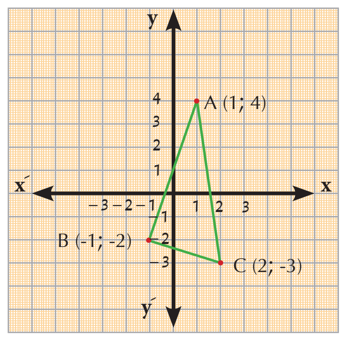
$AC = \sqrt{[-7-2]^2 + [5-4]^2} = \sqrt{(-9)^2 + 1} = \sqrt{82}$

$BD = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [9-0]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (9)^2} = \sqrt{82}$

$\because$ AC = B D = $\sqrt{82}$ et les côtés de la figure ABCD sont de même longueur,

$\therefore$ La figure A B C D est un carré.

2 Démontre que le triangle ayant pour sommets A(1 ; 4) , B(-1 ; -2) et C(2 ; -3) est rectangle puis calcule son aire.



Solution

$(A\,B)^2 = (-1-1)^2 + (-2-4)^2 = 4 + 36 = 40$

$(B\,C)^2 = [2-(-1)]^2 + [-3-(-2)]^2 = 9 + 1 = 10$

$(A\,C)^2 = (2-1)^2 + (-3-4)^2 = 1 + 49 = 50$

$(A\,B)^2 + (B\,C)^2 = 40 + 10 = 50$, $(A\,C)^2 = 50$

$\because (A\,C)^2 = (A\,B)^2 + (B\,C)^2$

$\therefore$ M ($\angle$ B) = 90° **(Réciproque du théorème de Pythagore)**

$\therefore$ M ($\triangle$ A B C) = $\frac{1}{2}$ A B $\times$ B C = $\frac{1}{2} \times \sqrt{40} \times \sqrt{10} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10}$ = 10 unités carrées

3 Démontre que les points A(3 ; -1) , B(-4 ; 6) et C(2 ; -2) sont situés sur un cercle de centre M(-1 ; 2), puis calcule le périmètre du cercle.

Solution

$A\,M = \sqrt{(-1-3)^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$B\,M = \sqrt{[-1-(-4)]^2 + [2-6]^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

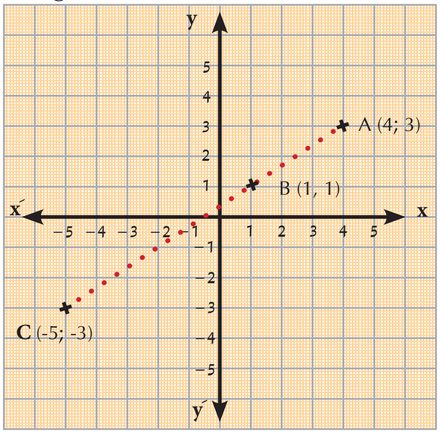
$C\,M = \sqrt{(-1-2)^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\because$ A M = B M = C M = 5 $\therefore$ Les points A , B et C sont situés sur un cercle de centre M

$\therefore$ Le périmètre du cercle = $2\,\pi\, r = 2\,\pi \times 5 = 10\,\pi$ unités de longueur

Pour t'entraîner :

Démontre que les points : A (4; 3.), B(1; 1.) et C (-5; -3.) sont alignés.



Complète :

A B = $\sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2}$ = ...

B C = $\sqrt{(-5-1)^2 + (-3-1)^2}$ = ...

A C = $\sqrt{(-5-4)^2 + (-3-3)^2}$ = ...

$\therefore$ A B + B C = ... + ... = ...

$\because$ A B + ... = A C

$\therefore$ Les points A , B et C sont alignés .

5-2 Coordonnées du milieu d'un segment

A apprendre

☆ Comment trouver les coordonnées du milieu d'un segment.

Expressions de base

☆ les extrémités d'un segment

☆ les coordonnées du milieu d'un segment

.

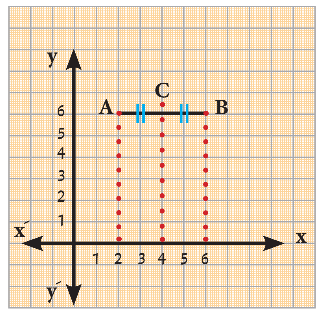
Réfléchis et discute

Dans un repère orthonormé : trouve les coordonnées du point C, le milieu de $\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

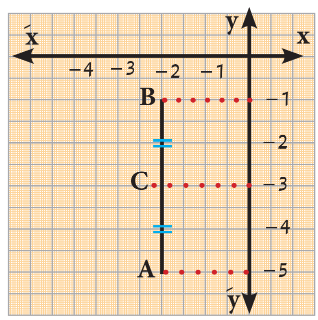
1) A (2; 6) et B (6; 6) **2)** A (-2 ; - 5) et B (- 2 ; - 1),

3) A (1; 2) et B (5; 6)

(1): Le segment ayant pour extrémités les deux points A (2; 6) et B (6; 6), est parallèle à l'axe des abscisses et les coordonnées du point C son milieu sont C (4; 6).

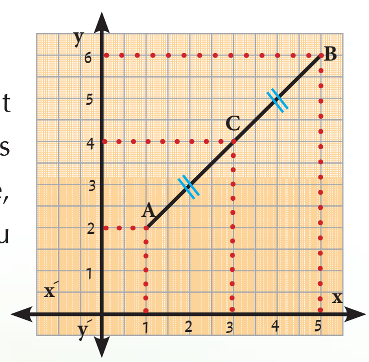


(2) : Le segments ayant pour extrémités les deux points A(-2 ; -5) et B(-2 ; -1) est parallèle à l'axe des ordonnées et les coordonnées du point C son milieu sont (-2 ; -3).



(3) : Dans la figure ci-contre :

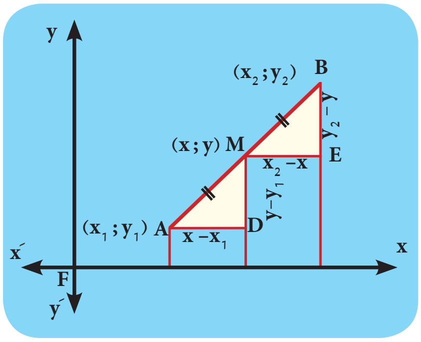
Soit C le milieu du segment ayant pour extrémités les deux points A(1 ; 2) et B(5 ; 6). Du graphique, on trouve que les coordonnées du point C (3; 4).



Donc C $\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2+6}{2}\right)$ d'où C (3; 4)

D'une manière générale nous pouvons déduire la formule du milieu d'un segment comme suit

Soient A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ et M $(x; y)$ où M est le milieu de $\overline{AB}$. De la superposition des deux triangles MDA et BEM :



On trouve que AD = ME

$\therefore x - x_1 = x_2 - x$

$\therefore\ 2x = x_1 + x_2 \qquad \therefore x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

De même, MD = BE $\quad \therefore\ y - y_1 = y_2 - y$

$\therefore\ 2y = y_1 + y_2 \qquad \therefore\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2};\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Exemple : Si C est le milieu de $\overline{AB}$ où A (3, - 7) et B (- 5, - 3),

alors les cordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont $\left(\dfrac{3 - 5}{2};\ \dfrac{-7 - 3}{2}\right)$ et donc (- 1; - 5)

Pour t'entraîner :

Trouve les cordonnées du point C, le milieu de $\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

1. A(2; 4), B (6; 0)
2. A (7; -5), B (-3; 5)
3. A (-3; 6), B (3; -6)
4. A (7; -6), B (-1; 0)

Exemples

1. Si C (6; -4) est le milieu de $\overline{AB}$ où A (5; -3), trouve les cordonnées du point B .

Solution

Soit B $(x_2; y_2)$ On a A (5; -3) et C (6 ; -4) est le milieu de $\overline{AB}$

$\because\ x = \dfrac{x_1 + x_2}{2},\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$\therefore\ 6 = \dfrac{5 + x_2}{2} \qquad \therefore\ 5 + x_2 = 12 \qquad \therefore x_2 = 12 - 5 = 7$

$-4 = \dfrac{-3 + y_2}{2} \qquad \therefore\ -3 + y_2 = -8$

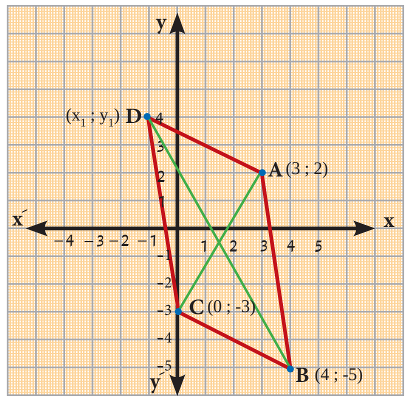
$y_2 = -8 + 3 \qquad y_2 = -5 \qquad \therefore$ B (7, -5)

2 ABCD est un parallélogramme tel que A(3 ; 2), B(4 ; -5) et C(0 ; -3). Trouve les coordonnées du point d'intersection de ses diagonales, puis trouve les coordonnées du point D.

Solution

La figure ABCD est un parallélogramme et M est le point d'intersection de ses diagonales.

Soit D $(x_1 ; y_1)$



$\because$ M est le milieu de $\overline{AC}$ $\therefore$ $M\left(\frac{3+0}{2} ; \frac{2-3}{2}\right)$

$\therefore$ $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\because$ M est le milieu de $\overline{BD}$ $\therefore$ $M\left(\frac{4+x_1}{2} ; \frac{-5+y_1}{2}\right)$

$\therefore \frac{3}{2} = \frac{4+x_1}{2}$ $\therefore$ $3 = 4 + x_1$

$\therefore$ $x_1 = -1$

$, -\frac{1}{2} = \frac{-5+y_1}{2}$ $\therefore -1 = -5 + y_1$

$\therefore$ $y_1 = 4$

$\therefore$ Les coordonnées du point M sont (-1; 4)

5-3

Pente d'une droite

On sait que la pente d'une droite passant par les deux points $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$ est égale à $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ où $x_2 > x_1$

A apprendre

- ☆ La relation entre les pentes de deux droites parallèles
- ☆ La relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires.

Réfléchis et discute

Trouve la pente de la droite passant par chaque paire des points suivants :

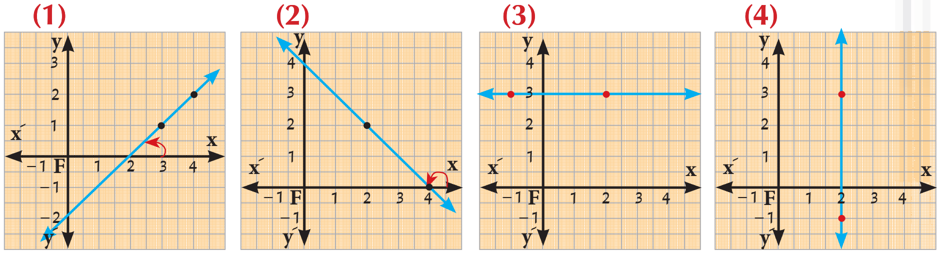
(1) (3; 1), (4; 2) **(2)** (4; 0), (2; 2)

(3) (-1; 3), (2; 3) **(4)** (2; -1), (2; 3)

Que remarques-tu ?

De ce qui précède, on peut tracer les droites passant par les paires de points précédents dans un repère orthonormé comme dans les figures suivantes :

(1) **(2)** **(3)** **(4)**

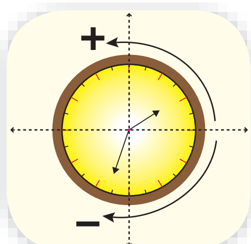


Expressions de base

- ☆ mesure positive de l'angle
- ☆ mesure négative de l'angle
- ☆ pente d'une droite
- ☆ deux droites parallèles
- ☆ Deux droites perpendiculaires

Mesure positive et mesure négative d'angle :

Un angle est considéré positif s'il est pris contre le sens des aiguilles d'une montre. Il est considéré négatif s'il est pris dans le sens des aiguilles d'une montre.



Des figures précédentes, on déduit que :

Figure	Pente $\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$,	Nature de l'angle positif qui fait la droite avec le sens positif de l'axe des x	Pente de la droite
1	$m = \frac{2 - 1}{4 - 3} = 1$	Aigu	Plus grande que zéro
2	$m = \frac{2 - 0}{2 - 4} = -1$	Obtus	Plus petite que zéro
3	$m = \frac{3 - 3}{2 + 1} = 0$	Nul	Egale zéro
4	$m = \frac{3 + 1}{2 - 2}$ (indéfini)	Droit	Indéfinie

Définition de la pente d'une droite :

C'est la tangente de l'angle positif que fait la droite avec le sens positif de l'axe des abscisses.

Donc la pente de la droite = tg E, où E est l'angle positif que fait la droite avec le sens positif de l'axe des abscisses

Exemples

1. Trouve la pente de la droite qui fait un angle de mesure 56° 12` 48`` avec le sens positif de l'axe des abscisses.
2. Trouve la mesure de l'angle positif que fait une droite avec le sens positif de l'axe des abscisses si la pente de cette droite est 1,4865 .

