الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

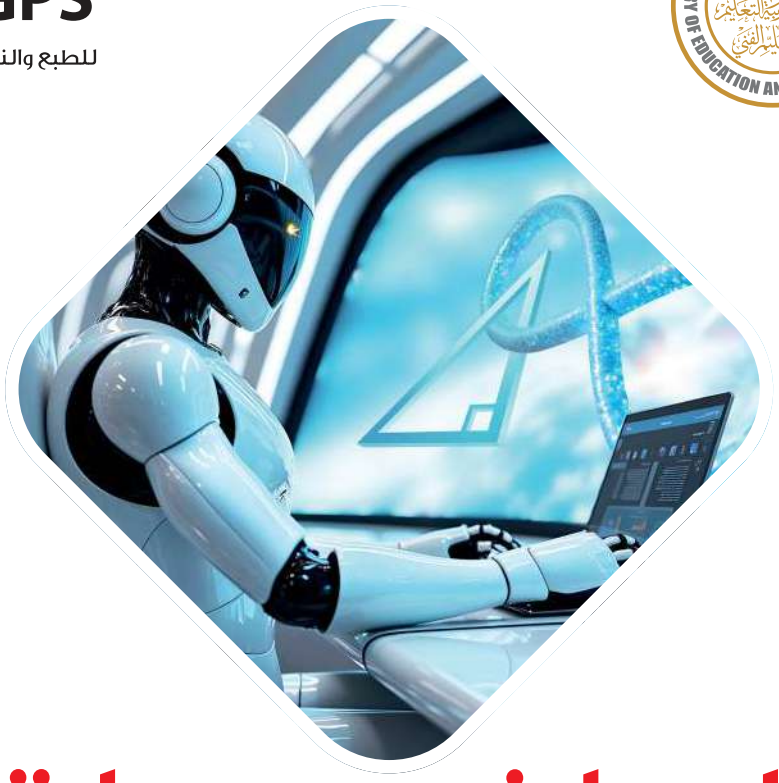
كتاب
الطالب

الرياضيات

للصف الثانى الإعدادى - الفصل الدراسى الأول

2025 - 2026

GPS
للطبع والنشر والتوزيع



الرياضيات

للصف الثانى الإعدادى - الفصل الدراسى الأول 2025 - 2026

كتاب الطالب

إعداد

أ. أسامة زيد شريف
أ. د. سمر عبد الفتاح لاشين
أ. م. د. أمل الشحات حافظ
أ. مجدى عبد الفتاح الصفتى
أ. إبراهيم عبد اللطيف الصغير
أ. باسم مجدى رشدى
أ. إسلام محمد إبراهيم
أ. سامح لبيب عطية

مراجعة

أ. د. جلال محروس معتمد
أ. د. رضا أبو علوان السيد
أ. د. هدى كمال محمد السيد
أ. د. أحمد عبد القادر رمضان
د. محمد محي الدين عبد السلام
أ. منال عباس أحمد عزقول

إشراف

د. أكرم حسن محمد

مساعد الوزير لشئون تطوير المناهج التعليمية
والمشرف على الإدارة المركزية لتطوير المناهج

الاســـم : .....

الفصـــل : .....

المدرسة : .....

تقديم

فـى إطـار التطويـر المسـتمر لمنظومـة التعليـم، واسـتكمالًا لمنظومـة التطويـر التـى بـدأت خططهـا مـن مرحلـة ريـاض الأطفـال والمسـتمرة إلـى نهايـة المرحلـة الثانويـة وفقًـا لرؤيـة مصـر (٢٠٣٠) ، وخطـة الـوزارة لتطويـر التعليم - فقـد تـم إعـداد هـذا الكتـاب لاسـتكمال وتنفيـذ عمليـات تطويـر مناهـج المرحلـة الإعداديـة لإحـداث نقلـة نوعيـة فـى طريقـة إعـداد طـلاب مصـر لمواجهـة تحديـات المسـتقبل.

يسـعدنا أن نقـدم هـذا الكتاب لمقـرر الرياضيات للصف الثانى الإعدادى للفصل الدراسـى الأول، والـذى يتضمـن مجموعـة مـن المهـام والأداءات التـى تسـاعد الطـلاب علـى حـل المشـكلات الرياضيـة ، وذلـك لتحقيـق نواتـج التعلـم لمواجهـة تحديـات القـرن الحـادى والعشـرين، والذى واكبت بدايته ثورة متسارعة فى المعلومات وتكنولوچيا الاتصالات.

يهـدف المنهـج الحالـى إلـى إحـداث نقلـة نوعيـة فـى تعليـم الرياضيـات وتعلُّمها، كما يهـدف أيضًا إلـى توفيـر وسـيلة فعالـة لتحقيـق أهـداف نهـج التعليـم علـى نحـو تكاملـى عـن طريـق الآتـي:

- التأكيد على الدور الإيجابى للطالب فى عملية التعلم.
- تضميـن المنهـج المعـارف والمهـارات والقيم والاتجاهـات الإيجابيـة اللازمة للتعلـم وللمواطنة الصالحـة والعمـل المنتـج والمشـاركة الفاعلـة فـى تحقيق برامـج التنمية المسـتدامة.
- تضميـن المنهـج التوجهـات الإيجابيـة الحديثـة فـى بنـاء المناهـج، مثـل مهـارات التفكيـر ومهـارات حـل المشـكلات ومهـارات التعلـم الذاتـى والتعلـم التعاونـى والتواصـل الجيـد مـع مصـادر المعرفـة.
- تنمية المهارات الأدائية من خلال التركيز على التعلم الذاتى والعمل التعاونى.
- تحقيق التكامل بين الرياضيات والمواد الدراسية عبر المراحل المختلفة.
- إتاحة الفرصة للطلاب لاختيار الأنشطة المناسبة لقدراتهم وميولهم وحاجاتهم.

ونسـأل اللـه عـز وجـل أن تعـم الفائـدة مـن هـذا الكتـاب، ونتمنـى أن يكـون جـزءًا مـن مجهـود وطنـى كبيـر ومتواصـل للارتقـاء بمصـر إلـى مصـاف الـدول المتقدمـة لضمـان مسـتقبل عظيـم لجميـع طلابهـا، كما نتمنـى لكـم عامًـا دراسـيًّا جديـدًا مليئًـا بالنجاحـات والتوفيـق.

والله ولىّ التوفيق،،،

المعدون

محتويات الكتاب (الفصل الدراسى الأول)

الأعداد والعمليات عليها

1-1 الأعداد الحقيقية 2
1-2 الفترات والعمليات عليها 8
1-3 العمليات على الأعداد الحقيقية 14
1-4 قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية 20
1-5 قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية 25

الجبـــر

2-1 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر 33
2-2 تحليل ثلاثية الحدود 39
2-3 تحليل الحالات الخاصة 46
2-4 التحليل بالتقسيم 53

الهندسة

3-1 التطابق 62
3-2 نظرية فيثاغورس وعكسها 70
3-3 تطبيقات التوازى 78
3-4 متوسطات المثلث 83
3-5 المثلث المتساوى الساقين 89
3-6 الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات 97

الإحصاء

4-1 الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا 106
4-2 مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات ... 112

الوحدة 1

الأعداد والعمليات عليها

دروس الوحدة

1-1 الأعداد الحقيقية
1-2 الفترات والعمليات عليها
1-3 العمليات على الأعداد الحقيقية
1-4 قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية
1-5 قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية

تمثل الأعداد الحقيقية البنية الأساسية لجميع العمليات الرياضية داخل أنظمة الذكاء الاصطناعى، ومن دونها لا نستطيع تمثيل العالم الواقعى بدقة ، لذا فإن العلاقة بين الذكاء الاصطناعى والأعداد الحقيقية هى علاقة تكامل أساسى بين الرياضيات والتكنولوجيا.

◀ فهل يمكن تطوير دور الأعداد الحقيقية فى بناء وتدريب خوارزميات الذكاء الاصطناعى ؟

القضايا والمهارات الحياتية		القيـــم	
- التفكير الناقد	- التفكير الإبداعى	- احترام الآخر	- الوعى البيئى
- التنمية المستدامة	- التواصل الرياضى	- المسئولية	- الوعى بالأمن الغذائى

الدرس
1 - 1

الأعداد الحقيقية
(Real Numbers)

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم العدد غير النسبى.
- تقدِّر قيمة تقريبية للعدد غير النسبى وتمثلها على خط الأعداد.
- تعرف مجموعة الأعداد الحقيقية.
- ترتب مجموعة من الأعداد الحقيقية تنازليًا أو تصاعديًا.
- تحل معادلات فى مجموعة الأعداد الحقيقية.

■ المفردات

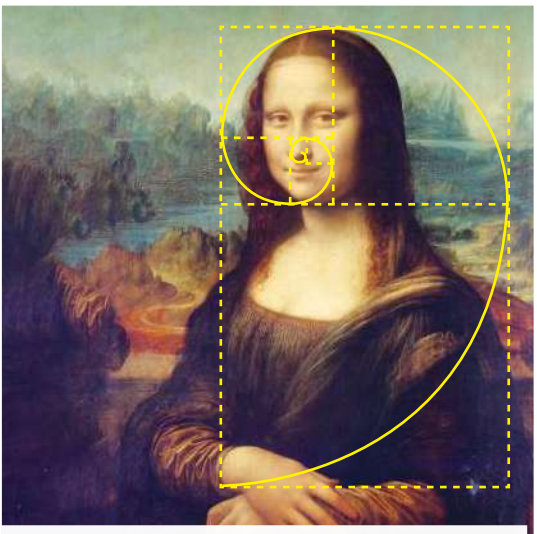
- العدد غير النسبى
Irrational number
- الأعداد الحقيقية
Real numbers

■ معلومة سابقة

العدد النسبى هو أى عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a ، b عددان صحيحان، $b \neq 0$

ويرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز Q

◂ أعط أمثلة لأعداد نسبية.


لوحة الموناليزا

استعد !

المستطيل الذهبى هو المستطيل الذى نسبة طوله إلى عرضه تساوى $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، وهذه النسبة تُسمى بـ «النسبة الذهبية» ويُرمز لها بالرمز φ ، وهى نسبة تظهر فى العديد من جوانب الطبيعة، وقد استخدمها الفنانون فى تصميماتهم لما تتميز به من إعطاء الحس الجمالى والانسجام فى التصميم، وتعتبر لوحة الموناليزا للفنان ليوناردو دافنشى أحد أشهر التصميمات الفنية التى طبقت هذه النسبة.

لماذا لا تعتبر هذه النسبة الذهبية عددًا نسبيًا ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم العدد غير النسبى، كما ستتعرف على مجموعة جديدة من الأعداد وهى مجموعة الأعداد الحقيقية، مما سيمكنك من الإجابة على مثل هذه الأسئلة.

فكر وناقش !

أمامك مجموعة من الأعداد،
وضح كيف يمكنك ترتيبها من الأصغر إلى الأكبر.
ناقش مع زملائك.

$\sqrt{40}$ 6 4 $\sqrt{12}$

تعلم !

الأعداد غير النسبية

العدد غير النسبى هو عدد لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a , b عددان صحيحان، $b \neq 0$ ، ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز Q'

أمثلة لأعداد غير نسبية :

◂ الجذر التربيعى لأى عدد ليس مربعًا كاملًا مثل : $\sqrt{2}$
حيث ... $\sqrt{2} \approx 1.414213562$

◂ الجذر التكعيبى لأى عدد ليس مكعبًا كاملًا مثل : $\sqrt[3]{5}$
حيث ... $\sqrt[3]{5} \approx 1.709975947$

■ لاحظ أن

تعطى الآلة الحاسبة قيمًا تقريبية للأعداد غير النسبية مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{5}$ حيث يكون الكسر العشرى غير منتهٍ وغير دائر، لذلك لا يمكن كتابة مثل هذه الأعداد على صورة عدد نسبى.

مثال 1

أى من الأعداد التالية عدد نسبى، وأيها عدد غير نسبى ؟ مع ذكر السبب.

1 -12	2 $\sqrt{25}$	3 $\sqrt{13}$	4 $\sqrt[3]{-27}$
5 $2\frac{2}{5}$	6 $-\sqrt[3]{10}$	7 0.125	8 $3.\overline{6}$

■ فكر

هـل يمكن لعـدد أن يكون نسبيًا وغير نسبى معًا ؟

◄ كل من الأعداد التالية هو عدد نسبى.

$3.\overline{6}$ ، 0.125 ، $2\frac{2}{5}$ ، $\sqrt[3]{-27}$ ، $\sqrt{25}$ ، -12

لأنه يمكن كتابة كل منها على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a ، b عددان صحيحان، $b \neq 0$ كالتالى :

$-12 = \frac{-12}{1}$	$\sqrt{25} = 5 = \frac{5}{1}$
$\sqrt[3]{-27} = -3 = \frac{-3}{1}$	$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$
$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$	$3.\overline{6} = \frac{11}{3}$

■ تذكر أن

العدد $3.\overline{6}$ هو عدد عشرى غير منته (دائر) وهو عدد نسبى

$3.\overline{6} = 3.6666\ldots = \frac{11}{3}$

◄ كل من العددين $\sqrt{13}$ ، $-\sqrt[3]{10}$ هو عدد غير نسبى.

لأن : العدد 13 ليس مربعًا كاملًا، العدد 10 ليس مكعبًا كاملًا،

وبالتالى لا يمكن كتابة أى منهما على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a ، b عددان صحيحان، $b \neq 0$

إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبى

أى عدد غير نسبى يقع بين عددين نسبيين، ويمكن تمثيله على خط الأعداد بنقطة تقع بين هذين العددين.

مثال 2

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من العددين الآتيين، وعيِّن موقعه التقريبى على خط الأعداد.

1 $\sqrt{11}$ 2 $\sqrt[3]{20}$

1 أوجد عددين صحيحين متتاليين كل منهما مربع كامل يقع بينهما العدد 11.

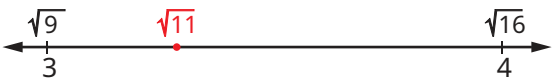
◄ العدد 11 يقع بين العددين 9 ، 16

$\because 9 < 11 < 16 \quad \therefore \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} \quad \therefore 3 < \sqrt{11} < 4$

∴ العدد $\sqrt{11}$ يقع بين العددين 3 و 4

وحيث إن العدد 11 أقرب إلى العدد 9 منه إلى العدد 16

فإن العدد $\sqrt{11}$ أقرب إلى العدد 3



■ تقييم ذاتى 1

أى من الأعداد التالية نسبى، وأيها غير نسبى ؟

$-\sqrt{4}$	17	$\sqrt{8}$
$0.\overline{2}$	0.3	$1\frac{1}{2}$
0	25%	$\sqrt[3]{25}$
$\sqrt{5}+1$	$\sqrt[3]{\lvert-64\rvert}$	

■ معلومة إثرائية

ليســت كل الأعداد غير النسبية هــى فقط جــذور، إنمــا توجد هنــاك أعداد غير نســبية أخرى مثل :

◄ العدد π حيث

$\pi \approx 3.141592654\ldots$

ويساوى النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

◄ النسبة الذهبية φ حيث :

$\varphi \approx 1.618033989\ldots$

وهى نسبة مميزة ترتبط بجمال وتناسق التصميمات.

■ لاحظ أن

$9 < 11 < 16$

هى متباينة من ثلاثة أطراف تعنى أن :

العدد 11 أكبر من العدد 9 $(9 < 11)$

والعدد 11 أقل من العدد 16 $(11 < 16)$

أى أن : العدد 11 يقع بين العددين 9 ، 16

■ **تقييم ذاتى ②**

أوجد قيمة n الصحيحة التى تحقق أن :

$n < \sqrt{17} < n+1$

ثم أوجد قيمة تقريبية لأقرب جزء من عشرة للعدد $\sqrt{17}$ ، وعيِّن موقعه التقريبى على خط الأعداد.

■ **لاحظ أن**

نسبة طول المستطيل الذهبى إلى عرضه تساوى $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6$، وتم تقديرها فى مثال (3) تقريبًا بـ 1.5، أى أن طول المستطيل الذهبى يساوى تقريبًا مرة ونصف من عرضه.

■ **تقييم ذاتى ③**

غرفة مربعة الشكل مساحة أرضيتها 15 م^2.
يريد أحمد أن يحيط أرضيتها بشريط زخرفى. قدِّر طول هذا الشريط.

② أوجد عددين صحيحين متتاليين كل منهما مكعب كامل يقع بينهما العدد 20.

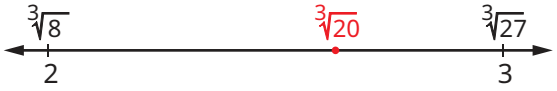
◄ العدد 20 يقع بين العددين 8 ، 27

$\because 8 < 20 < 27 \quad \therefore \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27} \quad \therefore 2 < \sqrt[3]{20} < 3$

∴ العدد $\sqrt[3]{20}$ يقع بين العددين 2 و 3

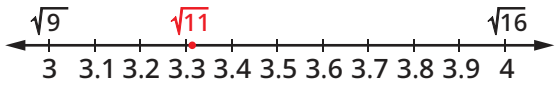
وحيث إن العدد 20 أقرب إلى العدد 27 منه إلى العدد 8

فإن العدد $\sqrt[3]{20}$ أقرب إلى العدد 3

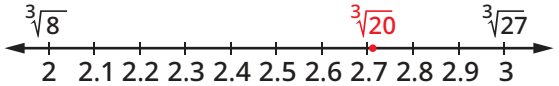


■ **استخدام التكنولوجيا**

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيم تقريبية أفضل لعدد غير نسبى، فمثلًا :



• $\sqrt{11} \approx 3.3$

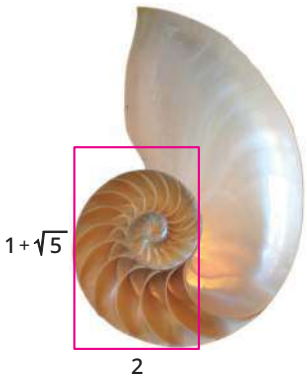


• $\sqrt[3]{20} \approx 2.7$

مثال ③

الطبيعة : يوجد المستطيل الذهبى فى محار أحد الكائنات البحرية، ونسبة طوله إلى عرضه تساوى $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

قدِّر هذه القيمة.



قدِّر أولًا قيمة $\sqrt{5}$ كالتالى :

∵ العدد 5 يقع بين العددين المربعين الكاملين 4 ، 9

$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3 \quad \therefore \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \quad \therefore 4 < 5 < 9$

∵ العدد 5 أقرب إلى العدد 4 منه إلى العدد 9 ∴ $\sqrt{5}$ أقرب إلى العدد 2

استخدم « $\sqrt{5} \approx 2$ » لتقدير قيمة التعبير $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.5 \quad \therefore \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{1+2}{2}$

الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة التى تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية، ويُرمز لها بالرمز R

أى أن $R = Q \cup Q'$ حيث $Q \cap Q' = \varnothing$

■ **لاحظ أن**

لا يوجد جذر تربيعى لعدد حقيقى سالب

شكل ڤن المقابل يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد، حيث :

$N \subset Z \subset Q \subset R$

$Q` \subset R$

مجموعة الأعداد الحقيقية R

مجموعة الأعداد غير النسبية Q`

مجموعة الأعداد النسبية Q

مجموعة الأعداد الصحيحة Z

مجموعة الأعداد الطبيعية N

مثال 4

ضع فى المربع الخالى رمزًا مناسبًا من الرمزين ∈ أو ∉ :

1) $0.\overline{63}$ ☐ Q`
2) $\sqrt{5}$ ☐ R
3) $|-4|$ ☐ N
4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ ☐ Z
5) $\sqrt[3]{3}$ ☐ Q
6) $\sqrt{-1}$ ☐ R

✓ 1) ∉ 2) ∈ 3) ∈ 4) ∉ 5) ∉ 6) ∉

■ **تقييم ذاتى 4**

اكتب جميع المجموعات الممكنة من مجموعات الأعداد (N ، Z ، Q ، Q` ، R) التى ينتمى إليها كل من الأعداد الآتية :

1) $\sqrt{10}$
2) $\sqrt{100}$
3) $0.\overline{25}$
4) $-\sqrt[3]{8}$
5) $\sqrt[3]{9}$

حل المعادلات

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

1) $x^2-3=2$ حيث $x \in Q`$
2) $4x^3=-32$ حيث $x \in Q`$
3) $\frac{1}{2}x^2+1=-4$ حيث $x \in R$
4) $5x^3-1=4x^3+8$ حيث $x \in R$

✓

1) $\because x^2-3=2$
$\therefore x^2=2+3=5$
$\therefore x=\pm\sqrt{5} \in Q`$
$\therefore$ مجموعة الحل $=\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

2) $\because 4x^3=-32$
$\therefore x^3=\frac{-32}{4}=-8$
$\therefore x=\sqrt[3]{-8}=-2 \notin Q`$
$\therefore$ مجموعة الحل $=\varnothing$

3) $\because \frac{1}{2}x^2+1=-4$
$\therefore \frac{1}{2}x^2=-4-1=-5$
$\therefore x^2=-5\times2=-10$
$\therefore x=\pm\sqrt{-10} \notin R$
$\therefore$ مجموعة الحل $=\varnothing$

4) $\because 5x^3-1=4x^3+8$
$\therefore 5x^3-4x^3=8+1$
$\therefore x^3=9$
$\therefore x=\sqrt[3]{9} \in R$
$\therefore$ مجموعة الحل $=\{\sqrt[3]{9}\}$

■ **تقييم ذاتى 5**

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

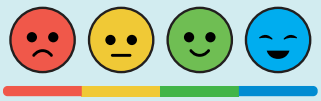
1) $\frac{1}{3}x^3+9=0$
2) $\frac{3}{4}x^2=\frac{9}{2}$
3) $2(x^2-1)=-10$

إذا كانت مجموعة التعويض هى :
أولًا : Q` ثانيًا : R

نشاط تعاونى

استخدم مصادر مختلفة (مثل : شبكة الإنترنت أو مكتبة مدرستك أو ...) وتعاون مع زملائك تحت إشراف معلمك للتعرف على مزيد من المعلومات عن النسبة الذهبية φ ، وتاريخها، واستخداماتها المختلفة فى العمارة والفنون.

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(1) أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى ؟

(أ) $0.\overline{3}$ (ب) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ (جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt[3]{-125}$

(2) إذا كان : $x \in Z$ ، $x < \sqrt{29} < x+1$ فما قيمة x ؟

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

(3) ما تقدير العدد $\sqrt{41}$ لأقرب عدد صحيح ؟

(أ) 6 (ب) 7 (جـ) 36 (د) 49

(4) ما تقدير العدد $\sqrt[3]{25}$ لأقرب عدد صحيح ؟

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 12.5

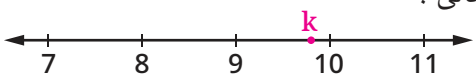
(5) أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى يقع بين 2 ، 3 ؟

(أ) $2.\overline{5}$ (ب) $\sqrt{10}$ (جـ) $\sqrt{6.25}$ (د) $\sqrt[3]{9}$

(6) إذا كان : $1 < \sqrt{n} < 2$ فأى مما يلى قيمة محتملة للعدد n ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 8

(7) أى من الأعداد التالية تمثله النقطة k على خط الأعداد التالى ؟



(أ) $\sqrt{86}$ (ب) $\sqrt{96}$ (جـ) $\sqrt{81}$ (د) $\sqrt{78}$

(8) إذا كان x ، y عددين صحيحين متتاليين، فما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 11 (ب) 13 (جـ) 15 (د) 17

◂ **ناقش :**

(9) **قام كل من حمزة وآسر بالإجابة عن السؤال التالى :**

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما العدد غير النسبى $-\sqrt{5}$

حل حمزة :

$4 < 5 < 9$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

$2 < \sqrt{5} < 3$

$-3 < -\sqrt{5} < -2$

حل آسر :

$-9 < -5 < -4$

$-\sqrt{9} < -\sqrt{5} < -\sqrt{4}$

$-3 < -\sqrt{5} < -2$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل ؟

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(10) **صنِّف كلًا من الأعداد فى الجدول المقابل إلى نسبى أو غير نسبى موضحًا سبب تصنيفك :**

$\sqrt{6}$	$\frac{12}{31}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$1.\overline{6}$	$-\sqrt[3]{64}$	0.323232...
0	$-\sqrt{121}$	$\sqrt[3]{-27}$	$2\frac{2}{3}$	17%	$\sqrt[3]{16}$

◂ **أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من الأعداد الآتية، وعيِّن موقعه التقريبى على خط الأعداد :**

(11) $\sqrt{5}$ (12) $\sqrt{13}$ (13) $-\sqrt{11}$ (14) $\sqrt[3]{14}$

◂ ضع فى كل مربع أحد الرموز < أو > أو = لتكون العبارة صحيحة :

(15) $\sqrt{96}$ ☐ 14 (16) $-\sqrt{7}$ ☐ -2.6 (17) $\sqrt[3]{25}$ ☐ $\sqrt{9}$

(18) رتب الأعداد : $6.3\overline{6}$ ، $6\frac{4}{5}$ ، 7 ، $\sqrt{40}$ من الأصغر للأكبر.

◂ أوجد فى R مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(19) $x^3 - 11 = 5$ (20) $2x^3 + 13 = 67$ (21) $3x^2 - 1 = -13$

◂ أوجد فى Q' مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(22) $2x^2 - 3 = 9$ (23) $6x^2 - 3 = 4x^2 + 7$ (24) $2(x^3 + 1) = 18$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(25) هندسة : مربع مساحته 29 سم^2، إلى أى مجموعات الأعداد الآتية ينتمى طول ضلعه ؟ حدد كل المجموعات الممكنة.

R ☐ Q ☐ Q' ☐ Z ☐ N ☐

تساعد الفنون على تنمية الإبداع والابتكار لدى الفرد.

(26) فنون : شكّلت سمر قطعة من الصلصال على شكل مكعب مساحته الكلية 300 سم^2

أوجد طول حرفه، هل طول الحرف عدد نسبى؟

(27) هندسة : أيهما أكبر : طول ضلع مربع مساحته 16 سم^2 أم طول قطر مربع مساحته 9 سم^2؟

(28) زراعة : حديقة مستطيلة الشكل مساحتها 80 م^2، طولها ضعف عرضها. أوجد كلًا من الطول والعرض لأقرب متر.

(29) ما أقل قيمة صحيحة للمتغير n تجعل كلًا من العددين $\sqrt{41 + n}$ و $\sqrt{2n + 20}$ عددًا نسبيًا ؟

تعمل الحدائق على تنقية الهواء، وتحسين الصحة النفسية لدى الأفراد.

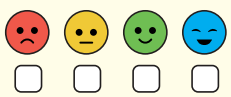
تفكير إبداعى

(30) أوجد عددًا غير نسبى يقع بين العددين $0.\overline{3}$ ، $0.\overline{6}$

(31) إذا كان $10 < \sqrt{x} < 11$ ، $12 < \sqrt{y} < 13$ حيث x ، y عددان صحيحان موجبان.
أوجد أكبر قيمة للمقدار $y - x$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للأعداد الحقيقية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
2 - 1

الفترات والعمليات عليها
(Intervals and Their Operations)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم الفترة كمجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- تمثل فترة على خط الأعداد.
- تجرى عمليات التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة على الفترات.
- توظِّف مفهوم الفترات فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- فترة Interval
- فترة محدودة Bounded interval
- فترة غير محدودة Unbounded interval
- فترة مغلقة Closed interval
- فترة مفتوحة Open interval
- تقاطع Intersection
- اتحاد Union
- فرق Difference
- مكملة Complement
- المجموعة الشاملة Universal set
- ما لا نهاية Infinity

استعد !

الشعاب المرجانية والأسماك بالبحر الأحمر

تُعد مدينة الغردقة واحدة من أبرز مناطق الغطس فى العالم، حيث يمكن للسياح الاستمتاع بتجربة الغطس فى مياه البحر الأحمر لمشاهدة الشعاب المرجانية الجميلة والأسماك المتنوعة.

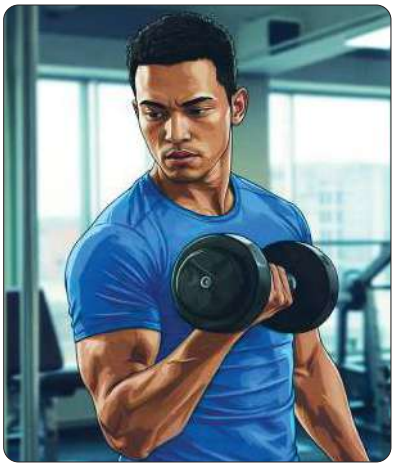
فى إحدى رحلات الغوص فى الغردقة، أراد الغواصون مشاهدة نوعين من الأسماك معًا، فإذا علمت أن :

- النوع الأول يعيش فى أعماق تتراوح بين 15 م و 60 م.
- النوع الثانى يعيش فى أعماق تتراوح بين 10 م و 25 م.

غاص مجدى إلى عمق 30 م، وغاصت أمل إلى عمق 12 م، بينما غاص باسم إلى عمق 20 م، أى منهم يستطيع رؤية النوعين معًا ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الفترة وأنواع الفترات والعمليات على الفترات، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !



فى أحد الأيام كانت مواعيد محاضرات مصطفى بالجامعة كالتالى :

من الساعة 9:00 صباحًا إلى الساعة 12:00 ظهرًا.

ثم من الساعة 2:00 ظهرًا إلى الساعة 4:00 عصرًا.

إذا كانت مواعيد المركز الرياضى بالجامعة يوميًا من الساعة 10:00 صباحًا إلى الساعة 1:00 ظهرًا، فما الفترة المناسبة ليستطيع مصطفى ممارسة الرياضة بالمركز الرياضى بالجامعة فى هذا اليوم دون أن يؤثر ذلك على حضور محاضراته ؟ ناقش.

تعلم !

الفترات

- **أى عددين حقيقيين ينحصر بينهما عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية.**
- **لا يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية والمجموعات الجزئية منها بطريقة السرد، لأنه لا يمكن سرد جميع عناصرها، ولذلك تستخدم طريقة أخرى للتعبير عنها وهى «الفترات».**

أولاً الفترات المحدودة

إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$ ، فإن :

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a وأصغر من أو تساوى b

$\{x : x \in R , a \le x \le b\} = [a , b]$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأصغر من b

$\{x : x \in R , a < x < b\} =]a , b[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a وأصغر من b

$\{x : x \in R , a \le x < b\} = [a , b[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأصغر من أو تساوى b

$\{x : x \in R , a < x \le b\} =]a , b]$

مثال 1

1 اكتب على صورة فترة، ثم مثِّل على خط الأعداد المجموعة A :

$A = \{x : x \in R , 1 < x \le 3\}$

هل $\sqrt{2} \in A$ ؟

2 اكتب على صورة فترة، ثم مثِّل على خط الأعداد المجموعة B :

$B = \{x : x \in R , -2 < x < 2\}$

هل $\sqrt[3]{-9} \in B$ ؟

1) $A =]1 , 3]$

باستخدام الآلة الحاسبة :

$\sqrt{2} \approx 1.4$

$\therefore 1 < \sqrt{2} \le 3$

$\therefore \sqrt{2} \in]1 , 3]$

2) $B =]-2 , 2[$

باستخدام الآلة الحاسبة :

$\therefore \sqrt[3]{-9} \approx -2.08$

$\therefore \sqrt[3]{-9} < -2$

$\therefore \sqrt[3]{-9} \notin]-2 , 2[$

لاحظ أن

- $[a , b]$ فترة مغلقة.
  $b \in [a , b] , a \in [a , b]$
- $]a , b[$ فترة مفتوحة.
  $b \notin]a , b[, a \notin]a , b[$
- $[a , b[$ فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة
  $b \notin [a , b[, a \in [a , b[$
- $]a , b]$ فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة
  $b \in]a , b] , a \notin]a , b]$

تقييم ذاتى 1

اكتب على صورة فترة، ثم مثِّل على خط الأعداد كلًا من المجموعتين الآتيتين

1 $\{x : x \in R , -1 < x < 5\}$

2 $\{x : x \in R , 0.5 \le x < \sqrt{9}\}$

ثانيًا الفترات غير المحدودة

- تمتد مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد فى الاتجاه الموجب إلى ما لا نهاية (∞) وتمتد فى الاتجاه السالب إلى ما لا نهاية $(-\infty)$
- يُستخدم الرمزان ∞ و $-\infty$ فى التعبير عن المجموعات غير المحدودة كما يلى :

إذا كان $a \in R$ فإن :

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a

$\{x : x \in R , x \geq a\} = [a , \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوى a

$\{x : x \in R , x \leq a\} =]-\infty , a]$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a

$\{x : x \in R , x > a\} =]a , \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من a

$\{x : x \in R , x < a\} =]-\infty , a[$

مثال 2

اكتب على صورة فترة كلًا من المجموعات الآتية ومثلها على خط الأعداد :

1. مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة
2. مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة
3. $\{x : x \in R , x \geq -2\}$
4. $\{x : x \in R , x < 1\}$

✓

1. $]0 , \infty[$

2. $]-\infty , 0]$

3. $[-2 , \infty[$

4. $]-\infty , 1[$

■ لاحظ أن

الفترة $]-\infty , \infty[$ تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية R ، $\infty \notin R$ و $-\infty \notin R$

■ تاريخ الرياضيات

العالم الإنجليزى چون واليس (John Wallis) هو أول من استخدم رمز ما لا نهاية (∞) .

■ لاحظ أن

- $R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$ حيث : R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، R^- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $= R^+ \cup \{0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $= R^- \cup \{0\}$

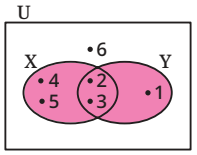
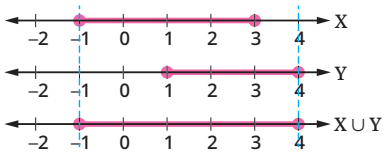
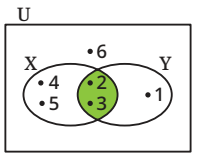
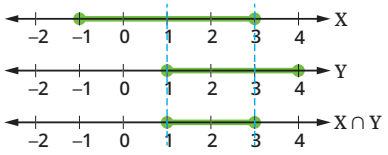
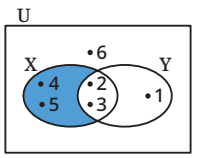
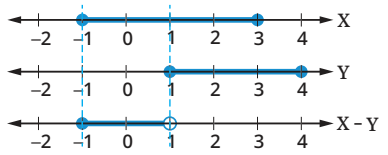
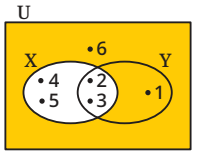
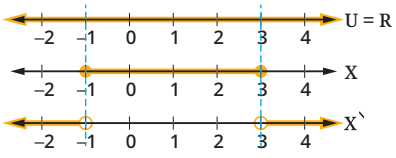
■ تقييم ذاتى (2)

اكتب على صورة فترة ومثّل على خط الأعداد :

1. مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة R^-
2. مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
3. $\{x : x \in R^+ , x < 3\}$

العمليات على الفترات

الفترات هى مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، ولذلك يمكن إجراء عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة عليها بنفس طريقة إجرائها على المجموعات كالتالى :

	المجموعات	الفترات
	بفرض أن : $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ حيث U المجموعة الشاملة $X=\{2,3,4,5\}$ $Y=\{1,2,3\}$	بفرض أن : $U=R$ حيث U المجموعة الشاملة $X=[-1,3]$ $Y=[1,4]$
الاتحاد $(X \cup Y)$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X أو Y	 $X\cup Y=\{1,2,3,4,5\}$	 $X\cup Y=[-1,4]$
التقاطع $(X \cap Y)$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X و Y	 $X\cap Y=\{2,3\}$	 $X\cap Y=[1,3]$
الفرق $(X - Y)$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X ولا تنتمى إلى Y	 $X-Y=\{4,5\}$	 $X-Y=[-1,1[$
المكملة X' : مجموعة العناصر التى تنتمى إلى U ولا تنتمى إلى X	 $X'=U-X=\{1,6\}$	 $X'=R-X$ $=]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$

■ لاحظ أن

المجموعة الشاملة هى مجموعة تحتوى جميع المجموعات الجزئية منها، ويرمز لها بالرمز U.

■ فكر وناقش

هل : $X-Y=Y-X$ ؟

مثال 3

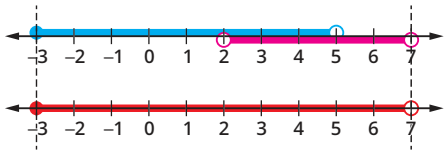
أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًا مما يلى :

1. $[-3,5[\cup]2,7[$
2. $]-\infty,3]\cap]1,5]$
3. $]-\infty,6]-]4,\infty[$
4. X' حيث $X=]-\infty,3[$

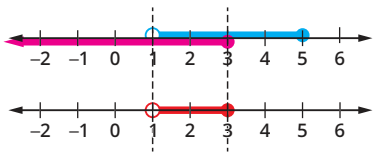
■ تقييم ذاتى (3)

أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

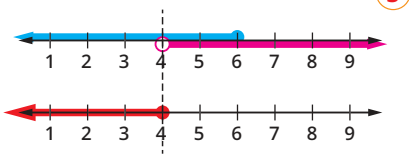
1. $[4,9]\cap]7,10[$
2. $]-3,2[\cup]0,\infty[$
3. $]0,5[-]3,7[$
4. X' حيث $X=[-5,\infty[$

① 

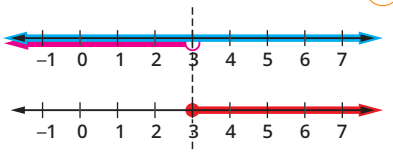
$]-3,5[\cup]2,7[=]-3,7[$

② 

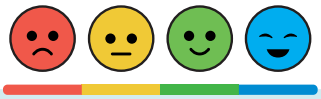
$]1,5] \cap]-\infty,3] =]1,3]$

③ 

$]-\infty,6] -]4,\infty[=]-\infty,4]$

④ 

$X` = R -]-\infty,3[= [3,\infty[$



تقييم الدرس

أولًا قياس المفاهيم

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① إذا كانت $a \in]2,5[$

فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلى ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 5

② إذا كانت $a \notin]-1,3]$

فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلى ؟

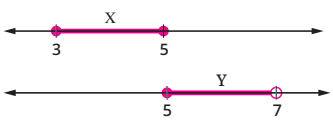
(أ) -1 (ب) 0 (جـ) 2 (د) 3

③ إذا كانت $X =]-5,7]$ ، فأى مما يلى صحيح ؟

(أ) $7 \in X$ (ب) $-5 \notin X$

(جـ) $0 \notin X$ (د) $-2 \in X$

④ أى مما يلى يمثل $X \cap Y$ ؟



(أ) $\varnothing$ (ب) $\{5\}$

(جـ) $]3,7[$ (د) $[3,5[$

⑤ ما الفترة الناتجة عن $]2,5[\cup \{2\}$ ؟

(أ) $]2,5[$ (ب) $[2,5]$

(جـ) $[2,5[$ (د) $]2,5]$

⑥ أى الفترات الآتية ينتمى إليها العدد $-\sqrt{7}$ ؟

(أ) $[-2,-1]$ (ب) $[-2,-3]$

(جـ) $[-3,-4]$ (د) $[-6,-7]$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑦ إذا كانت $Y = [1,4]$ ، $X =]-2,2[$ ، **أوجد مستعينًا بخط الأعداد :**

$X - Y$, $Y - X$, $X \cup Y$, $X \cap Y$

⑧ إذا كانت $A =]-5,\infty[$ ، $B =]-\infty,2]$

أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A`$

⑨ إذا كانت $A = [-1,3]$ ، $B =]-\infty,3[$

فأوجد ما يأتى :

$A - B$, $B - A$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B`$

⑩ **أوجد كلًا مما يأتى :**

① $[2,5[\cup]-2,3]$ ② $]2,7] - [3,8[$ ③ $]-1,3[\cap]-5,1]$

④ X' حيث $X = [4,8[$ ⑤ $]3,\infty[\cap]-\infty,7[$ ⑥ $]2,5] \cup]5,\infty[$

⑪ **أوجد كلًا مما يأتى :**

① $R \cap [2,5[$ ② $R^+ \cup]0,2]$ ③ $R^- - [-2,0[$ ④ $R^- \cup R^+$

⑫ **أوجد كلًا مما يأتى :**

① $N \cap [-3,0[$ ② $Z^+ \cap]-1,2[$ ③ $Z^- \cap]-2,3]$ ④ $]3,5[\cup \{3,5\}$

⑤ $\{3,7\} \cap [3,7[$ ⑥ $[2,5] - \{2,5\}$ ⑦ $[0,5] - \{5\}$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑬ عبر عن كل من الموقفين الآتيين بمتباينة مناسبة، ثم اكتبها على صورة فترة ومثِّلها على خط الأعداد.

① **عمل :** يُشترط أن لا يقل عُمرك عن 25 سنة ولا يزيد عن 45 سنة لتلتحق بوظيفة ما.

② **جغرافيا :** تتراوح درجات الحرارة فى إحدى مدن أمريكا الشمالية من $-2°C$ إلى $10°C$

⑭ **تغذية :** قررت ليلى حفظ نوعين من الأغذية فى الثلاجة :

- النوع الأول هو اللبن الطازج، ويُفضل حفظه فى درجة حرارة من $1°C$ إلى $4°C$
- النوع الثانى هو اللحوم الطازجة، ويفضل حفظها فى درجة حرارة من $-2°C$ إلى $2°C$

ما الفترة التى يمكن أن تضبط ليلى الثلاجة عليها حتى تحفظ النوعين معًا فى نفس الوقت دون أن يتلف أى منهما ؟

يُعد حفظ الأطعمة أمرًا حيويًا لتحقيق التنمية المستدامة، وتعزيز الأمن الغذائى.

⑮ **مسئولية اجتماعية :** أمل وإيمان أختان أرادتا تنظيم وقتهن يوم السبت لرعاية والدتهن المسنة؛ لتتأكد كلٌ منهن أن والدتهن لن تبق وحدها فى أى وقت من اليوم حتى موعد عودة أبيهن للمنزل.