Solution

1. $\because$ m = tg E $\quad\quad$ $\therefore$ m = tg 56° 12` 48`` = 1,494534405

Départ → [redacted] 56 [redacted] 12 [redacted] 48 [redacted] [redacted]

2. $\because$ m = tg E $\quad\quad$ $\therefore$ tg E = 1,4865 $\quad\quad$ $\therefore$ m ($\angle$ E) = 56° 4` 13``

Départ → [redacted] [redacted] 1,4865 [redacted] [redacted]

Pour t'entraîner :

1. Trouve la pente de la droite qui fait avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure :

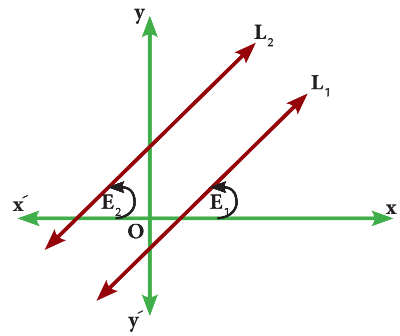
   A 30° $\quad\quad$ B 45° $\quad\quad$ C 60°

2. En utilisant une calculatrice, trouve la mesure de l'angle positif que fait une droite ayant pour pente avec le sens positif de l'axe des abscisses dans chacun des cas suivants :

   A p = 0,3673 $\quad\quad$ B p = 1,0246 $\quad\quad$ C p = 3,1648

Relation entre les pentes de deux droites parallèles .

Réfléchis et discute



La figure ci-contre représente deux droites parallèles L_1 et L_2 de pentes respectives P_1, P_2, qui font avec le sens positif de l'axe des abscisses deux angles de mesures respectives E_1 et E_2

Complète ce qui suit :

1. m ($\angle$ E_1) = m ($\angle$ E_2) car ....
2. tg E_1 .... tg E_2
3. p_1 .... p_2

De ce qui précède, on déduit que :

Si L_1 // L_2 , **alors** $p_1 = p_2$

D'où : Si deux droites sont parallèles, alors elles ont la même pente et réciproquement .

Si $p_1 = p_2$, alors L_1 // L_2

D'où : Si deux droites ont la même pente, alors elles sont parallèles

Exemples

1. Démontre que la droite passant par les deux points (-3; -2); (4; 5) est parallèle à la droite qui fait avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure 45°

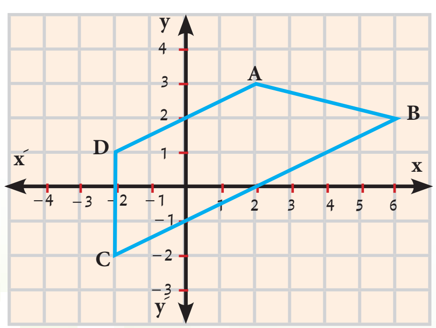
Solution

La pente de la première droite $(p_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{7}{7} = 1$

La pente de la deuxième droite (p_2) = tg 45° = 1

$\because$ $p_1 = p_2$ $\therefore$ les deux droites sont parallèles.

2. Dans un repère cartésien, représente graphiquement points A (2; 3), B (6; 2), C (-2; -2) et D (- 2; 1), puis démontre que la figure ABCD est un trapèze



Solution

Du graphique, on trouve que : $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Pour démontrer ce résultat analytiquement, on calcule les pentes de : AD et BC

Soit p_1 la pente de $\overline{AD}$

$\because\ p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad \therefore\ p_1 = \frac{3-1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Soit p_2 la pente de $\overline{BC}$

$p_2 = \frac{2+2}{6+2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\qquad \because\ p_1 = p_2$ $\qquad \therefore\ \overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore$ La figure ABCD est un trapèze si les points A, B, C et D ne sont pas alignés ..... (1)

$\because$ La pente de $\overline{AB} = \frac{3-2}{2-6} = \frac{1}{-4}$ et La pente de $\overline{CD} = \frac{2+1}{-2+2} = \text{..........}$ (indéfinie)

$\therefore$ Les droites $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$ ne sont pas parallèles .... (2)

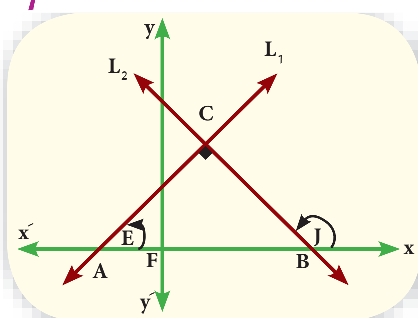
De (1), (2) $\qquad \therefore$ La figure ABCD est un trapèze .

Pour t'entraîner :

1. Démontre que la droite passant par les deux points (2 ; 3) et (0 ; 0) est parallèle à la droite passant par les deux points (-1 ; 4) et (1 ; 7)
2. Démontre que la droite passant par les deux points (2 ; -1) et (6 ; 3) est parallèle à la droite qui fait un angle de mesure 45° avec le sens positif de l'axe des abscisses.
3. Si $\overleftrightarrow{AB}$ // l'axe des ordonnées où A (x; 7) et B (3; 5) , trouve la valeur de x.
4. Si $\overleftrightarrow{CD}$ // l'axe des abscisses où C (4; 2) et D (- 5;y) trouve la valeur de y.

Relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires.

Réfléchis et discute

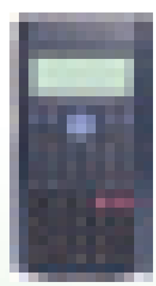


La figure ci-contre : représente deux droites L_1 et L_2 de pentes respectives p_1, p_2 où $L_1 \perp L_2$.

Trouve la relation entre $\angle$ E et $\angle$ J)

Complète le tableau suivant en utilisant une calculatrice :

Valeur de E	20°	40°	.....	.....	....
Valeur de J	......	.....	140°	150°	.....
tg E × tg J	.....	.....	.....	.....	.....



Du tableau précédent, on trouve que :

$\text{tg } E_1 \times \text{tg } J_2 = -1$ $\qquad$ **d'où** : $p_1 \times p_2 = -1$

SI L_1 et L_2 sont deux droites de pentes respectives p_1 et p_2 , où $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^*$

Si $L_1 \perp L_2$ alors $p_1 \times p_2 = -1$

Si deux droites sont perpendiculaires, alors le produit de leurs pentes = -1

Réciproquement, $p_1 \times p_2 = -1$, alors $L_1 \perp L_2$

D'où Si le produit des pentes de deux droites = -1, alors elles sont perpendiculaires.

Exemples

1 Démontre que la droite passant par les deux points $(4, 3\sqrt{3})$ et $(5, 2\sqrt{3})$ est perpendiculaire à la droite qui fait, avec le sens positif de l'axe des abscisses, un angle de mesure 30°.

Solution

Soit p_1 la pente de la première droite et p_2 la pente de la deuxième droite.

$\because\ p = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore\ p_1 = \dfrac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{4 - 5} = -\sqrt{3}$

$\because\ p = \text{tg } E$

$\therefore\ p_2 = \text{tg } 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ p_1 \times p_2 = -\sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -1$

$\therefore$ Les droites sont perpendiculaires .

2 Si le triangle ayant pour sommets X(4, 2),Y (3, 5) et Z (-5, A) est rectangle en Y, trouve la valeur de A.

Solution

On cherche la pente de $\overleftrightarrow{XY}$ d'où $p_1 = \dfrac{5-2}{3-4} = \dfrac{3}{-1} = -3$,

On cherche la pente de $\overleftrightarrow{ZY}$ d'où $p_2 = \dfrac{A-2}{-5-4} = \dfrac{A-2}{-9}$

$\because$ Le triangle XYZ est rectangle en Y

$\therefore\ p_1 \times p_2 = -1$

$\therefore\ -3 \times \dfrac{A-2}{-9} = -1$

$\therefore\ \dfrac{(A-2)}{3} = -1$

$\therefore\ A - 2 = -3$

$\therefore\ A = 2 - 3$

$\therefore\ A = -1$

Pour t'entraîner :

Trouve la pente de la droite perpendiculaire à la droite passant par les deux points (3, -2) et (5, 1) .

5-4 L'équation d'une droite connaissant sa pente et l'ordonnée de son point intersection avec l'axe des ordonnées

A apprendre

☆ Comment trouver l'équation d'une droite en connaissant sa pente et la partie coupée de l'axe des ordonnées

Expressions de base

☆ équation d'une droite
☆ pente d'une droite
☆ la partie coupée de l'axe des ordonnées

Réfléchis et discute

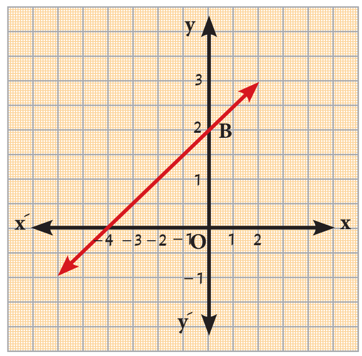
Nous avons déjà étudié la relation linéaire suivante entre deux variables x et y :

$a x + b y + c = 0$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Cette relation est représentée par une droite.

Exemple

Représente la relation $x - 2y + 4 = 0$ graphiquement.



Du graphique, calcule :

A la pente de la droite.

B la longueur de la partie verticale comprise entre le point d'origine et le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Pour dessiner plus facilement, il est préférable de déterminer les points d'intersection de la droite avec les deux axes comme suit :

$y = 0$	$\therefore x + 4 = 0$	
$\therefore x = -4$	$(-4 ; 0)$	Le point (-4 ; 0) vérifie la relation.
$x = 0$	$\therefore -2y + 4 = 0$	
$\therefore 2y = 4$	$(0; 2)$	Le point (0 ; 2) vérifie la relation.

Du graphique, on trouve que la pente de la droite

(P) > 0 ..... **(Pourquoi ?)** D'où $P = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

La distance entre les deux points O et B est appelée la partie coupée de l'axe des ordonnées el elle est notée par (c). Dans cet exemple, la longueur de c est deux unités de longueur. Nous pouvons mettre l'équation précédente sous la forme : $y = Px + c$

Dans ce cas, $2y = x + 4$ En divisant les deux membres par 2

$\therefore y = \frac{1}{2} x + 2$

On remarque sous cette forme que la pente de la droite (P) est le coefficient de x. Ce coefficient est égal à $\frac{1}{2}$, et que la longueur de la partie coupée de l'axe des y est $c = 2$. C'est le même résultat obtenu du graphique précédent.

Equation d'une droite :

L'équation de la droite ayant pour pente P et pour partie coupée de l'axe des ordonnées c est sous la forme :

$y = P x + c$ où $P \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

On remarque que : On peut mettre l'équation de la droite $a x + b y + c = 0$ où $b \neq 0$ sous la forme : $y = mx + c$ comme suit :

$ax + by + c - 0$ donc $by = -ax - c$

$\therefore y = -\frac{a}{b} x - \frac{c}{b}$

C'est la même forme que $y = P x + c$ d'où $P = \frac{-a}{b} = \frac{-\text{Coefficient } x}{\text{Coefficient } y}$

et c est la longueur de la partie coupée de l'axe des ordonnées

Exemples

1 Trouve la pente de la droite d'équation $3 x + 4 y - 5 = 0$ de deux méthodes différentes, puis trouve la longueur de la partie coupée de l'axe des ordonnées.

Solution

$\because$ L'équation de la droite est sous la forme $a x + b y + c = 0$ où $b \neq 0$

$\therefore$ La pente de la droite $= \frac{-a}{b}$ $\therefore$ La pente de la droite $= \frac{-3}{4}$

Nous pouvons mettre l'équation de la droite sous la forme $y = Px + c$

$\therefore 4 y = -3x + 5$ $y = \frac{-3}{4} x + \frac{5}{4}$

$\therefore$ La pente de la droite $= \frac{-3}{4}$ $\therefore$ La partie coupée de l'axe des ordonnées $= \frac{5}{4}$

2 Trouve l'équation de la droite passant par le point (1 ; 2) et perpendiculaire à la droite passant par les deux ponts A(2 ; -3) et B(5 ; -4).

Solution

$\because$ La pente de la droite passant par les deux points A et B $= \frac{-4-(-3)}{5-2} = \frac{-4+3}{5-2} = \frac{-1}{3}$

$\therefore$ La pente de la droite qui lui est perpendiculaire = 3

$\therefore$ L'équation de la droite est sous la forme $y = 3 x + c$

$\because$ La droite passe par le point (1 ; 2) $\therefore$ ce point vérifie son équation

$\therefore 2 = 3 \times 2 + c$

$\therefore c = 2 - 6 = -4$

$\therefore$ L'équation de la droite est sous la forme $y = 3 x - 4$

3 Soient A(-3 ; 4) , B(5 ; -1) et C(3 ; 5). Trouve l'équation de la droite passant par le sommet A et par le milieu de $\overline{BC}$.

Solution

Le point milieu de $\overline{BC}$ $= (\frac{3+5}{2}; \frac{5-1}{2}) = (\frac{8}{2}; \frac{4}{2}) = (4; 2)$

$\therefore$ La pente de la droite demandée $= \frac{2-4}{4+3} = \frac{-2}{7}$

$\because$ $y = mx + c$ $\therefore$ $y = \frac{-2}{7}x + c$

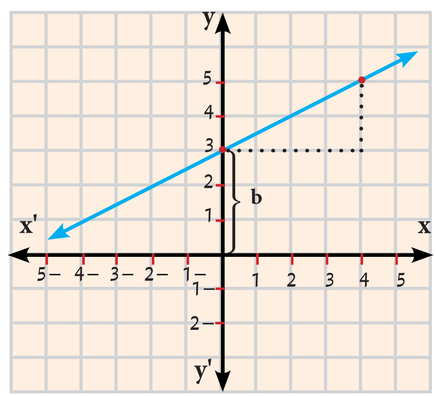
$\because$ La droite passe par le point A(-3 , 4), donc ce point vérifie son équation

$\therefore$ $4 = \frac{-2}{7} \times -3 + c$ $\therefore$ $4 = \frac{6}{7} + c$ $\therefore$ $c = \frac{22}{7}$

$\therefore$ L'équation de la droite est sous la forme $y = \frac{-2}{7}x + \frac{22}{7}$ En multipliant les deux membres de l'équation par 7

$\therefore$ $7y = -2x + 22$ $\therefore$ L'équation est : $2x + 7y - 22 = 0$

Pour t'entraîner :



1 Dans la figure ci-contre, trouve :

A la pente P de la droite.

B la longueur c de la partie coupée de l'axe des ordonnées.

C l'équation de la droite en connaissant P et c.

D la longueur de la partie coupée de l'axe des abscisses.

E l'aire du triangle délimité par la droite et les deux parties coupées des deux axes.

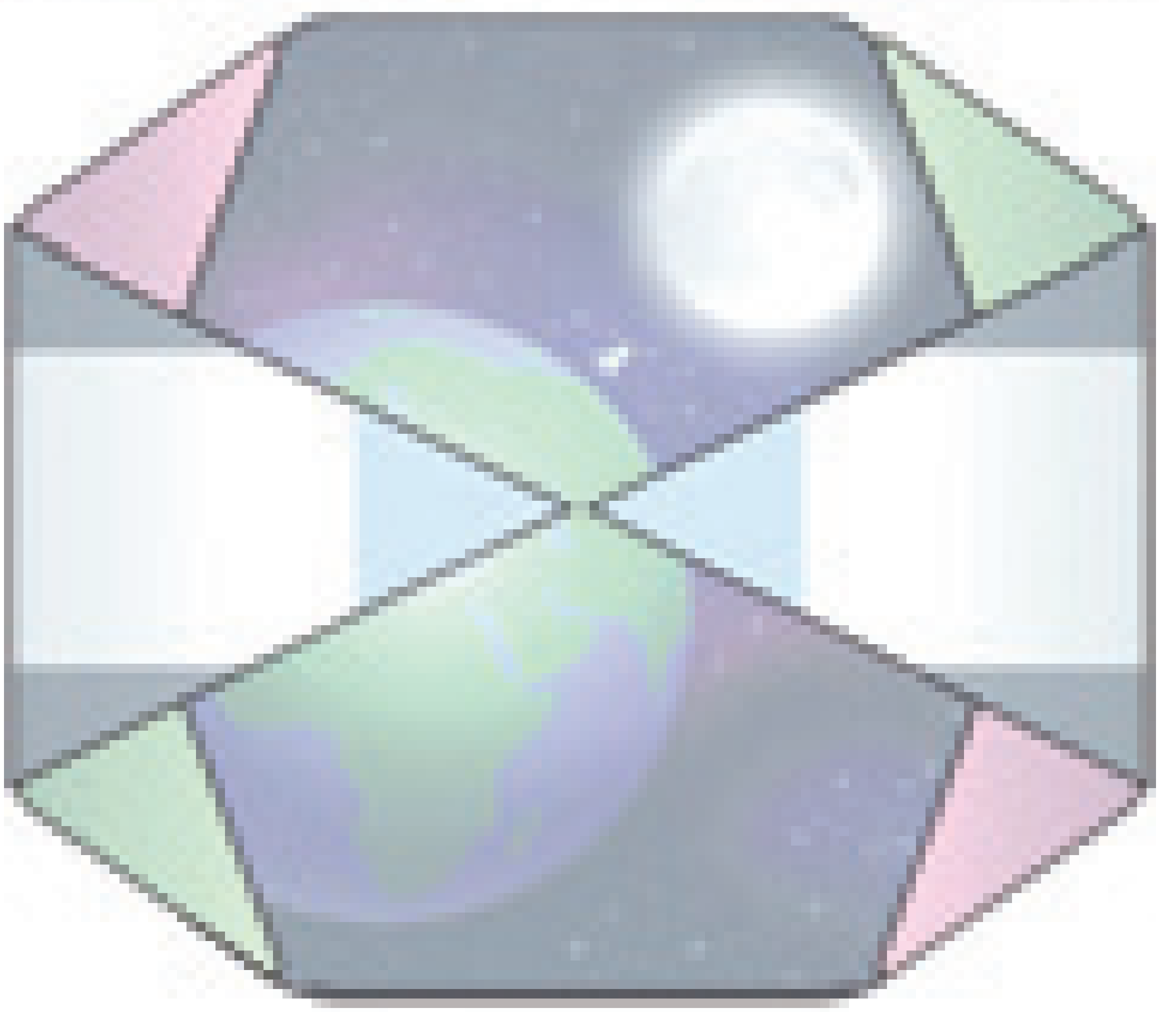
3

MATHÉMATIQUES

Livre de l'élève

Troisième préparatoire

Deuxième semestre



Sommaire

Algèbre

Unité 1: Equations

Unité 2: Fonctions rationnelles et opérations

Probabilité

Unité 3: Probabilité

Géométrie plane

Unité 4: Géométrie plane

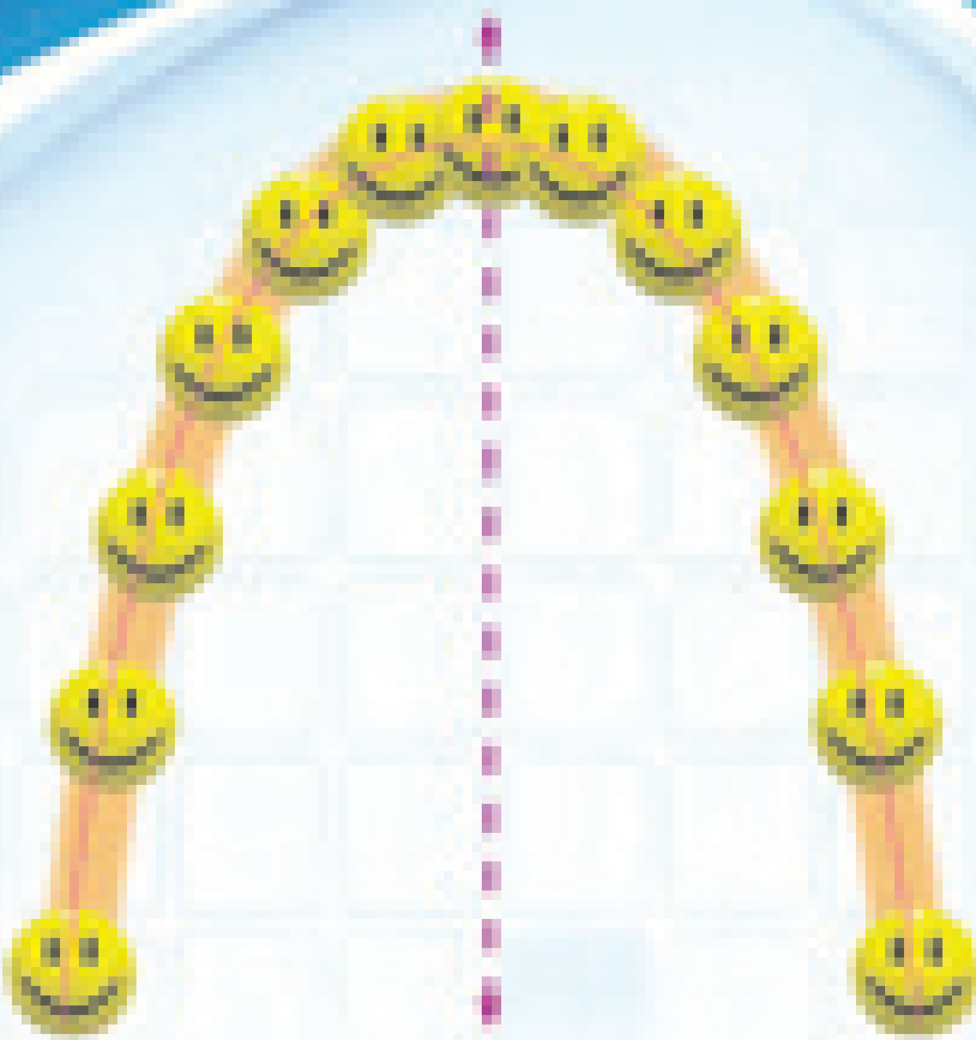
Unité 5:

Algèbre

Unité (1)

Équations

Fonctions rationnelles et opérations

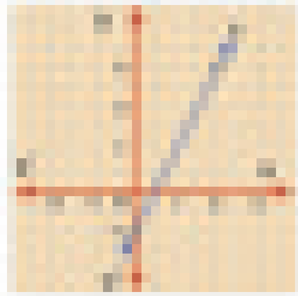


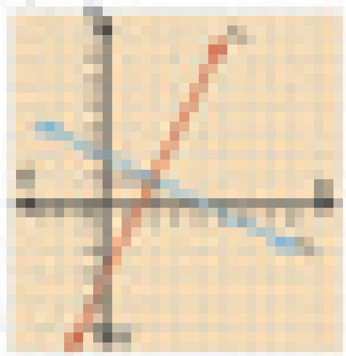
Un joueur a lancé un ballon qui a suivi le trajet indiqué par la figure ci-dessus.

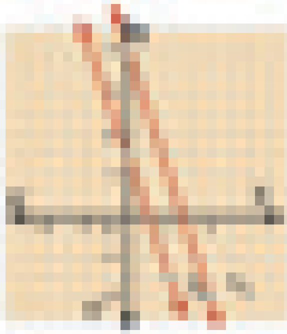
Cette courbe représente une fonction, que tu étudieras, appelée une fonction du second degré.

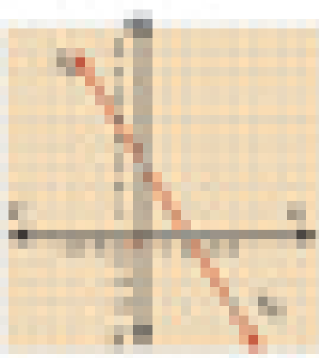
1-1

Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues algébriquement et graphiquement



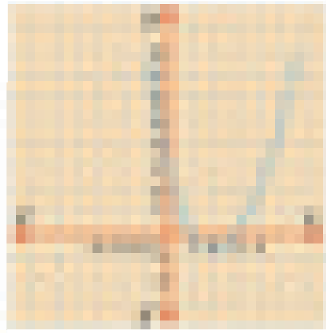






1-2

Résolution d'une équation du second degré à une inconnue graphiquement et algébriquement

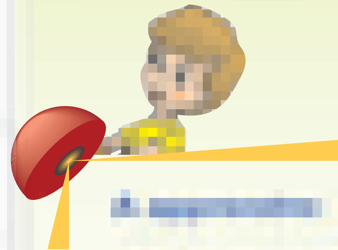


1-3

Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré

1-3

Unité (2):
Fonctions rationnelles et opérations
Ensembles des zéros d'une fonction polynôme