- أمل تستطيع التفرغ من الساعة 10:00 صباحًا إلى الساعة 2:00 ظهرًا .
- أما إيمان فتستطيع التفرغ من الساعة 12:00 ظهرًا إلى الساعة 4:00 عصرًا.

ما الفترة الزمنية التى تضمن وجود إحداهن على الأقل مع والدتهن ؟

رعاية الوالدين والاهتمام بهما ليست خدمة بل واجب ومسئولية.

تفكير إبداعى

⑯ إذا كانت a, b, c, d أعدادًا حقيقية، $a < c < b < d$ ، فأوجد كلًا من :

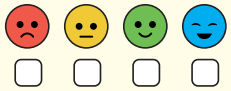
$[a,b] \cap [c,d]$ ، $[a,b] - [c,d]$

⑰ إذا كانت $[b,7] \cap [-2,a] = [2,4]$ فما قيمة $\frac{b^a}{a^b}$ ؟

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للفترات والعمليات عليها ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
1 - 3

العمليات على الأعداد الحقيقية
(Operations on Real Numbers)

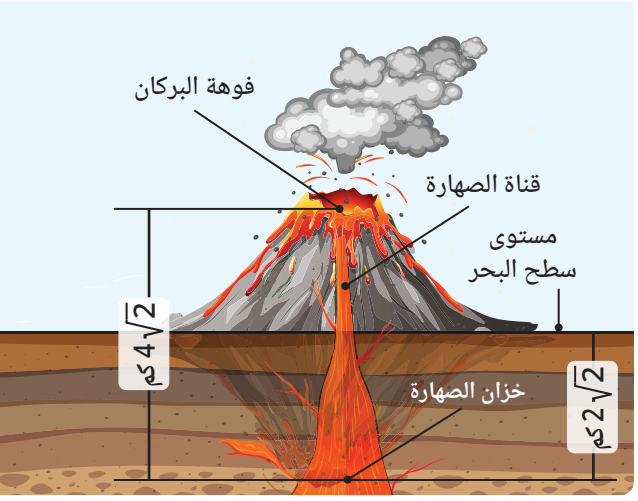
نواتج التعلم

- تجرى العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الأعداد الحقيقية.
- تعرف خواص جمع وضرب الأعداد الحقيقية.
- تحل بعض المشكلات الحياتية مستخدمًا العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.

المفردات

- الانغلاق Closure
- الإبدال Commutative
- الدمج Associative
- المحايد الجمعى Additive identity
- المحايد الضربى Multiplicative identity
- المعكوس الجمعى Additive inverse
- المعكوس الضربى Multiplicative inverse
- الحد الجذرى Radical term

استعد !

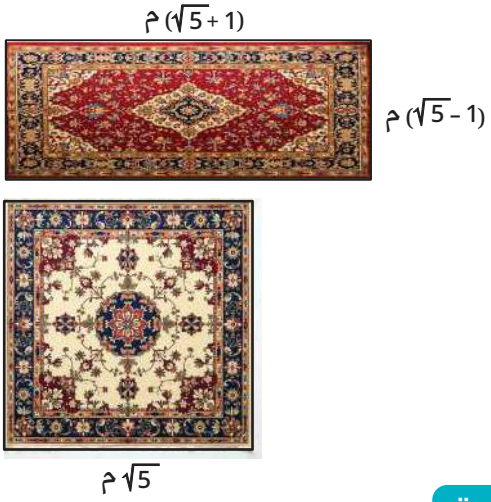


تنطلق الحمم البركانية من خزان الصهارة الموجود فى أعماق الأرض عبر قناة تُسمى قناة الصهارة، حتى تصل إلى فوهة البركان، حيث تنفجر وتندفع إلى الخارج على شكل حمم وغازات ورماد بركانى.

فى الشكل الذى أمامك، كم تبعد فوهة البركان عن مستوى سطح البحر ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !



سجادة مستطيلة الشكل بُعداها $(1+\sqrt{5})$ م، $(\sqrt{5}-1)$ م.

وسجادة مربعة الشكل طول ضلعها $\sqrt{5}$ م.

أى من السجادتين أكبر فى المساحة ؟

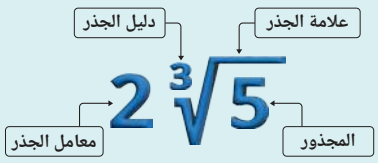
وأيهما أكبر فى المحيط ؟ ناقش.

تعلم !

العمليات على الأعداد الحقيقية

قبل دراسة كيفية إجراء العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الأعداد الحقيقية، سنتعرف أولًا على مفهوم الحدود الجذرية المتشابهة.

الحدود الجذرية المتشابهة هى حدود تحتوى على جذور لها نفس دليل الجذر ونفس المجذور (العدد أسفل الجذر)



أمثلة لحدود جذرية متشابهة :

- $2\sqrt{3}$ ، $4\sqrt{3}$
- $-3\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt[3]{5}$

أمثلة لحدود جذرية غير متشابهة :

- $3\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{3}$
- $2\sqrt[3]{5}$ ، $2\sqrt{5}$

مثال 1

إذا كانت : $x=-4\sqrt{3}$ ، $y=\sqrt{3}$ ، $z=\sqrt[3]{5}$

فأوجد قيمة كل مما يأتى :

1) $x+y$ 2) $x\times y$ 3) $\frac{x}{2y}$ 4) $2x-z^3$

1) $x+y=-4\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=(-4+1)\sqrt{3}$

$=-3\sqrt{3}$

لاحظ أن

عند جمع وطرح الحدود الجذرية المتشابهة نستخدم نفس طريقة جمع وطرح الحدود الجبرية المتشابهة :

$-4x+x=(-4+1)x=-3x$

2) $x\times y=-4\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$=(-4\times1)\times(\sqrt{3})^2$

$=-4\times3=-12$

لاحظ أن

عند ضرب الحدود الجذرية نستخدم نفس طريقة ضرب الحدود الجبرية :

$-4x\times x=(-4\times1)x^2=-4x^2$

3) $\frac{x}{2y}=\frac{-4\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}}$

$=\frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{-4}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$=-2\times1=-2$

4) $2x-z^3=2\times(-4\sqrt{3})-(\sqrt[3]{5})^3$

$=-8\sqrt{3}-5$

لاحظ أن

الحد الجذرى $-8\sqrt{3}$ لا يشابه الحد 5 لذلك لا يتم طرحهما.

مثال 2

اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى أبسط صورة بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

1) $\frac{7}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{-15}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{12}{5\sqrt{2}}$

1) لكى يكون المقام عددًا صحيحًا، اضرب كلًا من البسط والمقام فى $\sqrt{3}$

$\therefore\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

2) لكى يكون المقام عددًا صحيحًا، اضرب كلًا من البسط والمقام فى $\sqrt{5}$

$\therefore\frac{-15}{\sqrt{5}}=\frac{-15}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{-15\sqrt{5}}{5}=-3\sqrt{5}$

3) لكى يكون المقام عددًا صحيحًا، اضرب كلًا من البسط والمقام فى $\sqrt{2}$

$\therefore\frac{12}{5\sqrt{2}}=\frac{12}{5\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}\sqrt{2}}{5\times\cancel{2}_1}=\frac{6\sqrt{2}}{5}$

تقييم ذاتى (1)

أوجد قيمة كل مما يأتى :

1) $3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

2) $-5\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$

3) $\frac{(\sqrt{7})^2\times3\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}$

لاحظ أن

• إذا كانت $x\geq0$ فإن :

$\sqrt{x}\times\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2=x$

• إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فإن :

$\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}=(\sqrt[3]{x})^3$

$=x$

تفكير ناقد

1) كتبت دينا أن :

$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}=5\sqrt{5}$

هل ما كتبته دينا صواب ؟ ناقش.

2) كتب إسلام أن :

$2\sqrt{5}+5=7\sqrt{5}$

هل ما كتبه إسلام صواب ؟ ناقش.

تقييم ذاتى (2)

اكتب كلاً مما يأتى فى أبسط صورة بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

1) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ 3) $\frac{9}{5\sqrt{3}}$

خواص العمليات على الأعداد الحقيقية

إذا كانت : a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية، فإن :

الخاصية	عملية الجمع	عملية الضرب
الانغلاق	$a+b \in R$	$a \times b \in R$
الإبدال	$a+b=b+a$	$a \times b=b \times a$
الدمج (التجميع)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$
توزيع الضرب على الجمع	$a(b+c)=ab+ac$	
المحايد	المحايد الجمعى هو 0 $a+0=0+a=a$	المحايد الضربى هو 1 $a \times 1=1 \times a=a$
المعكوس	المعكوس الجمعى للعدد a هو $(-a)$ حيث : $a+(-a)=0$	المعكوس الضربى للعدد a هو $\frac{1}{a}$ (حيث $a \neq 0$) حيث : $a \times \frac{1}{a}=1$

مثال 3

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

1. $2\sqrt{3}(4+\sqrt{3})-4\sqrt{3}$
2. $(\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+3)$
3. $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$
4. $(2\sqrt{5}-5)^2$

1) $2\sqrt{3}(4+\sqrt{3})-4\sqrt{3}=2\sqrt{3} \times 4+2\sqrt{3} \times \sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=8\sqrt{3}+2 \times 3-4\sqrt{3}$

$=8\sqrt{3}+6-4\sqrt{3}$

$=8\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6=4\sqrt{3}+6$

2) $(\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+3)=\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}+\sqrt{7} \times 3-1 \times 2\sqrt{7}-1 \times 3$

$=14+3\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

$=(14-3)+(3\sqrt{7}-2\sqrt{7})$

$=11+\sqrt{7}$

3) $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)=(2\sqrt{2})^2-(1)^2=8-1=7$

4) $(2\sqrt{5}-5)^2=(2\sqrt{5})^2+(2 \times 2\sqrt{5} \times (-5))+(-5)^2$

$=20-20\sqrt{5}+25$

$=45-20\sqrt{5}$

■ فكر وناقش

لأى ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c

1. هل $a-b=b-a$ ؟
2. هل $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ ؟
3. هل $\frac{a}{b} \in R$ ؟
4. هل $a(b-c)=ab-ac$ ؟

■ تقييم ذاتى (3)

إذا كانت $x=(\sqrt{5}-2)$ ،

$y=(\sqrt{5}+2)$

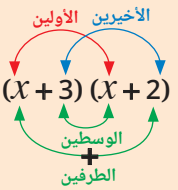
فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار x^2-y^2

■ معلومة سابقة

- $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
- $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
- $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

■ حاول بنفسك

حاول إيجاد ناتج الضرب مباشرة بمجرد النظر كالتالى :



$=x^2+5x+6$

مثال 4

أوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى، والمعكوس الضربى لكل من :

1) $3\sqrt{2}$ 2) $2-\sqrt{3}$

1) المعكوس الجمعى $= -3\sqrt{2}$

المعكوس الضربى $= \frac{1}{3\sqrt{2}}$

$\because \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\therefore$ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $= \frac{\sqrt{2}}{6}$

2) المعكوس الجمعى $= -(2-\sqrt{3})$

$= -2+\sqrt{3}$

المعكوس الضربى $= \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

$\because \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$

$\therefore$ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $= 2+\sqrt{3}$

■ لاحظ أن

لجعل العدد $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ فى أبسط صورة، اضرب كلًا من البسط والمقام فى $(2+\sqrt{3})$.

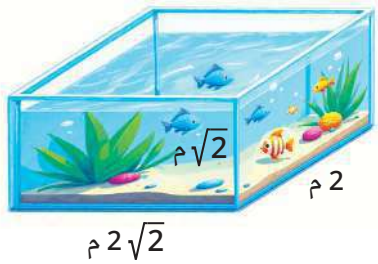
مثال 5

فى الشكل المقابل :

حوض زجاجى مغطى على شكل متوازى مستطيلات لعرض الأسماك، أوجد :

1) حجم الحوض الزجاجى.

2) المساحة الكلية للحوض لأقرب م^2.



1) $\because$ حجم الحوض (V) = الطول × العرض × الارتفاع

$\therefore V = 2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2}$

$= 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$

$\therefore$ حجم الحوض $= 8$ م^3.

2) $\because$ المساحة الكلية (A) $= 2$ (الطول × العرض + الطول × الارتفاع + العرض × الارتفاع)

$\therefore A = 2(2\sqrt{2} \times 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2})$

$= 2(4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}) = 2(6\sqrt{2} + 4) = 12\sqrt{2} + 8 \approx 24.97$

$\therefore$ مساحة الحوض الكلية ≈ 25 م^2.

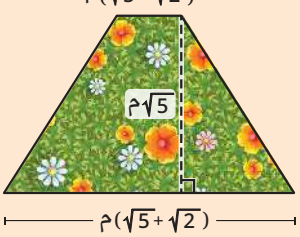
■ تقييم ذاتى 4

أوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى، والمعكوس الضربى لكل من :

1) $-4\sqrt{2}$ 2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

3) $3\sqrt{7}-4$

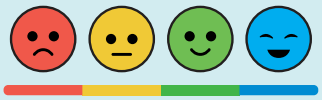
■ تقييم ذاتى 5



فى الشكل حوض زهور قاعدته على شكل شبه منحرف.

أوجد مساحة قاعدة الحوض.

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان : $a+\sqrt{5}=0$ فما قيمة a ؟

(أ) 0 (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $-\sqrt{5}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2) إذا كان : $a\times\sqrt{2}=1$ فما قيمة a ؟

(أ) 1 (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $-\sqrt{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) ما قيمة : $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}$

(جـ) $\sqrt{6}$ (د) 3

(4) إذا كان : $3\sqrt{5}-4\sqrt{5}=a\sqrt{5}$ فإن :

(أ) $a=-1$ (ب) $a=1$

(جـ) $a=7$ (د) $a=10$

(5) إذا كان : $(2\sqrt{3})^{n}=12$ فإن :

(أ) $n=2$ (ب) $n=3$

(جـ) $n=4$ (د) $n=6$

(6) إذا كان : $3a+\sqrt[3]{5}=4\sqrt[3]{5}$ فإن :

(أ) $a=1$ (ب) $a=\sqrt{5}$

(جـ) $a=\sqrt[3]{5}$ (د) $a=5$

(7) ما المعكوس الجمعى للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ فى أبسط صورة ؟

(أ) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ب) 7

(جـ) $-\sqrt{7}$ (د) -7

(8) ما المعكوس الضربى للعدد : $\sqrt{3}-2$ ؟

(أ) $2-\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3}+2$

(جـ) $-\sqrt{3}-2$ (د) $\sqrt{3}-2$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(9) اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا، واكتب العدد فى أبسط صورة :

(1) $\frac{1}{\sqrt{15}}$ (2) $\frac{30}{\sqrt{10}}$ (3) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$

(5) $\frac{1}{2+\sqrt{6}}$ (6) $\frac{20}{5-\sqrt{15}}$ (7) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

(10) أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(1) $2\sqrt{3}+\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

(2) $2\sqrt{5}-3\sqrt[3]{2}+4\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$

(3) $(\sqrt[3]{5})^{3}\times 2\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{5}(2-\sqrt{5})-2(1+\sqrt{5})$

(5) $(\sqrt{7}-1)^{2}+(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-3)$

(6) $(3+2\sqrt{2})^{2}-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$

(11) إذا كانت : $x = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$ ، $y = \sqrt{3}+2$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

① $(x+y)^2$ ② $x\,y$ ③ x^2+y^2

(12) إذا كان : $\frac{x}{3\sqrt{2}} = \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1$ ، فأوجد قيمة x^2+y^2

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(13) **هندسة :** أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة :

① مربع

$3\sqrt{5}$ سم

② مستطيل

$(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$ سم

$(2\sqrt{5}+\sqrt{3})$ سم

③

4 سم

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ سم

(14) **زراعة :**

أنشأ عمر فى حديقة منزله حوضين لزراعة الورود، أحدهما مستطيل الشكل بعداه $(\sqrt{7}-5)$ م ، $(\sqrt{7}+5)$ م ، والآخر مربع الشكل له نفس مساحة الحوض الأول، أوجد محيط كل من الحوضين، أيهما له المحيط الأكبر؟

زراعة الورود تساعد فى تنقية الهواء، وتعمل على تحسين المزاج وتقليل التوتر.

(15) **حرف يدوية :**

يعمل أحمد مشروعًا صغيرًا لإنتاج هياكل العلب، فإذا كان لدى أحمد سلك نحاسى طوله 90 سم ويريد صناعة هيكلين، أحدهما لمكعب حجمه 27 سم^3 والآخر لمتوازى مستطيلات أبعاده $4\sqrt{3}$ سم ، 4 سم ، $2\sqrt{3}$ سم، فهل ما لدى أحمد من السلك يكفى لصناعة الهيكلين؟

تعلُّم الحرف اليدوية ينمى المهارات الحركية الدقيقة ، ويعزز الإبداع والابتكار.

تفكير إبداعى

(16) عند إنشاء مخزن على شكل متوازى مستطيلات، كانت أبعاده a , b , c متر.

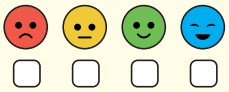
فإذا كان $a\,c = 5$ ، $b\,c = 5\sqrt{3}$ ، $a\,b = 3\sqrt{3}$ ،

فأوجد حجم المخزن.

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للعمليات على الأعداد الحقيقية ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس

1 - 4

قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية
(Laws of Square and Cube Roots)

■ نواتج التعلم

- تعرف قوانين ضرب وقسمة الجذور التربيعية.
- تعرف قوانين ضرب وقسمة الجذور التكعيبية.
- تستخدم قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية فى تبسيط الأعداد.
- تستخدم قوانين الجذور فى حل المشكلات الحياتية.

■ المفـردات

- الجذر التربيعى
Square root
- الجذر التكعيبى
Cube root

■ تفكير ناقد

- إذا كان a , b عددين حقيقيين غير سالبين :
هل : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ ؟
هل : $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$ ؟
- إذا كان a , b عددين حقيقيين :
هل : $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+b}$ ؟
هل : $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a-b}$ ؟

استعد !

في إطار مشـروع مدرسى ، قرر أسامة مع أصدقائه بالفصل إنشاء مشتل صغير داخـل المدرسـة ، يتكون مـن مربعين متلاصقين.

- المربع الأول مخصص لزراعة شـتلات الزينة ومساحته 48 م^2.
- المربع الثانى مخصص لزراعة النباتات العطرية ومساحته 12 م^2.

أراد أسامة وأصدقاؤه بناء سور حول المشتل بالكامل لحمايته، فما طول هذا السور ؟

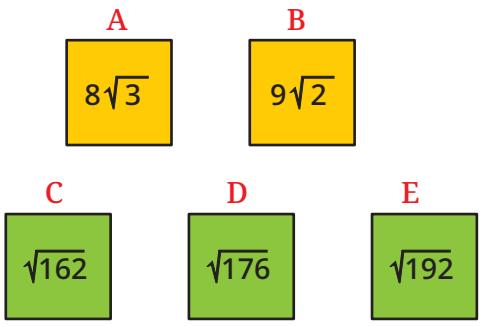
فى هذا الدرس، سوف تتعلم قوانين الجذور، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

فى لعبة اختيار بطاقتين تحملان عددين متساويين، قامت كل من سارة وأمل باختيار بطاقة صفراء وبطاقة خضراء.

- اختارت سارة البطاقتين A , C
- بينما اختارت أمل البطاقتين B , C

أيهما اختارت بشكل صحيح ؟ ولماذا ؟



تعلم !

ضرب وقسمة الجذور

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
إذا كان a , b عددين حقيقيين غير سالبين فإن : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$	إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن : $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\times b}$
مثال : $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$	مثال : $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{-4}=\sqrt[3]{3\times(-4)}=\sqrt[3]{-12}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ بشرط $b\neq 0$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ بشرط $b\neq 0$
مثال : $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$	مثال : $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$

مثال 1

ضع فى أبسط صورة كلًا من الأعداد التالية :

1 $\sqrt{32}$ 2 $\sqrt[3]{24}$ 3 $2\sqrt{\frac{5}{2}}$ 4 $3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$

1 حلل العدد 32 إلى عاملين أحدهما 16 وهو أكبر عامل مربع كامل $(32 = 16 \times 2)$

$\therefore \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

2 حلل العدد 24 إلى عاملين أحدهما 8 وهو أكبر عامل مكعب كامل $(24 = 8 \times 3)$

$\therefore \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

3 $2\sqrt{\frac{5}{2}} = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= 2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

تنوع الاستراتيجيات

$\because 2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

$\therefore 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2} \times \cancel{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$

4 $3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}} = 3 \times \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3}}$

$= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$

$= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-2 \times 3 \times 3}}{3}$

$= 3 \times \frac{\sqrt[3]{-18}}{3} = -\sqrt[3]{18}$

مثال 2

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

1 $2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - \sqrt{48}$ 2 $\frac{\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$

1 $2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{16 \times 3}$

$= 2\sqrt{3} + 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} - \sqrt{16} \times \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 5 \times 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

تقييم ذاتى 1

ضع كلًا مما يأتى فى أبسط صورة :

1 $\sqrt{50}$ 2 $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ 3 $2\sqrt[3]{16}$ 4 $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

تذكر أن

لجعل مقام العدد غير النسبى $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ عددًا صحيحًا اضرب كلاً من بسطه ومقامه فى $\sqrt{b}$ كالتالى :

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

تذكر أن

لجعل مقام العدد غير النسبى $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ عددًا صحيحًا اضرب كلًا من بسطه ومقامه فى $\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b}$ كالتالى :

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}$

$= \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$

لاحظ أن

عند جمع وطرح الحدود الجذرية غير المتشابهة، قم بتبسيط كل حد على حدة، فإذا حصلت على حدود جذرية متشابهة يمكنك جمعها أو طرحها.

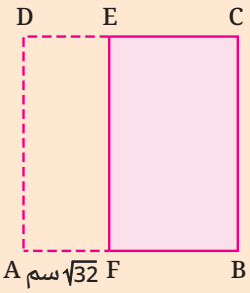
■ **تقييم ذاتى ②**

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

① $2\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

② $2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{128}$

■ **تقييم ذاتى ③**



مساحة المربع ABCD تساوى 200 سم^2.
قُطع منه المستطيل AFED الذى عرضه $\sqrt{32}$ سم،
فما مساحة الشكل FBCE ؟

■ **تقييم ذاتى ④**

إذا كانت : $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

فأوجد فى أبسط صورة قيمة :

$x+\dfrac{1}{x}$

■ **لاحظ أن**

لتبسيط y اجعل المقام عددًا نسبيًا بضرب البسط والمقام فى $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

② $\dfrac{\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{8\times5}-2\sqrt[3]{27\times5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}-2\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\dfrac{2\sqrt[3]{5}-2\times3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\dfrac{2\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\dfrac{-4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=-4$

■ **تنوع الاستراتيجيات**

$\dfrac{\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}-\dfrac{2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$

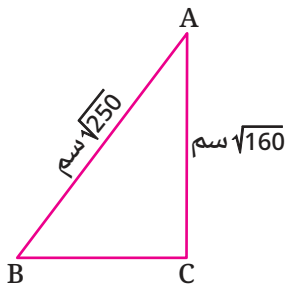
$=\sqrt[3]{\dfrac{40}{5}}-2\sqrt[3]{\dfrac{135}{5}}$

$=\sqrt[3]{8}-2\sqrt[3]{27}$

$=2-2\times3=-4$

مثال 3

هندسة : فى الشكل المقابل، ABC مثلث محيطه $\sqrt{1440}$ سم.
أوجد طول $\overline{BC}$



∵ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$\therefore\sqrt{250}+\sqrt{160}+BC=\sqrt{1440}$

$\therefore\sqrt{25\times10}+\sqrt{16\times10}+BC=\sqrt{144\times10}$

$\therefore5\sqrt{10}+4\sqrt{10}+BC=12\sqrt{10}$

$\therefore9\sqrt{10}+BC=12\sqrt{10}$

$\therefore BC=12\sqrt{10}-9\sqrt{10}=3\sqrt{10}$

أى أن طول $\overline{BC}$ يساوى $3\sqrt{10}$ سم.

مثال 4

إذا كانت : $x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ، $y=\dfrac{3}{x}$ ، فأوجد فى أبسط صورة :

① $x-y$ ② $\dfrac{y}{x}$

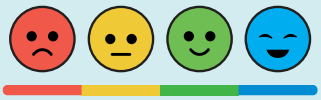
$y=\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

① $x-y=(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

② $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2}=\dfrac{5-2\sqrt{10}+2}{3}$

$=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}=\dfrac{7}{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{10}$

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أى مما يلى صحيح ؟

(أ) $\sqrt{40}=4\sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{32}=8\sqrt{2}$

(جـ) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{48}=3\sqrt{6}$

(2) ما قيمة : $\sqrt{18}+\sqrt{32}$ ؟

(أ) $\sqrt{50}$ (ب) $7\sqrt{2}$

(جـ) $7\sqrt{4}$ (د) $5\sqrt{4}$

(3) أى مما يلى يكافئ $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{5}$ ؟

(أ) $\sqrt[3]{30}$ (ب) 5 (جـ) $5\sqrt[3]{5}$ (د) 125

(4) أى مما يلى يكافئ $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ؟

(أ) $2\sqrt{6}$ (ب) $6\sqrt{2}$ (جـ) 6 (د) $\sqrt{70}$

(5) أى مما يلى يكافئ $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{15}}$ ؟

(أ) $\frac{5}{15}$ (ب) $\frac{5}{3}$

(جـ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (د) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

(6) إذا كان : $\sqrt{160}=x\sqrt{10}$ فما قيمة x ؟

(أ) 8 (ب) 6

(جـ) 4 (د) 3

(7) إذا كان : $\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2}\,a$ فما قيمة a ؟

(أ) 30 (ب) $\sqrt[3]{30}$

(جـ) 15 (د) $\sqrt[3]{15}$

(8) إذا كان : $2\sqrt{3}\times4\,a=8\sqrt{6}$ فما قيمة a ؟

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}$

(جـ) 2 (د) $\sqrt{6}$

(9) إذا كان : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ فما قيمة a ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6}$

(جـ) 3 (د) 9

(10) إذا كان : $\sqrt{7}=x+\sqrt{28}$ فما قيمة x ؟

(أ) $\sqrt{21}$ (ب) $-\sqrt{21}$

(جـ) $\sqrt{7}$ (د) $-\sqrt{7}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(11) اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

(1) $3\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$

(2) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{16}$

(3) $\frac{2\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{10}}$

(4) $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$

(5) $\frac{3\sqrt[3]{32}-3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$

(6) $3\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$

(7) $4\sqrt{48}+\frac{4}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}$

(8) $\sqrt[3]{192}-3\sqrt[3]{375}+2\sqrt[3]{24}$

(9) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{256}+\frac{12}{\sqrt[3]{16}}+\sqrt[3]{32}$

(12) فى كل مما يأتى أوجد قيمة x :

(1) $x\sqrt{32}=2\sqrt{50}+\sqrt{72}$

(2) $x\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{270}$

(13) أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان : $2\sqrt{24}=b\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{5}=2\sqrt{a}$ فأوجد $a+b$.

② إذا كانت : $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ فأوجد فى أبسط صورة كلًا مما يأتى :

$x\times y$ (1) $\quad\quad \frac{x}{y}$ (2) $\quad\quad (x-\frac{1}{x})^2$ (3)

③ إذا كانت : $a=\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$ ، $b=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$ فأوجد فى أبسط صورة كلًا مما يأتى :

$(a+b)^3$ (1) $\quad\quad a\times b$ (2) $\quad\quad a^2-b^2$ (3)

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(14) هندسة : احسب مساحة كل من الأشكال المظللة الآتية :

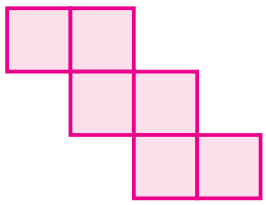
① $4\sqrt{2}$ سم ، $\sqrt{18}$ سم

② $\sqrt{63}$ سم ، $\sqrt{28}$ سم

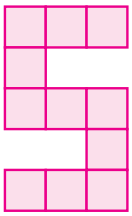
③ $\sqrt{50}$ سم ، $\sqrt{32}$ سم ، $\sqrt{128}$ سم

(15) هندسة : كل شكل من الشكلين المقابلين يتكون من مربعات متساوية فى المساحة.

أوجد محيط كل شكل (مساحة الشكل معطاة أسفله).



المساحة = 300 سنتيمتر مربع

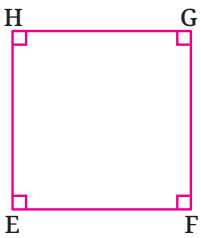


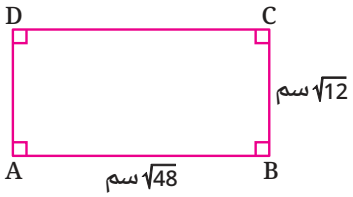
المساحة = 132 سنتيمترًا مربعًا

(16) بناء : قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها 500 م^2.
أُستخدمت منها قطعة مربعة الشكل مساحتها 180 م^2 فى بناء منزل، وتُركت باقى المساحة كحديقة كما بالشكل، فما طول السور الخارجى للحديقة بالمتر؟

(17) هندسة : إذا كانت مساحة المستطيل ABCD تساوى مساحة المربع EFGH

فما طول $\overline{EF}$ ؟

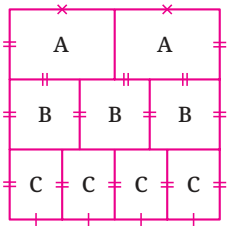




تفكير إبداعى

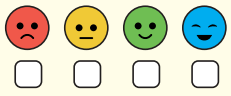
(18) مربع مساحته 432 سم^2 قُسم إلى مستطيلات ومربعات كما بالشكل،

فما هو الفرق بين محيطى الشكلين A ، B ؟



قيم فهمك!

ما مدى فهمك لقوانين الجذور التربيعية والتكعيبية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس

1 - 5

قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية
(Laws of Exponents in Real Numbers)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف الضرب المتكرر فى مجموعة الأعداد الحقيقية.
- تعرف قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية.
- تستخدم قوانين الأسس فى تبسيط تعبيرات رياضية.
- تستخدم قوانين الأسس فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- الضرب المتكرر Repeated multiplication
- أس Exponent
- أساس Base
- قوة Power

■ **لاحظ أن**

- $(-a)^n = a^n$
إذا كان n عددًا صحيحًا زوجيًا.
- $(-a)^n = -a^n$
إذا كان n عددًا صحيحًا فرديًا.

استعد !

شركة متخصصة فى تصنيع ألعاب تعليمية للأطفال، قررت إنتاج لعبة على شكل مكعب ملون مصنوع من البلاستيك الآمن، على أن يكون طول حرف المكعب $4\sqrt{3}$ سم.

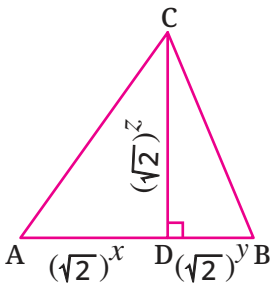
ما حجم هذا المكعب ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

إذا كانت : $x + z = 4$ ، $y + z = 2$

فما مساحة المثلث ABC حيث $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ؟ ناقش.



تعلم !

الضرب المتكرر فى مجموعة الأعداد الحقيقية

يستخدم التعبير الرياضى a^n للتعبير عن حاصل ضرب العدد الحقيقى a فى نفسه n من المرات.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{عدد حقيقى مكرر n مرة}} = a^n \leftarrow \text{الأس}$$

الأساس

مثال :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^5$$

الأس = 5

الأساس = $\sqrt{2}$

مثال 1

أوجد قيمة كل مما يأتى :

1 $(-\sqrt{5})^4$ 2 $-(\sqrt{5})^4$ 3 $(-\sqrt{5})^3$

① $(-\sqrt{5})^4 = -\sqrt{5}\times-\sqrt{5}\times-\sqrt{5}\times-\sqrt{5}$

$= 5 \times 5 = 5^2 = 25$

② $-(\sqrt{5})^4 = -(\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5})$

$= -(5 \times 5) = -(5)^2 = -25$

③ $(-\sqrt{5})^3 = -\sqrt{5}\times-\sqrt{5}\times-\sqrt{5}$

$= 5 \times -\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$

الأس الصفرى والأس السالب

أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر مرفوع للأس صفر يساوى 1

أى أن : $a^0 = 1$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر

أمثلة : $5^0 = 1$ ، $(\sqrt{3})^0 = 1$ ، $(-\sqrt[3]{4})^0 = 1$

أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر مرفوع للأس (−n) حيث n عدد صحيح، يساوى المعكوس الضربى للعدد نفسه مرفوع للأس n

أى أن : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر

أمثلة : $(\sqrt{3})^{-4} = (\frac{1}{\sqrt{3}})^4 = \frac{1}{(\sqrt{3})^4} = \frac{1}{9}$ ، $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})^{-3} = (\sqrt[3]{4})^3 = 4$

قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية

أولا قوانين الضرب

عند ضرب القوى التى لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونجمع الأسس.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر ، m ، n عددان صحيحان

أمثلة : $2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$ ، $a^{-3} \times a^5 = a^{-3+5} = a^2$

عند إيجاد قوة حاصل ضرب عددين يُوزع الأس على كل من العددين.

أى أن : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ حيث a , b عددان حقيقيان لا يساويان الصفر، n عدد صحيح

مثال : $(3\sqrt{2})^2 = (3)^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

تقييم ذاتى ①

أوجد قيمة كل مما يأتى :

1 $(-\sqrt{2})^5$ 2 $-(\sqrt{2})^5$ 3 $(-\sqrt{2})^6$

فكر مع زملائك

إذا كان a عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر، n عددًا صحيحًا، فكيف تثبت كلًا مما يأتى :

1 $a^0 = 1$ 2 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

لاحظ أن :

القسمة على صفر ليس لها معنى، وعلى هذا فإنه عند وجود رموز فى المقام يُشترط لهذه الرموز ألا تساوى الصفر.

لاحظ أن :

$(a+b)^n \neq a^n + b^n$

$(a-b)^n \neq a^n - b^n$

ثانيا قـوانـيــن القسـمة

عند قسمة القوى التى لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونطرح الأسس.

أى أن : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر، m ، n عددان صحيحان.

مثال : $\frac{(\sqrt[3]{7})^5}{(\sqrt[3]{7})^2} = (\sqrt[3]{7})^{5-2} = (\sqrt[3]{7})^3 = 7$

عند إيجاد قوة خارج قسمة عددين يُوزع الأس على كل من العددين.

أى أن : $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ حيث a , b عددان حقيقيان لا يساويان الصفر، n عدد صحيح.

مثال : $(\frac{6}{\sqrt{3}})^2 = \frac{6^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{36}{3} = 12$

مثال 2

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

1) $\frac{(6a)^2}{2a}$ 2) $\frac{(-\sqrt{3}ab)^4}{3a^4b^2}$ 3) $\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5}$

1) $\frac{(6a)^2}{2a} = \frac{6^2 \times a^2}{2 \times a} = \frac{36a^2}{2a} = 18a^{2-1} = 18a$

2) $\frac{(-\sqrt{3}ab)^4}{3a^4b^2} = \frac{(-\sqrt{3})^4 \times a^4 \times b^4}{3 \times a^4 \times b^2}$

$= \frac{9}{3} \times a^{4-4} \times b^{4-2}$

$= 3 \times a^0 \times b^2$

$= 3 \times 1 \times b^2 = 3b^2$

3) $\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5} = \frac{(2\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5} = \frac{2^4 \times (\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{2^5 \times (\sqrt{2})^5}$

$= (2)^{4-5} \times (\sqrt{2})^{4+3-5}$

$= (2)^{-1} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

تقييم ذاتى 2

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

1) $\frac{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-1}}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^{-2}}$

2) $\frac{(\sqrt{18})^5 \times (\sqrt{2})^3}{(\sqrt{12})^4}$

مثال 3

اختصر لأبسط صورة كلًا مما يأتى :

1) $(\sqrt{6})^{n} \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 1$

2) $\dfrac{(10)^{2n} \times 0.001}{(10)^{-n+1} \times 100}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 2$

1) $(\sqrt{6})^{n} \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n} = (\sqrt{3} \times \sqrt{2})^{n} \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$

$= (\sqrt{3})^{n} \times (\sqrt{2})^{n} \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$

$= (\sqrt{3})^{n+n-1} \times (\sqrt{2})^{n-n}$

$= (\sqrt{3})^{2n-1} \times (\sqrt{2})^{0}$

$= (\sqrt{3})^{2n-1} \times 1$

$= (\sqrt{3})^{2n-1}$

عند $n = 1$:

$\therefore (\sqrt{3})^{2n-1} = (\sqrt{3})^{2\times1-1} = \sqrt{3}$

2) $\dfrac{10^{2n} \times 0.001}{10^{-n+1} \times 100} = \dfrac{10^{2n} \times 10^{-3}}{10^{-n+1} \times 10^{2}}$

$= \dfrac{10^{2n-3}}{10^{-n+1+2}} = \dfrac{10^{2n-3}}{10^{-n+3}}$

$= 10^{(2n-3)-(-n+3)} = 10^{2n-3+n-3} = 10^{3n-6}$

عند $n = 2$:

$\therefore 10^{3n-6} = 10^{3\times2-6} = 10^{6-6} = 10^{0} = 1$

مثال 4

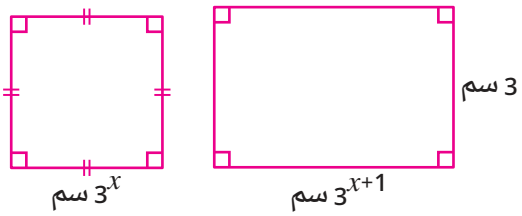
فى الشكل المقابل :

مربع طول ضلعه 3^{x} سم

ومستطيل بعداه 3^{x+1} سم ، 3 سم.

إذا كان محيط المربع = 20 سم،

فأوجد مساحة المستطيل.



∵ محيط المربع = 20 سم

$\therefore 4 \times 3^{x} = 20$ $\quad\quad$ $\therefore 3^{x} = \dfrac{20}{4} = 5$

∵ مساحة المستطيل A = الطول × العرض

$\therefore A = 3^{x+1} \times 3 = 3^{x} \times 3 \times 3 = 5 \times 9 = 45$

∴ مساحة المستطيل = 45 سم^{2}.

■ تقييم ذاتى ③

اختصر لأبسط صورة :

1) $\dfrac{(\sqrt{5})^{n} \times (\sqrt{3})^{2-n}}{3 \times (\sqrt{15})^{-n}}$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = -2$

2) $\dfrac{1000 \times 0.1^{n} \times 10^{n-1}}{10^{n+2}}$

■ لاحظ أن

$10 = 10^{1}$	$0.1 = 10^{-1}$
$100 = 10^{2}$	$0.01 = 10^{-2}$
$1000 = 10^{3}$	$0.001 = 10^{-3}$
$10000 = 10^{4}$	$0.0001 = 10^{-4}$

وهكذا

■ تقييم ذاتى ④

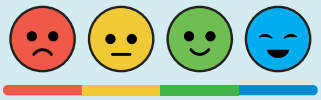
إذا كان : $3^{x} = 4$

فأوجد القيمة العددية لكل من :

1) 3^{x+1} $\quad$ 2) 3^{x-1}

3) $3^{x+2} + 3^{x+3}$

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) ما ناتج $\frac{(a\,b)^3}{b^3}$ ؟

(أ) a^3 (ب) $\frac{a}{b}$ (جـ) $\frac{a^3}{b^2}$ (د) $\frac{a^2}{b^3}$

2) ما قيمة $(\frac{7}{\sqrt{7}})^0 - \frac{7}{(\sqrt{7})^0}$ ؟

(أ) 0 (ب) 6 (جـ) 1 (د) -6

3) ما ناتج $(\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^{-4}$ ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (جـ) 3 (د) $\frac{1}{3}$

4) ما ناتج $(\frac{\sqrt{5}}{10})^{-1}$ ؟

(أ) $2\sqrt{5}$ (ب) $5\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ (د) 2

5) ما محيط المربع الذى مساحته a سم^2 ؟

(أ) a^4 سم (ب) $(\sqrt{a})^4$ سم (جـ) $4\sqrt{a}$ سم (د) $4a$ سم

6) ما قيمة $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ ؟

(أ) 4^2 (ب) 4^3 (جـ) 4^8 (د) 4^{16}

7) إذا كان : $2^{x-1} = 1$ فما قيمة x ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) -2

8) إذا كان : $(\sqrt{6})^x \times \sqrt{6} = 1$ فما قيمة x ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) -2

9) ما العدد $(\sqrt[3]{5})^6$ ؟

(أ) 5 (ب) 25 (جـ) $\sqrt[3]{5}$ (د) $(\sqrt[3]{5})^8$

10) إذا كانت : $2^x = 3$ فما قيمة 2^{x+1} ؟

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 9

ثانيًا تطبيق المفاهيم

11) اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة :

① $\frac{(-2xy)^{-3}}{x^{-4}y^{-3}}$

② $\frac{-3a^2b \times 4a^{-1}b^{-2}}{12(a\,b)^{-2}}$

③ $(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}})^4$

④ $\frac{(\sqrt{3})^3 \times 27}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^4}$

⑤ $\frac{(\sqrt{18})^2 \times (\sqrt{2})^{-1}}{(\sqrt{8})^{-1}}$

⑥ $\frac{(2)^{2n+1} \times (3)^{2n+1}}{(6)^{2n}}$

⑫ **اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة :**

① $\frac{(\sqrt{6})^{n+2}\times(\sqrt{3})^{n}}{4\times(\sqrt{2})^{n-2}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $n=1$

② $\frac{10^{-n}\times 0.01}{10^{-n-6}\times 10^{n}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $n=3$

⑬ إذا كانت : $x=\sqrt{2}$ ، $y=\sqrt{6}$ ، فما قيمة $\frac{y^{6}x^{-4}}{x^{2}}$ ؟

⑭ إذا كانت : $x=2\sqrt{3}$ ، $y=3\sqrt{2}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار $(x^{2}-y^{2})^{-1}$

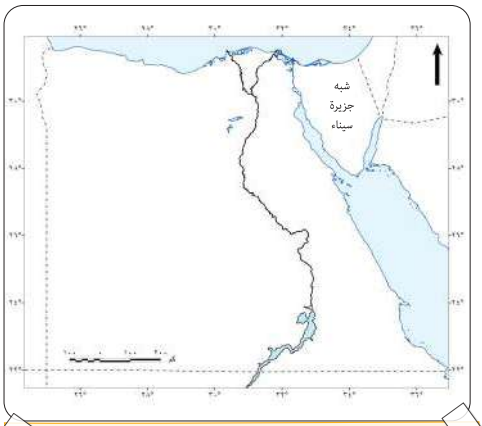
⑮ إذا كانت : $2^{x}=5$ فأوجد قيمة كل من :

① 2^{x+1} ② 2^{1-x} ③ $2^{x+2}+2^{x+3}$

⑯ إذا كانت : $x=\sqrt{5}$ ، $y=5$ فأوجد قيمة $x^{-10}y^{10}$

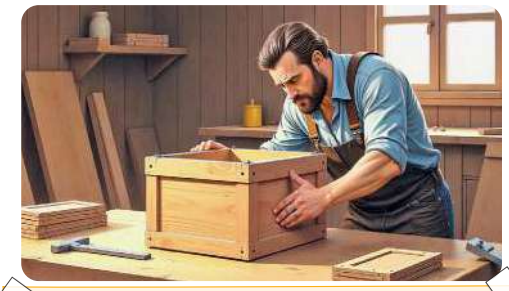
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑰ **جغرافيا :** إذا علمت أن مساحة شبه جزيرة سيناء تبلغ حوالى 6% من مساحة جمهورية مصر العربية التى تبلغ حوالى 10^{6} كم^{2} تقريبًا ، فكم تبلغ مساحة شبه جزيرة سيناء بالكيلو متر مربع تقريبًا؟



تشهد سيناء - أرض الفيروز - ومدن القناة طفرة حقيقية وإنجازات فى كافة قطاعات التنمية بما يدعو للفخر.