2-2

Fonction rationnelle

2-3

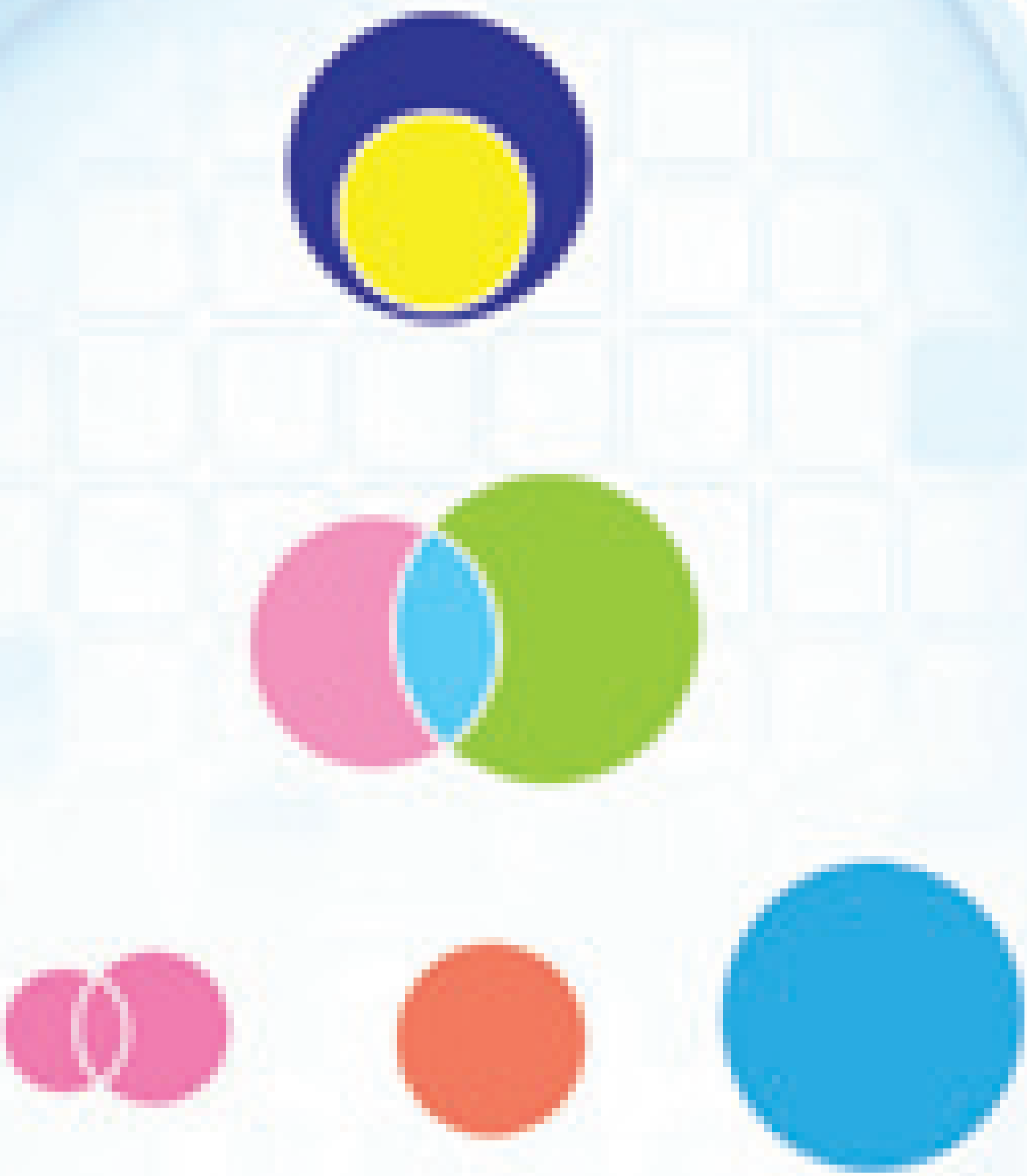
Egalité de deux fractions rationnelles

2-4

Opérations sur les fractions rationnelles

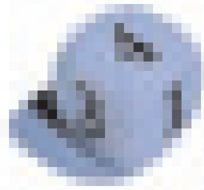
(3) Mets g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g dans chacun de ces cas suivants

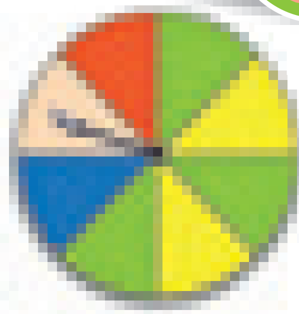
Unité 3: Probabilité

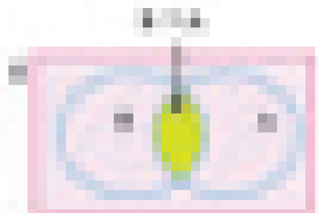


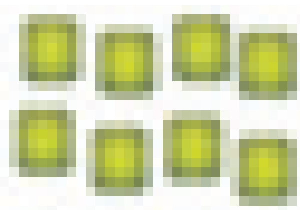
3-1

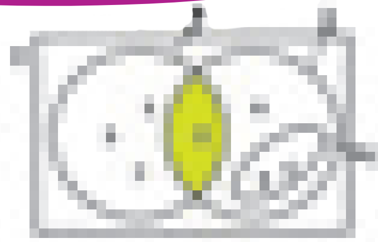
Opérations sur les événements

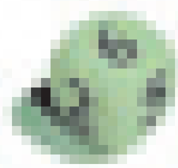


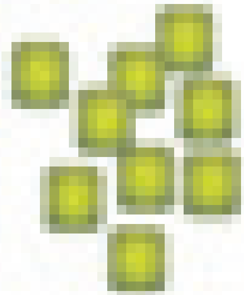


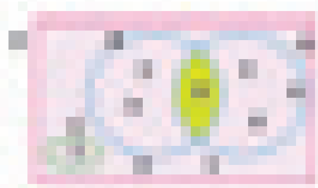


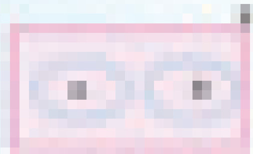






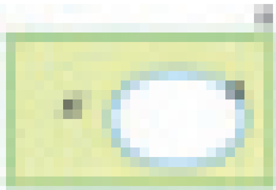






3-2

Evénement complémentaire et différence de deux événements



Géométrie plane

Unité (4): Le cercle

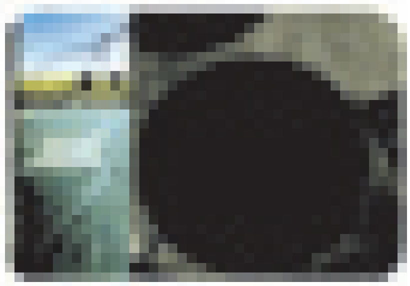
Les conducteurs de voitures doivent bien connaître le code de la route et distinguer les différents signes.

En t'aidant des différentes ressources d'informations (Les offices de la gestion du trafic – la bibliothèque – l'internet – .....) fais une recherche sur le code de la route et la signalisation routière.

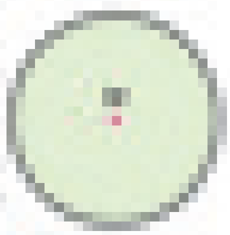
4-1

Définitions et notions de base

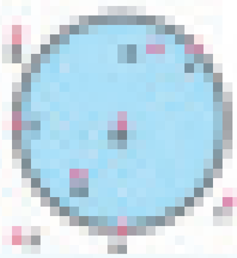
[illegible]



[illegible]



[illegible]



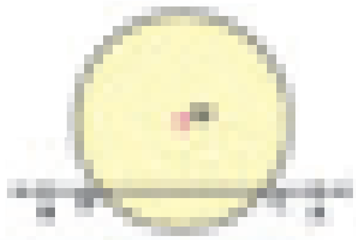
A apprendre

- Les notions de base concernant le cercle
- La notion de l'axe de symétrie d'un cercle

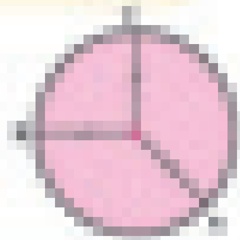
Expressions de base :

- cercle
- surface d'un cercle
- rayon d'un cercle
- corde
- diamètre d'un cercle
- axe de symétrie d'un cercle

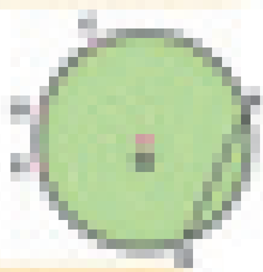
La surface d'un cercle :



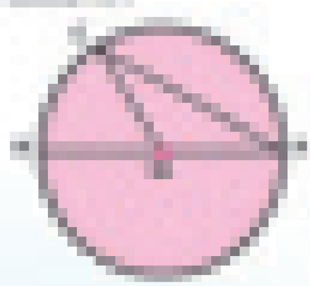
Le rayon d'un cercle :

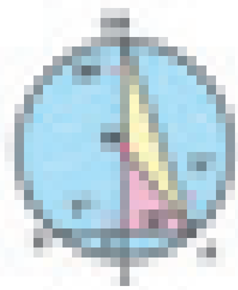


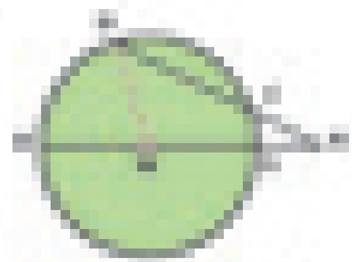
Une corde d'un cercle :

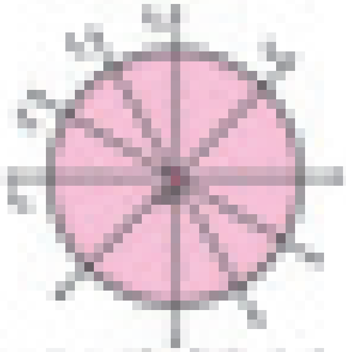


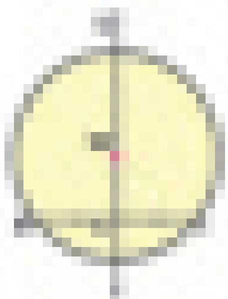
Un diamètre d'un cercle :

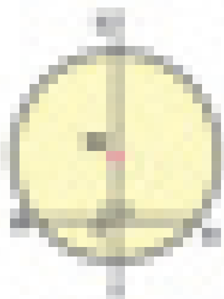


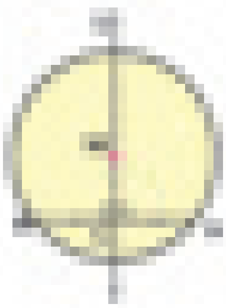


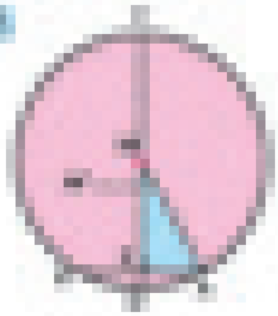


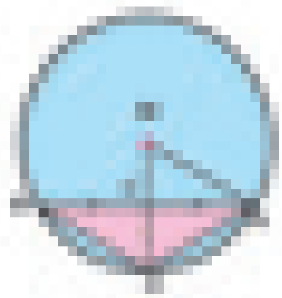


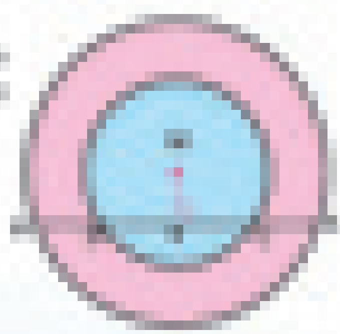


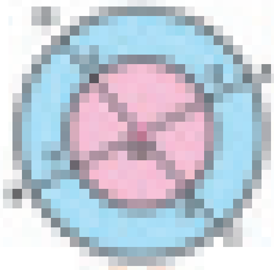


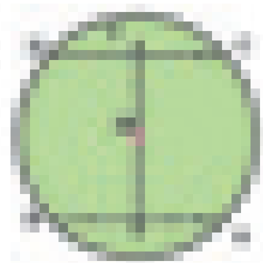












4-2

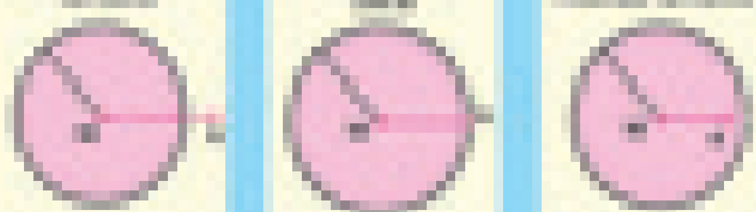
Positions relatives d'un point et d'une droite par rapport à un cercle.