⑱ **نجارة :** صنع نجار صندوقًا خشبيًا على شكل متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $2\sqrt{7}$ قدم ، وارتفاعه $3\sqrt{7}$ قدم، فما حجم الصندوق ؟



يجب اتباع تعليمات الأمن والسلامة داخل بيئة العمل حفاظًا على سلامة الأفراد.

تفكير إبداعى

⑲ أى مما يأتى يعبر عن الوسط الحسابى للعددين 2^{x} ، 2^{x+1} حيث $x\in Z$ ؟

(أ) 2 (ب) 2^{2x+1}

(جـ) $2^{x-1}+2^{x}$ (د) $2^{x+1}+2^{x}$

قيّم فهمك!

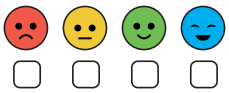
ما مدى فهمك لقوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

☹ 😐 🙂 😄

تقييم الوحدة الأولى

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الأولى ؟ ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كانت $a = 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ فما قيمة a ؟

(أ) -1 (ب) 1

(جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 0

(2) ما الفترة التى تمثل $]-2,3[\cap R^-$ ؟

(أ) $]-2,0[$ (ب) $]-2,0]$

(جـ) $]-2,1]$ (د) $]0,3[$

(3) إذا كان : $(\sqrt{2})^{x-1} = \sqrt{3}$ فما قيمة $(\sqrt{2})^x$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ (ب) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(جـ) $\sqrt{6}$ (د) $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

(4) أى من الأعداد الآتية عدد غير نسبى ؟

(أ) $\sqrt[3]{-27}$ (ب) $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$

(جـ) $0.\overline{5}$ (د) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$

◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

(5) مجموعة الحل للمعادلة $\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$ فى R هى .....

(6) إذا كان n عددًا صحيحًا، $n + 1 > \sqrt{29} > n$ فإن $n =$ .....

(7) المعكوس الضربى للعدد $3 - \sqrt{10}$ فى أبسط صورة يساوى .....

(8) إذا كانت : $X =]-1, \infty[$ فإن الفترة التى تعبر عن مكملة X تساوى .....

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) اختصر لأبسط صورة المقدار : $\frac{(\sqrt{15})^{n-2} \times (\sqrt{6})^n}{2 \times (\sqrt{10})^{n-2}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 1$

(10) إذا كانت $x = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ فأوجد فى أبسط صورة $x - \frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $A =]-\infty, 1]$ ، $B =]-2, 2]$ فأوجد على صورة فترة $B - A$

(12) رتب تصاعديًا الأعداد : $2\sqrt{3}$ ، $3.\overline{5}$ ، $3\frac{1}{2}$

نشاط الوحدة الأولى

المثلث الذهبى

◂ الهدف من النشاط :

تعرف نماذج وأشكالًا جديدة كأمثلة فى الرياضيات على النسبة الذهبية.

◂ خطوات التنفيذ :

بالتعاون مع أحد أصدقائك حاول القيام بالآتى :

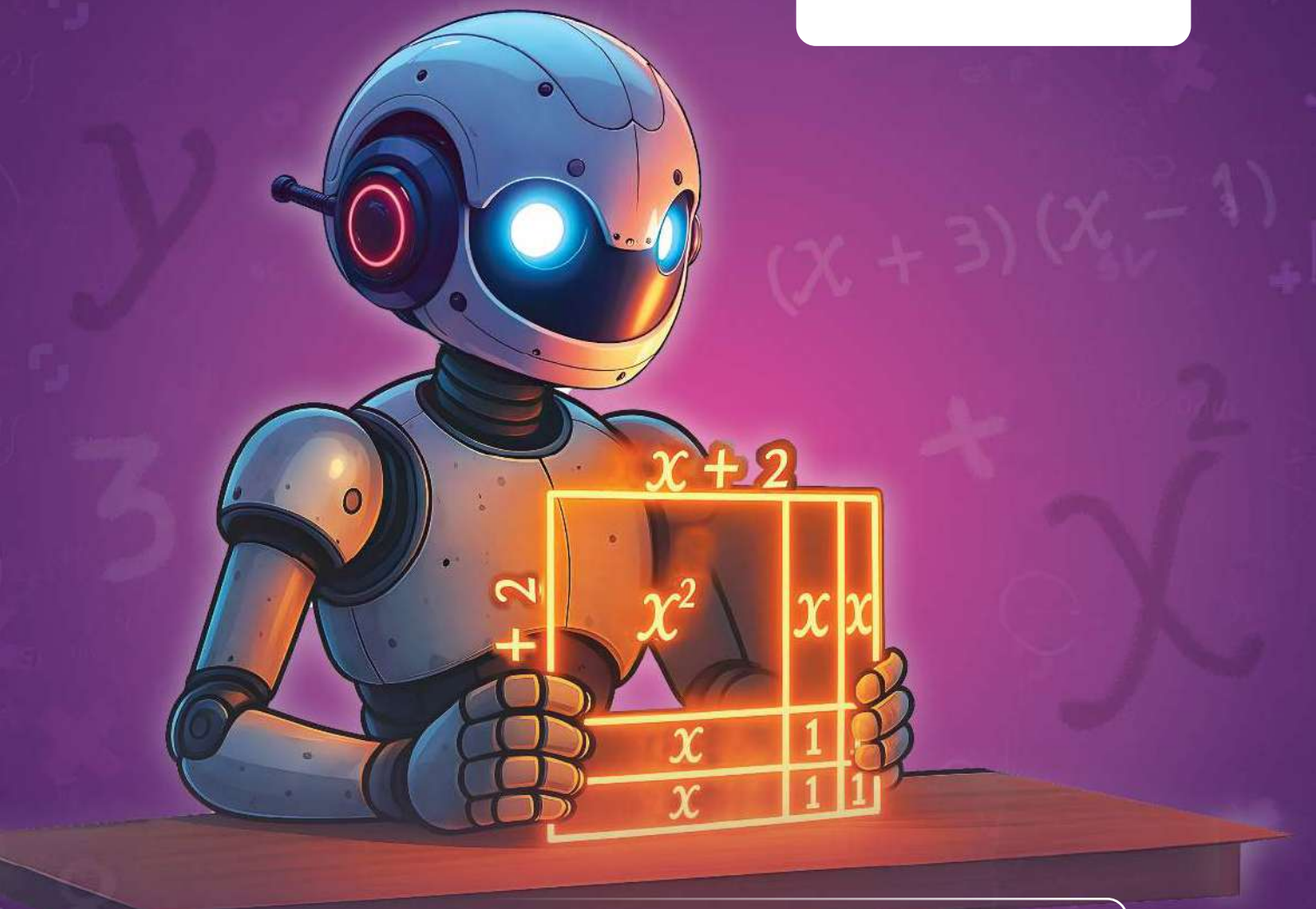
1. استخدم أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى للبحث عن أمثلة فى الرياضيات على النسبة الذهبية.
2. اذكر عددًا من الأشكال التى يمكن أن توجد بها النسبة الذهبية.
3. هل يمكن أن توجد النسبة الذهبية فى المثلث ؟
   اجمع بيانات عن هذه الحالة، واذكر نوع المثلث الذى يمكن أن يُطلق عليه (المثلث الذهبى).
4. وضح خطوات الإجابة عن الأسئلة السابقة، مع عرض بعض الصور للأشكال التى توصلت إليها.

الوحدة 2

الجبـــر

دروس الوحدة

2-1 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
2-2 تحليل ثلاثية الحدود
2-3 تحليل الحالات الخاصة
2-4 التحليل بالتقسيم



التحليل هو عملية رياضية مهمة تُستخدم فى بعض خوارزميات الذكاء الاصطناعى، حيث يتكامل كل نوع من أنواع التحليل مع جانب معين من تصميم وتدريب النماذج الذكية (تطبيقات الذكاء الاصطناعى).

◀ فهل يمكن تطوير دور التحليل بأنواعه المختلفة فى بناء وتطوير نماذج وتطبيقات الذكاء الاصطناعى؟

القضايا والمهارات الحياتية

- التفكير الناقد
- التفكير الإبداعى
- التنمية المستدامة
- التواصل الرياضى

القيـــم

- تقدير الفن والجمال
- الاحترام
- الوعى الثقافى
- الوعى البيئى
- المسئولية

الدرس

2 - 1

التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
(Factorizing by Taking Out Greatest Common Factor GCF)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- تحلل كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- تستخدم التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر فى حل المشكلات.
- تحل المعادلات باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

■ **المفردات**

- التحليل Factorization
- كثيرة الحدود Polynomial
- وحيدة الحد Monomial
- ثنائية حدود Binomial
- ثلاثية حدود Trinomial

■ **فكر مع زملائك**

لماذا $2 - x^3$ كثيرة حدود، بينما $3x^{-2}$ ليست كثيرة حدود، $2 + 3x^{\frac{1}{2}}$ ليست كثيرة حدود؟

استعد !

أبطال مصر فى لعبة الإسكواش

تحتل مصر مراكز متقدمة على مستوى العالم فى رياضة الإسكواش، حيث حقق اللاعبون المصريون من الرجال والنساء العديد من البطولات الكبرى فى السنوات الأخيرة.

بفرض أن مساحة ملعب الإسكواش تساوى $(4x^5 + 12x)$ م^2، فهل يمكن أن يكون بعداه $(4x^5)$ م ، $(12x)$ م ؟

أو يمكن أن يكون بعداه $(x^4 + 3)$ م ، $4x$ م ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

يمكن كتابة المقدار $(12x^4 + 18x^3)$ كحاصل ضرب عاملين بأكثر من طريقة كما يلى :

$3x(4x^3 + 6x^2)$ $\quad$ $2x^2(6x^2 + 9x)$ $\quad$ $6x^3(2x + 3)$

$6x(2x^3 + 3x^2)$ $\quad$ $3x^2(4x^2 + 6x)$

أى من حواصل الضرب السابقة هو تحليل للمقدار $(12x^4 + 18x^3)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر ؟ ناقش.

تعلم !

تحليل كثيرة الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ)

كثيرة الحدود هى تعبير رياضى فيه جميع أسس متغيراته أعداد صحيحة موجبة.

أمثلة لكثيرات الحدود :

- كثيرة حدود (وحيدة الحد) : $-3xy$
- كثيرة حدود (ثنائية حدود) : $4xy^2 + 2x$
- كثيرة حدود (ثلاثية حدود) : $2x^2 + 3y + 8$

كيفية تحليل كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر

عند تحليل كثيرة الحدود $6x^2-15x$ بإخراج ع . م . أ اتبع الخطوات التالية :

1. حلل كل حد كحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس 1 كما يلى :

$$6x^2=2\times 3\times x\times x$$
$$15x=3\times 5\times x$$

∴ العامل المشترك الأكبر هو $3x$

2. اقسم $(6x^2-15x)$ على العامل المشترك الأكبر $(3x)$،
فيكون خارج القسمة $(2x-5)$

3. اكتب العامل المشترك الأكبر خارج قوسين،
واكتب خارج القسمة داخل القوسين
كما بالشكل المقابل.

$$\underbrace{6x^2-15x}_{\text{تحليل}} = \underbrace{3x(2x-5)}_{\text{توزيع}}$$

مثال 1

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1. $8x^2-16$
2. $15x^2y^2-30xy^3$
3. $2a^3b^2+8a^2b^3-16ab$
4. $-4x^4+12x^3-8x^2$

1) حيث إن ع . م . أ هو 8

$$\therefore 8x^2-16=8(x^2-2)$$

2) حيث إن ع . م . أ هو $15xy^2$

$$\therefore 15x^2y^2-30xy^3=15xy^2(x-2y)$$

3) $2a^3b^2+8a^2b^3-16ab=2ab(a^2b+4ab^2-8)$

4) $-4x^4+12x^3-8x^2=-4x^2(x^2-3x+2)$

■ لاحظ أن

لإيجاد ع . م . أ بين حدود كثيرات الحدود :
1. نوجد ع . م . أ للعوامل العددية.
2. نأخذ كل متغير مكرر فى كل الحدود بأصغر أس له.

■ ملاحظات

- إذا كان معامل الحد الأول فى كثيرة الحدود سالبًا فيفضل أخذ (-1) عاملًا مشتركًا من كل حد من حدود كثيرة الحدود،
فمثلًا : $-a+b-c=-(a-b+c)$
- كثيرة الحدود التى لا يمكن تحليلها تُسمى "كثيرة حدود أولية".
مثل : $3x^2+4y^2$ ، $2x^4+7$

■ معلومة سابقة

- يمكن توزيع الضرب على الجمع، مثال :
$2x(x+4)=2x^2+8x$
- يمكن توزيع الضرب على الطرح، مثال :
$3x(2x-5)=6x^2-15x$

■ تقييم ذاتى (1)

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :
1. $12x^2+16$
2. $6a^4-5a^2$
3. $4x^3-8x^2+12x$
4. $36ab-24a^2b-18ab^2$

■ التحقق من صحة التحليل

يمكنك التحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها ببعض للحصول على كثيرة الحدود الأصلية.

مثال 2

أوجد القيمة العددية لكل مما يأتى باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $19 \times 23 + 19 \times 27$ 2) $37 \times 163 - 37 \times 26 - (37)^2$

3) $25 \times 158 - 25 \times 57 - 25$

✓ 1) $19 \times 23 + 19 \times 27 = 19\,(23 + 27) = 19 \times 50 = 950$

2) $37 \times 163 - 37 \times 26 - 37 \times 37 = 37\,(163 - 26 - 37)$

$= 37 \times 100 = 3700$

3) $25 \times 158 - 25 \times 57 - 25 \times 1 = 25\,(158 - 57 - 1)$

$= 25 \times 100 = 2500$

■ **تقييم ذاتى ②**

أوجـد القيمة العدديـة لكل مما يأتى باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $83 \times 57 + 83 \times 43$

2) $43 \times 87 - 43 \times 30 + (43)^2$

3) $13 \times 115 - 13 \times 16 + 13$

مثال 3

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $12\,x\,(x + y) - 18\,y\,(x + y)$ 2) $(x - 5)^2 - 2\,(x - 5)$

3) $(x + 3)^2 - x - 3$

■ **لاحظ أن**

يمكن أخذ القوس المكـرر الذى بداخله كثيرة حدود كعامل مشترك.

✓ 1) حيث إن ع . م . أ هو $6\,(x + y)$

$\therefore 12\,x\,(x + y) - 18\,y\,(x + y) = 6\,(x + y)\,(2x - 3y)$

2) حيث إن ع . م . أ هو $(x - 5)$

$\therefore (x - 5)^2 - 2\,(x - 5) = (x - 5)\,(x - 5 - 2) = (x - 5)\,(x - 7)$

3) $(x + 3)^2 - x - 3 = (x + 3)^2 - (x + 3)$

$= (x + 3)\,(x + 3 - 1)$

$= (x + 3)\,(x + 2)$

■ **تقييم ذاتى ③**

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $16\,a\,(a - b) + 24\,b\,(a - b)$

2) $(x + 2)^2 + 3\,(x + 2)$

3) $(x - 5)^2 - x + 5$

مثال 4

إذا كان $2x + y = 7$ ، $x + 2y = 8$

فأوجد القيمة العددية للمقدار : $2\,x\,(x + 2\,y) + y\,(x + 2\,y)$

✓ يمكن استخدام التحليل بإخراج ع . م . أ لتبسيط المقدار المعطى كالتالى :

$2\,x\,(x + 2\,y) + y\,(x + 2\,y) = (x + 2\,y)\,(2x + y)$

$= 8 \times 7 = 56$

■ **تقييم ذاتى ④**

إذا كان $(5\,a + 4\,b) = 65$ ،

$5\,a\,(2\,a - 3\,b) + 4\,b\,(2\,a - 3\,b) = 195$

أوجد القيمة العددية للمقدار $(2\,a - 3\,b)$

حل المعادلات باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

خاصية :

إذا كان a ، b عددين حقيقيين، وكان $a \times b = 0$ فإن :
إما $a = 0$ أو $b = 0$ أو كليهما يساوى صفرًا.

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1) $3x^2 + 6x = 0$ 2) $10x^3 - 25x^2 = 0$ 3) $x^2 = 3x$

1) $\therefore 3x(x+2) = 0$ $\because 3x^2 + 6x = 0$

$\therefore$ إما $3x = 0$ ومنها $\boxed{x = 0}$

أو $x + 2 = 0$ ومنها $\boxed{x = -2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{0 , -2\}$

2) $\because 10x^3 - 25x^2 = 0$

$\therefore 5x^2(2x - 5) = 0$

$\therefore$ إما $5x^2 = 0$ ومنها $\boxed{x = 0}$

أو $2x - 5 = 0$ ومنها $\boxed{x = \frac{5}{2}}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{0 , \frac{5}{2}\}$

3) $\because x^2 = 3x$ $\therefore x^2 - 3x = 0$

$\therefore x(x - 3) = 0$

$\therefore$ إما $\boxed{x = 0}$

أو $x - 3 = 0$ ومنها $\boxed{x = 3}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{0 , 3\}$

■ تفكير ناقد

عند حل المعادلة $x^2 = 3x$
هل يجوز قسمة طرفى المعادلة على المتغير x ؟

■ تقييم ذاتى (5)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1) $x^2 + 2x = 0$

2) $2x^2 - 3x = 0$

3) $15x^3 + 12x^2 = 0$

■ التحقق من صحة الحل

للتحقق من صحة حل المعادلة $3x^2 + 6x = 0$ ، عوض عن قيمة x بكل من 0 ، -2 فى المعادلة الأصلية كالتالى :

◂ عوض عن x بـ 0 :

$3(0)^2 + 6(0) \stackrel{?}{=} 0$

$0 + 0 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

أى أن 0 حلٌ للمعادلة.

◂ عوض عن x بـ -2 :

$3(-2)^2 + 6(-2) \stackrel{?}{=} 0$

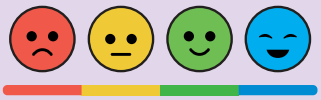
$12 + (-12) \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

أى أن -2 حلٌ للمعادلة.

◂ حاول بنفسك التحقق من صحة الحل فى كل من المعادلتين 2 ، 3 بالمثال المجاور.

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ما العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $12x^2-8x$ ؟

(أ) 2 (ب) 4

(جـ) $2x$ (د) $4x$

② أى مما يلى يمثل تحليلًا لكثيرة الحدود $16x^2-24x^3$ بإخراج ع . م . أ ؟

(أ) $8x(2x-3x^2)$ (ب) $4x^2(4-6x)$

(جـ) $8x^2(2-3x)$ (د) $8(2x^2-3x^3)$

③ $6a-8b=$ .....

(أ) $6(a-2b)$ (ب) $4(2a-4b)$

(جـ) $2(3a-4b)$ (د) $14(a-b)$

④ $x^2y-xy^2=$ .....

(أ) $xy(x-y)$ (ب) $x^2y(1-y)$

(جـ) $xy^2(x-1)$ (د) $xy(y-x)$

⑤ $x(a+b)+y(a+b)=$ .....

(أ) $(x-y)(a-b)$ (ب) $(x+y)(a+b)$

(جـ) $(x-y)(a+b)$ (د) $(x+y)(a-b)$

⑥ إذا كان $a-b=7$ ، $x+y=10$ فإن :

$x(a-b)-y(b-a)=$ .....

(أ) 3 (ب) 17

(جـ) 51 (د) 70

◂ اكتشف الخطأ :

⑦ قام كل من سامح وإسلام بحل المعادلة $4x^2=8x$ كما هو موضح أمامك :

أى منهما حله صحيح ؟ ناقش.

حل سامح :

$4x^2=8x$

$\frac{4x^2}{4x}=\frac{8x}{4x}$

$x=2$

حل إسلام :

$4x^2=8x$

$4x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0$

إما $4x=0$ ومنها $x=0$

أو $x-2=0$ ومنها $x=2$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑧ حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

① $12y+4$

② $4m-mn$

③ $15a-25b$

④ $18a+27ab$

⑤ $-7k-49m$

⑥ $9a^2b-6ab^2+3ab$

⑦ $2a-4ab-6abc$

⑧ $x^2y^3+x^2y^2+x^3y^2$

⑨ $-4x^5+6x^4-8x^3+12x^2$

⑩ $16a^6-4a^4+12a^2$

⑨ حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

① $a(b+5)+2(b+5)$ ② $(4x-1)-y(4x-1)$ ③ $(2x-3)^2-2(2x-3)$

④ $(7x-5)^2-7x+5$ ⑤ $(x+2)^3-2(x+2)^2$ ⑥ $3x+6-(x+2)^2$

⑩ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

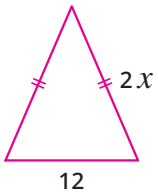
① $x^2-x=0$ ② $4x^2+8x=0$ ③ $5x-x^2=0$

④ $x^2=5x$ ⑤ $2x^2-3x=0$ ⑥ $12x^2-4x=0$

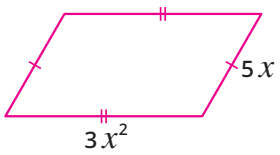
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑪ **هندسة :** أوجد محيط كل من الشكلين المجاورين فى صورة عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

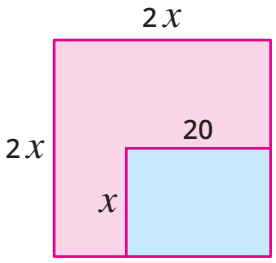
①



②



⑫ **هندسة :** مهندس لديه قطعة أرض على شكل مربع طول ضلعه $(2x)$ م ، أراد أن يبنى عليها بيتًا على شكل مستطيل بُعداه x م , 20 م، وأن يستخدم المساحة المتبقية كحديقة كما بالشكل ، أوجد مساحة الحديقة واكتب الناتج كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.



يجب الحفاظ على البيئة المائية من التلوث لحماية الأحياء المائية

⑬ **الأحياء المائية :** يقفز الدولفين لأعلى بحيث يكون ارتفاعه بالمتر بعد زمن (t) ثانية مساويًا $(32t-16t^2)$. اكتب ارتفاع الدولفين كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر ، ثم أوجد ارتفاعه عند $t=1$

تعمل الصناعات الصغيرة والمتوسطة على خلق فرص العمل، ودعم الاقتصاد المحلى

⑭ **صناعة :** يُنتج مصنع أدوات مدرسية نوعين من المنتجات ، كراسات وأقلام، تكلفة الكراسة الواحدة $(6x^2y)$ جنيهًا، وتكلفة القلم الواحد $(9xy^2)$ جنيهًا، إذا أنتج المصنع 300 من الكراسات ، وأنتج 200 من الأقلام. اكتب التعبير الرياضى الذى يمثل إجمالى تكلفة التصنيع كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

تفكير إبداعى

⑮ إذا كان : $14x+10=a(7x+b)$ ، $6x+9=c(2x+d)$

أوجد القيمة العددية للمقدار d^c+b^a

◂ **مسألة مفتوحة**

⑯ اكتب ثلاثية حدود بحيث يكون العامل المشترك الأكبر لحدودها هو $3x^2$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للتحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر؟
ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس

2 - 2

تحليل ثلاثية الحدود
(Factorizing Trinomial)

■ **نواتج التعلم**

- تحلل ثلاثية الحدود على الصورة : $x^2 + bx + c$
- تحلل ثلاثية الحدود على الصورة : $ax^2 + bx + c$ (حيث $a \neq \pm 1$)
- تستخدم التحليل فى حل معادلات تربيعية.
- تستخدم التحليل فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفـردات**

- تحليل Factorizing
- ثلاثية الحدود Trinomial
- معادلة تربيعية Quadratic equation

استعد !

مع التطور الهائل فى صناعة الهواتف الذكية، تتنافس الشركات العالمية على تصميم شاشات بأبعاد دقيقة تحقق راحة الاستخدام وجودة العرض.

خلال مرحلة تصميم هاتف ذكى جديد، قرر المصممون أن تكون شاشة الهاتف مستطيلة الشكل، بحيث يكون طول الشاشة أكبر من عرضها بمقدار 7 سم، وأن تكون المساحة الكلية للشاشة 120 سم^2.

فما طول وعرض الشاشة المقترحة ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحليل ثلاثية الحدود ، ومن ثم استخدام التحليل فى حل المعادلات التربيعية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

يخطط عمر لإنشاء حمام سباحة مستطيل الشكل بحيث تكون مساحة أرضيته 40 م^2 ، ومحيطها 26 م.

هل يمكنك معرفة بعدى أرضية هذا الحمام ؟

◄ فكر فى إيجاد عددين حاصل ضربهما 40 ومجموعهما 13 (نصف محيط أرضية الحمام).

تعلم !

أولاً تحليل ثلاثية الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$

عند ضرب ثنائيتى الحدود $(x + 3)$ ، $(x + 2)$ نجد أن الناتج ثلاثية حدود كالتالى :

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

لاحظ أن :

- الحد الأخير 6 فى ثلاثية الحدود هو حاصل ضرب الحدين الأخيرين فى ثنائيتى الحدود 2 ، 3
- معامل الحد الأوسط 5 فى ثلاثية الحدود هو ناتج جمع الحدين الأخيرين فى ثنائيتى الحدود 2 ، 3 .

عملية تحليل ثلاثية الحدود هى عملية عكسية لعملية الضرب.

فمثلًا :

لتحليل ثلاثية الحدود x^2+5x+6

ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما 6 ومجموعهما 5 ، تجد أن العددين هما 2 و 3

حيث إن : $2\times3=6$ ، $2+3=5$

أى أن : $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

كيفية تحليل ثلاثية الحدود على الصورة x^2+bx+c

لتحليل ثلاثية الحدود على الصورة : x^2+bx+c حيث b , c عددان صحيحان

أوجد عددين صحيحين ℓ , m بحيث يكون : $b=\ell+m$ ، $c=\ell m$

ثم اكتب : $x^2+bx+c=(x+\ell)(x+m)$

مثال 1

حلل كلًا مما يأتى :

1. $x^2+7x+12$
2. x^2-6x+8
3. x^2+x-12
4. $x^2-7x-18$

1) لتحليل ثلاثية الحدود : $x^2+7x+12$

ابحث عن عددين صحيحين

حاصل ضربهما (+12) ومجموعهما (+7)

∴ العددان موجبان

حواصل الضرب الممكنة		المجموع المناظر
(1) (12)	13	✗
(2) (6)	8	✗
(3) (4)	7	✓

∴ العددان هما (+3) ، (+4)

∴ $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$

2) لتحليل ثلاثية الحدود : x^2-6x+8

ابحث عن عددين صحيحين

حاصل ضربهما (+8) ومجموعهما (−6)

∴ العددان سالبان

حواصل الضرب الممكنة		المجموع المناظر
(−1) (−8)	−9	✗
(−2) (−4)	−6	✓

∴ العددان هما (−4) ، (−2)

∴ $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

3) لتحليل ثلاثية الحدود : x^2+x-12

ابحث عن عددين صحيحين

حاصل ضربهما (−12) ومجموعهما (+1)

∴ العددان مختلفان فى الإشارة

وأكبرهما عدديًا إشارته موجبة

حواصل الضرب الممكنة		المجموع المناظر
(−1) (12)	+11	✗
(−2) (6)	+4	✗
(−3) (4)	+1	✓

∴ العددان هما (−3) ، (+4)

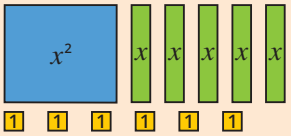
∴ $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$

■ نمذجة

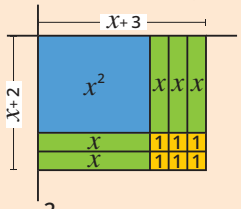
يمكنك استخدام نماذج البطاقات لتحليل

x^2+5x+6

◂ استخدم البطاقات التالية :



◂ كون مستطيلًا مستخدمًا جميع البطاقات كالتالى :



$\therefore x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

■ تقييم ذاتى (1)

حلل كلًا مما يأتى :

1. x^2+5x+4
2. $x^2-11x+24$
3. $x^2-3x-28$
4. x^2+x-42

■ لاحظ أن

عند تحليل ثلاثية الحدود x^2+bx+c على الصورة $(x+\ell)(x+m)$ فإن :

1. إذا كانت c موجبة فإن ℓ , m لهما نفس إشارة b.
2. إذا كانت c سالبة فإن ℓ , m مختلفان فى الإشارة وأكبرهما عدديًا له نفس إشارة b.

④ لتحليل ثلاثية الحدود : $x^2-7x-18$

ابحث عن عددين صحيحين

حاصل ضربهما (-18) ومجموعهما (-7)

∴ العددان مختلفـان فى الإشـارة وأكبرهما عدديًا إشارته سالبة.

حواصل الضرب الممكنة	المجموع المناظر	
(1) (−18)	−17	✗
(2) (−9)	−7	✓
(3) (−6)	−3	✗

∴ العددان هما $+2$ ، -9

∴ $x^2-7x-18=(x-9)(x+2)$

مثال 2

حل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

1. $3x^2+6x-72$
2. $12x-3x^3-9x^2$
3. $x^2-5xy+6y^2$
4. $y(y+1)-30$
5. $x^6-10b^4-3x^3b^2$

① $3x^2+6x-72=3(x^2+2x-24)=3(x+6)(x-4)$

② $12x-3x^3-9x^2=-3x^3-9x^2+12x$ «ترتيب الحدود تنازليًا حسب أسس x»

$=-3x(x^2+3x-4)$ «إخراج ع . م . أ»

$=-3x(x-1)(x+4)$ «تحليل ثلاثية الحدود»

③ $x^2-5xy+6y^2=(x-3y)(x-2y)$

④ $y(y+1)-30=y^2+y-30$ «فك الأقواس»

$=(y+6)(y-5)$

⑤ $x^6-10b^4-3x^3b^2=x^6-3x^3b^2-10b^4$ «ترتيب الحدود تنازليًا حسب أسس x»

$=(x^3+2b^2)(x^3-5b^2)$

ثانياً تحليل ثلاثية الحدود على الصورة ax^2+bx+c حيث $(a\neq\pm1)$

مثال 3

حل كلًا مما يأتى :

1. $2x^2+7x+6$
2. $4x^2+x-3$
3. $2x^4+9x^2+10$

① حل $2x^2$ إلى x ، $2x$ ← ($2x$) (x)

حل 6 إلى $+6$ ، $+1$ أو $+3$ ، $+2$

مع استبعاد العوامل السالبة لأن معامل x إشارته موجبة.

تقييم ذاتى ②

حل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

1. $4x^2-8x-60$
2. $-x^2-13x-36$

لاحظ أن

التحليـل التام هـو كتابة كثيرة الحدود فى صورة حاصل ضرب كثيرات حدود أولية.

تقييم ذاتى ③

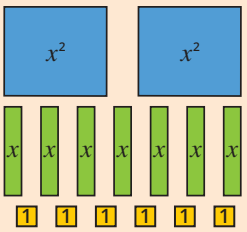
حل كلًا مما يأتى :

1. $3x^2-11x+6$
2. $6x^2+7x+2$
3. $2x^2+x-10$
4. $5x^2-28x-12$

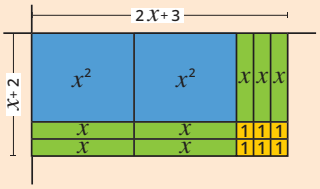
■ **نمذجة**

يمكن استخدام نماذج البطاقات لتحليل $2x^2+7x+6$

◂ استخدم البطاقات التالية :



◂ كون مستطيلًا مستخدمًا جميع البطاقات كالتالى :



$\therefore 2x^2+7x+6$

$=(2x+3)(x+2)$

■ **فكر مع زملائك**

هل يمكن تحليل

$3x^4+11x+6$ ؟

■ **تقييم ذاتى** ④

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1. $x^2-8x+15=0$
2. $x^2-3x=10$
3. $-x^2+24=5x$
4. $3x^2+11x-20=0$

• حدد الحد الأوسط المناظر كما يلى :

$\therefore 2x^2+7x+6=(x+2)(2x+3)$

ويمكن استخدام طريقة التقاطع (المقص) لإجراء المحاولات السابقة كما يلى :

التحليل الممكن	الحد الأوسط المناظر	
$(x+1)(2x+6)$	$6x+2x=8x$	✗
$(x+6)(2x+1)$	$x+12x=13x$	✗
$(x+2)(2x+3)$	$3x+4x=\boxed{7x}$	✓
$(x+3)(2x+2)$	$2x+6x=8x$	✗

$(2x+2)$ / $(x+3)$	$(2x+3)$ / $(x+2)$	$(2x+1)$ / $(x+6)$	$(2x+6)$ / $(x+1)$
$6x+2x=8x$	$4x+3x=7x$	$12x+x=13x$	$2x+6x=8x$
$\neq 7x$	(الحد الأوسط)	$\neq 7x$	$\neq 7x$
(✗)	(✓)	(✗)	(✗)

$\therefore \boxed{2x^2+7x+6=(2x+3)(x+2)}$

② حلل $4x^2$ إلى $\boxed{2x, 2x}$ ⟵ $(2x \quad)(2x \quad)$

أو $\boxed{x, 4x}$ ⟵ $(x \quad)(4x \quad)$

حلل -3 إلى $\boxed{+3, -1}$ أو $\boxed{-3, +1}$

حدد الحد الأوسط المناظر كما يلى :

التحليل الممكن	الحد الأوسط المناظر	
$(2x-1)(2x+3)$	$4x$	✗
$(2x+1)(2x-3)$	$-4x$	✗
$(x-1)(4x+3)$	$-x$	✗
$(x+1)(4x-3)$	$\boxed{x}$	✓
$(x-3)(4x+1)$	$-11x$	✗
$(x+3)(4x-1)$	$11x$	✗

$\therefore \boxed{4x^2+x-3=(x+1)(4x-3)}$

③ $2x^4+9x^2+10=(2x^2+5)(x^2+2)$

حل المعادلات باستخدام التحليل

مثال 4

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

① $x^2+5x-36=0$ ② $x^2+30=-13x$ ③ $6x^2-13x+6=0$

① $\therefore (x-4)(x+9)=0$ $\because x^2+5x-36=0$

$\therefore$ إما $x-4=0$ ومنها $\boxed{x=4}$

أو $x+9=0$ ومنها $\boxed{x=-9}$

$\therefore$ مجموعة الحل $=\{4, -9\}$

■ **التحقق من صحة الحل**

يمكنك التحقق من صحة الحل بالتعويض بكل قيمة لـ x فى المعادلة الأصلية للتحقق من تساوى طرفى المعادلة.

② $\therefore x^2 + 13x + 30 = 0$ $\quad \because x^2 + 30 = -13x$

$\therefore (x + 3)(x + 10) = 0$

$\therefore$ إما $x + 3 = 0$ ومنها $\boxed{x = -3}$

أو $x + 10 = 0$ ومنها $\boxed{x = -10}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-3, -10\}$

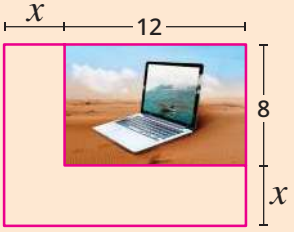
③ $\therefore (2x - 3)(3x - 2) = 0$ $\quad \because 6x^2 - 13x + 6 = 0$

$\therefore$ إما $2x - 3 = 0$ ومنها $\boxed{x = \frac{3}{2}}$

أو $3x - 2 = 0$ ومنها $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\}$

■ **تقييم ذاتى ⑤**



طلب أحد الرعاة لحفل المدرسة السنوى زيادة طول وعرض إحدى الصور فى إعلانهم بنفس المقدار من أجل مضاعفة مساحة الصورة. إذا كانت الصورة فى الأصل بعرض 8 سم وطول 12 سم ، فما هى الأبعاد الجديدة للصورة المكبرة ؟

مثال 5

لدى سارة حديقة مستطيلة الشكل، مساحتها $(3x^2 + 4x - 7)$ م^2.
استخدم التحليل لإيجاد بُعدين ممكنين للحديقة، وإذا أرادت سارة توسيع الحديقة بحيث يكون كل بُعد أكبر مما كان عليه بمقدار 3 م ،
فما هى مساحة الحديقة بعد توسيعها ؟

$\because$ مساحة الحديقة $= (3x^2 + 4x - 7)$ م^2

$= (3x + 7)(x - 1)$

$\therefore$ عرض الحديقة $= (x - 1)$ م ، طول الحديقة $= (3x + 7)$ م

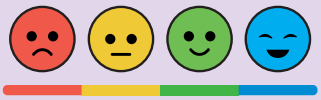
وبعد توسيع الحديقة يكون عرضها $= (x - 1 + 3) = (x + 2)$ م

وطولها $= (3x + 7 + 3) = (3x + 10)$ م

$\therefore$ مساحة الحديقة بعد توسيعها $= (3x + 10)(x + 2)$

$= (3x^2 + 16x + 20)$ م^2

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أى مما يلى يمثل تحليل كثيرة الحدود x^2+x-20 ؟

(أ) $(x-4)(x+5)$ (ب) $(x+4)(x+5)$ (جـ) $(x-4)(x-5)$ (د) $(x+4)(x-5)$

(2) أى المخططات الآتية يمثل تحليل كثيرة الحدود : $9x^2-9x-4$ ؟

(أ) $(3x-4)$ و $(3x+1)$ (ب) $(3x-2)$ و $(3x+2)$ (جـ) $(9x-1)$ و $(x+4)$ (د) $(9x-4)$ و $(x+1)$

(3) إذا كان : $(x+5)(x-3)=0$ ، فأى مما يلى صحيح ؟

(أ) $x=3$ أو $x=5$ (ب) $x=3$ أو $x=-5$

(جـ) $x=-3$ أو $x=5$ (د) $x=-3$ أو $x=-5$

(4) إذا كان : $(x+3)(x+b)=x^2+ax+15$ ، فما قيمة ab ؟

(أ) 5 (ب) 8 (جـ) 13 (د) 40

(5) إذا كان : $(x-a)(x-b)=x^2-11x+28$ ، فما قيمة $a+b$ ؟

(أ) -16 (ب) -11 (جـ) 11 (د) 16

(6) إذا كان : $(x-5)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(2x^2-7x-15)$ ، فما العامل الآخر ؟

(أ) $x+3$ (ب) $2x-3$ (جـ) $2x+3$ (د) $x-3$

(7) إذا كان : $2x+3y=5$, $3x-2y=6$ ، فما القيمة العددية لكثيرة الحدود $(6x^2+5xy-6y^2)$ ؟

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 30

◂ اكتشف الخطأ :

(8) **اكتشف الخطأ فى كل مما يلى وقم بتصويبه.**

① $3x^2+7x-6=0$

$(3x+2)(x-3)=0$

∴ إما $3x+2=0$ ومنها $x=\frac{-2}{3}$

أو $x-3=0$ ومنها $x=3$

② $2x^2-5x-3=9$

$(2x+1)(x-3)=0$

∴ إما $2x+1=0$ ومنها $x=\frac{-1}{2}$

أو $x-3=0$ ومنها $x=3$

③ $x^2+5x=24$

$x(x+5)=24$

∴ إما $x=24$

أو $x+5=24$ ومنها $x=19$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(9) حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^2-7x+12$ ② $y^2+42+13y$ ③ $-x^2+3x+40$

④ $14x-32+x^2$ ⑤ $3x^2+6x-45$ ⑥ $5n^2-20n-105$

⑦ $3a^2-6a-9$ ⑧ $2x^2-7x+6$ ⑨ $3x^2+14x+15$

⑩ $6x^2+7xy-3y^2$ ⑪ $5x^2-4y(7x+3y)$ ⑫ $(x+2)(x-5)-8$

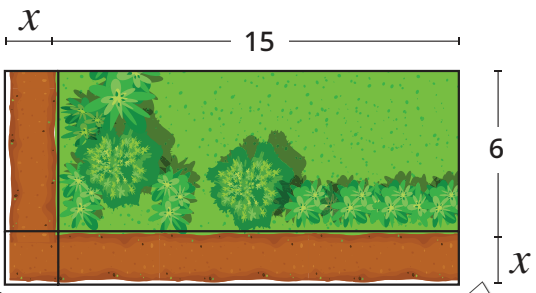
⑬ $6x^3-60x-2x^2$ ⑭ $18-21x^2-9x^4$ ⑮ $42x^2y^2-30x^2y^4+12x^2y^3$

(10) حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

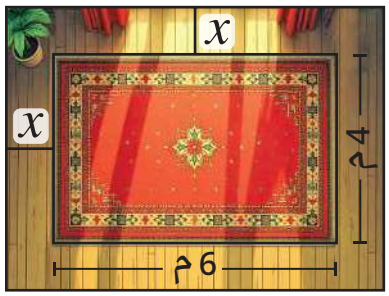
① $m^2-14m+45=0$ ② $x^2-21=4x$ ③ $3y^2+17y+10=0$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(11) زراعة : يوسف لديه حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 6 م ، 15 م، ويريد زيادة مساحتها بمقدار 46 م^2. فإذا زاد طول وعرض الحديقة بنفس المقدار، فما هى الأبعاد الجديدة للحديقة ؟



زراعة الحدائق تضيف لمسة جمالية للمدن، وتلعب دورًا كبيرًا فى تنقية الهواء.



وضع السجاد فى المكان المناسب بالألوان المناسبة يعكس ذوقًا رفيعًا ووعيًا بأهمية التناغم البصرى.

(12) ديكور : غرفة مستطيلة الشكل مساحة أرضيتها 48 م^2. أرادت فاطمة تغطية أرضيتها بسجادة طولها 6 م وعرضها 4 م مع ترك شريط عرضه x بين السجادة والحائط من جميع الجهات. أوجد عرض هذا الشريط.

(13) هندسة : مثلث مساحته 35 سم^2، فإذا كان طول قاعدته يزيد 9 سم عن الارتفاع المناظر لها، فما ارتفاع المثلث ؟

تفكير إبداعى

(14) أوجد قيم b الصحيحة الموجبة التى تجعل كلًا مما يأتى قابلًا للتحليل :

① $x^2+bx+12$ ② $x^2+bx-14$ ③ x^2+8x+b

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لتحليل ثلاثية الحدود ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس
2 - 3

تحليل الحالات الخاصة
(Factorizing Special Cases)

■ **نواتج التعلم**

- تحلل ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملًا.
- تحلل الفرق بين مربعين.
- تحلل الفرق بين مكعبين.
- تحلل مجموع مكعبين.
- تستخدم التحليل لتسهيل إجراء العمليات الحسابية.
- تستخدم التحليل لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفردات**

- المربع الكامل
Perfect square
- الفرق بين مربعين
Difference of two squares
- الفرق بين مكعبين
Difference of two cubes
- مجموع مكعبين
Sum of two cubes

استعد!

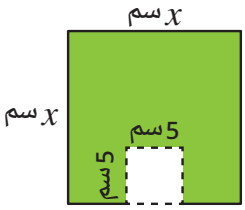
أهرامات الجيـزة

تُعـد أهرامـات الجيـزة بمصر مـن أعظم عجائـب العالم القديم، قاعدة الهرم الأكبر مربعـة الشـكل وبفـرض أن مسـاحتها (x^2+6x+9) م^2، فهل يمكنك إيجاد محيطها بدلالة x؟

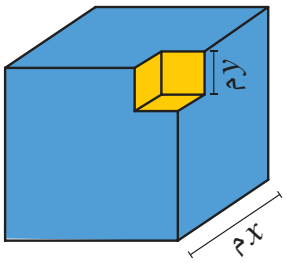
فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحليل المربع الكامل وبعض الحالات الخاصة الأخرى، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش!

- إذا كان لديك مربع طول ضلعه x سم، وقررت أن تقطع منه مربعًا أصغر طول ضلعه 5 سم كما بالشكل المقابل، فهل يمكنك التعبير عن مساحة الجزء المتبقى كحاصل ضرب عاملين؟ ناقش.



- إذا كان لديـك مكعـب طـول حرفـه x م، وقررت أن تقطـع منه مكعبًا أصغر طول حرفه y م كما بالشـكل المقابل، فهـل يمكنك التعبير عن حجم الجزء المتبقى كحاصل ضرب عاملين؟ ناقش.



تعلم!

أولاً تحليل ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملًا

إذا كانت ثلاثية الحدود مرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا حسـب أسـس أحد رموزها فإنها تمثل مربعًا كاملًا إذا كان :

- الحد الأول مربع كامل.
- الحد الثالث مربع كامل.
- الحد الأوسط يساوى ($\pm 2 \times$ الحد الأول $\times$ الحد الثالث).

• تحليل ثلاثية الحدود التى تمثل مربعًا كاملًا هو كتابتها على صورة حاصل ضرب عاملين متساويين (أى مربع أحد عامليها المتساويين).

أى أن :

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

مثال 1

بين أيًا من كثيرات الحدود الآتية تمثل مربعًا كاملًا وأيها ليست مربعًا كاملًا، ثم حلل كثيرة الحدود التى على صورة مربع كامل :

1) $4x^2+20x+25$
2) x^2-6x-9
3) $x^2+9x+81$
4) $25x^4-30x^2y+9y^2$

1) $2(2x)(5)=20x$ «الحد الأوسط»
$25=(5)^2$ «مربع كامل»
$4x^2=(2x)^2$ «مربع كامل»
∵

∴ كثيرة الحدود $(4x^2+20x+25)$ تمثل مربعًا كاملًا ويكون :

$$4x^2+20x+25=(\sqrt{4x^2}+\sqrt{25})^2=(2x+5)^2$$

نفس إشارة الحد الأوسط

2) كثيرة الحدود (x^2-6x-9) ليست مربعًا كاملًا لأن الحد الثالث (-9) سالب أى ليس مربعًا كاملًا.

3) $2(x)(9)=18x$ «لا يساوى الحد الأوسط»
$81=(9)^2$ «مربع كامل»
$x^2=(x)^2$ «مربع كامل»
∵

∴ كثيرة الحدود $(x^2+9x+81)$ ليست مربعًا كاملًا.

لأن الحد الأوسط لا يساوى $(\pm 2\times\sqrt{\text{الحد الأول}}\times\sqrt{\text{الحد الثالث}})$

4) $-2(5x^2)(3y)=-30x^2y$ «الحد الأوسط»
$9y^2=(3y)^2$ «مربع كامل»
$25x^4=(5x^2)^2$ «مربع كامل»
∵

∴ كثيرة الحدود $(25x^4-30x^2y+9y^2)$ تمثل مربعًا كاملًا ويكون :

$$25x^4-30x^2y+9y^2=(\sqrt{25x^4}-\sqrt{9y^2})^2=(5x^2-3y)^2$$

نفس إشارة الحد الأوسط

■ تقييم ذاتى ①

بين أيًا من كثيرات الحدود الآتية تمثل مربعًا كاملًا وأيها ليست مربعًا كاملًا، ثم حلل كثيرة الحدود التى على صورة مربع كامل :

1) $16b^2-8b+1$
2) $5x^2+20x+4$
3) $x^2+2xy-y^2$
4) $9x^4-12x^2y+4y^2$

مثال 2

أوجد قيمة a التى تجعل كلًا مما يأتى مربعًا كاملًا :

1) $x^2+14x+a$ 2) $x^2-ax+64$

✓ 1) لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$a=\frac{(14x)^2}{4(x^2)}=\frac{196x^2}{4x^2}=49$$

2) لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$-ax=\pm 2(\sqrt{x^2})(\sqrt{64})$$
$$=\pm 16x$$
$$\therefore a=\pm 16$$

■ لاحظ أن

1) الحد الأوسط يساوى
$\pm 2\sqrt{\text{الحد الأول}}\times\sqrt{\text{الحد الثالث}}$

2) الحد الأول يساوى
$\frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4\times(\text{الحد الثالث})}$

3) الحد الثالث يساوى
$\frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4\times(\text{الحد الأول})}$

ثانيًا تحليل الفرق بين مربعين

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

مثال 3

حلل كلًا مما يأتى :

1) x^2-9 2) $9x^4-16y^2$ 3) $1-100x^2y^2$

✓ 1) $x^2-9=(x-3)(x+3)$

2) $9x^4-16y^2=(3x^2-4y)(3x^2+4y)$

3) $1-100x^2y^2=(1-10xy)(1+10xy)$

ثالثًا تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مثال 4

حلل كلًا مما يأتى :

1) x^3-27 2) a^6-8b^3 3) $1+512x^3y^3$

✓ 1) $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$

2) $a^6-8b^3=(a^2-2b)(a^4+2a^2b+4b^2)$

3) $1+512x^3y^3=(1+8xy)(1-8xy+64x^2y^2)$

■ تقييم ذاتى ②

أوجد قيمة a التى تجعل كلًا مما يأتى مربعًا كاملًا :

1) $x^2-10x+a$

2) $4x^2+ax+49$

■ تقييم ذاتى ③

حلل كلًا مما يأتى :

1) x^2-1

2) $16x^2-9$

3) $25x^2-36y^2$

4) x^2y^2-4

■ فكر

هل يمكن تحليل مجموع مربعين (x^2+y^2) ؟

■ تقييم ذاتى ④

حلل كلًا مما يأتى :

1) x^3+1

2) m^3-343n^3

3) $8x^6-27y^3$

4) $27-a^3b^3$

مثال 5

حلل كلًا مما يأتى :

1) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{25}y^2$
2) $8y^3-\frac{1}{27}$
3) $a^3b^3+\frac{1}{216}$
4) $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}$

1) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{25}y^2=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y)(\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y)$

2) $8y^3-\frac{1}{27}=(2y-\frac{1}{3})(4y^2+\frac{2}{3}y+\frac{1}{9})$

3) $a^3b^3+\frac{1}{216}=(ab+\frac{1}{6})(a^2b^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{36})$

4) $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}=(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3})^2$

■ لاحظ أن

يمكن تحليل كثيرات حدود تحتوى على معاملات وثوابت نسبية إلى حاصل ضرب عوامل كل عامل منها عبارة عن كثيرة حدود تحتوى أيضًا على معاملات وثوابت نسبية.

■ تقييم ذاتى ⑤

حلل كلًا مما يأتى :

1) $y^2-\frac{1}{9}$
2) $27x^3-\frac{1}{64}$
3) $c^3+\frac{1}{8}$
4) $x^2+x+\frac{1}{4}$

مثال 6

حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

1) $5x^5-320x^2$
2) $16x^4-y^4$
3) $12x-9x^2-4$
4) $64-(a+b)^2$

1) $5x^5-320x^2=5x^2(x^3-64)$
$=5x^2(x-4)(x^2+4x+16)$

2) $16x^4-y^4=(4x^2-y^2)(4x^2+y^2)$
$=(2x-y)(2x+y)(4x^2+y^2)$

3) رتب أولًا كثيرة الحدود تنازليًا حسب أسس x كالتالى :
$-9x^2+12x-4=-(9x^2-12x+4)$
$=-(3x-2)^2$

4) $64-(a+b)^2=(8+(a+b))(8-(a+b))$
$=(8+a+b)(8-a-b)$

■ لاحظ أن

يتم أخذ العامل المشترك الأكبر أولاً ثم نحلل القوس الناتج إن أمكن.

■ لاحظ أن

كثيرة الحدود $(-9x^2+12x-4)$ ليست مربعًا كاملًا، أما كثيرة الحدود $(9x^2-12x+4)$ فهى مربع كامل.

■ تقييم ذاتى ⑥

حلل كلًا مما يأتى تحليلاً تامًا :

1) $8x^3-18x$
2) $75x^3y+60x^2y+12xy$
3) $\frac{1}{3}x^2-3$
4) $32x^3(3a+b)-50x(3a+b)$

مثال 7

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتى :

1 $(57)^2 + 2(57)(43) + (43)^2$ 2 $(99)^2 - 1$

1 $(57)^2 + 2(57)(43) + (43)^2 = (57+43)^2 = (100)^2 = 10000$

2 $(99)^2 - 1 = (99+1)(99-1) = 100 \times 98 = 9800$

■ **تقييم ذاتى 7**

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتى :

1 $(49)^2 - 2(49)(39) + (39)^2$

2 $(87)^2 - (13)^2$

مثال 8

إذا كان : $2x - 3y = 5$ ، $4x^2 - 9y^2 = 115$

أوجد القيمة العددية للمقدار : $2x + 3y$

$\because 4x^2 - 9y^2 = 115$ $\therefore (2x-3y)(2x+3y) = 115$

$\therefore 5(2x+3y) = 115$ $\therefore 2x + 3y = 23$

■ **تقييم ذاتى 8**

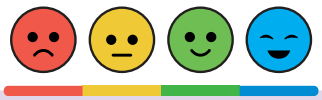
إذا كان :

$b - a = -3$ ، $a^2 - b^2 = 12$

أوجد القيمة العددية للمقدار :

$a + b$

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

1 إذا كان : $x^2 - b^2 \equiv (x-3)(x+3)$ فما قيمة b ؟

(أ) ± 1 (ب) ± 3

(جـ) ± 6 (د) ± 9

2 إذا كان : $ax^2 - b \equiv (3x-2)(3x+2)$ فما قيمة $a + b$ ؟

(أ) -13 (ب) 13

(جـ) -5 (د) 5

3 إذا كان : $ax^3 - 27 \equiv (2x-3)(4x^2 + bx + 9)$ فما قيمة ab ؟

(أ) 6 (ب) 12

(جـ) 24 (د) 48

4 إذا كانت كثيرة الحدود $(4x^2 + kx + 1)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k ؟

(أ) ± 1 (ب) ± 2

(جـ) ± 4 (د) ± 8

5 إذا كانت كثيرة الحدود $(kx^2 - 12x + 9)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k ؟

(أ) 4 (ب) ± 4

(جـ) 2 (د) ± 2

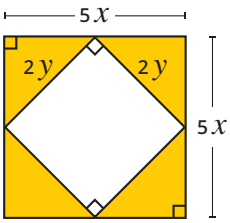
6 إذا كان : $x^2 - y^2 = -16$ ، $x - y = -2$

فما الوسط الحسابى للعددين x ، y ؟

(أ) 2 (ب) 4

(جـ) 8 (د) 16

⑦ أى العبارات الآتية تمثل مساحة المنطقة الملونة بالشكل المقابل ؟



(أ) $5x^2-2y^2$ (ب) $25x-4y$

(جـ) $(5x-2y)^2$ (د) $(5x-2y)(5x+2y)$

◂ **اكتشف الخطأ :**

⑧ قام كل من عمر وخالد بتحليل (x^3-8) كالتالى :

حل عمر :

$x^3-8=(x-2)(x^2-2x+4)$

حل خالد :

$x^3-8=(x-2)(x^2-4x+4)$

أى منهما كان حله صحيحًا ؟ قم بتصويب الخطأ إن وُجد.

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑨ **حلل كلًا مما يأتى :**

① $a^2+18a+81$	② $b^2-14b+49$	③ $9x^2+6x+1$
④ $25-9x^2$	⑤ $1-4a^2b^2$	⑥ k^2-36m^2
⑦ y^3-8	⑧ x^3+27	⑨ $64x^3-125y^3$

⑩ **حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :**

① $x^4+8x^3+16x^2$	② $2xy^4-16yx^4$	③ $121y-y^3$
④ $20x^3-45x$	⑤ $-27x^2+75$	⑥ x^4-81
⑦ $54x^3+16$	⑧ $ax^4-343axb^3$	⑨ $4x^4+4000x$

⑪ **حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :**

① $x^2-\frac{4}{81}$	② $125x^3+\frac{1}{8}$	③ $\frac{1}{5}x^2-5$
④ $(x+3)^3+64$	⑤ $(x+3)^2-16$	⑥ $6a^2(x+2y)-24b^2(x+2y)$
⑦ x^4-13x^2+36	⑧ x^6-7x^3-8	⑨ m^6-64n^3
⑩ $4x^{16}-16y^4$	⑪ x^6-64y^6	

⑫ **حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :**

① $4x^2+1=4x$	② $x^3=25x$	③ $x^2+6x=-9$

⑬ إذا كان : $a-b=3$ ، $ab=10$

أوجد القيمة العددية للمقدار : a^3-b^3

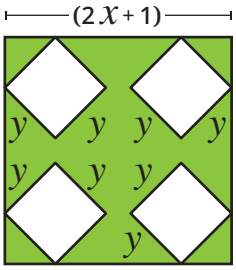
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

تخزين البيانات وتنظيمها بصورة صحيحة يسهِّل إدارتها ويعزز أمن المعلومات.

(14) **تكنولوجيا :** يتم تخزين البيانات فى وحدات تخزين على شكل وحدات مكعبة.
وحدة تخزين من الجيل الأول تسع $216x^3$ وحدة بيانات،
ووحدة تخزين من الجيل الثانى تسع $343y^3$ وحدة بيانات.
أوجد مجموع سعتيهما فى صورة حاصل ضرب عاملين.

يُسهم السفر فى تعزيز التفاهم والتسامح بين الثقافات المختلفة، ويعمق الوعى بقيمة التنوع الثقافى.

(15) **علوم :** تُوصف صيغة فرق الضغط P أعلى وأسفل جناح الطائرة بالصيغة $P = \frac{1}{2} d v^2 - \frac{1}{2} d u^2$
حيث d هى كثافة الهواء ، v هى سرعة الهواء المار أعلى الجناح ، u هى سرعة الهواء المار أسفله.
اكتب هذه الصيغة فى صورة حاصل ضرب كثيرات حدود أولية.



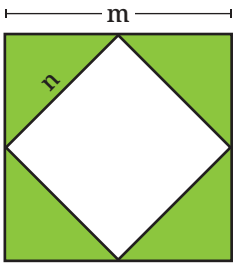
(16) **استثمار :** قامت شركة مقاولات بتقسيم قطعة أرض فضاء مربعة الشكل طول ضلعها $(2x + 1)$ م إلى 4 قطع مربعة طول ضلع كل منها y م كما بالشكل المقابل وترك باقى الأرض مساحة خضراء.
اكتب مساحة المنطقة الملونة كحاصل ضرب عدة عوامل.

(17) **هندسة :** إذا كان حجم متوازى مستطيلات هو $(x^4 - 625)$ وحدة مكعبة.
باستخدام التحليل كيف يمكنك إيجاد الأبعاد الممكنة له ؟

(18) **زراعة :** حديقة تتكون من قطعتى أرض متجاورتين، الكبرى على شكل مربع مساحته $(25x^2 + 10x + 1)$ م^2، والصغرى على شكل مربع مساحته $(4x^2 + 4x + 1)$ م^2، ويراد عمل سور حول الحديقة.
أوجد طول السور بدلالة x، ثم أوجد محيط الحديقة إذا كانت x تساوى 10 م.

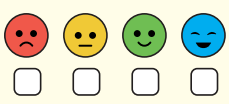
تفكير إبداعى

(19) فى الشكل المقابل :
مجموع محيطى المربعين يساوى 76 سم،
ومساحة المنطقة الملونة تساوى 57 سم^2.
كم يساوى $(m - n)$ ؟



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لتحليل الحالات الخاصة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
2 - 4

التحليل بالتقسيم
(Factorizing by Grouping)

■ **نواتج التعلم**

- تحلل كثيرة حدود عن طريق التقسيم.
- تعرف إكمال المربع.
- تستخدم إكمال المربع فى التحليل، وحل المعادلات.
- تستخدم التحليل بالتقسيم فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- التحليل بالتقسيم
  Factorizing by grouping
- إكمال المربع
  Completing the square

استعد !

جامعة القاهرة

تُعد المكتبة المركزية فى جامعة القاهرة من أهم المنشآت التعليمية والثقافية داخل الجامعة، وهى واحدة من أكبر المكتبات الجامعية فى العالم العربى.

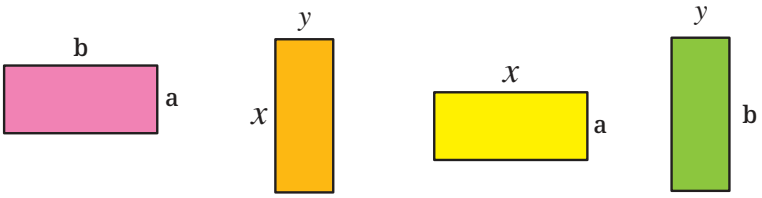
وهى تستوعب أكثر من ألف قارئ فى نفس الوقت، فإذا كانت مساحة الأرض المستطيلة المقامة عليها هى $(3x^3-6x^2+4x-8)$ م^2.

فكيف يمكن تحديد أبعاد ممكنة لهذه الأرض ؟

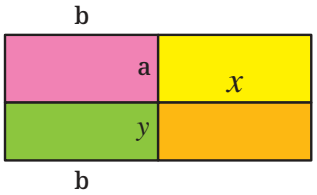
فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية التحليل بالتقسيم؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

فيما يلى أربعة مستطيلات أبعادهم كالتالى :



تم ترتيب هذه المستطيلات الأربعة لتكوِّن مستطيلًا كبيرًا كما بالشكل.



◂ ما هى مساحة المستطيل الكبير ؟

إجابة باسم :
مساحة المستطيل تساوى
$a\,b + x\,y + a\,x + b\,y$

إجابة مريم :
مساحة المستطيل تساوى
$(b + x)(a + y)$

من منهم على صواب ؟ ناقش، وماذا تستنتج؟

تعلم !

التحليل بالتقسيم

يمكن تحليل كثيرة الحدود المكونة من أربعة حدود باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى

قسِّم كثيرة الحدود إلى ثنائيتى حدود، بحيث تستطيع تحليل كل ثنائية حدود، ثم أَخرِج ثنائية الحدود المكررة كعامل مشترك.

■ تقييم ذاتى ①

حلل كلًا مما يأتى تحليلاً تاماً :

1. $x^2+4x+bx+4b$
2. $xy+12-3x-4y$
3. $2x^2y^2+24xy$
$-6xy^2-8x^2y$
4. $x^3+6x^2-4x-24$

مثال 1

حلل كلًا مما يأتى تحليلاً تاماً :

1. $ax+by+ay+bx$
2. $3x^2-3y+xy-9x$
3. $3x^3+2x^2-3x-2$
4. x^2-5x-y^2+5y
5. $2x^3y-6x^2y-18xy+54y$

✓

① $ax+by+ay+bx$
$=(ax+ay)+(by+bx)$
$=a(x+y)+b(y+x)$
$=(x+y)(a+b)$

■ حل آخر

$ax+by+ay+bx$
$=(ax+bx)+(by+ay)$
$=x(a+b)+y(b+a)$
$=(a+b)(x+y)$

② $3x^2-3y+xy-9x$
$=(3x^2-9x)+(xy-3y)$
$=3x(x-3)+y(x-3)$
$=(x-3)(3x+y)$

■ لاحظ أن

فى رقم ② إذا تم التقسيم كالتالى :
$3x^2-3y+xy-9x$
$=(3x^2-3y)+(xy-9x)$
$=3(x^2-y)+x(y-9)$
لا يوجد عامل مشترك
ولذلك يفشل هذا التقسيم ونحاول التقسيم بترتيب آخر.

③ $3x^3+2x^2-3x-2$
$=(3x^3+2x^2)+(-3x-2)$
$=x^2(3x+2)-(3x+2)$
$=(3x+2)(x^2-1)$
$=(3x+2)(x-1)(x+1)$

④ $x^2-5x-y^2+5y=(x^2-y^2)+(5y-5x)$
$=(x-y)(x+y)+5(y-x)$
$=(x-y)(x+y)-5(x-y)$
$=(x-y)(x+y-5)$

■ لاحظ أن

$y-x=-(x-y)$

⑤ $2x^3y-6x^2y-18xy+54y=2y(x^3-3x^2-9x+27)$
$=2y[(x^3-3x^2)+(-9x+27)]$
$=2y[x^2(x-3)-9(x-3)]$
$=2y(x-3)(x^2-9)$
$=2y(x-3)(x-3)(x+3)$
$=2y(x-3)^2(x+3)$

ملاحظة

يمكن تحليل ثلاثية الحدود التى على الصورة : $a x^2 + b x + c$ ، حيث $(a \neq 1)$ باستخدام التحليل بالتقسيم كما يلى :

1. أوجد عاملين حاصل ضربهما (ac) ومجموعهما (b).
2. أعِد كتابة $(b x)$ فى صورة ناتج جمع هذين العاملين.
3. استخدم التحليل بالتقسيم.

مثال 2

حلل $3 x^2 + 8 x + 4$ باستخدام التحليل بالتقسيم.

$\because a = 3 , b = 8 , c = 4$

أوجد عددين حاصل ضربهما (a c) 12 ومجموعهما (b) 8 $\therefore$ العددان هما 2 ، 6

أعِد كتابة $8 x$ فى صورة جمع $(6 x + 2 x)$ ثم استخدم التحليل بالتقسيم كما يلى :

$$3 x^2 + 8 x + 4 = 3 x^2 + 6 x + 2 x + 4 = (3 x^2 + 6 x) + (2 x + 4)$$
$$= 3 x (x + 2) + 2 (x + 2)$$
$$= (x + 2) (3 x + 2)$$

الطريقة الثانية

قسِّم كثيرة الحدود إلى ثلاثية حدود تمثل مربعًا كاملًا والحد الرابع يجب أيضًا أن يكون مربعًا كاملًا، بحيث يتم تحليل كثيرة الحدود الأصلية كفرق بين مربعين.

مثال 3

حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

1. $x^2 + 16 y^2 - 8 x y - 49$
2. $4 m^2 - n^2 + 10 n k - 25 k^2$

(1)

$$x^2 + 16 y^2 - 8 x y - 49 = (x^2 - 8 x y + 16 y^2) - 49$$
$$= (x - 4 y)^2 - (7)^2$$
$$= (x - 4 y - 7) (x - 4 y + 7)$$

(2)

$$4 m^2 - n^2 + 10 n k - 25 k^2 = 4 m^2 - (n^2 - 10 n k + 25 k^2)$$
$$= 4 m^2 - (n - 5 k)^2$$
$$= [2 m - (n - 5 k)] [2 m + (n - 5 k)]$$
$$= (2 m - n + 5 k) (2 m + n - 5 k)$$

■ تقييم ذاتى ②

استخدم التحليل بالتقسيم لتحليل كل من ثلاثيتى الحدود الآتيتين :

1. $2 x^2 - x - 28$
2. $6 x^2 + 19 x + 15$

■ تقييم ذاتى ③

حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

1. $x^2 - 12 x y + 36 y^2 - 4$
2. $x^2 + y^2 - 64 + 2 x y$

■ فكر

عند تحليل كثيرتى الحدود الآتيتين بالتقسيم :

1. $x^2 + 4 x - y^2 + 4$
2. $x^2 + 4 x - y^2 + 4 y$

ناقش طريقة تقسيم كل منهما.

إكمال المربع

إكمال المربع هو عملية إضافة حد إلى ثنائية حدود لتصبح ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

يمكن أن يتم إكمال المربع بإحدى الطريقتين الآتيتين :

1 إما إضافة (الحد الأوسط) $= (\pm 2\sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}})$

فمثلًا : $(x^2 + 49)$ يُضاف إليها $\pm 2\sqrt{x^2}\sqrt{49} = \pm 14x$

فيكون $(x^2 \pm 14x + 49)$ مربعًا كاملًا أى يكتب على الصورة $(x \pm 7)^2$

2 وإما إضافة (الحد الثالث) $= \frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{\text{الحد الأول} \times 4}$

فمثلًا : $(x^2 + 10x)$ يُضاف إليها $\frac{(10x)^2}{4x^2} = 25$

فيكون $(x^2 + 10x + 25)$ مربعًا كاملًا أى يكتب على الصورة $(x + 5)^2$

والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال 4

حلل كلًا مما يأتى :

1 $81x^4 + 4$ 2 $x^4 + 15x^2y^2 + 64y^4$

1

$81x^4 + 4 = 81x^4 + 4 + 36x^2 - 36x^2$

« إضافة وطرح $36x^2 = 2\sqrt{81x^4}\sqrt{4}$ »

$= (81x^4 + 36x^2 + 4) - (36x^2)$

$= (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2$

$= (9x^2 + 2 - 6x)(9x^2 + 2 + 6x)$

$= (9x^2 - 6x + 2)(9x^2 + 6x + 2)$

2

$x^4 + 15x^2y^2 + 64y^4 = x^4 + 15x^2y^2 + 64y^4 + 16x^2y^2 - 16x^2y^2$

« إضافة وطرح $16x^2y^2 = 2\sqrt{x^4}\sqrt{64y^4}$ »

$= (x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4) + 15x^2y^2 - 16x^2y^2$

$= (x^2 + 8y^2)^2 - x^2y^2$

$= (x^2 + 8y^2 - xy)(x^2 + 8y^2 + xy)$

■ **تقييم ذاتى** ④

حلل كلًا مما يأتى :

1 $x^4 + 64$

2 $4x^4 + 11x^2 + 9$

■ **لاحظ أن**

لتحليل كثيرات الحدود التى تشتمل على حدين على الأقل كل منهما مربع كامل، وأسس متغيراتها تكون 4 أو مضاعفاتها، نستخدم طريقة إكمال المربع وذلك بإضافة وطرح (ضعف حاصل ضرب جذرى الحدين المربعين) حتى لا تؤثر على قيمة كثيرة الحدود، ثم يتم التحليل بالتقسيم.

مثال 5

أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2-8x+3=0$ فى R

$\because x^2-8x+3=0$

$\therefore x^2-8x=-3$

بإضافة $\frac{(-8x)^2}{4x^2}=16$ إلى طرفى المعادلة

$\therefore x^2-8x+16=-3+16$

$\therefore (x-4)^2=13 \qquad \therefore x-4=\pm\sqrt{13}$

$\therefore x=4\pm\sqrt{13}$

$\therefore$ مجموعة الحل $=\{4-\sqrt{13}\ ,\ 4+\sqrt{13}\}$

■ لاحظ أن

لا نستطيع حل هذا المثال باستخدام تحليل ثلاثية الحدود، ولكن يمكن حله باستخدام إكمال المربع.

■ تقييم ذاتى ⑤

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$x^2-2x-4=0$ فى R

مثال 6

إذا كان $2x-y=8$ ، $x^2+3y=31$ ،

فما القيمة العددية للمقدار : $2x^3-x^2y+6xy-3y^2$ ؟

$2x^3-x^2y+6xy-3y^2=(2x^3-x^2y)+(6xy-3y^2)$

$=x^2(2x-y)+3y(2x-y)$

$=(2x-y)(x^2+3y)=8\times31=248$

■ تقييم ذاتى ⑥

إذا كان $3b-2a=1$ ،

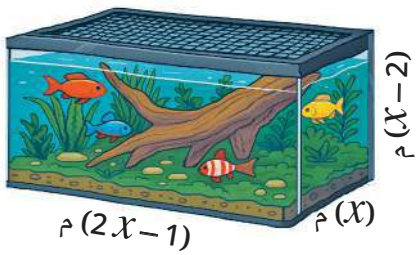
$a^2-2b=10$

أوجد القيمة العددية للمقدار :

$2a^3-3a^2b-4ab+6b^2$

مثال 7

حوض زجاجى يُستخدم للزينة على شكل متوازى مستطيلات، أبعاده بالمتر كما هى بالشكل، إذا كان حجم الحوض يساوى 5 م^3، فأوجد أبعاده بالمتر.



حجم الحوض $=5$ م^3.

$\therefore x(x-2)(2x-1)=5$

$\therefore x(2x^2-5x+2)=5$

$\therefore 2x^3-5x^2+2x-5=0$

$\therefore (2x^3-5x^2)+(2x-5)=0$

$\therefore x^2(2x-5)+(2x-5)=0$

$\therefore (2x-5)(x^2+1)=0$

$\therefore$ إما $2x-5=0$ ومنها $\boxed{x=\frac{5}{2}}$

أو $x^2+1=0$ ومنها $x^2=-1$ (مرفوض)

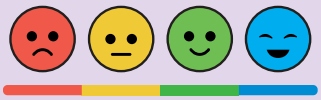
$\therefore$ أبعاد الحوض هى 0.5 م ، 2.5 م ، 4 م.

■ تقييم ذاتى ⑦

تصنع إحدى الشركات وحدات تخزين أدوات التصوير للرحلات، الوحدة على شكل متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $(x-1)$ قدم وارتفاعه x قدم.

إذا كان حجم الوحدة يساوى 2 قدم مكعب، أوجد أبعاد وحدة التخزين.

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) $x^2-a\,x+b\,x-a\,b=$ .....

(أ) $(x-a)\,(x-b)$ (ب) $(x-a)\,(x+b)$ (جـ) $(x+a)\,(x-b)$ (د) $(x+a)\,(x+b)$

2) إذا كان : $x\,y+5x+7y+35=(x+a)\,(y+b)$ ، فما قيمة $a-b$ ؟

(أ) 2 (ب) -2 (جـ) 12 (د) -12

3) إذا كان : $x^3+5x^2-4x-20=(x+a)\,(x+b)\,(x+c)$ ، فما قيمة $a+b+c$ ؟

(أ) 2 (ب) 5 (جـ) 7 (د) 9

4) إذا كان : $x+b=5$ ، $x^2+a=12$ ، فما القيمة العددية للمقدار $(x^3+b\,x^2+a\,x+a\,b)$ ؟

(أ) 7 (ب) 17 (جـ) 30 (د) 60

5) عند إكمال المربع للمقدار : (x^2+9) نضيف إليه .....

(أ) $\pm 3x$ (ب) $\pm 6x$ (جـ) $\pm 9x$ (د) $\pm 12x$

6) عند إكمال المربع للمقدار : (x^2+12x) نضيف إليه .....

(أ) ± 9 (ب) ± 36 (جـ) 9 (د) 36

7) إذا كان : (x^2+2x+2) أحد عاملى المقدار (x^4+4) فما العامل الآخر ؟

(أ) x^2-2x+2 (ب) x^2-2x-2 (جـ) x^2+x+2 (د) x^2-x+2

ثانيًا تطبيق المفاهيم

8) حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $a\,x+b\,x+b+a$	② $12y+2x-8xy-3$	③ $6\,m-n+3\,m\,n-2$
④ $x^2-2x-xy+2y$	⑤ $11x^3-6x^2+11x-6$	⑥ $45x^3+20x^2+9x+4$

9) حلل كلًا من ثلاثيات الحدود الآتية باستخدام التحليل بالتقسيم :

① $2x^2+5x+3$ ② $4x^2-7x-2$ ③ $2x^2+13x+15$

(10) حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^2-y^2-6x-6y$

② x^2-a^2-2x+1

③ $x^4+2x^3-9x^2-18x$

④ $4x^2-12xy+9y^2-49$

⑤ $5a^2b-10a^2b^2+4b^2-8b^3$

⑥ m^3+n^3-m-n

⑦ $4k^4-49k^2+14k-1$

⑧ $16x^2-25a^2+y^2+8xy$

(11) حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① x^4+4y^4

② $4m^4+1$

③ $64x^4+y^4$

④ $a^4+a^2b^4+b^8$

⑤ y^4-23y^2+1

⑥ x^4-11x^2+1

⑦ $16a^4+20a^2b^2+9b^4$

⑧ k^5+5k^3+9k

⑨ $4x^2(4x^2-7y^2)+y^4$

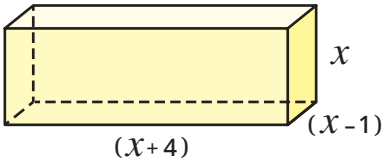
(12) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

① $x^3+x^2-4x=4$

② $x^2+12x+15=0$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(13) **هندسة :** إذا كان حجم الصندوق المقابل 12 وحدة مكعبة، فأوجد أبعاده.

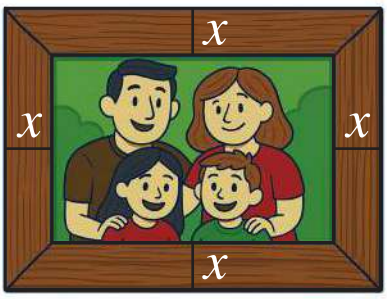


(14) **هندسة :** إذا كان حجم متوازى مستطيلات هو $(x^4-2x^3+3x^2-6x)$ قدم مكعب.

أوجد الأبعاد الممكنة لمتوازى المستطيلات بدلالة x، ثم أوجد القيمة العددية للأبعاد عند $x=4$

(15) **ديكور :** صورة يحيط بها إطار سُمكه x بوصة كما بالشكل.

إذا كانت مساحة الصورة $(4x^3+6x^2+2x+3)$ بوصة مربعة، فأوجد الأبعاد الممكنة للصورة والإطار معًا بدلالة x.



تفكير إبداعى

(16) إذا كان $a+b=3$ أوجد قيمة $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(17) حلل تحليلًا تامًا : x^8-16y^8

قيّم فهمك!

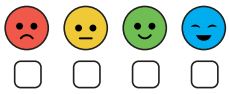
ما مدى فهمك للتحليل بالتقسيم؟

ضع علامة فى المربع المناسب

تقييم الوحدة الثانية

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الثانية ؟ ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كانت كثيرة الحدود : $(9x^2 + kx + 49)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k ؟

(أ) ± 7 (ب) ± 21

(جـ) ± 42 (د) ± 72

(2) إذا كان : $x^2 - 14x + 24 = (x - a)(x - b)$

فما قيمة $a + b$ ؟

(أ) -10 (ب) -14 (جـ) 10 (د) 14

(3) إذا كان : $m - n = 5$ ، $x + y = 7$ فإن :

$x(m - n) - y(n - m) =$ .....

(أ) 2 (ب) 12 (جـ) 35 (د) 70

(4) $x^3 + y^3 = (\ldots\ldots)(x^2 - xy + y^2)$

(أ) $(x - y)$ (ب) $(x + y)$

(جـ) $(x^2 - y^2)$ (د) $(x^2 + y^2)$

◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

(5) العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود

$16x^3 + 8x^2 - 32x$ هو .....

(6) عند إكمال المربع للمقدار $(x^2 + 24x)$

نضيف .....

(7) إذا كان : $(m^2 + 4m + 8)$ أحد عاملى المقدار

$(m^4 + 64)$ فإن العامل الآخر هو .....

(8) إذا كان :

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x + a)(x + b)(x + c)$

فإن $(a \times b \times c)$ تساوى .....

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 6x = -8$ فى R

(10) حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $3x^2 + 2x - 5$ ② $k^2 - 64m^2$ ③ $x^3y^3 - 27$

(11) متوازى أضلاع مساحته 60 سم^2، وطول قاعدته يزيد عن الارتفاع المناظر لها بمقدار 7 سم ، فما ارتفاع متوازى الأضلاع ؟

(12) حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^2 - 6x - y^2 + 6y$ ② $8x^5 - 10x^3y^2 + 2xy^4$

نشاط الوحدة الثانية

النشأة التاريخية لتحليل المقادير الجبرية

◂ **الهدف من النشاط :**

تقدير دور العلماء المسلمين فى تطوير علم الجبر والمقادير الجبرية.

◂ **خطوات التنفيذ :**

بالتعاون مع أحد أصدقائك حاول القيام بالآتى :

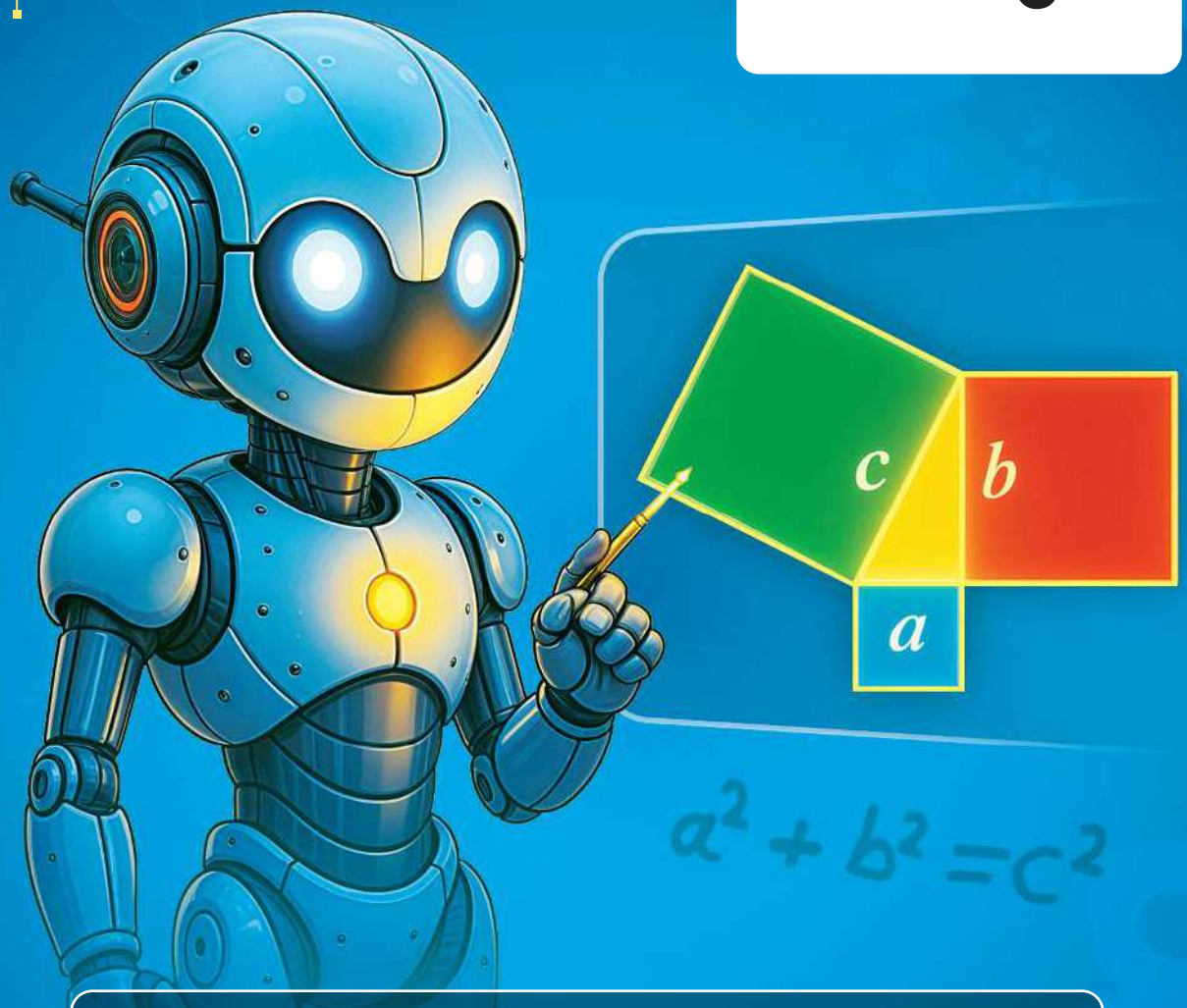
1. استخدم أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى للوصول إلى اسم أحد العلماء المسلمين الذين أسهموا فى تطوير علم الجبر.
2. اكتب دور هذا العالم فى موضوع تحليل المقادير الجبرية.
3. هل توجد اختلافات بين طريقة تحليل المقادير الجبرية قديمًا وحديثًا؟

الوحدة 3

الهندسة

دروس الوحدة

3-1 التطابق
3-2 نظرية فيثاغورس وعكسها
3-3 تطبيقات التوازى
3-4 متوسطات المثلث
3-5 المثلث المتساوى الساقين
3-6 الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات



تستخدم النظريات الهندسية فى كثير من حسابات الذكاء الاصطناعى خاصة فى تحليل الأشكال الهندسية وتصميم الروبوتات الصناعية.