A apprendre

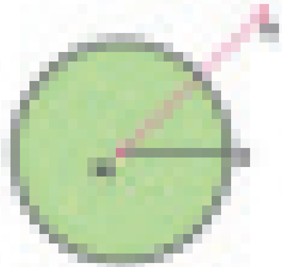
- déterminer la position d'un point par rapport à un cercle
- déterminer la position d'une droite par rapport à un cercle
- déterminer la relation entre la tangente et le rayon d'un cercle
- déterminer la position d'un cercle par rapport à un autre cercle
- relation entre la droite des centres de deux cercles, la corde commune et la tangente commune

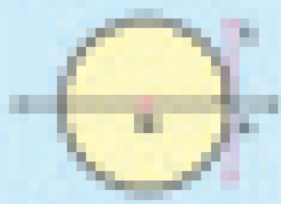
Expressions de base :

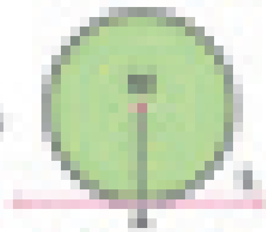
- un point à l'extérieur du cercle
- un point du cercle
- un point à l'intérieur du cercle
- deux cercles disjoints
- deux cercles sécants
- deux cercles tangents
- tangente commune
- droite des centres
- corde commune

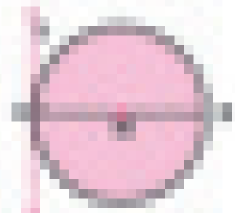


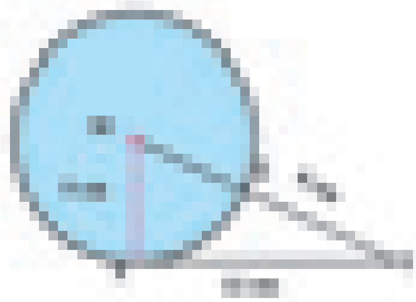
الرواد للطباعة

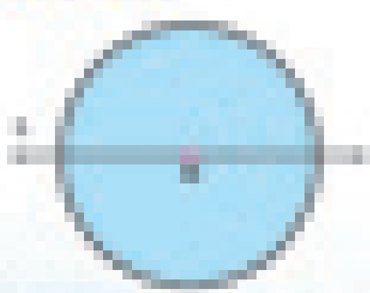


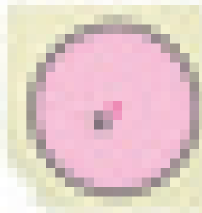


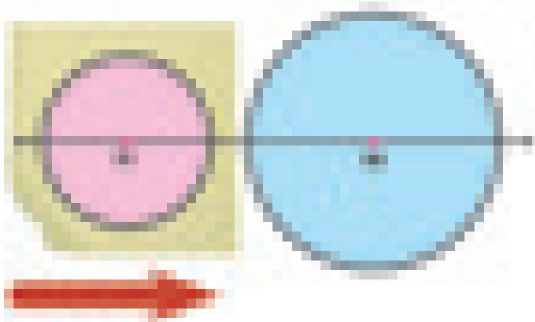


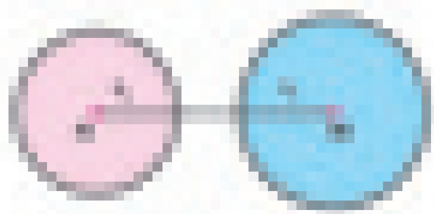


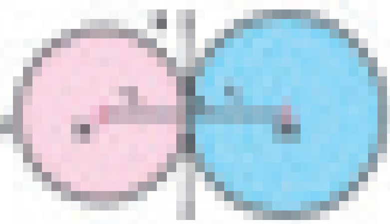


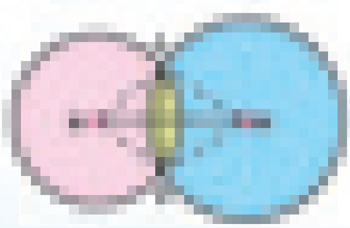


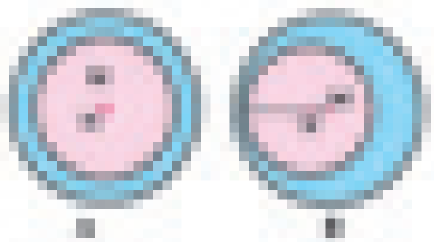


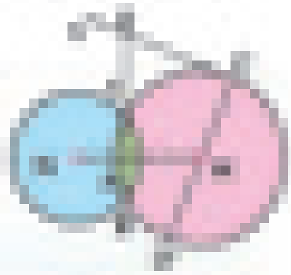


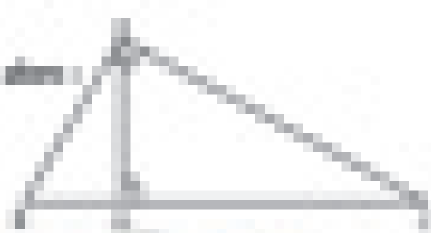












4-3

Détermination d'un cercle

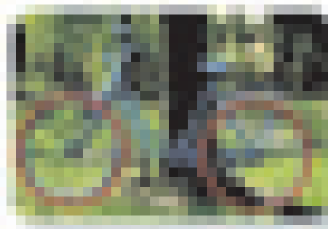
A apprendre

- Comment tracer un cercle passant par un point donné
- Comment tracer un cercle passant par deux points donnés.
- Comment tracer un cercle passant par trois points donnés.

Expressions de base :

- Cercle circonscrit à un triangle

[illegible]



[illegible]

[illegible]

الرواد للطباعة

- Combien y a-t-il de points dans un plan ? Quel est le nombre de cercles qu'on peut tracer passant par le point A ?
- Si les rayons de ces cercles sont de même longueur, où se trouvent leurs centres ?

De ce qui précède, on déduit que :

1. On peut tracer une infinité de cercles passant par un point donné comme A.
2. Si les rayons de ces cercles sont de même longueur, leurs centres appartiennent à un même cercle de centre A, superposable à ces cercles.

[illegible]

Soit L une droite du plan. A est un point du plan où A ∉ L. En utilisant les instruments de la géométrie, trace un cercle passant par A de longueur de rayon 2 cm. Combien de cercles peux-tu tracer ? [illegible]

(2) Tracer un cercle passant par deux points donnés :

Hypothèse : A et B sont deux points donnés d'un plan.

Conclusion : Tracer un cercle M passant par les deux points A et B. $\overline{AB}$ est une corde du cercle M.

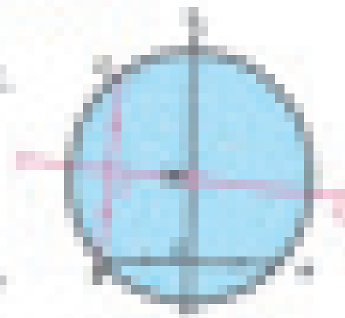
Construction :

1. Trace un segment $\overline{AB}$.
2. Trace la droite L, médiatrice de $\overline{AB}$ où L ⊥ $\overline{AB}$ = {F}.

   Le centre du cercle appartient à la médiatrice de la corde $\overline{AB}$.
3. D'un point quelconque M de la droite L, trace un cercle de centre M et de rayon MA. Ce cercle passera par le point B.
4. D'un autre point quelconque M_1 de la droite L, trace un cercle de centre M_1 et de rayon M_1A. Ce cercle passera aussi par le point B.
5. Répète le tracé précédent en choisissant d'autres points et observe la figure obtenue.

Remarque que : Pour tout point choisi comme centre du cercle, on peut tracer un seul cercle passant par les deux points A et B.

- Quel est le nombre de points de la droite L ? Quel est le nombre de cercles qu'on peut tracer passant par les deux points A et B ?
- Quelle est la longueur du rayon du plus petit cercle qu'on peut tracer passant par les deux points A et B ?
- Deux cercles différents peuvent-ils se couper en plus de deux points ?



Résultats:

Résultat (1) Le cercle passant par les sommets d'un triangle est appelé cercle circonscrit au triangle.

On dit qu'un triangle est inscrit dans un cercle si les sommets du triangle sont situés sur le cercle.

Résultat (2) Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un seul point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

4-4 Relation entre les cordes d'un cercle et son centre

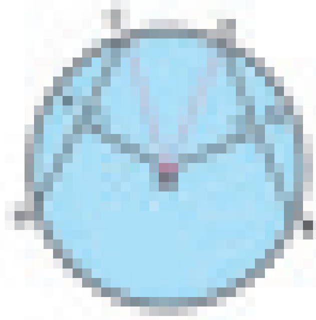
A apprendre

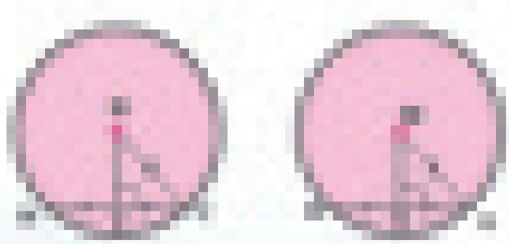
- ☆ Déduire la relation entre les cordes d'un cercle et son centre
- ☆ Résoudre des problèmes sur la relation entre les cordes d'un cercle et son centre

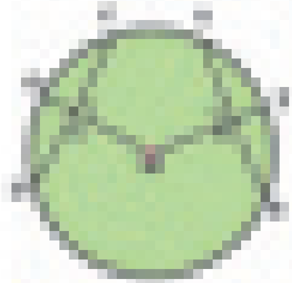
Expressions de base :

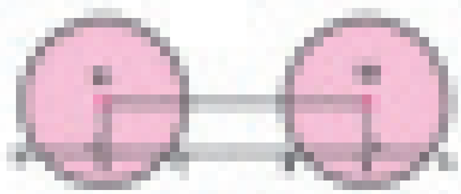
- ☆ des cordes de même longueur
- ☆ cercles superposables

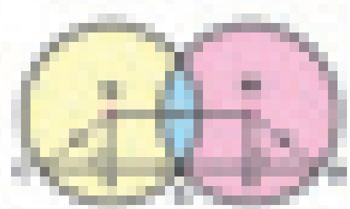
الرواد للطباعة











Unité 5:

Les angles et les arcs dans le cercle

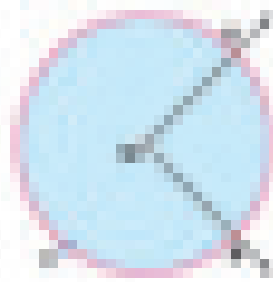
5-1 Angle au centre et mesure de l'arc

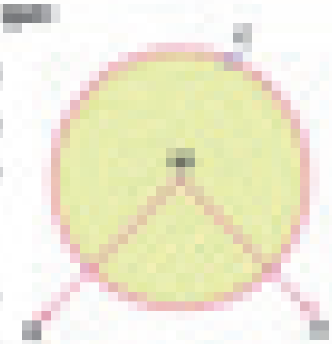
À apprendre :

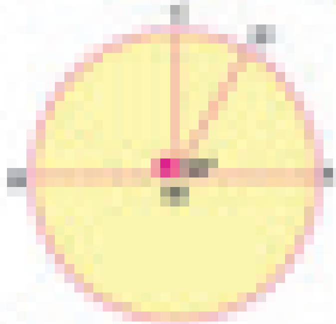
- La notion de la longueur d'un arc.
- La notion de la mesure d'un arc.
- Comment trouver la relation entre les cordes d'un cercle et ses arcs.

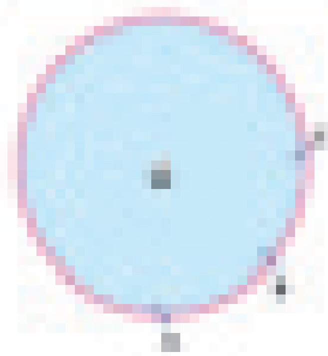
Expressions de base

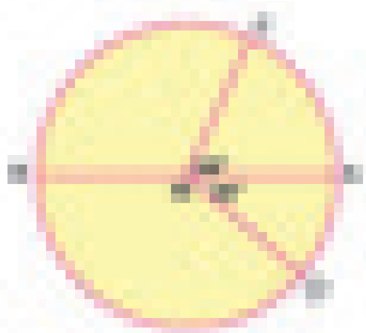
- Angle au centre
- Angle inscrit
- Arc
- Deux arcs adjacents
- Mesure d'un arc
- Une corde
- Une tangente