◀ فهل يمكن تطوير خوارزميات التعلم الآلى لحل مشكلات هندسية فى حياتنا اليومية ؟

القضايا والمهارات الحياتية

- التواصل الرياضى
- التفكير الإبداعى
- التفكير الناقد
- لغة الرياضيات

القيـــم

- جمال الطبيعة
- الوعى الصحى
- تذوق الفن
- الوعى البيئى

الدرس

1 - 3

التطابق
(Congruence)

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم تطابق الأشكال الهندسية المستوية.
- تعرف شروط تطابق مضلعين.
- تعرف حالات تطابق مثلثين.
- تستخدم التطابق فى إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع.
- تثبت تطابق مثلثين.
- تستخدم تطابق الأشكال الهندسية المستوية فى حل المشكلات الحياتية.

■ المفـردات

- التطابق Congruence
- الوتر Hypotenuse
- المثلث القائم الزاوية Right-angled triangle
- زاوية محصورة Included angle
- ضلع واصل بين رأسين Included side

■ الترميز فى الرياضيات

الرمز $\cong$ يستخدم للتعبير عن تطابق شكلين هندسيين.

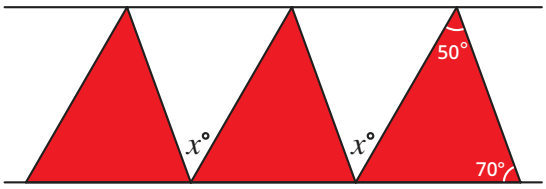
استعد !

يستخدم المهندسـون فى بناء الكبارى الفولاذية مثلثـات متطابقة لضمان التوازن والمتانة، حيث تسـاهم المثلثـات المتطابقة فـى توزيع الأحمال بشكل متساوٍ.

فى صـورة الكوبرى المقابلة، هـل يمكنك تحديد قيمة x ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم تطابق الأشكال الهندسية المستوية، وحالات تطابق المثلثات، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !



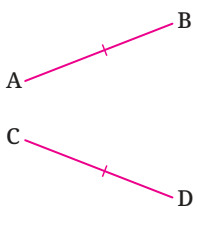
قام إبراهيم بنسخ المثلث الأحمر ولصقه عدة مرات لتكوين شريط زخرفى باستخدام أحد برامج الكمبيوتر.

هل يمكنك تحديد قيمة x فى هذا الشكل ؟

تعلم !

تطابق قطعتين مستقيمتين

تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا تساويتا فى الطول.

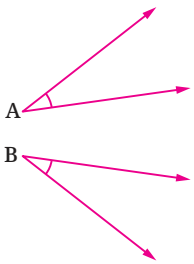


إذا كان : طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{CD}$

فإن : $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

تطابق زاويتين

تتطابق الزاويتان إذا تساويتا فى القياس.



إذا كان : $m(\angle A) = m(\angle B)$

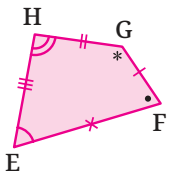
فإن : $\angle A \cong \angle B$

تطابق مضلعين

يتطابق المضلعان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

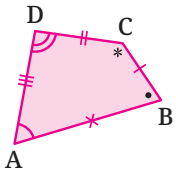
1. أضلاعهما المتناظرة متساوية فى الطول.
2. زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس.

إذا كان EFGH ، ABCD مضلعين فيهما :



1. $AB = EF$, $BC = FG$,

$CD = GH$, $AD = EH$



2. $m(\angle A) = m(\angle E)$, $m(\angle B) = m(\angle F)$,

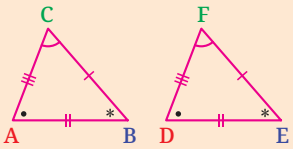
$m(\angle C) = m(\angle G)$, $m(\angle D) = m(\angle H)$

فإن : المضلع EFGH ≅ المضلع ABCD

■ لاحظ أن

يجب كتابة المضلعين المتطابقين بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة.

مثال :



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

■ تذكر أن

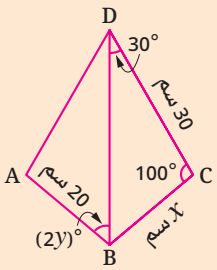
الانعكاس والانتقال والدوران هى تحويلات هندسية تعطى صورة مطابقة للشكل الهندسى لأنها تحافظ على ما يلى :

- قياسات الزوايا.
- أطوال الأضلاع.
- التوازى.

■ تقييم ذاتى (1)

فى الشكل التالى :

ΔBCD صورة ΔBAD بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{DB}$

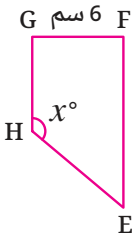


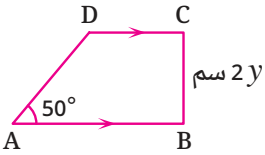
أوجد قيمة كل من y ، x

مثال (1)

فى الشكل المقابل :

إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بدوران ما حول نقطة، فما قيمة كل من y , x ؟





$\because \overline{AB} // \overline{DC}$

$\therefore m(\angle A) + m(\angle D) = 180°$ (زاويتان داخليتان وفى جهة واحدة من القاطع $\overleftrightarrow{AD}$)

$\therefore m(\angle D) = 180° - 50° = 130°$

$\because$ المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بالدوران

$\therefore$ المضلع ABCD ≅ المضلع EFGH

$\therefore m(\angle H) = m(\angle D) = 130°$ $\quad\quad$ $\therefore x = 130$

$BC = FG = 6$ $\quad\quad$ $\therefore 2y = 6$ $\quad\quad$ $\therefore y = 3$

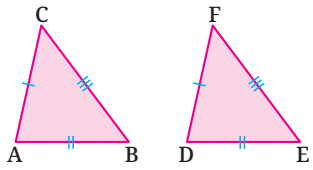
تطابق مثلثين

المثلث هو مضلع ثلاثى يحتوى على 6 عناصر (3 أضلاع و 3 زوايا)، ولإثبات تطابق مثلثين لا يُشترط إثبات تطابق كل العناصر المتناظرة، بل يُكتفى بثلاثة عناصر بينهم ضلع واحد على الأقل.

حالات تطابق مثلثين

الحالة الأولى : ثلاثة أضلاع (SSS)

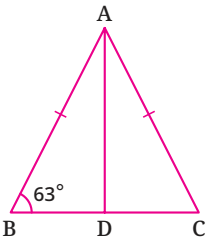
يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظيره فى المثلث الآخر.



إذا كان : $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 2



فى الشكل المقابل :

النقطة D منتصف $\overline{BC}$ ، $AB = AC$ ، $m(\angle B) = 63°$

1 أثبت أن : $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

2 أوجد بالبرهان : $m(\angle DAC)$

∵ النقطة D منتصف $\overline{BC}$

∴ $BD = DC$

∵ المثلثين ADB , ADC فيهما :

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (ضلع مشترك) $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ (إثباتًا) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (معطى)

∴ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (المطلوب 1)

ومن التطابق ينتج أن :

$m(\angle DAC) = m(\angle DAB)$ ، $m(\angle C) = m(\angle B) = 63°$

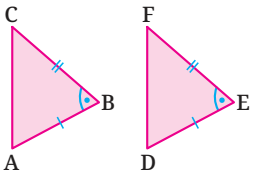
فى المثلث ABC :

∴ $m(\angle CAB) = 180° - (63° + 63°) = 54°$

∴ $m(\angle DAC) = m(\angle DAB) = \frac{54°}{2} = 27°$ (المطلوب 2)

الحالة الثانية : ضلعان وزاوية محصورة (SAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.



إذا كان : $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، $\angle B \cong \angle E$ ، $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

■ الترميز فى الرياضيات

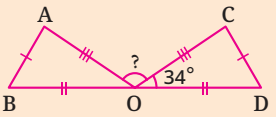
فى حالات تطابق المثلثات يُستخدم حرف S للدلالة على ضلع فى المثلث، وحرف A للدلالة على زاوية فى المثلث، وحرف R للدلالة على الزاوية القائمة، وحرف H للدلالة على وتر المثلث القائم الزاوية.

■ تفكير ناقد

هل يتطابق المثلثان فى حالة تطابق الزوايا الثلاث فى أحدهما مع نظائرها فى المثلث الآخر؟

■ تقييم ذاتى 2

فى الشكل التالى :



1 برهن أن : $\Delta OAB \cong \Delta OCD$

2 أوجد : $m(\angle AOC)$

■ تفكير ناقد

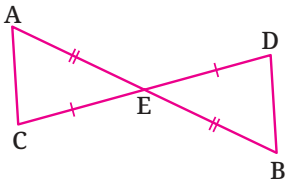
هل يتطابق المثلثان فى حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة فى أحدهما مع نظائرها فى المثلث الآخر؟

مثال 3

فى الشكل المقابل :

E نقطة منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

برهن أن : 1 $\Delta AEC \cong \Delta BED$ 2 $\overline{AC} // \overline{DB}$



∵ E نقطة منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

$\therefore \overline{AE} \cong \overline{BE}$, $\overline{CE} \cong \overline{DE}$

∵ $m(\angle AEC) = m(\angle BED)$ (بالتقابل بالرأس)

$\therefore \Delta AEC \cong \Delta BED$ (المطلوب 1)

ومن تطابق المثلثين ينتج أن : $m(\angle A) = m(\angle B)$ وهما زاويتان فى وضع تبادل

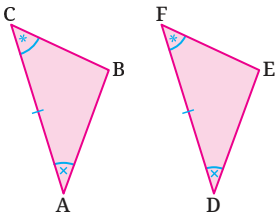
$\therefore \overline{AC} // \overline{DB}$ (المطلوب 2)

الحالة الثالثة : زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما (ASA)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.

إذا كان : $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

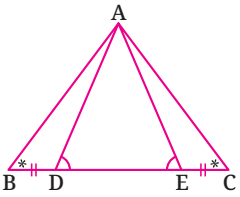


مثال 4

فى الشكل المقابل :

$\angle B \cong \angle C$, $\angle ADE \cong \angle AED$, $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

أثبت أن : $\Delta ABD \cong \Delta ACE$



∵ $m(\angle ADB) + m(\angle ADE) = 180°$, $m(\angle AEC) + m(\angle AED) = 180°$

∵ $m(\angle ADE) = m(\angle AED)$ $\therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC)$

$\therefore \angle ADB \cong \angle AEC$

فى المثلثين ACE , ABD :

$\angle B \cong \angle C$ (معطى) , $\overline{BD} \cong \overline{CE}$ (معطى) , $\angle ADB \cong \angle AEC$ (إثباتًا)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE$

■ تقييم ذاتى ③

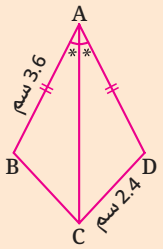
فى الشكل التالى :

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ،

$AB = 3.6$ سم،

$CD = 2.4$ سم،

$\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle BAD$



1 برهن أن :

$\Delta ACB \cong \Delta ACD$

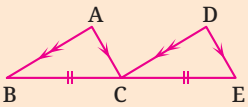
2 أوجد محيط المضلع ABCD

■ تقييم ذاتى ④

فى الشكل التالى :

$\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AC} // \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{CE}$

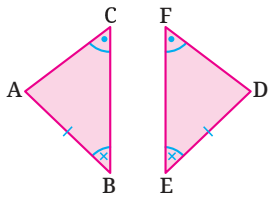


برهن أن :

$\Delta ABC \cong \Delta DCE$

الحالة الرابعة : زاويتان وضلع غير واصل بين الرأسين (AAS)

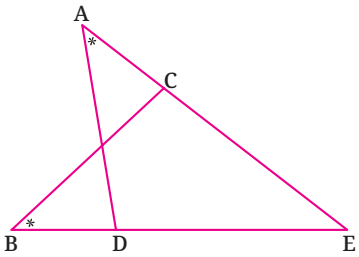
يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير واصل بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.



إذا كان : $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle C \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle E$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 5



فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle B$

أثبت أن : $AE = BE$

فى المثلثين ADE , BCE :

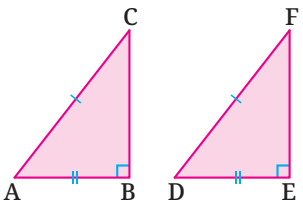
$\because \angle A \cong \angle B$ (معطى) , $\angle E \cong \angle E$ (زاوية مشتركة) , $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (معطى)

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta BCE$

وينتج من التطابق أن : $AE = BE$

الحالة الخامسة : وتر وأحد ضلعى القائمة (RHS)

يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظيريهما فى المثلث الآخر.

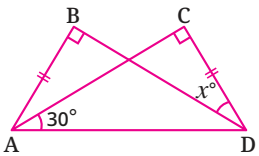


إذا كان : $m(\angle B) = m(\angle E) = 90°$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 6



فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة x

$\because$ المثلثين ABD , DCA فيهما :

(ضلع مشترك) $\overline{AD} \cong \overline{DA}$, (معطى) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, (معطى) $m(\angle B) = m(\angle C) = 90°$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta DCA$

وينتج من التطابق أن : $m(\angle BDA) = m(\angle CAD) = 30°$

فى المثلث DCA :

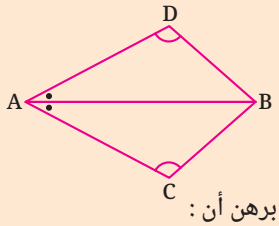
$\therefore m(\angle CDA) = 180° - (90° + 30°) = 60°$ $\therefore x = 60 - 30 = 30$

■ تقييم ذاتى (5)

فى الشكل التالى :

$\overrightarrow{AB}$ ينصف $\angle DAC$

$\angle ADB \cong \angle ACB$



برهن أن :

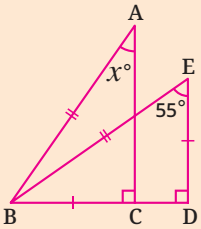
$\Delta ACB \cong \Delta ADB$

■ لاحظ أن

فى المثلث القائم الزاوية الضلع المقابل للزاوية التى قياسها 90° يسمى وتر المثلث وهو أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث.

■ تقييم ذاتى (6)

فى الشكل التالى :



$BC = DE$, $AB = EB$

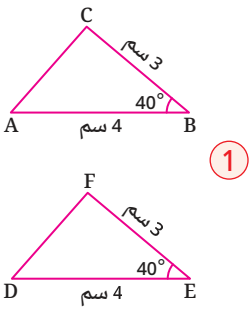
1 أثبت أن : $\Delta ACB \cong \Delta BDE$

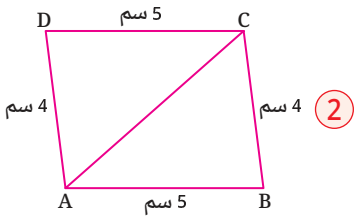
2 أوجد قيمة : x

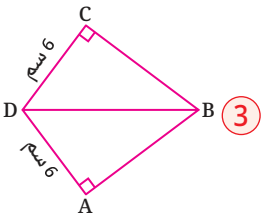
تقييم الدرس

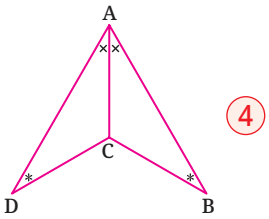
أولاً قياس المفاهيم

◂ ما هى الحالة المستخدمة فى إثبات تطابق المثلثين فى كل مما يأتى ؟

1


2


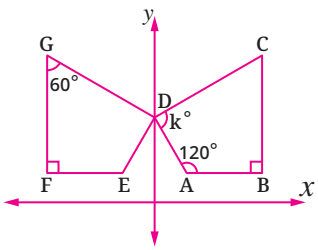
3


4


◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

5 فى الشكل المقابل : المضلع EFGD صورة المضلع ABCD بالانعكاس فى محور y.

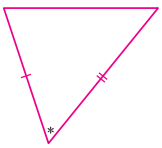
ما قيمة k ؟

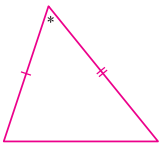


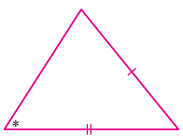
(أ) 90 (ب) 60

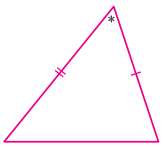
(جـ) 120 (د) 70

6 أى من المثلثات التالية لا يطابق المثلثات الأخرى؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

◂ اكتشف الخطأ :

7 قام أحمد باستخدام تطابق المثلثين لإيجاد قيمة x.

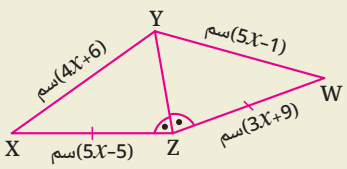
اكتشف الخطأ فى حل أحمد، ثم قم بتصويبه.

حل أحمد :

$4x+6=3x+9$

$x+6=9$

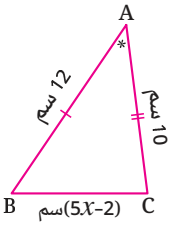
$x=3$

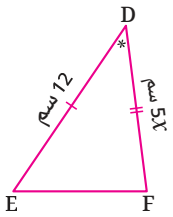


ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(8) فى الشكل التالى : ما طول $\overline{EF}$ ؟





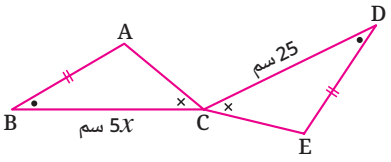
(أ) 6 سم

(ب) 8 سم

(جـ) 10 سم

(د) 12 سم

(9) فى الشكل التالى : ما قيمة x ؟



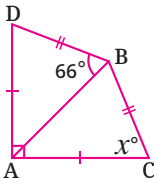
(أ) 5

(ب) 10

(جـ) 20

(د) 25

(10) فى الشكل التالى : ما قيمة x ؟



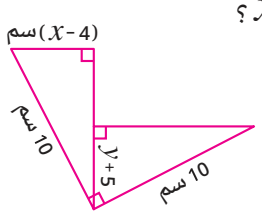
(أ) 66

(ب) 45

(جـ) 34

(د) 69

(11) فى الشكل التالى : ما قيمة $x-y$ ؟



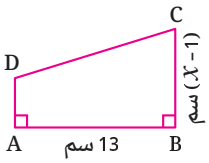
(أ) 9

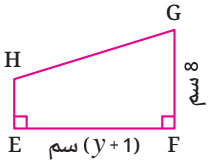
(ب) 6

(جـ) 5

(د) 1

(12) فى الشكل المقابل : إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بانتقال ما، فما قيمة $x+y$ ؟





(أ) 9 (ب) 12

(جـ) 21 (د) 22

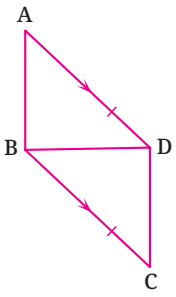
◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(13) فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

برهن أن :

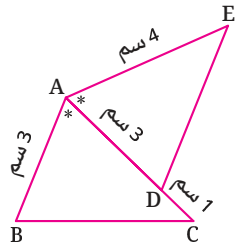
$\Delta ABD \cong \Delta CDB$



(14) فى الشكل المقابل :

برهن أن :

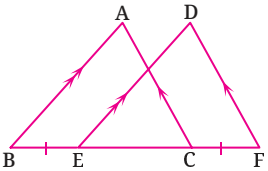
$\Delta ABC \cong \Delta ADE$



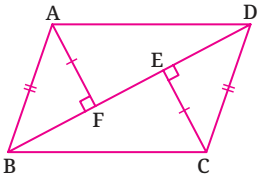
(15) فى الشكل المقابل :

$\overline{BA} // \overline{ED}$, $\overline{CA} // \overline{FD}$, $\overline{BE} \cong \overline{FC}$

برهن أن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(16) فى الشكل المقابل :

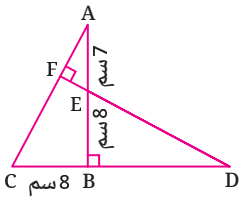


برهن أن :

① $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

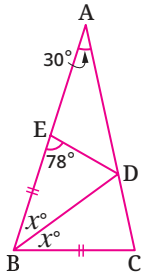
② $DF = BE$

(17) فى الشكل المقابل :



أوجد طول $\overline{BD}$

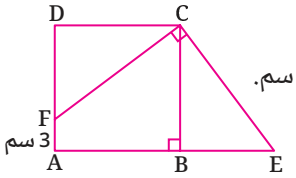
(18) فى الشكل المقابل :



① أثبت أن : $\Delta BCD \cong \Delta BED$

② أوجد قيمة x

(19) فى الشكل المقابل :



ABCD مربع طول ضلعه 12 سم.

$\overline{CF} \perp \overline{CE}$, $AF = 3$ سم

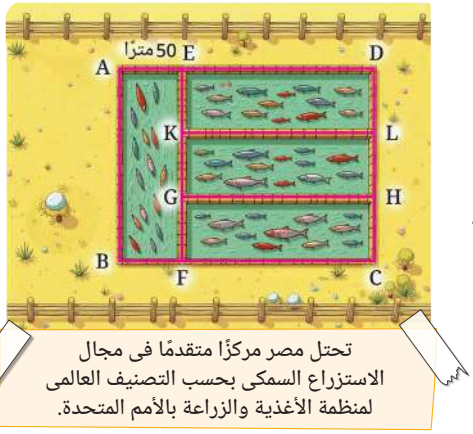
① أثبت أن : $\Delta CBE \cong \Delta CDF$

② أوجد طول $\overline{BE}$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(20) **استزراع سمكى :** قطعة أرض على شكل مستطيل ABCD تم تقسيمها إلى أحواض مستطيلة الشكل ومتطابقة لاستزراع 4 أنواع من الأسماك.

فما محيط قطعة الأرض؟

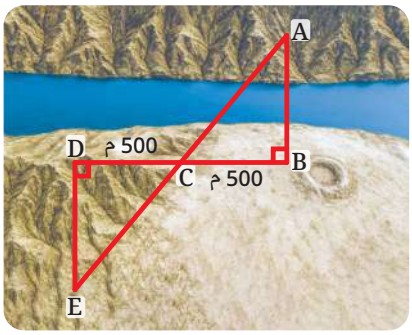


تحتل مصر مركزًا متقدمًا فى مجال الاستزراع السمكى بحسب التصنيف العالمى لمنظمة الأغذية والزراعة بالأمم المتحدة.

(21) **هندسة :** لإنشاء جسر مثل $\overline{AB}$ فوق نهر عليك إيجاد المسافة من النقطة A إلى النقطة B .

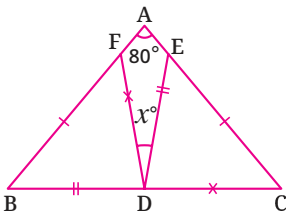
حدد النقاط A ، C ، E على استقامة واحدة كما هو موضح فى الشكل، إذا كانت $DE = 600$ م،

فما المسافة من النقطة A إلى النقطة B ؟



تفكير إبداعى

(22) فى الشكل المقابل :



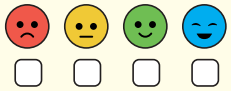
① أثبت أن : $\Delta BFD \cong \Delta ECD$

② أوجد قيمة x

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للتطابق ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس

2 - 3

نظرية فيثاغورس وعكسها

(Pythagoras' Theorem and Its Converse)

استعد !

لديك سلم طوله 13 قدمًا يستند إلى حائط رأسى. إذا كانت قاعدة السلم تبعد 5 أقدام عن الحائط ، فما هو الارتفاع الذى يصل إليه السلم على الحائط؟

في هذا الدرس، سوف تتعرف على نظرية فيثاغورس وعكسها؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

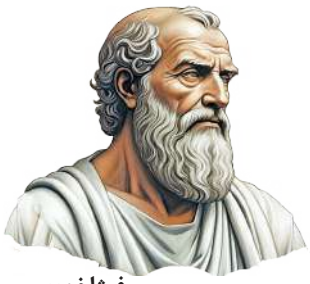
إذا كانت لديك أربع قطع من الخشب أطوالها 15 سم ، 12 سم ، 10 سم ، 9 سم.
فأى ثلاث منها يمكنك أن تستخدمها لعمل مثلث قائم الزاوية ؟

15 سم | 12 سم | 10 سم | 9 سم

تعلم !

نظرية فيثاغورس

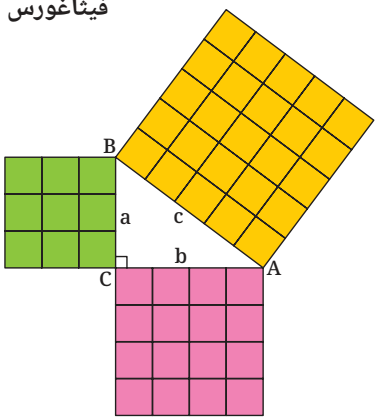
نظرية فيثاغورس هى معادلة تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية. سُميت نسبةً إلى عالم الرياضيات اليونانى «فيثاغورس»، الذى عاش فى القرن السادس قبل الميلاد.



فيثاغورس

نظرية فيثاغورس

مساحة المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة.



صيغة أخرى لنظرية فيثاغورس :

فى المثلث القائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

أى أن : $c^2 = a^2 + b^2$ حيث a , b طولا ضلعى القائمة فى المثلث، c طول وتر المثلث.

■ نواتج التعلم

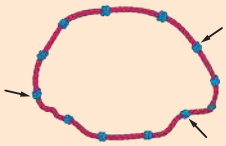
- تعرف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- توجد طول أحد ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية إذا عُلم طول الوتر وطول ضلع القائمة الآخر.
- توجد طول الوتر فى مثلث قائم الزاوية إذا عُلم طولا ضلعى القائمة.
- تثبت أن المثلث قائم الزاوية إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة.
- تحدد نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا عُلم أطوال أضلاعه.

■ المفردات

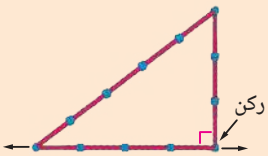
- نظرية فيثاغورس Pythagoras' Theorem
- الوتر Hypotenuse

■ معلومة تاريخية

استخدم المصريون القدماء حبلًا موصولًا ذى 12 عقدة بينها مسافات متساوية لتشكيل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه 5 : 4 : 3، يحتوى هذا المثلث على زاوية قائمة بين ضلعين طولاهما 3 ، 4 وحدات.
استخدم المصريون هذا الإجراء لبناء زواياهم القائمة.



يُمسك الحبل عند العقد المشار إليها



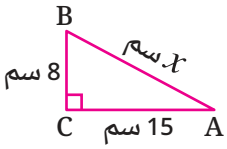
استخدام نظرية فيثاغورس

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع فى مثلث قائم الزاوية بمعلومية طولى الضلعين الآخرين.

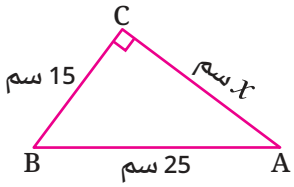
مثال 1

أوجد قيمة x فى كل مما يأتى ، ثم أوجد مساحة المثلث فى الشكل الثانى.

1



2



1

$\because c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore x^2 = (8)^2 + (15)^2$

$= 64 + 225 = 289$

$\therefore x = \sqrt{289} = 17$

2

$\because c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore (25)^2 = (15)^2 + x^2$

$\therefore x^2 = (25)^2 - (15)^2 = 400$

$\therefore x = \sqrt{400} = 20$

$\therefore$ المساحة $= \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = 150$ سم^2

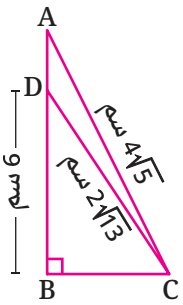
مثال 2

فى الشكل المقابل :

$m(\angle B) = 90°$ ، $AC = 4\sqrt{5}$ سم

$BD = 6$ سم ، $DC = 2\sqrt{13}$ سم

أوجد مع البرهان طول $\overline{AD}$



فى المثلث DBC القائم الزاوية فى B :

$(BC)^2 = (DC)^2 - (DB)^2 = (2\sqrt{13})^2 - (6)^2 = 16$

$\therefore BC = \sqrt{16} = 4$

فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B :

$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2 = (4\sqrt{5})^2 - (4)^2 = 64$

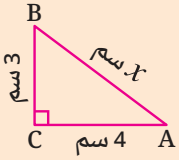
$\therefore AB = \sqrt{64} = 8$ $\therefore AD = AB - BD = 8 - 6 = 2$

$\therefore$ طول $\overline{AD} = 2$ سم

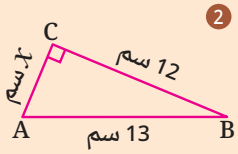
تقييم ذاتى 1

أوجد قيمة x فى كل مما يأتى، ثم أوجد مساحة المثلث فى الشكل الثانى.

1



2

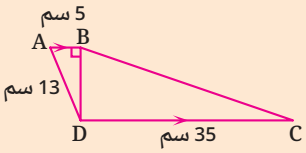


تقييم ذاتى 2

فى الشكل التالى :

إذا كان : $\overline{AB} // \overline{DC}$

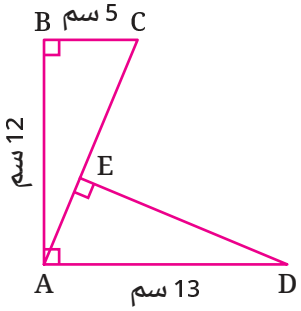
أوجد محيط المضلع ABCD



مثال 3

فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{EC}$



∵ المثلث ABC قائم الزاوية فى B

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$\therefore AC = \sqrt{169} = 13$

$\because m(\angle C) + m(\angle BAC) = 90°$ ، $m(\angle DAE) + m(\angle BAC) = 90°$

$\therefore m(\angle C) = m(\angle DAE)$

∵ المثلثان ABC ، DEA فيهما :

$m(\angle ABC) = m(\angle DEA)$ ، $AC = DA$ ، $m(\angle C) = m(\angle DAE)$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEA$ $\therefore AE = CB = 5$

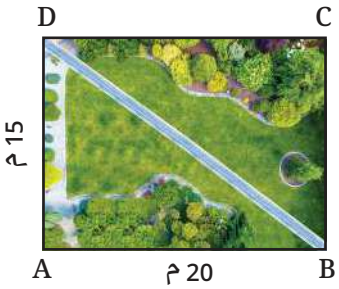
$\therefore EC = AC - AE = 13 - 5 = 8$

∴ طول $\overline{EC} = 8$ سم.

مثال 4

تصميم : صمم أسامة حديقة منزلية على شكل مستطيل، ويخطط لعمل ممر بشكل قطرى كما بالشكل.

أوجد طول هذا الممر.



∵ ABCD مستطيل $\therefore m(\angle A) = 90°$

∴ فى المثلث ABD :

$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = (20)^2 + (15)^2 = 625$

∴ طول الممر $= \sqrt{625} = 25$ م.

عكس نظرية فيثاغورس

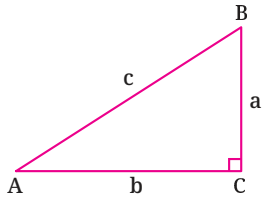
إذا كان مجموع مربعى طولى ضلعين فى مثلث يساوى مربع طول الضلع الثالث كان المثلث قائم الزاوية.

إذا كان المثلث ABC فيه :

$a^2 + b^2 = c^2$

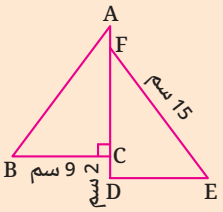
فإن : $m(\angle C) = 90°$

أى أن : المثلث ABC يكون قائم الزاوية فى C



تقييم ذاتى ③

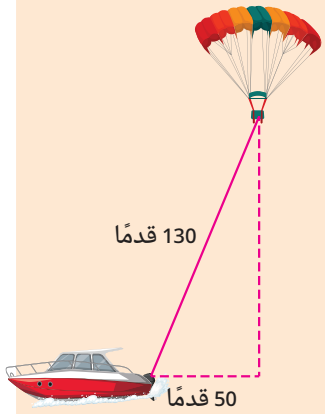
فى الشكل التالى :



$\Delta ACB \cong \Delta FDE$

أوجد طول $\overline{AF}$

تقييم ذاتى ④



يمثل الشكل تحليق عمر بمنطاد أثناء سحبه باستخدام قارب فى البحر. فما ارتفاع عمر عن مستوى القارب الأفقى؟

مثال 5

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

1) 15 سم ، 13 سم ، 8 سم

2) 24 سم ، 7 سم ، 25 سم

1) طول أكبر ضلع = 15

$\because (13)^2 + (8)^2 = 233$,

$\because (15)^2 = 225$

$\therefore (13)^2 + (8)^2 \neq (15)^2$

∴ المثلث غير قائم الزاوية.

2) طول أكبر ضلع = 25

$\because (7)^2 + (24)^2 = 625$,

$\because (25)^2 = 625$

$\therefore (7)^2 + (24)^2 = (25)^2$

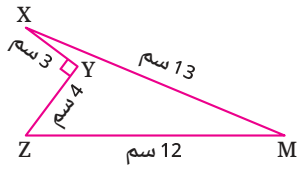
∴ المثلث قائم الزاوية.

مثال 6

فى الشكل المقابل :

XYZM شكل رباعى غير محدب ، $m(\angle XYZ) = 90°$

أوجد مساحة الشكل الرباعى XYZM



العمل : ارسم $\overline{XZ}$

فى المثلث XYZ القائم الزاوية فى Y :

$\because (XZ)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$ ∴ XZ = 5

فى المثلث XZM :

$\because (XZ)^2 + (ZM)^2 = (5)^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169$,

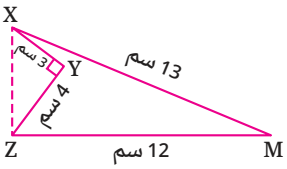
$(XM)^2 = (13)^2 = 169$

$\therefore (XM)^2 = (XZ)^2 + (ZM)^2$ ∴ $m(\angle XZM) = 90°$

∵ مساحة الشكل الرباعى XYZM = مساحة Δ XZM − مساحة Δ XYZ

$\therefore A = (\frac{1}{2} \times 5 \times 12) - (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) = 30 - 6 = 24$

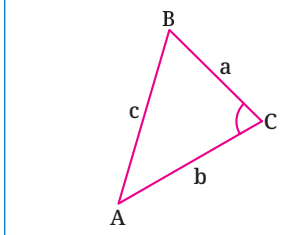
أى أن مساحة الشكل الرباعى XYZM تساوى 24 سم^2.



متباينة فيثاغورس

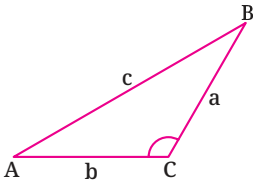
فى المثلث ABC : إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث، وكان :

$c^2 < a^2 + b^2$



كان Δ ABC حاد الزوايا

$c^2 > a^2 + b^2$



كان Δ ABC منفرج الزاوية

تقييم ذاتى 5

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

1) 41 سم ، 40 سم ، 9 سم

2) 5 سم ، $3\sqrt{2}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم

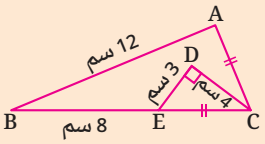
1) 60 سم ، 40 سم ، 30 سم

تقييم ذاتى 6

فى الشكل التالى :

EC = AC

أثبت أن : $m(\angle A) = 90°$



لاحظ أن

- تستخدم متباينة فيثاغورس للتعرف على ما إذا كان المثلث حاد الزوايا أم منفرج الزاوية.
- بينما عكس نظرية فيثاغورس تستخدم فى التعرف على ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

مثال 7

عين نوع كل مثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

1) 9 سم ، 10 سم ، 11 سم
2) 3 سم ، $2\sqrt{3}$ سم ، $3\sqrt{3}$ سم
3) 1.5 سم ، 2 سم ، 2.5 سم

1) ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 11 سم

∵ $(11)^2 = 121$, $(9)^2 + (10)^2 = 81 + 100 = 181$

∴ $(11)^2 < (9)^2 + (10)^2$

∴ المثلث حاد الزوايا.

2) ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = $3\sqrt{3}$ سم

∵ $(3\sqrt{3})^2 = 27$, $(3)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12 = 21$

∴ $(3\sqrt{3})^2 > (3)^2 + (2\sqrt{3})^2$

∴ المثلث منفرج الزاوية.

3) ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 2.5 سم

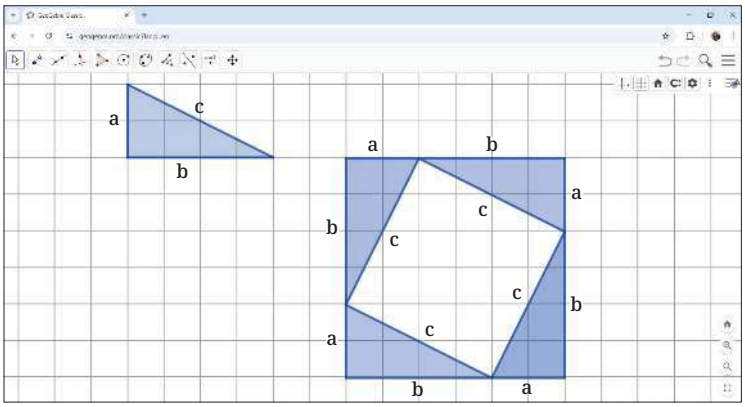
∵ $(2.5)^2 = 6.25$, $(1.5)^2 + (2)^2 = 2.25 + 4 = 6.25$

∴ $(2.5)^2 = (1.5)^2 + (2)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

نشاط تكنولوچى

استخدم برنامج GeoGebra وارسم مثلثًا كما بالشكل أطوال أضلاعه a ، b ، c
انسخ المثلث لتحصل على أربعة مثلثات متطابقة، وأعد ترتيبهم لتكوين مربع كما بالشاشة التالية.



أوجد مساحة المربع الكبير بطريقتين :

• مساحة المربع الكبير تساوى مجموع مساحات المثلثات الأربعة والمربع الصغير.

$\therefore A = 4(\frac{1}{2} a\, b) + c^2$ (1)

• مساحة المربع الكبير تساوى مربع طول ضلعه.

$\therefore A = (a + b)^2$ (2)

من (1) ، (2) : $4(\frac{1}{2} a\, b) + c^2 = (a + b)^2$

اختصر لتتحقق بنفسك من أن : $c^2 = a^2 + b^2$

■ تقييم ذاتى (7)

حدد نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

1) 5 سم ، 5 سم ، $5\sqrt{2}$ سم
2) 11 سم ، 12 سم ، 16 سم
3) 4.5 سم ، 20 سم ، 21 سم

■ معلومة إثرائية

ثلاثيات فيثاغورس هى ثلاثة أعداد صحيحة تحقق الصيغة الرياضية :

$a^2 + b^2 = c^2$

حيث c هو العدد الأكبر.

◂ فيما يلى ثلاثيات فيثاغورس الشائعة، وبعض مضاعفاتها :

3 , 4 , 5
6 , 8 , 10
9 , 12 , 15
$3x$, $4x$, $5x$

5 , 12 , 13
10 , 24 , 26
15 , 36 , 39
$5x$, $12x$, $13x$

8 , 15 , 17
16 , 30 , 34
24 , 45 , 51
$8x$, $15x$, $17x$

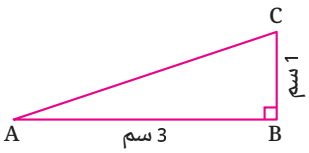
7 , 24 , 25
14 , 48 , 50
21 , 72 , 75
$7x$, $24x$, $25x$

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

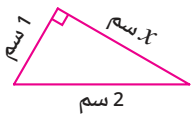
(1) فى الشكل المقابل : ما مساحة المربع المنشأ على $\overline{AC}$ ؟



(أ) 4 سم^2 (ب) 2 سم^2

(جـ) 8 سم^2 (د) 10 سم^2

(2) فى الشكل المقابل :

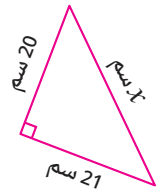


ما قيمة x ؟

(أ) 1 (ب) 3

(جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt{3}$

(3) فى الشكل المقابل :



ما قيمة x ؟

(أ) 41 (ب) 29

(جـ) $\sqrt{41}$ (د) $\sqrt{29}$

(4) أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ؟

(أ) 7 , 7 , 4 (ب) 12 , 5 , 13 (جـ) 5 , 8 , 7 (د) 3 , 7 , 5

(5) أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث حاد الزوايا ؟

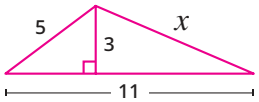
(أ) $4 , 4 , 4\sqrt{2}$ (ب) 6 , 8 , 10 (جـ) 7.5 , 3.7 , 8 (د) 6 , 6 , 9

(6) أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث منفرج الزاوية ؟

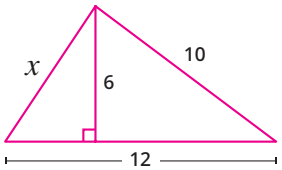
(أ) 24 , 10 , 27 (ب) 2.5 , 2 , 1.5 (جـ) 7 , 7 , 7 (د) $20 , 10 , 10\sqrt{3}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(7) أوجد قيمة x فى كل من الشكلين المقابلين.

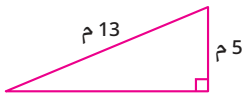


شكل (1)

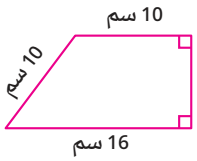


شكل (2)

(8) أوجد مساحة كل شكل من الشكلين المقابلين.



شكل (1)



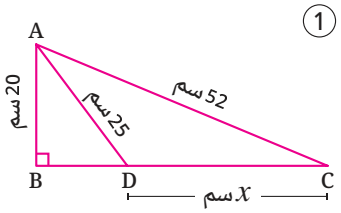
شكل (2)

(9) **فى كل مما يأتى، اذكر نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كالتالى :**

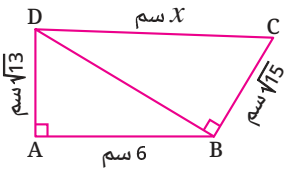
① 6 سم ، 3 سم ، 5 سم ② $\sqrt{6}$ سم ، $\sqrt{5}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم ③ 35 سم ، 28 سم ، 21 سم

(10) فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x :

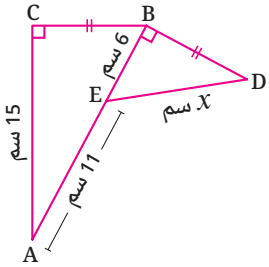
(1)



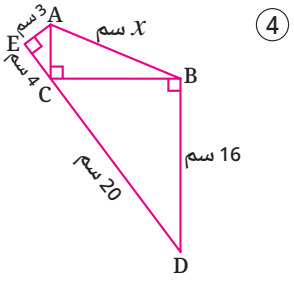
(2)



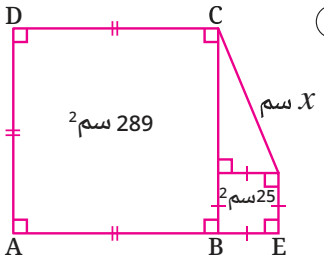
(3)



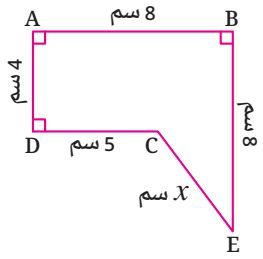
(4)



(5)

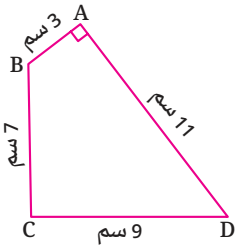


(6)



(11) فى الشكل المقابل :

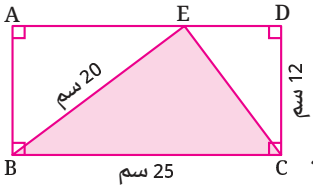
أثبت أن : $m(\angle C) = 90°$



(12) فى الشكل المقابل :

ABCD مستطيل

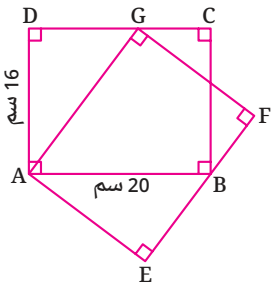
أثبت أن المثلث BEC قائم الزاوية، ثم أوجد مساحته.



(13) فى الشكل المقابل :

المستطيل ABCD يطابق المستطيل AGFE

أوجد مع البرهان طول $\overline{BF}$

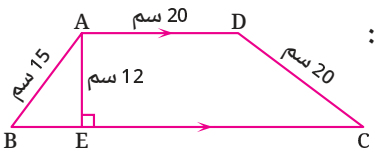


(14) فى الشكل المقابل :

ABCD شبه منحرف فيه :

AB = 15 سم ، AD = 20 سم ، DC = 20 سم.

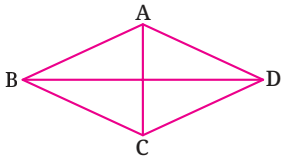
إذا كان ارتفاع شبه المنحرف 12 سم، فأوجد مساحته.



(15) فى الشكل المقابل :

ABCD معين محيطه 52 م، طول قطره $\overline{BD}$ يساوى 24 م.

أوجد مساحة المعين ABCD بالمتر المربع.



(16) اكتشف الخطأ :

أمل ومريم تحددان ما إذا كانت الأعداد 5 ، 12 ، 13 تصلح أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا ، أى منهما اتبعت الطريقة الصحيحة فى الحل؟ ناقش، وصوِّب الخطأ إن وُجد.

حل أمل :

$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2$

$= 169$

$c^2 = 13^2 = 169$

$a^2 + b^2 = c^2$

تصلح

حل مريم :

$a^2 + b^2 = 13^2 + 5^2$

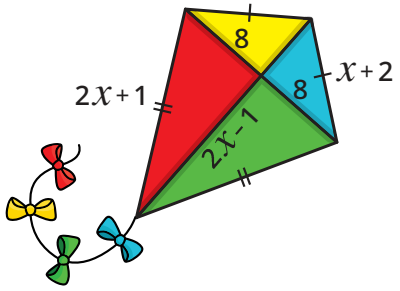
$= 194$

$c^2 = 12^2 = 144$

$a^2 + b^2 \neq c^2$

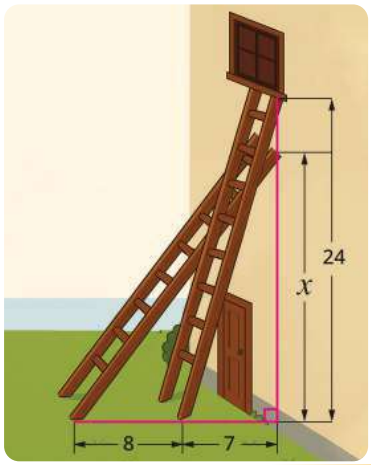
لا تصلح

ثالثًا التحليل وتكامل المواد



(17) **ألعاب :**
أمامك طائرة ورقية أبعادها كما بالشكل.
أوجد محيط الطائرة الورقية.

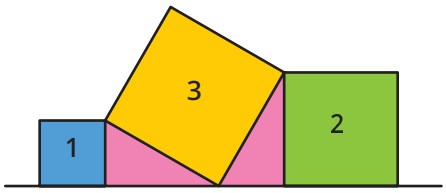
(18) **فنون :** وضع رسام سلمًا للوصول إلى أسفل نافذة على ارتفاع 24 قدمًا عن الأرض، فكانت قاعدة السلم تبعد 7 أقدام عن حائط المنزل. أثناء خلطه للطلاء انزلق السلم ، مما أدى إلى ابتعاد قاعدته 8 أقدام أخرى عن حائط المنزل.
ما الارتفاع الذى يصل إليه السلم حينئذ ؟



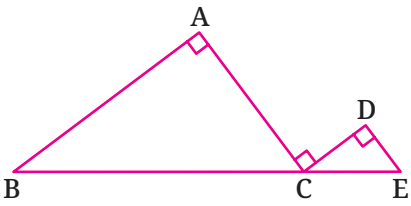
يجب اتباع قواعد الأمن والسلامة عند القيام بعمل الصيانات المنزلية.

تفكير إبداعى

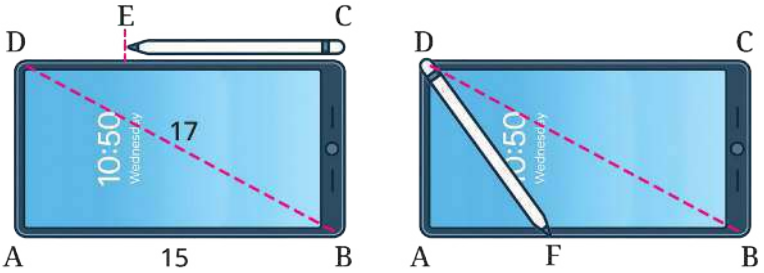
(19) فى الشكل التالى :
ثلاثة مربعات،
مساحة المربع (1) = 16 سم^2
ومساحة المربع (2) = 48 سم^2
أوجد مع البرهان طول ضلع المربع (3)



(20) فى الشكل التالى :
إذا كان : $AB + CD = 16$ سم،
$DE + AC = 12$ سم
أوجد مع البرهان طول $\overline{BE}$



(21) **تفكير ناقد :** يستخدم خالد قلم جهاز لوحى (تابلت) على شكل مستطيل ABCD ،
طول أحد أضلاعه 15 وحدة طول، وطول قطره 17 وحدة طول.



إذا كان طول $\overline{FB}$ يزيد عن طول $\overline{DE}$ أربع وحدات طول، فأوجد طول القلم.

قيّم فهمك!
ما مدى فهمك لنظرية فيثاغورس وعكسها ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس
3 - 3

تطبيقات التوازى
(Applications of Parallelism)

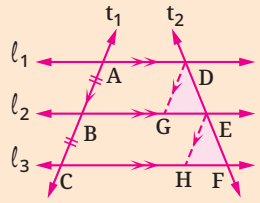
■ **نواتج التعلم**

- تعرف العلاقة بين أطوال أجزاء القواطع المحصورة بين المستقيمات المتوازية.
- تستخدم الشعاع المرسوم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين.
- تعرف القطعة المتوسطة فى المثلث.
- تعرف العلاقة بين القطعة المتوسطة فى المثلث والضلع المقابل لها.
- تستخدم التوازى فى حل المسائل فى الهندسة.

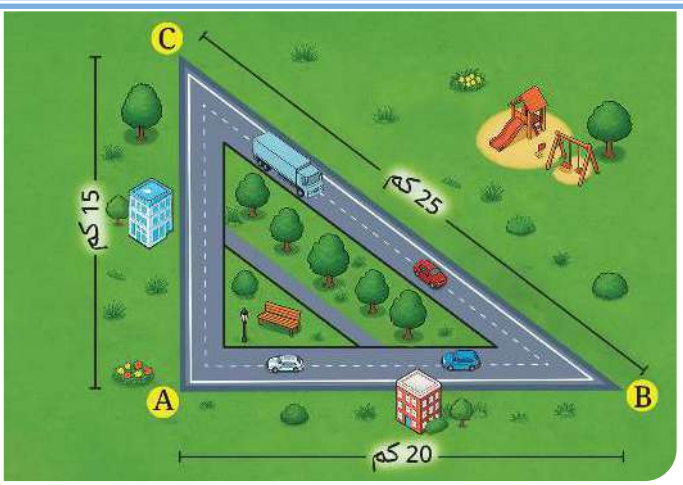
■ **المفردات**

- التوازى Parallelism
- نقطة المنتصف Midpoint
- القطعة المتوسطة Midsegment

■ **ناقش إثبات صحة نظرية (3-1)**



برسم $\overline{DG}$ ، $\overline{EH}$ توازيان المستقيم t_1، واستخدام خواص متوازى الأضلاع والتوازى لإثبات تطابق المثلثين FEH، EDG يمكن إثبات صحة النظرية (1 – 3)، ناقش ذلك.



استعد !

يخطط أحد مهندسى الطرق لإنشاء طريق جديد يربط بين المدرسة والمستشفى، بحيث يكون موازيًا للطريق الرئيسى، إذا علمت أن المدرسة تقع فى منتصف الطريق $\overline{AB}$، والمستشفى تقع فى منتصف الطريق $\overline{AC}$

فما طول هذا الطريق الجديد؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على العلاقة بين المستقيمات المتوازية والأجزاء المحصورة بينهم، وأيضًا العلاقة بين القطعة المتوسطة فى المثلث وأضلاع المثلث، مما يمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

فى الشكل المقابل :

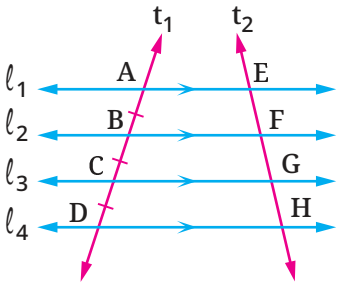
إذا كان طول العارضة الأفقية عند منتصف السلم 0.75 م، فهل تستطيع تحديد المسافة بين طرفى السلم على الأرض؟ ناقش.

تعلم !

بعض تطبيقات التوازى

نظرية 3-1

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأى قاطع آخر تكون متساوية فى الطول.



إذا كانت : $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$ ،

t_1 ، t_2 قاطعين لهم

بحيث $AB = BC = CD$

فإن : $EF = FG = GH$

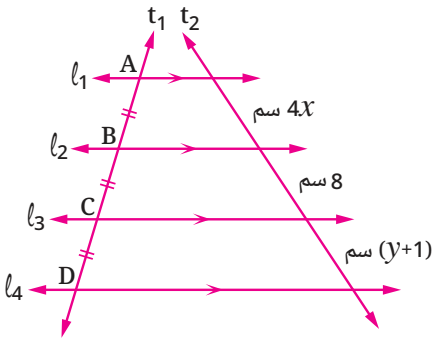
مثال 1

فى الشكل المقابل :

$\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$

المستقيمان t_1 ، t_2 قاطعان لهم.

أوجد قيمة كل من x ، y.



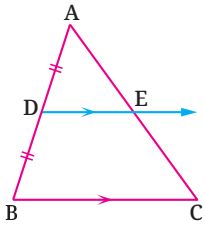
$\because \ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$, $AB = BC = CD$

$\therefore 4x = 8$ $\quad\quad$ $\therefore x = \frac{8}{4} = 2$

$y + 1 = 8$ $\quad\quad$ $\therefore y = 8 - 1 = 7$

نظرية 3-2

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.



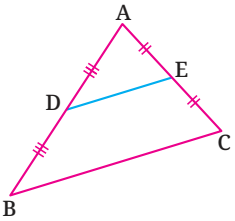
إذا كانت : D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$

فإن : E نقطة منتصف $\overline{AC}$

أى أن : $AE = EC$

القطعة المتوسطة فى المثلث

القطعة المتوسطة فى المثلث هى القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث.



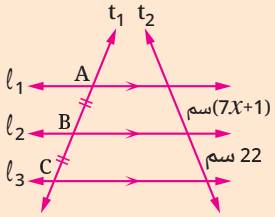
إذا كانت : D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ،

E نقطة منتصف $\overline{AC}$.

فإن : $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC

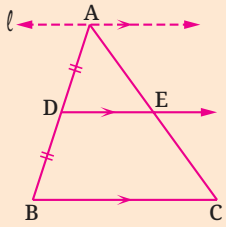
■ تقييم ذاتى (1)

فى الشكل التالى :



أوجد قيمة x.

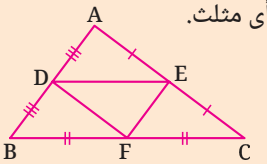
■ ناقش إثبات صحة نظرية (2-3)



برسم مستقيم من النقطة A يوازى كلًا من $\overrightarrow{DE}$ ، $\overline{BC}$ وملاحظة أن $AD = DB$ وباستخدام النظرية (1 - 3) يمكن إثبات صحة النظرية (2 - 3)، ناقش ذلك.

■ لاحظ أن

توجد ثلاث قطع متوسطة فى أى مثلث.



$\overline{DE}$ ، $\overline{DF}$ ، $\overline{FE}$ القطع المتوسطة فى المثلث ABC

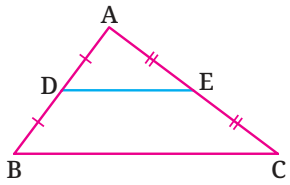
نظرية 3-3 (نظرية القطعة المتوسطة فى المثلث)

القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC

فإن : (1) $\overline{DE} // \overline{BC}$

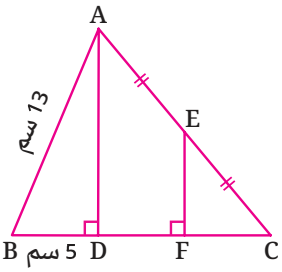
(2) $DE = \frac{1}{2} BC$



مثال 2

فى الشكل المقابل :

أوجد مع البرهان طول $\overline{EF}$



∵ المثلث ABD قائم الزاوية فى D

$\therefore (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$

$\therefore AD = \sqrt{144} = 12$

∵ $m(\angle ADB) = m(\angle EFB) = 90°$ (وهما زاويتان فى وضع تناظر)

$\therefore \overline{AD} // \overline{EF}$

فى المثلث ADC : ∵ $\overline{AC}$ منتصف E ، $\overline{AD} // \overline{EF}$ ∴ $\overline{DC}$ منتصف F

$\therefore EF = \frac{1}{2} AD$ $\therefore EF = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

أى أن طول $\overline{EF}$ = 6 سم.

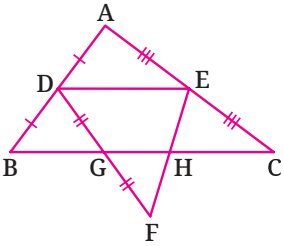
مثال 3

فى الشكل المقابل :

إذا كانت D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$ ،

G منتصف $\overline{DF}$ ،

برهن أن $BC = 4\,GH$



فى المثلث ABC :

∵ D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overline{DE} // \overline{BC}$, $DE = \frac{1}{2} BC$

فى المثلث FDE :

∵ G منتصف $\overline{DF}$ ، $\overline{GH} // \overline{DE}$ ∴ $\overline{EF}$ منتصف H

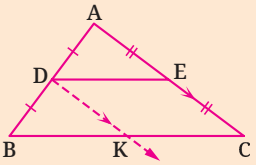
$\therefore GH = \frac{1}{2} DE$ $\therefore GH = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} BC) = \frac{1}{4} BC$ $\therefore BC = 4\,GH$

■ ناقش

كيف يمكنك إثبات أن طول القطعة المتوسطة فى المثلث يساوى نصف طول الضلع المقابل لها؟

• إرشاد :

ارسم $\overrightarrow{DK}$ يوازى $\overline{AC}$ ويقطع $\overline{BC}$ فى K ، ثم أثبت أن الشكل DKCE متوازى أضلاع.

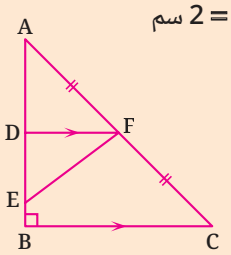


■ تقييم ذاتى (2)

فى الشكل التالى :

AB = BC = 16 سم

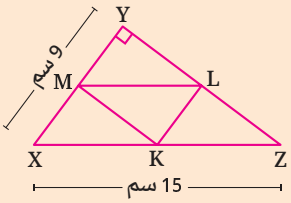
EB = 2 سم



أوجد طول $\overline{EF}$

■ تقييم ذاتى (3)

فى الشكل التالى :



أضلاع المثلث KLM هى القطع المتوسطة فى المثلث XYZ القائم الزاوية فى Y

احسب محيط المثلث KLM

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل المقابل :

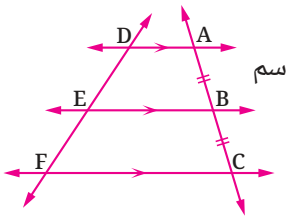
إذا كان طول $\overline{DF} = 15$ سم

ما طول $\overline{EF}$ ؟

(أ) 10 سم

(ب) 7.5 سم

(جـ) 5 سم (د) 2.5 سم



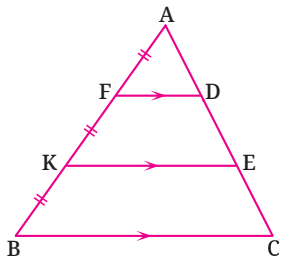
(2) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $AC = 12$ سم

فما طول $\overline{AE}$ ؟

(أ) 3 سم (ب) 4 سم

(جـ) 6 سم (د) 8 سم



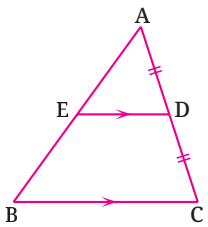
(3) فى الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overline{EB} = 10$ سم

ما طول $\overline{AB}$ ؟

(أ) 20 سم (ب) 10 سم

(جـ) 7.5 سم (د) 5 سم

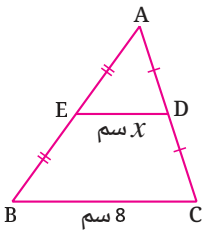


(4) فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(أ) 16 (ب) 8

(جـ) 4 (د) 2

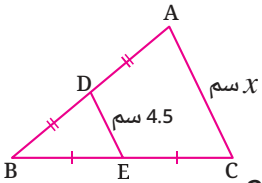


(5) فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(أ) 9 (ب) 4.5

(جـ) 13.5 (د) 2.25



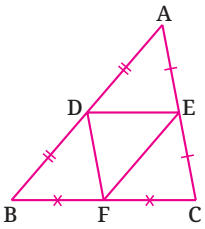
(6) فى الشكل المقابل :

إذا كان محيط ΔABC يساوى 18 سم

فما محيط ΔDEF ؟

(أ) 6 سم (ب) 12 سم

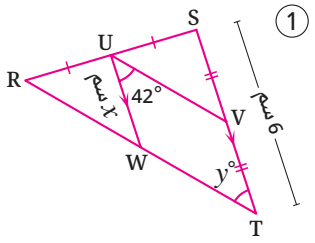
(جـ) 36 سم (د) 9 سم



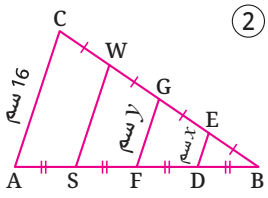
ثانيًا تطبيق المفاهيم

(7) فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من x ، y

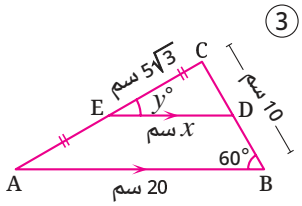
(1)



(2)



(3)

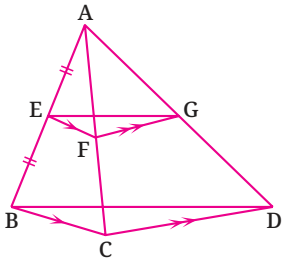


(8) فى الشكل المقابل :

إذا كانت E منتصف $\overline{AB}$ ،

$\overline{FG} // \overline{CD}$ ، $\overline{EF} // \overline{BC}$

برهن أن $BD = 2\,EG$

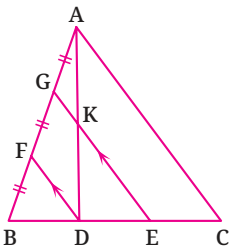


(9) فى الشكل المقابل :

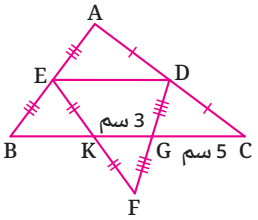
$\overline{FD} // \overline{GE}$ ، $GK = 8$ سم

$AG = GF = FB$

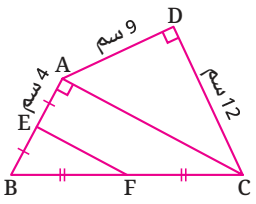
أوجد طول $\overline{KE}$



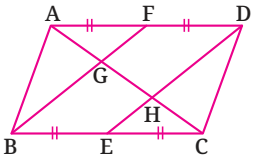
(10) **فى الشكل المقابل :**
أوجد مع البرهان
طول $\overline{BK}$



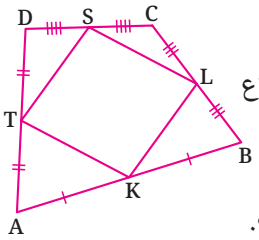
(11) فى الشكل المقابل :
ABCD شكل رباعى فيه
F , E منتصفا $\overline{AB}$, $\overline{BC}$
على الترتيب.
أوجد مساحة Δ BEF



(12) **فى الشكل المقابل :**
ABCD متوازى أضلاع ،
إذا كانت F , E منتصفى
$\overline{BC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.
فأثبت أن : $AC = 3\,AG$



(13) **فى الشكل المقابل :**
T , S , L , K منتصفات أضلاع
الشكل الرباعى ABCD
أثبت أن :
الشكل KLST متوازى أضلاع.



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

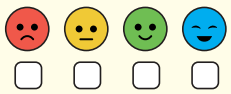
(14) **ديكور :** الشكل المقابل يمثل مكتبة خشبية على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 3 م وبداخلها ثلاثة أرفف زجاجية.
ما طول كل رف من الأرفف الثلاثة؟

يعكس التوزيع الأمثل لقطع الديكور طبقًا للمساحات وعيًا جماليًا، ويُضفى شعورًا بالراحة.

(15) **تصميم هندسى :** عند تصميم أرجوحة كما بالشكل المقابل كان طول العارضة الأفقية الواصلة بين منتصفى الساقين يساوى x قدم ، حيث $3 \le x \le 4$
أوجد أقل بُعد بين طرفى الساقين على الأرض.

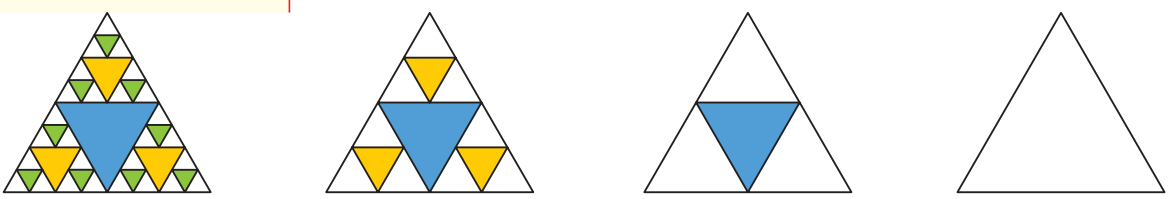
اختيار أماكن آمنة للعب يقلل من خطر التعرض للإصابات.

قيّم فهمك!
ما مدى فهمك لتطبيقات التوازى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



تفكير إبداعى

(16)



شكل (1) **شكل (2)** **شكل (3)** **شكل (4)**

شكل (1) يمثل مثلثًا محيطه 8 سم، وتم تلوين المثلث الناتج من القطع المتوسطة الثلاث كما بشكل (2) ، ثم تكرار ذلك على المثلثات غير الملونة للحصول على شكل (3) ثم بذات النمط تكوَّن شكل (4).
احسب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (3). وهل تستطيع حساب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (4)؟

الدرس
3 - 4

متوسطات المثلث
(Medians of the Triangle)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم متوسط المثلث.
- تعرف نقطة تلاقى متوسطات المثلث.
- تعرف العلاقة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة وطول الوتر فى المثلث القائم الزاوية.
- تستخدم متوسطات المثلث فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- متوسطات Medians
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث Centroid
- نقطة الاتزان Equilibrium point

استعد !

تُستخدم الطائرات بدون طيار فى مجالات متعددة، مثل التصوير الجوى، وأعمال الإنقاذ والمراقبة وغيرها، وتتزايد أهميتها مع تطور التكنولوجيا.

أمامك طائرة بدون طيار تحتوى على ثلاثة أذرع، كل ذراع ينتهى بمحرك.

إذا كانت هذه المحركات متطابقة، فأين يكون المركز الهندسى للطائرة ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إيجاد نقطة تقاطع متوسطات المثلث؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

يبتكر مُصمِّم ديكور طاولة مُخصصة لأحد العملاء.

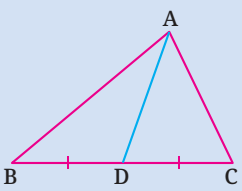
سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجى يحتاج إلى التوازن على دعامة واحدة.

ففى أى نقطة يجب وضع الدعامة؟ ناقش.

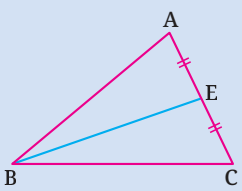
تعلم !

متوسط المثلث

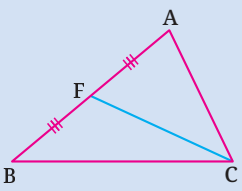
متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. كل مثلث له ثلاثة متوسطات كالتالى :



$\overline{AD}$ المتوسط
المرسوم من الرأس A



$\overline{BE}$ المتوسط
المرسوم من الرأس B



$\overline{CF}$ المتوسط
المرسوم من الرأس C

نظرية 4-1

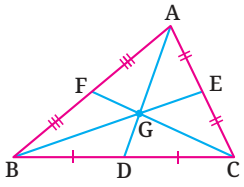
متوسطات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ متوسطات المثلث ABC

فإن : $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

أى أن : النقطة G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC



نظرية 4-2

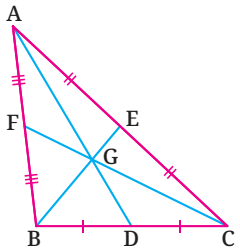
نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس.

فى الشكل المقابل :

إذا كانت G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

فإن :

$GD = \frac{1}{3} AD$ ، $AG = \frac{2}{3} AD$ ، $AG = 2\ GD$



نتيجة :

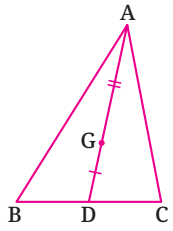
النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC

وكانت $G \in \overline{AD}$ بحيث $AG = 2\ GD$

فإن G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC



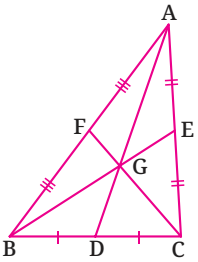
مثال 1

فى الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

وكان : $AG = 8$ سم ، $GE = 3.5$ سم ، $CF = 7.5$ سم

أوجد طول كل من $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CG}$



- $AD = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \times 8 = 12$
- $BE = 3\ GE = 3 \times 3.5 = 10.5$
- $CG = \frac{2}{3} CF = \frac{2}{3} \times 7.5 = 5$

أى أن : طول $\overline{AD} = 12$ سم ، طول $\overline{BE} = 10.5$ سم ، طول $\overline{CG} = 5$ سم

■ فكر مع زملائك

إذا تقاطع متوسطان لمثلث فى نقطة، فهل هذه النقطة هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث؟

■ أضف إلى معلوماتك

تُسمى نقطة تقاطع متوسطات المثلث بالمركز الهندسى للمثلث أو نقطة الاتزان.

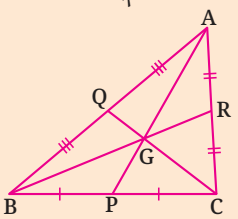
■ فكر مع زملائك

ما النسبة التى تقسم بها نقطة تقاطع متوسطات المثلث أيًا من متوسطاته من جهة القاعدة؟

■ تقييم ذاتى ①

فى الشكل التالى :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان $AP = 21$ سم ، $GQ = 5$ سم، $BG = 16$ سم.

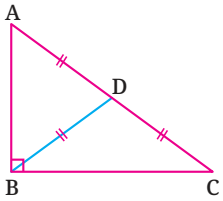


أوجد طول كل من :

$\overline{PG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BR}$

نظرية 4-3

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.

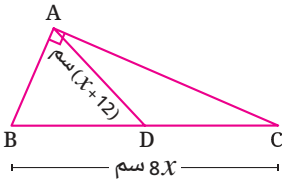


فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا مرسومًا من رأس القائمة B

فإن : $BD = AD = DC = \frac{1}{2} AC$

مثال 2



فى الشكل المقابل :

المثلث ABC قائم الزاوية فى A ، $\overline{AD}$ متوسط فيه.

أوجد طول $\overline{AD}$

∵ $\overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC وخارج من رأس القائمة

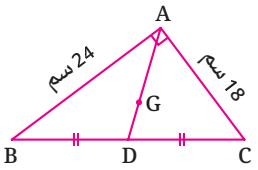
$\therefore AD = \frac{1}{2} BC$ $\quad\quad$ $\therefore x + 12 = \frac{1}{2} \times 8x$

$\therefore x + 12 = 4x$ $\quad\quad$ $\therefore 3x = 12$ $\quad\quad$ $\therefore x = 4$

$\therefore AD = x + 12 = 4 + 12 = 16$

أى أن طول $\overline{AD}$ يساوى 16 سم.

مثال 3



فى الشكل المقابل :

إذا كانت G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

القائم الزاوية فى A ، أوجد طول $\overline{AG}$

∵ المثلث ABC قائم الزاوية فى A

$\therefore (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ (نظرية فيثاغورس)

$= (24)^2 + (18)^2 = 900$

$\therefore BC = \sqrt{900} = 30$

∵ $\overline{AD}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 30 = 15$

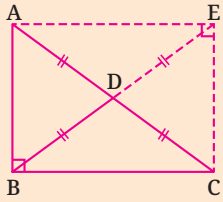
∵ G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

$\therefore AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 15 = 10$

أى أن طول $\overline{AG}$ يساوى 10 سم

■ ناقش إثبات صحة النظرية

أكمل رسم المستطيل.



قطرا المستطيل متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر.

أى أن :

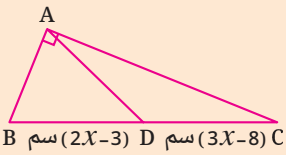
$BD = AD = DC = DE$

$= \frac{1}{2} AC$

■ تقييم ذاتى ②

فى الشكل التالى :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC القائم الزاوية فى A



أوجد طول $\overline{AD}$

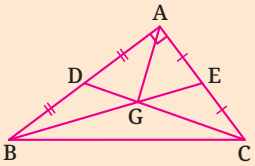
■ تقييم ذاتى ③

فى الشكل التالى :

إذا كانت D , E منتصفى $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على الترتيب ،

$\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{G\}$

$AC = 9$ سم ، $AG = 5$ سم



أوجد طول $\overline{AB}$

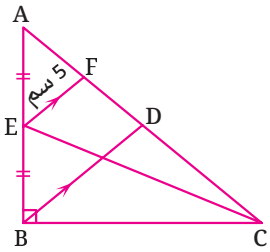
مثال 4

فى الشكل المقابل :

إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية فى B

$\overline{CE}$, $\overline{BD}$ متوسطين فيه ، $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ ، $EF = 5$ سم

أوجد طول $\overline{AC}$



فى المثلث ABD :

∵ E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ ∴ F منتصف $\overline{AD}$

$\therefore EF = \frac{1}{2} BD$ $\therefore BD = 2 \times 5 = 10$

∵ $\overline{BD}$ متوسط فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B

$\therefore BD = \frac{1}{2} AC$ $\therefore AC = 2 \times 10 = 20$

أى أن طول $\overline{AC}$ يساوى 20 سم.

عكس نظرية (3 – 4)

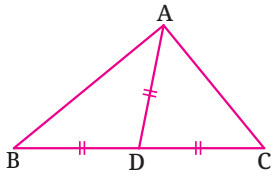
إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس ، فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا مرسومًا من الرأس A ،

وكان : $AD = BD = CD = \frac{1}{2} BC$

فإن : $m(\angle BAC) = 90°$



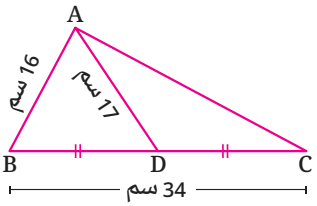
مثال 5

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC

فأثبت أن : $m(\angle BAC) = 90°$

ثم أوجد مساحة المثلث ABC



∵ $AD = 17$ ، $BC = 34$

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC$ $\therefore m(\angle BAC) = 90°$

من نظرية فيثاغورس تجد أن :

$(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2$

$= (34)^2 - (16)^2 = 900$

$\therefore AC = \sqrt{900} = 30$

∴ مساحة المثلث ABC $= \frac{1}{2} \times AB \times AC$

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 30 = 240$ سم^2.

■ تقييم ذاتى ④

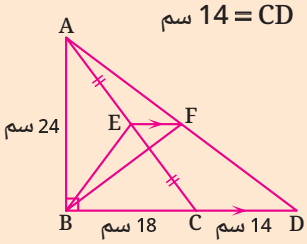
فى الشكل التالى :

إذا كانت $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ ، $C \in \overline{BD}$

E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$

$AB = 24$ سم ، $BC = 18$ سم

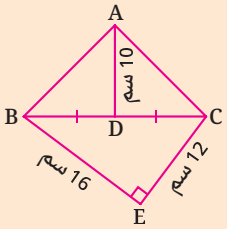
$CD = 14$ سم



أوجد محيط المثلث BEF

■ تقييم ذاتى ⑤

فى الشكل التالى :



إذا كانت D منتصف $\overline{BC}$

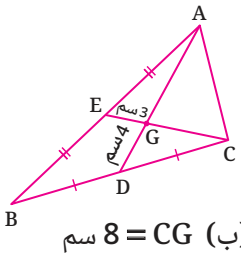
أثبت أن : $m(\angle BAC) = 90°$

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

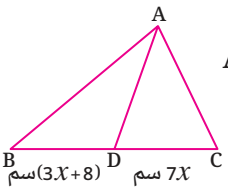
(1) فى الشكل المقابل :



إذا كانت G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ،
GE = 3 سم ، GD = 4 سم
فأى مما يلى صحيح ؟

(أ) AG = 6 سم
(ب) CG = 8 سم
(جـ) CE = 9 سم
(د) AG = 12 سم

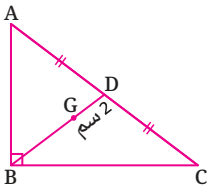
(2) فى الشكل المقابل :



$\overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC
ما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 3 سم
(ب) 6 سم
(جـ) 14 سم
(د) 28 سم

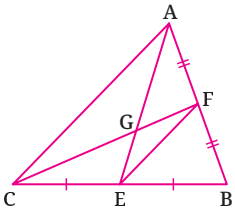
(3) فى الشكل المقابل :



إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC القائم الزاوية فى B ،
GD = 2 سم، فما طول $\overline{AC}$ ؟

(أ) 8 سم
(ب) 12 سم
(جـ) 18 سم
(د) 24 سم

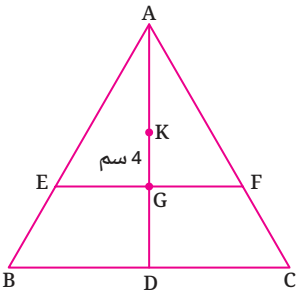
(4) فى الشكل المقابل :



$\overline{AE}$, $\overline{CF}$ متوسطان فى المثلث ABC ،
$\overline{AE} \cap \overline{CF} = \{G\}$
CG = 12 سم ،
AE = 15 سم ،
AC = 20 سم ، فما محيط المثلث GEF ؟

(أ) 18 سم
(ب) 21 سم
(جـ) 24 سم
(د) 27 سم

(5) فى الشكل المقابل :

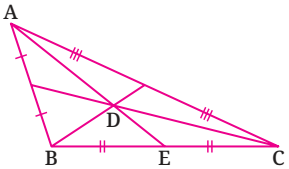


إذا كانت G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ،
K نقطة تلاقى متوسطات المثلث AEF فما طول $\overline{GD}$ ؟

(أ) 2 سم
(ب) 4 سم
(جـ) 6 سم
(د) 8 سم

◂ اكتشف الخطأ :

(6) قام كل من باسم وسامح بحل المسألة التالية :
فى الشكل المقابل : إذا كان طول $\overline{AE}$ = 48 سم، فما طول $\overline{DE}$ ؟



حل باسم :

$DE = \frac{2}{3} AE$

$DE = \frac{2}{3} (48)$

$DE = 32$

حل سامح :

$DE = \frac{1}{3} AE$

$DE = \frac{1}{3} (48)$

$DE = 16$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل؟ ناقش.

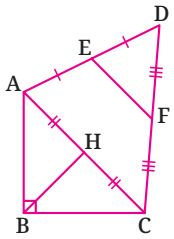
ثانيًا تطبيق المفاهيم

(7) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{BH}$ متوسطًا فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B ،

E ، F منتصفى $\overline{AD}$ ، $\overline{CD}$ على الترتيب

أثبت أن : $BH = EF$



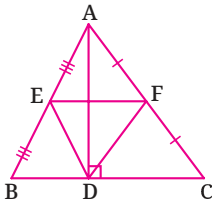
(8) فى الشكل المقابل :

ABC مثلث فيه $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

E ، F منتصفى $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$

على الترتيب.

أثبت أن : محيط المثلث EFD $= \frac{1}{2}$ محيط المثلث ABC



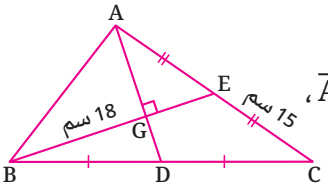
(9) فى الشكل المقابل :

إذا كانت E منتصف $\overline{AC}$ ،

D منتصف $\overline{BC}$ ،

$\overline{AD} \perp \overline{BE}$ ، $CE = 15$ سم ، $BG = 18$ سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{AD}$



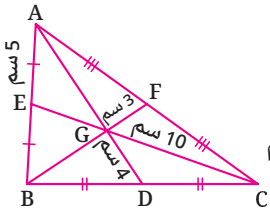
(10) فى الشكل المقابل :

G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، $AE = 5$ سم

$CG = 10$ سم

$GD = 4$ سم ، $GF = 3$ سم

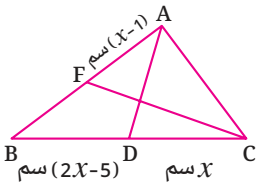
أوجد بالبرهان مساحة المثلث ABD



(11) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ ، $\overline{CF}$ متوسطين فى المثلث ABC

أوجد طول $\overline{FB}$

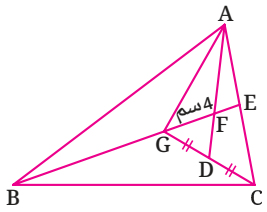


(12) فى الشكل المقابل :

G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، $DC = DG$ ،

$GF = 4$ سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{BE}$

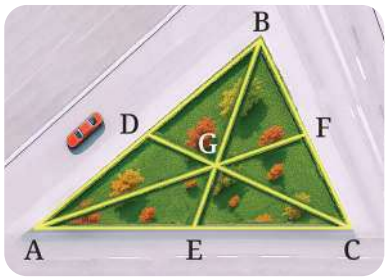


ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(13) تصميم هندسى : توجد ثلاثة مسارات داخل حديقة مثلثة الشكل ، كل مسار هو متوسط للمثلث الذى يمثل الحديقة، تتقاطع هذه المسارات فى نقطة تلاقى المتوسطات.