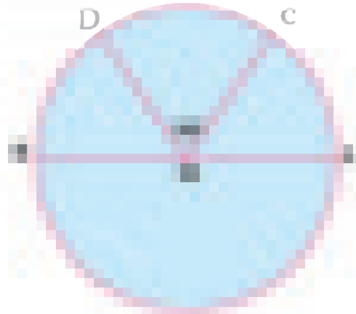




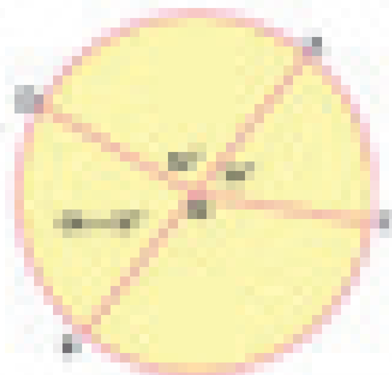


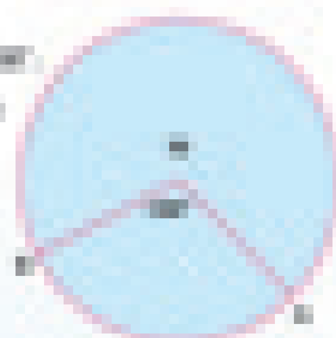


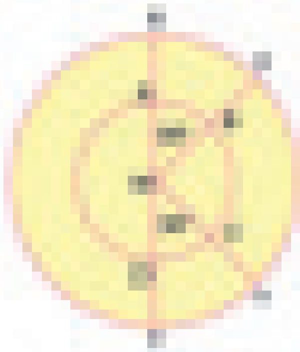


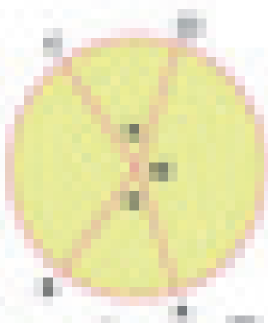


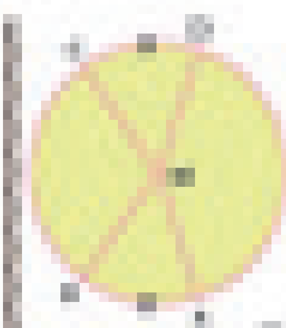
D
C

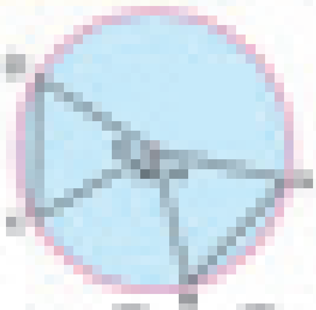


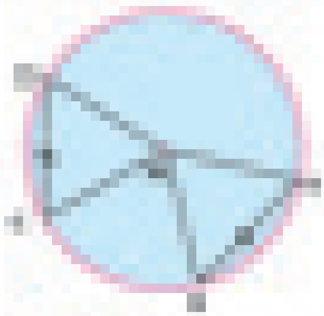


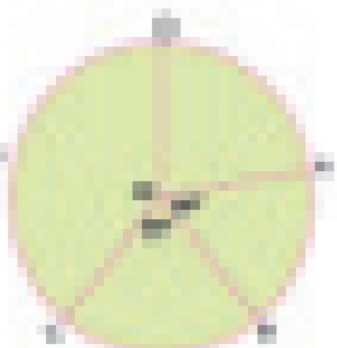


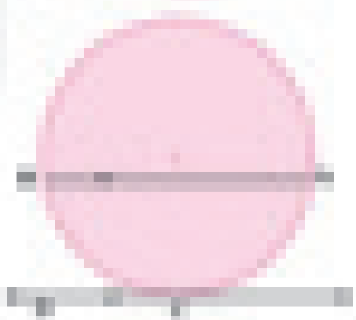




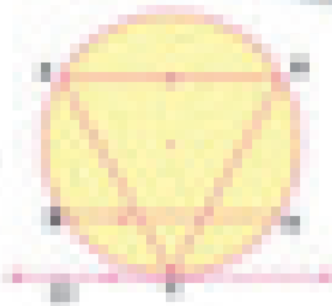


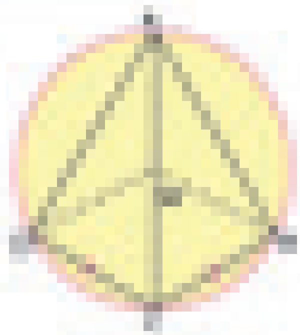






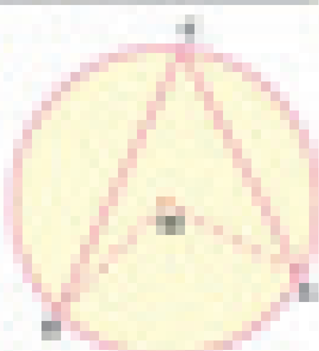
الرواد للطباعة

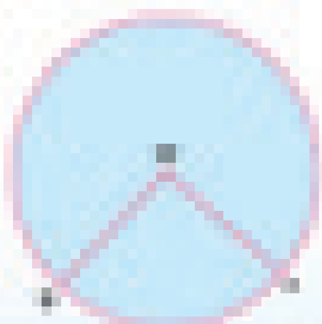




5-2

Relation entre l'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc





A apprendre :

☆ Comment déduire la relation entre un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc.

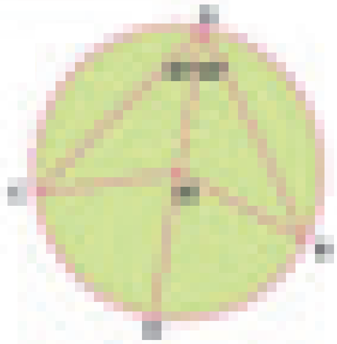
Expressions de base

☆ Angle au centre
☆ Angle inscrit

Activité Dans la figure ci-contre :

[BD] est un diamètre du cercle M. Observe la figure puis réponds aux questions suivantes :

- Cite deux paires d'angles ayant la même mesure.
- Si m (∠ BAD) = [illegible], trouve m (∠ BMD).
- Si m (∠ CMD) = [illegible], trouve m (∠ CAD).
- Compare m (∠ BAC) et m (∠ BMC). Que peux-tu déduire?



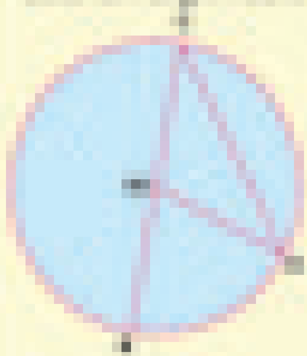
Dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre s'ils interceptent le même arc.

Hypothèses : ∠ ACB est un angle inscrit et ∠ AMB est un angle au centre qui interceptent le même arc.

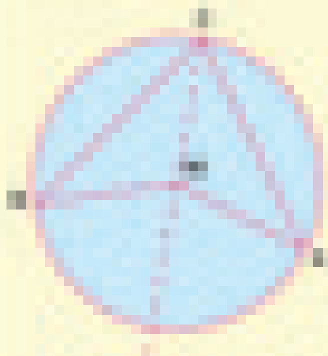
Conclusion : Démontrer que m (∠ ACB) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB).

Démonstration : Pour démontrer le théorème, il y a trois cas à étudier.

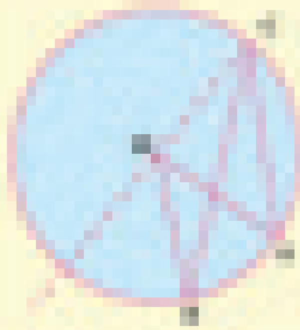
- Si M appartient à l'un des côtés de l'angle inscrit.



- Si M est un point à l'intérieur de l'angle inscrit.



- Si M est un point à l'extérieur de l'angle inscrit.



Premier cas : Si M appartient à l'un des côtés de l'angle inscrit

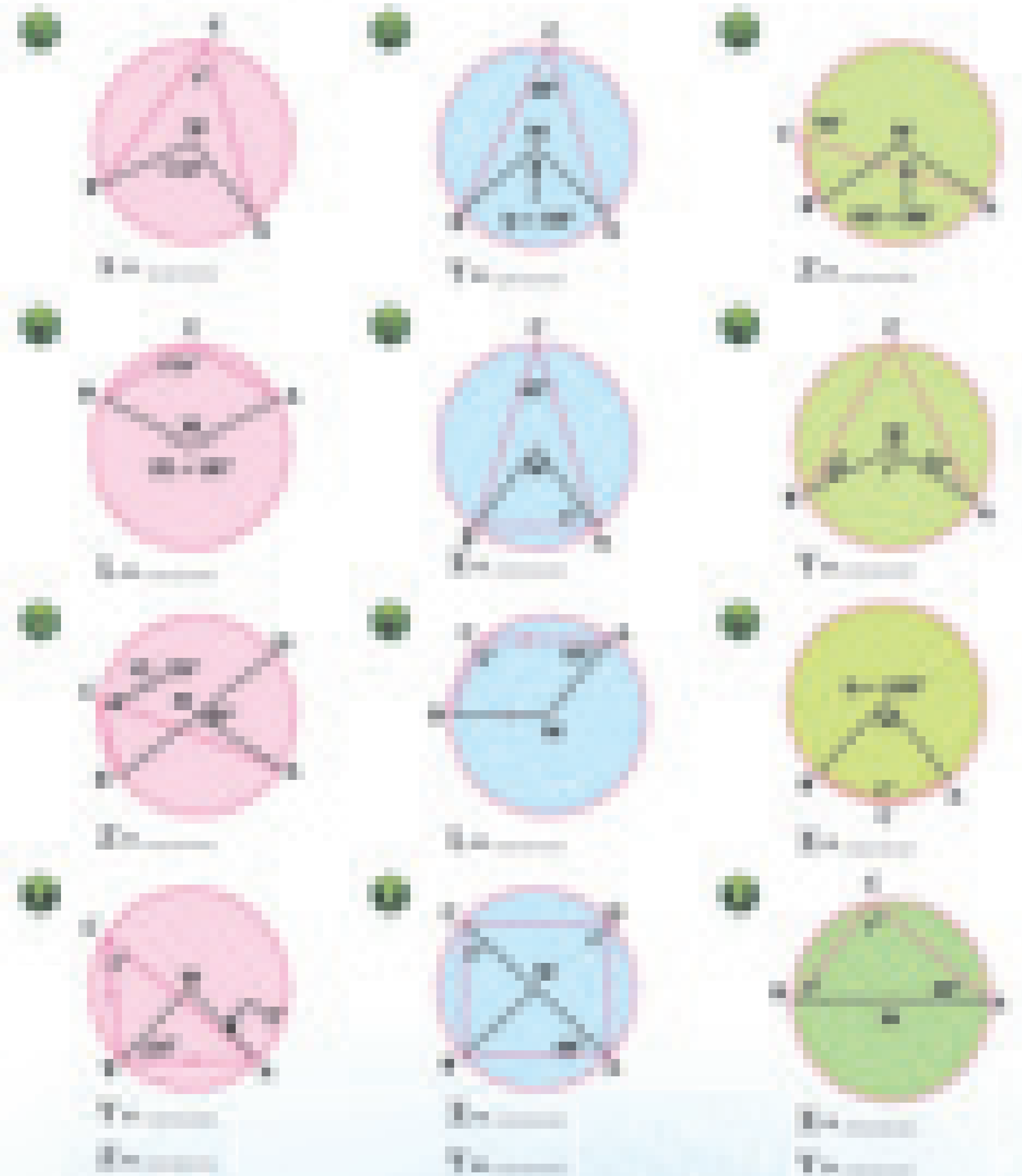
∵ ∠ AMB est un angle extérieur au triangle AMC

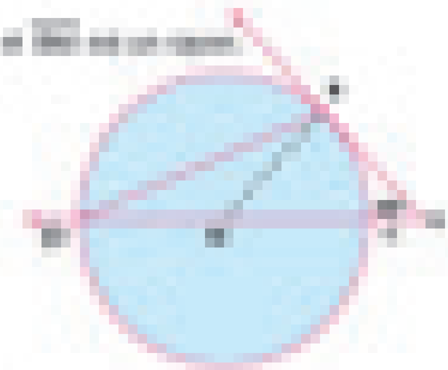
∴ m (∠ AMB) = m (∠ A) + m (∠ C) (1)

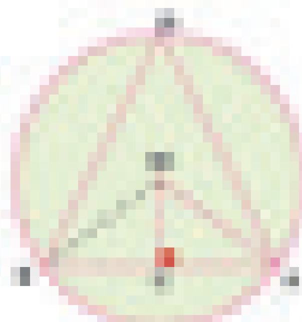
∵ MA = MC rayons ∴ m (∠ A) = m (∠ C) (2)

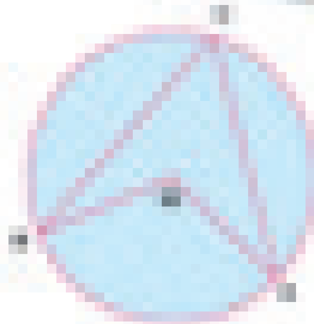
De (1) et (2) on déduit que m (∠ AMB) = 2 m (∠ C)

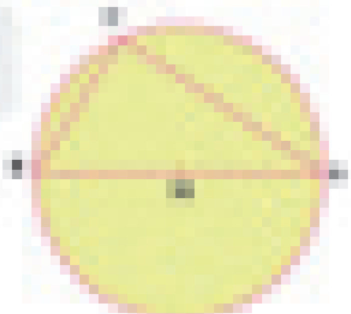
∴ m (∠ ACB) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB) (C.Q.F.D.)