① إذا كانت $DC = 81$ م ، أوجد كلًا من DG ، CG

② إذا كانت $GF = 25$ م ، أوجد كلًا من GA ، AF

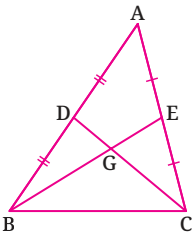


تفكير إبداعى

(14) فى الشكل المقابل :

إذا كان $BE = 15$ سم ، $CD = 9$ سم

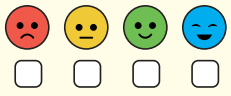
أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول $\overline{BC}$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لمتوسطات المثلث ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
5 - 3

المثلث المتساوى الساقين
(Isosceles Triangle)

■ **نواتج التعلم**

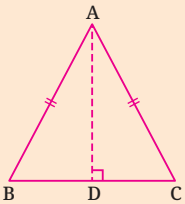
- تعرف خواص المثلث المتساوى الساقين.
- تعرف خواص المثلث المتساوى الأضلاع.
- تعرف التماثل فى المثلث.
- تعرف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث الثلاثينى الستينى.
- تستخدم خواص المثلث المتساوى الساقين والمثلث المتساوى الأضلاع فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- مثلث متساوى الساقين
Isosceles triangle
- مثلث متساوى الأضلاع
Equilateral triangle
- الساق Leg
- القاعدة Base
- محور التماثل
Axis of symmetry

■ **ناقش إثبات صحة نظرية (1-5)**

نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، ومن تطابق المثلثين ACD ، ABD
يمكن إثبات أن : $\angle B \cong \angle C$

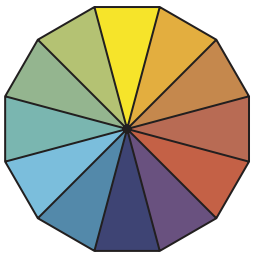


استعد !

مدينة دهب المصرية التابعة لمحافظة جنوب سيناء ليست مجرد مدينة ساحلية بل هى من أجمل المدن السياحية فى العالم.
إذا قام عادل وصديقه ياسر بإعداد خيمة مثلثة الوجه للتخييم فى أحد شواطئ دهب، ما ارتفاع الخيمة تقريبًا؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على المثلث المتساوى الساقين، والمثلث المتساوى الأضلاع، ومحاور تماثلهما؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

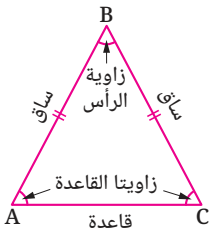
فكر وناقش !



يستخدم الفنانون عجلة الألوان لإظهار العلاقات بين الألوان.
المثلثات الاثنا عشر فى الشكل هى مثلثات متساوية الساقين، وزوايا رؤوسها متطابقة.
فهل يمكنك إيجاد قياس الزوايا الداخلة فى أى مثلث من هذه المثلثات؟ ناقش.

تعلم !

المثلث المتساوى الساقين

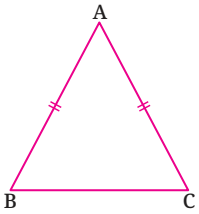


المثلث المتساوى الساقين هو مثلث يحتوى على ضلعين متطابقين.

- يُسمى الضلعان المتطابقان ساقى المثلث.
- تُسمى الزاوية المحصورة بينهما زاوية الرأس.
- تُسمى الزاويتان الأخريان زاويتى القاعدة.

نظرية 5-1 نظرية المثلث المتساوى الساقين

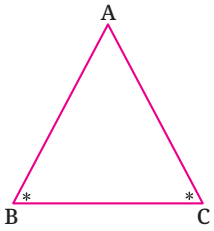
زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.



فى المثلث ABC :
إذا كانت : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
فإن : $\angle B \cong \angle C$

عكس نظرية (1 – 5) عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.



فى المثلث ABC :

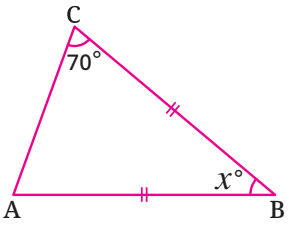
إذا كانت : $\angle B \cong \angle C$

فإن : $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

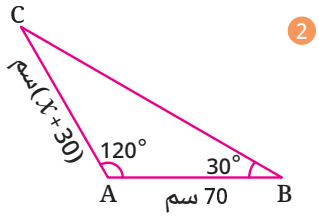
مثال 1

أوجد قيمة x فى كل من الشكلين الآتيين :

1



2



(1)

$\because \overline{AB} \cong \overline{CB} \quad \therefore \angle A \cong \angle C$

$\therefore m(\angle A) = m(\angle C) = 70°$

$\therefore m(\angle B) = 180° - (70° + 70°)$

$= 40°$

$\therefore x = 40$

(2)

$\because m(\angle C) = 180° - (120° + 30°)$

$= 30°$

$\therefore \angle C \cong \angle B \quad \therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\therefore x + 30 = 70$

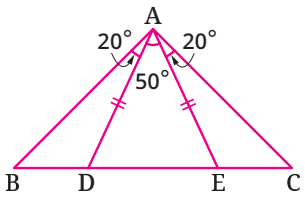
$\therefore x = 70 - 30 = 40$

مثال 2

فى الشكل المقابل :

$E \in \overline{BC}$ ، $D \in \overline{BC}$

أثبت أن المثلث ABC متساوى الساقين.



فى المثلث ADE :

$\because \overline{AD} \cong \overline{AE}$

$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle AED) = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$

$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC) = 180° - 65° = 115°$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle C) = 180° - (20° + 115°) = 45°$

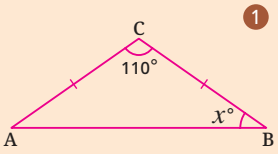
$\therefore \angle B \cong \angle C \quad \therefore \overline{AB} \cong \overline{AC}$

∴ المثلث ABC متساوى الساقين.

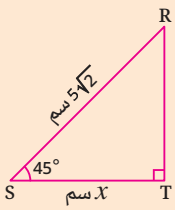
■ تقييم ذاتى (1)

أوجد قيمة x فى كل من الشكلين الآتيين :

1

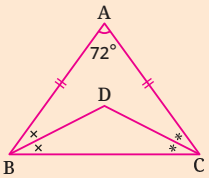


2



■ تقييم ذاتى (2)

فى الشكل التالى :



$AB = AC$, $m(\angle A) = 72°$

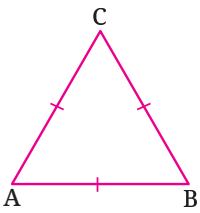
$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

أثبت أن :

المثلث DBC متساوى الساقين.

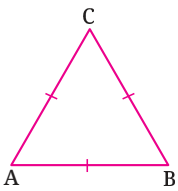
المثلث المتساوى الأضلاع



المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

نتيجة :

المثلث المتساوى الأضلاع زواياه الثلاث متطابقة.



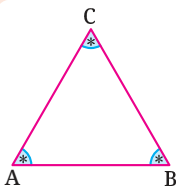
فى المثلث ABC :

إذا كان : $AB = AC = BC$

فإن : $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

نتيجة :

المثلث الذى زواياه الثلاث متطابقة أضلاعه متساوية فى الطول.



فى المثلث ABC :

إذا كانت : $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

فإن : $AB = AC = BC$

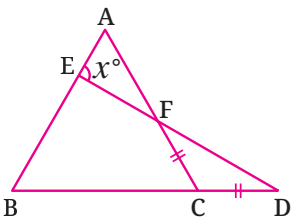
مثال 3

فى الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوى الأضلاع.

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$, $CF = CD$

أوجد قيمة x



∵ Δ ABC متساوى الأضلاع.

∴ $m(\angle ACB) = m(\angle A) = m(\angle B) = 60°$

∴ $m(\angle FCD) = 180° - 60° = 120°$

∵ Δ FCD متساوى الساقين فيه : $CF = CD$

∴ $m(\angle D) = m(\angle CFD) = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$

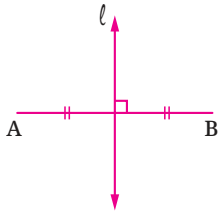
∵ $\angle AED$ خارجة عن المثلث EBD

∴ $m(\angle AED) = m(\angle B) + m(\angle D) = 60° + 30° = 90°$

∴ $x = 90$

محور تماثل القطعة المستقيمة

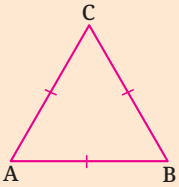
محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من نقطة منتصفها.



إذا كان : المستقيم $\ell \perp \overline{AB}$ ، المستقيم ℓ ينصف $\overline{AB}$

فإن : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$.

ناقش إثبات صحة النتائج



استخدم نظرية المثلث المتساوى الساقين وعكسها فى إثبات صحة النتائج المجاورة.

تقييم ذاتى ③

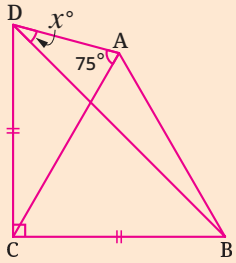
فى الشكل التالى :

ABC مثلث متساوى الأضلاع

$BC = CD$

$m(\angle DAC) = 75°$

$m(\angle DCB) = 90°$



أوجد مع البرهان قيمة x.

نتائج محور تماثل القطعة المستقيمة

نتيجة :

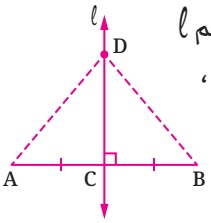
النقطة التى تنتمى إلى محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

إذا كان : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$ ،

$D \in \ell$

فإن :

$DA = DB$



نتيجة :

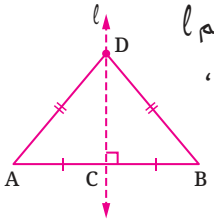
النقطة التى على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة تقع على محور تماثل هذه القطعة المستقيمة.

إذا كان : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$ ،

$DA = DB$

فإن :

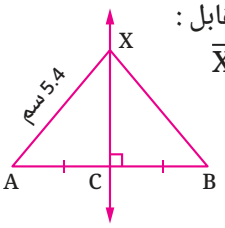
$D \in \ell$



مثال 4

1 فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{XB}$



1

$\because CA = CB$, $\overleftrightarrow{XC} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XC}$ محور تماثل $\overline{AB}$

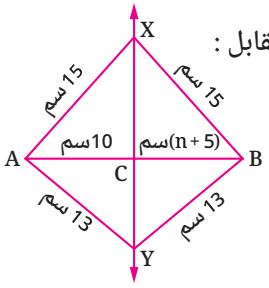
$\because X \in \overleftrightarrow{XC}$

$\therefore XB = XA = 5.4$

$\therefore$ طول $\overline{XB} = 5.4$ سم

2 فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة n



2

$\because XA = XB = 15$

$\therefore X$ تقع على محور تماثل $\overline{AB}$

$\because YA = YB = 13$

$\therefore Y$ تقع على محور تماثل $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XY}$ محور تماثل $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{AB}$, $CB = CA$

$\therefore n + 5 = 10$

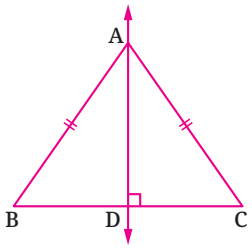
$\therefore n = 10 - 5 = 5$

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو مستقيم يمر برأس المثلث وعمودى على قاعدته.

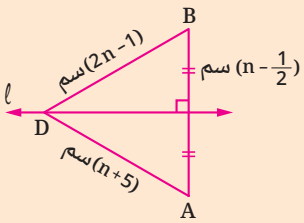
إذا كان : $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$, $AB = AC$

فإن : $\overleftrightarrow{AD}$ محور تماثل المثلث ABC



■ تقييم ذاتى (4)

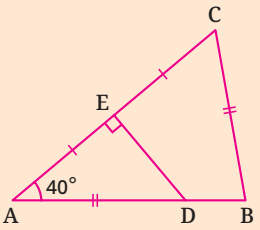
1 فى الشكل التالى :



أوجد : $m(\angle A)$

2 فى الشكل التالى :

$AE = EC$, $AD = CB$



أوجد : $m(\angle C)$

■ لاحظ أن

- المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد فقط.
- المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل.
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل.

نتائج محور تماثل المثلث المتساوى الساقين

نتيجة :

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.

إذا كان :

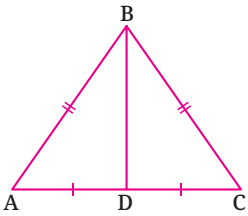
$AB = CB$

$\overline{BD}$ متوسط

فإن :

① $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

② $m(\angle ABD) = m(\angle CBD)$



نتيجة :

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.

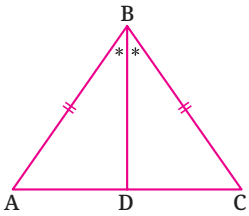
إذا كان :

$AB = CB$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ فإن :

① $AD = CD$

② $\overline{BD} \perp \overline{AC}$



نتيجة :

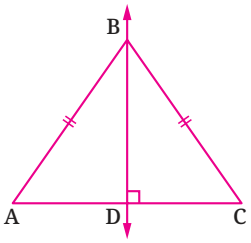
المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلًا من القاعدة وزاوية الرأس.

إذا كان :

$\overleftrightarrow{BD} \perp \overline{AC}$, $AB = CB$

فإن :

① $AD = DC$ ② $m(\angle ABD) = m(\angle CBD)$



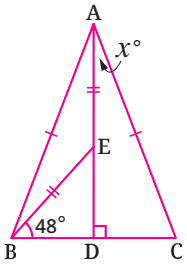
مثال 5

فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $EA = EB$, $AB = AC$

$m(\angle EBD) = 48°$

أوجد قيمة x



فى المثلث EDB :

$m(\angle DEB) = 180° - (90° + 48°) = 42°$

∵ $\angle DEB$ خارجة عن المثلث AEB , $EA = EB$

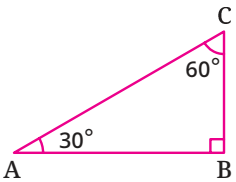
$\therefore m(\angle EAB) = m(\angle EBA) = \frac{42°}{2} = 21°$

∵ المثلث ABC متساوى الساقين ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore m(\angle CAD) = m(\angle BAD) = 21°$ $\quad \therefore x = 21$

المثلث الثلاثينى الستينى

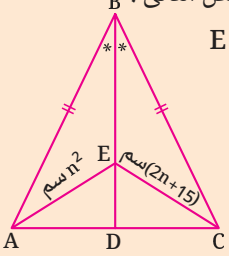
المثلث الثلاثينى الستينى هو مثلث قائم الزاوية زاويتاه الحادتان قياساهما 30° ، 60° .



■ **تقييم ذاتى ⑤**

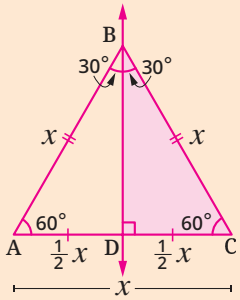
فى الشكل التالى :

$E \in \overline{BD}$



أوجد قيمة n

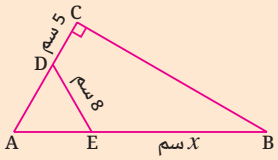
■ **لاحظ أن**



محور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين، وكل منهما مثلث ثلاثينى ستينى.

■ **تقييم ذاتى** ⑥

فى الشكل التالى :
المثلث ADE متساوى الأضلاع.



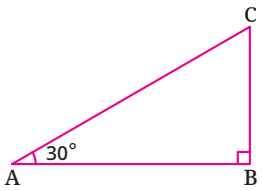
أوجد قيمة x

نتيجة :

فى المثلث الثلاثينى الستينى طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها 30° يساوى نصف طول الوتر.

إذا كان :
ΔABC قائم الزاوية فى B ، $m(\angle A) = 30°$

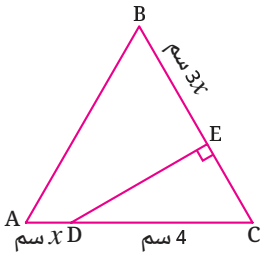
فإن : $BC = \frac{1}{2} AC$



مثال 6

فى الشكل المقابل :

إذا كان ΔABC متساوى الأضلاع
فأوجد قيمة x



$\because \Delta ABC$ متساوى الأضلاع

$\therefore m(\angle C) = 60°$

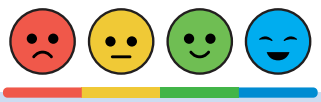
$\because m(\angle DEC) = 90°$ $\quad \therefore m(\angle EDC) = 30°$

$\therefore$ المثلث DEC ثلاثينى ستينى

$\therefore EC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$\because BC = AC$ $\quad \therefore 3x + 2 = x + 4$ $\quad \therefore 3x - x = 4 - 2$

$\therefore 2x = 2$ $\quad \therefore x = 1$

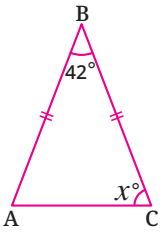


تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① **فى الشكل المقابل :**

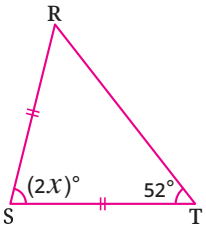


ما قيمة x ؟

(أ) 42 (ب) 21

(جـ) 69 (د) 84

② **فى الشكل المقابل :**

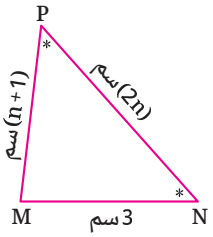


ما قيمة x ؟

(أ) 26 (ب) 52

(جـ) 76 (د) 38

③ **فى الشكل المقابل :**

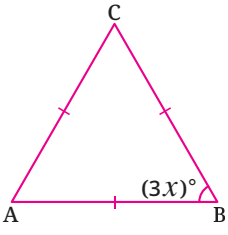


ما طول $\overline{PN}$ ؟

(أ) 8 سم (ب) 3 سم

(جـ) 6 سم (د) 4 سم

④ **فى الشكل المقابل :**



ما قيمة x ؟

(أ) 10 (ب) 20

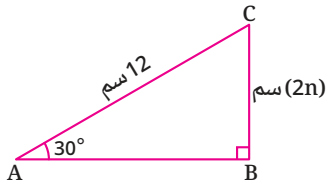
(جـ) 30 (د) 60

(5) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين 3 سم ، 7 سم، فما طول الضلع الثالث؟

(أ) 3 سم (ب) 4 سم

(جـ) 7 سم (د) 10 سم

(6) فى الشكل المقابل :

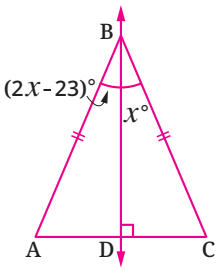


ما قيمة n ؟

(أ) 3 (ب) 6

(جـ) 9 (د) 12

(7) فى الشكل المقابل :

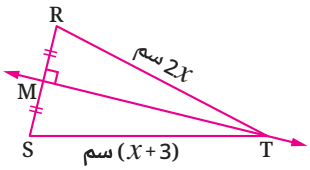


ما قياس ∠ C ؟

(أ) 23° (ب) 46°

(جـ) 67° (د) 60°

(8) فى الشكل المقابل :



ما قيمة x ؟

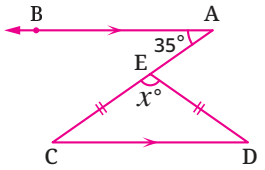
(أ) 10 (ب) 7

(جـ) 5 (د) 3

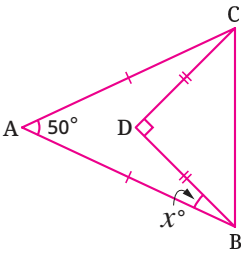
ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x :

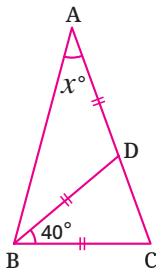
(9)



(10)



(11)

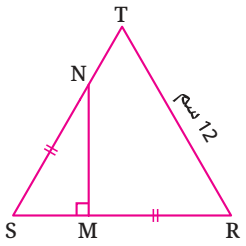


(12) فى الشكل المقابل :

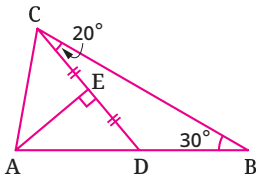
المثلث SRT متساوى الأضلاع، وطول ضلعه 12 سم

$MR = SN$ ، $\overline{NM} \perp \overline{SR}$

أوجد مع البرهان طول $\overline{NM}$



(13) فى الشكل المقابل :



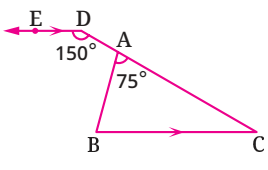
$m(\angle B) = 30°$, $m(\angle DCB) = 20°$

$CE = DE$, $\overline{AE} \perp \overline{CD}$

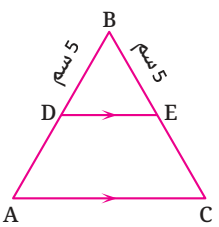
أوجد مع البرهان : $m(\angle CAE)$

◂ فى كل من الأشكال الآتية أثبت أن المثلث ABC متساوى الساقين :

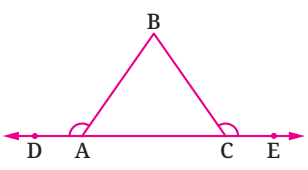
(14)



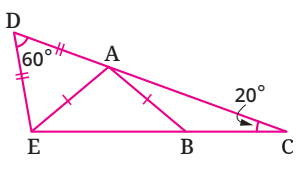
(15)



(16)



(17)



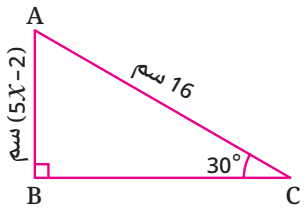
◂ أجب عن الأسئلة التالية :

(18) فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة x ،

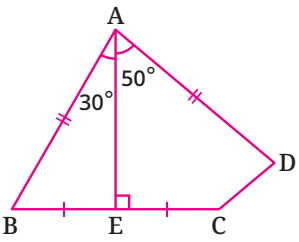
وأوجد مساحة

المثلث ABC



(19) فى الشكل المقابل :

أوجد $m(\angle D)$



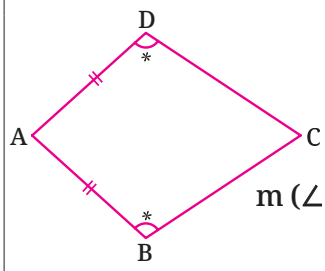
(20) فى الشكل المقابل :

ABCD شكل رباعى

فيه $AB = AD$

$m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$

برهن أن : $BC = DC$



(21) فى الشكل المقابل :

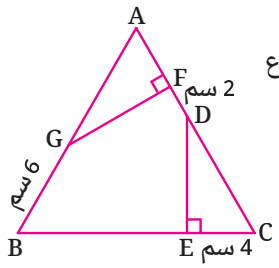
المثلث ABC متساوى الأضلاع

$EC = 4$ سم ، $FD = 2$ سم،

$GB = 6$ سم

أوجد مع البرهان

محيط ΔABC



(22) فى الشكل المقابل :

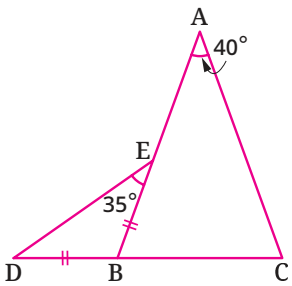
$D \in \overrightarrow{CB}$

$m(\angle DEB) = 35°$,

$m(\angle A) = 40°$

$BE = BD$

أثبت أن : $AB = AC$



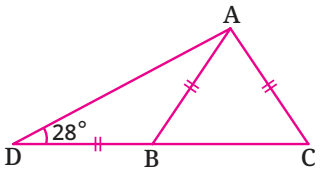
(23) فى الشكل المقابل :

$B \in \overline{DC}$

$m(\angle D) = 28°$

أوجد مع البرهان

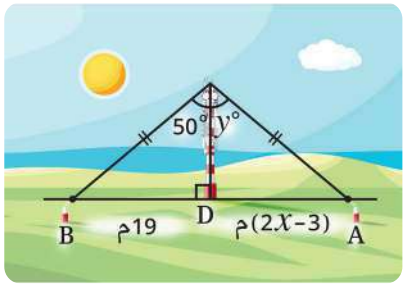
$m(\angle CAD)$



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(24) **اتصالات :** برج اتصالات مثبت بالأرض بواسطة سلكين متساويين فى الطول فى النقطتين A , B بحيث قاعدة البرج D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ كما بالشكل.

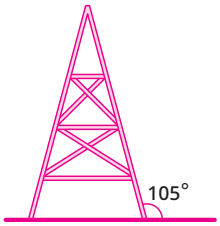
ما قيمة كل من x , y التى تجعل البرج عموديًا على الأرض؟



(25) **أبراج مراقبة :** بُنى برج مراقبة ، وصُمم على شكل مثلث متساوى الساقين كما بالشكل.

إذا كان أحد أضلاع البرج يلتقى بالأرض بزاوية قياسها 105°،

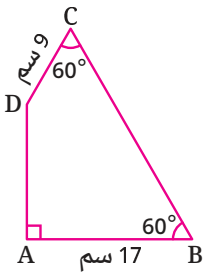
فما قياس الزاوية عند قمته ؟



تفكير إبداعى

(26) فى الشكل المقابل :

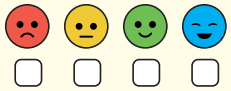
أوجد مع البرهان طول $\overline{BC}$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للمثلث المتساوى الساقين؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس

6 - 3

الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات
(Interior and Exterior Angles of Polygons)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف الصيغة الرياضية لحساب مجموع قياسات زوايا المضلع المحدب الداخلة.
- تعرف مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب.
- تعرف الصيغة الرياضية لحساب قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم.
- تعرف الصيغة الرياضية لحساب عدد أقطار المضلع المحدب.

■ **المفردات**

- مضلع Polygon
- مضلع منتظم Regular polygon
- مضلع محدب Convex polygon
- زاوية داخلة Interior angle
- زاوية خارجة Exterior angle

استعد !

مبنى الأوكتاجون فى العاصمة الإدارية الجديدة

مبنى الأوكتاجون هو المقر الجديد لوزارة الدفاع المصرية بالعاصمة الإدارية الجديدة، ويُعد أحد أكبر وأحدث مقرات وزارات الدفاع فى العالم.

هل تستطيع إيجاد قياس الزاوية الداخلة للمضلع الذى يمثله هذا المبنى؟

في هذا الدرس، سوف تتعرف على كيفية حساب مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع المحدب، وحساب قياس زاوية المضلع المنتظم؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

أثناء تنظيم قاعة مؤتمرات استخدم المنظم طاولات متطابقة كل منها على شكل شبه منحرف متساوى الساقين.

كم طاولة يحتاجها المنظم لتكوين مضلع منتظم؟ ناقش.

تعلم !

الصيغة الرياضية لمجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب

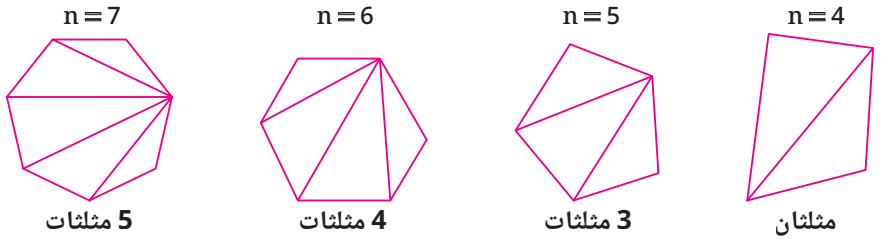
مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب = $(n-2) \times 180°$

حيث n عدد أضلاع المضلع.

فمثلًا :

- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الخماسى المحدب = $(5-2) \times 180° = 540°$
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الثمانى المحدب = $(8-2) \times 180° = 1080°$

◄ **يمكن استنتاج الصيغة السابقة بملاحظة النمط التالى :**



• الأقطار المرسومة من أحد رؤوس المضلع تقسم المضلع إلى عدد من المثلثات = $(n-2)$ مثلث.

• كل مثلث مجموع قياسات زواياه الداخلة = $180°$.

• مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع = $180° \times$ عدد المثلثات

$= (n-2) \times 180°$

مثال 1

فى كل مما يأتى، أوجد عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة :

1 $720°$ 2 $1440°$

(1) $(n-2) \times 180° = 720°$

$\therefore n-2 = \frac{720°}{180°} = 4$

$\therefore n = 4+2 = 6$

$\therefore$ عدد الأضلاع = 6 أضلاع

(2) $(n-2) \times 180° = 1440°$

$\therefore n-2 = \frac{1440°}{180°} = 8$

$\therefore n = 8+2 = 10$

$\therefore$ عدد الأضلاع = 10 أضلاع

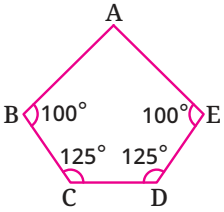
مثال 2

نجارة : يصنع نجار خزانة خشبية لوضعها فى أحد أركان غرفة مستطيلة الشكل. فإذا صنع النجار الخزانة بالزوايا الموضحة بالشكل فهل هى مناسبة أم لا ؟

لكى تكون الخزانة مناسبة

يجب أن يكون $m(\angle A) = 90°$

◄ احسب مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الخماسى كالتالى :



$(n-2) \times 180° = (5-2) \times 180° = 540°$

$\therefore m(\angle A) + 100° + 125° + 125° + 100° = 540°$

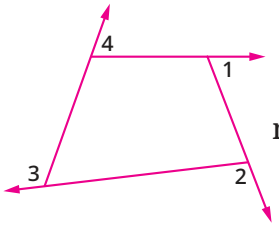
$\therefore m(\angle A) = 540° - 450° = 90°$

$\therefore$ الخزانة مناسبة لوضعها فى أحد أركان الغرفة.

مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب

قاعدة

مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب (زاوية واحدة عند كل رأس) يساوى $360°$



فى الشكل المقابل :

$m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) + m(\angle 4) = 360°$

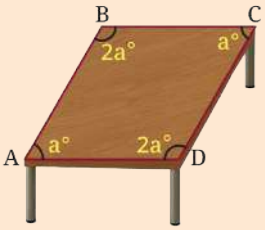
■ تقييم ذاتى (1)

ما عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة $1260°$ ؟

■ تقييم ذاتى (2)

فى الشكل التالى :

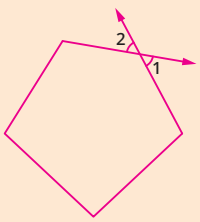
طاولة طعام سطحها على شكل متوازى أضلاع.



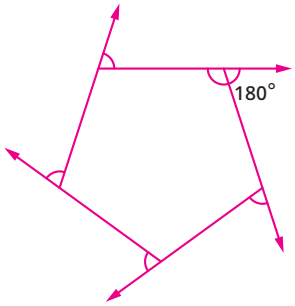
أوجد : $m(\angle D)$

■ لاحظ أن

لأى مضلع محدب توجد زاويتان خارجتان عند كل رأس من رؤوسه كما بالشكل.



هاتان الزاويتان متقابلتان بالرأس، لذلك فهما متساويتان فى القياس.



يمكن استنتاج القاعدة السابقة بملاحظة أنه لأى مضلع محدب عدد أضلاعه يساوى n

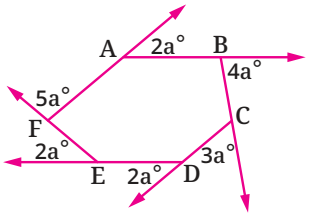
- عند كل رأس يوجد زوج من الزوايا، إحداهما خارجة والأخرى داخلة، مجموع قياسيهما $180°$.
- مجموع قياسات أزواج الزوايا عند كل رؤوس المضلع $= n \times 180°$
- مجموع قياسات الزوايا الخارجة (واحدة عند كل رأس) هو :

$$180° n - (n-2) \times 180° = 180° n - (180° n - 360°) = 360°$$

مثال 3

فى الشكل المقابل :

أوجد : ① قيمة a ② $m(\angle BCD)$



∵ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب $= 360°$

$\therefore 2a° + 4a° + 3a° + 2a° + 2a° + 5a° = 360°$

$\therefore 18a = 360$ $\quad \therefore a = \frac{360}{18} = 20$ (المطلوب ①)

$\therefore$ قياس الزاوية الخارجة عند الرأس $C = 3 \times 20° = 60°$

$\therefore m(\angle BCD) = 180° - 60° = 120°$ (المطلوب ②)

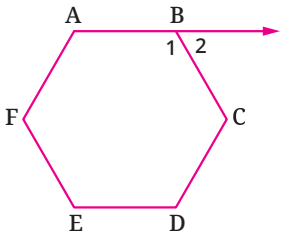
الصيغة الرياضية لقياس زاوية المضلع المنتظم

فى المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه n ضلعًا يكون :

- قياس الزاوية الداخلة $= \frac{(n-2) \times 180°}{n}$
- قياس الزاوية الخارجة عند أحد رؤوسه $= \frac{360°}{n}$

مثال :

الشكل المقابل سداسى منتظم.



- $m(\angle 1) = \frac{(n-2) \times 180°}{n} = \frac{(6-2) \times 180°}{6} = 120°$
- $m(\angle 2) = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$

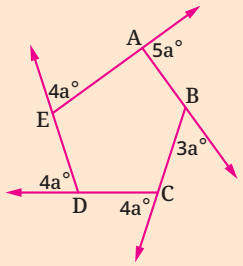
■ فكر وناقش

ناقش صحة العبارة التالية :

مجموع قياسات الزوايا الخارجة (واحدة عند كل رأس) للمضلعين السداسى المحدب، وذى الاثنى عشر ضلعًا المحدب متساويان.

■ تقييم ذاتى ③

فى الشكل التالى :



أوجد : $m(\angle BCD)$

■ تذكر أن

المضلع المنتظم هو مضلع متحقق فيه الخاصيتان :

1. جميع أضلاعه متساوية فى الطول.
2. جميع زواياه الداخلة متساوية فى القياس.

■ فكر وناقش

ناقش صحة العبارتين التاليتين :

1. قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه 9 يساوى $140°$
2. قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الخماسى المنتظم عند أحد رؤوسه $= 108°$

مثال 4

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم فى كل مما يأتى :

1. إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة = 150°
2. إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة = 24°

1) ∵ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الداخلة = 150°

$\therefore \frac{(n-2)\times 180^\circ}{n} = 150^\circ$

$\therefore 180^\circ n - 360^\circ = 150^\circ n$ $\quad\quad$ $\therefore 180^\circ n - 150^\circ n = 360^\circ$

$\therefore 30^\circ n = 360^\circ$ $\quad\quad$ $\therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$

∴ عدد أضلاع المضلع = 12 ضلعًا.

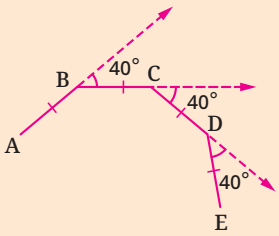
2) ∵ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الخارجة = 24°

$\therefore \frac{360^\circ}{n} = 24^\circ$ $\quad\quad$ $\therefore 24^\circ n = 360^\circ$ $\quad\quad$ $\therefore n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15$

∴ عدد أضلاع المضلع = 15 ضلعًا.

■ **تقييم ذاتى (4)**

فى الشكل التالى :



ما عدد أضلاع المضلع المنتظم عند اكتمال رسمه بنفس النمط ؟

الصيغة الرياضية لعدد أقطار المضلع المحدب

عدد أقطار المضلع المحدب الذى عدد أضلاعه n ضلعًا يساوى $\frac{n(n-3)}{2}$

مثال 5

1. أوجد عدد أقطار المضلع الثمانى المحدب.
2. أوجد عدد أضلاع مضلع محدب عدد أقطاره 35 قطرًا.

1) عدد أقطار المضلع الثمانى المحدب = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2}$ = 20 قطرًا.

2) ∵ عدد الأقطار = 35

$\therefore \frac{n(n-3)}{2} = 35$ $\quad\quad$ $\therefore n(n-3) = 70$

$\therefore n^2 - 3n - 70 = 0$

$\therefore (n+7)(n-10) = 0$

∴ إما $n + 7 = 0$ $\quad\quad$ ومنها $n = -7$ (مرفوض)

أو $n - 10 = 0$ $\quad\quad$ ومنها $\boxed{n = 10}$

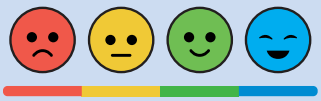
∴ عدد الأضلاع = 10 أضلاع.

■ **تقييم ذاتى (5)**

أوجد كلًا مما يأتى :

1. عدد أقطار المضلع الخماسى المحدب.
2. عدد أضلاع مضلع محدب له 27 قطرًا.

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

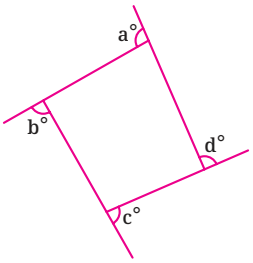
◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(1) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسى المحدب ؟

(أ) 900° (ب) 720°

(جـ) 540° (د) 360°

(2) **فى الشكل المقابل :**

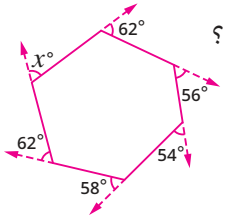


ما قيمة $a + b + c + d$ ؟

(أ) 180 (ب) 360

(جـ) 540 (د) 720

(3) **فى الشكل المقابل :** ما قيمة x ؟



(أ) 58 (ب) 62

(جـ) 68 (د) 72

(4) ما قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم ذى 18 ضلعًا ؟

(أ) 135° (ب) 144°

(جـ) 150° (د) 160°

(5) ما عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة 2340° ؟

(أ) 12 (ب) 13 (جـ) 14 (د) 15

(6) ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة 144° ؟

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 14

(7) ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الخارجة 20° ؟

(أ) 12 (ب) 14 (جـ) 16 (د) 18

(8) ما عدد أقطار المضلع السباعى المحدب ؟

(أ) 7 (ب) 11 (جـ) 13 (د) 14

◂ **اكتشف الخطأ :**

(9) قامت كل من أمل وسمر بإيجاد قياس الزاوية الخارجة لخماسى منتظم، أى منهن حلها صحيح ؟ ولماذا ؟

حل أمل :

$(n - 2)\ 180° = (5 - 2)\ 180°$

$= 3 \times 180° = 540°$

قياس الزاوية الخارجة E

$E = \frac{540°}{5} = 108°$

حل سمر :

يوجد عدد 10 زوايا خارجة للخماسى

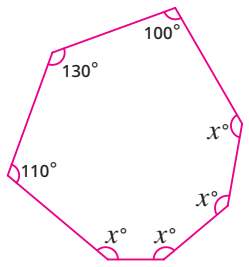
قياس الزاوية الخارجة E

$E = \frac{360°}{10} = 36°$

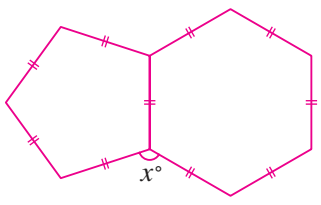
ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ **فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x :**

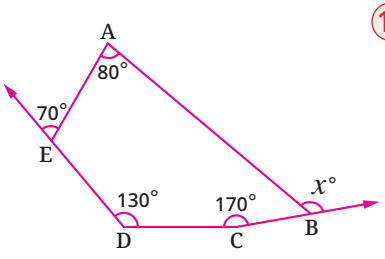
(10)



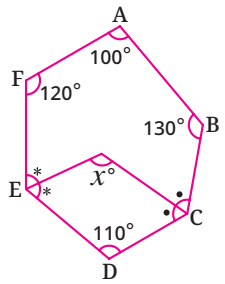
(11)



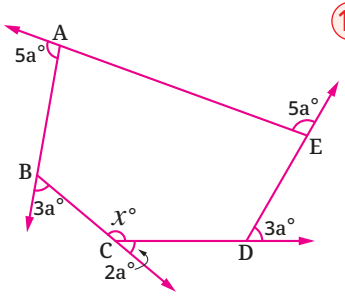
(12)



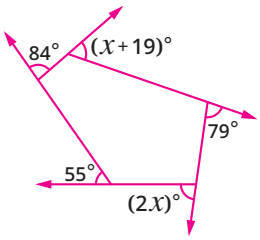
(13)



(14)



(15)



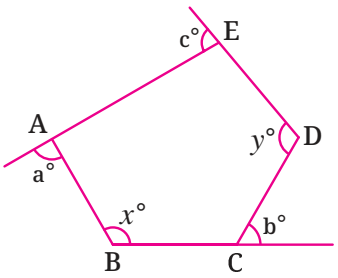
(16) **أوجد كلًا مما يأتى :**

① عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة °2700، وكذلك عدد أقطاره.

② عدد أضلاع المضلع المحدب الذى له 9 أقطار.

③ عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس زاويته الداخلة °156، وكذلك عدد أقطاره.

(17) **فى الشكل المقابل :**



$x + y = 230$

أوجد بالبرهان قيمة : $a + b + c$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(18) **عملات مصرية قديمة:**

أوجد قياس الزاوية الداخلة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين :

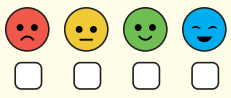
تفكير إبداعى

(19) إذا زاد عدد أضلاع مضلع منتظم ضلعين آخرين، فإن قياس الزاوية الخارجة يقل بمقدار °9.

كم عدد أضلاع المضلع ؟

قيّم فهمك!

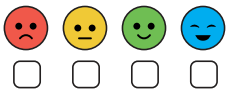
ما مدى فهمك للزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



تقييم الوحدة الثالثة

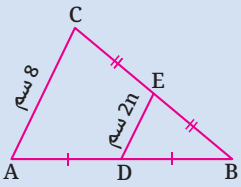
قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الثالثة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل المقابل :

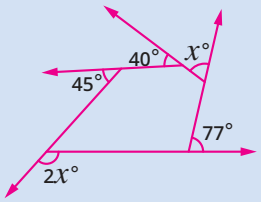


ما قيمة n ؟

(أ) 2 (ب) 4

(جـ) 6 (د) 8

(2) فى الشكل المقابل :

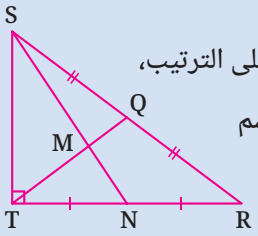


ما قيمة x ؟

(أ) 77 (ب) 45

(جـ) 55 (د) 66

(3) فى الشكل المقابل :



N , Q منتصفا $\overline{TR}$, $\overline{SR}$ على الترتيب،

TR = 12 سم ، ST = 9 سم

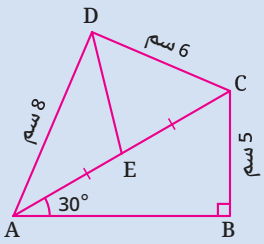
m (∠ STR) = 90°

فما طول $\overline{MT}$ ؟

(أ) 2.5 سم (ب) 5 سم

(جـ) 7.5 سم (د) 15 سم

(4) فى الشكل المقابل :



ما طول $\overline{DE}$ ؟

(أ) 6 سم (ب) 8 سم

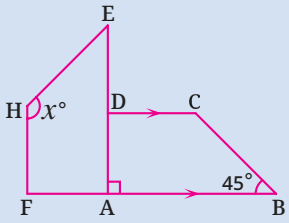
(جـ) 10 سم (د) 5 سم

◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

(5) عدد أضلاع المضلع المحدب الذى له 20 قطرًا هو .....