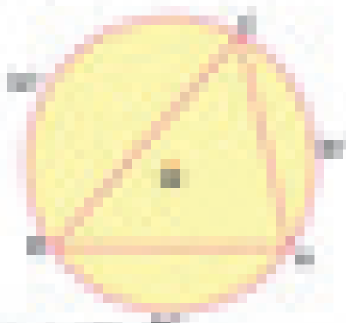


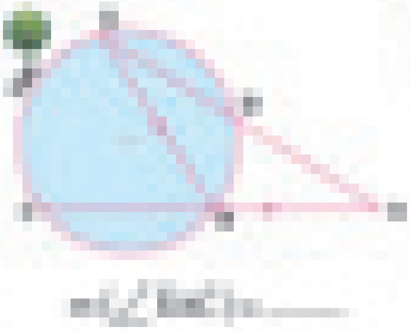


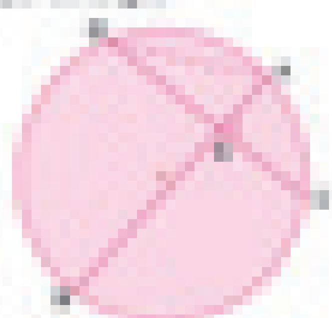


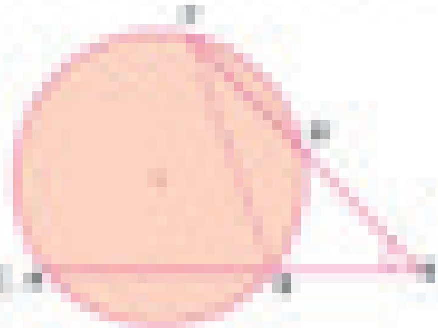


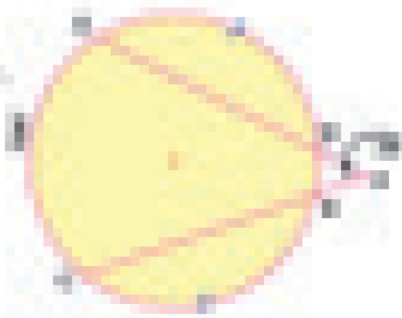




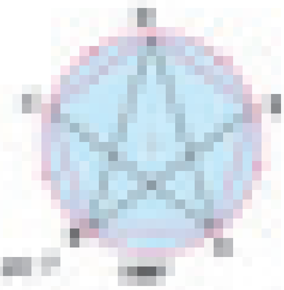






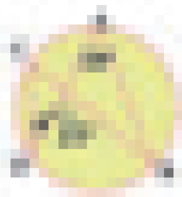


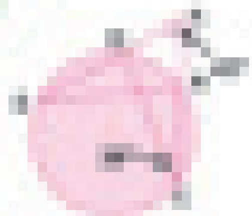
Les angles inscrits interceptant le même arc

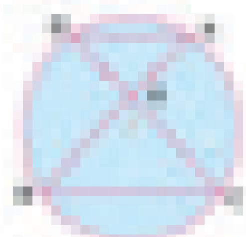


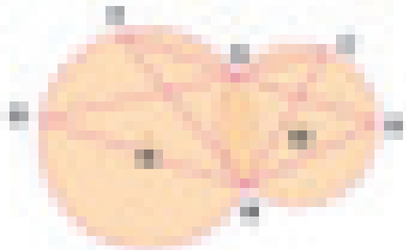
A apprendre :

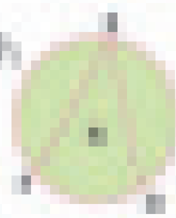
- Comment déduire la relation entre les angles inscrits interceptant des arcs de même mesure

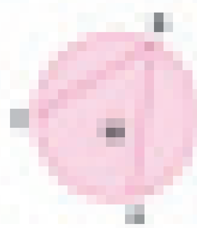


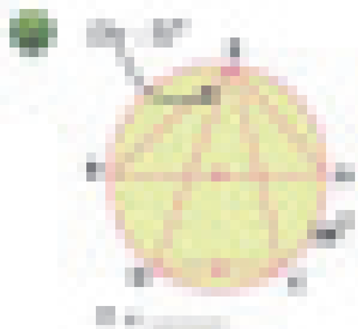


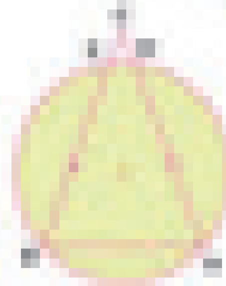


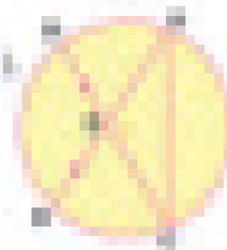


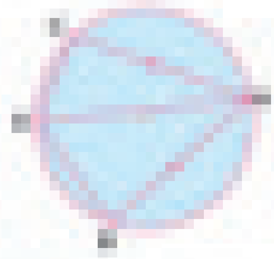


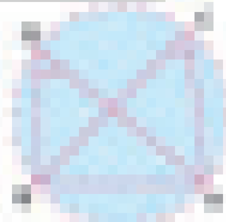


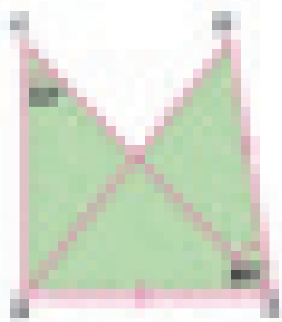


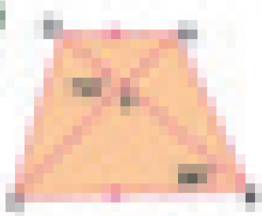


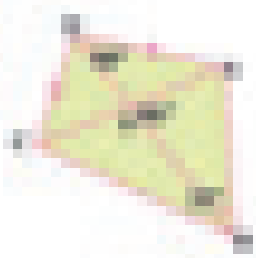


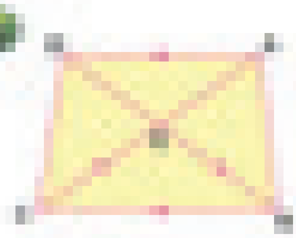


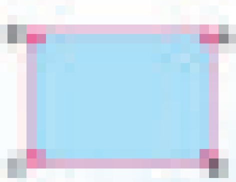


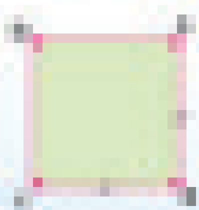


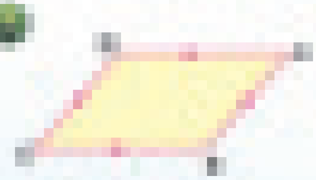






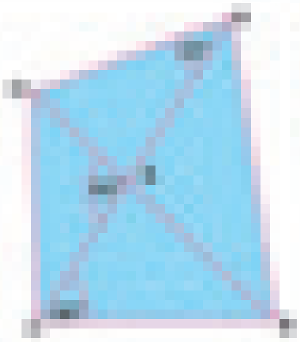


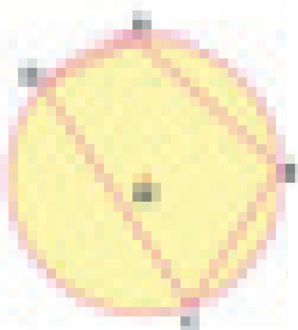


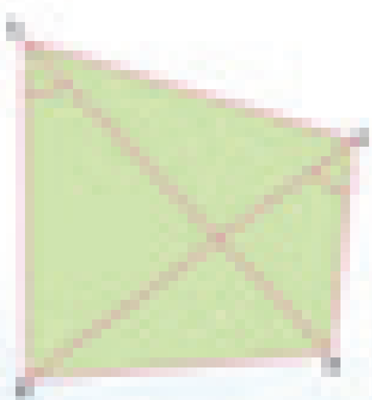


5-4

Quadrilatère inscriptible





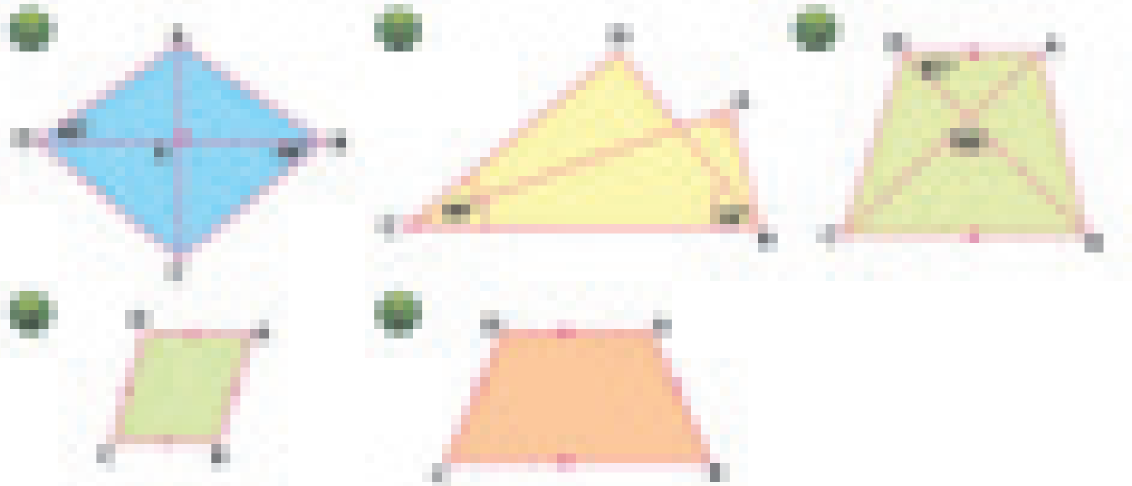


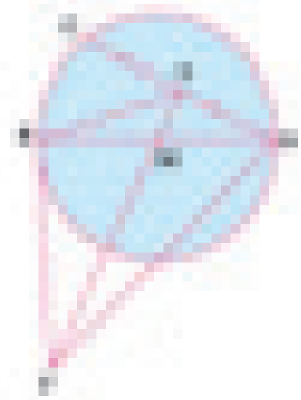
A apprendre :

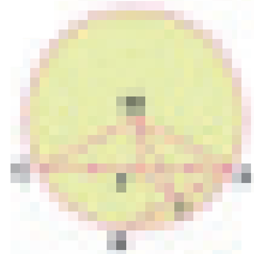
- ☆ La notion d'un quadrilatère inscriptible.
- ☆ Déterminer quand un quadrilatère est inscriptible.

Expressions de base:

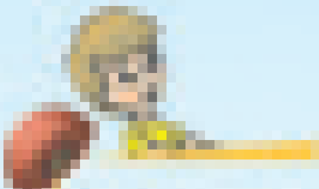
- ☆ quadrilatère inscriptible







5-5 Propriétés d'un quadrilatère inscriptible

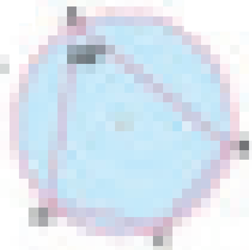


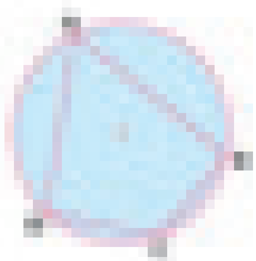
A apprendre :

- Propriétés d'un quadrilatère inscriptible.
- Comment résoudre des problèmes sur les Propriétés d'un quadrilatère inscriptible.

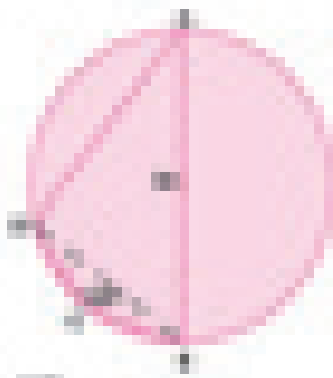
Expressions de base :

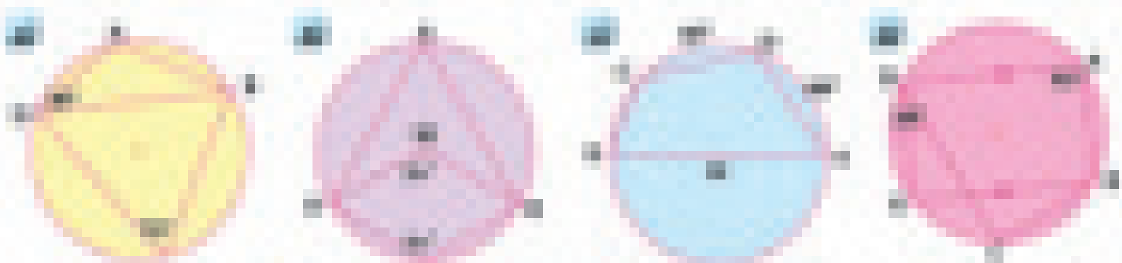
- quadrilatère inscriptible

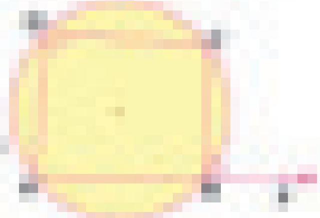


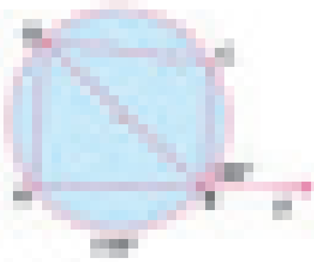


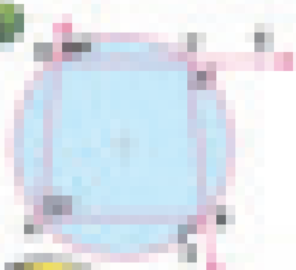
الرواد للطباعة

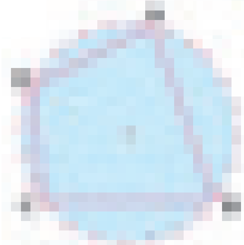


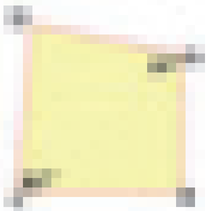


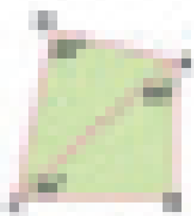


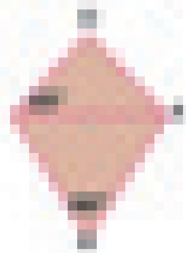


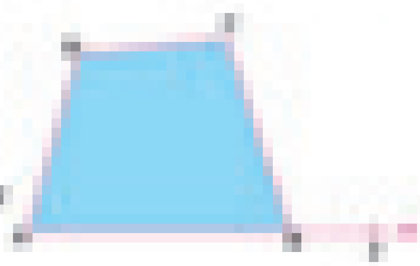


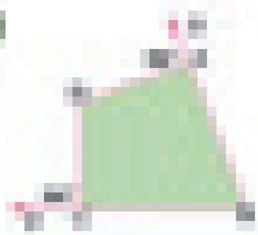


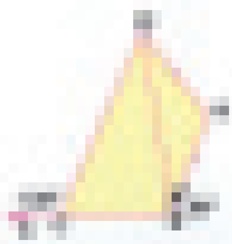


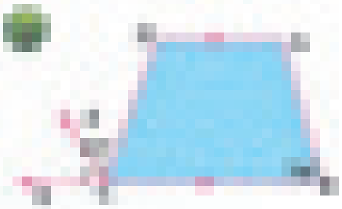




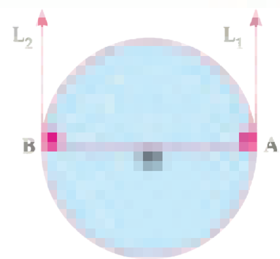








Relation entre les tangentes d'un cercle



On sait que les tangentes passant par les deux extrémités d'un diamètre d'un cercle sont parallèles .

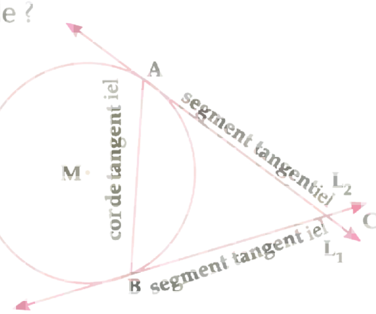
Quelle est la relation entre les deux tangentes passant par les deux extrémités d'une corde qui ne passe pas par le centre du cercle ?

Dans la figure ci-contre :

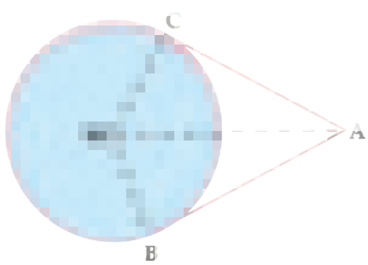
On remarque que :

si $\overline{AB}$ est une corde au cercle M, alors les deux tangentes L_1 et L_2 se coupent en un point C .

$\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ sont appelés « segments tangentiels » et $\overline{AB}$ est appelé « une corde qui passe par les deux points de contact ».



Hypothèses : A et un point à l'extérieur d'un cercle M, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C.



Conclusion :

Démontrer que : AB = AC

Construction : On trace $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ et $\overline{MA}$

Démonstration : ∵ $\overline{AB}$ est un segment tangentiel dans le cercle M

∴ m (∠AMB) = 90°

∵ $\overline{AC}$ est un segment tangentiel dans le cercle M

∴ m (∠ACM) = 90°

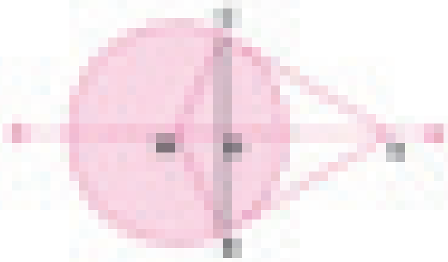
∵ Dans les deux triangles ABM et ACM, on a :

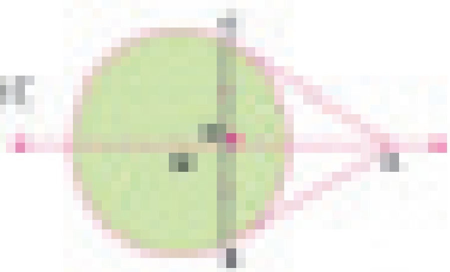
A apprendre :

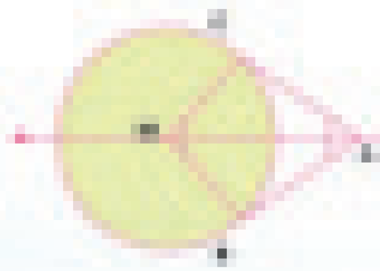
- ☆ Comment déduire la relation entre deux segments tangentiels issus d'un même point à l'extérieur d'un cercle ?.
- ☆ La notion d'un cercle inscrit dans un polygone.
- ☆ Comment déduire la relation entre les tangentes communes à deux cercles disjoints.

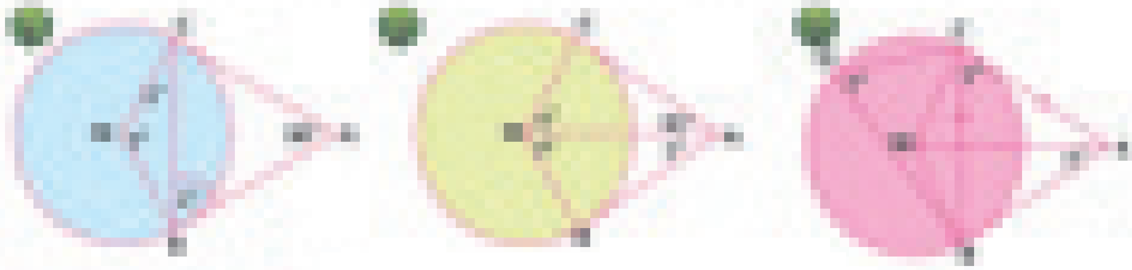
Expressions de base:

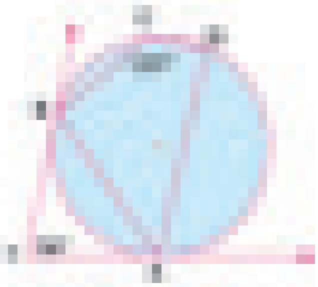
- ☆ la corde qui joint deux points de contact.
- ☆ un cercle inscrit dans un polygone.
- ☆ des tangentes communes

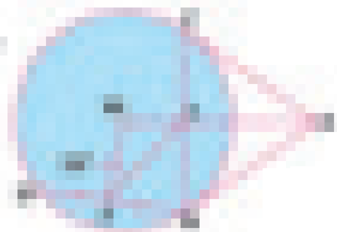


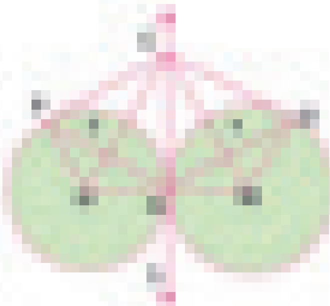


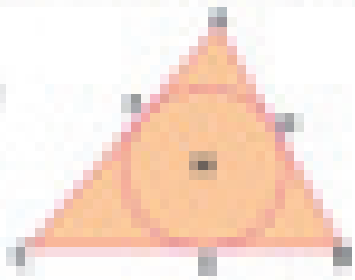


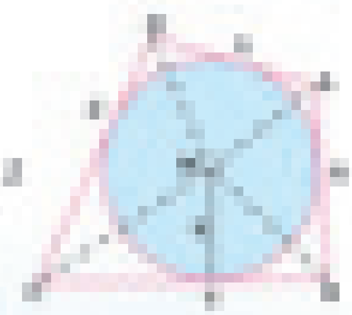


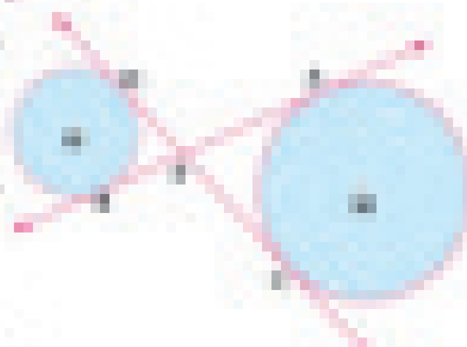


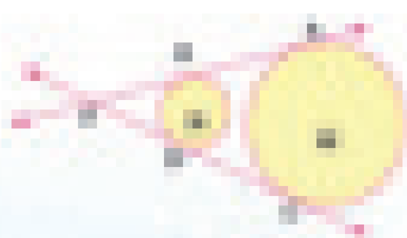




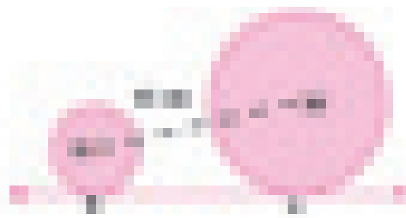








[illegible]



5-7

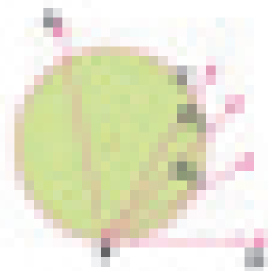
Angles tangentiels

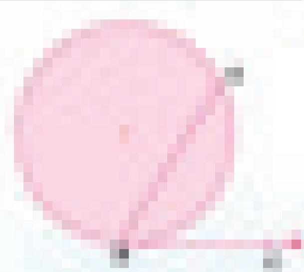
A apprendre:

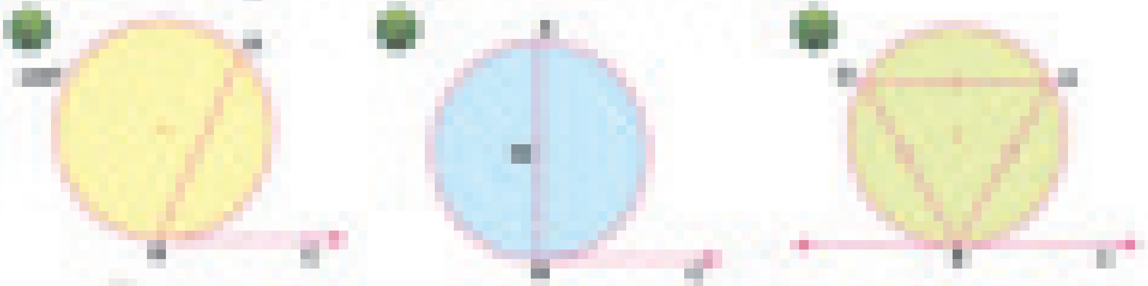
- La notion d'un angle tangentiel
- Comment déduire la relation entre un angle tangentiel et un angle inscrit interceptant le même arc.
- La relation entre un angle tangentiel et un angle au centre interceptant le même arc.
- Comment résoudre des problèmes sur les angles tangentiels.

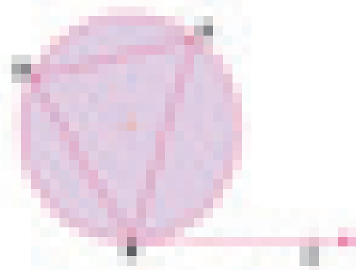
Expressions de base:

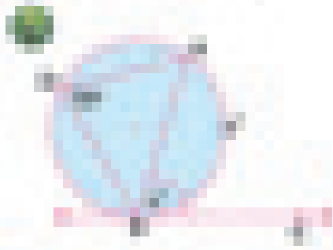
- angle tangentiel.
- angle inscrit.
- angle au centre.

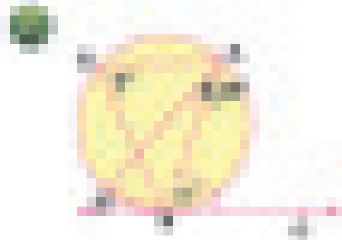


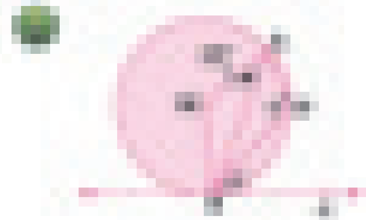


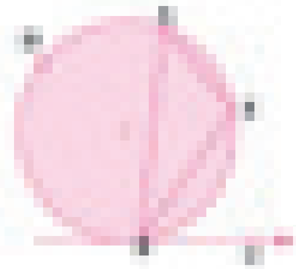


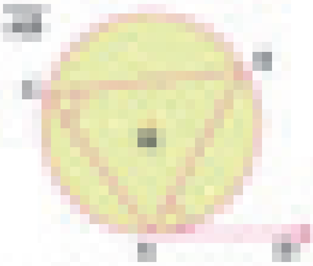


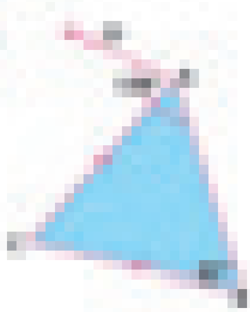


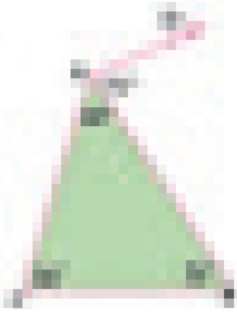












Révisé par

Professeure/Manal Azkoul

M/Akram Fawzy M/Rachad Farag

Sous la surveillance de

Dr Akram Hassan Mohamed

Ministre adjoint chargé des Affaires de Développement des Curricula

Superviseur de l'Administration Centrale pour l'Élaboration des Curricula

١٠/٣/٣٣/١٥/٥٨/١١٢٣

الرواد للطباعة