(6) نوع المثلث الذى أطوال أضلاعه 6 سم ، 7 سم ، 8 سم بالنسبة لزواياه هو .....

(7) فى الشكل المقابل :

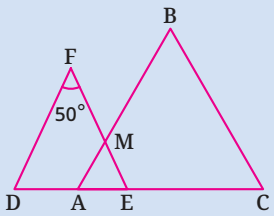


إذا كان المضلع AEHF صورة

المضلع ABCD بدوران ما، فإن :

x = ...

(8) فى الشكل المقابل :



Δ ABC متساوى الأضلاع،

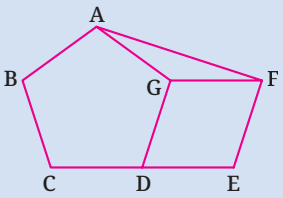
Δ DEF متساوى الساقين فيه :

m (∠ F) = 50° ، FD = FE

فإن : m (∠ AME) = ...

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

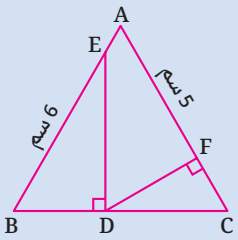
(9) فى الشكل المقابل :



ABCDG خماسى منتظم، GDEF معين

أوجد قياس ∠ FAG

(10) فى الشكل المقابل :



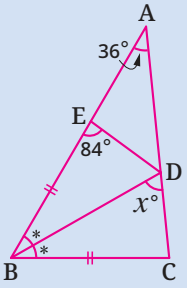
ABC مثلث متساوى الأضلاع

$\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{ED} \perp \overline{BC}$

AF = 5 سم ، BE = 6 سم

أوجد طول $\overline{FC}$ مع البرهان.

(11) فى الشكل المقابل :



BC = BE

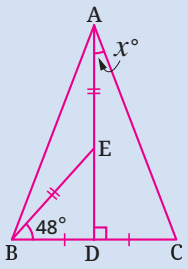
$\overrightarrow{BD}$ ينصف ∠ ABC

① أثبت أن :

Δ BCD ≅ Δ BED

② أوجد قيمة x

(12) فى الشكل المقابل :



BD = CD , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

m (∠ EBD) = 48° , AE = BE

أوجد مع البرهان قيمة x

نشاط الوحدة الثالثة

نظرية فيثاغورس

◂ **الهدف من النشاط :**

إثبات صحة نظرية فيثاغورس عمليًا.

◂ **خطوات النشاط :**

يُتاح عبر موقع Youtube العديد من مقاطع الفيديو التى تثبت صحة نظرية فيثاغورس بطريقة عملية، تعاون مع اثنين من أصدقائك، وحاول القيام بالآتى :

1. ابحث عن الطرق العملية المختلفة لإثبات صحة نظرية فيثاغورس.
2. اختر طريقتين فقط وقارن بينهما من حيث (الأسلوب المتبع - الخامات المستخدمة - مستوى الدقة) أو أى عناصر أخرى للمقارنة يحددها الفريق.
3. اختر إحدى هاتين الطريقتين (الطريقة الأبسط) وحاول تنفيذها بالتعاون مع أقرانك.

الوحدة 4

الإحصاء

دروس الوحدة

4-1 الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا

4-2 مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات

تستخدم خوارزميات تعلم آليات الذكاء الاصطناعى فى أساليب إحصائية مثل تحليل الانحدار والتوزيع الطبيعى لتحليل أداء الطالب واقتراح مسارات تعليمية مناسبة له.

◀ فهل يمكن تطوير خوارزميات آليات الذكاء الاصطناعى لحل المشكلات الإحصائية المعقدة؟

القضايا والمهارات الحياتية		القيـــم	
ـ تكنولوچيا المعلومات	ـ اتخاذ القرار	ـ المسئولية	ـ ترشيد الإنفاق
- التفكير الإبداعى	ـ التنبؤ	- العدل فى التوزيع	- احترام الآخر

الدرس
4 - 1

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا
(Ascending Cumulative Frequency Table and Its Graphical Representation)

■ **نواتج التعلم**

- تكون جدولًا تكراريًا متجمعًا صاعدًا لجدول تكرارى ذى مجموعات.
- ترسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

■ **المفردات**

- جدول تكرارى ذو مجموعات Frequency table with intervals
- جدول تكرارى متجمع صاعد Ascending cumulative frequency table
- منحنى تكرارى متجمع صاعد Ascending cumulative frequency curve

■ **معلومة سابقة**

إذا كانت كمية البيانات كبيرة فيتم تنظيمها فى مجموعات أو فترات متساوية ومنها نكون الجدول التكرارى ذى المجموعات والذى يمكن تمثيله بيانيًا بالمدرج التكرارى.

استعد !

سجلت إدارة إحدى المستشفيات أوقات انتظار 200 من المرضى بالدقائق وذلك لتحسين جدول المواعيد بناءً على الفترات الأكثر ازدحامًا.

أوقات الانتظار (دقيقة)	0 –	10 –	20 –	30 –	40 –
عدد المرضى	30	50	70	40	10

هل يمكنك حساب النسبة المئوية لعدد المرضى الذين انتظروا أقل من نصف ساعة؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تكوين جدول تكرارى متجمع صاعد، والذى سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

إذا كان عدد الصفحات فى 50 كتاب بمكتبة المدرسة هو كالتالى :

57	10	50	44	21	49	61	31	21	48
46	30	11	48	51	48	57	49	31	72
61	28	39	52	24	47	38	20	23	47
69	49	41	31	67	41	17	52	63	19
58	49	37	43	52	22	59	45	31	35

هل تستطيع تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات مستخدمًا الفترات (... , – 30 , – 20 , – 10) ؟

تعلم !

درست فيما سبق كيفية تنظيم البيانات فى مجموعات أو فترات متساوية وكتابتها فى الجدول التكرارى ذى المجموعات،

فمثلًا إذا كان مخطط الساق والأوراق المقابل يوضح درجات طلاب الصف الثانى الإعدادى فى مادة العلوم لعدد 28 طالبًا، فيمكن تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات باستخدام فترات متساوية مثل ... , – 20 , – 10 فيكون الجدول كما يلى :

الدرجات	– 10	– 20	– 30	– 40	– 50
التكرار	2	10	9	5	2

الساق	الأوراق
1	3 8
2	4 4 6 6 7 7 8 8 8 9
3	0 2 4 5 5 5 7 9 9
4	1 4 4 7 8
5	2 5

المفتاح | 0 | 3 تعنى 30 درجة

◂ **يمكن الحصول على بعض المعلومات من الجدول مباشرة مثل :**

- عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمى للفترة]30 , 20] يساوى 10 طلاب.
- عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمى للفترة]50 , 40] يساوى 5 طلاب.

◂ **ولكنك لا تستطيع الحصول على بعض المعلومات الأخرى بطريقة مباشرة من الجدول مثل :**

- عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة.
- عدد الطلاب الذين حصلوا على 20 درجة فأكثر.

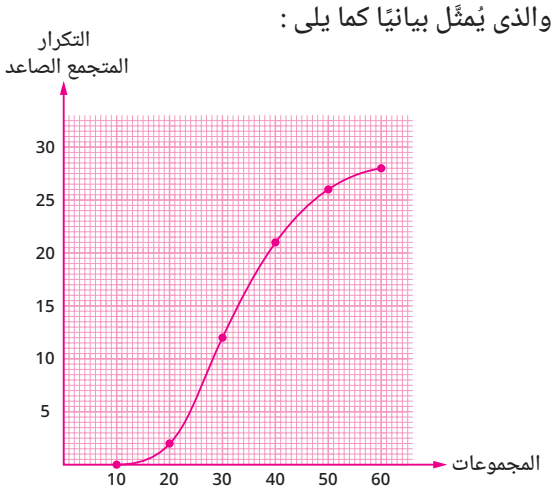
وحتى تستطيع الحصول على هذه المعلومات مباشرة، يجب أن تتعلم كيفية تكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كالتالى :

الدرجات	التكرار	
10 –	2	2 (أقل من 20)
20 –	10	2 + 10 = 12 (أقل من 30)
30 –	9	12 + 9 = 21 (أقل من 40)
40 –	5	21 + 5 = 26 (أقل من 50)
50 –	2	26 + 2 = 28 (أقل من 60)

اكتب هذه البيانات فى جدول كالتالى، والذى يُمثَّل بيانيًا كما يلى :

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 10	0
أقل من 20	2
أقل من 30	12
أقل من 40	21
أقل من 50	26
أقل من 60	28

«الجدول التكرارى المتجمع الصاعد»



«المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد»

■ **لاحظ أن**

لا يوجد طالب درجته أقل من 10 أى أن : التكرار المتجمع الصاعد للطلاب الذين حصلوا على أقل من 10 درجات هو 0

◂ **من الجدول لاحظ أن :**

- عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 30 درجة = 12 طالبًا.
- عدد الطلاب الذين حصلوا على 20 درجة فأكثر يساوى :

العدد (2) مطروحًا من العدد الكلى (28) = 26 طالبًا.

مثال 1

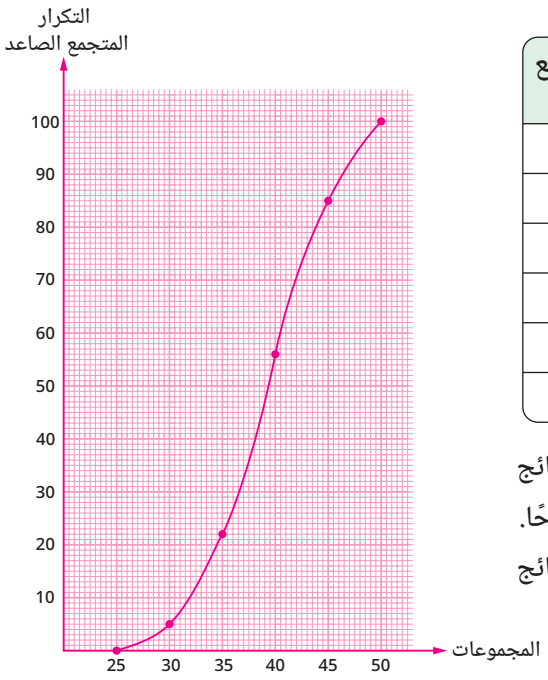
الجدول التكرارى المقابل يوضح أفضل نتائج حققها 100 سباح فى سباق مسافة 50 مترًا.

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا ثم أوجد :

1. عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية.
2. عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35 ثانية أو أكثر.
3. النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية.

الفترات بالثانية	التكرار
25 –	5
30 –	17
35 –	34
40 –	29
45 –	15

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 25	0
أقل من 30	5
أقل من 35	22
أقل من 40	56
أقل من 45	85
أقل من 50	100

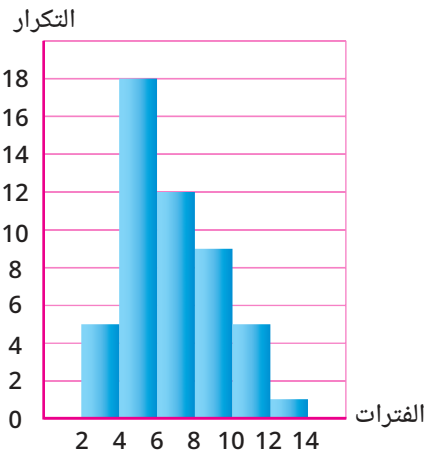


1. عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية هو : 56 سباحًا.
2. عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35 ثانية أو أكثر هو :
$100 - 22 = 78$
3. النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية هى :
$\frac{85}{100} \times 100\% = 85\%$

مثال 2

إذا كان المدرج التكرارى المقابل يوضح كتل 50 قطعة من أحد المنتجات معروضة للبيع عبر الإنترنت.

كون الجدول التكرارى ذى المجموعات والجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.



تقييم ذاتى (1)

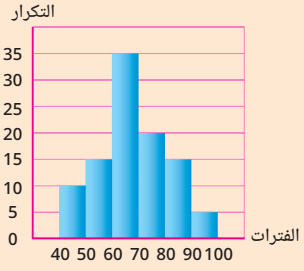
الجدول التالى يوضح كتل 20 صندوقًا بالكيلو جرام.

الفترات (كجم)	التكرار
45 –	2
50 –	3
55 –	3
60 –	6
65 –	4
70 –	2

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا.

تقييم ذاتى (2)

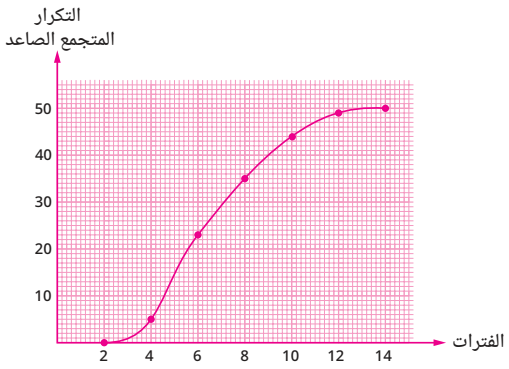
إذا كان المدرج التكرارى التالى يوضح أطوال 100 سمكة تم اصطيادها فى إحدى مسابقات الصيد مقيسة لأقرب سنتيمتر.



كون الجدول التكرارى ذى المجموعات، والجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا.

الفترات	2 –	4 –	6 –	8 –	10 –	12 –
التكرار	5	18	12	9	5	1

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 2	0
أقل من 4	5
أقل من 6	23
أقل من 8	35
أقل من 10	44
أقل من 12	49
أقل من 14	50

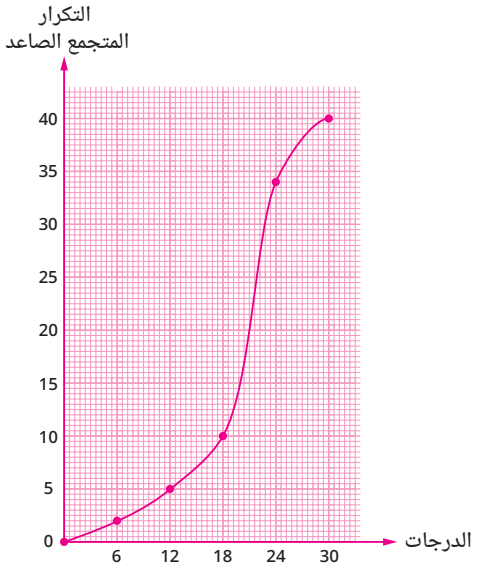


تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

الشـكل المقابل يمثل المنحنى المتجمـع الصاعد لدرجات طلاب فصل مكون من 40 طالبًا فى أحد الامتحانات.



1. ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 12 درجة؟

(أ) 5 (ب) 10

(جـ) 20 (د) 40

2. ما عدد الطلاب الذين حصلوا على 18 درجة أو أكثر؟

(أ) 20 (ب) 30

(جـ) 35 (د) 40

3. ما النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا على أقل من 6 درجات؟

(أ) 5 % (ب) 10 %

(جـ) 15 % (د) 20 %

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(4) قامت إدارة أحد المصانع بدراسة الزمن المستغرق فى وصول العاملين إلى المصنع، وذلك لتحديد أنسب وسائل التنقل؛ حتى تحافظ على أوقات العاملين والعمل.

الفترات (الزمن بالدقيقة)	التكرار (عدد العاملين)
0 –	6
20 –	39
40 –	31
60 –	14
80 –	6
100 –	4

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

(5) الجدول التالى يبين زمن تسليم الطلبات بالثانية لأحد مطاعم الوجبات السريعة.

الفترات (الزمن بالثانية)	التكرار (عدد الوجبات)
75 –	11
120 –	24
165 –	10
210 –	3
255 –	2

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

(6) الجدول التالى يوضح عدد المنازل ذات المساحات المختلفة (مقيسة بالمتر المربع).

الفترات ($م^2$)	100 –	150 –	200 –	250 –	300 –	350 –
التكرار	5	23	27	21	9	5

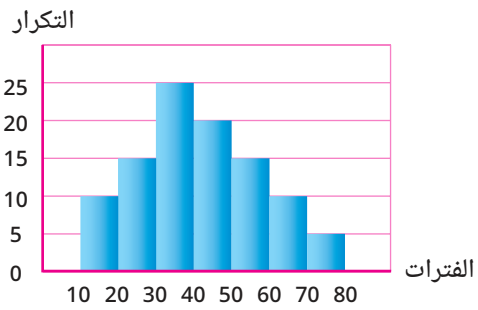
① كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

② أوجد عدد المنازل التى مساحتها أقل من 300 متر مربع.

③ أوجد عدد المنازل التى مساحتها 150 مترًا مربعًا أو أكثر.

④ أوجد النسبة المئوية للمنازل التى مساحتها 250 مترًا مربعًا أو أكثر.

(7) من المدرج التكرارى المقابل كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.



⑧ الجدول المقابل يبين التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد لدرجات 100 طالب بالصف الثانى الإعدادى فى مادة الرياضيات.

① ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 25 درجة؟

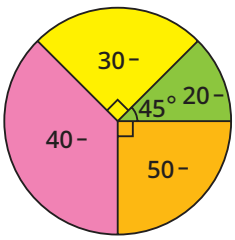
② ما عدد الطلاب الذين حصلوا على 30 درجة أو أكثر؟

③ كون الجدول التكرارى ذى المجموعات.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 5	0
أقل من 10	10
أقل من 15	36
أقل من 20	61
أقل من 25	79
أقل من 30	89
أقل من 35	95
أقل من 40	100

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑨ **سياحة :** يوضح مخطط القطاعات الدائرية المقابل عدد السائحين لمنطقة خان الخليلى فى أحد الأيام حسب أعمارهم بالسنوات (..., 30 – , 20 –) . إذا كان العدد الكلى للسائحين 600 سائح، كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.



⑩ **تسوق :** تم عمل استبيان لعدد 40 شخصًا اشتروا أجهزة لوحية (تابلت)، لمعرفة مقاس شاشة أجهزتهم بالبوصة. يلخص الجدول المقابل نتائج هذا الاستبيان.

المقاس (بوصة)	التكرار
7 –	5
8 –	6
9 –	9
10 –	16
11 –	3
12 –	1

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا، ثم أجب عما يلى :

① كم عدد الأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية :

من 7 إلى أقل من 8 بوصات؟

أقل من 11 بوصة؟

9 بوصات أو أكثر؟

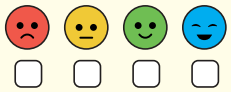
② ما النسبة المئوية للأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية :

من 10 إلى أقل من 11 بوصة؟

أقل من 9 بوصات؟

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا ؟ ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
2 - 4

مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات
(Measurements of Central Tendency of the Frequency Table with Intervals)

■ **نواتج التعلم**

- تقدِّر الوسط الحسابى للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- تقدِّر الوسيط للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- تقدِّر المنوال للجدول التكرارى ذى المجموعات.
- تقرأ وتفسر جداول وأشكالًا بيانية تكرارية لمجتمع ما.

■ **المفـردات**

- الوسط الحسابى Mean ($\bar{x}$)
- المنوال Mode
- الوسيط (Q_2) Median (Second quartile)

■ **معلومة سابقة**

مقاييس النزعة المركزية هى القيم التى تصف مركز تجمع مجموعة من البيانات مثل الوسط الحسابى والوسيط والمنوال حيث :

- الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$
- الوسيط هو القيمة التى تتوسط القيم بعد ترتيبها.
- المنوال هو القيمة الأكثر شيوعًا (تكرارًا).

استعد !

بالنظر إلى أطوال الطلاب فى الجدول التالى :

الطول (سم)	عدد الطلاب
155 –	5
160 –	10
165 –	25
170 –	6
175 –	4

هل يمكنك تقدير متوسط أطوال الطلاب ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية إيجاد مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال) لجدول تكرارى ذى مجموعات؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

ساعات المتابعة	10	12	16
عدد المتابعين	15	17	18

يوضح الجدول التكرارى المقابل عدد الساعات التى يقضيها 50 من الأولاد والبنات فى عطلة نهاية الأسبوع فى متابعة الإنترنت ومواقع التواصل الاجتماعى.

هل يمكنك حساب الوسط الحسابى والوسيط والمنوال لعدد ساعات متابعة الإنترنت ومواقع التواصل الاجتماعى؟ ناقش.

تعلم !

1 الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكنك تقدير الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات باستخدام الصيغة الرياضية التالية :

$$\text{الوسط الحسابى } (\bar{x}) = \frac{\Sigma (f.x_m)}{\Sigma f}$$

حيث Σf هو مجموع التكرارات

x_m هى مركز المجموعة وتساوى $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى لها}}{2}$

$\Sigma(f.x_m)$ هو مجموع حواصل ضرب مركز كل مجموعة x_m فى التكرار المناظر لها f

مثال 1

عند قياس سرعات السيارات المارة على أحد الطرق السريعة، وجدت إدارة المرور البيانات الآتية عند ملاحظة سرعات 100 سيارة فى أحد الأيام.

السرعة (كم/س)	التكرار
80 –	13
90 –	17
100 –	24
110 –	32
120 –	14

قدِّر الوسط الحسابى لسرعات السيارات المارة فى هذا اليوم.

المجموعات (الفترات)	التكرار (f)	مراكز الفترات (x_m)	$f.x_m$
80 –	13	85	1105
90 –	17	95	1615
100 –	24	105	2520
110 –	32	115	3680
120 –	14	125	1750
المجموع	100		10670

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(f.x_m)}{\Sigma f} = \frac{10670}{100} = 106.7$$

∴ الوسط الحسابى لسرعات السيارات = 106.7 كم / س

مثال 2

يوضح الجدول المقابل عدد نقاط أحد فرق الدورى الممتاز فى مباريات كرة السلة، فإذا كان متوسط نقاط الفريق 90 نقطة. أوجد قيمة k

عدد النقاط	التكرار
60 –	1
70 –	5
80 –	k
90 –	10
100 –	6

■ تقييم ذاتى (1)

يوضح الجدول التكرارى التالى أطوال عينة من النباتات فى مشتل.

الفترات (مم)	التكرار
300 –	3
320 –	18
340 –	47
360 –	32
380 –	14
400 –	6

قدِّر الوسط الحسابى لأطوال النباتات.

■ لاحظ أن

أطوال المجموعات متساوية.

فى مثال(1): طول كل مجموعة = 10

∵ المجموعة الأولى (80 – 90)

∴ مركز المجموعة الأولى $= \frac{80+90}{2} = 85$

∵ المجموعة الثانية (90 – 100)

∴ مركز المجموعة الثانية $= \frac{90+100}{2} = 95$

وهكذا ....

∵ المجموعة الأخيرة (120 – 130)

∴ مركز المجموعة الأخيرة $= \frac{120+130}{2} = 125$

ثم تكون الجدول المقابل.

■ تقييم ذاتى (2)

سُجلت أعداد المرضى المترددين على إحدى العيادات فى إحدى المستشفيات خلال عدد من الأيام فكانت كالآتى :

عدد المرضى	التكرار
10 –	16
20 –	15
30 –	m
40 –	10
50 –	3
60 –	2

إذا كان متوسط عدد المرضى خلال اليوم 30 مريضًا، أوجد قيمة m

الفترات	التكرار (f)	مراكز الفترات (x_m)	$f.x_m$
60 –	1	65	65
70 –	5	75	375
80 –	k	85	85 k
90 –	10	95	950
100 –	6	105	630
المجموع	22 + k		2020 + 85 k

$\because \overline{x} = \frac{\Sigma(f.x_m)}{\Sigma f} = \frac{2020 + 85\,k}{22 + k} = 90$

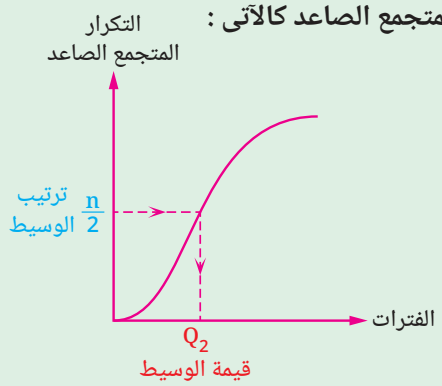
$\therefore 90\,(22 + k) = 2020 + 85\,k$ $\quad \therefore 1980 + 90\,k = 2020 + 85\,k$

$\therefore 90\,k - 85\,k = 2020 - 1980$ $\quad \therefore 5\,k = 40$ $\quad \therefore k = 8$

2 الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكن تقدير الوسيط من المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد كالآتى :

- عيِّن ترتيب الوسيط $(\frac{n}{2})$ حيث n مجموع التكرارات على المحور الرأسى.
- عند ترتيب الوسيط ارسم خطًا أفقيًا يقطع المنحنى المتجمع الصاعد فى نقطة، فتكون قيمة الوسيط (Q_2) هى مسقط هذه النقطة على المحور الأفقى.



مثال 3

من بيانات الجدول التكرارى التالى :

المجموعات	0 –	6 –	12 –	18 –	24 –
التكرار	6	8	12	10	4

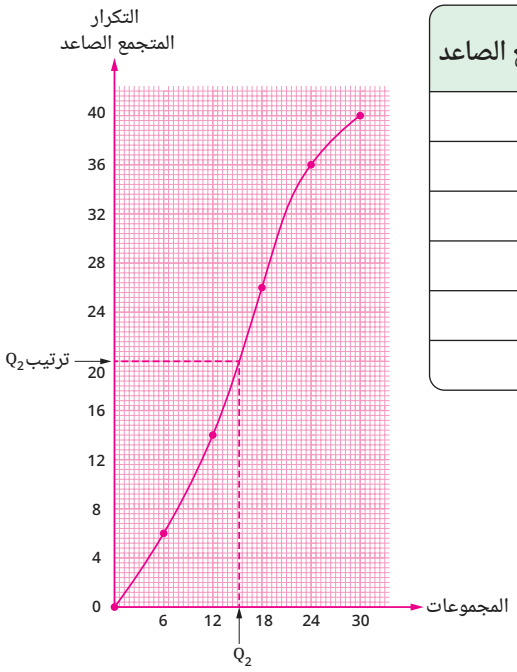
ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

■ تقييم ذاتى (3)

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات 60 طالبًا فى اختبار مادة الرياضيات.

الدرجات	التكرار
5 –	2
10 –	5
15 –	14
20 –	20
25 –	k
30 –	5
35 –	1
المجموع	60

أوجد قيمة k ، ثم ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.



الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

- ترتيب الوسيط $= \frac{40}{2} = 20$
- الوسيط $(Q_2) = 15$

■ لاحظ أن

يمكن إيجاد قيمة الوسيط (Q_2) من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كالآتى :

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

قيمة الوسيط ← Q_2 ← 20 ← ترتيب الوسيط

ترتيب الوسيط $= 20$

$$\therefore \frac{20-14}{26-14} = \frac{Q_2-12}{18-12}$$

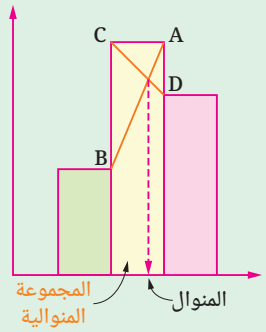
$$\therefore \frac{6}{12} = \frac{Q_2-12}{6}$$

$$\therefore Q_2 - 12 = \frac{6\times6}{12} = 3$$

$$\therefore Q_2 = 3 + 12 = 15$$

3 المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكنك تقدير المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات عن طريق رسم المدرج التكرارى وتحديد المجموعة الأكثر تكرارًا وتسمى المجموعة المنوالية ثم تحديد مسقط نقطة تقاطع $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ على المحور الأفقى وتكون هى القيمة المنوالية.



■ تقييم ذاتى ④

اختيرت ثمانون برتقالة عشوائيًا من قِبَل قسم مراقبة الجودة فى أحد مصانع العصير ، وتم وزن البرتقال، وكانت النتائج كما بالجدول التالى :

الوزن (جرام)	عدد البرتقال
75 –	4
100 –	8
125 –	16
150 –	32
175 –	14
200 –	6

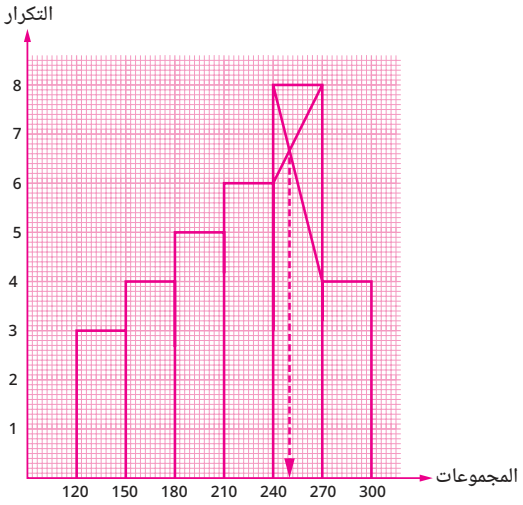
قدِّر المنوال لوزن البرتقالة باستخدام المدرج التكرارى.

مثال 4

توضح مجموعة البيانات الآتية أوقات استخدام الهاتف المحمول (بالدقائق) لثلاثين طالبًا جامعيًا فى أحد الأيام.

الوقت (دقيقة)	120 –	150 –	180 –	210 –	240 –	270 –
عدد الطلاب	3	4	5	6	8	4

قدِّر المنوال لأوقات استخدام المحمول باستخدام المدرج التكرارى.



المنوال ≈ 250 دقيقة

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) ما مركز المجموعة الثانية فى المجموعات :
– 5 ، – 15 ، – 25 ، – 35 ؟

(أ) 5 (ب) 10
(جـ) 15 (د) 20

(2) إذا كان : $\Sigma f = 50$ ، $\Sigma f.x_m = 800$
ما الوسط الحسابى $\overline{x}$ ؟

(أ) 16 (ب) 160
(جـ) 750 (د) 850

(3) إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 18 ومركزها هو 15.5 ، فما الحد الأدنى لهذه المجموعة؟

(أ) 12 (ب) 12.5 (جـ) 13 (د) 13.5

(4) يوضح الجدول التكرارى الآتى درجات 150 طالبًا فى مادة الرياضيات :

الدرجات	– 4	– 12	– 20	– 28	– 36	– 44	– 52	المجموع
التكرار	15	3 k	4 k	32	25	22	14	150

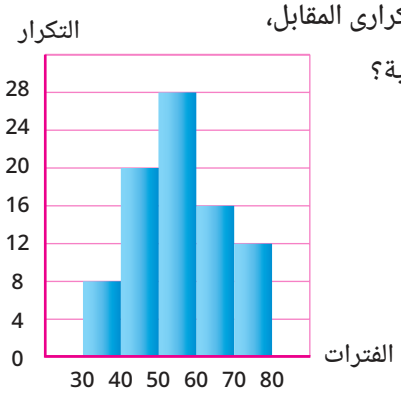
① ما قيمة k ؟
(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

② ما ترتيب الوسيط؟
(أ) 37.5 (ب) 75 (جـ) 112.5 (د) 150

③ ما قيمة الوسيط؟
(أ) 28 (ب) 32.5 (جـ) 34.5 (د) 36

(5) من المدرج التكرارى المقابل،
ما الفترة المنوالية؟

(أ) 30 – 30
(ب) 40 – 40
(جـ) 50 – 50
(د) 70 – 70



(6) يبين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل عدد ساعات العمل الأسبوعية لعدد 40 عاملًا فى أحد المصانع.
ما قيمة الوسيط؟

(أ) 28.75
(ب) 30.25
(جـ) 24.75
(د) 31.25

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 20	0
أقل من 24	2
أقل من 28	7
أقل من 32	23
أقل من 36	35
أقل من 40	38
أقل من 44	40

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(7) يبين الجدول التالى متوسط إنفاق الطالب اليومى داخل مدرسة لعدد خمسين طالبًا فى الصف الثانى الإعدادى.

الإنفاق (بالجنيه)	0 –	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –
التكرار	7	12	15	9	5	2

قدِّر الوسط الحسابى للإنفاق اليومى.

(8) يُظهر الجدول التالى أعمار المعلمين المسجلين فى دورة تدريبية حول سلامة وأمان المنشآت التعليمية.

الأعمار (سنة)	26 –	30 –	34 –	38 –	42 –	46 –
التكرار	4	10	28	35	15	8

ارسم المدرج التكرارى ومنه قدر العمر المنوالى.

(9) يوضح الجدول التالى كتل 40 شخصًا (بالكيلو جرام) لكى ينضموا إلى أحد برامج إنقاص الوزن.

الفترات	70 –	80 –	90 –	100 –	110 –	120 –	130 –
التكرار	2	5	9	12	7	3	2

قدِّر الوسيط بيانيًا.

(10) يبين الجدول الآتى التوزيع التكرارى لدرجات 40 طالبًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	المجموع
التكرار	k	10	$3k$	8	$k+2$	40

أوجد قيمة k ، ثم قدِّر قيمة الوسيط.

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(11) يبين الجدول الآتى استهلاك الكهرباء شهريًا بوحدة كيلو وات ساعة لعدد 100 منزل.

الفترات (ك.و.س)	0 –	100 –	200 –	300 –	400 –	500 –	600 –
عدد المنازل	4	10	28	35	15	6	2

① قدِّر الوسط الحسابى للاستهلاك.
② قدِّر الوسيط.
③ قدِّر المنوال.
④ رتب قيم المقاييس التى حصلت عليها تصاعديًا.

تفكير إبداعى

(12) تم اختبار العمر الافتراضى لبطاريتين من نوعين مختلفين A ، B ثم اختيار خمسين بطارية من كل نوع عشوائيًا واختبارها بنفس الطريقة. ثم سُجلت مدة العمر الافتراضى لكل بطارية بالساعة. تظهر نتائج الاختبارات فى الجدول المقابل.

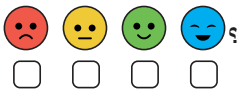
المدة (ساعة)	0 –	5 –	10 –	15 –	20 –	25 –	30 –
تكرار النوع A	3	5	8	10	12	7	5
تكرار النوع B	1	2	10	20	9	4	4

قدِّر الوسيط لمدة العمر الافتراضى لكل نوع وقارن بينهما.

تقييم الوحدة الرابعة

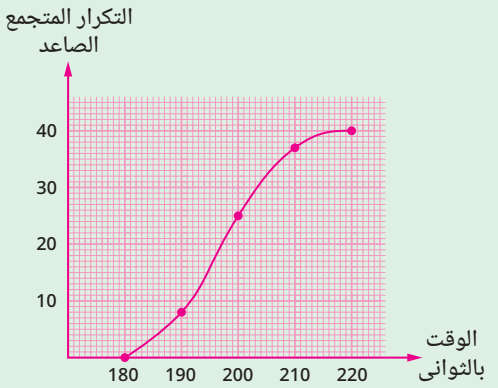
قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الرابعة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) طُلب من 40 طالبًا حل لغز بسيط ، وسُجلت الأوقات التى استغرقوها فى الحل بالثوانى، وعرضت النتائج بيانيًا بالمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد التالى.



ما عدد الطلاب الذين استغرقوا 3.5 دقيقة أو أكثر؟

(أ) 30 (ب) 35

(جـ) 37 (د) 3

(2) من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل.

ما قيمة الوسيط؟

(أ) 154.9

(ب) 155.9

(جـ) 157.9

(د) 160.9

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 142	0
أقل من 148	4
أقل من 154	12
أقل من 160	32
أقل من 166	44
أقل من 172	50

(3) إذا كان الوسط الحسابى $(\bar{x})$ لجدول تكرارى هو 24.5 وكان $\Sigma f.x_m = 980$ ، فما قيمة Σf ؟

(أ) 40 (ب) 50 (جـ) 60 (د) 70

(4) ما مركز المجموعة الثالثة فى المجموعات

$-6 ، -10 ، -14 ، -18 ، \ldots$ ؟

(أ) 12 (ب) 14 (جـ) 16 (د) 18

◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة بالاستعانة بالجدول التكرارى التالى :

الفترات	-2	-6	-10	-14	-18	-22	-26	المجموع
التكرار	k	6	7	11	8	k^2+1	1	40

(5) قيمة k = ...

(6) الوسط الحسابى = ...

(7) ترتيب الوسيط = ...

(8) الوسيط = ...

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) إذا كان الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى هو 36.6 أوجد قيمة كل من x ، k

الدرجات	-10	-20	-30	$-x$	-50
التكرار	12	20	k	30	15

(10) الجدول التالى يوضح كتل 50 طالبًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس

ارسم المدرج التكرارى وأوجد الكتلة المنوالية.

الكتل (كجم)	-30	-35	-40	-45	-50	-55	-60
التكرار	6	10	12	8	6	5	3

(11) من الجدول التكرارى التالى :

الفترات	2 –	6 –	10 –	14 –	18 –	22 –	26 –	المجموع
التكرار	4	6	11	k	14	8	5	60

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا، ومن الرسم قدِّر قيمة الوسيط.

(12) من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل
كون الجدول التكرارى ذى المجموعات،
ثم أوجد الفترة المنوالية.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 10	0
أقل من 15	3
أقل من 20	9
أقل من 25	16
أقل من 30	24
أقل من 35	33
أقل من 40	44
أقل من 45	50

نشاط الوحدة الرابعة

مقاييس النزعة المركزية

الهدف من النشاط :
تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات من بيانات واقعية،
وحساب مقاييس النزعة المركزية لها.

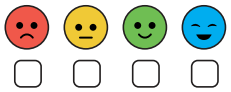
خطوات النشاط :
تعاون مع اثنين من زملائك فى الفصل وحاول القيام بالآتى :

1. اختر أحد المواقف الحياتية التى تمر بها فى (النادى - إحدى الحدائق - السوق - فناء المدرسة)، وقم بجمع عدد من البيانات عن هذا الموقف.
2. نظم تلك البيانات فى جدول تكرارى ذى مجموعات.
3. احسب مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال) من هذا الجدول، مع رسم الأشكال البيانية اللازمة للوسيط والمنوال.

تقييم نهائى

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لموضوعات
الصف الثانى الإعدادى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



المجموعة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) ما المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{2}$ – فى أبسط صورة ؟

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) ما ناتج $\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 2

(3) إذا كان : $x^3+y^3=20$ ، $x^2-xy+y^2=4$ فما قيمة : $2x+2y$ ؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

(4) ما مجموعة حل المعادلة $x^2-4x+3=0$ فى R ؟

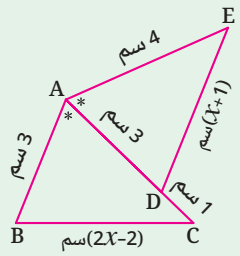
(أ) $\{1,3\}$ (ب) $\{-1,-3\}$ (جـ) $\{1,-3\}$ (د) $\{-1,3\}$

(5) إذا كان : $a+b=2\sqrt{5}$ ، $c-d=\sqrt{5}$ فما قيمة المقدار $ac-ad+bc-bd$ ؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $3\sqrt{5}$ (جـ) 10 (د) 20

(6) فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟



(أ) 1 (ب) 2

(جـ) 3 (د) 4

(7) ما عدد أضلاع المضلع الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة 1980° ؟

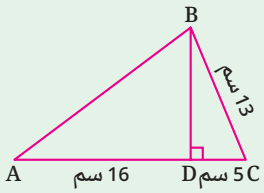
(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 13

(8) إذا كانت بداية المجموعة هى 15 ومركزها 17.5 فما طول المجموعة ؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 20 (د) 25

(9) فى الشكل المقابل :

ما طول $\overline{AB}$ ؟



(أ) 12 سم (ب) 25 سم

(جـ) 20 سم (د) 16 سم

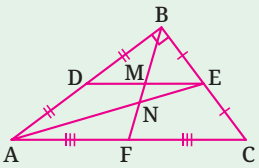
◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كانت $Y = [-2, 5[$ ، $X =]-4, 1]$ فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى :

① $X \cap Y$ ② $X \cup Y$ ③ $Y - X$

② اختصر المقدار $\dfrac{(\sqrt{3})^{2n+3}}{(\sqrt{2})^{1-n} \times (\sqrt{6})^{n-1}}$ لأبسط صورة، ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 0$

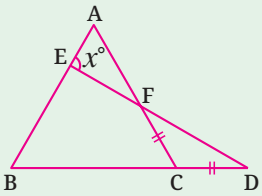
③ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان طول $\overline{DE} = 6$ سم

فأوجد مع البرهان طول $\overline{MN}$

④ **فى الشكل المقابل :**



ABC مثلث متساوى الأضلاع

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$ ، $CF = CD$

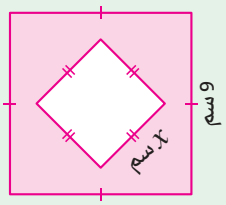
أوجد مع البرهان قيمة x

⑤ **حلل كلًا مما يأتى :**

① $4x^2 - 25$ ② $b^3 - 8$ ③ $4x^2 + 14x - 30$

⑥ عبر عن مساحة الجزء المظلل فى الشكل المقابل

كحاصل ضرب عاملين.



⑦ أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	– 5	– 15	– 25	– 35	المجموع
التكرار	6	8	k	2	20

الرياضيات

للصف الثانى الإعدادى
الفصل الدراسى الأول

2025 - 2026

ألوان الغلاف	وزن الغلاف	ألوان المتن	وزن المتن	المقاس	رقم الكتاب
4 لون	180 جم كوشيه	4 لون	70 جم ورق أبيض	19 × 27 سم	٣٠/٢/١١/٢/٥٥/٢٢٤

شركة الإسراء للطباعة والتغليف

كتاب
الطالب

الرياضيات

للصف الثانى الإعدادى
الفصل الدراسى الأول
2025 - 2026

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى

رؤية 2030 VISION OF EGYPT
GPS للطبع والنشر والتوزيع
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
CACD
Central Administration Of Curriculum Development